SZAKDOLGOZAT

Krivián Marianna

DEBRECEN

2008

DEBRECENI EGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKAI INTÉZET

SZÁMELMÉLET A KÖZÉPISKOLÁBAN

Témavezető:

Dr. Bérczes Attila

Egyetemi Adjunktus

Algebra és Számelmélet Tanszék

Készítette:

Krivián Marianna

informatika tanár-matematika tanár

DEBRECEN

2008

Tartalomjegyzék

„Egy köböt pedig lehetetlen szétbontani két köbre egy negyedik hatványt két negyedik hatványra és általában a négyzet kivételével egy hatványt egy ugyanolyan két hatványra. Erre találtam egy valóban csodálatos bizonyítást, de a lapszél túl keskeny ahhoz, hogy befogadja."

(*Pierre de Fermat)*

1. Bevezetés

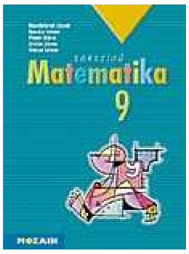
A számelmélet a matematika történetének kezdeteitől művelt, a mai napig sok megválaszolatlan kérdést felvető tudományág. Az alapjainak a tanítása szerepel az általános és középiskolák matematika tantervében is. Már az ókori matematikusok is, mint például Eukleidész, Erathoszthenész is foglalkoztak számelméleti problémákkal. Régészeti leletek bizonyítják, hogy az ember már az őskorban is használt számokat. A különböző számok jelképes jelentést nyertek, így alakult ki a számmisztika.

A Bibliában különösen az Ószövetségben a 7-es szám játszott speciális szerepet, a hindu mitológiában a 10-nek volt jelentősége. Az ókori matematikusok, akik elsősorban a pozitív egész számokkal számoltak, észrevették e számok érdekes tulajdonságait. Kialakultak a négyzetszámok, háromszögszámok, prímszámok és az összetett számok fogalma.

A számokkal való játékból mára az egyik legérdekesebb, és a gyakorlatban is jól használható tudományág fejlődött ki. A mai számelmélet lényegében a számokról és a számolásról szerzett évszázados tapasztalat. A számelmélet bizonyos részei a matematika igen komoly fejezeteivé váltak, mely a gyerekek számára nehéz. Más területi viszont a számokkal való játék során közérthetőek. Ezért sok eleme az alapfokú oktatás anyagába beépíthető.

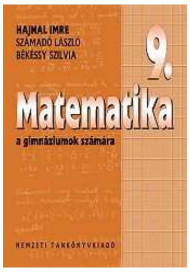
Szakdolgozatomban három, általam választott tankönyv Számelmélet című fejezetét hasonlítom össze azon szempontok szerint, hogy a számelmélet mely területeit érintik, s melyeket nem. A közösen tárgyalt részek miben különböznek, illetve hasonlítanak, s hogy a tankönyvek mennyire felelnek meg az emelt szintű érettségi elvárásainak.

1.1. Választott tankönyvek:



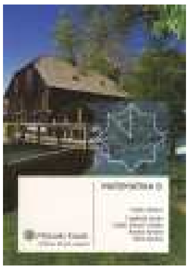
Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István:

Sokszínű Matematika 9. Szeged, 2006, Mozaik Kiadó



Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia:

Matematika 9. Budapest, 2006, Nemzeti Tankönyvkiadó



Hajdu Sándor, Czeglédy István, Hajdu Sándor Zoltán, Kovács András, Róka Sándor:

Matematika 9. Budapest, 2006, Műszaki Kiadó

2. A matematika tantárgy tanítása

2.1. Miért tanítunk matematikát?

Nem könnyű feladat a matematika tanításához útmutatást adni, hiszen ez az a tantárgy, amely elvontságával felülemelkedik minden más tudományon, és ez által az oktatáspolitikák, a tantervek, vizsgaszabályzatok forgószínpadának állandó szereplője marad. A matematika tartalmi változásai alig-alig követték a közoktatás reformtörekvéseit, a követelményeknek legfeljebb csak a „szintje" tolódott le vagy éppen fel, ráadásul azok érvényesülését is nagyon fékezték a szaktanári beidegződések. Ebből következően kérdezhetné bárki, hogy akkor mi szükség van az új tantervre, új tankönyvre, útmutatóra?

Maga a tantárgy tartalma, szerkezete, a tantervi rendszerben betöltött szerepe napjaink változó világában sem veszítette el meghatározó szerepét, ugyanakkor a tanítás célja, módja, eredménye, a tanuló indítékai, motiváltsága, tanulási stratégiája alapvetően megváltozott. Nemcsak a tanköteles korúak és a felnőttek tanulása/tanítása különbözik lényegesen, hanem a „hagyományos" és a mai, holnapi felnőttoktatás résztvevői is más és más metódust igényelnek a pedagógustól, az iskolától. Ugyanaz a tanár, ugyanazzal a módszerrel ma már nem lehet sikeres a felnőttoktatásban, mint egy évtizeddel ezelőtt. Mára már egyértelművé vált az iskola hangsúlyozottan „szolgáltató" jellege, a tanulókért folyó versengés alapjaiban megváltoztatta a tanítási stratégiánkat.

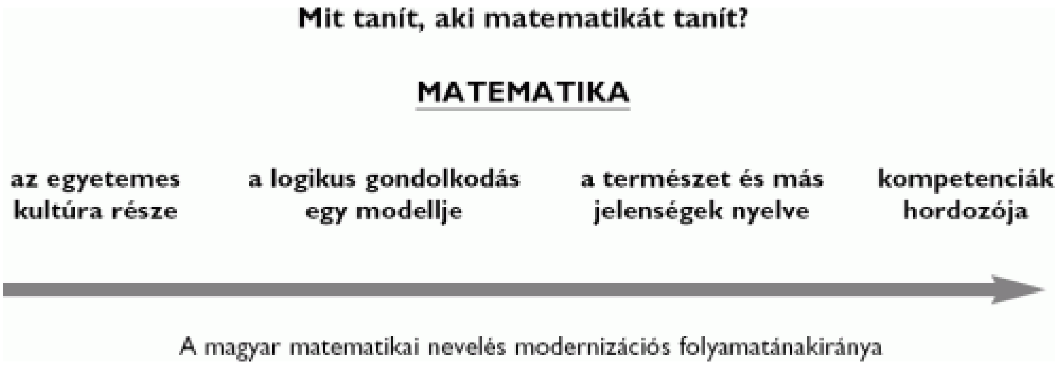
A felnőttkorú tanulók jelentős része már tisztában van azzal, hogy saját érdekük, hogy az iskolában nem csak a bizonyítványt, hanem a gyakorlatban hasznosuló ismereteket, szakmai továbblépésük alapját kell megszerezniük. Ezt kell a tanárnak szem előtt tartania a vizsgára, az értékelésre történő felkészítés közben is. A vizsga, így az érettségi vagy diploma sem végső cél, csak eszköz. Ehhez pedig ismernünk kell, el kell fogadnunk a munka világának kívánalmait. A tantermekben, az oktatás során szem előtt kell tartanunk az információs társadalom, a „multimédia" által előidézett gazdasági és társadalmi változásokat. A pedagógus akkor tölti be hivatását, ha tantárgyán keresztül felkészíti hallgatóit azoknak a kihívásoknak a megválaszolására, amelyek továbbtanulásban és harmonikus társadalmi beilleszkedésben fogalmazódhat meg.

2.2. A matematika tanítás gyakorlata

Napjainkban a matematikai nevelés, a matematikai ismeretek átadásának módszertana a tanulók gondolkodásának fejlesztését tartja legfőbb feladatának. Az órákon sokféle hatékony és tudatos eljárást alkalmaznak a matematikatanárok a tanulók problémamegoldó képességének fejlesztésére. Kutatásokat igényel az, hogy a matematika-tananyagban a gyakorlati, illetve a matematikán belüli problémákat milyen arányban célszerű szerepeltetni ahhoz, hogy a tanulók többségénél optimálisan elősegítse a problémamegoldó képesség fejlődését. Ebből a szempontból fontos tényező a tanulók életkori sajátosságainak és a megszerzett matematikai kompetenciáknak a szerepe a továbbtanulásban, illetve a munkába álláskor.

A kommunikációs kompetencia fejlesztése a matematikaórákon sokféle formában valósul meg. A szövegértés elősegítése, a különböző kommunikációs szintek és eszközök szerepeltetése része a tanításnak, de a tanárok többségének ez a tevékenysége kevéssé tudatos. A tanulásszervezési módok közül a frontális osztálymunka és a tanári magyarázat a leggyakoribb, örvendetes, hogy az egyéni munka és a megbeszélés előfordulása nőtt az évek alatt.

Az *1. ábra* megfogalmazza, hogy az elmúlt közel száz évben mit tarthattunk a matematika és ezzel összefüggésben a matematika tanítása legfőbb jellemzőjének.



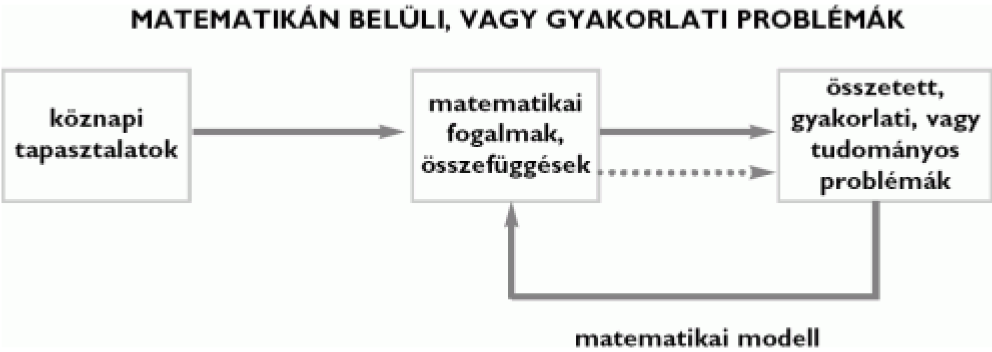
1. **ábra A matematika tanítás jellemzői**

A pedagógus közvéleményben és még inkább a laikus közvéleményben elterjedt nézet, hogy az iskolai tantárgyak közül a matematika az, amelyik leginkább hivatott a tanulók logikus gondolkodását, problémamegoldó készségét fejleszteni. Az kétségtelen, hogy ez a fejlesztési terület a magyar matematikai nevelésben sok jó hagyománnyal és jó gyakorlattal rendelkezik.

2.3. A problémamegoldó képesség fejlesztése a matematika órán

Az elmúlt évtizedek matematikatanítási gyakorlatában az egyik legjelentősebb előrelépés az volt, hogy általánosan elfogadottá vált a matematikát tanító pedagógusok körében az, hogy a matematikai nevelés legfontosabb, vagy egyik legfontosabb feladata a tanulók gondolkodásának, problémamegoldó képességének a fejlesztése. A problémák a mindennapi élet, a matematika, valamelyik másik tantárgy, vagy más tudományok területéről egyaránt származhatnak. A kérdés az, hogy ezt a célt a tanulók többségénél milyen úton lehet a legbiztosabban megközelíteni. A matematikaórákon tárgyalt problémák elsősorban a gyakorlati élettel kapcsolatosak legyenek, vagy inkább matematikán belüli kérdéseket tartalmazzanak.

A köznapi gondolkodás, a matematikai gondolkodás és a matematika felhasználásának állandó kölcsönhatásban levő mozzanatait az alábbi folyamatábra *(2. ábra)* szemlélteti.



2.ábra A köznapi és a matematikai gondolkodás kölcsönhatása

A kérdés tehát az, hogy a problémamegoldó gondolkodás minél hatékonyabb fejlesztése érdekében a fenti séma melyik láncszemére tegye a hangsúlyt a közoktatásban a magyar matematikai nevelés.

Ha a tanulói gondolkodás folyamatának fejlődése irányából elemezzük a kérdést, akkor azt kell hangsúlyozni, hogy a kezdeti szakaszban a pontos matematikai fogalmak kiépülése a tanulók minél több és sokoldalú gyakorlati tapasztalatára, előzetes tudására építve, az ő aktív részvételükkel érhető el. Ennél a korosztálynál a motiválás és a változatos tevékenykedtetés szempontjai is azt kívánják, hogy a matematikaórán megoldott problémák minél inkább kapcsolatban legyenek a tanulók személyes tapasztalataival, a gyakorlati élettel.

A középiskolában azoknak a tanulóknak a matematikai fejlesztését, akik várhatóan nem folytatják tovább matematikai tanulmányaikat, a mindennapi élet szükségleteinek kell meghatározniuk, így az ő esetükben arra van szükség, hogy a problémamegoldó képességüket nagyobb részben a gyakorlati életből vett feladatokkal fejlesszük. Ennek a folyamatnak nagyon lényeges mozzanata a modellalkotási képesség fejlesztése.

A felsőfokú matematikai tanulmányokra készülő középiskolások esetében a matematika igényes alkalmazása a választott pálya szakmai problémáinak megoldásakor kerül majd sorra. Nekik a matematikán belüli problémák megoldásában szerzett készségekre és biztos szaktárgyi ismeretekre van szükségük a felsőfokú tanulmányokban való helytállás szempontjából.

Arra a kérdésre tehát, hogy inkább gyakorlati problémák, vagy inkább matematikán belüli problémák tárgyalására tegye a hangsúlyt a matematika tanítása, minden fontos szempontot tekintetbe vevő választ kutatások, elemzések és a tanítási gyakorlat állandó párbeszédével kaphatjuk meg.

2.4. Matematika és nevelés

A matematika a szigorúan fegyelmezett, mégis rugalmas gondolkodásra, a problémamegoldásra nevel. Világos, kristálytiszta logikát igényel, és azt fejleszti. Kapcsolatos – vagy kapcsolatba hozható – minden hétköznapi tárggyal, jelenséggel. Nem megkerülhető és kiemelendő a tantárgy nevelő funkciója! Ennél a tudománynál hangsúlyozottan igaz, hogy mindenféle, pedagógiai szempontból kimódolt nevelési cél nélkül maga a tantárgy, illetve ismeretanyagának tanulása, a vele való foglalkozás hordozza magában a „nevelődés" szükségszerűségét. Hiszen elfogadható „számszaki" eredmény nem érhető el a gondolkodás fegyelmezettsége, az írás, jegyzetelés, ábrázolás praktikus rendje, a reális és megfellebbezhetetlen döntés folyamatos kényszere nélkül, sőt ennek hiányában már a probléma felismerése, a feladat megfogalmazása, a cél meghatározása sem sikerülhet, legyen szó akár egy elemi szintű gyakorlati feladványról, akár egy nehéz elméleti tételről.

A tantervek követelményrendszere a konkrét ismeretanyag mellett természetesen tartalmazza a gondolkodásra nevelés követelményeit is, a gondolkodási módszerek alapozását. A tanulás folyamatának minden szintjén fontos szerepe van

- a kreativitás,
- a deduktív és az induktív gondolkodás,
- az absztrakció,
- az analógiák használata képességének.

Ebben rejlik a matematika tanításának, tanulásának a szépsége, de ez okozza a nehézségét is. A tanulását tovább nehezíti, hogy sokan személyiségüktől távolinak érzik, és hozzáállásukban ez mutatkozik meg. Éppen ezért a matematika megtanításához vezető optimális utat csak úgy lehet megtalálni, hogy az élő gyakorlat matematikai vonatkozásaiból induljunk ki.

A tanuló számára – minél alacsonyabb évfolyamon, minél csekélyebb előismerettel rendelkezik, annál inkább – a saját egyszerű hétköznapi teendőin, azok megoldásán átvezethet az út az elvont tudományos absztrakció felé. Ugyanakkor más tantárgyak ismeretanyagának feldolgozása is matematikai eszközök használatát igényli, igényelheti, legtöbbször e tény tudatosulása nélkül.

2. 5. Tankönyvek és taneszközök helyzete

A taneszközök helyzetének alakulása az elmúlt évtized iskolaszerkezeti, tantervi változásainak, valamint a taneszközforgalom piacosodásának az elemzéséből vezethető le.

Változatlanul a nyomtatott taneszközöknek – *a tankönyveknek és példatáraknak* – van a legnagyobb szerepük az oktatásban.

Másfél évtizeddel ezelőtt iskolafokozatonként egy, esetleg kétféle tankönyv volt forgalomban. Az első hat- és nyolcosztályos gimnáziumok megjelenésével párhuzamosan elsősorban az ő új igényeiket kielégítendő új matematika-tankönyvek jelentek meg. Ekkor az új tantervi elrendezéseknek megfelelő tananyagtartalom megjelenítése jelentette a legfontosabb szempontot. Különböző módszertani, szemléleti elképzelések húzódtak meg a tankönyvekben, de az újító törekvés mindenütt jelen volt. A NAT elfogadása, majd bevezetése, végül a kerettanterv bevezetése egyre bővítette a matematika-tankönyvek kínálatát.

Mára mind a felső tagozat, mind a középiskola vonatkozásában *bőséges a tankönyvválaszték*. Ez bizonyos határok között kifejezetten örömteli dolog.

Azok a tankönyvek, amelyek érdeklődésre tarthatnak számot, tananyagtartalmukat tekintve megfelelnek a kerettantervi követelményeknek, tartalmazzák a kerettantervi matematika-tananyagot, de a középiskolai tankönyvek legtöbb esetben nem csak azt. Ez elsősorban abból adódik, hogy sok korábbi tankönyv kerettanterv szerinti átdolgozásakor a szerző(k) azt a megoldást választotta, hogy meghagyta a korábbi tartalmat, kiegészítette a kerettantervben újként szereplő részekkel. Így a tankönyvek nem adnak elég támpontot a minimális és a kerettanterven túlmutató követelményszintek megjelenítéséhez. Jó lenne, ha minden tanár megismerné a választékot, kiválasztaná azt a tankönyvsorozatot, tankönyvcsaládot, melynek koncepciójával azonosulni tud, ezáltal hitelesen és meggyőzően tud azok alapján tanítani.

Az 1990-es évek fordulóján az általános iskolák felső tagozatán szinte kizárólag Hajdu Sándor matematika-tankönyveiből tanítottak, s ez csak lassan változik. A Nemzeti Tankönyvkiadó, a Műszaki Kiadó, az Apáczai Kiadó, a Mozaik Oktatási Stúdió, a Konsept-H Kiadó, a Raabe Kiadó és még számtalan kisebb kiadó kínál a felső tagozat számára tankönyveket és/vagy a felső tagozatos matematikatanítását segítő szakanyagokat.

Ma az 5. évfolyamtól indulva egyre többen vásárolják egy nagy tapasztalatú tanárcsoport által készített tankönyvcsalád könyveit, melyekben sikeresen ötvözték a szerzők a hagyományos értékek megjelenítését és a modern elvárásokat, a fejlesztés- és alkalmazás-központú szemlélet megvalósítását.

Sajnos, ma még fontos szempont a tankönyvek kiválasztásában az ár is.

Szükség lenne a tanulók önálló tananyag-feldolgozását inspiráló tankönyvekre, mert törekedni kell(ene) arra, hogy ilyen értelemben is előkészítsük a diákokat az egész életen át tartó tanulásra, fokozatosan kialakítsuk a szakkönyv használatának képességét.

A tankönyvek mellett megjelentek a matematikaoktatásban is egyéb, elsősorban elektronikus oktatási segédeszközök. A kerettanterv célul tűzte ki ezek használatának kiszélesítését, a jelenlegi gyakorlat azonban még csak a kezdeti lépéseket mutatja ezen a területen.

Különböző matematikai oktatóprogramok, interaktív matematikai CD-k vannak forgalomban. Ezekkel kapcsolatban a tanárok informáltsága esetleges, a kevéssé hozzáértők nehezen igazodnak el a kínálatban.

Matematikából is létezik kötelező taneszközlista, az ebben szereplő szemléltetőeszközök beszerzését fokozatosan kell az iskoláknak megoldaniuk

3. Számelmélet a középiskolában

3.1. Tankönyvek összehasonlítása

	Sokszínű Matematika 9 **Mozaik Kiadó, 2006**	**Matematika 9.** **Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006**	**Matematika 9.** **Műszaki Kiadó, 2006**
Betűk használata	✓	✓	✓
Hatványozás	✓		✓
A számok normál alakja	✓	✓	✓
Egész kifejezések (polinomok)	✓		✓
Nevezetes szorzatok	✓	✓	✓
Szorzattá alakítás módszerei	✓	✓	✓
Műveletek algebrai törtekkel	✓	✓	✓
Oszthatóság	✓	✓	✓
Az euklideszi osztás			✓
Prímszámok, összetett számok	✓	✓	✓
Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös	✓	✓	✓
Érdekesebb oszthatósági szabályok (11, 7, 13)	✓(11)		✓
Számrendszerek	✓	✓	✓
Tökéletes, bővelkedő és szűkölködő számok			✓
A számelmélet alaptétele	✓	✓	✓
Az összes osztók száma	✓	✓	✓
Euklideszi algoritmus	✓		✓
Diofantoszi egyenletek			✓
Oszthatósági szabályok különböző számrendszerekben			✓
Négyzetgyök		✓	✓

✓: ’Rendszerező áttekintés az 1-8. osztály anyagából’ című fejezetben szerepel
✓: ’Algebrai kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek’ című fejezetben szerepel
✓: ’Számelmélet, számrendszerek’ című fejezetben szerepel

A fenti táblázatban összehasonlítottam, hogy az egyes tankönyvek a ’Számelmélet’ című fejezet alatt milyen témákat érintenek. Az összehasonlításból látható, hogy melyek azok a témák, amelyek mindhárom tankönyvben megtalálhatók, s melyek azok, amelyekkel csak az egyik, illetve kettő tankönyv foglalkozik.

A táblázatból kiolvasható, hogy az olyan általános témák, mint például a betűk használta, oszthatóság, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, prímszámok, számrendszerek, műveletek algebrai törtekkel, nevezetes szorzatok mindhárom tankönyvben megtalálható. Ezek a középszintű érettségi követelményeinek tesznek eleget. A Műszaki Kiadó által megjelentetett tankönyv új témákkal is foglalkozik, mégpedig olyanokkal, melyek a másik két könyvben még csak említés szintjén sem szerepelnek. Ezek az oszthatósági szabályok különböző számrendszerekben, bővelkedő, szűkölködő illetve tökéletes számok.

Az euklideszi algoritmus nem tartozik az érettségi követelményei közé sem közép szinten, sem emelt szinten, ám az algoritmus megismertetése a tanulókkal nem haszontalan dolog. A Műszaki és a Mozaik Kiadó által megjelentett tankönyvek foglalkoznak az euklideszi algoritmussal. Mindkét tankönyv példákon keresztül ismerteti meg az algoritmus menetét a diákokkal.

A diofantoszi egyenletek fogalma és egyszerűbb feladatok megoldása az emelt szintű érettségi követelményei közé tartozik. Valójában mindhárom tankönyv foglalkozik a témával, de csak a Műszaki Kiadó által megjelentett tankönyv nevezi így nevén. A Sokszínű matematika az ’Egyenletek, egyenlőtlenségek’ című fejezetben foglalkozik egyismeretlenes, kétismeretlenes, …, többismeretlenes elsőfokú egyenletekkel, de nem diofantoszival. A Nemzeti Tankönyvkiadó könyve szintén tanulmányozza a diofantoszi egyenleteket, de nem a ’Számelmélet’, hanem az ’Az egyenletekről’ című fejezetben. S ami emeli a könyv színvonalát az az, hogy a könyvben olvashatunk Diophantosz életéről, munkásságáról. De nemcsak Diophantosz-ról, hanem Descartes-ról, Euler-ról, Püthagorasz-ról és sok más jeles matematikusról is.

Az oszthatósági szabályok különböző számrendszerekben szintén nem érettségi követelmény, így nem is tartozik a kötelező tananyagba. Iskolai óra keretein belül szerintem nem is célszerű megemlíteni, mivel a fő cél az, hogy a közepes és gyengébb tanulók elsősorban a 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számokra vonatkozó oszthatósági szabályokat sajátítsák el, és alkalmazzák helyesen. A 7, 11, 13 számokra vonatkozó szabályokat szakköri illetve fakultációs foglalkozásokon természetesen meg lehet említeni, sőt szükségszerű, hisz versenyfeladatokban előfordulhat.

A három tankönyv közül a Műszaki Kiadó könyve az összes oszthatósági szabállyal foglalkozik, mindegyiket remek példákon keresztül ismerteti meg a tanulókkal. Igazán jó ötlet volt, hogy mindegyik szabály szerepeljen a könyvben, egy helyen. Ezzel alkalmat teremt arra, hogy egy nem jeles tanuló kíváncsiságát is felkeltse, s talán egy-két percre elmerüljön a néha bonyolultnak mondható matematika szépségeiben. A Sokszínű matematika a kötelező szabályokon túl a 11-gyel való oszthatósági szabállyal foglalkozik még. Ezt egy * - gal megjelölt példában teszi, ezzel is érzékeltetve, hogy ez nem tartozik a tananyaghoz. A Nemzeti Tankönyvkiadó könyve csak az érettségi követelményeinek eleget tevő oszthatósági szabályokat említi.

A tökéletes, bővelkedő és szűkölködő számok érdekes témaköre a számelméletnek, de szintén nem tartozik az érettségi követelményei közé. A három tankönyv közül csak a Műszaki Kiadó által megjelentett tankönyvben találkozhatunk e témakörrel.

Összességében az mondható el, hogy mindhárom tankönyv megfelel mind a középszintű, s mind az emelt szintű érettségi követelményeinek. A Sokszínű matematika nemhiába sokszínű, hisz gyönyörű színes ábrákkal teszi a tanulók számára még szebbé a tanulásra fordított időt, s próbálja megszerettetni a diákokkal a matematikát. Igazán élvezet forgatni a könyvet.

A Nemzeti Tankönyvkiadó által megjelentett tankönyv bár nem színes, de benne ugyanúgy megtalálható az összes szabály, tétel és definíció, kiegészítve ábrákkal. A Műszaki Kiadó tankönyve nemcsak egy egyszerű tankönyv. Több olyan témával is foglalkozik, amelyek nem tartoznak az érettségi követelményei közé, de lelkes és tudásra éhes diákok érdeklődési körének eleget tesznek.

Egy pedagógusnak valószínűleg nehéz dönteni, hogy mely tankönyv legyen az, amelyet a diákok megvegyenek és használjanak középiskolai tanulmányaik során.

Szakdolgozatomban nagyrészt e három tankönyv feladatiból és példáiból állítottam össze azt a tudás anyagot, amit a diákoknak a ’Számelmélet’ témakörben elengedhetetlen tudni és alkalmazni az érettségire való felkészülés során és az érettségin.

3.2. Az érettségi követelményei 'Számelmélet' témakörben

Az érettségi követelményeit két szinten határozzák meg:

- Középszinten a mai társadalomban tájékozódni és alkotni tudó ember matematikai ismereteit kell megkövetelni, ami elsősorban a matematikai fogalmak, tételek gyakorlati helyzetekben való ismeretét és alkalmazását jelenti.

- Az emelt szint tartalmazza a középszint követelményeit, de az azonos módon megfogalmazott követelmények körében az emelt szinten nehezebb, több ötletet igénylő feladatok szerepelnek. Az emelt szint követelményei között speciális anyagrészek is találhatók, mivel emelt szinten elsősorban a felsőoktatásban matematikát használó, illetve tanuló diákok felkészítése történik.

Témák	Vizsgaszintek	
	Középszint	***Emelt szint***
Alapműveletek	Tudjon alapműveleteket elvégezni. Ismerje és használja feladatokban az alapműveletek műveleti azonosságait (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás)	
Számelméleti ismeretek	Ismerje, tudja definiálni és alkalmazni az oszthatósági alapfogalmakat (osztó, többszörös, prímszám, összetett szám). Tudjon összetett számokat prímtényezőkre bontani, adott számok legkisebb közös többszörösét, legnagyobb közös osztóját meghatározni. S ezeket szöveges feladatok megoldásában alkalmazni. Ismerje a relatív prímszámok definícióját. Számelmélet alaptételének alkalmazása feladatokban.	Tudja pontosan meghatározni a számelmélet alaptételét. Diofantoszi egyenletek fogalma, egyszerűbbek megoldása.

Témák	Vizsgaszintek	
	Középszint	***Emelt szint***
Oszthatóság	Ismerje a 10 hatványaira, illetve a 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számokra vonatkozó oszthatósági szabályokat. Tudjon egyszerű oszthatósági feladatokat megoldani.	Oszthatósági feladatok
Számrendszerek	Tudja a számokat átírni 10-es alapú számrendszerből 2-es alapú számrendszerbe, és fordítva. Helyiértékes írásmód	Tudja átírni a számokat 10-es alapú számrendszerből n alapú számrendszerbe, és fordítva.

3.3. Osztó, többszörös, oszthatóság

A természetes számok és az oszthatóság tulajdonságainak tudományos igényű tanulmányozása az ókori Görögországban kezdődött. A görög matematika kibontakozása kezdetén azonban a számokat még kavicsokkal szemléltették. A számfogalom így természetesen csak a pozitív számokra korlátozódhatott. Azok a számok alkották a páros számokat, amelyeket egyenlő számú fehér és fekete kavicsokból ki lehetett rakni. A többiek a páratlan számok voltak.

Definíció: Akkor mondhatjuk, hogy egy b természetes szám ***osztója*** egy a természetes számnak, ha van olyan k természetes szám, amelyre $a = b \cdot k$ teljesül. Ebben az esetben b ***többszöröse*** az a-nak. Jelölés: $b \mid a$

Tekintsük a következő osztásokat::

- 9 osztója a 72-nek, mert $72 = 9 \cdot 8 + 0$

  Azaz a maradék 0, illetve van olyan természetes szám, a 8, amelyet 9-cel megszorozva 72-őt kapunk.

  72 többszöröse a 9-nek. Jelölés: $9 \mid 72$

- 6 nem osztója a 32-nek, mert $32 = 6 \cdot 5 + 2$

  Azaz a maradék nem 0. Jelölés: 6 † 32. Nincs olyan természetes szám, amit 6-tal megszorozva 32-t kapnánk.

Vigyázni kell arra, hogy az osztást és az oszthatóságot nem szabad összetéveszteni. Az „osztója" reláció és az „osztás", mint művelet között különbséget teszünk. A 0-val való osztásnak (művelet) nincs értelme, de a 0 osztója a 0-nak, azaz $0 \mid 0$, hiszen van olyan k természetes szám, hogy $0 = 0 \cdot k$ teljesül.

3.3.1. Az oszthatóság tulajdonságai

(1) **$a \mid a$,** hiszen $a \cdot 1 = a$.

Tehát minden természetes szám osztója önmagának.

Így például $9 \mid 9$, $78 \mid 78$.

(2) **Ha $a \mid b$, akkor $a \mid b \cdot c$.**

A feltétel azt jelenti, hogyha a osztója b-nek, akkor a osztója b többszöröseinek is.

Például: $6 \mid 18$, akkor $6 \mid 18 \cdot 3$

(3) **Ha $a \mid b$ és $b \mid c$, akkor $a \mid b + c$.**

Ha egy összeg minden tagja osztható egy számmal, akkor az összeg is osztható ezzel a számmal.

Például: 12 osztható 4-gyel, és 20 is osztható 4-gyel, így 12 + 20 = 32 is osztható 4-gyel.

(4) **Ha $a \mid b + c$ és $a \mid b$, akkor $a \mid c$.**

Tehát ha egy szám osztója egy összegnek és az összeg egyik tagjának, akkor a szám osztója az összeg másik tagjának is.

Például: Ha $9 \mid 81 + 27$, azaz $9 \mid 108$, és $9 \mid 81$, akkor $9 \mid 27$

(5) **Ha $a \mid b$ és $b \mid a$, akkor $a = b$.**

(6) **Ha $a \mid 1$, akkor $a = 1$.**

(7) **Ha $a \mid b$ és $b \mid c$, akkor $a \mid c$.**

Például: $3 \mid 15$ és $15 \mid 90$, akkor ebből következik, hogy $3 \mid 90$.

3.3.2. Oszthatósági szabályok

Általános iskolában konkrét számokkal igazoljuk az oszthatósági szabályokat. Középiskolában a diákok megtanulják általánosan is. Oszthatósági szempontból a pozitív és a negatív számok ugyanúgy viselkednek, ezért az oszthatóság tulajdonságait természetes számokra igazoljuk.

- Egy természetes szám pontosan akkor osztható ***2-vel, 5-tel, 10-zel***, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel, 5-tel, 10-zel.

Minden tízes számrendszerbeli szám felírható 10 hatványainak összegeként, például

$$396\,472 = 3 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 =$$

$$= \underbrace{(3 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7) \cdot 10^1}_{\text{Osztható 10-zel, ezért osztható 2-vel és 5-tel}} \quad + \quad \underbrace{2}_{\text{Az utolsó számjegyet kell vizsgálni}}$$

Tehát egy tízes számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel.

Egy tízes számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye osztható 5-tel.

- Egy természetes szám pontosan akkor osztható ***4-gyel, 25-tel, 100-zal***, ha az utolsó két számjegyéből álló szám osztható 4-gyel, 25-tel, 100-zal.

$$396\,472 = 3 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 =$$

$$= \underbrace{(3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4) \cdot 10^2}_{\text{Osztható 100-zal, ezért osztható 4-gyel és 25-tel}} \quad + \quad \underbrace{72}_{\text{Az utolsó két számjegy által meghatározott számot kell megvizsgálni}}$$

- Egy természetes szám pontosan akkor osztható ***8-cal, 125-tel, 1000-rel***, ha az utolsó három számjegyéből álló szám osztható 8-cal, 125-tel, 1000-rel.

$$396\,472 = 3 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 =$$

$$= \underbrace{(3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 6) \cdot 10^3}_{\text{Osztható 1000-rel, ezért osztható 8-cal és 125-tel}} \quad + \quad \underbrace{472}_{\substack{\text{Az utolsó két számjegy által} \\ \text{meghatározott számot kell megvizsgálni}}}$$

472 = 8 · 59, tehát 396 472 osztható 8-cal, de mivel 472 = 125 · 3 + 97, így 396 472 nem osztható 125-te, ugyanis a maradék nem 0, hanem 97. 396 472 nem osztható 1000-rel, mivel a maradék 472 nem osztható 1000-rel, hisz 472 < 1000.

- Egy természetes szám pontosan akkor osztható ***3-mal, 9-cel***, ha a számjegyek összege osztható 3-mal, 9-cel.

$$396\,472 = 3 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 =$$

$$=(3 \cdot 99999 + 3) + (9 \cdot 9999 + 9) + (6 \cdot 999 + 6) + (4 \cdot 99 + 4) + (7 \cdot 9 + 7) + 2 =$$

$$=(3 \cdot 99999 + 9 \cdot 9999 + 6 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 7 \cdot 9) + (3 + 9 + 6 + 4 + 7 + 2) =$$

$$= \underbrace{9 \cdot (3 \cdot 11111 + 9 \cdot 1111 + 6 \cdot 111 + 4 \cdot 11 + 7)}_{\text{Ez osztható 9-cel, s ezért 3-mal is}} + \underbrace{(3 + 9 + 6 + 4 + 7 + 2)}_{\text{Ezen számjegyek összegét kell megvizsgálni}}$$

Mivel 3 + 9 + 6 + 4 + 7 + 2 = 31, s $3 \nmid 31$ és $9 \nmid 31$, ezért 396 472 nem osztható sem 3-mal, sem 9-cel.

3.3.3. Oszthatósági feladatok

Az érettségi vizsgán közép- és emelt szinten is követelmény oszthatósági feladatok megoldása. Tekintsünk néhány példát oszthatóságra:

a) *Mely n egészekre lesz egész a $\frac{3n+2}{n-5}$ törtalakban adott szám?*

Megoldás:

$\frac{3n+2}{n-5} = \frac{3(n-2)+8}{n-2} = 3+\frac{8}{n-2}$, azaz próbáljuk meg a számlálót olyan összegalakban felírni, hogy az egyik tag osztható legyen a nevezővel.

$3+\frac{8}{n-2}$ akkor egész, ha n - 2 osztója 8-nak. 8-nak az osztói: ± 1; ± 2; ± 4; ± 8.

Azt kell megnézni, hogy n – 2 = 1, n – 2 = -1, stb. mikor teljesül.

Az n lehetséges értékei: -6; -2; 0; 1; 3; 4; 6; 10.

b) *Igazoljuk a következő oszthatóságot: 9 | 10^{33} + 8.*

Megoldás:

A $10^{33} + 8 = 10000\ldots\ldots 008$ számban a jegyek összege 9, ezért a szám osztható 9-cel.

c) *Bizonyítsuk be, hogy 5 | $5324^{2000} - 2371^{3000}$.*

Megoldás:

Nézzük meg a 4-re végződő számok hatványait: $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$… Az veszzük észre, hogy a számok páros kitevő esetén 6-ra, páratlan kitevő esetén 4-re végződnek. Ezek szerint a 5324^{2000} hatvány 6-ra végződik, s így 5-tel osztva 1 maradékot ad.

Ha egy szám utolsó jegye 1, akkor minden hatványa 1-re végződik. Tehát a 2371^{3000} hatvány 5-tel osztva 1 maradékot ad. Mivel mindkét szám 5-tel osztva 1 maradékot ad, ezért különbségük osztható 5-tel.

3.4. Prímszámok, összetett számok

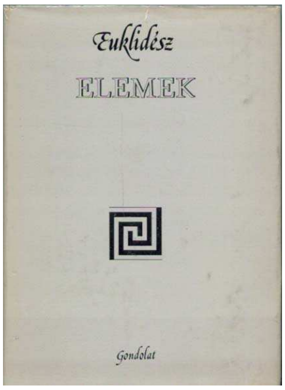
Definíció: ***Prímszámnak*** vagy törzsszámnak nevezzük a természetes számot, ha pontosan két osztója van a természetes számok között. Az 1 és önmaga.
Prímszám például a 2; 3; 5; 7; 11; 13 ;……

Az eddig ismert legnagyobb prímet 2006. szeptemberében fedezte fel Curtis Cooper és Steven Boone, melyet $2^{32\ 582\ 657}$ - 1 alakban írhatjuk fel a legrövidebben, s amely 9 808 358 számjegyű. A ***Mersenne-prímek*** olyan prímszámok, melyek felírhatók $2^p - 1$ alakban. Az első Mersenne-prímek a 3, 7, 31, 127. Összesen 44 Mersenne-prímet ismerünk.

A Mersenne-prímek fontos szerepet játszanak a számelméletben, és segíthetnek feltörhetetlen kódok, üzenetkódolások kialakításában. S ez a terület a kriptográfia, a titkosírás, rejtjelezés tudománya.

Az 1978-ban publikált *RSA-módszer* (a név a fejlesztők nevéből adódik: *Rivest-Shamir-Adleman*) a kis Fermat-tétel egy következményét használja. Egy olyan eljárásról van szó, melynél a kódolás elve nem titkos, sőt az üzenet is nyilvános csatornákon közölhető, ennek ellenére a megfejtés reménytelen. Mind a kódoláshoz, mind a dekódoláshoz sokjegyű, nagy prímek kellenek, s a kívülről való megfejthetetlenség is azon alapszik, hogy a mai körülmények között többszáz jegyű számok prímfelbontása elvégezhetetlen értelmes időn belül.

A Mersenne-prímek kutatása a számelmélet fontos területének számít azóta, hogy Euklidész említést tett róluk Kr. e. 350-ben. A számok Marin Mersenne francia szerzetes (1588-1648) nevét viselik, mivel híres sejtést fogalmazott meg arról, hogy a „p" mely értékeire kaphatunk prímszámot. 300 évbe és rengeteg jelentős matematikai felfedezésbe került, amíg sikerült sejtését bizonyítani.



Az egyik legfontosabb állítás a prímekkel kapcsolatban: ***Végtelen sok prímszám van.***

Ennek az állításnak a bizonyítását Euklidész adta meg *Elemek* című munkájában. Euklidész állítása a következő: a prímszámok darabszáma nagyobb bármely adott (véges) számnál, a bizonyítása pedig a következő:

Tegyük fel, hogy a prímszámok darabszáma véges. Legyen ez a szám m. Szorozzuk össze mind az m darab prímet, majd adjunk hozzá egyet. A kapott szám egyik prímmel sem osztható a halmazunkból, hiszen bármelyikkel osztva egyes maradékot kapunk, az egy pedig egyik prímmel sem osztható. A szorzat tehát vagy maga is prím, vagy osztható egy olyan számmal, ami nincs benne a fenti véges halmazban. Mindkét esetben legalább m + 1 darab prímszám létezik. Így tehát a prímszámok darabszáma nagyobb bármely adott véges halmaznál. Tehát végtelen sok prímszám van.

Definíció: ***Összetett számnak*** nevezzük azt a nullától különböző természetes számot, amelynek kettőnél több természetes szám osztója van.
Összetett szám például: 4; 6; 8; 10; 12; 14; …..

A Műszaki Kiadó által kiadott tankönyv felhívja a tanulók figyelmét arra, hogy a 0 nem prímszám, és nem tekintjük összetett számnak sem. S hogy az 1-nek csak egy osztója van a természetes számok körében, saját maga. Ezért az 1 nem prímszám és nem összetett szám. Pontosan egy páros prímszám van, a 2. Minden további prím páratlan, hiszen ha nem az volna, akkor osztható volna 2-vel, azaz 1-en és önmagán kívül más pozitív osztói is lennének.

A Sokszínű matematika és Nemzeti Tankönyvkiadó által kiadott tankönyvekben is szerepel az, hogy az 1 nem prímszám, s nem is összetett szám, de sajnos indoklás egyik könyvben sem szerepel. A magyarázatot a pedagógusra hagyja, illetve a tanulók önálló gondolkodást célozza meg. De vajon a tanulók elgondolkodnak azon, hogy miért igaz ez az állítás?

A számelmélet alaptétele: Bármely összetett szám felbontható prímszámok szorzatára, a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű módon.

Ezt a tételt általánosan nem bizonyítjuk a középiskolában, hanem egy példa megoldásakor a felbonthatóság bizonyításának gondolatmenetét végigkövetjük.

Példa:

Bontsuk fel a 2700-at prímszámok szorzatára:

2700	2
1350	2
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

Célszerű a legkisebb pozitív prímszámmal, a 2-vel kezdeni az osztások sorát, és fokozatosan haladni a nagyobb számok felé.

A prímtényezős felbontás: $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

Az érettségi vizsgakövetelmény középszinten és emelt szinten is előírja, hogy a tanuló tudja alkalmazni a számelmélet alaptételét feladatokban.

Feladat::

(a) *Vizsgáljuk meg, hogy 2700-nak hány darab pozitív osztója van.*

Megoldás:

Az osztók számának meghatározásában a prímtényezős felbontás segíthet: $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$. Természetes, hogy 2700 osztóinak prímtényezős felbontásában nem lehet más prímszám, mint a 2; 3; 5. A 2700 osztói között van olyan, amelyben mindhárom prímszám szerepel, van olyan, amelyben a három közül csak kettő, van olyan is, amelyben a három közül csak egy, s nyilvánvaló, hogy a 2700 osztója az 1 is. Illetve az is következik a prímtényezős felbontásból, hogy a 2 legfeljebb a második, a 3 legfeljebb a harmadik, az 5 legfeljebb a második hatványon fordulhat elő.

	PRÍMSZÁMOK		
	2	**3**	**5**
KITEVŐ **0**	1	1	1
1	2	3	5
2	2^2	3^2	5^2
3		3^3	

Egy osztó prímtényezős felbontása úgy jön létre, hogy mindhárom oszlopból választunk egy számot, és az így kiválasztott három számot összeszorozzuk. Mivel az első és harmadik oszlopból 3 - 3-féleképpen választhatunk és mindegyik választás esetén a középső oszlopból 4 lehetőségünk van egy hatványt választani, ezért összesen $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ darab osztója van a 2700-nak.

Általánosan:

Ha egy összetett szám prímtényezős felbontása $a = p_1^{r1} \cdot p_2^{r2} \cdot p_3^{r3} \cdot \ldots \cdot p_k^{rk}$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_k$ különböző prímek és $r_1, r_2, \ldots, r_k$ pozitív egész kitevők, akkor az ***a szám osztóinak a száma:*** $(r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (r_k + 1)$.

(b) Határozzuk meg a 2700 páratlan osztóinak a számát.

Megoldás:

Prímtényezős felbontása: $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$. A 2-t nem tartalmazó osztók a $3^3 \cdot 5^2$ osztói közül kerülhetnek ki, s ezek száma $(2 + 1) \cdot (3 + 1) = 12$.

Tehát a 2700-nak 12 darab páratlan osztója van.

3.5. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Definíció: Két vagy több 0-tól különböző természetes szám ***legnagyobb közös osztója*** az adott számok mindegyikének osztója és az összes közös osztójuknak a többszöröse. Az a és b szám legnagyobb közös osztójának jelölése: **(a; b)**

Tekintsük a következő példákat:

(a) Határozzuk meg 225 225 és 349 272 legnagyobb közös osztóját.

Megoldás:

Írjuk fel a két szám prímtényezős alakját.

$225\,225 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $\qquad$ $349\,272 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11$

A közös osztók prímtényezős felbontásában csak a közös prímtényezők, a 3, 7, és a 11 fordulhatnak elő.
A 3 legfeljebb a második hatványon szerepelhet, mert 3-nál nagyobb kitevő esetén már nem lenne osztója a 225 225-nek.
A 7 legfeljebb az első hatványon szerepelhet, mert ennél nagyobb kitevő esetén már nem lenne osztója a 225 225-nek.
A 11 szintén csak első hatványon szerepelhet, mert ennél nagyobb kitevő esetén nem lenne osztója sem a 225 225-nek, sem a 349 272-nek.
A legnagyobb közös osztó prímtényezős alakja: (225 225; 349 272) = $3^2 \cdot 7 \cdot 11 = 693$

Általánosan:

Két vagy több 0-tól különböző szám legnagyobb közös osztóját úgy határozzuk meg, hogy a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk.

(b) Határozzuk meg 26 620, 189 és 385 legnagyobb közös osztóját.

Megoldás:

Írjuk fel a három szám prímtényezős alakját.

$26\,620 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11^3$ $\qquad$ $189 = 3^3 \cdot 7$, $\qquad$ $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$

Nincs olyan közös prímtényező, amely mindhárom szám prímtényezős felbontásában szerepelne, így (26 620; 189; 385) = 1.

Definíció: Az olyan természetes számokat, amelyeknek legnagyobb közös osztója 1, ***relatív prímeknek*** nevezzük.

(c) Írjuk fel az $\frac{1020}{1224}$ ***tört tovább nem egyszerűsíthető alakját.***

Megoldás:

A számláló prímtényezős felbontása: $1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$, a nevező prímtényezős felbontása: $1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$.

Ezek legnagyobb közös osztója: $(1020; 1224) = 2^2 \cdot 3 \cdot 17 = 204$.

Ezzel egyszerűsítve: $\frac{1020}{1224} = \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$

Definíció: Két vagy több 0-tól különböző természetes szám ***legkisebb közös többszöröse*** az adott számok mindegyikének többszöröse és az összes közös többszörösüknek osztója. Az a és b szám legkisebb közös többszörösének jelölése: **[a; b]**

Tekintsük a következő példákat:

(a) Határozzuk meg 972 és 8775 legkisebb közös többszörösét.

Megoldás:

Írjuk fel a két szám prímtényezős alakját.

$972 = 2^2 \cdot 3^5$, $\qquad 8775 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$

A közös többszörösök prímtényezős felbontásában minden előforduló prímtényezőnek szerepelnie kell.

A 2 legalább a második hatványon fordulhat elő, mert 2-nél kisebb kitevő esetén nem lenne többszöröse a 972-nek.

A 3 legalább az 5-dik hatványon fordulhat elő, mert 5-nél kisebb kitevő esetén nem lenne többszöröse a 972-nek.

Az 5 legalább a második hatványon fordulhat elő, mert 2-nél kisebb kitevő esetén nem lenne többszöröse a 8775-nek.

A 13 legalább az első hatványon fordulhat elő, mert 1-nél kisebb kitevő esetén nem lenne többszöröse a 8775-nek.

A legkisebb közös többszörös prímtényezős alakja: $[972; 8775] = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 13 = 315\,900$

Általánosan:

Két vagy több 0-tól különböző természetes szám legkisebb közös többszörösét úgy is meghatározhatjuk, hogy az előforduló különböző prímtényezőket az előforduló legnagyobb hatványon összeszorozzuk.

(b) Számítsuk ki az $\frac{1}{1176}+\frac{1}{720}$ ***összeadást.***

Megoldás:

Közös nevezőnek választhatnánk a két nevező szorzatát, de nagy számok esetén nehéz lenne megtalálni az egyszerűsítés lehetőségeit. Ezért a legkisebb közös nevezőt kell előállítani.

A nevező prímtényezős felbontása: $1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$; $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Ha az összes itt előforduló prímtényezőt (a közösöket a nagyobb hatványon) összeszorozzuk, akkor mindkét szám többszöröse előáll, mégpedig a legkisebb: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 35\,280$.

Az összeadás: $\frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 7^2}+\frac{1}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}=\frac{2\cdot 3\cdot 5+7^2}{2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}=\frac{79}{35280}$

3.6. Euklideszi algoritmus

Az előző fejezetben szerepelt két vagy több egész szám legnagyobb közös osztójának, illetve legkisebb közös többszörösének a meghatározása. Ezek megkereséséhez szükség volt a számok prímtényezős felbontására. Nagy számok esetén azonban ezek megadása hosszadalmas és fáradalmas feladat lenne. Ám Eukleidész kitalált egy módszert két egész szám legnagyobb közös osztójának a meghatározására, melyhez nincs szükség a számok prímtényezős felbontására. Ezt a módszert nevezzük ***euklideszi algoritmusnak***. A módszer egyetlen hátránya, hogy nem alkalmas kettőnél több szám legnagyobb közös osztójának a meghatározására.

Euklidész műve az antik világ egyik legnemesebb alkotása. Élni fog akkor is, amikor már az összes mai tankönyv elavult és elfelejtett lesz.

(Sir Thomas L. Heath)

Bár az Euklideszi algoritmus ismerete sem a középszintű, sem az emelt szintű érettségi vizsgán nem követelmény, a diákoknak megmutatható az algoritmus menete, hisz ha az érettségin nem is, de egy felvételin találkozhatnak olyan nagy számokkal, melyek legnagyobb közös osztójának a meghatározásában segítségükre lehet az algoritmus ismerete.

Tétel: Bármely a, b természetes számhoz ($b \neq 0$) található olyan egyértelműen meghatározott q, r természetes szám, melyre $a = b \cdot q + r$, ahol $0 \leq r \leq b$ teljesül. A q számot hányadosnak az r-t maradéknak, s az ilyen osztást ***maradékos osztásnak***, vagy ***euklideszi osztásnak*** nevezzük.

Példa:

Vizsgáljuk meg, hogy 17 osztója-e 946-nak.

Megoldás:

$946 = 17 \cdot 55 + 11$, azaz 55 a hányados, 11 a maradék. Tehát 17 nem osztója a 946-nak, mert a maradék nem 0.

$946 : 17 = 55 \leftarrow$ hányados

$11 \leftarrow$ maradék

Érdemes megfigyelni, hogy a maradék kisebb az osztónál. (11 < 17)

3.6.1. Euklideszi algoritmus alkalmazása

Példa:

(a) Határozzuk meg 504 és 372 legnagyobb közös osztóját.

Megoldás:

Ha ezt prímtényezős felbontással végezzük el, akkor azt kapjuk, hogy

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, $372 = 2^2 \cdot 3 \cdot 31$, s így $\boldsymbol{(504; 372) = 2^2 \cdot 3 = 12}$

Euklideszi algoritmussal a következőképpen tudom meghatározni a két szám legnagyobb közös osztóját:

(1) $504 : 372 = 1$ $504 = 372 \cdot 1 + 132$

132

(2) $372 : 132 = 2$ $372 = 132 \cdot 2 + 108$

108

(3) $132 : 108 = 1$ $132 = 108 \cdot 1 + 24$

24

(4) $108 : 24 = 4$ $108 = 24 \cdot 4 + \boxed{12}$

12

(5) $24 : 12 = 2$ $24 = 12 \cdot 2 + 0$

0

Azt állítom tehát, hogy 504 és 372 legnagyobb közös osztója 12, mert osztója mindkét számnak, s mindkét szám közös osztóinak többszöröse.

Az (5) sorból látszik, hogy $12 \mid 24$, a (4) sorból látszik, hogy $12 \mid 12$ és $24 \mid 108$, s ebből az is következik, hogy $12 \mid 24 + 108$ teljesül az oszthatósági szabályok (4) pontja alapján.

A (3) sorból látszik, hogy 24 | 24 és 108 | 132, s ebből az is következik, hogy 12 | 24 + 108. Mivel az (5) sorban láttuk, hogy 12 | 24 és a (4) sorban láttuk azt, hogy 24 | 108, de ebből az is következik, hogy 12 | 108.

Ezt a gondolatmenetet végig vezetve kapjuk azt, hogy 12 | 132 és 12 | 372, így 12|132 + 372 is teljesül. A 12 osztója mindkét számnak, tehát a két szám közös osztója.

Az euklideszi osztásnak az előző példában bemutatott szabály szerint történő egymás utáni végrehajtását euklideszi algoritmusnak nevezzük.

Tétel: Két számon végrehajtott euklideszi algoritmus ***utolsó nem 0 maradéka*** a két szám legnagyobb közös osztója.

(b) Számítsuk ki 1176 és 605 legnagyobb közös osztóját.

Megoldás:

$1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$; $605 = 5 \cdot 11^2$, s így azt kapjuk, hogy ***(1176; 605) = 1***, mivel nincs olyan közös prímtényező, amely mindkét szám prímtényezős felbontásában szerepelne. Tehát 1176 és a 605 egymáshoz relatív prímek, azaz nincs közös osztójuk.

◊ Euklideszi algoritmussal:

(1) $1176 = 605 \cdot 1 + 571$

(2) $605 = 571 \cdot 1 + 34$

(3) $571 = 34 \cdot 16 + 27$

(4) $34 = 27 \cdot 1 + 7$

(5) $27 = 7 \cdot 3 + 6$

(6) $7 = 6 \cdot 1 + \boxed{\mathbf{1}}$

(7) $1 = 1 \cdot 1 + 0$

Az utolsó nem 0 maradék 1. Tehát ebből szintén az következik, mint a prímtényezős felbontással történő megoldás során, hogy (1176; 605) = 1

3.7. Diofantoszi egyenletek

A diofantoszi egyenletek fogalma, és egyszerűbb egyenletek megoldása az emelt szintű érettségi követelményei közé tartozik. Nevét Diophantoszról, a 3. században élt görög matematikusról kapta. Diophantosz az ókori görög matematika utolsó nagy képviselőjeként korának híres problémamegoldója volt. Az olyan feladványokat kedvelte, amelyek megoldása egész szám, ezért az ilyeneket mindmáig diofantikus problémáknak nevezik.

Diophantosz (Kr. u. 250 körül) görög matematikus volt, életéről szinte semmi biztosat nem lehet tudni. Feltevés szerint babilóniai származású volt. Alexandriában élt. Fennmaradt ugyan egy sírfelirat, amely lehetséges, hogy az övé. Ebben találunk pár adatot életére nézve, és azt is megtudhatjuk ebből, hány évig élt.

A görög matematikusok közül az egyenletekkel való foglalkozásban ő volt az egyik legkiemelkedőbb. Fő műve az ***Arithmetica***, amely eredetileg 13 könyvből állt, de "csak" 6 élte túl a történelem viharait. A többi kötet vélhetően az alexandriai könyvtár pusztulása idején Julius Ceasar és Kleopatra harcainak következtében semmisült meg. A megmaradt 6 kötetben 189 feladat és azok megoldásai szerepelnek.

Diophantosz szakítva a görög geometrikus hagyományokkal, szinte kizárólag számelméleti és algebrai feladatokkal foglalkozott. Részletesen foglalkozott többek között a pitagoraszi számhármasokkal is. Ezekben a művekben több olyan megoldást is olvashatunk, amelyek már Mezopotámiában is ismertek voltak. Diophantosz azonban több újítást vezetett be. A korábbi, szavakkal körülményesen leírt módszer helyett bevezette az algebrai jelölést az ismeretlenre, a reciprok értékre, a kivonásra. Őt tekintjük az *algebrai jelrendszer megalapozójának*. Az általa használt jelölések a maiakhoz képest kezdetlegesek, de akkor ez komoly előrelépésnek számított. Később ezt fejlesztette tovább a francia Viete.

Definíció: Az olyan egyenletet nevezzük ***diofantoszi egyenletnek***, amelyben az ismeretlenek együtthatói egész számok, és az egyenlet alaphalmaza is az egész számok halmaza.

Példa:

1. ***Mi lehet az a szám, amelynél 13-mal nagyobb szám egyenlő a szám háromszorosánál 1-gyel kisebb számmal?***

Megoldás:

Ennek a számnak a keresése az alábbi egyenlethez vezet:

$$x + 13 = 3 \cdot x - 1$$

Ebben az egyenletben *x* jelenti a keresett számot. Feltételezzük, hogy ilyen létezik. Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$14 = 2 \cdot x$, s ebből következik, hogy $\boldsymbol{x = 7}$.

Definíció: Az $\boldsymbol{a \cdot x = b}$ egyenletet, ahol a; b ∈ Z, és az alaphalmaz is a Z, ***elsőfokú lineáris diofantoszi egyenletnek*** nevezzük.

Tétel: Az $a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ diofantoszi egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha $a \mid b$.

2. ***Egy apa kétszer annyi idős, mint a fia. Tíz évvel ezelőtt háromszor annyi idős volt, mint a fia. Hány éves most az apa és fia?***

Megoldás:

Ha a fiú most *x* éves, akkor az apa $2 \cdot x$. Tíz évvel ezelőtt a fiú $x - 10$, az apa $2 \cdot x - 10$ éves volt. Az apa ekkor háromszor annyi idős volt, mint a fia, tehát : $3\,(x - 10) = 2 \cdot x - 10$.

Az egyenlet megoldása:

$$3 \cdot x - 30 = 2 \cdot x - 10,$$

$$x = 20.$$

Tehát a fiú most 20 éves, ugyanakkor az apja 40 éves. 10 évvel ezelőtti koruk pedig 10, illetve 30 év, azaz az apa valóban háromszor annyi idős volt, mint a fia.

(3) Egy szállodában 100 ágy van 3 és 4 ágyas szobákban. Hány 3 ágyas és hány 4 ágyas szoba lehet a szállodában?

Megoldás:

x darab 3 ágyas, és y darab 4 ágyas szobánk van. A szöveg alapján felírható egyenlet:

$$3 \cdot x + 4 \cdot y = 100$$

Ebben az egyenletben az együtthatók és az összeg is egész szám. Egész számok lesznek a megoldások is, hiszen az x és y a szobák számát jelentik.

A megoldás menete:

$$3 \cdot x + 4 \cdot y = 100$$

(a) Fejezzük ki az egyik változót a másik segítségével:

$$x = \frac{100 - 4 \cdot y}{3}$$

(b) Alakítsuk át a számlálót:

$$x = \frac{99 - 3 \cdot y + 1 - y}{3}$$

(c) Írjuk át más alakba:

$$x = \frac{99 - 3 \cdot y}{3} + \frac{1 - y}{3}$$

(d) Végezzük el a lehetséges átalakításokat:

$$x = 33 - y + \frac{1 - y}{3}$$

Az x csak akkor lehet egész, ha $\frac{1 - y}{3}$ is egész szám. *(folytatás a következő oldalon)*

$\frac{1-y}{3}$ egész szám, ha $y = 1$, mert $\frac{1-1}{3} = 0$;

$y = 4$, mert $\frac{1-4}{3} = -1$;

$y = 7$, mert $\frac{1-7}{3} = -2$; stb.

Vizsgáljuk meg a lehetséges y-okhoz tartozó x-eket:

$y_1 = 1$,	akkor	$x_1 = 33 - 1 + 0 = 32$;	(32; 1)
$y_2 = 4$,	akkor	$x_2 = 33 - 4 - 1 = 28$;	(28; 4)
$y_3 = 7$,	akkor	$x_3 = 33 - 7 - 2 = 24$;	(24; 7)
$y_4 = 10$,	akkor	$x_4 = 33 - 10 - 3 = 20$;	(20; 10)
$y_5 = 13$,	akkor	$x_5 = 33 - 13 - 4 = 16$;	(16; 13)
$y_6 = 16$,	akkor	$x_6 = 33 - 16 - 5 = 12$;	(12; 16)
$y_7 = 19$,	akkor	$x_7 = 33 - 19 - 6 = 8$;	(8; 19)
$y_8 = 22$,	akkor	$x_8 = 33 - 22 - 7 = 4$;	(4; 22)
$y_9 = 25$,	akkor	$x_9 = 33 - 25 - 8 = 0$;	(0; 25)
$y_{10} = 28$,	akkor	$x_{10} = 33 - 28 - 9 = -4$;	(-4; 28)

Mivel $x_{10} = -4$ a feladatnak nem lehet megoldása, így csak kilenc számpár elégítené ki az egyenletet. De $x_9 = 0$ sem lehet, mivel a feladat szövege úgy szól, hogy egy szállodában 100 ágy van 3 és 4 ágyas szobákban. Tehát legalább egy 3 ágyas szobának lenni-e kell. Így összesen nyolc számpár elégíti ki az egyenletet.

Definíció: Az $\boldsymbol{a \cdot x + b \cdot y = c}$ egyenlet, ahol a, b, c $\in$ Z és az alaphalmaz az egész számpárok halmaza, ***kétismeretlenes elsőfokú diofantoszi egyenletnek*** nevezzük.

3.8. Számrendszerek

Az őskorban a számok leírására jeleket használtak. Ahol nagy számokra volt szükség, ott újabb jeleket vezettek be. A fejlett ókori társadalmakban a nagy számok leírása mellett az azokkal végzett műveletek is szükségessé váltak. A számokat csoportosították, és egy–egy csoportra vezettek be újabb jeleket. Attól függően, hogy hány számból képezünk újabb csoportokat, különböző számrendszerekről beszélünk.

Az ötös számrendszer még ma is él egyes dél-amerikai indián törzseknél. Így számolnak: egy, kettő, három, négy, kéz, kéz és egy, kéz és kettő, stb.

A hatos számrendszer egyes északnyugati-afrikai törzseknél használatos, keverve a tizenkettes számrendszerrel. Ez utóbbira utaló jelek az európai kultúrákban is felfedezhetők. Elég, ha az év hónapjaira vagy az óra beosztására gondolunk.

A húszas számrendszert a maják és a kelták használták. Mexikóban és Közép-Amerikában még ma is használják a csillagászatban.

A babiloniak hatvanas számrendszerben számoltak, innen ered az óra 60 perce, a perc 60 másodperce és a szögmérésünk rendszere.

A római számírás jegyei az ötös és tízes számrendszer keveredését mutatják. Ezeket a jeleket Európában évszázadokig használták, bár velük a műveletek elvégzése meglehetősen komplikált.

A számlálás legegyszerűbb eszköze a kéz az ujjakkal, ez a magyarázata annak, hogy a tízes számrendszer vált legtágabb körben használhatóvá.

Az ókori hindu kultúrában találjuk a helyi értékes számírás első jeleit. A helyi értékes számírás a tízes számrendszerben az arab tudósok közvetítésével terjedt el Európában, és csak hosszú évszázadok alatt szorította ki a római számok használatát. Jelentős újítás volt a 0 helypótló számként való bevezetése. Más ókori kultúrákban ugyanis a 0-t nem tekintették számnak, nem is megfelelő jele.

A számrendszer alapszáma meghatározza a felhasználható számjegyek számát. Például az ötös számrendszerben csak a 0; 1; 2; 3; 4 jegyek fordulhatnak elő.

A középszintű érettségi követelményei közé tartozik, hogy a tanuló tudja átríni a számot 10-es alapú számrendszerből 2-es alapú számrendszerbe, és fordítva.

Tekintsünk ezekre néhány példát:

(a) ***Írjuk át a 10-es számrendszerben megadott 125-t 2-es számrendszerbe.***

Megoldás:

A 2-es számrendszerben történő felírás azt jelenti, hogy a számból 2-es, $2 \cdot 2$-es, $2 \cdot 2 \cdot 2$-es stb. csoportokat képezünk.

$125 : 2 = 62$ Tehát 62 darab 2-es csoport képezhető, és a ***maradék 1***.

1

A 62 darab 2-es csoportot ismét rendezzük 2-es csoportokba:

$62 : 2 = 31$ Így 31 darab $2 \cdot 2$-es csoport képezhető, és a ***maradék 0***.

0

$$125 = 31 \cdot (2 \cdot 2) + 0 \cdot 2 + 1$$

A 31 darab $2 \cdot 2$-es csoportot ismét rendezzük át 2-es csoportokba:

$31 : 2 = 15$ 15 darab $2 \cdot 2 \cdot 2$-es csoport képezhető, és a ***maradék 1***.

1

$$125 = 15 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2) + 0 \cdot 2 + 1$$

A 15 darab $2 \cdot 2 \cdot 2$-es csoportot rendezzük át 2-es csoportokba:

$15 : 2 = 7$ Tehát 7 darab $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$-es csoport képezhető, és a ***maradék 1***.

1

$$125 = 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2) + 0 \cdot 2 + 1$$

A 7 darab $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$-es csoportot rendezzük 2-es csoportokba:

$7 : 2 = 3$ 3 darab $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$-es csoport képezhető, a ***maradék 1***.

1

$$125 = 3 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2) + 0 \cdot 2 + 1$$

A 3 darab $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$-es csoportot rendezzük 2-es csoportokba:

$3 : 2 = 1$ 1 darab $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$-es csoport képezhető, a ***maradék 1***.

1

$$125 = 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2) + 0 \cdot 2 + 1$$

Írjuk fel 2 hatványainak a segítségével a számot:

$$125 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$$

125 tízes számrendszerbeli szám 2-es számrendszerbeli alakja 1111101, melyet írhatunk $1111101_{(2)}$ alakban is.

(b) Írjuk át tízes számrendszerbe az $10011101_{(2)}$ számot.

Megoldás:

Helyezzük el a számot 2-es helyiérték táblázatban:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	1	1	1	0	1

Így $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^7 = 1 + 4 + 8 + 16 + 128 = 157$

Tehát a 2-es számrendszerben felírt 10011101 szám tízes számrendszerben 157.

Az emelt színtű érettségi vizsga további követelményei közé tartozik még az is, hogy a tanuló tudja átírni a számokat 10-es alapú számrendszerből n alapú számrendszerbe, és fordítva.

Tekintsük ezekre néhány példát:

(c) Hogyan írható fel 6-os számrendszerben a 3411?

Megoldás:

Képezzünk 6-os csoportokat, azaz osszuk el a 3411-et:

3411 : 6 = 568 — 568 darab 6-os csoport képezhető, és a ***maradék 3***.

3

$$3411 = 568 \cdot 6 + 3$$

Az 568 6-os csoportot rendezzük 6-os csoportokba:

568 : 6 = 94 — 94 darab 6 · 6-os csoport képezhető, és a ***maradék 4***.

4

$$3411 = 94 \cdot (6 \cdot 6) + 4 \cdot 6 + 3$$

A 94 darab 6 · 6-os csoportból képezzünk 6-os csoportokat:

94 : 6 = 15 — 15 darab 6 · 6 · 6-os csoport képezhető, és a ***maradék 4***.

4

$$3411 = 15 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) + 4 \cdot (6 \cdot 6) + 4 \cdot 6 + 3$$

A 15 darab 6 · 6 · 6-os csoportból képezzünk újabb 6-os csoportokat:

15 : 6 = 2 — 2 darab 6 · 6 · 6 · 6-os csoport képezhető, és a ***maradék 3.***

3

$$3411 = 2 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) + 3 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) + 4 \cdot (6 \cdot 6) + 4 \cdot 6 + 3$$

A 2 darab 6 · 6 · 6 · 6-os csoportból alkossunk újabb 6-os csoportot:

2 : 6 = 0 Nem képezhető újabb 6-os csoport, a ***maradék 2***.

2

$$3411 = 2 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) + 3 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) + 4 \cdot (6 \cdot 6) + 4 \cdot 6 + 3$$

Azaz $3411 = 23443_{(6)}$

3.8.1. Műveletvégzés nem tízes alapú számrendszerekben

A tízes számrendszerhez hasonlóan minden számrendszerben el tudjuk végezni a négy alapműveletet. Ehhez célszerű elkészíteni a különböző számrendszerek összeg- és szorzattáblázatát.

(2)

+	0	1
0	0	1
1	1	10

(3)

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

(4)

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	4	10	11

(5)

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

(2)

·	0	1
0	0	0
1	0	1

(3)

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

(4)

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

(5)

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	1	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

(a) Végezzük el az összeadást: $32102_{(5)} + 14213_{(5)}$.

Megoldás:

$$\begin{array}{r} 32102_{(5)} \\ +\ 14213_{(5)} \\ \hline 101320_{(5)} \end{array}$$

A számolás menete:

- $3 + 2 = 10_{(5)}$, leírjuk a 0-t, tovább visszük az 1-et.
- $1 + 1 + 0 = 2_{(5)}$, leírjuk a 2-t.
- $2 + 1 = 3_{(5)}$, leírjuk a 3-at.
- $4 + 2 = 11_{(5)}$, leírjuk az 1-et, s tovább visszük az 1-et
- $1 + 1 + 3 = 10_{(5)}$, leírjuk a 0-át, tovább visszük az 1-et.
- $1 + 0 = 1_{(5)}$, leírjuk az 1-et.

(b) Végezzük el a szorzást: $3201_{(5)} \cdot 32_{(5)}$.

Megoldás:

$$\begin{array}{r} 3201_{(5)} \cdot 32_{(5)} \\ \hline 20103 \\ +\ \ 11402 \\ \hline 212432 \end{array}$$

A számolás menete:

- $3 \cdot 1 = 3$
- $3 \cdot 0 = 0$
- $3 \cdot 2 = 11_{(5)}$, leírjuk a 1-t, s tovább visszük a 1-est.

- $3 \cdot 3 = 14_{(5)}$; $14_{(5)} + 1_{(5)} = 20_{(5)}$, leírjuk a 20-at.
- $2 \cdot 1 = 2$, leírjuk a 2-t.
- $2 \cdot 0 = 0$, leírjuk a 0-t.
- $2 \cdot 2 = 4$, leírjuk a 4-et.
- $2 \cdot 3 = 11_{(5)}$, leírjuk a 11-et.

A részletszorzatok összeadást az előző példában mutatott módon kell összeadni.

(c) Végezzük el a következő kivonást: $42103_{(5)} - 4104_{(5)}$.

Megoldás:

$$\begin{array}{r} 42103_{(5)} \\ -\ \ 4104_{(5)} \\ \hline 32444_{(5)} \end{array}$$

A számolás menete:

- 4-hez, hogy 13 legyen 9-et kell adni, ami $14_{(5)}$. Leírjuk a 4-et, s tovább visszük az 1-et.
- $1 + 0 = 1$, s 1-hez hogy 10 legyen 9-et kell adni, ami $14_{(5)}$. Leírjuk a 4-et, s tovább visszük az 1-et.
- $1 + 1 = 2$, s 2-höz hogy 11 legyen 9-et kell adni, ami $14_{(5)}$. Leírjuk a 4-et, s tovább visszük az 1-et.
- $1 + 4 = 5$, s 5 - höz hogy 12 legyen 7-et kell adni, ami $12_{(5)}$. Leírjuk a 2-est, s tovább visszük az 1-est.
- $1 + 0 = 1$, s 1-hez hogy 4 legyen 3-at kell adni. Leírjuk a 3-ast.

(d) Végezzük el az osztást: $101101_{(2)} : 11_{(2)}$.

Megoldás:

$101'1'0'1'_{(2)} : 11_{(2)} = 1111_{(2)}$
10 1
100
11
0

A számolás menete:

- $101_{(2)} : 11_{(2)} = 1_{(2)}$
  10

Mivel $101_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 1 + 0 + 4 = 5$, és $11_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 1 + 2 = 3$

$5 : 3 = 1$ A 2-es számrendszer összegtáblázatából kiolvasható, hogy $2 = 10_{(2)}$

- Leírjuk a 10-et, s hozzáveszem az 1-et. Így megint $101_{(2)} : 11_{(2)}$ –hez jutok, s a számolás menete az előző lépeshez hasonló módon történik.

- Leírjuk a 10-et, s hozzáveszem a 0-át. Ekkor $100_{(2)}: 11_{(2)} = 1_{(2)}$
  1

- $11_{(2)}:11_{(2)} = 1_{(2)}$
  0

3.9. Megoldatlan számelméleti problémák

A számelmélet a matematika történetének kezdeteitől művelt, a mai napig sok megválaszolatlan kérdést felvető tudományág. Alapjainak tanítása szerepel az általános és középiskolák matematika tantervében is. Ennek köszönhetően mód nyílik arra is, hogy a diákok a ma élő matematikai problémák közelébe kerülhessenek.

3.9.1. Barátságos számpárok

Definíció: ***Barátságos számpárnak*** nevezzük azokat a számpárokat, amelyeknél az egyik szám önmagán kívüli osztóinak összege egyenlő a másik számmal.

I.e. az V. században a püthagoreusoknál találkozunk először a fogalommal. A püthagoreusok ismerték a 220 és a 284 barátságos számpárt. Későbbi az 1 184 és 1 210. A baráti számpárok megkeresésének módját *Szabit ibn Kurra* (836-901) arab matematikus ismertette. *Fermat* (1601-1665), és tőle függetlenül a lengyel *Brozsek* (1585-1652), fedezte fel a 17 296 és a 18 416 párt. *Descartes*-től (1596-1650) származik a 9 363 584 és a 9 437 056. *Euler* (1707-1783) még további 61 baráti számpárt talált meg.

Az 1960-as években az amerikai Yale Egyetemen számítógéppel keresték meg az 1 000 000-nál kisebb baráti számpárokat. 42 ilyen számpárt találtak.

Példa:

(220, 284) barátságos számpár

220 önmagánál kisebb pozitív osztó: 1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110.

Ezen osztók összege: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ (éppen a másik szám)

284 önmagánál kisebb pozitív osztói: 1; 2; 4; 71; 142.

Ezen osztók összege: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. (éppen a másik szám)

Pitagorasz szerint ezek barátságos számok.

Nyitott kérdés, hogy a barátságos számpárok száma véges vagy végtelen. Az sem ismeretes, hogy egy barátságos számpár tagjai lehetnek-e különböző paritásúak.

3.9.2. Barátságos számpárok előállítása

Thâbit ibn Kurrah szabály:

(1) Írjuk le egy sorba a 2 hatványokat 2-től kezdve.

(2) A második sorba írjuk mindegyik 2 hatvány alá a háromszorosát.

(3) A harmadik sorba írjuk a második sorban lévő szám eggyel kisebb számát.

(4) A negyedik sorba írjuk a második sorban lévő számnak és baloldali szomszédjának a szorzatánál eggyel kisebb számát.

2	4	8	16	32	64	128	256	512
6	12	24	48	96	192	384	768	1536
5	11	23	47	95	191	383	767	1535
-	71	287	1151	4607	18431	73727	294911	1179647

Az (n-1)- dik oszlopban és a harmadik sorban lévő számot jelölje **p**.

Az n-dik oszlopban és a harmadik sorban levő számot jelölje **q**.

Az n-dik oszlopban és a negyedik sorban levő számot jelölje **r**.

Ha p, q, r prímek, akkor $a = 2^n pq$, $b = 2^n r$ esetén (a, b) barátságos számpár.

A táblázatról leolvasva látjuk, hogy n = 2 esetben p = 5 prím, q = 11 prím, és r = 71 szintén prím.

$a = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 220$, $b = 2^2 \cdot 71 = 284$

Így a szabály értelmében (220, 284) barátságos számpár.

n = 3 esetben p = 11, q = 23, r = 287, de mivel 287 = 7 · 41, azaz nem prím, ezért nem alkalmazhatjuk a szabályt.

3.9.3. Tökéletes, osztószegény és osztódús számok

Definíció: Ha egy összetett szám osztóinak (kivéve magát a számot) összege éppen a számmal egyenlő, akkor azt a számot ***tökéletes számnak*** nevezzük.

Descartes szerint „a tökéletes számok olyan ritkák, mint a tökéletes emberek.” 1997 végéig 35 tökéletes számot sikerült felfedezni. A legnagyobb tökéletes szám 130 000 jegyű. A mai napig megoldatlan probléma: van-e páratlan tökéletes szám.

Példa:

6 osztói: 1; 2; 3, s ezek összege 1 + 2 + 3 = 6.

Tehát a 6 tökéletes szám.

28 osztói: 1; 2; 4; 7; 14, s ezek összege 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.

Tehát a 28 is tökéletes szám.

Definíció: Ha egy összetett szám osztóinak (kivéve magát a számot) összege kisebb, mint maga a szám, akkor azt a számot ***osztószegény számnak*** nevezzük.

Definíció: Ha egy összetett szám osztóinak (kivéve magát a számot) összege nagyobb, mint maga a szám, akkor azt a számot ***osztódús számnak*** nevezzük.

Példa:

Tekintsünk néhány összetett számot:

- 4 önmagán kívüli osztóinak összege: 2+1=3 tehát osztószegény
- 6 önmagán kívüli osztóinak összege: 3+2+1=6 tehát tökéletes
- 8 önmagán kívüli osztóinak összege: 4+2+1=7 tehát osztószegény
- 9 önmagán kívüli osztóinak összege: 3+1=4 tehát osztószegény
- 10 önmagán kívüli osztóinak összege: 5+2+1=8 tehát osztószegény,
- 12 önmagán kívüli osztóinak összege: 6+4+3+2+1=16 tehát a 8 osztódús

További osztószegény számok: 14, 15, 16

További osztódús számok: 18, 24, 30

3.9.4. Ikerprímek

Definíció: Azokat a prímszámokat, amelyeknek különbsége 2, ***ikerprímeknek*** nevezzük.

Néhány ikerprím pár:

(3; 5); (5; 7); (11; 13); (17; 19); (29; 31); (41; 43); (59; 61); (71; 73),

(101; 103); (107; 109); (137; 139); (149; 151); (179; 181); (191; 193); (197; 199),

(227; 229); (239; 241); (269; 271); (281; 283),

(311; 313); (347; 349),

(419; 421); (431; 433); (461; 463),

(521; 523); (569; 571); (599; 601),

(617; 619); (641; 643); (659; 661),

(809; 811); (821; 823); (827; 829); (857; 859); (881; 883),

(1019; 1021); (1031; 1033); (1049; 1051); (1061; 1063); (1091; 1093)

Egy újabb megoldatlan probléma: az ikerprím párok halmaza véges vagy végtelen.

3.9.5. Goldbach – sejtés

Mindmáig bizonyítatlan sejtés szerint minden 2-nél nagyobb páros egész szám felírható két prímszám összegeként.

Goldbach, Christian (1690-1764) német matematikus. Tőle származik a számelméleti Goldbach-sejtés. Goldbach 1725-ben lett a szentpétervári Birodalmi Akadémia matematika-professzora és történésze. 1728-tól Moszkvában élt II. Péter cár nevelőjeként, 1742-tôl az orosz külügyminisztériumnak volt állandómunkatársa. A nevét viselő sejtést 1742-ben fogalmazta meg először Leonhard Euler svájci matematikushoz írt levelében. Ebben azt állította, hogy minden páros szám előállítható két prímszám összegeként, és minden 6-nál nem kisebb természetes szám kifejezhető három prímszám összegeként. Válaszában Euler megjegyezte, hogy az állítás igazolásához elég lenne belátni, hogy minden páros szám felbontható két prímszám összegére. Ezt az ún. Goldbach-féle sejtést a mai napig nem sikerült sem megcáfolni, sem teljesen bizonyítani.

A második sejtést Vinogradov orosz matematikus 1937-ben részben bebizonyította, és az eddigi legutolsó lépést a magyar Rényi Alfréd tette meg 1947-ben. Goldbach fontos eredményeket ért el a görbeelméletben, a végtelen sorok és a differenciálegyenletek elméletében is.

Tekintsünk néhány példát:

4 = 2 + 2

6 = 3 + 3

8 = 3 + 5

10 = 3 + 7 = 5 + 5

94 = 5 + 89 = 11 + 83 = 23 + 71 = 41 + 53 = 47 + 47

144 = 5 + 139 = 7 + 137 = 13 + 131 = 17 + 127 = 31 + 113 = 37 + 107 = 41 + 103 = 43 + 101 = 47 + 97 = 61 + 83 = 71 + 73

180 = 7 + 173 = 13 + 167 = 17 + 163 = 23 + 157 = 29 + 151 = 31 + 149 = 41 + 139 = 43 + 137 = 53 + 127 = 67 + 113 = 71 + 109 = 73 + 107 = 79 + 101 = 83 + 97

198 = 5 + 193 = 7 + 191 = 17 + 181 = 19 + 179 = 31 + 167 = 41 + 157 = 47 + 151 = 59 + 139 = 61 + 137 = 67 + 131 = 71 + 127 = 89 + 109 = 97 + 101

4. Irodalomjegyzék

1. Csapó Benő: Kognitív pedagógia. Budapest, 1992, Akadémia Kiadó
2. Sternberg, Robert J.: A matematikai gondolkodás természete. Budapest, 1998, Vince Kiadó
3. Somfai Zsuzsa: A matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. Budapest, 2001, OKI
4. Erdős P., Surányi J.: Válogatott fejezetek a számelméletből. Szeged, 1996, Polygon
5. Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába. ELTE Budapest, 2005, Eötvös Kiadó
6. Gábos Adél – Halmos Mária: Készüljünk az érettségire! Matematika. Budapest, 1999, Műszaki Könyvkiadó
7. Dr. Czeglédy István, Dr. Hajdu Sándor, Hajdu Sándor Zoltán, Dr. Kovács András, Róka Sándor: Matematika Középiskola 9. osztály. Budapest, 2006, Műszaki Könyvkiadó
8. Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia: Matematika 9. a gimnáziumok számára. Budapest, 2006, Nemzeti Tankönyvkiadó
9. Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika 9. Szeged, 2006, Mozaik Kiadó
10. Dr. Czeglédy István – Dr. Kovács András. Témazáró felmérő feladatsorok Matematika 9. osztály. Budapest, 2003, Műszaki Könyvkiadó
11. Internes oldalak:
    - 1.1. **www.sulinet.hu**
    - 1.2. **www.oki.hu**
    - 1.3. **www.okm.gov.hu**
    - 1.4. **www.mersenne.org**