

Debreceni Egyetem
Informatikai Kar

Gó végjáték és végállásainak elemzése

Témavezető:
Dr. Halász Gábor József
Egyetemi docens

Készítette:
Kökényesi Máté Zsolt
Programtervező informatikus

Debrecen
2009

Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	4
A gó.....	4
Történelme.....	4
Alapfogalmai.....	5
A játék menete.....	6
Pontszámítás.....	7
Előnyadás (handycap), komi.....	7
Stratégiák.....	8
Célkitűzés.....	9
Tárgyalás.....	10
Általános, összehasonlítás a sakkkal.....	10
Megoldott végjátékok.....	10
Törtek.....	14
Fel, le és csillag.....	16
Pluszok és mínuszok.....	21
Játékegyszerűsítés.....	22
Kombinatorikus játékelmélet.....	23
Definíciók.....	23
Kanonikus formák.....	24
Hűtés (chilling)	27
Ösztönzők (incentives)	27
Melegítés (warming)	27
Összefoglaló lemmák és tételek a gó kombinatorikus játékelméletéből.....	28
Végállások.....	31
Szabályok, blokkok és régiók.....	31
Blokkok és területek biztonsága.....	32
Eljárások a biztonság igazolására.....	33
Benson-féle feltétel nélküli élet.....	36
Lokális váltakozó játék miatt biztonságos területek.....	37
Láncok.....	39
A biztos élet statikus felismerése.....	40

Egy biztos élet statikus felismerése.....	40
Keresések.....	43
Régiók biztonsága.....	44
Mik azok a nakade alakzatok?	45
Összefoglalás.....	48
Köszönetnyilvánítás.....	50
Irodalomjegyzék.....	51
Internetes linkek.....	51
Függelék.....	52

Bevezetés

A gó

Történelme

A gó (Japánul igo (碁), kínaiul wéiqí (圍棋)) körülbelül négyezer éves játék, mely méltón büszkélkedik a legősibb táblás játék címmel. Az első írásos említés Konfúciustól származik az időszámításunk előtti 6. századból. Keletkezéséről különböző legendák születtek. Az egyik kínai legenda szerint Yao császár, a fia, Danzhu taníttatására használta, hogy gyermeke fegyelmet, koncentrációt, valamint egyensúlyérzéklet tanuljon. Egy hasonló mítosz szól ugyanakkor Shun császárról és fiáról, Shang Junról is. Egy japán legenda szerint két testvér az örökölt föld elosztására használta, tehát a földméréshez is lehetett köze. Az ősi Kínában a sakk (kínai sakk) a tömegek, a gó pedig a nemesek és tudósok játéka volt.

A későbbiekben a haditudományokban érintettek is előszeretettel tanulmányozták a bonyolult stratégiai tartalma miatt. A történettudomány annyit mond, hogy eredetileg az ókori kínai jóslás eszköze lehetett: a gótáblával modellezheték a világot, amelyen a fekete és fehér kövek a pozitív és negatív erőket képviselték.

Japánban a 7. század környékén jelent meg és a 8. században már divatos volt a császárok társaságában. Széles körben viszont csak a 13. században terjedt el. Ebben az országban alakult ki a gó ma használatos szabályrendszere. A 17. században, Japánban megalakult a Honinbo góiskola melynek alapítója a kor egyik legerősebb játékos Honinbo Sansa. A gó fejlődése ebben az időben nagyon felgyorsult és a harcművészetekből átvett dan lett a rangsorolás alapja. A 19. században az iskola feloszlott, de emlékére még mindig megrendezik a rangos Honinbo versenyt. Még a Honinbo nevet is felveheti a legelismertebb játékos.

Magyarországon a gó játék megjelenése Erdős Pál, híres matematikus nevéhez fűződik. Harminc év alatt a magyar gójátékosok egyértelműen Európa élvonalába kerültek, bár a legerősebb távolkeleti mesterektől még mindig komoly szakadék választja el őket. Az első nagyobb eredményt Kőszegi Diána szerezte meg 2008.01.04-én, ugyanis Koreában megkapta a megtisztelő profi 1 dan rangot. Európai szinten ő a harmadik személy, akinek ez sikerült. Sok magyar gójátékos bízik a játék fellendülésében Magyarországon, egy ilyen szép, nemzetközileg is elismert eredmény után.

Alapfogalmi

A *tábla* (board) 19 vízszintes és 19 függőleges vonalból álló négyzetrácsos terület.

Egy rácspontra elhelyezett *kő* (stone) *életeinek* (liberties) száma, az adott rácsponthoz kapcsolódó négy szomszédos rácspont közül az üreseknek a számát jelenti. Egy kő színe lehet *fekete* (black) vagy *fehér* (white).

Egy *sztring* (string), *csoport* (group) vagy *blokk* (block), olyan azonos színű kövekből álló halmaz, melyek szomszédosan kapcsolódnak egymáshoz. Átlós szomszédság nincs.

Egy sztring életeinek száma, a csoportban foglalt kövek életeinek számával egyenértékű. Ha több kőnek is élete egy adott rácspont, akkor az csak 1 életnek számít. Ha egy kő vagy sztring életeinek száma 1-re csökken, akkor azt mondjuk, hogy *atari*-ban van. A következő lépésre lehet, hogy elveszti azt.

Foglyokról (Prisoners) akkor beszélünk, ha az adott követ, vagy sztringet az ellenfél négyzomszédosan körbezárta, azaz az életeinek számát nullára csökkentve leütötte. Ekkor a foglyok lekerülnek a tábláról.

Az olyan helyzetet, amikor a játékosok felváltva újra és újra leüthetik a másik köveit *ko*-nak nevezzük. Az a játékos, amelyiknek egy követ egy *ko*-ban leütöttek nem üthet vissza egyből, ezzel kerülhető el a végtelenítés a játékban. *Ko szabály*, hogy egyetlen lépés sem állíthatja elő az előző táblaállást.

Szem vagy *szempontoknak* (Eye (point)) nevezzük az olyan üres pontokat, melyet kizárólag az egyik játékos élő kövei határolnak.

Az egyéb üres pontok neve *dame*.

Azok az élő csoportok, melyek *dame* pontokat tartalmaznak *szeki*-ben vannak. Vagyis kölcsönösen osztoznak életükön a fogságba esés nélkül.

Azokat a szempontokat, melyeket élő, de nem *szeki*-ben lévő csoportok vesznek körül, *területeknek* (territories) nevezzük. Ezek minden egyes szempontja egy területpontnak számít.

Élőnek tekintendők azok a kövek, amelyeket az ellenfél nem tud leütni, vagy ha leütik, ez egy olyan kőnek a táblára helyezését teszi lehetővé, melyet az ellenfél nem tud leütni.

A két szemponttal rendelkező alakzatokat *élőnek* tekinthetjük, hisz akármelyik szempontot próbálja támadni az ellenfél, a másik szem életével megvédi a támadástól.

A nem élő köveket *halottaknak* nevezzük. Ezek olyan kövek, melyeket a tulajdonosa akkor sem tudna megvédeni, ha ő következne, vagyis nem érdemes neki itt harcolnia.

A *semeai* területfoglalási harcot jelent két olyan bekerített csoport között, amelyek a biztos életet szolgáló két szempontot csak az ellenfél köveinek leütésével érhetik el. A pozícióktól függően az egyik játékos elfoglalhatja a másik köveit vagy az állás szekihez vezet és közösen osztoznak az életeken.

A *sente*, egy olyan támadó lépés, melyet nem hagyhat figyelmen kívül a másik fél.

A *gote* viszont a *sente* ellentettje, melyre nem kell sürgősen válaszolni, akár figyelmen kívül is hagyható.

A játék menete

A kezdetben üres, 19 vízszintes és 19 függőleges vonalból álló, négyzetrácsos táblára felváltva helyeznek el köveket a játékosok. A sakkal ellentétben nem a négyzetrácsba kell elhelyezni/helyezni a bábukat, hanem a vonalak metszéspontjaira. A két játékosnak saját fekete illetve fehér köveinek felrakásával kell megszereznie minél több területet a tábla által kínált 361 mezőből. A játékot mindig a fekete kezdi, majd utána felváltva léphetnek egy még üres rácspontra. Lépéskényszer nincs, tehát a játékos dönthet úgy, hogy passzol, és az ellenfél folytathatja a játékot. A lerakott kövek csak foglyokká válás esetén mozdíthatók el, de ekkor kötelezően le kell venni őket a tábláról. Olyan helyre nem lehet követ lerakni ahol azonnal fogollyá válna (ez az „öngyilkosság tiltása”). Ha viszont egy kő lerakásával az ellenfél köveiből lehet valamennyit, akkor életet szerez a saját kövének. Ilyenkor igaz, hogy a lerakás pillanatában nem lenne élete a kőnek, viszont az ellenfél köveinek eltávolítása miatt biztos, hogy lesz szomszédos, üres területe.

A játék akkor ér véget, ha ebben a játékosok megegyeztek, vagy ha az egyik fél feladja. A feladás ebben a játékban teljesen szégyenmentes, mert ezzel a játékos elismeri, hogy már nincs esélye nyerni. Ha egy körben mindkét játékos passzol, akkor a játék befejeződik. Ilyenkor megegyeznek az élő, illetve halott kövek és a területek sorsáról. Ha esetleg nem értenek egyet egy területnél, akkor bármelyik játékos kérheti a játék folytatását, amit a másik félnek kötelező elfogadni és a következő lépés joga őt illeti. Ha megegyeztek a területekről, akkor már csak a pontszámítás marad hátra, melyre többfajta módszer is létezik. Más kivételes vége is lehet a gó játéknak: ha ugyanaz a játékállás ismétlődik meg többször. Ez többszörös ko-harcoknál fordulhat elő. Ekkor a játék végeredmény nélkül fejeződik be.

Pontszámítás

Két alapvető pontszámítási rendszer van. Általában 1 pontnál kevesebb az eltérés.

Japán módszer (Territory scoring)

Mindkét játékos leveszi az ellenfél halott köveit a saját területeiről. Ezeket a köveket az eddig elejtett foglyaihoz adja, melyeket az ellenfél területein helyez el, ezzel csökkentve az ellenfele pontszámát. Megszámolják az így kapott üres területeiket és a nagyobb pontszámú játékos nyer.

Kínai módszer (Area scoring)

Szintén leveszik fogolyként az ellenfél halott köveit. Megszámolják a saját élő köveiket és az ezek által határolt területeket.

A két módszer lényegesebb eltérése a semleges pontok kezelésében van, hisz a kínai módszernél nem számít, ha esetleg a játék vége felé további védekező köveket helyeznek el saját területeiken. A dame pontokon elhelyezett kövek viszont pontokat érnek. A japán módszernél a semleges, például dame pontok nem érnek pontot egyik félnek sem. A saját területen belüli felesleges védekező lépés viszont csökkenti a terület méretét.

Előnyadás (handycap), komi

Ha két játékos eltérő tudással rendelkezik, akkor előnyköveket szoktak adni. Mivel mindig a fekete kezd, ezért az előnyköveket mindig a fehér játékos adja a feketének. Egy-egy előnykő a végeredményben körülbelül 10 pontot ér. Azzal, hogy a fekete kezdi a játékot, előnyre tesz szert, ezért a fehér pontszámához komidashit, röviden komit adnak. Handycap rendszereknél a döntetlenek elkerülése érdekében legtöbbször 0.5 pontot, míg egyéb esetekben általában 5-8 pontot kap a fehér játékos az elején. A japán módszernél 2002 óta 6.5 pont, míg a kínai módszer esetén 7.5 pont a megszokott a nagyobb pontszámok miatt.

Stratégiák

A játék több fázisra osztható. Van nyitás, közép- illetve végjáték, ezért ezekhez különböző stratégiákat használnak. A nyitás során főleg a sarkok környékére helyeznek el köveket. A sarkokat körülbelül 2 irányból kell védeni. Egy biztos sarokból könnyebb védekezni, illetve támadni a közép- és végjátékban. A nyitás másik fő területeként a tábla széleit használják. Miután a sarkokat nagyjából behatárolták, a tábla szélét is könnyebb megvédeni. Egy szélen elhelyezett csoportot 3 oldalról kell védeni. A nyitásnál kialakított csoportok jó támpontokat nyújtanak a közép- illetve végjátékban.

A középjátékban nagy hangsúly terelődik a tábla közepére. A játékosok minél több területet és foglyot próbálnak szerezni. Megpróbálják az ellenfél területeit leszűkíteni, esetleg befoglalni. A középjáték után nagyon nagy előnyök esetén, a végjáték általában elmarad a feladások miatt. A végjáték főként az apróbb pontkülönbségek kiaknázását szolgálja.

A védekezések és támadások megkönnyítése érdekében a játékosok előnyére válhatnak bizonyos alakzatok erősségei, azok flexibilitása, azaz hogy egy másik alakzatba milyen könnyen vihető át. Ezekhez egyfajta megérzés kell, hogy mikor érdemes például járt utat járatlanra cserélni vagy egy megszokott lépés helyett újat választani, ami később a játékos segítségére lehet.

A következő tanácsokat Wang Ji Xin gyűjtötte össze körülbelül 1300 éve. A gó játék 10 aranszabályának is nevezhetők, de stratégiaként is tekinthetünk rájuk:

1. Tan Bu De Sheng - A kapzsiság nem vezet győzelemhez.
2. Ru Jie Yi Huan - Ne siess betörni az ellenfél területére!
3. Gong Bi Gu Wo - Figyelj az egyikre, amíg támadod a másikat!
4. Qi Zi Zheng Xian - Áldozz fel egy követ a sente-ért!
5. She Xiao Jiu Da - Hagyd ott a kicsit, hogy megmentsd a nagyot!
6. Feng Wei Xu Qi - Ha veszélyben vagy áldozz fel valamit!
7. Shen Wu Qing Su - Építs sűrű csoportot, tartózkodj a gyors lépésektől!
8. Dong Xu Xiang Ying - Az ellenfeled lépésére válaszolj!
9. Bi Qiang Zi Bao - Erő ellen biztonságosan játssz!
10. Shi Gu Qu He - Keresd a békét, ne harcolj elzárt vagy gyenge helyzetben!

Célkitűzés

A játék egyszerűsége mellett, az előnykövek bevezetése által élvezhetővé válik a játék egy kezdő játékosnak is, ha egy profi ellen játszhat. A számítógépes programokat viszont még egy gyakorlottabb kezdő is el tudja verni. A MoGo programot 800 darab 4.7 Ghz-es processzoron futó, 14 Teraflops kapacitással bíró gép tartotta életben, mikor játszott 2008.08.07-én a profi Myung Wan Kim ellen. A 9 előnykő és „fejenként” 1 óra gondolkodási idő mellett a programnak épphogy (1.5 ponttal) sikerült legyőznie ellenfelét. Kim ezután elszégyellte magát, majd később közölte, hogy ha a gondolkozási idejét jobban kihasználta volna, akkor valószínűleg nyert volna. A MoGo programot gyors játékban Kim viszont könnyedén megverte. A program kétszer 9, majd egyszer 11 kő előnyből kapott ki, amikor viszont 12 előnykővet kapott a program, akkor 3,5 ponttal nyerni tudott. Egy előnykő körülbelül 10 pontot ér a játékosoknál. A gó játék elemzése jelenleg az egyik legfelkapottabb téma a mesterséges intelligencia témakörében. Szakértők úgy gondolják, hogy a gó intuíciók modellezése jelentős előrelépés lenne a mesterséges intelligencia világában. Ha a számítógépek is ugyanolyan jól „rálátnának” egy gó játék állására, mint az emberi agy, akkor könnyebben fel tudnák venni a versenyt az emberekkel. Mint már említettem, egy gyakorlottabb kezdő is el tudja verni a mostani gó programokat, viszont az ember a kihívásokat szereti, amit próbál a gépekbe ötvözni.

A végjátékok és végállások elemzését azért választottam a szakdolgozati témámnak, mert még napjainkban is meglehetősen nyitott ez a téma és számos kérdést felvet. Ezen kérdésekre pontos választ adva eljuthatunk a végállások tökéletes kiértékeléséhez. Ezzel a számítógépeknek jó heurisztikát tudnánk szolgáltatni. Kutatásom során egy 99,5%-os kiértékelést minősült legjobbnak, a profi számítógépeket és algoritmusokat is figyelembe véve. Igaz emberi tévedés előfordulhatott a régebbi játékok pontozásánál. Céлом, hogy betekintést nyerjünk a végjátékok matematikájába. Valamint a végállások elemzésénél felmerülő nehézségek kiküszöböléséhez megfelelő alapot adjak.

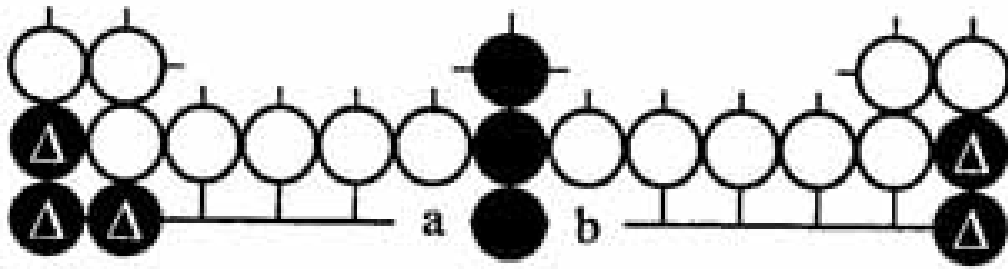
Tárgyalás

Általános, összehasonlítás a sakkal

A végjátékok elemzése esetén igen nagy szerepe van a számítógépes programoknak, amelyek megpróbálnak optimális lépést generálni. Az IBM Deep Blue sakkprogramja 1997-ben, Garry Kasparov sakklegendát legyőzte. Ehhez tudni kell, hogy 1997 júniusában ez a Deep Blue a világ 259. legjobb gépe volt a TOP500 szuperszámítógépek listáján, a 11,38 Gigaflopsos teljesítményével. Összehasonlításként az a számítógép, amely működtette a MoGo-t 2008 augusztusában 14 Terraflopsos teljesítménnyel rendelkezett (ami a Top500-as listán 400. hely körüli helyet jelent). A játéka legenerálásával és körülbelül 200 millió állás másodpercenkénti elemzésével a Deep Blue programjának „brute force” (, azaz nyers erő) taktikája győzött. A sakknál viszont lényegesen egyszerűbb és kézzelfoghatóbb a végső állapot a matt. A gónál a 2 passz jelzi a játék végét és egy programnak jóval nehezebb felismerni, hogy mikor kell passzolnia. A sakknál az állások jósága nagyban összefügg a táblán szereplő bábuk számosságával. A gó egyszerűsége mellett a 19*19-es tábla 361 metszéspontja miatt a „brute force” technikával történő megoldása egyelőre lehetetlen. A jelenlegi számítástechnikai fejlődési tendenciákat figyelembe véve az elkövetkezendő 50 évben sem teremődne meg olyan számítógép infrastruktúra, mely nyers erővel gó játékfát felépítve optimális lépést generálna. Ehhez más módszereket kell találni!

Megoldott végjátékok

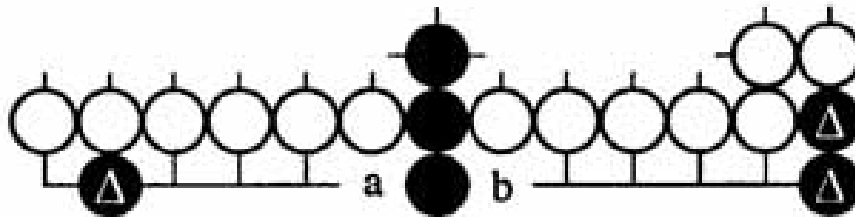
1994-ben Elwyn Berlekamp és David Wolfe megjelentette könyvét *Mathematical Go, Chilling Gets the Last Point* címmel ([6] irodalom), melyben néhány végjátékproblémát matematikailag megoldottak. Nézzük például az 1.1. ábrát. Tegyük fel, hogy nincs a tábla egyéb részén ko veszély, a fekete játékos következik és az ábrán a -val vagy b -vel jelzett lépés a legjobb. Továbbá tudjuk, hogy csak a Δ jelű kövek nem élnek. Melyik a jobb lépés a feketének az a vagy a b ? Vagy ez összefügg a tábla egyéb részével? Vagy talán nem is lényeges, hogy mi van még a táblán?



1.1. ábra: Melyik a jobb lépés a feketének?

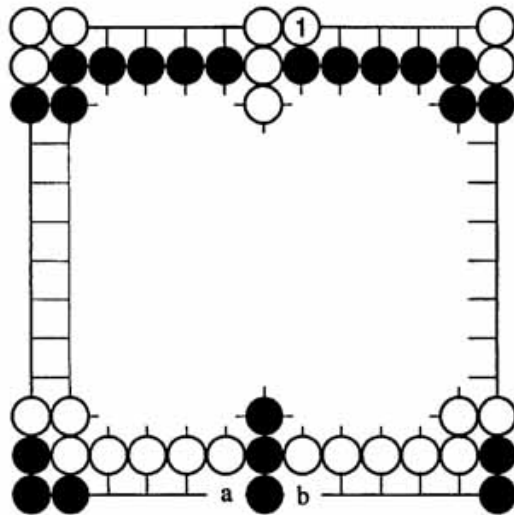
Ha úgy gondolkoznánk, mint a legtöbb erős gójátékos, akkor arra a következtetésre jutnánk, hogy az a legalább annyira jó, mint a b . Végül is az a lépés nagyobb veszéllyel fenyeget, ugyanis 3 követ mentenénk meg 2 helyett és 1 lépéssel hamarabb odajutnánk. A vizsgálatok kimutatták, hogy mindig a b lépés a jobb az a -val szemben. A könnyebb megértés érdekében új definíciókat vezetünk be. *Folyosónak* (Corridor) hívjuk az olyan üres góterületeket, melyek ténylegesen egy 1 dimenziós sztringet alkotnak. Egy *folyosó blokkolt* (blocked corridor), ha domináns kő zárja el a folyosó végét és nem tudunk utána továbbmenni, mint ahogy az 1.1. ábrán mindkét irányban ilyen. Egy *folyosó blokkolatlan* (unblocked corridor), ha az elején és a végén is nyitott még, vagy az ellenfél kövei vannak ott és még össze tudja őket kötni.

Ugyanakkor, ha az 1.2. ábrán látható módon csökkentjük a kövek számát a bal oldalon, akkor bizonyíthatóan az a lépés a jobb.



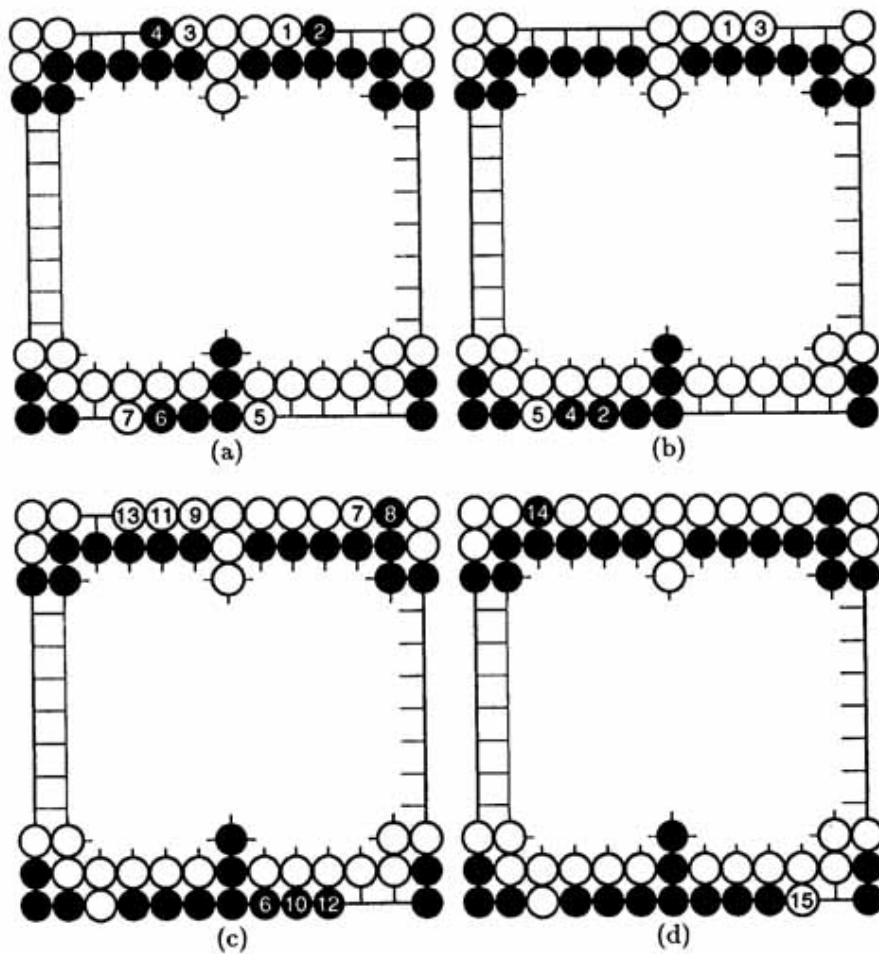
1.2. ábra: Csökkentve a kövek számát a bal oldalon az a lépés a jobb

Egészítsük ki a fent látható 1.1. ábrát. A fehérnek szimmetrikusan ugyanaz az állása, mint a feketének. Az 1.3. ábrán látható módon feltételezzük, hogy a fehér a b -nek megfelelő lépést tette meg. Tegyük fel, hogy a tábla többi részén döntetlenre állunk és csak ez a 4 folyosó dönt a győztesről.



1.3. ábra: Szintén a b a jobb lépés

Ha a fekete szimmetrikusan játszik a fehérrel, vagyis mindig ugyanazt lépi csak az ellentétes térfélen, akkor természetesen döntetlen lesz. Ezért tegyük fel, hogy a -val válaszolunk: A következő 1.4. ábra 2 lehetséges kimenetelt mutat.

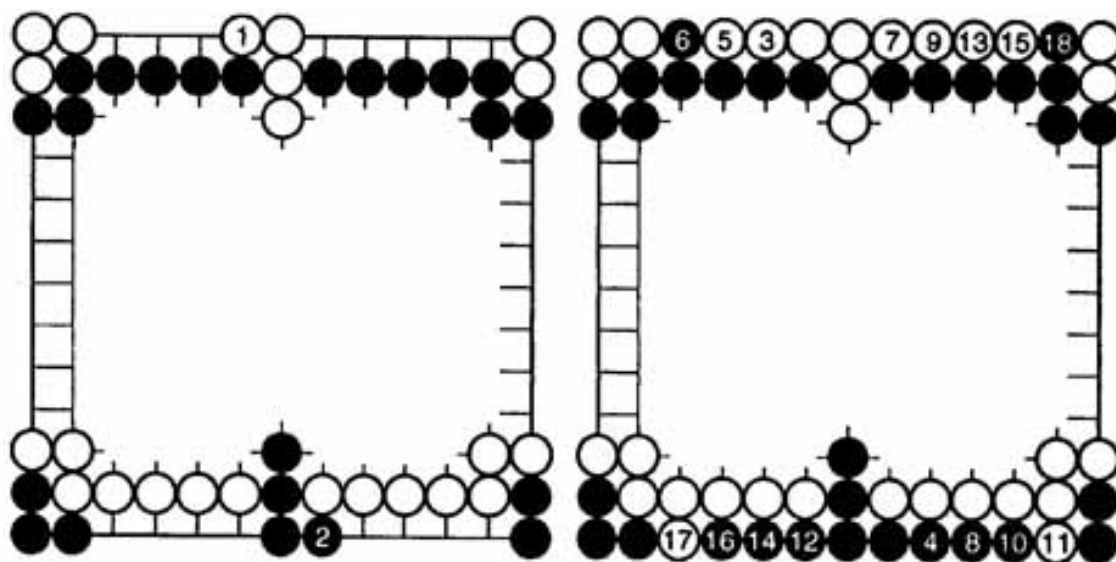


1.4. ábra: A 1.3. játék két lehetséges kimenetele

Az (a) játéknál a fekete egyből blokkolja a fehér betörését, majd ugyanezt teszi a fehér. Ebben a játékban a fehér lép utoljára, így ő nyer 1 ponttal. Tény, hogy az utolsó lépés megtétele sokat számít. A fekete 2. és 4. lépése gote, így ezekkel felhasználja mindkét esélyét, hogy ő lépjen utoljára. Ezt megfontolandó, másfajta stratégiához kell folyamodnia a feketének. A fehér betörések azonnali blokkolása helyett, csak akkor blokkolja a támadást, mikor az már sente lépés, vagyis érdemes válaszolnia (*b-c-d* ábrák). Végül az eredmény ugyanaz lesz. A fehér 13. sente lépése, amivel 3 követ próbálja megmenteni előnyösebb, mint a fekete sente lépésére válaszolni, ami 2 fekete kő megmentésére irányul.

Ezen két játéksorozat, nem az összes lehetséges végjáték. Viszont bizonyítható, hogy a fehér mindig nyer 1 ponttal, ha folytatja betörését, és csak akkor blokkolja a fekete betörését, ha már szükséges.

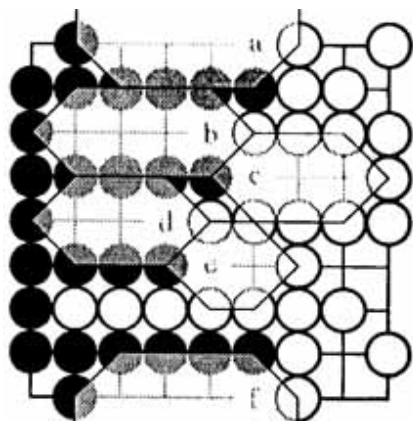
Vagyis a *b* jobb lépés az *a*-nál ebben a helyzetben. Mi a helyzet, ha a fehér az *a* lépést választja? Az 1.3. ábrához hasonló módon, az 1.5. ábrán a fehér az *a* lépést valósítja meg. A szimmetriát elkerülve mi a *b*-vel válaszolunk. Az 1.5. állás egy optimális lejátszásánál észrevehető, hogy a fekete a 16. lépésével nem a fehér támadását blokkolja. A fekete sente lépése 3 követ megmentésére nagyobb veszély a fehérnek, minthogy a 17. lépésével 2 saját követ mentse meg. Így végül a fekete lép utoljára és döntetlen lesz a végeredmény. Tehát a *b* tényleg jobb lépés *a*-nál.








1.5. ábra: Mi a helyzet akkor, ha a fehér ellentétesen játszik?

Törtek

A törtek bevezetése azért szükséges, mert ezek segítségével megállapíthatjuk, hogy az egyes helyzetek mennyire kedvezőek számunkra. A 2.1. ábrán blokkolt folyosókat látunk és megszeretnénk mondani, hogy a különböző területek mennyire jók a játékosoknak. A további fejezetekben még több jelölést vezetünk majd be, hogy az összetettebb feladatokat is meg tudjunk oldani és azokat visszavezethessük egy korábban megoldottra. A 2.2. ábra mutatja a blokkolt folyosók egy részhalmazát és azok értékét. Feltételezzük, hogy a feltüntetett kövek már mind biztonságban vannak. A második oszlopban a fekete által megszerezhető területek átlagértékei figyelhetők meg. Az egészrészek azon fekete területek értékei, ahol a fehér lép a folyosóba először és fekete egyből blokkolja a fehér betörését. A törtrész pedig $\frac{1}{2^n}$ alakú, ahol az n a fekete által szereshető terület, ha első lépésével blokkolja a folyosót. A harmadik oszlopban található a *hőmérséklet* (temperature), ami az adott helyen lévő lépés jóságát adja meg. Minél magasabb, annál jobban megéri oda lépni. A törteknél a hőmérséklet $1 - \frac{1}{2^n}$. A hőmérséklet azt is megmutatja, hogy az adott területen elhelyezett lépésnek mennyi a legkisebb értéke.

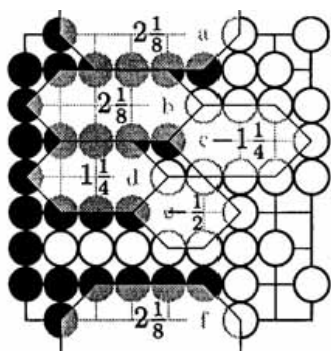


2.1. ábra: A fehér következik és nyerni tud 1 ponttal.

POSITION	≈ AREA	TEMPERATURE
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$1\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
	$2\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
	$3\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$
	$4\frac{1}{32}$	$\frac{31}{32}$

2.2. ábra: Az egyes folyosók és értékük a fekete játékos szemszögéből.

Ha a 2.2. ábra táblázatát rávetítjük a 2.1. ábrára, akkor a 2.3. ábrán található adatokat kell, hogy megkapjuk. Ha a kövek színét megcseréljük a 2.2. ábrán látható folyosókon, akkor természetesen a fekete ellentett értékeit kapjuk, hiszen ilyenkor a fekete által szerezhető terület éppen az ellentettje az eredeti képnek. Ilyenkor a terület értékét -1 -el meg kell szorozni. A fehér c és e régiók értékei tehát pontosan az ellentettei a táblázatnak, mivel azok a fehérnek kedveznek. A törteknél a következő lépés meghatározása a törtrészekben rejlik. Minél kisebb a törtrész, annál nagyobb lesz a hőmérséklete. Ha a 2.3. ábra értékeit összeadjuk, akkor az eredmény $5\frac{1}{4}$. Mivel a fekete szemszögéből számoltunk, így ez neki kedvez. Előreláthatólag a feketének 5 ponttal többje lesz, ha a fehér lép elsőnek. Ha pedig a fekete lép elsőnek, akkor 1 ponttal még többet tud szerezni, vagyis 6-ot. Míg a feketének a nagyobb értékek a kedvezőbbek, a fehérnek a kisebb értékek a jobbak. Ha nyerni akar a fehér, akkor mindig a legnagyobb hőmérsékletű területre kell lépnie, vagyis jelen esetben első követ az a, b vagy f régióba érdemes helyeznie, hiszen ezen régiók hőmérséklete: $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.



2.3. ábra: A 2.1. törtjei

BLOCKED	UNBLOCKED	UNMARKED UNCHILLED		MARKED CHILLED	
		≈ AREA	TEMP.	AREA	INC.
		$-2 + 2$	0	2	
		$-1 + 1$	$1 - 1$	1	
		$0 + \frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
		$1 + \frac{1}{4}$	$1 - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
		$2 + \frac{1}{8}$	$1 - \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
		$3 + \frac{1}{16}$	$1 - \frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$
		$4 + \frac{1}{32}$	$1 - \frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$

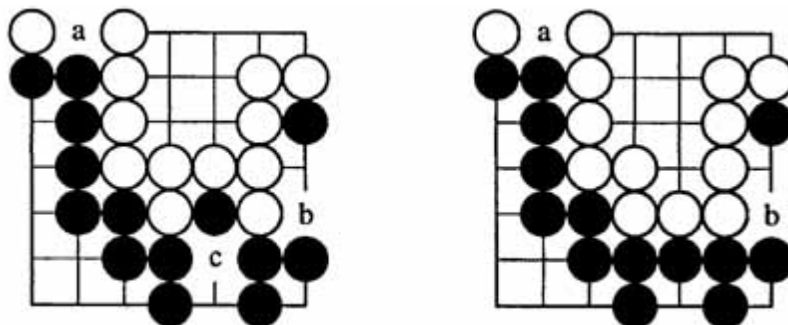
2.4. ábra: Egyes folyosótípusok értékei

Ha csak a törteket adjuk össze az ábrán, az eredmény $-\frac{1}{8}$, ami a fehérnek kedvez, és mivel ő jön, egy az a, b vagy f régióban elhelyezett lépés neki $\frac{7}{8}$ pontot ér. Azért $\frac{7}{8}$ mert azok a fekete területén vannak, ezért a fehér csak a hőmérsékletnek megfelelő értéket adhatja hozzá pontszámához. Így viszont a $-\frac{1}{8} - \frac{7}{8} = -1$ miatt a fehér több területet tud megszerezni. A 2.2. ábrán, csak blokkolt folyosók találhatóak. Mivel a blokkolatlan folyosókat egy lépéssel blokkoltakká alakíthatjuk, ezért a blokkolatlan folyosókkal bővített táblázat értékeit a 2.4. ábrán láthatjuk.

Mivel a hosszabb folyosóknál az értékük nagyon közel van az 1-hez, ahelyett hogy $\frac{15}{16}$ -okkal számolnánk, inkább azt mondjuk, hogy nyertünk (vagy veszítettünk) $\frac{1}{16}$ pontot, vagyis pontosan 1 ponttal kevesebbel számolunk. Ez azért célszerűbb, mert a pontok megszerzéséért lépünk kell, ezért 1 pontot levonhatunk lépésenként. Ez az „adóztatás” a hűtés (chilling) alapja lesz, mely hasznos az egyes lépések pontos értékének meghatározásánál.

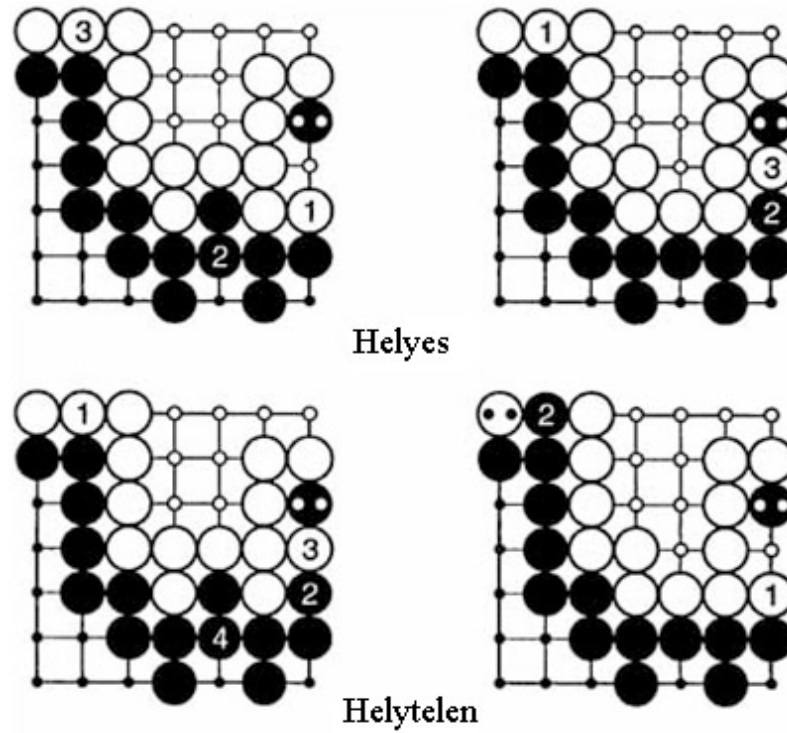
Fel, le és csillag

A következő 2.5. ábrán szereplő egyszerűbb végjátékok könnyen végiggondolhatók a viszonylag kevés lépési lehetőség miatt. Ismét a fehér szemszögéből kell megtalálnunk a legjobb lépéssorozatot. Ezen állásoknál csak a *b* helyen van folyosó, de még fogolyejtésről nem esett szó a korábbi tárgyalásunk során.



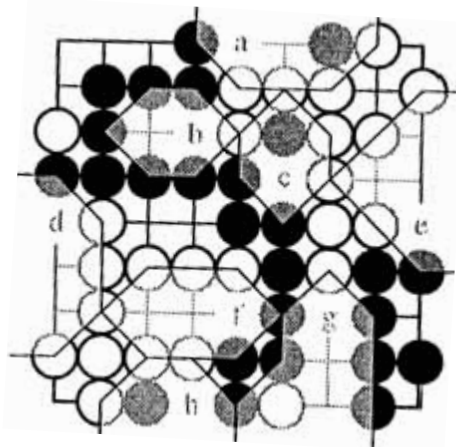
2.5. ábra: A fehér következik és nyerni tud (Csak a *c* körül van egy kis változás)

A bal oldali képen elég azt észrevennünk, hogy az *a* és *c* *miai* pont, vagyis teljes mértékben ellensúlyozzák egymást, ha az egyik fél az *a* lépést választja, akkor a másik a *c* lépést és ugyanaz lesz a helyzet, mint előtte, vagyis nincs hatásuk a játék végeredményére. Lehetséges olyan állás, hogy valamelyik fél csak a *miai* egyik pontját tudja megtámadni. Tehát a bal oldali képnél teljesen mindegy, hogy az *a* lépést vagy *c* lépést választjuk, mert kiegyensúlyozzák egymást, így kizárásos alapon a fehér egyetlen nyerési esélye a *b*-nél van. A jobb oldali képnél arra kell rájönnünk, hogy hogyan léphet a fehér utoljára, mert mint már írtam ez nagyon fontos a végjátékban. Egy-egy helyes és rossz megoldást a 2.6. ábra mutatja.



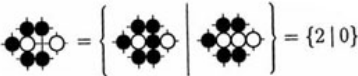
2.6. ábra: Helyes és helytelen megoldások a 2.5. feladathoz

Vagyis azt már láthatjuk, hogy önmagában a törtek bevezetése kevés, mert nem minden végjáték az üres folyosókról szól. A 2.7. ábra már egy valóságosabb végjátékot mutat.




2.7. ábra: A fehér következik és nyerni tud.

Mennyit érnek az adott helyek?


A következő ábra:  egy 2 pontos gote mindkét játékosnak, ha a

fekete lép elsőnek, akkor a fehér követ befoglalja 2 pontért, ha pedig a fehér lép elsőként, akkor megmenti a követ, így az állás nulla pontot ér a feketének. A következő ábra:






 egy másik értelmezése az fenti állásnak, mellyel két új

jelölést is bevezetnek. Egy adott állást elemezve a kapcsos zárójel bal oldalán a fekete lépéseit szerepeltetjük, melyeket | jellel választunk el a fehér jobb oldalon található lépéseitől. Hűtési folyamatnál egyes mezőket úgy látjuk el jelekkel, hogy azok a területek lehetséges elfoglalásának színét és értékét tükrözzék. Mivel az átlagos végeredmény 1, a jelenlegi ábránál, ezért a fehér korongra 1 fekete jelet helyezünk el, mivel ő uralja a területet. Hűtési játéknál minden egyes lépésnek jelet kell adnia, vagy elvennie.

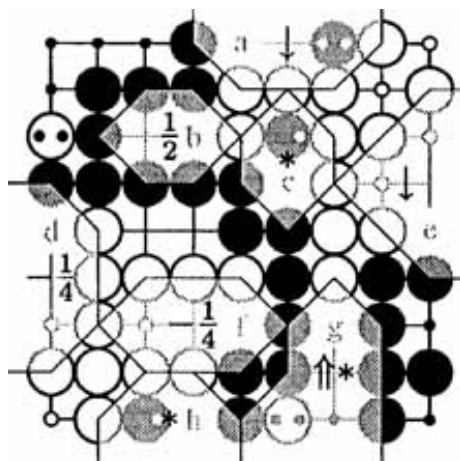
Amikor a fekete hűtés nélkül lép, akkor 2 pontot kap. Ha hűtött játéknál lép, akkor a lépést az érintett jelek értékével adóztatjuk, így a fekete lépés értéke 0 lesz. Mivel a fehér, köve megmentésével elveszi a fekete jelét a kövéről, ezzel megterhelve a lépés értéke szintén 0. A $\{0|0\}$ játékokat *csillagnak* nevezzük és egyszerűen *-gal jelöljük. Észrevehetjük, hogy a dame pontok is hasonlóak az előzőhöz és $\{0|0\}$ -t eredményeznek, így hűtés nélkül ők is *-ok lennének. Viszont mivel a dame pontoknál nincs jelölés, így még a *-nál is rosszabbak, szimplán 0-nak fogjuk tekinteni ezeket. A hűtött játék adóztatása elveszi a játékosok kedvét, attól hogy hasonló helyekre tegyenek. Mivel a * egy végtelenül piciny szám és $* + * = 0$, ezért az olyan törteknél, mint például az $\frac{1}{16}$ egyértelműen kisebb, a $-\frac{1}{16}$ -nál viszont nagyobb. $* = (-*)$, viszont a $* \neq 0$. Mindemellett a * a 0-val összehasonlíthatatlan, nem kisebb, nem nagyobb és nem is egyenlő, ez egy külön kategóriát alkot. Ha egy számhoz hozzáadjuk a csillagot például $n + *$ akkor úgy, mint a törtek esetén, egyszerűen egybeírhatjuk: $n*$. Mint már említettük, ha a végjáték összege például $5\frac{1}{4}$ és a fekete jön, akkor 6 ponttal nyerhet, viszont ha a fehér következik, akkor a fekete csak 5 ponttal nyerhet. Mi a helyzet az $5\frac{1}{4}*$ -gal? Vagy az $5*$ -gal? Mivel a * nagyon parányi szám, ezért az $5\frac{1}{4}*$ kerekíthető $5\frac{1}{4}$ -re, így az eredmény az előző lesz. Ha az eredmény $5*$, akkor a *-ot +1-re vagy -1-re kerekíthetjük, vagyis ha a fekete kezd, akkor 6 ponttal nyerhet, viszont ha a fehér kezd, akkor a fekete csak 4 ponttal szerezhethet többet a fehéرنél.

John Conway felfedezett egy olyan lehetséges állást, melynek $\{0|*\}$ az eredménye és ezt elnevezte *felnek*:  = $\{0|*\} = \uparrow$, jelölése: \uparrow . A $*$ -hoz hasonlóan a \uparrow is parányi, viszont ez már szigorúan pozitív. Két \uparrow összege a felfelé mutató dupla nyíl ($\uparrow\uparrow$), ami szintén parányi szám. A nyilak összegére inkább az $n.\uparrow$ jelölést használjuk, ahol $n \geq 2$. A \uparrow nem összehasonlítható a $*$ -gal, viszont $n \geq 2$ esetén $n.\uparrow > *$.

Ezen jelek hogyan befolyásolják a végeredményt? A $3\uparrow^*$ esetén, mivel a $*$ és a \uparrow összehasonlíthatatlan és mindkettő parányi, ezért 4 vagy 2 a végeredmény attól függően, hogy ki lép először. Viszont ha az állás összege $3\uparrow$ vagy $3\uparrow^*$, akkor a végeredmény csak 4 vagy 3 lehet, mivel a \uparrow pozitív és a $\uparrow\uparrow > *$. A fel nyíl ellentettje a lefelé mutató nyíl. Jelölés: \downarrow (Továbbá $\uparrow = -\downarrow$). A 2.8. ábrán láthatjuk az egy követ tartalmazó folyosók értékeit a fekete és fehér szemszögéből is. Ha a fehér a fekete \uparrow^* vagy a \uparrow területén játszik, akkor mindig \uparrow^* értéket kap. Viszont egy idő után $*$ lesz az eredmény, amit már nem érdemes egyből meglépnie.

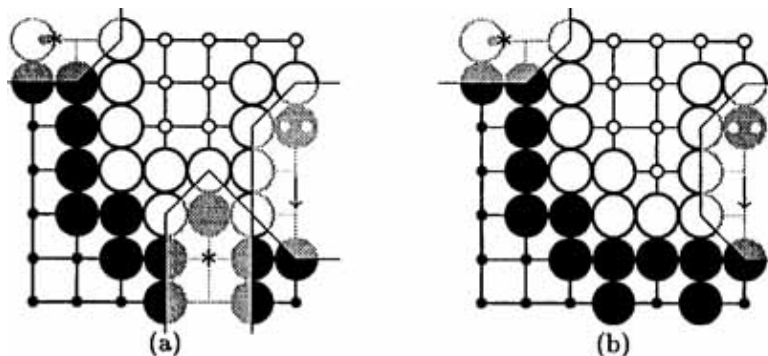
POSITION	AREA	INCENTIVES	
		BLACK	WHITE
	*	*	*
	\uparrow	\downarrow	\uparrow^*
	$\uparrow\uparrow^*$	$\downarrow\downarrow^*$	\uparrow^*
	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow\downarrow$	\uparrow^*
	$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow^*$	$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow^*$	\uparrow^*

2.8. ábra: A folyosók értékei a fekete játékos számára hűtött játék esetén



2.9. ábra: A 2.7. ábra értékei a fekete szemszögéből.

A 2.9. ábrán láthatjuk, hogy hűtött játéknál, a jelen helyzetben mindkét félnek ugyanannyi jele van és az összeg $*$ -ra jön ki az egyszerűsítések után. Ha a fehér a $*$ területek valamelyikére lép, akkor az eredmény 0, de szerez 1 pontot. Ha a $\uparrow*$ -ra lép, akkor a végeredmény, mivel a $*$ -ból kivonjuk a $\uparrow*$ -ot \downarrow lesz és mivel ez negatív, így ez is előnyös a fehérnek. Ez a kétféle lépés kedvező a fehérnek ebben a játékban. A többi esetben, a fekete alakíthatja úgy a játékot, hogy döntetlenre végződjön. A legjobb lépés a fehérnek a $\uparrow*$, ugyanis így szeretheti a legtöbb $\uparrow*$ értéket. Ha egy játékos megtalálta az összes parányi pontot, de nem összegezte a játék értékét, akkor az eddigi jelölések mellett, az ellenfél \uparrow ($n \geq 2$) régiójánál lépve nyerhet.



2.10. ábra: A 2.5. ábrák matematikai megoldása

A 2.10. ábrán láthatjuk a 2.5 feladatok matematikai megoldásait. Összegezve: az (a) eset \downarrow a (b) eset pedig $\downarrow*$. Vagyis az (a) szituációban valamelyik $*$ -ot kell kiaknáznia a fehérnek, hogy nyerhessen, mert így az eredmény még mindig \downarrow marad. A (b) esetben pedig, ha a \downarrow -re lépne, akkor a 0 és a $*$ összehasonlíthatatlansága miatt veszítene, viszont ha a $*$ -ra lépne, akkor az eredmény \downarrow maradna és nyerne.

Pluszok és mínuszok

A következőkben olyan pozíciókról beszélünk, melyek nagyon hasonlítanak a $-$ -re, csak most nem 1 követ foglalhat be a fehér a fekete folyosóban, hanem többet. A következő



állásnak 3 lejáttszása van: a fekete azonnal elzárja a folyosót, a fekete az utolsó előtti pillanatban zárja el a fehér betörését, vagy esetleg megengedi, hogy a fehér megmentse a 2 követ. A lejáttszásokhoz tartozó értékek rendre $\{0|0|-2\}$. Azért -2 , mert a fehér megmenti a fekete által el nem foglalt területet. A fenti zárójelben a játéka lejáttszásának jelölését látjuk, a gyökere az az állás, amit elemzünk és az elágazásokat a $|$ -k jelentik. A gyökérből való első elágaztatást a legtöbb egymás melletti $|$ jelöli. Conway a fenti állást $+_2$ -nek (plusz kettőnek) nevezte el. A fehér egy lépés után veszélyezteti a feketét egy x pontos gote lépéssel (jelen esetben 4 fekete pont, nem pedig 2 fehér kő). Ekkor azt írjuk, hogy $+_{x-2}$. Vagyis



$= +_1$, $= +_4$ és $= \uparrow = +_0$ (ilyenkor \uparrow -t írunk, mert egyrészt

egyszerűbb, másrészt pedig egészen más tulajdonságai vannak, mint az általános $+$ -nak). A fenti állás ellentettje, ha felcseréljük a fekete és fehér kőket, a $-_2$ lesz (mínusz 2). Ezek is nagyon kis számoknak feleltethetők meg. Hogyan hasonlíthatjuk a többihez? Legyen x pozitív szám, például $1/2$ vagy $1/2^*$. Ekkor $+_x$ egy pozitív, végtelenül kicsi szám, jóval kisebb, mint a \uparrow . Mindegy mennyi $+_x$ -et adunk össze, azok értéke mindig kisebb lesz a \uparrow -nél. A $+_4$ -re előrébbvaló válaszolni, mint a $+_3$ -ra, hiszen a $+_4$ közelebb van a 0 -hoz, mint a $+_3$. Ha kettőnél több üres hely van, akkor a nulla n . hatványaként felírjuk, hogy hány lépés után ér el a játékos egy adott álláshoz és $|$ jellel választjuk el, hogy melyik álláshoz. A következő



ábránál

$$= \{-2|0||0||0\}$$

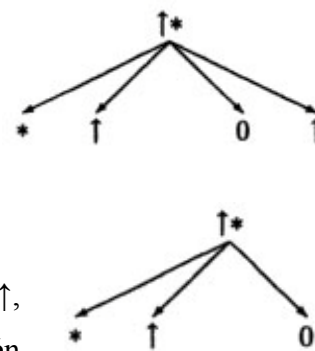
például $-_2|0^3$, vagyis a fekete 3 lépés után éri el a $-_2$ -es állást. Továbbá $0^4|+_2$ esetén a fehér 4 lépés után éri el a $+_2$ -es állást

Az II. függelékben kapott helyet az eddigi parányi számok prioritási táblázata a fekete szemszögéből.

Játékegyszerűsítés

Két egyszerűsítést ismertetünk: az **előnytelen lépések törlése** és a **visszatámadható lépések egyszerűsítése**.

Előnytelen lépések törlése: Ha egy játékosnak két lépési lehetőség közül az egyik mindig jobb, mint a másik, akkor nincs értelme a rosszabbat választania. Vegyük például, ha már csak egy \uparrow és egy $*$ lépésünk van. Az összeg $\uparrow*$ és a fehérnek és a feketének is egy-egy lépési lehetősége van ezek közül. Ha a fekete a \uparrow -t választja, akkor a $*$ lépést hagyja meg a fehérnek, ha a $*$ -t játssza meg, akkor a \uparrow lépést hagyja meg a fehérnek. A fehér léphet a \uparrow -re ami neki $\uparrow*$ -t ér és az eredmény $* + * = 0$ lesz, vagy léphet a $*$ -ra és egy \uparrow lépést hagy meg a feketének.



Mivel a fehér számára a kisebb érték a jobb és tudjuk, hogy $0 < \uparrow$, ezért a végső \uparrow -t törölhetjük anélkül, hogy a játék eredményén változtatnánk. Azt mondjuk, hogy a fehér 0 értéke dominál a \uparrow felett és így azt törölhetjük. Figyeljük meg a következő ábrákat:



$$b < c < a$$

Fehérnek b a legjobb lépés

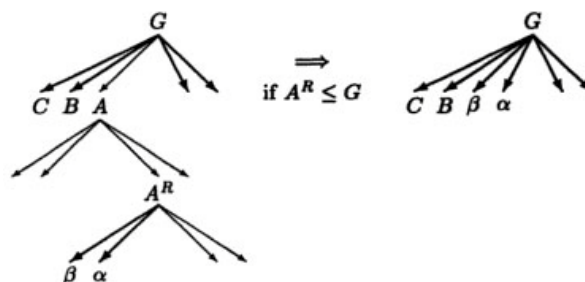


$$a < c, \text{ de az } a \text{ és } b \text{ összehasonlíthatatlan}$$

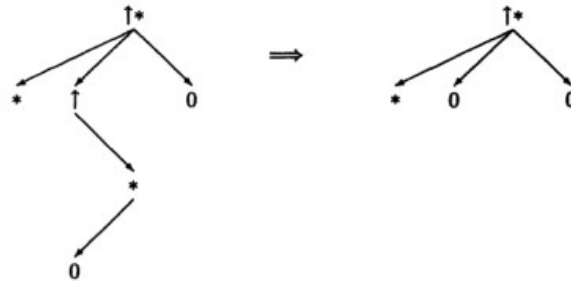
Fehérnek a -ra vagy b -re érdemes lépnie.

Visszatámadható lépések egyszerűsítése: Ha a fekete lépésére a fehér úgy tud visszatámadni, hogy az az állás neki kedvezőbb, mint az eredeti, akkor a fekete lépését visszatámadhatónak nevezzük. Csak akkor érdemes ilyen helyre lépünk, ha itt szeretnénk folytatni a játékot a fehér válasza után. Ha egy G játékban a fekete az A állásba lép, melyben a fehér visszatámadhat, úgy hogy az neki a G -nél nem rosszabb A^R állást eredményezi, akkor a játék egyszerűsíthető úgy, hogy G -ben A helyett a fekete lépéseit írjuk A^R -ből.

Vegyük például az előző egyszerű problémát. Vagyis csak egy \uparrow és egy $*$ lépésünk van. Ha a fekete a $*$ -t választja, akkor egy \uparrow lépés marad, a fehér lépésével



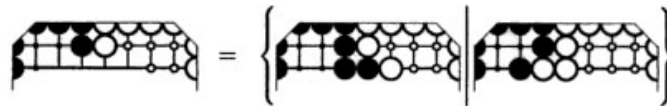
az eredményt $*$ -ra tudja módosítani és mivel $* \leq \uparrow*$, így a \uparrow lépés helyébe a fekete $*$ állásból léphető lépéseit írhatjuk. A $*$ állásból a fekete csak 0 eredményt tud elérni, így a $\uparrow*$ állásunk játékfáját tovább egyszerűsíthetjük.



A 3.1. ábrán egy kicsit komplexebb példát láthatunk. Ha a fehér b -re rak, a fekete az a lépésével atarit ad a b -nek, amit a fehér a c lépéssel tud megvédeni. Ugyanez fordítva is lejátszható, ha a fekete c -re tesz, akkor a fehér a d lépésével a b lépés megtételére készíti a fekete játékost.



3.1. ábra: Melyik a célszerű lépés?



Könnyen belátható, hogy ezen állás eredménye $\{0|0\} = *$

Kombinatorikus játékelmélet

Definíciók:

Egy G játék két játékos (Bal és Jobb) közötti játékhalmazok párjaként definiálható. Jelölés: $G = \{\mathcal{G}^B | \mathcal{G}^J\}$, ahol G egy egyszerű játékállás és \mathcal{G} pedig játékok halmaza. A szakirodalomnak megfelelően, ezt a megszorítást könnyen figyelmen kívül hagyhatjuk és G -t írhatunk mindkettő helyett. Értelemszerűen, ha a Bal következik, akkor bármelyik $G^B \in \mathcal{G}^B$ játékba léphet és ezután a másik Jobb játékos következni. A G rákövetkezői a \mathcal{G}^J és \mathcal{G}^B elemei.

Ha egy játékos saját körében nem tud lépni (például \mathcal{G}^J üres halmaz, amikor a Jobb következik) akkor veszít.

A játékokat egyszerűsítjük a kaposos zárójelek elhagyásával, ahol lehet:

$$G = \{ \{G_1^B, G_2^B, \dots\} \{G_1^J, G_2^J, \dots\} \} = \{G_1^B, G_2^B, \dots | G_1^J, G_2^J, \dots\}$$

A több | jelzi a játékfa nagyobb szintjét: $\{G_1 | \{G_2 | G_3\}\} = G_1 || G_2 | G_3$

A játék negatívja a játékosok szabályának inverze:

$$-G \stackrel{\text{def}}{=} \{-G^J | -G^B\}, \text{ ahol } -G^J \stackrel{\text{def}}{=} \{-G^J\}_{G^J \in \mathcal{G}^J}$$

Két játék összege $G + H \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathcal{G}^B + H) \cup (G + \mathcal{H}^B) | (\mathcal{G}^J + H) \cup (G + \mathcal{H}^J)\}$, ahol

$\mathcal{G}^B + H \stackrel{\text{def}}{=} \{G^B + H\}_{G^B \in \mathcal{G}^B}$. Az értelmezése, hogy a játékos egymás mellett G-n vagy H-n játszhat. Ha egy játékos nem tud lépni sem a G játékban, sem H játékban, akkor a \mathcal{G} és \mathcal{H} üres halmazok és ekkor veszít. Ahol két játék összege félreérthetetlen a G+H helyett egyszerűen egybeírva GH-t írunk.

$G_1 \geq G_2$ ha a Balnak legalább olyan jó a $G_1 + H$, mint a $G_2 + H$. Ha a Bal nyer $G_2 + H$ játéknál elsőnek (vagy másodiknak) lépve, akkor nyerne $G_1 + H$ játéknál is elsőnek (vagy másodiknak) lépve. $G = H$, ha $G \geq H$ és $H \geq G$. Ezen definíciók által a véges játékok ekvivalenciaosztályai matematikai csoportot alkotnak a + operátorral és a \geq parciális rendezéssel, ahol a zérus játék ($G = \{|\}$) azt jelenti, hogy a második játékos nyer. Továbbá $G \geq 0$, akkor és csak akkor, ha a Bal nyerni tud a G játéknál másodikként lépve. $G \geq H$ helyett $G - H \geq 0$ -t tesztljük ahol $G - H = G + (-H)$.

A G és H játék összehasonlítása 4 különböző eredményhez vezethet.

Az utolsó esetben G és H összehasonlíthatatlan:

$G > H$	$G - H > 0$	$G - H$	nyerő a Bal játékosnak
$G = H$	$G - H = 0$	$G - H$	nyerő a másodiknak lépőnek
$G < H$	$G - H < 0$	$G - H$	nyerő a Jobb oldali játékosnak
$G H$	$G - H 0$	$G - H$	nyerő az elsőnek lépőnek

Kanonikus formák

Conway felfedezte, hogy minden G játékhoz egyértelműen található egy olyan minimális (legkisebb játékfájú) G' játék melyre $G = G'$. Ekkor G' -t a G kanonikus formájának hívjuk és a következő két operátor alkalmazásával kaphatjuk meg. Legyen $G = \{A, B, C, \dots | D, E, F, \dots\}$.

Kedvezőtlen lépések törlése

Ha $B \geq A$, akkor B domináns A-val szemben és a játékot egyszerűsítjük A-val: $G = \{B, C, \dots | D, E, F, \dots\}$

Hasonlóan, ha $E \leq D$, akkor az E dominál a D felett, így $G = \{A, B, C, \dots | E, F, \dots\}$

Visszatámadható lépések egyszerűsítése

Ha A-nak van egy A^J jobb oldali lépése úgy, hogy $A^J \leq G$, akkor a Bal A lépését a Jobb visszatámadhatja A^J -re. Ilyen esetekben A-t helyettesíthetjük A^J bal oldali választásaival G-ben. Ha $A^J = \{\alpha, \beta, \dots \mid \gamma, \delta, \dots\}$ akkor $G = \{\alpha, \beta, \dots, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}$

Hasonlóan létezhet $D^B \geq G$, Jobb oldalnak D egy visszatámadható lépése.

Definiáljuk újra a korábbi jelöléseinket, a játékelméletet alkalmazva:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{def}}{=} \{\} \\ n &\stackrel{\text{def}}{=} \{n-1\}, \quad n > 0 \\ \frac{m}{2^k} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{m-1}{2^k} \mid \frac{m+1}{2^k} \right\} \end{aligned}$$

Aritmetikai műveleteket ugyanúgy lehet rajtuk értelmezni, mint a normál számok esetén. A számok elkerülési tétele ([6] 145. oldal) azt állítja, hogy, ha G szám és H nem, akkor a G+H játék optimális lépését a H játék biztosítja. A kanonikus formákat egy levélelemeiben számokat tartalmazó kisebb fába tömöríthetjük. Minden számra egy a játék egy eredményeként kell tekinteni, ahol a pozitív számok a Balnak jók. Az 1-et az $1/2 = \{1|0\}$ -ből lenne érdemes származtatni, mert az is kielégíti a $\{1|0\} + \{1|0\} = 1$ egyenletet, bár ekkor sérülne a számok elkerülési tétele. Így az 1-et az $1/2 = \{0|1\}$ -ből származtatjuk. Másik fontos tény hogy minden olyan játék mely $g = \{a|b\}$, ahol $a < b$ számok, szintén szám. Nevezetesen a g a legegyszerűbb szám az a és b között. Ha a és b között található egész szám, akkor g értéke a legkisebb abszolút értékű egész szám lesz. Ha nincs egész szám az a és b között, akkor g a legkisebb nevezővel rendelkező a és b közötti diadikus, kettesalapú tört: $\frac{i}{2^j}$, ahol $i \in \mathbb{Z}$ páratlan és $0 < j \in \mathbb{Z}$. Például $\left\{ \frac{5}{8} \mid \frac{15}{16} \right\} = \frac{3}{4}$, mert olyan $\frac{i}{2^j}$ alakú legkisebb nevezőjű törtet kell keresünk, melyre $\frac{5}{8} < \frac{i}{2^j} < \frac{15}{16}$.

A 3.8. ábra a parányi számokat definiálja, felülmúlnak minden negatív számot és kisebbek minden pozitív számnál. Igazolhatók a következő tények:

- * összehasonlíthatatlan a 0, $+_r$ vagy \uparrow jellel.
- minden $n \geq 2$, $n.\uparrow > *$
- minden $r_1 > r_2 > 0$ törtre: $\uparrow > +_{r_2} > +_{r_1} > 0 > -_{r_1} > -_{r_2} > \downarrow$

Ellentétben az eddigi számokkal, a játékosok több pontot szereznek egy-egy lépéssel.

A *Bal Stop* azt a maximális nagyságú számot jelenti, melyet a Bal képes elérni, ha elsőnek lép, míg a Jobb tökéletesen játszik. Alakilag, a bal stop és a jobb stop rekurzívan adható.

$$BS(G) = \begin{cases} G & \text{Ha } G \text{ szám} \\ \max \{BS(H): H \text{ Bal lépése } G\text{-nek}\} & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$JS(G) = \begin{cases} G & \text{Ha } G \text{ szám} \\ \max \{JS(H): H \text{ Jobb lépése } G\text{-nek}\} & \text{egyébként} \end{cases}$$

$* \stackrel{\text{def}}{=} \{0 0\}$	Csillag
$\uparrow \stackrel{\text{def}}{=} \{0 *\}$	Fel
$\downarrow \stackrel{\text{def}}{=} -\uparrow$	Le
$\uparrow* \stackrel{\text{def}}{=} \uparrow + * = \{0,* 0\}$	Fel-Csillag
$n.\uparrow \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{\uparrow + \uparrow + \dots + \uparrow}^n, n \geq 2$ $= \{0 (n-1).\uparrow + *\}$ $= \{0 (n-1).\uparrow*\}$	Dupla-Fel, Tripla-Fel, ...
$n.\uparrow* \stackrel{\text{def}}{=} n.\uparrow + *, n \geq 2$ $= \{0 (n-1).\uparrow\}, n \geq 2$	Dupla-Fel- Csillag,...
$\uparrow\uparrow \stackrel{\text{def}}{=} 2.\uparrow$	Dupla-Fel
$+_G \stackrel{\text{def}}{=} \{0 0 -G\}, G > r, r > 0 \text{ szám}$	G plusz
$-_G \stackrel{\text{def}}{=} \{G 0 0\}, G > r, r > 0 \text{ szám}$	G mínusz

3.8. ábra: Az alapvető parányi számok definíciója

A parányi számok bal és jobb oldali stopja zérus. Egy játék *meleg* (hot), ha a bal stopja nagyobb a jobb stopjánál. Egy játék *hideg* (cold), ha a játék értéke egy szám. Továbbá *langyos* (tepid) egy játék, ha egy számtól egy nem zérus parányi számmal tér el. Minden játék ebbe a 3 osztályba sorolható.

Hűtés (chilling)

A $G = \{G^B \mid G^J\}$ játék hűtve van egy nem negatív t számmal, amit G_t -vel jelölünk és ez a következőt jelenti: $G_t = \{G_t^B - t \mid G_t^J + t\}$, kivéve, ha néhány $r < t$, $\{G_t^B - r \mid G_t^J + r\}$ végtelenül közel van az x számhoz, mert ekkor $G_t = x$.

Itt a t egyfajta terhelés, „adó” amit a játékos a lépésért fizet. A nagyon nagy adóval rendelkező területre nem éri meg lépni. A gó játékoknál ez az adó a $t = 1$ szokott lenni.

Ösztönzők (incentives)

Ösztönzőknek nevezzük annak mértékét, hogy mennyire jó egy lépés. A bal ösztönzők halmaza a G játéknál: $\Delta^B \{G\} \stackrel{\text{def}}{=} G^B - G \stackrel{\text{def}}{=} \{H - G : H \in G^B\}$

Ezen ösztönzők az egyes lépések értékét mutatják a balnak. A jobb ösztönzők a $\Delta^J \{G\} = G - G^J$ formulából számolhatóak. Mindkét félnek a nagyobb ösztönző a jobb. Egy G játék ösztönzőinek halmaza: $\Delta \{G\} = \Delta^B \{G\} \cup \Delta^J \{G\}$. Az ösztönzők függenek a játékállástól, tehát $\Delta^B \left\{ \frac{1}{4} \mid 1 \right\} = -\frac{1}{4} \neq -\frac{1}{2} = \Delta^B \{0 \mid 1\}$, holott $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0 \mid 1$. Ezen számokat *formális ösztönzők*nek nevezzük, míg a kanonikus alakból származóakat *kanonikus ösztönzők*nek nevezzük. Például az $\left\{ \frac{1}{4} \mid 1 \right\}$ játék formális bal ösztönzője $-\frac{1}{4}$, míg a kanonikus ösztönzője $\frac{1}{2}$.

Melegítés (warming)

A gó játéknál a melegítés az 1 ponttal való hűtésének inverze. A melegítés bármelyik olyan függvény, ami az s számot felmelegíti t -re, ahol s és t mindkettő végtelenül közel vannak 1-hez. A melegítés jele: \int_s^t . A gó melegítő operátorunk, ami az 1 ponttal hűtés inverze lesz, az \int_{1*}^1 . Mivel csak ezt fogjuk használni egyszerűen \int -el fogjuk jelölni. Egy $G = \{G^B \mid G^J\}$ mellett

$$\int G = \begin{cases} G & , \text{ ha } G \text{ páros} \\ G^* & , \text{ ha } G \text{ páratlan} \\ \{ 1 + \int G^B \mid -1 + \int G^J \} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Egy gó állás *páros* (illetve *páratlan*), ha az üres metszéspontok és a foglyok számának összege páros (illetve páratlan). Ezt a játék *paritásának* hívjuk. A fogolyejtés nem befolyásolja a játék a paritását. Egyszerűen belátható, hogy ha fogollyá válik egy csoport, akkor a csoport elemei fogolyként és üres területként is hozzáadódnak az álláshoz. Tulajdonságai:

Paritások összeadása: két páros vagy páratlan játék összege páros, egy páros és egy páratlan játék összege pedig páratlan.

Paritás váltakozása játék során: egy páros játék minden rákövetkezője páratlan és fordítva, a páratlan játékok rákövetkezője páros.

Egy gó állás akkor általános, ha a végigjátszás után minden rácspont élő követ tartalmaz, vagy területet jelent az egyik játékosnak, tehát a végállás ko- és szekimentes.

Összefoglaló lemmák és tételek a gó kombinatorikus játékelméletből

Következőkben legyen G egy páros általános gó állás kanonikus formában.

Lemma 1: A végső állása a G -nek páros, akkor és csak akkor, ha az értéke páros.

Tétel 1: $G = \lfloor G_1 \rfloor$.

Legyen az $f(G) = \lfloor^{-1} G$ függvény hűtése G -nek, mely külön kezeli, ha G_r szám és $r < 1$:

$$f(G) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} n & \text{Ha } G \text{ } n \text{ vagy } n^* \text{ alakú} \\ \{ f(G^B) - 1 \mid f(G^J) + 1 \} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Lemma 2: G és minden G -ből elérhető állásnál 3 lehetőség van:

- a játék bal stopja nagyobb a jobb stopjánál
- a játék n alakú, ahol n egész
- a játék n^* alakú, ahol n egész.

Lemma 3: $G = \lfloor f(G)$.

Lemma 4: Legyen $t = 1/2^i$ és H olyan játék, melynek végállásai $2t$ többszörösei. Ekkor H hőmérséklete zéró, vagy legalább t . Továbbá H_t végállásai t többszörösei

Lemma 5: Ha egy G játéknak az átlaga $i/2^j$, ahol i páratlan, akkor G hőmérséklete legalább $1 - 1/2^j$.

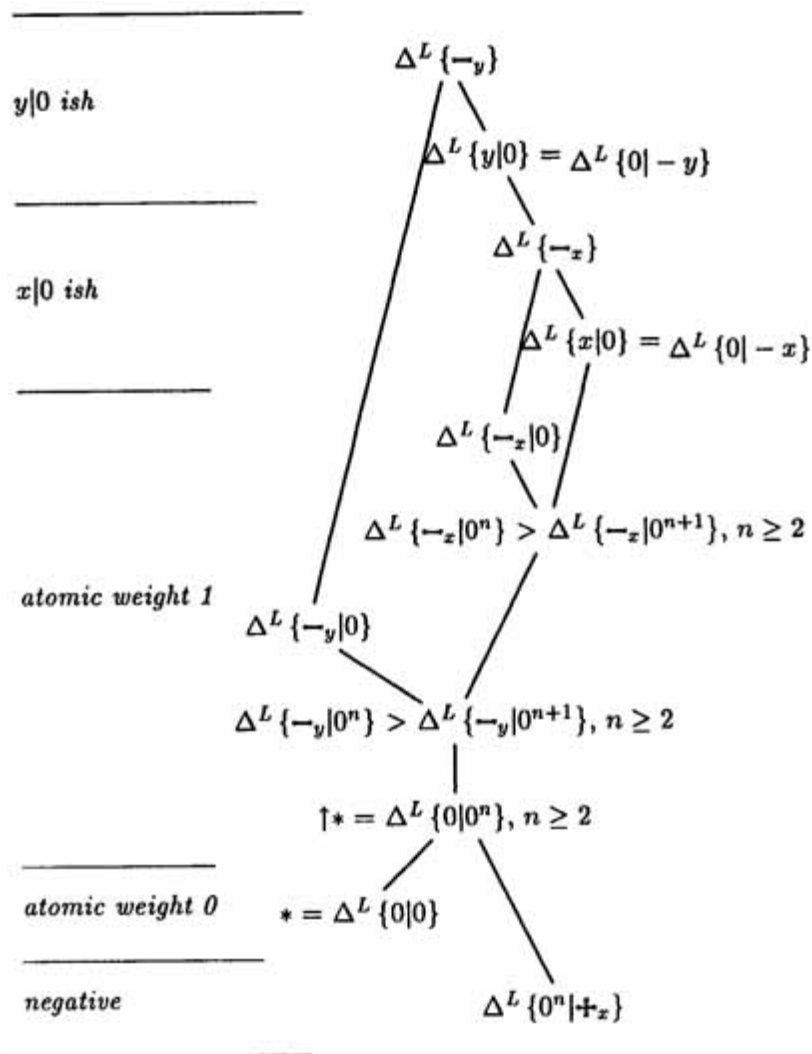
Lemma 6: $f(G) = G_1$.

Tétel 2: Egy n hosszúságú, $n-2$ jellel rendelkező, hűtött blokkolt folyosó értéke 2^{1-n} ($n \geq 1$).

Tétel 3: Egy n hosszúságú, $n-4$ jellel rendelkező, hűtött blokkolatlan folyosó értéke 2^{3-n} ($n \geq 2$)

Tétel 4: Egy x pontos gote lépéshez vezető $x+n-1$ jellel rendelkező n hosszúságú hűtött folyosó értéke: $0^{n+1}|2-x$.

Tétel 5: Legyen $\{G_i\}$ mindegyike $\{x|0^n\}$ vagy $\{0^n|-x\}$, ahol bármely kettő összege nem zéró. Ha bal nyerhet $\sum G_i - n$, akkor a 4.1. ábrán szereplő rendezés szerint nyerhet. Minél magasabban van egy lépés, annál jobb az adott helyre lépni.



4.1. ábra: Bal oldali parányi számok prioritása, ahol $y > x > 0$ számok

Tétel 6: $-x|0^n = n \cdot (\downarrow *) - \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ olyan kicsi, hogy $m \cdot \varepsilon < \uparrow$ minden $m \geq 0$ -ra, ahol $m \cdot \varepsilon$ az m darab ε összege

Tétel 7: Legyen F és G játék. F kanonikus formában adott. $F=G$ akkor és csak akkor, ha a következő 4 feltétel mindegyike teljesül:

- o $\forall F^B \exists G^B$ melyre $G^B \geq F^B$
- o $\forall F^J \exists G^J$ melyre $G^J \leq F^J$
- o $\forall G^B$ esetén igaz, hogy $G^B \not\geq F$
- o $\forall G^J$ esetén igaz, hogy $G^J \not\leq F$

Az első két feltétel azt biztosítja, hogy F minden lépésére van egy legalább ugyanolyan jó lépése G-nek, a második kettő pedig azt, hogy G egyik lépése sem lehet jobb F-nél.

További definíciók:

- $b_i \stackrel{\text{def}}{=} a$ blokkolt folyosók hűtött és normalizált értékeinek halmaza
- $\#b \stackrel{\text{def}}{=} b_i$ számossága
- $s \stackrel{\text{def}}{=} a$ legrövidebb blokkolatlan folyosó hűtött és normalizált értéke
- $u_j \stackrel{\text{def}}{=} a$ többi (legrövidebbet nem tartalmazó) blokkolatlan folyosó hűtött és normalizált értékeinek halmaza

Ha nincs blokkolatlan folyosó, akkor $s=0$, ha több legrövidebb folyosó van, akkor csak egyet hagyunk ki az u_j halmazból.

Egy csoport *foglalatának* hívjuk az olyan üres rácsponthoz, ahol a hozzá kapcsolódó csoport összes többi életét elfoglalva atariba kerül a csoport. Ezért az atari előtt, vagy rögtön utána a csoport megmentéséért érdemes elfoglalni ezt a foglalatot.

Tétel 8: Egy foglalattal rendelkező g játék értéke

$$g = \begin{cases} -1+s+\sum b_i+\sum u_j & \text{Ha } \sum b_i \geq 1 \\ (1+\sum b_i)*s/2+\sum u_j & \text{Ha } \sum b_i \leq 1 \text{ és } s > 0 \\ \{x-2 \mid 0^{1+\#b}\} & \text{Ha } \sum b_i < 1 \text{ és } s = 0 \end{cases}$$

ahol x a támadott csoport értékétől függ.

A felsorolt definíciók és tételek a végjátékok matematikai alapjaiul szolgálnak. A tételek és lemmák bizonyításait hely hiányában kihagytam, azonban az érdeklődők figyelmébe ajánlom az [5] irodalmat, melyben angol nyelven a megtalálhatók. A I. függelékben egy, a 9 danos játékosokat is zavarba ejtő állást láthatunk, melyet az eddig felsorakoztatott eszközökkel meg lehet oldani. Habár a 9 danos játékosok a játék matematikája helyett, inkább saját tapasztalataik alapján döntenek közel optimálisan.

Végállások

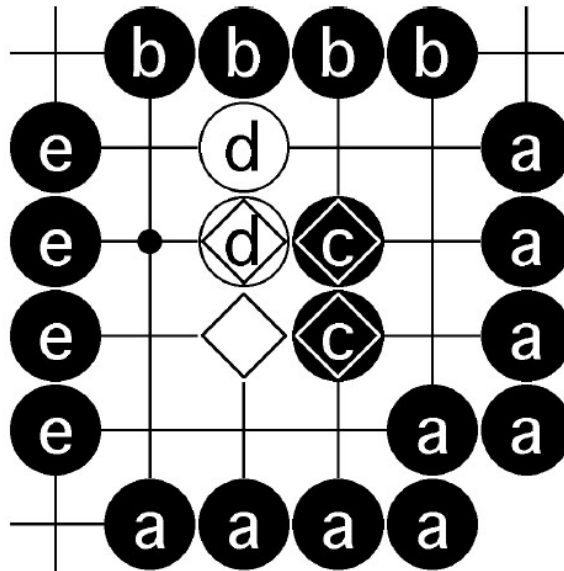
Ha már a végjátékon is túl vagyunk és mindkét játékos passzolt és megegyeztek a területeken, akkor következhet a végállások elemzése. A programoknak elsődleges, és mindennél fontosabb egy alakzatról kideríteni, hogy az élő vagy halott. Ennek megállapítására az alapokat David B. Bensonnak köszönhetjük, aki 1976-ban hozta nyilvánosságra kutatását a feltétel nélküli élet elengedhetetlen feltételéről a *Life in the Game of Go* könyvben [1]. Mi is erre az írásra fogunk támaszkodni. További vizsgálatokat köszönhetünk Martin Müller, Markus Enzenberger, Dave Dyer, Howard A. Landman, Eric van der Werf valamint Thomas Wolf kutatóknak. Mivel általában a csoportok biztonsága statikus számításokkal nem bizonyítható, így sokszor kereséssel kell döntenünk. Habár egy jó statikus kiértékelő függvény korai előszámításai nagyban gyorsíthatják a kereséseket. A statikus elemzések szétbonthatják a kereséseket független alszámításokra, melyek exponenciális sebességnövekedést eredményeznek. A kövek biztonsága és az élet vagy halál eldöntése közel áll egymáshoz. Két különbség, hogy a kövek biztonságának igazolása lokális, kisebb, zárt régiókra korlátozódik. A nagyobb területeknél jelentősen nagyobb keresési területet kell átvizsgálni.

Szabályok, blokkok és régiók

A következő fejezetek algoritmusai nem érzékenyek a különböző pontszámítási szabályok alkalmazásaira. Így a japán és a kínai módszer szerint is számolhatunk. Azonban az öngyilkosság tiltott, mivel egyébként a feltétel nélküli biztonság Benson-féle feltétele sérülne.

Egy olyan szaknyelvet fogunk használni, melyet már részben a bevezetésben leírtam, de bevezetünk új fogalmakat is. A *blokk* (block) vagy *sztring* (string) a maximális számú összekapcsolt kövek halmaza a gótáblán. Minden blokkhoz tartozik egy szám, ami a hozzá kapcsolódó üres rácsponatok számát jelenti, ezt *életnek* (liberty) nevezzük. Az utolsó életüket is elvesztő blokkokat leütik, majd leveszik a tábláról. Ezen blokk(ok) kövei az ellenfél foglyaivá válnak. Az azonos színű blokkokkal határolt pontok halmazát *régió*nak (region) nevezzük. Egy régió azon blokkját, amelynek van szomszédja a régióon belül és a régióon kívül is *határoló blokk*nak (enclosing block) nevezzük. A régiót határoló blokk színe a *védő* (defender) színe, míg a másik szín a *támadó* (attacker) játékosé lesz. A *régió belseje* (interior)

a régió azon része, amely a határoló blokkokhoz nem kapcsolódik. Támadó és védekező kövek egyaránt lehetnek benne. Az 5.1. ábrán egy 15 pontot határoló régiót láthatunk. A határoló blokkok az a, b, e jelűek, a régió belseje 4 pontot tartalmaz, ezek \diamond jelet kaptak. A c és d blokkok a régió belsejében vannak.

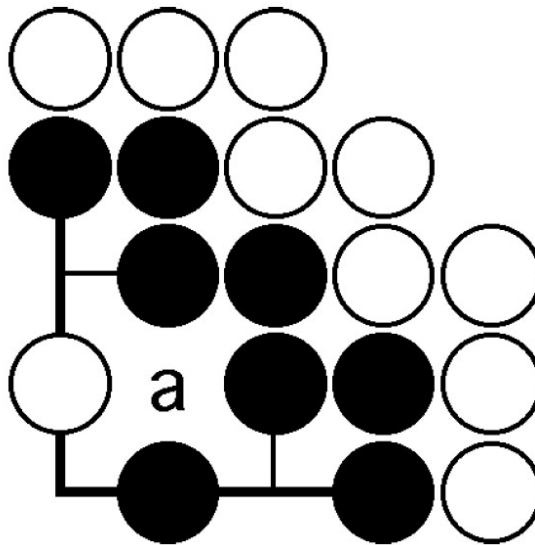


5.1. ábra: Blokkok és régiók

Blokkok és területek biztonsága

A gó programokban a blokkokat és területeket általában taktikai keresésekkel javított heurisztikus kiértékelő függvényekkel becslik. A heurisztikák gyakran a csoportok egymás befolyásolásán alapuló függvényekkel döntenek el, hogy szükséges-e védekező lépést tenni. Veszélyes esetben inkább védekezik egy lépéssel, minthogy az egész terület elvesztését fenyegetné. Ha védekezik, akkor egy pontot veszít, ami kevésbé problémás, mint kockáztatni a kövei vagy területe biztonságát.

Egy terület biztonsága nagy mértékben függ a körülötte található területek biztonságától. Habár egy terület akkor is biztonságban lehet, ha a kapcsolódó terület nincs biztonságban. Például az 5.2. ábrán a fekete kövek biztonságban vannak, de a környék nem terület, mivel a fehér szekit csinálhat, ha az a-ra lép. Ezen probléma eldöntése a heurisztikáktól nem elvárható. Ilyenkor az egyetlen megoldást a keresés szolgáltatja.



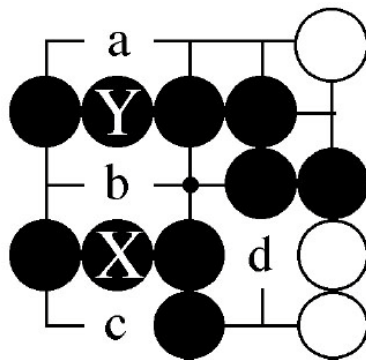
5.2. ábra: Biztonságos kövek, de nem biztonságos terület

Eljárások a biztonság igazolására

Egy rangsor vázolunk fel, amit Martin Müller a *Playing it Safe: Recognizin Secure Territories in Computer Go by Using Static Rules and Search* írásában is [4] követett. Minél lentebb van a létrának egy pontja, annál összetettebb, annál nehezebb a biztonság igazolása:

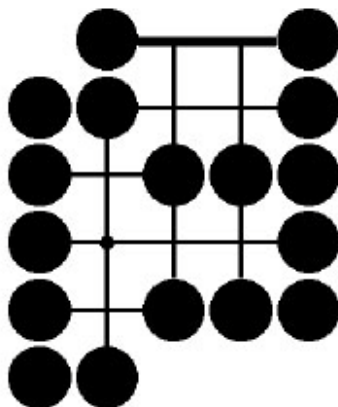
- Benson-féle feltétel nélküli biztonság
- Lokális váltakozó játék miatt biztonságos területek
- Nem lokálisan biztonságos 2 biztos étellel
- Egyéb értelemben biztonságos

A Benson klasszikus definíciója a feltétel nélküli élethez alapvető a kereséseknél. Olyan blokkok halmazát találja meg, amelyek akkor is biztonságban vannak, ha a támadó akármennyit léphet egymás után az adott terület befoglalásához. Az 5.3. ábrán a Benson általános példáját láthatjuk, ahol az 5*5-ös táblán a fekete blokkok és régiók feltétel nélkül biztonságban vannak.



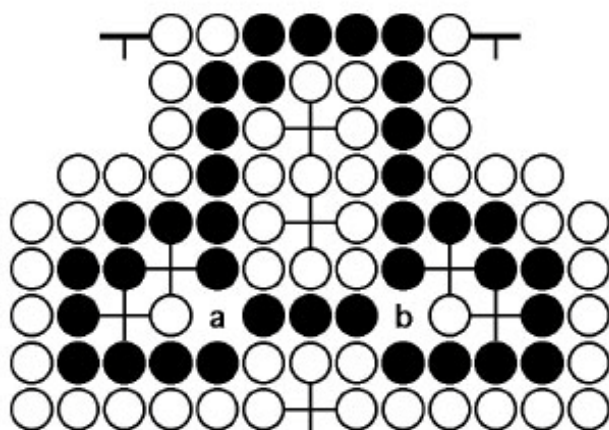
5.3. ábra: Feltétel nélküli blokkok és régiók.

A lokális váltakozó játék miatt biztonságos területek csak akkor igazolhatók, ha minden régióban egymástól függetlenül lejátszunk a játékot. Hagyjuk, hogy az ellenfél kezdjen minden régióban és a ko küzdelmeket is átengedjük neki. Az 5.4. ábrán a fekete nem tesz eleget a Benson-féle feltételnek viszont a lokális játék miatt biztonságban van. Igazolható, hogy egy esetleges fehér támadás ellen védett a terület, ha a fekete megfelelően védekezik.



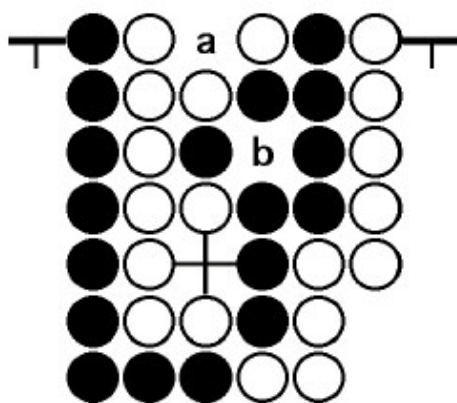
5.4. ábra: Lokális váltakozó játék miatt biztonságos terület

Az 5.5. kép remek példa a nem lokálisan biztonságos területre 2 biztos élettel. A fekete játékos a fehér támadását lokális küzdelmekkel nem tudja túlélni, így egy másik régiónál kell válaszolnia. Azaz ha a fehér az *a* régiónál támad, akkor a *b* régiónál kell válaszolnia és fordítva.



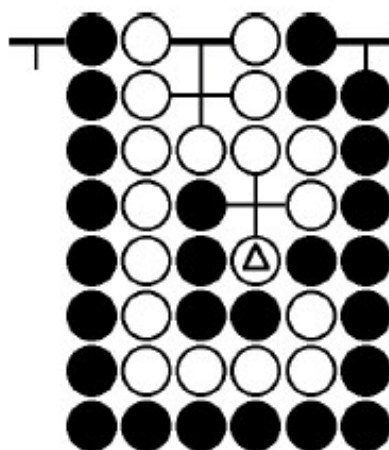
5.5. kép: Példa a nem lokális biztonságra

Végül van néhány példa a 2 biztos élet nélküli túlélésre. Például az 5.6. ábrán látható dupla ko-ban, mindkét játékos dinamikusan megtart 2 életet a ko kövek megszerzésével. Azonban egyik játékos sem tudja biztonságosan megtartani az életét az *a* vagy *b* pontnál.



5.6. ábra: Biztonságos blokkok dupla ko miatt

Az is megtörténhet, hogy a kövek atariban vannak, de a támadó nem nyer semmit a leütésükkel. Leggyakoribb esete a snapback, ami az 5.7. ábrán figyelhető meg. A snapback olyan sente lépés, melyre a válasz után nagyobb veszély vár a csoportra. A sarokban kialakított „Bent four” és a nakade alakzatokat is snapbacknek szokták tekinteni, melyről még később beszélek. Előfordulhatnak olyan bonyolult helyzetek, amelyeknél a kövek befoglalhatóak ugyan, de profitot nem eredményeznek. Ezek pontos megismeréséhez Toshio Ikeda: *On the Rules of Go* [2] könyvét érdemes elolvasni. Ha a kövek biztonsága a ko harc megnyerésén múlik, akkor azokat nem tekintjük biztonságosnak az elkövetkezendőkben.



5.7. ábra: Egyetlen biztonságos kő atariban

Benson-féle feltétel nélküli élet

A Martin Müller féle újraszövegezett Benson-féle tételt tárgyaljuk meg, mert ez lesz az alapja a további definícióknak. Az életek számolásában teljesen megegyezik az eredetivel, viszont mindenekelőtt vezessünk be egy új definíciót. *Kicsi határolt régióról* (small color-enclosed region) akkor beszélünk, ha a régió belseje üres, vagy az ellenfél színével van feltöltve. Az 5.8. ábrán érzékeltetjük a különbséget: az a kicsi határolt régió a jobb oldalon, de nem az a bal oldalon. Mindkét esetben az a régió belseje egy rácspontot tartalmaz.

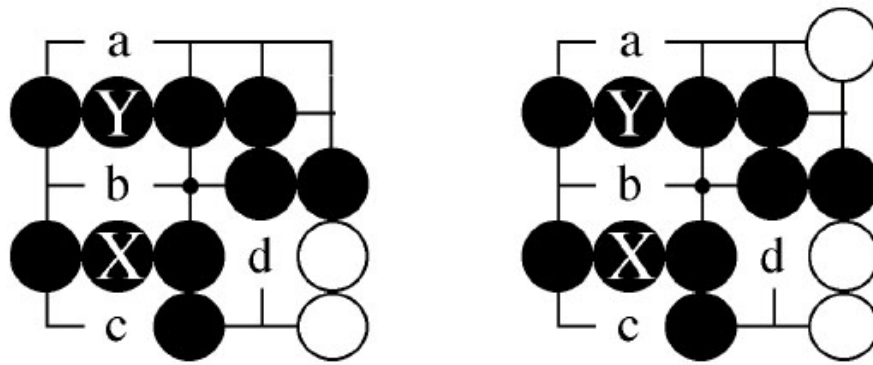
Egy kicsi határolt régió *egészséges* egy blokknak, ha a blokk szomszédos a régió összes üres pontjával. Az 5.8. ábra bal oldalán b , c és d egészséges X blokknak, de csak a b egészséges Y sztringnek. A jobb oldali ábrán viszont már az a is egészséges az Y blokknak.

Adott a B blokkok halmaza, r régió *vitális* a $b \in B$ blokknak ha

- r egészséges b -nek
- Minden határoló blokkja az r -nek benne van B -ben

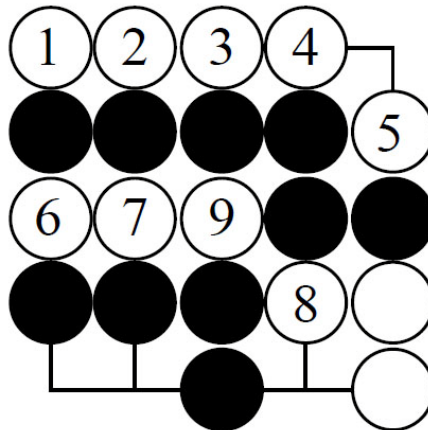
Benson-féle biztos *élet számlálója* (Sure Liberty Count) az r régióval szomszédos b blokknak figyelembe véve a B blokkok halmazát:

- $SLC_{\text{Benson}}(b,r,B) = 1$ ha r vitális b -nek B -ben
- $SLC_{\text{Benson}}(b,r,B) = 0$ egyébként



5.8. ábra: Kicsi és egészséges régiók, de csak a jobb oldali feltétel nélkül élő

Azt, hogy a bal oldali kép nem feltétel nélkül él az 5.9. ábra mutatja, mert az Y blokk egy leütési módszerét mutatja.



5.9. ábra: Nem feltétel nélkül élő blokk elfoglalása

1. Definíció:

A B blokkok halmaza feltétel nélkül életben van az R régiók halmazában, ha

$$\forall b \in B \sum_{r \in R} SLC_{Benson}(b, r, B) \geq 2$$

Lokális váltakozó játék miatt biztonságos területek

A lokális váltakozó játék esetén egyszerre csak egy adott régiót vizsgálunk. Mindig megengedjük, hogy a támadó kezdjen, majd az adott régióban felváltva lépünk és a harcokat hagyjuk, hogy a támadó nyerje. Ezen feltételek mellett szeretnénk biztosítani egy blokk életben maradásához szükséges életeteket. Az algoritmus megtalálja azon blokkokat,

amelyek végül is elérik a 2 biztos életet. A játék alatt az életek száma lecsökkenhet 1-re, de a játék végén mindig legalább 2 életünk lesz. Egy adott régió 1 vagy 2 életet is adhat a határoló blokkoknak. Ezen algoritmus generálta az 1-vitális és a 2-vitális régiók fogalmát, melyek szerint az adott régióból lokális játékkal 1 vagy 2 biztos élet érhető el. Ha csak 1-vitális egy régió, akkor a blokk(ok)hoz keresni kell egy másik, legalább 1-vitális régiót is, különben a blokk valószínűleg halott. Az 1- és 2-vitális régiók fogalma elsőként a [3]-as számú irodalomban jelent meg, ott tanulmányozhatjuk alaposabban.

2. Definíció:

Az $SLC(b,r,B)=k$, $k= 1..2$, ha b egy határoló blokkja r -nek és a védő rendelkezik olyan stratégiával, ami garantálja a következőket:

- vagy minden r határoló blokknak van legalább 2 élete r -ben
- Néhány blokknak $k-1$ élete van és a védő köre van

Ezen definíció magába foglalja azt, hogy a védő legalább k életet szerez az r régióban elhelyezett lépésével minden r -t határoló blokkjának. Ezzel a definícióval egy, a Bensonéhoz nagyon hasonló, definíciót adtunk meg a lokális játékhoz kapcsolódó életekhez. A lokális játék miatt biztonságos területekre felírhatjuk a Benson-féle egyenletet.

3. Definíció:

A B blokkok halmaza lokális váltakozó játéknak köszönhetően él az R régiók halmazát figyelembe véve, ha

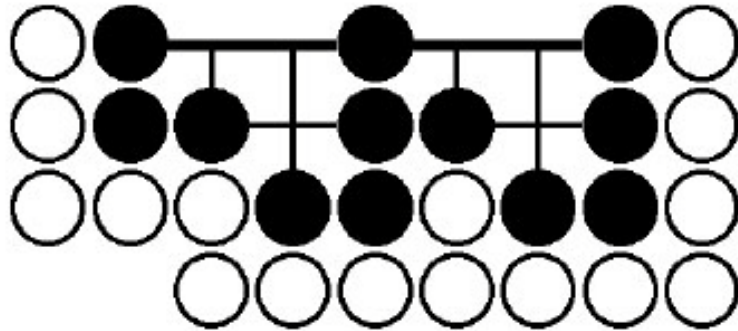
$$\forall b \in B \sum_{r \in R} SLC(b, r, B) \geq 2$$

A biztos életeknél van egy olyan szélsőséges változat, hogy akkor válik biztossá, ha előtte az ellenfél elfoglalja egy vagy több blokkunkat. Ez a definíció, viszont nem engedi meg, hogy bármelyik blokkot leüssék. A B -beli blokkok mindegyikének bármely támadó lépés után legalább egy élete van, de a védő játékos válasza után legalább kettő. Az 5.4. ábrán ilyen blokkokat figyelhetünk meg.

Láncok

A gyakorlatban sokkal gyakrabban fordulnak elő olyan blokkok, melyek 1-vitális régiókkal szomszédosak. Ezen blokkok általában második életüket egy kapcsolódó bloktól kapják, amelyeknek máshol van biztos élete. Az 5.10. ábrán látható egy példa.

A 4. és az 5. definíció után az egyszerű blokkok helyett a biztonságosan kapcsolódó blokkokról beszélhetünk.



5.10. ábra: A 3. definíció nem elegendő a biztonsághoz

4. Definíció: Láncok és láncfeltételek

A *lánc* (chain) blokkok és a blokkok összekapcsolásához szükséges láncfeltételek halmaza. Egy r régióban a védő stratégiája, hogy teljesítse a láncfeltételeket a C blokkjainak halmaza között, ha az biztosítja a következőket:

- C minden eleme egyetlen blokká olvasható
- vagy a védő következik
- vagy minden C -beli blokknak legalább 1 élete van az r régióban.

A láncfeltétel független a biztos életek keresésétől. A blokkok láncfeltétellel kapcsolódhatnak egy régióban, de biztos életük lehet egy másik régióból. Azonban innentől a láncfeltételeket és a láncban foglalt összes biztos életét egyidejűleg kell kezelni.

5. definíció:

Legyen a B blokkok halmaza láncok halmazává bontható

$$C_B = \{c_1, \dots, c_n\}, c_i \subseteq B$$

Legyen egy C lánc biztos életének számlálója az r régióban a következőképpen definiálva:

$$SLC(c, r, B) = \max_{b \in c} SLC(b, r, B)$$

ahol a $SLC(b,r,B)$ számítások arra a stratégiára korlátozódnak, amelyik kezeli c minden láncfeltételét az r régióban. Vagyis nem sérülhet a láncfeltétel egyik régióban sem. Továbbá a B blokkok halmazát (a lokális játék miatt) az R régiók halmazán élőknek hívjuk, ha létezik olyan C_B részhalmaza B -nek, melyre teljesül, hogy

$$\forall c \in C_B \sum_{r \in R} SLC(c, r, B) \geq 2$$

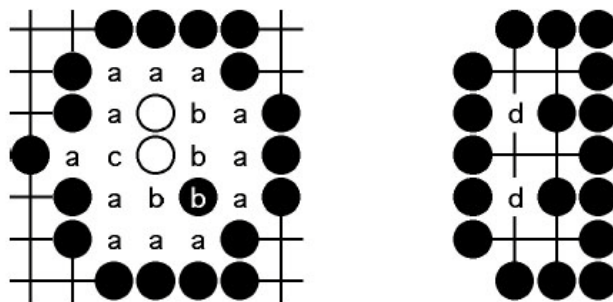
A biztos élet statikus felismerése

A határoló blokkok régiójában található 1 és 2 biztos élet felismeréséhez adok algoritmust. A definíciók tulajdonképpen kiterjesztései a [3] irodalom 62-64. oldalán található fogalmaknak.

Kisegítő definíciók:

A határoló blokk régiójában lévő életek halmazát az r régió elérhető életeinek (Accessible liberties) nevezzük. Jelölés: $AL(r)$. A *támadó által körbevehető terület* (Attacker's Surroundable Area), röviden: $ASA(r)$ egy r régióban azon belső pontok halmazát jelenti, amelyet még nem foglalt el támadó. A *potenciális támadó szempont* (Potential attacker eye point) olyan p pont a régióban, mellyel szemet tud készíteni sztringjének a támadó, ha a védő nem lép a területre. A potenciális támadó szempontok halmazát a *támadó szemterületének* (attacker's eye area) hívjuk. Ez a halmaz természetesen részhalmaza a támadó által körbevehető területnek.

Egy régió *metszéspontja* p , ha a régióból kivonva a p pontot, a blokkok már nem kapcsolódnak össze és p szomszédos az összes határoló blokkal. Az 5.11. ábrán szemléltetjük ezen fogalmakat:



5.11. ábra: Elérhető életek (a) potenciális támadó szempontok (b)
Támadó által bekeríthető terület (b+c) metszéspont (d)

Egy biztos élet statikus felismerése

A pontosan egy határoló blokkból álló r régiónak legalább egy élete van ($SLC \geq 1$), ha a következő feltételek teljesülnek:

1. Minden védő blokk a támadó által elfoglalható területen belül ($ASA(r)$ -ben) egyértelműen meg tud jelölni 2 szomszédos elérhető éleket.
2. Az első lépés után, a védő határoló blokkjain belül található életeket hozzáadjuk az elérhető életekhez ($AL(r)$ -hez)
3. Minden védő blokkal nem szomszédos üres pont a támadó által elfoglalható területen belül ($ASA(r)$ -ben), egyértelműen hozzárendelhető két szomszédos, elérhető élethez.

Az „egyértelműen hozzárendelhető” az egész algoritmusban azt jelenti, hogy minden éleket csak egyszer használhatunk fel. A végeredmény egy halmazhármast (p, l_1, l_2) , ahol p vagy egy védekező blokk vagy egy üres belső pont és l_1, l_2 a hozzá kapcsolódó elérhető életek.

A következő egyszerű miai stratégia egy biztos éleket garantál a védőnek. Ha a támadó (p, l_1, l_2) halmaz mellett elfoglal egy üres p pontot, akkor ezt a hármast töröljük és nincs más dolgunk. Ha a támadó az l_1 vagy l_2 pontok közül foglal el egyet, akkor a védőnek a másik éleket kell elfoglalnia és a (p, l_1, l_2) szabályt töröljük. Ezen stratégia biztosítja, hogy a támadó nem tud körbevenni egyetlen belső pontot sem, ezért a védőnek legalább egy éleket megtart ebben a régióban.

Az 5.12. ábra illusztrálja a szerkezetét a most ismertetett stratégiának. A bal oldali ábra mutatja magát a régiót, jelölve a régió belsejét is. A jobb oldali pedig mutatja a miai stratégiát, ami az egy biztos éleket biztosítja.

Az első lépésben a_1 és a_2 lépésekkel az a blokkot a határoló blokkhoz kapcsolja.

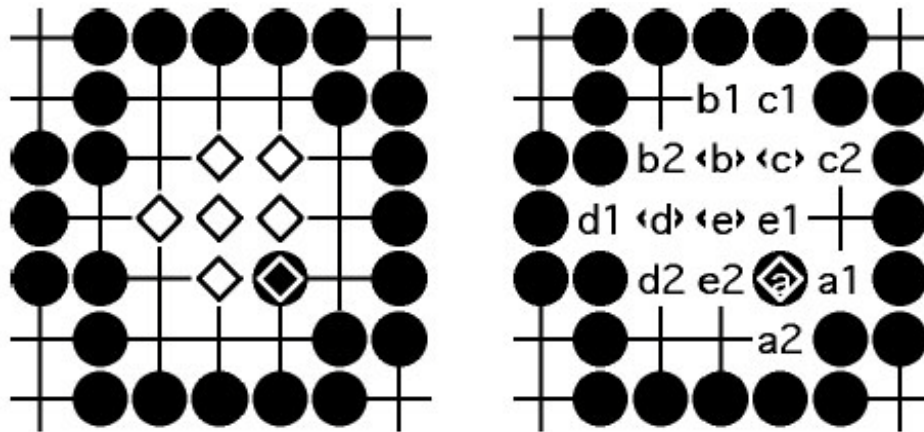
A második lépésben az a blokk csatolása miatt két új elérhető éleket, e_1 és e_2 hozzáadódik az elérhető életekhez (AS).

A harmadik lépésben 2 elérhető éleket kell találnunk a régió belsejében maradt b, c, d, e pontokhoz.

Az egész stratégia megadható halmazhármassal, mely az 5.12. ábrához a következő:

$$(a, a_1, a_2), (b, b_1, b_2), (c, c_1, c_2), (d, d_1, d_2), (e, e_1, e_2)$$

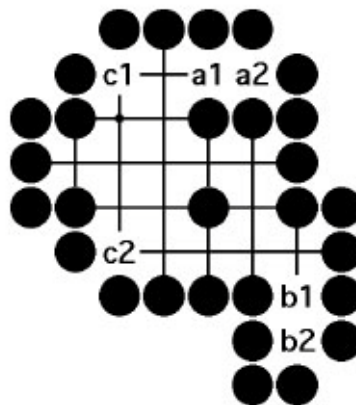
A Benson-féle egészséges régiók egy olyan speciális esetet képeznek, ahol az $ASA(r)$ és a miai stratégia üres halmazok.



5.12. ábra: Egy biztos élet, a miai stratégiával

Több, mint egy határoló blokk

Abban az esetben, ha egy régió több határoló blokkal rendelkezik, a blokkokat egy miai stratégián alapuló eljárással összekapcsoljuk, mielőtt tesztelhetnénk a felső egy biztos életet felismerő algoritmus első lépését. Ez egy olyan miai stratégia lesz, amely csak életpárokot tartalmaz (l_1, l_2) . A támadó egyik lépésére (l_1, l_2) -ben a védő mindig a másik élet elfoglalásával válaszol. Az 5.13. ábrán 3 miai lépés van (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) , amellyel a 4 határoló blokk összekapcsolható.

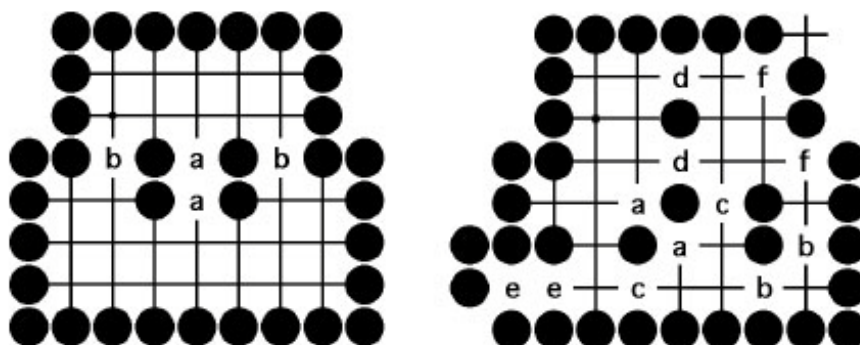


5.13. ábra: Határoló blokkok összekapcsolása

Hosszabb lánckapcsolatok a belső blokkokhoz

A fent említett algoritmus általánosítható a következő módon: a blokkokat, amelyek miai stratégiával összekapcsolhatók egy láncba fűzzük, és ezt ismételjük, figyelembe véve a már felhasznált életet. A feltétel akkor teljesül, ha az összes határoló és belső védő blokkjait

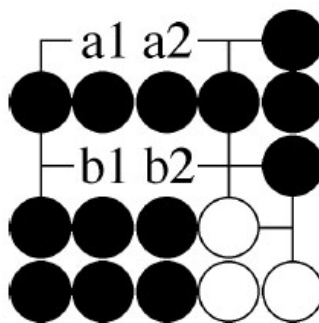
összekapcsolhatjuk miai stratégiával. A könnyebb megértés érdekében figyeljük meg az 5.14. ábrán található két képet:



5.14. ábra: A lehetséges belső blokkok csatolása

6. Definíció: A két biztos életnek statikus felismerése

Adott egy r régió és b az r régió összes határoló blokkjainak legalább két biztos élete van ($SLC(b,r) \geq 2$), ha minden üres pontja a régiónak elérhető élet és a régiónak van 2 metszéspontja. Minden hasonló régió 2 (r_1, r_2) régióra bontható és $SLC(b,r_1) \geq 1$ és $SLC(b,r_2) \geq 1$. A két biztos élethez miai stratégiát játszunk a 2 metszéspontnál. Az 5.15. ábrán két példát láthatunk ilyen metszéspontokra, és egy két biztos étellel rendelkező láncra.



5.15. ábra: 2 biztos élet

Keresések

A keresési eljárások általános játékfa keresési technikát használnak: alfa-béta vágásos minmax keresés iteratív mélyítéssel Ezt a mesterséges intelligencia alapjai című előadáson tanultam. Transzponálást és egyéb általános gyorsításokat rakhatunk az algoritmusba. Mivel egy állást többféleképpen is megkaphatunk. Egyedüli feladat-specifikus műveleteink, amiket még deklarálnunk kell: a lépésgenerálás és a kiértékelés.

Lépésgenerálás

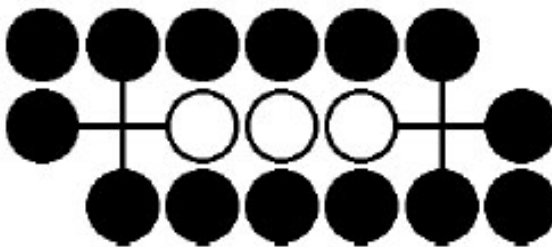
Nagyon egyszerűen minden lokális érvényes lépést és a passzolást is generáljuk. A könnyebb gráf miatt a támadónak megengedjük, hogy egyből visszafoglaljon egy ko-t. Ez a lépésgenerálás meglehetősen veszteséges, cserébe könnyen fejleszhető.

Kiértékelés

Háromféle értékkel térhetünk vissza: sikeres, sikertelen és ismeretlen. A védő számára sikeres statikus függvényt írunk. A védő sikertelen, ha a határoló blokkok elvesztik az utolsó lokális életüket is, vagy ha a láncfeltételek megsérülnek, vagyis nem tudja megvédeni a blokkjait. Ha az utolsó lépésnél mindkét játékos passzol, akkor a valós lokális biztos életek számát tudjuk megadni. Minden egyéb esetben ismeretlen a kiértékelés. A játékfa további vizsgálata szükséges, hogy megállapíthassuk az eredményt. A támadó kiértékelése a védő értékének ellentettje.

Régiók biztonsága

A régiók biztonsága nem következik azonnal az eddigi ismereteink alapján. A régió biztos életet adhat a határoló blokknak, ha a támadónak nincs jó lépése. Ez lehetséges akkor is, ha az életeken osztoznak szekiben. Az 5.16. ábrán látható, hogy mind a fekete blokkok, mind a fehér blokkok két biztos étellel rendelkeznek. Ebből viszont nem következik, hogy a terület fekete. Ha a feketének a blokkon kívül nincs másik élete, akkor szekiben vannak és a két élet biztos a belső fehér blokknak is. Ha a feketének nincs a blokkon kívül (külső) élete és elfoglalná az egyik életet, akkor atarit adna ugyan a belső fehér csoportnak, de önatarit is adna saját blokkjainak, amit a fehér kihasználhat és elfoglalhatja a fekete köveit.

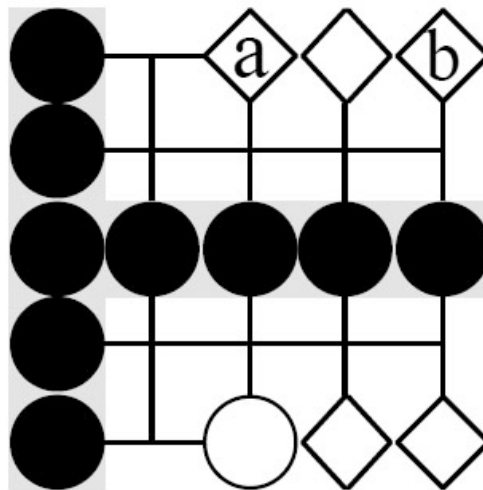


5.16. ábra: 2 biztos élet egy lehetséges szekiben

Biztonságos blokkokkal körülvett régió

Ha már néhány blokk biztonságát igazoltuk, akkor egyszerűbb garantálni a további, szomszédos régiók biztonságát. Egy biztonságos blokkokkal határolt régió akkor tekinthető biztonságosnak, ha az ellenfél már nem tud biztonságos kőcsoportot létrehozni,

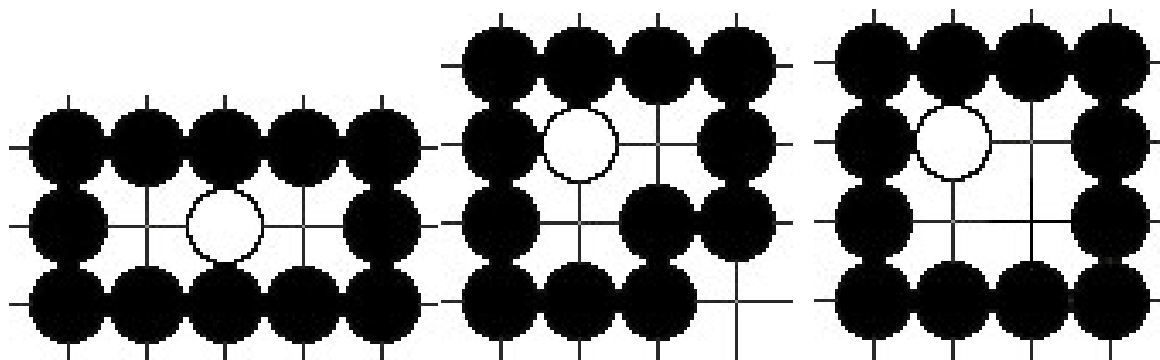
vagyis nem tud megélni a támadó által körülvehető területen belül. A támadó csak akkor maradhat életben, ha a potenciális támadó szemterületek között van két olyan e_1 és e_2 pont, amelyek nem szomszédosak és nem nakade alakzat elemei. Az 5.17. ábra egy remek példa erre. A kép felső részén a fehér élő alakzatot tud készíteni, mert az a és b pontok nem szomszédosak és a potenciális támadó szemterület halmazába tartoznak. Viszont a kép alsó részénél a potenciális támadó szemterület már annyira kicsi, hogy a fehér csak egy szemet tud létrehozni maximum így ez a terület már biztosan a fekete területe.



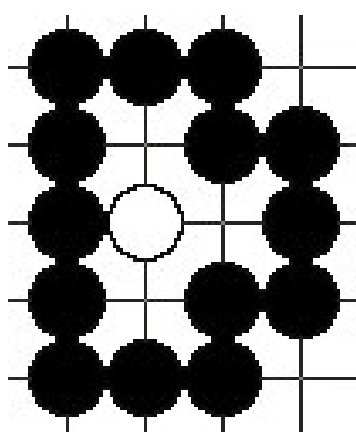
5.17. ábra: Potenciális szemterületek jelölve. Hol élhet meg a fehér, ha a fekete kövek már biztonságban vannak?

Mik azok a nakade alakzatok?

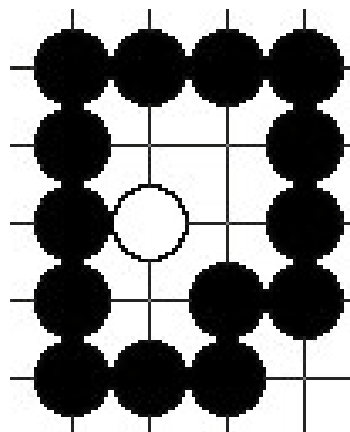
A nakade szó szerinti fordítása belső lépés. Olyan helyzeteknél használjuk, melyeknél a csoportnak egyetlen, összefüggő, nagy, belső területe van. Ez a határolt terület két szemet nyújthat egy megfelelő lépéssel, de az ellenfél egy jó lépéssel megakadályozhatja ezt. Általában a két szem kialakulását, azért akadályozzák meg, hogy ezt a csoportot fogolyként levehessék a tábláról. Ezen nakade alakzatok csak egy biztos életet garantálnak, így ha nem tud máshonnan biztos életet szerezni, akkor az nakade alakzatot tartalmazó kövek halottnak tekinthető. Még külön neveket is adtak nekik. Az 5.18. ábrán az összes, különböző elnevezésű nakade alakzatot megfigyelhetjük, valamint azt is, hogy a fehér játékos hogyan akadályozza meg a két szem kialakulását.



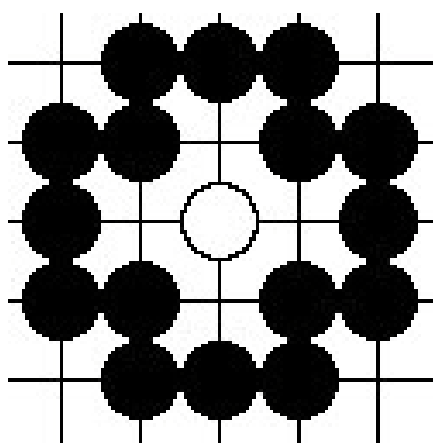
3 egy sorban (Straight Three) Hajlított hármas (Bent Three) Vaskos négyes (Bulky Four)



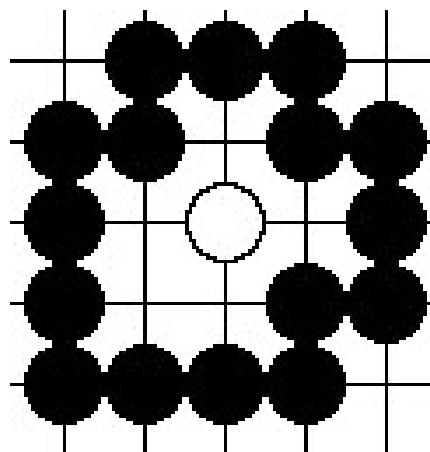
Piramist négyes (Pyramid Four)



Vaskos ötös (Bulky Five)



Ötös kereszt (Crossed Five)

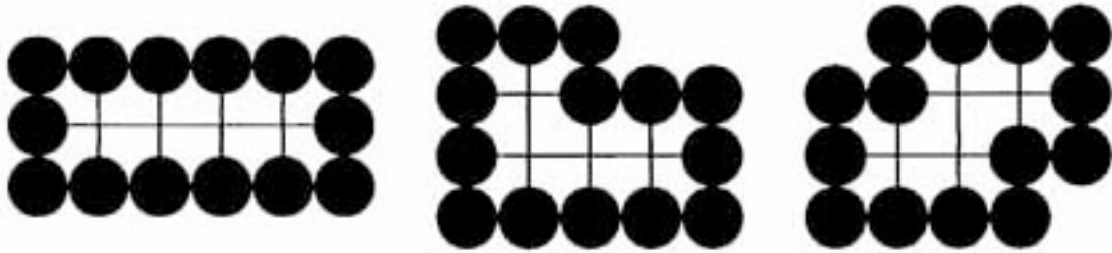


Nyúl hatos (Bunny Six)

5.18. ábrák: Nakade alakzatok

Ezek közül egyedül a vaskos négyes elnevezésű nakade alakzatnál kell egynél több lépés a feketének, hogy biztosítsa a két szempontját a blokkjának. Bármely lépésével a hajlított hármas alakzatot kapjuk, amit az ellenfél még mindig kihasználhat, ha ő uralja a terület nagy részét és a csoport nem rendelkezik egyéb éllettel.

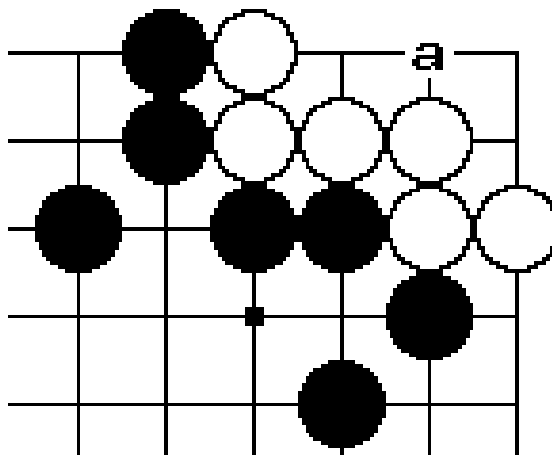
Biztonságosnak tekintjük azon területeket, melynek szemterülete 4 üres mezőt egy sorban:



5.19. ábra: Négy üres mező egy sorban. 2 szempontot biztosítanak

Miai stratégia létezik ezeknél a helyzeteknél a középső két üres mezőre. Ha az ellenfél a blokkot fenyegeti egy belső nakade lépéssel, akkor a védő a két középső mező közül egy még üreset elfoglalva biztosíthatja csoportjának életben maradását.

Egyedüli kivétel a sarokban kialakított hajlított négyes (Bent Four) alakzat (5.20. ábra).



5.20. ábra: Hajlított négyes alakzat a sarokban

Ha a fehér hajlított négyes alakzatnak kevesebb, mint két külső élete van, akkor nem tudja túlélni a fekete támadását. A fekete úgy akadályozhatja meg, hogy ne legyen két szeme a fehér csoportnak, ha az *a* pontra helyezi el a következő követ. A fehérnek ilyenkor a sarokban elhelyezett kövével kell fenyegetnie az *a*-ra helyezett fekete követ, hogy a két életet még megszerezhesse köveinek. Ekkor azonban a sarokba rakott kő egyből atariban van. A feketének mivel a kövek megölése a cél, ez ki is használja és leüti a sarokban elhelyezett fehér követ. Mivel a fehér nem tud egyből visszaütni a ko-ban, a ko szabály miatt, így ez a mező a fekete következő lépéig biztos, hogy üres lesz. A fehérnek attól függően, hogy van-e külső

élete, ilyenkor egy vagy két étellel rendelkezik. Akár van külső élete akár nincs, az a ponttól balra fekvő helyre nem rakhat. Ha nincs külső élete, akkor ezt az öngyilkos lépés tiltás szabálya nem engedi. Ha van külső élete, akkor ezzel a lépéssel önatarit adna magának, vagyis csak egy élete maradna, amit a fekete könnyen el tudna foglalni.

Túlélési esélye csak akkor van, ha legalább 2 külső étellel rendelkezik, amikor a fekete elkezd a támadását. Ha a fehér időben észreveszi, hogy a hajlított négyes csoport külső életeinek száma 1-re csökkent, akkor egy védekező lépéssel az a -n megteremtheti a két biztos szempontot a csoportjának.

Összefoglalás

Röviden összefoglalnám, hogy mely témákat érintettem a dolgozatomban. Melyek azok, amelyekbe mélyebb betekintést nyerhettünk és melyek azok, amelyekről csak érintőlegesen beszéltünk. Továbbá az egyes témák felépítéséről és azok összefüggéseiről is áttekintést nyújt ez a rész.

Egy elmés idézet: „Milyen játék az a go? Az nem a gazdálkodj okosan?”. Az írójának üzenem, hogy így is hívhatnák, mert a játék a kövekkel történő okosan gazdálkodásról szól.

Először a gó történelmét írtam le, hogy honnan ered ez a nagyszerű játék. Kitől tudhatjuk, hogy ez a legrégebbi táblás játék. Mikor indult nagyobb fejlődésnek, mikor terjedt el. Magyarországra is kitértünk, ugyanis egy szép eredménnyel büszkélkedhet országunk. Mindazonáltal meglehetősen kevés ember ismeri hazánkban ezt a játékot. Az érdeklődők viszont könnyen találhatnak maguknak egy magyar góegyesületet.

Történelme után bevezettük a gó játék legfontosabb fogalmait, melyek elengedhetetlenek voltak a későbbi tárgyaláshoz. Majd a két fő pontszámítási módszer mellett egy játék menetéről is szó esett: felületesen érintettük az összes fázisát, illetve az ezekhez kapcsolódó stratégiákat. A bevezetés lezárásaként a számítógépekhez való viszonyát ismerttettem.

A tárgyalás fő része előtt még egy gyors összehasonlítást adtunk a sakkal szemben. A sakkot sokan ismerik, így ez egy jó hasonlítási alapot adott. Viszont kiderült, hogy míg a szabályok a sakknál az összetettebbek, a játékok elemzése a gónál sokkal komplexebb.

A tárgyalásom során próbáltam minél több példával szemléltetni, hogy egy-egy lépés előtt mennyi mindent kell átgondolnunk. Egy nagyon egyszerű ábrán tesztelhettük, hogy egy adott végjátéknál jó lépést választanánk-e. Majd jelölések sorát vezettem be azért, hogy a későbbiek során meg tudjuk állapítani, hogy egy állás mennyire kedvező számunkra. Ehhez rövid

összefoglaló táblázatot a II. függelékben találhatunk. Miután már elég sok végjátékot elemeztünk, a játékegyszerősítési módszerek vizsgálata következett. Majd megállapítottuk, hogy a felesleges lépések egyik programot sem érdeklík, kár foglalkozni ezekkel.

Mivel a már megoldott végjátékokat tárgyaltam, a kombinatorikus játékelmélet alapfogalmain keresztül megadtam a matematikai megoldásukhoz szükséges alapokat. Az egyszerűsítéseket is átvettük, azok játékelméleti definícióin keresztül. Ezen fogalmakkal eljutottunk a játék egyszerűbb, kanonikus formájához, így az eddig ismertetett jelöléseket kanonikus formákra válthattuk.

A hűtés, melegítés és ösztönzők tárgyalásával megalapoztuk a következő nagyobb fejezetet, melyben a gó kombinatorikus játékelméletének lemmáit és fő tételeit olvashattuk. Ezek természetesen szinkronban vannak az eddig ismertetett anyaggal, mivel segítségükkel lehet bizonyítani az állításainkat. Helyhiány miatt azonban az ismertetett lemmák és tételek bizonyítására már nem került sor. Az érdeklődők figyelmébe ajánlanám az [5] irodalmat, melyben részletesen megtaláljuk ezeket.

A végjátékok után a végállások elemzésébe nyerhettünk betekintést. Néhány alapfogalmat tisztáztunk, a félreértések elkerülése céljából. A fejezet fő témája az alakzatok élő és holt mivoltának eldöntése, hiszen a végállások elemzése erről szól. Ehhez a legáltalánosabb, Benson-féle feltétel nélkül élő csoportokkal kezdtük, majd ezt kibővítettük a lokális váltakozó játék által megvédhető területekre. Mivel a blokkok biztonsága nem mindig biztosítható, kiterjesztettük a blokkokat láncokká, hogy még általánosabban megmondhassuk egy alakzatról hogy él-e vagy sem. A láncok karbantartása körülményesebb. A biztos életek statikus felismeréséhez megadtunk egy algoritmust, melyhez viszont további definíciók deklarálása elkerülhetetlen volt. Ezek kezelése egy programban összetettebb gondolkodást igényel.

Ha már meg tudjuk állapítani, hogy mely alakzatokat tekintjük élőnek, akkor ahhoz hogy végeredményt számolhassunk már csak keresni kell tudnunk a játékfában. Ehhez az általános alfa béta vágásos minmax keresés iteratív változatát használjuk, amihez természetesen részfeladatokra osztva érdemes a keresést végrehajtani. A kereséshez egy nagyon primitív lépésgenerátort és egy általános kiértékelést adtunk.

A régiók biztonsága után kitértem pár nevezetes alakzatra, melyek a végállások elemzésénél még biztos pontokat jelenthetnek az egyik fél számára és a végeredmények számolásánál is hasznos lehet.

A függelékben egy, a 9 dannel rendelkező profi játékosokat is zavarbaejtő feladat kapott helyet, melyet a szakdolgozatban leírtak alapján meg lehet oldani. Illetve a parányi számok összefoglaló táblázatát is itt találjuk, a fekete prioritási sorrendjében.

Remélem dolgozatommal sikerül felkeltenem a kedves olvasók érdeklődését ez iránt, a logikai gondolkodást és stratégiai érzékeket egyaránt fejlesztő, négyezer éves, azonban programozási kihívásnak tekinthető játék iránt. Ha ezek után valaki szeretne a gó programozásával foglalkozni, remélem, hogy munkámmal egy kis segítséget nyújthatok ehhez a nem könnyű feladathoz. Magyar nyelvű irodalmat az alapvető szabályok leírásán kívül, csak nagyon elvétve találtam a gó játékról.

Egy bölcs tanítót idézve: „Egy programozási nyelvet csak programozva lehet megtanulni”. Itt is igaz, hogy a gó játékot csak játszva lehet jól elsajátítani.

A tanuláshoz számtalan gószervert találhatunk, ahol a játékosok illetve programok ellen online játszva tesztelhetjük tudásunkat. Sok sikert és jó játékot kívánok!

Köszönetnyilvánítás

Nagyon szeretném megköszönni mindenkinek, aki támogatott, hogy megírjam a szakdolgozatomat. Külön köszönet konzulensemnek dr. Halász Gábor József tanár úrnak, hogy írhattam nála erről az érdekes anyagról, illetve a Debreceni Egyetemnek, hogy tudást adott a kezembe.

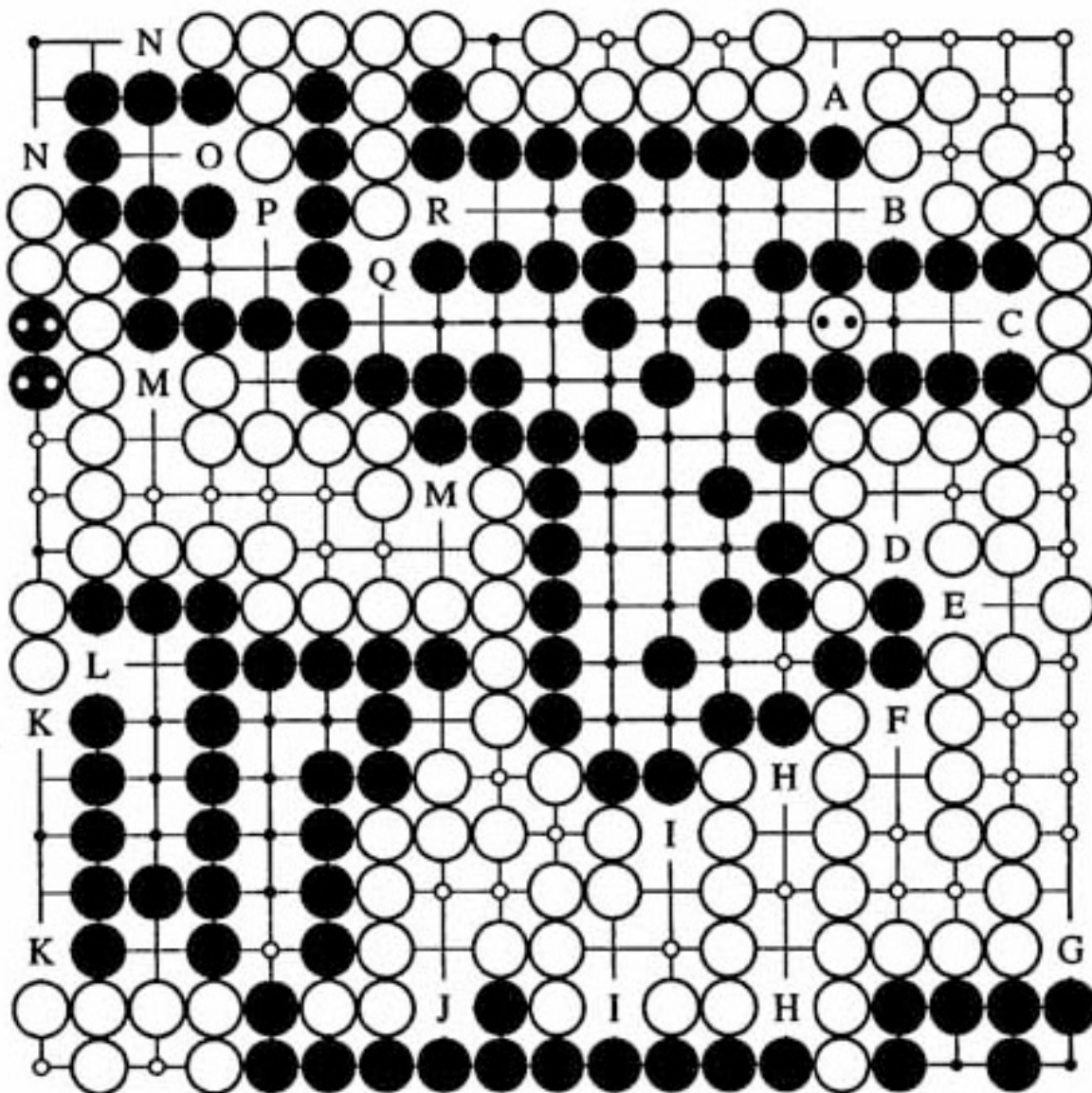
Irodalomjegyzék

- [1]David B. Benson: *Life in the Game of Go*. Information Sciences, vol. 10 (1976), pp.17-29.
Reprinted in *Computer Games*, Levy, D.N.L. (Editor), Vol. II, pp. 203-213, Springer Verlag, New York 1988.
- [2]Toshio Ikeda: *On the Rules of Go*. Fujitsu Ltd.,Tokyo, Japan 1992.
- [3]Martin Müller: *Computer Go as a Sum of Local Games: An Application of Combinatorial Game Theory*. Ph.D. thesis, ETH Zürich, 1995.
- [4]Martin Müller: *Playing it safe: Recognizing secure territories in cumputer Go by using static rules and search*. In H. Matsubara, editor, *Game programming Workshop in Japan '97*, pages 80-86, Computer Shogi Association, Tokyo, Japan, 1997.
- [5]Elwyn R. Berlekamp and David Wolfe: *Mathematical Go: Chilling Gets the Last Point*, A K Peters Ltd, 1994
- [6]Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy: *Winning Ways*, Academic Press, New York, 1982
- [7]Markus Enzenberger: *Evaluation in go by a Neural Network Using soft segmentation*
In 10th Advances in Computer Games conference 2003.
- [8]Erik van der Werf, H. Jaap van den Herik: *Learning to Score Final Positions in the Game of Go* J.W.H.M. Uiterwijk 2003
- [9]Howard A Landman: *Eyespace Values in Go* , Games of No Chance MSRI Publications vol 29, 1996

Internetes linkek:

- Martin Müller publikációi: <http://www.cs.ualberta.ca/~mmueller/publications.html>
- Gó linkgyűjtemény: <http://go.lap.hu>
- A Magyar Gószövetség honlapja: <http://goszovetseg.hu/>
- Magyar Go Wiki: <http://gowiki.hu/>
- Gó játékszabályok és szótár magyarul Balogh Páltól: <http://go.szeretni.hu/>
- A Brit Gószövetség honlapja letölthető programokkal: <http://www.britgo.org/>
- Gó oktató angol nyelven: <http://www.gokgs.com/tutorial/index.jsp>
- Ugyanezen a szerveren játszani is lehet: <http://www.gokgs.com/>
- Egy wikipediaként működő angol fórum: <http://senseis.xmp.net/>
- Gó problématár angolul: <http://www.goproblems.com/>
- Európai Gó adatbázis, rangsorolás például: <http://www.europeangodatabase.eu/>

Függelék



I. Függelék: A 9 danos játékosokat is zavarba ejtő végjáték

	$-y$	Elsőnek a mínuszokat és a nagy gote lépéseket kell támadni. Jobb megtámadni egy mínuszt y+2 pontos gote lépésért, mint hogy hasznot húzzanak belőle a y+2 pontért.
or	or $\begin{cases} \{y 0\} \\ \{0 -y\} \end{cases}$	Az olyan mínuszok támadása melyeknek a veszélyeztetése a legcsekélyebb.
	$-x$	Következőnek a hosszú folyosókat támadjuk, melyeknek a vége több mint 2 pontos gote lépések. (A rövidebb folyosót támadjuk elsőnek, ha a végső gote lépések egyenlők.)
or	or $\begin{cases} \{x 0\} \\ \{0 -x\} \end{cases}$	Ha két hosszabb folyosó van, először a kevesebb követ tartalmazót támadjuk (A 2 követ tartalmazót közelítjük a 3 köves csoport előtt).
	$-x 0$	
	$-x 0^2$	
	$-x 0^3$	
...	...	
	$-y 0$	
	$-y 0^2$	
	$-y 0^3$	
or	or $\begin{cases} \downarrow \\ \downarrow* \\ \vdots \end{cases}$	Következőnek a végén 1 követ tartalmazó folyosót támadjuk. Mindegyik lépés körülbelül ugyanannyit ér.
	* (maybe)	Az összekötő lépés keveset ér. Akkor lépj *-ra, ha páratlan számú van a táblán.
or	\uparrow or $\uparrow*$ or ... or $0^n +x$	Blokkolj bármelyik folyosót, melyek az ellenfélnek legalább 2 pontos gotét érnek.
...	...	
or	or $\begin{cases} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$	A törtek alacsony prioritásúak. A nagyobb nevezővel rendelkezőt kell elsőnek támadni.
or	or $\begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$	
	0	A dame lépések az legutolsók.
II. Függelék: Parányi számok, a fekete szemszögéből a magasabb a jobb. y=4, x=2.		