



# **A HOSSZÚSÁG ÉS KERÜLET FOGALMÁNAK ALAKULÁSA KISISKOLÁS KORBAN**

PhD értekezés

Tarcsi Margit

Debreceni Egyetem  
Természettudományi Doktori Tanács  
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola  
Debrecen, 2008

# 1. BEVEZETÉS, TÉMAVÁLASZTÁS INDOKLÁSA

## 1.1. TÉMAVÁLASZTÁS INDOKLÁSA

„Keveset tudunk arról, hogyan is tanuljuk a matematikát. Semmiképpen sem úgy, hogy bevágjuk a szorzótáblát vagy a Peano-axiómákat. Matematikát úgy tanul az ember, hogy számol, példákat old meg és beszélget, ami sokkal hatékonyabb az olvasásnál és a figyelésnél.” (Hersh, 2000, p. 28.)

Tapasztalataink szerint, akik bármilyen fokon matematikatanítással foglalkoznak – kisiskolás kortól felfelé – aligha állíthatják, hogy a matematika tanítása körül minden rendben van. Túl sok azoknak a gyerekeknek a száma, akik nem szeretik a matematikát, és minél idősebb korosztályt tekintünk, annál többen vannak.

Sajnos a tanulók egy része sosem jut el odáig, hogy megértse, mit is jelentenek azok a matematikai fogalmak, amelyekről tanul. Jobb esetben elérhetik, hogy ügyesen tudnak bánni bonyolult szimbólumrendszerekkel.

Dienes Zoltán 1973-ban írt szavai sajnos még ma is időszerűek. „A fogalmak megértése terén különösen súlyos, szinte kétségbeejtő a helyzet. Szavakban ugyan elismerik a matematika megértésének szükségességét, de valójában a matematikai információk közlésének jelenlegi módszere ezen a területen az esetek nagy többségében csődöt mond. Természetesen más megérteni, hogy működik egy mechanizmus, mint megérteni a mögötte rejlő gondolatokat. Egy gyerek jártas lehet a lineáris egyenletek megoldásának technikájában anélkül, hogy fogalma lenne arról, mi is tulajdonképpen egy lineáris egyenlet. Másképp szólva, egy gyerek könnyen érezheti úgy, hogy érti a matematikát, noha valójában nem érti; fogalma sincs például az általa ismert különböző eljárások közötti kapcsolatokról. Nagyon könnyen támadhat a pedagógusnak is az a benyomása, hogy a gyerek már ért valamit, holott valójában távol áll attól. A gyerekek ugyanis hamar megtanulják a szabványos válaszokat, és ez könnyen keltheti a megértés látszatát. Elég azonban egy kevésbé szabványos kérdés, és máris kiderül, hogy a szavak mögül hiányzik a gondolat.” (Dienes, 1973, p.24.)

Kisiskolás korban fontos matematikai, ezen belül geometriai fogalmakat készítenek elő, alapozunk meg. Ekkor még nem mindig adunk teljesen egzakt definíciókat a fogalmakra, mert ezzel nehezebbé tennénk azok megértését, túlbonyolítanánk az egyébként is absztrakt matematikát. Ha viszont a fogalmak előkészítését és kialakítását kellő körültekintéssel és tevékenységekkel támogatva végezzük, akkor a gyerekek olyan alapokhoz jutnak, amelyekre a következő években biztonsággal építhetnek, bátrabban haladhatnak az egyre „elvontabb” fogalmak tanítása felé.

Korábbi tapasztalataink szerint – amit például a tanítóképzős tanítási gyakorlatok látogatásánál érzekeltünk – a fogalomalkotásnál a pedagógus nem mindig a megfelelő módszert alkalmazza: túl sok a tanári magyarázat, kevés az irányított felfedeztetés, cselekedtetés. A gyerekeknek sok esetben kész információkat nyújtanak, ezeket kell „betanulni”.

„Ha a pedagógus gondolkodási típusa megegyezik a tanuló gondolkodási típusával, akkor a „magyarázat” nagyobb valószínűséggel célba talál. Az ilyen kivételes esetektől eltekintve azonban a leggyakrabban tanított matematika nem egymásra épülő fogalmak rendszere, amely mind személyes tapasztalatokból szűrődik le a pszicho-dinamikus folyamat útján, ahogy azt Piaget olyan találóan leírja. Az általában tanított matematika asszociatív jellegű, vagyis a gyerekek bizonyos helyzetekhez bizonyos eljárásokat kapcsolnak, és ezeket az eljárásokat minden esetben elvégzik, amikor olyan helyzet

keletkezik, amelyhez az illető „eljárást” asszociálták. Ha azonban a helyzet kissé megváltozik, például egy problémát kissé eltérő módon fogalmazhatunk meg, vagy akár csak másfajta betűket használunk, akkor a gyerekek úgy vélik, hogy teljesen új helyzettel állnak szemben. Minthogy nem jön létre a transzfer (más helyzetekre való átvitel, alkalmazás), hiszen a helyzetet a maga általánosságában nem látják át, a kívánt eljárásokat egyszerűen nem végzik el, vagy rossz eljárásokat hajtanak végre, és így rossz feleletet adnak. Ahhoz, hogy olyan tanulási helyzetet teremtsünk, amely megfelel a matematikatanulás itt leírt alapvető követelményeinek, az osztályközösség egészen más megszervezésére és egészen más közlési rendszerre van szükség.” (Dienes, 1973, p. 74-77.)

Dienes Zoltánnak ez a megállapítása a matematikatanításról semmit nem veszített erejéből az elmúlt idők során, sőt, az utóbbi időben még inkább úgy érezzük, hogy nagyobb hangsúlyt kellene kapnia a matematikatanárok továbbképzésénél is ezeknek a soroknak.

Ez a megállapítása különösen érvényes a geometria – mérések tanításánál. A bemutató órákon, a hallgatói tanítások látogatásánál tapasztaltak, valamint a jelen kutatást megelőző mérőlapos adatfelvétel értékelésekor szerzett ismeretek alapján úgy láttuk, hogy a gyerekek egy részének nincs megalapozott mennyiségfogalma. Ennek következményeként nagyon nehezen megy a mértékváltás, nem tudják jól megbecsülni a mennyiségek, tárgyak, dolgok méreteit. Feltételezhető, hogy a mértékegységeket minden konkrét tapasztalás nélkül tanulják, rögzítik például, hogy a méter és a deciméter között 10 a váltószám, ami többnyire pusztán memorizálással történik, nem pedig gyakorlati tevékenység során. Ezért fordulhat elő, hogy a méter deciméterekbe történő átalakításánál a tanuló nem ismeri fel a „váltás irányát”, és szorzás helyett osztást végez.

A tanulók elég nagy része nemcsak egy mennyiségfajtaán belül nem tud eligazodni a mértékegységek között, hanem keveri a különféle mennyiségeket is – a tömeget az űrtartalommal, a hosszúságot a területtel, stb. Mivel láttuk, hogy ezek a problémák a mennyiségeknél már elég korán jelentkeznek, ezért a kutatásainkban az iskolai tanulás kezdetéig mentünk vissza.

A hosszúság és terület fogalmának kialakítása, tanulása során a szemléltetés és cselekedtetés nélküli oktatásnál számos nehézséggel kell megküzdeni a tanulóknak. Problémát jelenthet a képzelet, a térszemlélet, a kézügyesség hiánya, az anyanyelv nem megfelelő szintje stb. A témakör épülése szempontjából nem tekinthetünk el a nyelvi kommunikációs vonatkozások vizsgálatától sem. Köztudott, hogy az anyanyelv matematikában történő használata sokszor eltér a köznapi használatától.

A nyelvhasználat kérdését sok matematika didaktikával foglalkozó kutató roppant fontosnak tartja. John Holt nemzetközi elismerést kivívott kutató így ír erről: „... az iskolában az egyik legfontosabb célunk, hogy olyan eszközt adjunk a gyerekeknek – a nyelvet –, amellyel tanulni, gondolkodni és beszélni tud arról a világról, amelyben él. Pontosabban, szeretnénk segíteni abban, hogy ezt a már meglévő eszközt finomítsa. Úgy teszünk, mintha ez a nyelvi eszköz tökéletes volna, és a gyerekeknek egyéb tennivalója sem volna, mint megtanulni annak helyes – például általunk is követett – használatát. Holott sok vonatkozásban a nyelv az egyik legkételetlenebb eszköz. ... Nézzük a mellékeveket. Vannak, hogy úgy mondjam, abszolút jelzők: kerek, kék, zöld, négyzetes. De sok közülük relatív: hosszú, rövid; vékony, vastag; súlyos, könnyű; magas, alacsony; közeli, távoli; könnyű, nehéz; hangos, halk; meleg, hideg. Ezek egyike sem abszolút jelentésű. A hosszú és a rövid csupán azt jelenti, hogy hosszabb vagy

rövidebb valami másnál. A gyerek sokat hallja valamiről az egyik nap, hogy hideg, a másik nap meg azt, hogy meleg, ugyanarról a dologról egyszer azt, hogy hosszú, másszor azt, hogy rövid. A szavakat úgy használjuk, mintha rögzített jelentésük volna, ugyanakkor folyton változtatjuk a jelentésüket.” (Holt, 1991, p. 99.)

Egyetértve Holt megállapításával a kutatásban különös gondot fordítottunk a nyelvhasználat fejlődésének segítésére. Fontosnak tartottuk a térbeliséget kifejező szavak jelentéseinek értelmezését, illetve újra értelmezését, megvilágítani azok jelentését a különböző szituációkban, hogy képes legyen a tanuló megtalálni a megfelelő szavakat a tárgyak hosszúságméreteinek kifejezésékor.

Hersh a matematika és filozófia kapcsolatáról írt könyvében érdekesen mutatja be a matematika természetét. Ebben utal a matematika valósággal való kapcsolatára és elvontságára.

„A matematika olyan, akár a pénz, a háború vagy a vallás – sem nem fizikai, sem nem mentális, hanem társadalmi tény. A matematikát (akárcsak a pénzt vagy a vallást) nem írhatjuk le kizárólag fizikai jellemzőkkel, centiméterben és kilogrammban, de kizárólag mentális jellemzőkkel sem, például szokások és reflexek összességéként. Csak társadalmi, kulturális, történelmi összefüggésben van értelme beszélni róla.” (Hersh, 2000, p. 261.)

Mi is társadalmi (a gyerekek sajátos társadalmában), kulturális (a tantárgyon belül és a tantárgyak közötti kapcsolatok hangsúlyozásával) és történelmi (a mértékegységek és tanítási módszerek történetiségének) összefüggésben kívánjuk megvilágítani a hosszúság- és kerületfogalom elméletét és tanítását.

## **1.2. GEOMETRIATANÍTÁSUNK PROBLÉMÁI**

A geometria tanítása még mindig egyes esetekben a görög geometria felépítési módját követi, amely a mennyiség tanításától jut el az alakzatok geometriájáig. Maga a „geometria”, azaz a „földmérés” szó is mérésre utal.

Véleményünk szerint a méretes geometria tanításánál kettős úton kellene haladni. Egyrészt a méréseknek egyfajta történeti bevezetését kellene követni, másrészt ezzel párhuzamosan is, de ezt megelőzően is többet kellene foglalkozni az alakzatokkal. Ez a két vonal például a síkbeli alakzatok kerületének, területének mérésénél találkozna. Mivel az első geometriai megfigyelések minőségi és nem mennyiségi jellegűek, ez azt is bizonyítja, hogy az alakzatokkal való foglalkozásnak meg kellene előznie a mérést, amelyre alig találtunk példát.

Néhány pedagógus, főleg első két osztályban, a geometria tanítását a mérések, sőt csupán a mértékegységek tanítására szűkíti le. Így kimarad az a minőségi szakasz, melynek során a tanulók gondolkodásában végbemehetne az áttérés a térbeli konkrét műveleti szintről az elvont, logikai műveletekkel operáló gondolkodási szintre.

Tipikusan mindössze három olyan alakzat van – az egyenes szakasz, a téglalap és a négyzet – amellyel az alsó tagozatos négy év mindegyikében foglalkoznak a gyerekek, a többi geometriai fogalom váratlanul vagy hirtelen bukkan fel, vagy pedig hosszú szünet után kerül elő újból, figyelmen kívül hagyva a tanulás folyamatosságának és fokozatosságának alapelvét. (Piscalo, 1977)

Magyarországon is jellemző az, ahogyan a helyzetet a kora gyerekkori geometriatanítás szakértője, A. M. Piscalo jellemezte.

A hosszúságmérés tanításánál tapasztalataink szerint a tanulóknak minden életkorban komoly problémáik vannak. Ennek okai lehetnek:

- már első osztályban olyan fogalmakat, összefüggéseket kell megtanulniuk, amelyre életkori sajátosságaik miatt egy részük még konkrét tárgyi tevékenység végzésével való tanulással együtt sem képes; (gondolunk itt a mértékegység és mérőszám fordított arányú változására)
- a tanulók, időhiány miatt, általában kevés mérési tapasztalatot szereznek, ami nem elegendő a reális becslések végzéséhez;
- többnyire minden előzetes megtapasztalás nélkül feltételezzük, hogy a gyerekekben már 7 éves korra kialakul a mennyiség állandósága, az összefüggéslátásnak és az absztrakciónak olyan szintje, amellyel a tanult számkörben mértékváltásokat tudnak végezni. Ez nincs összhangban sem Piaget elméletével, sem a valós helyzettel;
- a tankönyvek a különböző mérésfajtákat közvetlenül egymás után tárgyalják, s a tanítók többsége is ezt a sorrendiséget követi a tanítás során. Így a gyerekekre egyszerre zúdítják rá az összes mértékegység fajtát a köztük levő összefüggésekkel együtt. Ez a tanulók többsége számára még áttekinthetlenebbé teszi a rendszert.

## 2. A KUTATÁS

A kutatásunk műfaja úgynevezett természetes kísérlet, mivel természetes élethelyzetekben, illetve a gyermek természetes tevékenységének folyamatában (játék, tanulás, munka) végeztük azt. A célszerűen kiválasztott természetes szituációban, gondosan kontrollált feltételek mellett olyan pedagógiai helyzetet teremtettünk, olyan oktatási módszert alkalmaztunk – mint külső független változót –, amellyel a kísérletben részt vevő tanulók tantárgyi tudásszintjét, mint belső független változót egy meghatározott színvonalra kívántuk fejleszteni, és ezeknek a tényezőknek a teljesítményre kifejtett hatását folyamatosan nyomon követtük.

A független változó (az oktatási módszer) jellege szerint ez egy előidézett kísérlet, mivel a módszerrel való tanítás folyamatát a kutatás során hoztuk létre.

A kísérletünk csoportos, önkontrollos kísérlet. A csoport munkáját, a kialakult fogalmi szinteket a tanulók egyéni adottságait, ismereteit folyamatosan rögzítettük, elemeztük.

Kísérletünket tehát egy klasszikus, előidézett, egycsoportos, önkontrollos, természetes kísérletnek tekintjük. Bár a kutatásban ennek egy komplexebb változatát alkalmaztuk. A kísérlet programozásában a célok és az elért eredmények dinamikus kölcsönhatását is figyelembe vettük, azaz a függő változóknak beálló módosulások alapján a kísérleti programot időről időre módosítottuk, megújítottuk.

Mivel ennél a kísérleti formánál a független változó által okozott módosulás nagyságát csak a tapasztalati valószínűséggel lehet egybevetni, ezért a változás mértékét biztonságosan minősíteni nem tudjuk

### 2.1. A KUTATÁS TÉMÁJA

A kutatás azt vizsgálta, hogy az alkalmazott módszerek milyen minőségben segítik elő a hosszúság és a kerület fogalmának előkészítését és kialakítását. A vizsgálódást az alábbi problémakörökben végeztük (a felsorolás nem feltétlenül jelent sorrendet):

- régi magyar hosszúság-mértékegységek megismerése és ezekkel mérések végzése;

- a hosszúság szabványmértékegységeinek folyamatos bevezetése, ezekkel mérések végzése;
- a becslési készség folyamatos fejlesztése, a becslésre adott értékek felülvizsgálatával, megméréssel, igazolásával;
- a hosszúság fogalmához és méréséhez kapcsolódó matematikai, hétköznapi és más tudományterületeken alkalmazott fogalmak, és a közöttük levő kapcsolatok értelmezése;
- a sokszögek, ezen belül a téglalap és a négyzet fogalmának alakítása tevékenységgel, rajzzal;
- a kerületfogalom előkészítése és kialakítása tevékenységgel (kötelekből, szívfószálakból háromszögek, négyszögek alkotásával), négyzethálón való rajzolással, méréssel, számolással.
- a beszélgetéseink során beépítettük azokat az ismereteket, amelyeket a gyerekek előzetes ismereteiből merítettünk.

## **2.2. A KUTATÁS CÉLJA**

A kutatásunk célja többirányú:

- minél többet megtudni arról, hogy a hosszúságfogalomhoz kapcsolódóan milyen előzetes ismeretekkel érkeznek a gyerekek az iskolába;
- feltárni a hosszúság és kerület fogalmának kialakítása során előforduló problémákat, félreértelmezéseket, hiányosságokat;
- olyan módszert kialakítani a mérések tanításával kapcsolatban, amely során:
  - olyan helyzeteket teremtünk, amelyekben a gyerekek maguktól fedezik fel az összefüggéseket, javítják saját és mások pontatlan meghatározásait;
  - a becslési készség fejlesztését nagyszámú, nagyságában és mértékegységekben is különböző mérésekkel megalapozni;
  - a tanult ismeretek jelentősége és fontossága kerül hangsúlyozásra a gyakorlatban való alkalmazhatóságával;
- bizonyítani hogy a matematikai ismeretek a valóságból, a tapasztalatokból eredeztethetők és minden témakörrel, tudományterülettel összekapcsolhatók.

## **2.3. A KUTATÁS HIPOTÉZISEI**

Alaphipotézisünk az, hogy a kisgyermeknek a matematika olyan absztrakt fogalmait mint a hosszúság, kerület a számukra érdekes – a megértésig aktivizáló – konkrét gyakorlati tapasztalatszerzésen keresztül lehet kialakítani.

Feltételezésünk szerint a hosszúság fogalmának kialakulását, a mérésfogalom értését, a mértékegység és mérőszám közötti kapcsolat elsajátítását, valamint a hosszúságmérés más tudományokban és a mindennapi életben való alkalmazását elősegítik:

- a tanulók szűkebb és tágabb környezetében történő becslések, mérések végzése összeméréssel, különféle természetes és szabványmértékegységekkel, változatos munkaformában;
- a hosszúsággal kapcsolatos nyelvi ismeretek fejlesztése, tudatosítása.

A kerület fogalmának kialakulását elősegítik:

- nyitott és zárt törött és görbe vonalak hosszának meghatározásai;
- háromszögek, téglalapok, négyzetek alkotása konkrét tevékenységekkel;

- a sokszögek oldalai hosszának és azok összegének meghatározása, amellyel azt hangsúlyozzuk, hogy a kerület hosszúságjellegű mennyiség;
- valamint a kerület kiszámításának többféle módon való lejegyzése.

## **2.4. KUTATÁSI KÉRDÉS**

A környezetünkben való becslésekkel, mérésekkel, nyitott és zárt töröttvonalak rajzolásával és hosszuk meghatározásával, sikerül-e a gyerekeket kellőképpen motiválni a témakör tanulására, valamint kellő tevékenységgel támogatva a kerületfogalmat meg tudjuk-e alapozni megfelelően?

## **2.5. A KUTATÁS MÓDSZEREI**

A kutatás lebonyolítása több fázisból állt. Az első fázisban 3. és 4. osztályokban mérőlapok segítségével előzetes vizsgálatot végeztünk, hogy feltárjuk a hosszúságmérés, valamint a kerületfogalom alakulása témakör tanításának problémáit és a gyerekek gondolkodásának sajátosságait (esetleges hibáit). Az itt tapasztaltak alapján terveztük meg a kutatást, illetve megfogalmaztuk hipotéziseinket.

A kiválasztott osztályban lebonyolított kísérletet először négy ciklusra terveztük, majd a tapasztalatok és a lehetőségek alapján ezt 6 ciklusra módosítottuk.

Az egyes ciklusok kezdetén és befejezésekor – félévente – folyamatosan mérőlapokkal, esetenként interjú segítségével vizsgáltuk a gyerekek ismereti szintjét, azaz nyomon követő vizsgálatokat végeztünk. A kapott eredmények alapján folyamatosan korrigáltuk eredeti elképzeléseinket, hogy a fejlesztés minél jobban illeszkedjen a gyerekek gondolkodásához, ismereti szintjéhez és a valósághoz. A ciklusokon belül végzett ellenőrzések (amire az adott lehetőséget, hogy többnyire feladatlapokon dolgoztak a gyerekek) informatívak voltak, tájékoztattak bennünket a továbbhaladás lehetőségeiről, ezek alapján terveztük a következő foglalkozást. A hatásvizsgálat sajátos, folyamatként és eredményként is értelmezhető.

A foglalkozásokról audio- és videofelvételek készültek.

## **2.6. A KUTATÁS HELYE ÉS IDEJE**

A kísérletet Debrecenben a Bocskai István Általános Iskolában végeztük. A kísérletet első osztályban kezdtük, 2004. áprilisában, a kísérletben az 1. a. osztály vett részt.

A kísérletet lezáró tesztet a gyerekek 2007. májusában töltötték ki.

### 3. A KUTATÁS TÉMÁJÁNAK TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉSE

#### 3.1. A HOSSZÚSÁGMÉRÉS TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉSE

A mérések az élet számos területén, a különböző tudományágakban, így a matematikában is megjelennek. Az egyes mennyiségek méréséhez kapcsolódó egységek, a szabványmértékegységek kialakulása hosszú folyamat eredménye.

##### 3.1.1. A hosszúság-mértékegységek eredete

A mérés gondolata maga valószínűleg egyidős az emberiséggel. Kezdetben ezek eszközei a környezetben található tárgyakhoz (kövek, magvak, levelek), az ember testrészeihez (láb, könyök, tenyér stb.), a test teljesítőképességéhez (az 1 nap alatt megtehető út, majd az egy nap alatt megművelhető földterület) kötődtek. Legkorábbi a hosszúságmérés lehetett.

Természetes, hogy a korai mértékegységek közül az emberi testből származók terjedtek el, hiszen az emberi kéz, kar, láb, testmagasság eleve adott, mindig „kéznél” volt és ezek segítségével mód nyílt a különböző hosszúságok összehasonlítására. A korai hosszúságmértékegységek: 1 ujj, 1 hüvelyk, 1 tenyér, 1 arasz, 1 láb, 1 kar (róf), 1 lépés, 1 öl, sok lépés (stádium, mérföld). A „láb” nevű mértékegységet majdnem az összes civilizációban használták. Mivel a testrészek mérete között számmal is kifejezhető viszony állt fenn (pl. 1 tenyér = 4 ujj), sajátos mértérendszer is létrejött. Az egyes emberek testrészei azonban különböztek egymástól, az egyértelműség miatt szükségszerűen jelentkezett az egységesítés igénye. A megegyezéssel bevezetett eszközök használata kezdetben egy-egy településre szorítkozott. A közösség által elfogadott megfelelő mérték nagyságát ráérték egy botra, vesszőre vagy rúdra. Ezzel létrejöttek az első mérőeszközök. (Gődényné, 1984. p. 4-6.)

A Bibliában is számtalan utalást találunk a különféle mértékegységekre, amit már a görögök is használtak.

Az Ószövetségben a hosszúságmérés alapegysége a "könyök" (a régi Bibliában "sing"). A könyökhossz az a távolság, amely egy átlagtermetű ember alsókarjának hossza a könyökétől a középső ujj hegyéig. Elnagyolt számítás szerint ezt ma fél méternek szokták venni, pontosabban: 44,4 cm.

Az "arasz" a könyökhossz fele: 22,2 cm. A "tenyéryni" hosszúság (illetve szélesség) az arasz egyharmada: 7,4 cm. Az "ujjnyi" hosszúság a tenyér negyede: 1,85 cm. (Ezékiel könyvében a könyökhossz egy tenyérynival nagyobb a szokásosnál: 51,8 cm. - Ugyancsak Ezékiel könyvében szerepel egy hosszabb mérőeszköz, a "mérónád", amely az előbb említett könyökhossz hatszorosa, tehát 3 m 11 cm.)

Az Újszövetségben is megvan a "könyöknyi" hosszúság. Az "öl" távolságmérték, hossza: 1 m 85 cm. A "futam" (görögül sztadion) 185 m. A "szombatnapi járóföld" nem egészen 900 m távolságnak felel meg.

##### 3.1.2. A mértékegységek típusai kialakulásuk módja szerint

- A természetes típushoz tartoznak az emberi test méreteiből közvetlenül, statikusan származó mértékegységek: ujj, hüvelyk, tenyér, arasz, láb, róf, öl. A test teljesítőképességéből dinamikusan származó mértékek: lépés, kettős lépés, stádium, mérföld.
- A mesterséges típushoz tartoznak azok, amelyek mérőeszközökből váltak mértékegységgé: rúd, kötél, vég, bála. (Gődényné, 1984. p. 9-10.)

### 3.1.3. Mértékegységek egységesítési törekvései Európában

Az egyes országokon belüli egységesítési törekvések mellett az országok közötti egységesítés gondolata is erősödött.

Simon Stevinus 1584-ben, *De Thiende* című munkájában a mértékegységeknél a decimális rendszer bevezetését javasolta.

A manufaktúra fejlődése, a kialakulófélben levő egységes nemzetközi piac, majd az ipari forradalom mind-mind kényszerítő erővel hatott egy egységes mértékrendszer kidolgozására. Sok tudós fáradozott azon, hogy a hosszúság egysége például ne az uralkodó valamely testrészenek a mérete (láb, hüvelyk), hanem egy bárhol reprodukálható hosszúság legyen.

Azt Christian Huygens (1629-1695) javasolta először, hogy a mértékegységeket természeti állandókból vezessék le. 1664-ben a hosszúság egységéül a másodpercinga hosszát javasolta. Ezzel a hosszúságegységet az időmérésre próbálta visszavezetni. Ezt az ötletet azért vetették el, mert a csillagászok kimutatták, hogy a másodpercinga nem mindenütt ugyanakkora.

G. Mouton, francia csillagász a délkör egy fokpercnyi hosszán alapuló mértékrendszert kívánta bevezetni.

A Francia Tudományos Akadémia 1736-ban kiküldött egy expedíciót a Föld délkörének megmérésére. A mérés Peruban és Lappföldön történt. A kapott eredményt ugyan nem hasznosították, de annyi haszna mindenesetre volt a méréseknek, hogy egyértelműen bebizonyítsa a Föld gömbalaktól eltérő, lapult voltát.

A francia forradalom időszakában került előtérbe újra az egységesítés gondolata, amikor Laplace felelevenítette Mouton 1670. évi javaslatát, mely szerint a mértékegységet a Föld méreteihez kell kötni.

Charles Maurice Talleyrand-Périgord herceg 1790-ben javasolta a Nemzetgyűlésben a méterrendszer bevezetését, ő a másodpercinga hosszát választotta volna a hosszúság mértékegységéül.

A Francia Tudományos Akadémia a Párizson áthaladó negyed délkör tízmilliomod részét javasolta. Az 1791. március 26-án összehívott nemzetgyűlés elrendelte a francia Akadémia által javasolt mérés elvégzését, ami, a méter meghatározását célozta meg. A mérés elméleti és gyakorlati megtervezése Borda, Condorcet, Lagrange, Laplace és Monge érdeme.

1793 májusában javasolták először a méter szót a hosszegység megnevezésére, amely a görög *metron* szóból származik.

1799 júniusára elkészült az ösméter és az öskilogramm. A Francia Nemzeti Archívumban helyezték letétbe. A keletkezése idején a méterrendszer még Franciaországban is megelőzte a korát. Többször is el kellett rendelni a kötelező használatát, utoljára 1837-ben. Nagy erővel megindult a diplomáciai és a szervezőmunka a „méter” rendszer nemzetközi elismeréséért.

1859-ben James Clark Maxwell javasolta, hogy a méter új meghatározása a nátrium sárga színképvonala legyen.

1867-ben a párizsi világiállításon Jakobinak, a szentpétervári tudományos akadémia elnökének kezdeményezésére méterbizottság alakult, mely leszögezte, hogy a méterrendszer tökéletesen megfelel a tudomány és a gazdasági élet igényeinek.

1870. május 20-án írták alá Párizsban a "Méterkonvenciót". A méter általános bevezetésének előkészítésére 1875. május 20-án Párizsban 18 állam részvételével "Nemzetközi Méteregyezmény" gyűlt össze. Ennek ajánlására alakult meg 1889-ben a Nemzetközi Súly- és Mérésügyi Hivatal (CIPM).

Ekkoriban a méter fogalmát zavaró kettősség jellemezte: egyrészt a délkör negyvenmilliomod részét, mint vélt természeti állandót jelentette, másrészt a levéltári méterrúd hosszát, mint a geodéziai állandó anyagi megtestesítőjét. Igazából a mértékek hitelesítéséhez csak ez utóbbit lehetett felhasználni, ezért a méternek a délkör hosszából történő származtatását teljesen elvetették, és etalonnak az időközben elkészült ősmétert tekintették.

### 3.1.4. A méter etalonok és meghatározásuk

1791-ben a francia Akadémia a Föld Párizson áthaladó délkörének negyvenmilliomod részeként javasolta meghatározni a hosszúság alapegységét, amit méternek neveztek el. A mérés elvégzése után 1799-ben elkészültek platina-íridium méter-etalonok.

A méter definíciója ebben az időszakban így hangzott: Egy méter az a távolság, amely a párizsi ősméter két középső osztásának a tengelyvonalak által határolt szakasza között mérhető 0°C-on, 750 torr nyomáson a fent részletezett alátámasztás mellett. (Fodor, 1994, Mértékegység lexikon)

Az ősmétert Sèvresben őrzik, egy külön e célra emelt épületben.

Ezt a meghatározást 1889-ben az iparilag fejlett államok Anglia és az Egyesült Államok kivételével elfogadták.

1927-ben pontosították a méter definícióját: A hosszúság mértékegységét - a métert - az a 0°C-on mért átlagos távolság határozza meg, amit arra a platina-íridium rúdra jelöltek, amelyet a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban őriznek, és az első Súly- és Mértékügyi Értekezlet, a CGPM a méter alapmértékének fogadott el. Feltételül szabták, hogy ezt a rudat normális légköri nyomáson tartják, és alátámasztják két, legalább egy cm átmérőjű görgővel, amelyek egymástól 571 mm távolságra vízszintes síkban szimmetrikusan helyezkednek el.

Felvetődött annak az igénye, hogy olyan hosszúságot találjanak, amelyhez kapcsolva megfelelő laboratóriumi körülmények között bárhol a világon reprodukálható a méter.

Az 1927-ben megtartott VII. Súly és Mérésügyi Nemzetközi Konferencia a méter definícióját a kadmium vörös vonala hullámhosszához kapcsolta.

A méter az a távolság, amely a kadmium vörös vonala hullámhosszának 1 553 165,13 szorosát teszi ki 15 °C-on, 760 torr nyomáson, a levegő 0,03% CO<sub>2</sub> tartalmánál,  $g=9,80665 \text{ m/s}^2$  nehézségi gyorsulás mellett ( $\lambda_{\text{Cd}} = 0,64384696 \text{ m}$ )

Ezzel a mérés bizonytalansága  $10^{-8}$  nagyságrendű. Ez a definíció az etalonnal szemben támasztott egyre fokozódó pontossági követelmények miatt csak 1960-ig volt érvényben, ugyanis a kadmium lámpa magas hőmérsékleten dolgozó fényforrás volt, és nem adott kellően éles interferenciacsíkokat.

Az 1960 októberében, Párizsban megrendezett XI. Súly- és Mérésügyi Nemzetközi Konferencián, az etalonképzési elv megtartása mellett, a kadmium helyett a 86-os tömegszámú kripton izotóp sugárzására alapozott meghatározást iktatták törvénybe.

A hosszúság mértékegysége a méter (m). A méter a kripton-86-atom  $2p_{10}$  és  $5d_3$  energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő, vákuumban terjedő sugárzás hullámhosszúságának  $1640763,73$ -szorosa.

Elfogadták, hogy a méterhez a milli-, a kilo-, deci- és a centi- prefixumok is használhatók

A métert  $10^{-9}$  pontossággal lehet a kriptonlámpás interferométerek segítségével reprodukálni. A sugárzás hullámhossza ennél elvben nagyságrendekkel stabilabb, azonban sajnos egyetlen kriptonatom sugárzását lehetetlen különválasztani. Az atomok sokaságának sugárzása viszont nagy spektrumvonal-szélességet okoz, jóval nagyobbat, mint pl. a lézereké.

A mérhető mennyiségek közül már sok évtizede az idő az a mennyiség, amit a legnagyobb pontossággal tudunk mérni (egyes források szerint ma a bizonytalanság  $10^{-16}$ ). Ez már 1906-ban M. Planckot, ill. 1961-ben C. H. Towerst arra vezette, hogy a hosszúság egységét az időből és a fénysebességből, mint a természet egyetlenes állandójából származtassa.

A Méter Definíció Tanácsadó Bizottság (CCDM) 1983. októberében Párizsban, a CGPM XVII. ülészakán elfogadták Bay Zoltán javaslatát.

Bay Zoltánt, a világhírű magyar fizikust, 1965-től foglalkoztatta a fénysebesség minél pontosabb mérése. Az általa kidolgozott újszerű elven, a koherens lézershullámok mikrohullámokkal történő elektrooptikai modulációján alapuló mérései eredményeképpen 1975-ben a fénysebesség értékét az általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet (CGPM) XV. ülészakán  $c=299\,792\,458$  m/s-ban rögzítették.

A méter ma érvényben levő definíciója tehát: 1 méter az a távolság, amelyet a fény vákuumban  $1/299\,792\,458$  s alatt tesz meg.

E definíció alapján a méter mérésének bizonytalansága már csupán legfeljebb  $10^{-12}$  nagyságrendű. A méterrel kapcsolatban a deci- és centi- prefixumok is törvényesek. Ez vonatkozik a métert és hatványait tartalmazó származtatott mértékegységekre is.

### **3.1.5. A nemzetközi események időrendi sorrendbe összefoglalva**

**1791.** A Francia Nemzetgyűlés elrendeli, hogy a hosszúság új mértékegysége a méter, mely a Föld Párizson áthaladó délkörének negyvenmilliomod része.

**1798.** Megméri a Párizson áthaladó délkör Dunkerque és a Barcelona melletti Monjuick közötti távolságot, minek eredményét egy végleges méterrúdon rögzítik.

**1889.** Az iparilag fejlett államok Anglia és az Egyesült Államok kivételével elfogadták a méter bevezetését. Ezen év szeptember 24-én Párizsban kisorsolták a 30 db méterrúdmásolatot.

**1927.** A VII. Súly és Mérésügyi Nemzetközi Konferencia a kadmium vörös vonalának hullámhosszát fogadta el a méter definíciójaként.

**1960.** A XI. Súly- és Mérésügyi Nemzetközi Konferencián, az etalonképzési elv megtartása mellett, a kadmium helyett a 86-os tömegszámú kripton izotóp sugárzására alapozott meghatározást iktatták törvénybe.

**1983.** A Méter Definíció Tanácsadó Bizottság (CCDM) Párizsban, a CGPM XVI. Súly és Mértékügyi értekezleten elfogadta Bay Zoltán javaslatát, amely a méter meghatározását a fény sebességéhez kapcsolta.

### 3.1.6. Mértékrendszerek

A természettudományokban ma a legtöbb mennyiséget az 1960-ban bevezetett nemzetközi mértékegységrendszer (System International.) egységeivel mérjük. A mértékrendszer alappmennyiségeinek mértékegységeit alappmértékegységeknek nevezzük. Ilyen alappmértékegység a méter.

Korábban más mértékrendszereket is használtak a gyakorlatban. Ilyen, például

- a brit FPS-rendszer, amelynek alapegységei a láb (foot), a font (pound) és a másodperc (secundum);
- a CGS-rendszer, amely a centiméter, gramm és másodperc mértékegységeken alapult,
- az MKSA-rendszer, amelynek alapja a méter, kilogramm, másodperc és amper volt.
- Az SI-mértékrendszer az MKSA-rendszer kiterjesztése.

### 3.1.7. A magyar hosszúság-mértékegységek történeti fejlődése, alakulása

Ósi magyar mérték az erdőöl, néveredete: felemelt karral mért testmagasság, a sátrak belmagasságát mérték vele. Minden bizonnyal használták eleink az őshazában az erdőöl osztórészét, a rőföt is, hiszen szomszédaiknál használatos volt. A mértékegységek sokfélesége már a középkorban is sok nehézséget okozott és azoknak legalább országokénti egységesítésére megjelentek a kezdeményezések. A legrégebb emlékünk a mértékek sokféleségének egységesítésére való törekvés Szt. István király idejéből való. (Gödényné, 1984. p. 4-13.)

Az erdőöl helyett I. István a királyi ölet vezette be. 1 királyi öl = 10 királyi láb (3,126 m). Az I. István által bevezetett királyi láb hossza 31,26 cm.

A királyi lábat etalonnak tekintve, az összes korábban alkalmazott hosszúság-mértékegység hosszát a ma használatos mértékegységekkel meghatározhatjuk. Ennek eredményét az alábbi táblázatban foglaltuk össze.

mérték	ujj	hüvelyk	tenyér	arasz	láb	rőf	lépés	Kettős lépés	öl	metrikusan
ujj	1									1,9537 cm
Hüvelyk	1 1/3	1								2,605 cm
Tenyér	4	3	1							7,815 cm
Arasz	10	7 1/2	2 1/2	1						19,54 cm
Láb	16	12	4	1 3/5	1					31,26 cm
Rőf	32	24	8	3 1/5	2	1				62,52 cm
Lépés	48	36	12	4 4/5	3	1 1/2	1			93,78 cm
Kettős lépés	96	72	24	9 1/8	6	3	2	1		1,8756 m
öl	160	120	40	16	10	5	3 1/3	1 2/3	1	3,126 m

Az országosan kötelezően használatos hosszmértékek gyakran változtak az Árpádház kihalása után, főleg a budai, bécsi, pozsonyi mértékek voltak a meghatározók, de Erdélyben és a Partiumban többnyire sajátos mértékrendszert használtak.

Több oklevél található a levéltárainkban, amelyek a mértékegységek országos egységesítési törekvését tükrözik.

1405-ben Zsigmond király a budai mértékegységek használatát teszi kötelezővé az egész országban.

1488-ban nyomtatásban is megjelentek a királyi minták.

A török uralom alatt a budai mértékegység országos érvényesítése csökkent.

1588-ban II. Rudolf elrendelte, hogy a régi mérték helyett a pozsonyi mértéket kell használni. A török kiverése után újból rendezni kellett a mértékegységek használatát.

1696-ban a Budai Mértékfelügyelő a bécsi öl bevezetését írja elő.

A magyar mértékegységek történetében jelentős évszám az 1715. Ekkor helyezték el a pozsonyi régi városháza falán a ma is látható mértékegységet. A kaputól jobbra látható az akkori hivatalos öl /1901,9 mm/, balra a pozsonyi rőf /784 mm/. 1717-ben VI. Károly a pozsonyi mérce alapján szabályozta ismételten a mértékegységek kötelező használatát.

1854-ben kötelezővé tették az alsó-ausztriai (bécsi) mértékeket az egész ország területén, kivéve Erdélyt és Partiumot.

### **3.1.8. A méterrendszer bevezetésekor használatban lévő hosszúság-mértékegységek**

Magyarországon 1874-ben döntöttek a méterrendszer bevezetéséről, de még évtizedekig használták az emberek a korábbi „hivatalos” mértékegységeket. A régi magyar hosszúság-mértékegységek közül az öl volt a legmaradandóbb, hiszen az ebből származó  $\square$ -ölt még ma is használják. A nagyobb telkek méretét még ma is gyakran  $\square$ -ölben adják meg (bár a hivatalokban már egyáltalán nem használják, csak a hétköznapi életben), ami tulajdonképpen 1 olyan négyzetnek felel meg, amelynek minden oldala 1 öl. A rőffel, singgel viszont már főleg csak az irodalomban találkozhatunk.

*1 öl = 1,89648 m*

*1 rőf = 0,777 m*

*1 láb = 0,31608 m*

*1 hüvelyk = 0,02634 m*

*1 vonal = 0,002195 m*

*1 magyar mérföld = 8353,6 m*

### **3.1.9. A szabványmértékegységek bevezetése**

A magyar földmérők az elsők között csatlakoztak a nemzetközi kezdeményezéshez. Nagy Károly tatabányai térképész volt az, aki 1840-ben elhozta Magyarországra az első méteretalont. Kruspér István, műegyetemi professzor kezdeményezésére a Magyar Mérnök és Építész Egylet több alkalommal szóban és írásban sürgette a méterrendszer alkalmazását.

Kruspér István 15 évig tagja volt a Párizsban székelő Nemzetközi Mértékügyi Bizottságnak és elnöke volt az alapetalont kidolgozó albizottságnak.

Magyarországon a rendszer kötelező bevezetése több évtizedig tartott, a földmérésben való alkalmazása pedig több mint egy évszázadot vett igénybe. Az 1876-ban bevezetett mértékrendszer a földterület mérésére nem vonatkozott. Magyarországon

még ötven évvel a mértékrendszer bevezetés után is az etalon nélküli bécsi öllel mérték a földet, amely ölet egyébként már Ausztria is régen mellőzött.

1928-ban rendelte el a Pénzügyminisztérium, hogy az állami földeket méterrel mérjék, és a területeket m<sup>2</sup>-ben, árban vagy hektárban adják meg. Csak 1970-ben szűnt meg a bécsi földmérték-rendszer, s 1971-től tértek át teljesen a méterrendszerre a földmérésben is.

### **3.1.10. A méterrendszer bevezetésének hazai eseményei időrendi sorrendben**

**1871. június 23.** Budapest. Ferenc József császár aláírja Ausztria-Magyarország csatlakozását a méter konvencióhoz.

**1874. április 17.** VII. Törvénycikk a méterrendszer bevezetésére a földterületek nyilvántartásánál.

**1889.** Magyarország megkapja a Sèvres-ben őrzött etalonnal azonos platina-irídium etalon másolatot. A magyar alampérték nem pontosan 1m, hanem 1,00000219 m.



3.1.1. ábra

**1907.** Központi Mértékügyi Hivatal felállítása, ahol őrzik az ős etalont. Az ősméter jellegzetes profilja azóta is központi eleme az Országos Mérésügyi Hivatal emblémájának.

**1928.** Az állami földmérés áttér az új földméréseknél a méterrendszerre.

1948. LV. számú törvénycikk rendelkezik a méterrendszer alkalmazásáról a földnyilvántartásnál.

**1960.** Az 50/1960. XI. 18. kormányrendeletben rögzítették a méternek a 86-os tömegszámú kripton izotóp sugárzására alapozott meghatározását, bár a nemzeti ősméter még ezután is használatban maradt.

**1974.** 43. számú kormányrendelet a földnyilvántartásoknál a kettős terület kimutatás megszüntetéséről.

**1991. október 9-én** a 45. törvényben rögzítették a Bay Zoltán által megfogalmazott új definícióját a méternek.

## 3.2. A FEJLESZTŐKÍSÉRLET TARTALMÁHOZ SZÜKSÉGES TÖRTÉNELMI HÁTTÉR

### 3.2.1. A mértékegységek és váltásaik, illetve változásai a korabeli tankönyvekben

A méterrendszer bevezetését megelőző tankönyvek, elméleti és gyakorlati útmutatásokat is adtak a korabeli mértékegységekről és a köztük levő kapcsolatokról. Segítették a mérések kivitelezését is. Időrendi sorrendben néhány tankönyvnek az ide vonatkozó részeiből adunk egy rövid válogatást. (Gödényné, 1984, p.21-61.)

A *Maróthi György* által 1743-ban írt Arithmetika vagy számvetésnek mestersége című tankönyvében (ekkor a budai mértékek voltak a hivatalosak) az alábbi mértékegységeket és átváltásait szerepeltette:

1 ujj = 4 árpaszem (= 0,45 cm  $\times$  4 = 1,8 cm), 1 tenyér = 4 ujj (= 7,4 cm), 1 láb = 4 tenyér (= 29,6 cm), 1 könyök = 1,5 láb (= 44,4 cm), 1 rúd = 10-12 láb (= 2,96-3,55 m)

1 mérési lépés = 5 láb = 1,48 m (kettőslépés)

1 futamatnyi föld = 125 lépés, (görög stádium) = 185 m

1 mérföld = 1000 lépés. (római eredetű)

1 öl = 3 sing = 6 láb = 72 ujj

Gyakorlati útmutatást is adott az utóbbi mértékegységekkel való mérések kivitelezéséhez: „Aki így akar mérni, egy 3 singnyi lapos rudat csináltasson, azt osztassa 6 lábra, azután minden lábat még 12 ujra”. *Kisszántói Pethe Ferencz* az 1812-ben kiadott *Mathesis* tankönyvében utalt a földmérésben és az építészetben használt mértékekre és ezek közötti váltószámként a 10-et jelölte meg.

A rúd mértékkel élnek a földmérők és az „Insenörök”, ők tizedes mértékkel dolgoznak: 1 rúd = 10 talp, 1 talp = 10 hüvelyk, 1 hüvelyk = 10 késfok, 1 késfok = 10 hajszál.

Az öl mértékkel élnek a „terjedtségmérők”: ácsok, kőművesek, kőfaragók, hajócsinálók, asztalosok stb.

A mezőn línéat húznak: kötéllel, drótlántzsal, tzőlöpökkel.

Edvi Illés Pál 1838-ban, Budán kiadott tankönyvében, mely a Népszerű számvetés és időszámítás tudománya címet viseli, részletesen foglalkozott a nagyobb távolságokkal is.

Egy geographiai mérföld az a távolság, amennyit gyalog egy ember 2 óra alatt haladhat, azaz 4000 ölnyi.

*Utazási mérték*: a postaállomás (stáció) = 2 mérföld.

*Közbeszédben előforduló mértékek*: 1 dobásnyi, 1 puskalövésnyi, 1 nyíllövésnyi, 1 napi járóföld.

A *lovak mértékét* hüvelykes ököllel szokták mérni, pl. 15 markos ló. 3 marok = 1 öl-láb.

1 bécsi láb = 0,316102 m, 1 párizsi láb = 0,324639 m, 1 porosz láb = 0,31385 m, 1 angol láb = 0,504794 m.

A rőf nagyságát 1858-ban, Pálffy József a Gyakorlati útmutatás a fejszámolásban tekintettel az új pénznemekre című tankönyvében úgy határozta meg, hogy „fából vagy vasból készült vessző, melynek hossza körülbelül annyit tesz, mint egy közönséges nagyságú ember kinyújtott kezének ujja hegyétől a melle közepéig”. (Ez azért figyelemre méltó, mert korábban az ujjtól a vállig mérték a rőföt, ez viszont majdnem az angol yardnak felel meg.)

Az 1874-1875 között megjelent tankönyvekben (többek között *Békési Gyula*: Gyakorló könyv a Métermérték megismertetéséhez Debreczen, 1874. *Dr. Ében Mihály*: Új mérték és számítási mód törtek nélkül. Néptanítók, kereskedők és iparosok számára Pozsony, 1875.) a szerzők már közlik a régi és új mértékek közötti váltásokat. Mivel ebben az időszakban a bécsi mértékek voltak a hivatalosak, ezért az új mértékegységeket ezekhez hasonlították.

1 bécsi hüvelyk = 2,34 cm, 1 bécsi láb = 0,31608 m, 1 bécsi öl = 1,89648 m, 1 bécsi rőf = 0,777 m;

1m = 1,2866 bécsi rőf = 37,965 bécsi hüvelyk = 3,16375 bécsi láb = 0, 52729 bécsi öl.

1 magyar mérföld = 8,3536 km, 1 ausztriai mérföld = 7,5859 km;

1 km = 0,11971 magyar mérföld = 0,13182 ausztriai mérföld.

### 3.2.2. Régi magyar hosszúság-mértékegységek és térbeliséget kifejező szavak a népmesékben

A magyar népmesék bőséges lehetőséget kínálnak a matematikához, a méréskehez kapcsolódó fogalmak tanításához. Különösen jellemző ez Benedek Elek népmesegyűjteményére (Benedek I-II-III. 1988). Ezekben sok olyan történet, meseelem található, amelyek a mérések tanításához, a korabeli mértékegységek viszonyaihoz kapcsolódnak és olyanok is, amelyek a számosság, a számfogalom és a matematikai műveletek előkészítését segítik.

A kutatásunknak egy sajátos vonása a mesék, és a bennük előforduló hosszúság-mértékegységek és hosszúságjellegű kifejezések értelmezése, magyarázata.

#### 3.2.2.1. Régi magyar hosszúság-mértékegységek

- „... jött a hétfejű sárkány, s hét szájából szakadt a láng hét rőffel előre.” [A fekete havas című mese](Benedek I. p.23.)
- „Amikor a házépítőkhöz érne, hát ezek éppen akkor erőlködnek egy kilencöles szarufával, ...” [Erős János] (Benedek I., p.31.)
- „Mindjárt vett egy vég aranyvásznot, neki állott tizenkét legényével, ...”[Szalonnafa] (Benedek I. p. 62.)
- „... hetedhét országon innét, az Óperenciás tengeren egy sánta arasszal túl: ... Hanem rettentő nagy tenger mellé vetődhetett, mert álló két hétig örökös-örökké repült. Tudjon elmenni Feketeországba, amely innét hetvenhét mérföldre van, s olyan szűk az útja, hogy még csak a kicsi ujjam sem fér el.” [Feketeország](Benedek I., p.109.)
- „... a szegény legény ijedtében egyarasznyira rúgta fel a malomkövet.” [Tündér Erzsébet] (Benedek II., p. 260)
- „... valami száz lépésről egy vadász éppen akkor lőtt nyilával a verébre, ...” [A molnár leánya] (Benedek I., p.195.)

#### 3.2.2.2. A hosszúsághoz kapcsolódó melléknevek

Érdeemes áttekinteni a hosszúsághoz kapcsolódó köznyelvi elnevezéseket.

- „Nézte, nézte János királyfi a *hosszú* embert, s szemé-szája tátva maradt a nagy, erős csodálkozástól, mert még ilyen hosszú embert nem látott. ... egy rettentő széles vállú ember feküdt egy nagy hegynek, ... egy rengeteg széles mellű ember csak ráfúj a fákra, rettentő szél kerekedik, s a fák szörnyű nagy recsegéssel-ropogással dőlnek ki tőből”. [Szélike királykisasszony] (Benedek II., p. 250.)

- „Van itt az erdőben egy óriás, olyan *magas*, mint egy torony; olyan *széles*, mint egy ház; a szája akkora, mint egy kemence.” [Az elrabolt királykisasszony] (Benedek III., p.43.)
- „... eke elé fogta hat címeres ökrét, s széle, *mély* barázdást húzatott a Balaton mentén, olyan szélest s olyan mélyet, hogy a leány ne tudjon a nyájához menni.” [A kecskekörmök] (Benedek III., p. 437.)
- „Tudjon elmenni Feketeországba, amely innét hetvenhét mérföldre van, s olyan *szűk* az útja, hogy még csak a kicsi ujjam sem fér el,” [Feketeország] (Benedek I., p.109.)
- „Olyan *keskeny* volt a szikla teteje, hogy éppen reá léphetett, de az ő lába nem ingadozott, úgy állott a szédületes magasságban, mintha a sziklából nőtt volna ki.” [Csalatornya] (Benedek III., p.68.)

### 3.2.2.3. A távolsággal kapcsolatos nyelvi kifejezések

- „... a sas csak egy *puskalövésnyire* volt utánuk.” [Szép Palkó] (Benedek I., p.39.)
- „... mikor egy *hajításnyira* lehetett attól, ...”[Szép Palkó] (Benedek I., p.40.)
- „... merthogy nem volt párnája, csak egy kis *tűrés vég vászna*, azt tette a vendégek feje alá.” [Istené a szállás] (Benedek III, p. 378.)
- „... olyan hosszú volt a kardkötő, hogy nem érte *végét-hosszát*, belegabalyodott egészen,...” [Csonka és Sánta pajtás] (Benedek III., p.438.)
- „... jó egy olyan magas ördög, hogy nyolcórét hajlott, s úgy fért be a z ajtón.” [Pihári] (Benedek II., p. 362.)
- „... embert nem látott, de akkorát sem, mint egy *ütés tapló*.” [Az égig érő fa] (Benedek I., p. 11.)

## 4. A KUTATÁS TÉMÁJÁNAK MATEMATIKAI VONATKOZÁSAI

A matematika több fejezete foglalkozik a hosszúságméréssel. Kisiskolás korban, a hosszúság és kerületmérés, tanításakor sok geometriai fogalom előkerül: pont, egyenes, illeszkedés, félegyenes, szakasz, töröttvonal, görbe vonal, egybevágóság stb. Ezekhez a fogalmakhoz a matematikai elméleti felépítésében különböző definíciók, axiómák, tételek, bizonyítások kapcsolódnak. Az alábbiakban, az iskolai munkában előforduló fogalmak egy rövid matematikai áttekintését adjuk.

### 4.1. A HOSSZÚSÁGMÉRÉS METRIKUS MEGKÖZELÍTÉSE

A mérések geometriai elméletének bemutatása a Hilbert-féle illeszkedési tér modellben. A Hilbert-féle illeszkedési tér  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{L})$  hármásában  $\mathcal{E}$  egy halmaz,  $\mathcal{P}$  és  $\mathcal{L}$  az  $\mathcal{E}$  részhalmazainak bizonyos halmaza.  $\mathcal{E}$  elemeit pontoknak,  $\mathcal{P}$  elemeit síkoknak,  $\mathcal{L}$  elemeit egyeneseknek nevezzük.

Ha egy  $P$  pont eleme egy egyenesnek vagy egy síknak, akkor azt mondjuk, hogy *illeszkedik* rá.

Ha egy  $\ell$  egyenes részhalmaza egy síknak, akkor azt mondjuk, hogy illeszkedik rá. Ugyanarra az egyenesre illeszkedő pontokat *kollineáris* pontoknak, míg az egy síkra illeszkedő pontokat *komplanáris* pontoknak nevezzük.

Az  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{L})$  Hilbert féle téren érvényesek az illeszkedési axiómák. (Kovács, 2002.)

A Hilbert-féle téren értelmezzük a *távolságfogalmat*. Minden  $P, Q$  pontpárhoz hozzárendelünk egy  $d(P, Q)$  valós számot, amit távolságnak nevezünk. Erre az alábbi axiómák teljesülnek:

0.  $d: \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  függvény
1.  $d(P, Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}$
2.  $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q. \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}$
3.  $d(P, Q) = d(Q, P) \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}$
4.  $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R) \quad \forall P, Q, R \in \mathcal{E}$

Ezzel a távolságfüggvénnyel kiegészítve a  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{L})$  Hilbert-féle illeszkedési teret, kapjuk a  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$  négyest.

A távolságfüggvény axiómáihoz kapcsoljuk az úgynevezett a vonalzó axiómát.

A vonalzó axióma kimondásához szükségünk van arra, hogy a pontokhoz koordinátákat rendeljünk. Ez az  $f$ , úgynevezett koordináta-leképezéssel történik.

A vonalzó axióma vagy első folytonossági axióma:

$$\forall \ell \in \mathcal{L} \exists f: \ell \rightarrow \mathbf{R} \text{ bijekció, hogy } \forall P, Q \in \ell : d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|.$$

A vonalzó axióma segítségével definiálható a „*között van*” reláció, amely további fontos fogalmak meghatározásának kiindulópontja.

Legyen  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$  Hilbert féle illeszkedési tér, melyben, teljesül a vonalzó axióma. Azt mondjuk, hogy a tér  $C$  pontja az  $A$  és  $B$  pontok *között van*, jelölésben  $A - C - B$ , ha  $A, B, C$  három különböző kollineáris pont és  $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$ . (Kovács, 2002, p.7-8.)

Azt, hogy  $P$  nem az  $A$  és  $B$  pontok között van,  $\neg(A - P - B)$  módon jelöljük.

$\overline{AB}$ -t  $A$  és  $B$  végpontokkal rendelkező szakasznak, az int  $\overline{AB} = \overline{AB} \setminus \{A, B\}$  halmazt nyílt szakasznak vagy az  $\overline{AB}$  belsejének nevezzük.  $\overline{AB}$ -t  $A$  kezdőpontú  $B$ -t tartalmazó félegyenesnek nevezzük.

Ha  $A - O - B$  teljesül, akkor  $\overrightarrow{OA}$ -t és  $\overrightarrow{OB}$ -t ellentétes félegyeneseknek mondjuk.  $\overline{AB}$  az  $A$  és  $B$  pontokat tartalmazó egyenes.

Legyen  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$  Hilbert féle illeszkedési tér, melyben teljesül a vonalzó axióma. Legyenek  $A$  és  $B$  pontok,  $A \neq B$ , akkor

$$\overline{AB} = \{P \in \mathcal{E} \mid A - P - B\} \cup \{A, B\}, \quad \overleftarrow{AB} = \{P \in \overline{AB} \mid \neg(P - A - B)\}$$

$A$  között van relációra az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1.  $A - B - C \Rightarrow C - B - A$ ,
2.  $A - B - C \Rightarrow \neg(A - C - B) \wedge \neg(C - A - B)$
3.  $A - B - C \Leftrightarrow \forall f$  koordinátaleképezésre  $f(B)$  az  $f(A)$  és  $f(C)$  értékek között van, azaz  $f(A) < f(B) < f(C)$  vagy  $f(C) < f(B) < f(A)$ .

**Cantor-Dedekind tétel.** Létezik az egyenes és a valós számok halmaza között olyan bijekció, amely megtartja a között van relációt.

$A$  között van reláció alább felsorolt tulajdonságai mind visszavezethetők a valós számok megfelelő tulajdonságaira a Cantor-Dedekind-tétel segítségével.

1. Egy egyenes tetszőlegesen kiválasztott három pontja közül pontosan egy van a másik kettő között.
2. Ha  $P \in \overline{AB}$  akkor az alábbiak közül pontosan egy igaz:  
 $P - A - B$ ,  $P = A$ ,  $A - P - B$ ,  $P = B$ ,  $A - B - P$ .
3. Legyen  $A$  és  $C$  két pont.  $\exists B \in \mathcal{E}$ , melyre  $A - B - C$ , továbbá  $\exists D \in \mathcal{E}$ , melyre  $A - C - D$ .

### Szakaszok egybevágósága

Az  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  szakaszokat egybevágóknak (kongruenseknek) nevezzük, ha  $d(A, B) = d(C, D)$ . Jelölése  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ .

A szakaszok egybevágósága ekvivalenciareláció a szakaszok halmazán, azaz

1.  $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ ,  $\forall A, B \in \mathcal{E}$
2. ha  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ , akkor  $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ ,  $\forall A, B, C, D \in \mathcal{E}$
3. ha  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  és  $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ , akkor  $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ ,  $\forall A, B, C, D, E, F \in \mathcal{E}$ .

### $A$ szakaszfelmérés tétele

Legyen adva  $\overline{AB}$  és  $\overline{VP}$ . Ekkor pontosan egy  $Q \in \overline{VP}$  pont létezik, hogy  $\overline{AB} \cong \overline{VQ}$ .

**$A$  szakaszok ráérése, összehasonlítása.**

Az  $\overline{AB}$  szakaszt kisebbnek mondjuk, mint  $\overline{CD}$ -t, jelölésben  $\overline{AB} < \overline{CD}$ , ha létezik egy olyan  $B'$  pont a  $C$  és  $D$  között, amelyre  $\overline{AB} \cong \overline{CB'}$ . (Baziljev-Dunyicsev, 1987, p.190.)

Legyen adott két rögzített szakasz,  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$ . Tetszőleges  $\overrightarrow{VP}$  félegyenesre mérjük fel az  $\overline{AB} \cong \overline{VB'}$  és  $\overline{CD} \cong \overline{VD'}$  szakaszokat.

A következő esetek lehetségesek:

1.  $D'=B' \Rightarrow \overline{VD'} \cong \overline{VB'}$ . Az  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  szakaszok egyaránt egybevágóak, a  $\overline{VB'}$  szakasszal, ezért  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ .
2.  $V - D' - B'$ . Ekkor azt mondjuk, hogy az  $\overline{AB}$  szakasz nagyobb, mint a  $\overline{CD}$  szakasz, vagy a  $\overline{CD}$  szakasz kisebb, mint az  $\overline{AB}$  szakasz; jelben  $\overline{AB} > \overline{CD}$  vagy  $\overline{CD} < \overline{AB}$ .
3.  $V - B' - D' \Rightarrow \overline{AB} < \overline{CD}$  vagy  $\overline{CD} > \overline{AB}$ .

Belátható, hogy a szakaszok közötti kisebb, nagyobb reláció nem függ a  $\overrightarrow{VP}$  félegyenes megválasztásáról.

#### ***A szakaszok közötti kisebb reláció tulajdonságai***

1. Bármely  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  szakaszra az alábbiak közül pontosan egy teljesül:  
 $\overline{AB} < \overline{CD}$ ,  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ,  $\overline{CD} < \overline{AB}$ .
2. Ha  $\overline{AB} < \overline{CD}$  és  $\overline{CD} < \overline{EF}$ , akkor  $\overline{AB} < \overline{EF}$ .
3. Ha  $A - B - C$  és  $A - C - D$ , akkor  $A - B - C - D$ .
4. Ha  $A - B - C$  és  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ , akkor van olyan  $B'$  pont, melyre  $A' - B' - C'$  és  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ .
5. Ha  $\overline{AB} < \overline{CD}$  és  $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ , akkor  $\overline{AB} < \overline{C'D'}$ .
6. Ha  $\overline{AB} < \overline{CD}$  és  $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ , akkor  $\overline{A'B'} < \overline{CD}$ .
7. Ha  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$  és  $\overline{AB} < \overline{CD}$ , akkor  $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$ .

(Moise, p.107-112.)

#### ***Szakaszok összeadása***

Ha  $A - B - C$ ,  $A' - B' - C'$ , valamint  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  és  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$   
akkor  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ .

Ennek a tulajdonságnak teljesülése alapján az  $\overline{AC}$  szakaszt, az  $\overline{AB}$  és  $\overline{BC}$  szakaszok összegének nevezzük

#### ***Szakaszok kivonása***

Ha  $A - B - C$ ,  $A' - B' - C'$ , valamint  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  és  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$   
akkor  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ .

Ennek a tulajdonságnak teljesülése alapján a  $\overline{BC}$  szakaszt, az  $\overline{AC}$  és  $\overline{AB}$  különbségének nevezzük. (Moise, 1963, p.59-60.)

### Szakaszok mértékének megadása

Jelölje  $L$  a szakaszok,  $\mathbf{R}^+$  pedig a pozitív valós számok halmazát.

Azt mondjuk, hogy megadtuk a szakaszok mérését, ha adott egy  $l: L \rightarrow \mathbf{R}^+$  függvény, amely eleget tesz a következő axiómáknak: (Baziljev-Dunycsev p. 219.)

1.  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \Rightarrow l(\overline{AB}) = l(\overline{A'B'})$  ( $l$  invariáns az egybevágósággal szemben);
2.  $A - B - C \Rightarrow l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) = l(\overline{AC})$ ;
3.  $\exists \overline{PQ} \mid l(\overline{PQ}) = 1$ .

Azt a  $\overline{PQ}$  szakaszt, amely eleget tesz a 3. axiómának, egységszakasznak nevezzük.

Az  $l(\overline{AB})$  számot a hosszegység feltüntetésével az  $\overline{AB}$  szakasz hosszának vagy mértékének nevezzük. Pl.  $l(\overline{AB}) = 3$  cm.

## 4.2. TÖRÖTTVONALAK HOSSZÚSÁGA

Egymáshoz csatlakozó  $\overline{A_0A_1}$ ,  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ , ...,  $\overline{A_{n-2}A_{n-1}}$ ,  $\overline{A_{n-1}A_n}$  szakaszok egy töröttvonalat alkotnak.

Ha az  $A_0, A_n$  pontok azonosak, a töröttvonal zárt, ellenkező esetben pedig nyílt. A nyílt töröttvonalak közé soroljuk az  $n = 1$  esetben adódó egyenes szakaszt is. Azok a pontok, ahol a töröttvonal szakaszai az előírás szerint csatlakoznak, a töröttvonal töréspontjai.

A töröttvonal hosszán a töröttvonalat alkotó szakaszok hosszának összegét értjük.

A töröttvonal hossza nem lehet a végpontok, az  $\overline{A_0A_n}$  távolságánál kisebb, azaz az  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  töröttvonal szakaszainak hosszára fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\overline{A_0A_n} \leq \overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n}.$$

Ennek speciális esete a háromszög-egyenlőtlenség: Tetszőleges háromszögben bármely két oldal hosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza.

A szög általános meghatározása: Legyen  $A, O, B$  három pont. Az  $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$  halmazt szögvonalnak vagy szögnek nevezzük, melynek  $O$  a csúcsa és  $\overrightarrow{OA}$  és  $\overrightarrow{OB}$  pedig a szárjai. Jele:  $\angle AOB$ . A szögvonalat valódinak nevezzük, ha nem egyenes, vagy félegyenes. Ellenkező esetben nem valódi szögvonalról beszélünk.

Ha  $\angle AOB$  nem valódi, akkor  $A - O - B$  egyenesszögről, míg  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$  esetén nullszögről vagy teljes szögről beszélünk.

A nullszög mértéke 0, az egyenesszögek mértéke  $\pi$ . Minden valódi szög mértéke 0-tól nagyobb, de  $\pi$ -től kisebb.

A  $\frac{\pi}{2}$  mértékű szöget derékszögnek nevezzük. (Kovács, p. 9.)

A töröttvonal minden pontjához egy-egy törésszög tartozik. Ennek szárait a töréspontban egymáshoz csatlakozó két szakasznak az egyike és a másiknak a törésponton túli meghosszabbítása adja. (Hajós 1966, 22. oldal)

Ha a töröttvonalnak van 0-tól különböző törésszöge, akkor végpontjainak távolságánál hosszabb.

Ha a töröttvonalnak nincs törésszöge, akkor egyetlen szakasz. Ha minden törésszöge nullszög, akkor egy szakasz feldarabolásával keletkezett.

### 4.3. GÖRBE VONALAK

Az  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  folytonos függvényt  $\mathbf{R}^n$  -beli görbének nevezzük.  $[a, b]$ -t paraméter-intervallumnak,  $\underline{f}$ -t a görbe egy paraméterelőállításának nevezzük.  $\underline{f}(a)$  és  $\underline{f}(b)$  a görbe kezdő, illetve végpontja. Ha  $\underline{f}(a) = \underline{f}(b)$ , akkor  $\underline{f}$  zárt görbe. Ha  $\underline{f}$  kölcsönösen egyértelmű, akkor ívnek nevezzük.

Ha egy görbe minden pontja egy adott síkban van, akkor síkgörbéről, ellenkező esetben térgörbéről beszélünk.

Legyen  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  egy görbe  $T = \{a = t_0, t_1, \dots, t_m = b\}$   $[a, b]$  egy felosztása,  $|\underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1})|$  az  $\underline{f}(t_i) = P_i$  és  $\underline{f}(t_{i-1}) = P_{i-1}$  pontokat összekötő szakasz hossza.

A  $P_0 P_1 P_2 \dots P_n$  töröttvonal hosszán, a  $P_{i-1} P_i$  szakaszok hosszának  $\sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i)$  összegét értjük. (Lajkó, 2003., p.18-19.)

Ha bármely felosztásra a  $\left\{ \sum d(P_{i-1}, P_i) \right\}$  halmaz felülről korlátos, akkor a görbét rektifikálhatónak mondjuk. Az ekkor létező pontos felső korlátot, azaz az

$$s = \sup \left( \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i) \right)$$

számot, a görbe ívhosszának nevezzük. (Lajkó, 2003, p. 18-19.)

**Megjegyzés:** Ha a görbe rektifikálható az  $[\alpha, \beta]$  intervallumon és  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ , akkor a görbe rektifikálható az  $[\alpha, \gamma]$  és a  $[\gamma, \beta]$  intervallumokon is. Ekkor az  $[\alpha, \beta]$  intervallum  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  pontokkal való felosztásánál kapott töröttvonal hosszának suprémuma egyenlő az  $[\alpha, \gamma]$  intervallum  $R_0, R_1, \dots, R_k$  és a  $[\gamma, \beta]$  intervallum  $Q_0, Q_1, \dots, Q_m$  pontokkal való felosztásánál kapott két töröttvonal hosszai suprémumának összegével, azaz

$$\sup \left( \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i) \right) = \sup \left( \sum_{j=1}^k d(R_{j-1}, R_j) \right) + \sup \left( \sum_{l=1}^m d(Q_{l-1}, Q_l) \right).$$

### 4.4. SOKSZÖGEK, SÍKIDOMOK KERÜLETE

A síkidom szót korlátos síkbeli tartomány megjelölésére, sőt többnyire összefüggő sokszögtartományokra használjuk. (Hajós, 1966, p.8-129.)

Bármely síkidom belső pontjainak azokat a pontokat nevezzük, amelynek van a síkidomhoz tartozó síkbeli környezetük.

Egy sokszögtartomány összefüggő, ha bármely két pontja összeköthető a sokszögtartományhoz tartozó töröttvonallal.

A sokszögtartomány a síknak véges sok szakasz által határolt, egyenest nem tartalmazó része.

Egy zárt töröttvonalat, ha az előírt csatlakozási pontokon kívül más közös pontja nincs, akkor sokszögvonálnak nevezzük.

A szakaszok a sokszögvonala oldalai, csatlakozási pontjaik a sokszög csúcsai.

A sokszögvonálnak ugyanannyi oldala van, mint ahány csúcsa, és ez a szám legalább három. Az  $n$ -szögvonálnak  $n$  oldala és  $n$  csúcsa van. Így beszélhetünk háromszögvonalról (háromszög), négyszögvonalról (négyszög) stb.

A sokszögvonala minden csúcsában két oldal találkozik, és minden oldal két csúcsot köt össze.

A sokszögvonala a síkot két részre bontja fel. Az egyik a sokszögvonalon és az azon kívüli tartomány, a másik a sokszögvonala és az azon belüli tartomány. A sokszögvonala a két síkrész közös pontjaiból áll. A belső síkrészt sokszögnek mondjuk.

A határoló sokszögvonala hosszát a sokszögtartomány kerületének nevezzük.

Legyen  $A, B, C$  három nem kollineáris pont. Az  $ABC \Delta = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$  halmazt háromszögnek nevezzük, melynek  $A, B, C$  csúcsai,  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$  az oldalai,  $BAC \sphericalangle, ACB \sphericalangle, ABC \sphericalangle$  pedig a szögei.

Legyen  $A, B, C, D$  négy olyan komplanáris pont, hogy közülük bármely három nem kollineáris, továbbá az int  $\overline{AB}$ , int  $\overline{BC}$ , int  $\overline{CD}$ , int  $\overline{DA}$  halmazok közül mindegyik metszete az összes többivel üres halmaz. Ekkor az  $ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$  halmazt négyszögnek nevezzük, melynek  $A, B, C, D$  a csúcsai,  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$  az oldalai,  $\overline{AC}, \overline{BD}$  az átlói. Egy átló végpontjait szemközti csúcsoknak is mondjuk. Ha két oldal metszi egymást, azokat szomszédos oldalaknak, míg ellenkező esetben szemközti oldalaknak mondjuk.

Egy négyszöget akkor nevezünk téglalapnak, ha minden szöge derékszög. Az olyan téglalapot, amelynek minden oldala egyenlő, négyzetnek hívjuk. (Kovács 56-57. oldal)

Egy síkidomot akkor tekintünk konvexnek, ha bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza; ha ez az alakzat nem minden pontpárjára teljesül, akkor nem tekintjük konvexnek. A nem konvex alakzatokra használjuk a konkáv jelzöt is.

Konvex síkidom olyan síkbeli konvex alakzat, amelynek pontjai nem egy egyenesen helyezkednek el. (Például a szakaszt nem nevezzük konvex síkidomnak)

Minden konvex síkidom tartalmaz sokszögtartományt. Ha a konvex síkidom nem tartalmaz félegyenest, akkor határát konvex zárt görbének mondjuk.

Egy síkidom által tartalmazott sokszöget a síkidom belső sokszögének, a síkidomot tartalmazó sokszöget a síkidom külső sokszögének nevezzük. Ha a síkidom sokszög, akkor egyben saját magának külső és belső sokszöge is.

Konvex síkidom beírt sokszöge konvex belső sokszög, mert oldalait a konvex síkidom tartalmazza, és oldalainak meghosszabbításán nem lehet pontja. Bármely külső sokszög kerülete bármely más konvex belső sokszög kerületénél nagyobb, mert a külső sokszög tartalmazza a belsőt.

Ha egy konvex síkidom tartalmaz egy másikat, akkor a tartalmazottnak a kerülete nem lehet a tartalmazóénál nagyobb. A síkidomsorozat elemeit határoló konvex zárt görbék sorozata tart az adott konvex síkidom határvonalához.

Egy korlátos konvex síkidom kerületének a beírt sokszögek kerületének felső határát nevezzük. A felső határ létezését a korlátosság biztosítja, mert bármely külső sokszög kerülete a konvex belső sokszögek kerületének felső korlátja.

Ez a felső határ megegyezik a már korábban az ívhosszra adott értékkel.

A konvex síkidom kerülete egyetlen külső sokszög kerületénél sem nagyobb, és egyetlen belső sokszög kerületénél sem kisebb.

Egybevágó konvex síkidomok kerülete egyenlő.

## 4.5. IZOMETRIÁK

A sík és a tér leképezései során vizsgálhatjuk a hosszúság állandóságát.

Legyen  $H \in \mathcal{E}$ ,  $\sigma: H \rightarrow H$  leképezés. A  $P \in H$  pontot a  $\sigma$  leképezés *fixpontjának* nevezzük, ha  $\sigma(P) = P$ . A  $T \subset H$  a  $\sigma$  leképezés invariáns alakzata, ha  $\sigma(T) = \{\sigma(P) \mid P \in T\} = T$ .  $T$ -t pontonként fix alakzatnak nevezzük, ha  $\forall P \in T: \sigma(P) = P$ .

Ha  $H = \mathcal{E}$  vagy  $H \in \mathcal{P}$ ,  $\sigma: H \rightarrow H$  olyan bijekció, hogy  $\forall P, Q \in H: d(P, Q) = d(\sigma(P), \sigma(Q))$  teljesül, akkor  $\sigma$ -t izometriának vagy egybevágósági transzformációnak nevezzük. Ha  $H \in \mathcal{P}$ , akkor síkizometriáról beszélünk.

### A síkizometriákkal kapcsolatos tételek

1. Az egyenesre vonatkozó tükrözés síkizometria.
2. Ha egy izometriának egynél több fixpontja van, akkor az identitás vagy tengelyes tükrözés.
3. Minden síkizometria legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzata.
4. Egy izometria vagy páros, vagy páratlan számú tengelyes tükrözés szorzata.
5. Két nem feltétlenül különböző tengelyes tükrözés szorzata nem tengelyes tükrözés.
6. Két nem feltétlenül különböző szakasz, szög, háromszög pontosan akkor kongruens, ha létezik olyan izometria, mely egyiket a másikba viszi.

(Kovács, 2002, p. 43-73.)

## 4.6. HOSSZÚSÁGOKON ÉRTELMEZETT MŰVELETEK

Freudenthal a Didaktikai fenomenológiák című munkájában mélyrehatóan foglalkozott a hosszúságfogalommal, annak többféle megközelítésével. A téma matematika elméleti kifejtését, annak didaktikai nehézségeit, problémáit végigvitte a kisiskolás kor konkrét tapasztalatszerzésétől az axiomatikus tárgyalásmóddal bezárólag. Nagy hangsúlyt fektetett arra, hogy az egyes fogalmakat valóság tartalommal is megtöltse, a mindennapi élet fogalmait alkalmazta a téma kidolgozásában.

A probléma kifejtését a „Mi a hosszúság” kérdés nyitott mondattá való átalakításával kezdi, azaz „... az ... hosszúsága” mondatot használja. Ezzel ezt az egyszerű kérdést függvényszimbólumokká alakítja, s a mennyiségekkel végzett műveleteket is a függvények körében végzett műveletekkel definiálja.

A hosszúságra, mint függvényre, az alábbi jelölést vezethette be:

$l(x)$ : x-nek a hosszúsága;

ahol  $x$  egy olyan valami(tárgy), amelynek van hosszúsága.

Az  $l$  értékeit hosszúságnak nevezzük, és a hosszúságok összességét  $S$  -el jelöljük. Az  $l$  értékei két részből tevődnek össze: mérőszámból (ami a valós számok halmazának elemeit jelenti) és mértékegységből. (Freudenthal, 1983, p.1.)

A hosszúságokkal végezhető műveletek kifejtésében és bizonyításában részletesen foglalkozott az alábbiakkal:

- a hosszúságok összege nem függ a reprezentációtól, minden esetben teljesül, hogy az együttes hosszúság egyenlő a részek hosszúságának összegével;
- a hosszúságok rendezésével;
- a hosszúságok szorzásánál kitért a pozitív egész számmal, racionális és valós számmal való szorzásra.

Ez fontos eleme a gyakorlati méréseknek, hiszen egy hosszúságot az egység többszöröseként határozzunk meg. (Freudenthal, 1983, p. 6-9.)

## **5. A KUTATÁSHOZ KAPCSOLÓDÓ DIDAKTIKAI HÁTTÉR-ISMERETEK, PEDAGÓGIAI ÉS PSZICHOLÓGIAI ELMÉLETEK**

### **5.1. NEMZETKÖZI TÖREKVÉSEK A TANÍTÁS, A MATEMATIKA-TANÍTÁS MEGÚJÍTÁSÁRA**

#### **5.1.1. Comenius szerepe az oktatás elméletének megalapozásában**

*Comenius* fő művében a „*Didactica magna*”-ban (1632) fejt ki elméletét, amelyet Baconnek a „Semmi sincs addig az értelemben, ami nem lett volna korábban az érzetekben” megállapítására alapozza. Módszeresen bemutatja a tapasztalati, érzéki, szemléletes úton történő ismeretszerzést. Elveti a velünk született eszmék mindenhatóságát és a tekintélyelvet, ugyanakkor túl is lép a pusztán empirikus, érzékszervi megismerésen.

#### **5.1.2. A reformpedagógia, az új pedagógiai áramlatok néhány előfutára**

*Rousseau* (1712-1778) véleménye szerint ne készen kapott ismereteket adjunk a gyermekeknek, hanem teremtjük meg annak feltételeit, hogy ő maga oldja meg a kérdéseket.

*Pestalozzi* (1746-1827) szerint a gyermekben lévő ösztönök, erők egyéni kibontakoztatását kell az oktatásnak biztosítani. Ő támaszkodik *Rousseau* elméletére, de már túl is lép azon.

*Diesterweg* (1790-1866) azt vizsgálta, hogy hogyan lehet az eltérő képességű és egyéniségű tanulók gondolkodását önálló tevékenységekkel és különböző pedagógiai hatásokkal fejleszteni.

*Dewey* (1859-1952) és *Claparede* (1873-1940) összefoglalják a reformpedagógiai törekvéseket. (Veszprémi, p. 9-13.)

#### **5.1.3. Reformpedagógiai irányzatok a XX. században**

Az alábbi pedagógiai irányzatok szervesen kapcsolódnak a fejlesztés során alkalmazott módszerekhez, mivel a tevékenység, a gyerekek hétköznapi ismeretei szerves részét képezték tanításunknak.

##### **5.1.3.1. A realiztikus matematikaoktatás**

A realiztikus matematikaoktatás kialakulása a nemzetközi kutatások eredményeinek összegzéseként jött létre, melynek atyja, kezdeményezője és fő támogatója Hans Freudenthal. Szerinte a matematikaoktatásnak olyan jelenségekből, szituációkból kell kiindulni, amelyek a tanulók számára érdekesek, motiváló erővel bírnak, s ezzel nagyban hozzájárulnak ahhoz, hogy a tanulók megértsék a matematikának a tudományban, a társadalomban és a mindennapi életében játszott szerepét.

A realiztikus matematikatanításban a „realisztikus” jelző nem szükségképpen a valóságból vett jelenségeket, objektumokat jelenti, hanem azokat, amelyek a tanuló szempontjából elképzelhetőek és jelentéssel bírnak. Ilyen értelemben a tiszta matematikai kontextusok – vagy esetünkben a mesék is – lehetnek realiztikusak a tanulók számára.

A realizisztikus matematikatanításnak két fő jellemzője van: a fokozatos matematizálás és a modellek szerepe.

A fokozatos matematizálás azt jelenti, hogy a gyerekeket ösztönözni és támogatni kell abban, hogy ismereteiket folyamatosan fejlesszék és pontosítsák.

A realizisztikus matematikaoktatás alapja a genetikus elv, amely azt mondja ki, hogy az ismeretek a kezdeti globális és differenciálatlan formából mindig pontosabb, egyre kevesebb hibás elképzelést tartalmazó formákban fejlődnek tovább. Az informális eljárásoktól a formális matematikához vezető úton alapvető szerepet játszanak a modellek. (Ambrus, 2002)

Freudenthal a Didaktikai fenomenológiák című munkájában kifejti, hogy jó volna, ha a didaktikai fenomenológiák fejlesztése során támaszkodni lehetne egy genetikai vonalra, de meggyőződése, hogy a fordított sorrend ígéretesebb. „A matematikai fenomenológia, didaktikai fenomenológia, genetikai fenomenológia sorozatában minden tag alapul szolgál a következőnek. A matematikai struktúrák fenomenológiájának leírásához a matematikai ismeret és annak alkalmazása elégséges; a didaktikai fenomenológia még a tanítás módjának ismeretét is igényli; a genetikai fenomenológia a pszichológia része.”

Freudenthal részletesen foglalkozott a hosszúságmérés elméleti és didaktikai vonatkozásával.

#### **5.1.3.2. A konstruktivizmus**

A reformpedagógiák megjelenésével megváltozott a tanulási környezet, és ezzel a tanulók mindennapi tevékenysége. Az iskolákban az ember került a középpontba, a maga sokféleségével és alkotó, értelmező képességével. A tanulás eszközévé a cselekvés vált, a természeti, technológiai és társadalmi környezettel való gazdag interakciók során formálódik a tanulók tudása. A konstruktivizmus a pragmatizmusból fejlődött ki.

A pragmatista pedagógia a megismerő folyamatra helyezi a hangsúlyt, nem sokat törődve a megismerő folyamatban részt vevő személyiség belső világképével. Ennél a felfedeztetős tanítási módszernél többnyire nem is tudta a gyerek, hogy mire kell figyelnie, milyen jelenségeket kell befogadnia a meglévő ismeretei közé. Előfordulhatott, hogy azonos körülmények között dolgozó tanulók más-más ismeretanyaghoz jutottak, más következtetést vontak le az egyes esetekben. Megtörténhetett az is, hogy a meggyőződéses belső képpel össze nem egyeztethető új ismereteket a gyerek szándéka ellenére is elferdítve, a belső képhez igazítva észlelte.

A konstruktív pedagógia a tanítási folyamat legfontosabb tényezőjévé a tanulót teszi, megtartja a tanulási környezet reformelemeit, de a tanulás elméletét és gyakorlatát új alapokra építi.

A konstruktivizmus tagadja, hogy minden tudásunk közvetlenül a tapasztalásból ered. A tapasztalat fontos ugyan, de nem egyetlen meghatározója a kialakult tudásnak. Az értelmező, strukturáló elem válik központi jelentőségűvé, azaz a tapasztalatokat értelmező, megismerő ember játszik alapvető szerepet. Elmélete szerint a már meglévő ismeretek, szemléletmódok, a kognitív modellek irányítják az új tudás felépítését, amelyet mindenkinek magának kell megkonstruálnia. A tudásépítés személyes aktivitást igényel, ezért a konstruktivista tanulási környezetben a reformpedagógiák eszköztára is megjelenhet, csoportmunkák, projektek, esettanulmányok, viták szervezhetők a tanórákon, vagy akár azokon kívüli tanulási helyzetekben. A tanári magyarázat szerepe csökken, illetve megváltozik. A tanulási folyamat tervezése során figyelembe kell venni a tanulók meglévő tudását, illetve ennek személyes eltéréseit. A tanulási folyamatot úgy

kell megszervezni, hogy a felépítendő tudásrendszer átfogó elemeitől, közös fogalmaitól haladjunk a speciálisak felé, a részletek finomításának irányába. Az ember nem begyűjti, nem magába olvasztja, nem akkumulálja az ismereteket, hanem létrehozza magában. (Nahalka, 1998)

A reformok célja az volt, hogy a tanulók önálló tevékenységeik, felfedezéseik révén jussanak el egy fogalomhoz, ismerethez, tudáshoz, képességeik kibontakozásához, azaz a passzív befogadás helyett az alkotásra, felfedezésre, cselekvésre helyezték a hangsúlyt. Ezek a pedagógiai törekvések ma is érvényesek az oktatásban.

## **5.2. MAGYAR REFORMPEDAGÓGUSOK, REFORMOK A MATEMATIKA MEGÚJÍTÁSÁÉRT**

Az alsó-, közép- és felsőfokú oktatás rendszerében először a XVIII. században *Apáczai Csere János* tervezte meg a matematika oktatását.

A református középiskolákban *Maróthi György* Arithmetika, avagy számvetésnek mestersége tankönyve (1743) alapján indult meg a matematika oktatása. (A négy alpműveleten kívül tanított néhány hasznos szabályt és a kereskedelmi számtan elemeit is. A szerző nem elégszik meg a szabályok felsorolásával, mint azt a korábbi tankönyvek szerzői tették, hanem magyarázza is azokat.) "A Példákban e kettőre vigyáztam: elsöben, hogy legelől mindenütt könnyebb Példák legyenek, a nehezebbek pedig hátrább. Másodsor, amennyire lehetett, különböző dolgokról vettem fel a Példákat, hogy így a Tanuló észre vehesse mi hasznai lehetségesek a Számvetés Nemeinek a közönséges életben." A könyvben Maróthi hangsúlyozza a szemléltetés, gyakorlás, ellenörzés fontosságát, utal a matematika gyakorlati életben történő alkalmazására is. Érdeme még a könyvnek a magyar matematikai szakszókincs továbbfejlesztése.

*Bolyai Farkas* (1775-1858) nevelési elveiben nagy figyelmet szentelt a manipulatív tevékenységeknek. Az ő pedagógiai elméleti fejtegetésének leghívebb magyar követője *Kármán Mór és Königh Gyula*, és végső soron a századforduló matematikaoktatási reformmunkálata, az un. „meráni program” (Felix Klein, nálunk főként Beke Manó) is ezeket vette alapnak.

Bolyai Farkas nevelési elveiből az alábbiakat tartjuk relevánsnak a dolgozatban megfogalmazottakkal:

„... mindég azokon kezdje amit láthat, foghat, nem generális definíciókon (nem grammaticán kezdődik az első szollás); és ne kínozzon idő előtt hiába, hosszú sorú okmutatással.”

„Tanúlhat scálát (kis mérték) is tsinálni. 's egy 3 szóget kitsibe le-tenni, 's többet is egymás után, (még a mezőről is).”

„Sok ollyasnak nevét a' Geometriában könnyen (minden romlás nélkül), megtanúlja a' gyermek (tsak nem Definitióval)”

„Még a' lapból is ki-lehet azután menni; 's a' lapoknak az egyenes linéával 's egymáshaz való állásokat jól-ki tsinálva, mütogatni; 's a papirosból geometriai testeket tsináltatni velek; késöbben a' szabad kézzel való rajzolásba is gyakorólni kell.” (Bolyai Biográfia, 2000)

A XX. század ötvenes éveiben, sőt már előbb is felismerték a matematikatanítás gyenge határfokát. A társadalom részéről fellépő növekedő igények, a matematika

fejlődése, a pszichológia új eredményei, a pedagógiai gondolkodás új elemei egy lassú reformfolyamatot indítottak el a matematika tanításában. *Gallai Tibornak és Péter Rózsának*, az 50-es években írt gimnáziumi tankönyve a heurisztikus gondolkodásra nevelés, a valóságos, hétköznapi problémákon keresztül való matematikatanulás terén úttörő jelentőségű volt. Könyvük a formalizmus ellen küzdött, sokféle motiváló feladatot tartalmazott.

A reformmozgalom egyik legkiemelkedőbb képviselője *Dienes Zoltán* professzor. Dienes Zoltán a matematikatanulás folyamatát a maga komplex voltában vizsgálta. Dienes elképzelései megalkotásában jelentősen támaszkodott a legfrissebb pszichológiai eredményekre. A *Játék az életem* című munkájában megkísérelte a lehetetlent, a gyerekek többsége számára megközelíthetetlenül idegennek tűnő matematika tanulását játékos örömteli, alkotó tevékenységgé változtatni.

*Varga Tamás* volt az egyetlen matematika-didaktika kutató, aki a teljes általános iskolai tantervet és a módszereket egységes egészként ragadta meg és alkotott egy valóban új iskolát. A matematika egészének egységes alapozása és a részek, fejezetek folytonos összefonása által első osztálytól valóban matematikát tanultak a gyerekek, s nem szűkül le a tananyag a számolás és alapvető mérések tanítására.

A Varga Tamás-módszernek nevezett matematikai nevelési koncepciónak további jellemzője a következő: A csak eszközjellegű ismeretek mechanikus, gondolkodás nélküli sulykolása helyett a korszerű matematikatanítás-tanulás a tanuló aktív részvételével végbemenő, egész gondolkodását formáló folyamat. Az ismeretek a tanulók életkori sajátosságainak messzemenő figyelembe vételével biztosított tapasztalatszerzés során bővülnek. A megfelelően irányított tanulói felfedezés folyamata biztosítja a tévedés szabadságát, teret ad a kreativitásnak és fejleszti a problémamegoldó gondolkodást.

### **5.3. A MAGYAR MATEMATIKATANÍTÁS FEJLŐDÉSÉNEK NÉHÁNY FONTOS ÁLLOMÁSA**

Az első állami törvényes rendelkezés, amely szabályozta a középiskolai oktatást, az 1777-es *Ratio Educationis* volt. A matematikában a gyakorlati alkalmazásra helyezték a hangsúlyt.

Az 1879-es *Trefort tanterv* a matematika tananyag módszeres tárgyalására törekedett. Ennek elve a szemléletesség-osztályozás-rendszerezés. *Königh Gyula* (1849-1913) műegyetemi tanár mindig fogékony volt az újdonságokra. *Königh Gyula* dolgozta ki a *Trefort-féle tanterv* matematikai részét. A bajok forrását a „porosz” oktatási módban látta.

"a tanítás rendszeresen könnyűszerrel megalkotott meghatározásokból szokott kiindulni, elmulasztva egyrészt az absztrakció gondos előkészítését, nem törődve azzal sem, hogy vajon érzí-e a tanítvány az általánosítás szükségességét. A helyes módszer arra fogja felhasználni az absztrakció könnyűségét a matematika területén, hogy a növendékeket mielőbb annyira önállóvá tegye, hogy minden egyes feladat sajátosságát átértve képes legyen a megoldáshoz szükséges tételeket a maga elmélkedésével mintegy újra felfedezni. Lassú haladás lesz a módszer kelléke."

A *Wlassics-féle tanterv* 1889-ben került bevezetésre, mely matematika részének kidolgozása *Beke Manó* nevéhez kapcsolódik. *Beke Manó* (1862-1946) komoly

matematikai munkássága mellett a matematika népszerűsítésén is fáradozott, és reformtörekvései voltak a matematika tanításának területén is. Az 1900-as évek elején ő lett a hazai matematikai reformbizottság elnöke, valamint a nemzetközi matematikaoktatási bizottság egyik magyar tagja. Nemcsak a "poroszos" oktatás tartalmával, hanem stílusával is szakított. Tanítványaival az órákon kívül - gyakran hosszú séták közben - is foglalkozott. Ez a fajta tehetséggondozás máig jellemző sajátosságává vált a magyar matematikának.

Rátz László és Mikola Sándor tagjai voltak a Beke Manó által vezetett reformbizottságnak. Fontosnak tartották a matematika tanulásánál a közvetlen tapasztalatszerzést, a sok mérést. Fejtegetésük szerint el kell érni azt, hogy a tanulók a mennyiségi viszonyok mérlegelése alapján a valóság megismerésére törekedjenek.

Az UNESCO 1962-ben nemzetközi matematikatanítási szimpoziumot tartott Budapesten, amelyen sok elismert matematikapedagógus vett részt. Ezt követően indult meg az OPI irányításával a komplex matematikatanítási kísérlet.

E kísérleti munkában kiforrott tantervnek lényeges jellemzője, hogy a matematikatanítás feladatának nem elsősorban az ismeretanyag elsajátíttatását tekinti, hanem a gyerekek fejlesztését fogalmazza meg minden olyan területen, ahol a matematikával való foglalkozásnak fejlesztő hatása lehet.

1963-ban Budapesten megkezdődött a komplex matematikatanítási kísérlet Varga Tamás irányításával. A két évtizedig tartó kísérleti folyamat, amely a magyar matematikatanításban gyökeres fordulatot eredményezett, és az azóta bekövetkezett változások ellenére a matematika tanításában ma is meghatározó.

A „komplex” jelző arra utal, hogy mind a tanítási anyag, mind a módszerek tekintetében új elgondolásokra épülő tanításról van szó. A változó igények kielégítéséhez szükséges a tanterv és a tanítási módszerek egymással párhuzamos, egybehangolt módosítása.

A komplex matematikatanítás anyaga öt tantervi témakörből áll, amelyek valamennyi osztályban – elsőtől nyolcadikig – megjelentek, az adott szintnek megfelelően. Ezek az alábbiak:

- Halmazok, logika
- Számtan, algebra
- Függvények, sorozatok
- Geometria, mérések
- Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A komplex módszer optimális fejlődési lehetőséget biztosít mindenki számára, hogy minden tanuló a neki való szellemi táplálékot kaphassa, azt, ami az ő matematikai fejlődését a legjobban előmozdítja. Onnan juttassuk tovább, ahol éppen van, legyen az akármilyen alacsony vagy magas szintje a matematikai gondolkodásnak, fogalmaknak, feladatmegoldó képességének.

Fejlesztésközpontú tanításra komolyan csak akkor gondolhatunk, ha nemcsak elfogadjuk a tanulók különbözőségét, hanem számot vetünk azzal is, milyen mértékig különbözőek. A fejlesztésközpontú oktatásnak számolnia kell azzal, hogy a tanulóknak csak kisebb része van abban a fejlettségi sávban, ahol életkora szerint lennie kellene, többségük ennél fejlettebb vagy fejletlenebb. Ez már az első osztályban is tapasztalható,

s ahogy a magasabb osztályok felé haladunk, egyre nagyobb lesz az eltérés a tanulók között.

Az 1978-as tanterv néhány fontos elve:

- a manuális tapasztalatszerzés fontos szerepet játszik a kisgyerek absztrakt gondolkodásának fejlődésében;
- a fogalmak kialakításához hosszú érlelési időre van szükség;
- a matematika szeretete, az érdeklődés minden más tényezőnél jobban ösztönöz a tanulásra;
- a tanítási folyamatban fontos a differenciálás, az egyéni különbségek figyelembevétele, a tévedés szabadsága, a játékok otthon és az órákon.

Varga Tamás, a tantervi és módszertani kísérlet megtervezője és vezetője ellenezte az új tanterv általános bevezetését. Azt javasolta, hogy azt abban a tempóban „terjesszék el”, ahogy az alsó tagozatos pedagógusoknak sikerül azt megérteniük, elsajátítaniuk, és saját pedagógiai hitvallásukkal összhangba hozni.

A kötelezővé tétel azonban azzal járt, hogy akiknek nem vált meggyőződésükké az új tanterv szelleme, idegen volt ez a szemlélet, azok (még akaratlanul is) ellene dolgoztak. Így maguk és környezetük számára azt igazolták, hogy a tanterv rossz, a tananyag túl nehéz, a gyerekek közti különbség nő, s a gyengébb képességű tanulók még jobban lemaradnak.

Bár ennek reformmozgalomnak a célkitűzései, Varga Tamás elképzelései a következő évtizedekben nem valósultak meg maradéktalanul, de maradandó hatást gyakoroltak a magyar matematikatanításra. Ma már szinte mindenki számára természetes, hogy az iskolába lépés kezdetétől lehet a gyerekeknek „igazi” matematikát tanítani. A gyerekek aktív részvétele, felfedező tevékenysége minden életkorban, minden témakörben az oktatás fontos tényezője.

A tapasztalatok alapján, a személyi és tárgyi feltételek figyelembe vételével 1986-ra elkészült a tanterv korrekciója. Átdolgozásra kerültek a tanulói és tanítói segédletek.

Az újabb pedagógiai és pszichológiai eredmények figyelembevételével, több pedagógus bevonásával, több éves munka és sok vita után 1997-ben megszületett a magyar Nemzeti Alaptanterv, röviden a NAT. A NAT matematikatantervében, szellemében könnyen fellelhető a komplex kísérlet és az 1978-as matematika-tanterv hatása. Fontos jellegzetessége a fejlesztésközpontúság és a spirális felépítés.

Az oktatás addigi központi irányítását, a pedagógus munka nagyobb szabadsága váltotta fel, csak a legalapvetőbb elveket szabva meg egységesen. Lényeges fordulatot jelentett viszont az, hogy a NAT a kimenet felől kívánta szabályozni az iskolai munkát.

A tananyag felépítésében felismerhető a fogalmak kialakításának a komplex matematikatanításban javasolt módja: kiindulás a közvetlen tapasztalattól, az életkornak megfelelő szintű matematika játékos, manipulatív tevékenységből, a hosszú érlelési idő biztosítása, a tanulók aktív részvétele az ismeretszerzésben, fogalomalkotásban.

A matematika alsó tagozatos tananyagában, felépülésében, a követelményeiben és módszertani ajánlásaiban a NAT egyenes folytatása a 87-es korrigált tantervnek.

A NAT, mint minden korábbi tanterv, sok vitát váltott ki. A bírálatok, ellenvetések hatására 1999-ben megindult a kerettantervek kidolgozása. Ezek jelentik a közbülső

lépést a NAT és a helyi tantervek között, tehát nagyobb segítséget, eligazítást nyújtanak a tanárok számára.

A NAT által adott szabadságnak köszönhetően sajnos

- a gyakorlatban több helyen tanítanak ismét szinte kizárólag számtant és elemi mértant;
- a tanítási mód is visszacsúszott, sok helyen újra elfogadottá vált a pusztán közlésre, begyakorlásra, számonkérésre építő tanítás;
- a tanítás – tanulás fő eszköze ismét sok helyen a tábla-kréta, füzet-ceruza és a tanítói közlés (magyarázat).

Az igazi áttörés az lenne a matematika tanításában, ha a tanítóknak valóban meggyőződésükké válna a tanítás módszereinek az adott korosztály szükségleteihez és képességeihez való igazítása. A kisgyerekeknek elegendő, saját tevékenységében szerzett tapasztalatot biztosítanának a tanítók, ezeket a tapasztalatokat közösen elemeznék annak érdekében, hogy a fogalomalkotási folyamat megkezdődjön.

A magyar reformtörekvésekhez jól kapcsolódik Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? című könyvének kilencedik beszélgetése.

*„Megváltozott-e a tanítás, a tanulás folyamata?”*

A változás lényege nem minden réginék az elutasítása, hanem újragondolás útján való elvetése vagy megerősítése. Attól, hogy már háromszáz évvel ezelőtt vetődött fel egy pedagógiai megoldás, attól az még követhető lehet. Arról nem is beszélve, hogy számos leírt elv a tanárképzés erősödése és a társadalom gazdagodása segítségével váltható csak valóra.

Sok, a szakirodalomban olvasható értékes gondolat pedig még mindig megvalósításra vár. Tehát ne is a különbözőségekre fektessük a hangsúlyt, hanem arra, hogy pedagógiánknak manapság milyen törekvései vannak!

*Mi az, ami a matematikatanításban megvalósításra vár?*

Az a gondolat, amely a múlt század vezető egyéniségeinek is hitvallása volt. Az arra való törekvés, hogy minden tanuló a neki való szellemi táplálékot kaphassa, azt, ami az ő matematikai fejlődését legjobban előmozdítja. Hogy onnan juttassuk tovább, ahol éppen van, legyen az akármilyen alacsony vagy akármilyen magas szintje a matematikai gondolkodásnak, fogalmaknak, feladatmegoldó képességnek.” (Szendrei, 2005, p.220.)

Az utóbbi gondolat egybecseng azzal, amit a komplex matematikatanítási kísérlet jelölt céljául, s ami máig is követendő útmutatásnak bizonyul. Ezt a munkát is úgy tekinthetjük, mint ami ezeknek az elveknek egyféle megoldása, és az azokban megfogalmazott gondolatoknak a továbbfejlesztése.

## **5.4. A DOLGOZAT TÉMÁJÁHOZ KAPCSOLÓDÓ PSZICHOLÓGIAI ELMÉLETEK**

### **5.4.1. A gyermeki gondolkodás jellemzői, fogalomalkotás kisiskolás korban**

Piaget több művében foglalkozott a gyermeki gondolkodás tanulmányozásával, a gondolkodás szintjeinek elemzésével. Az értelmi fejlődés sokféle vonatkozását egységes fogalmi rendszerbe foglalta össze. A fejlődés eleméletét öt szempont szerint

értékelhetjük: az elmélet *organikus, univerzális, szakaszos*, minőségi és értelmezi a fejlődés végállapotát.

*Organikus* az elmélet abban az értelemben, hogy a fejlődés lényegét biológiai kategóriákkal írja le. Az *asszimilációt*, a biológiából ismert fogalmat az egyéni fejlődés értelmezésére alkalmazta. A gyermek a külvilágból származó hatásokat, információkat beépíti meglévő ismeretrendszerébe. Ezzel megőrzi, és az eddigi ismereteihez is hasonlítja az új anyagot. Az értelmi *asszimiláció* feltétele, hogy létezzenek sémák, amelyek megőrzik és rendezik a benyomásokat. A meglévő sémákhoz való hasonítás ugyanakkor az információ torzulásához is vezethet. A torzító *asszimiláció* tipikus példája a játék is, amelyben a gyermek a külvilág bármely tárgyát meglévő sémáiba bevonva a „mintha” élmény segítségével elvárásai, vágyai szerint alakítja. (Az értelem pszichológiája.)

Az *akkomodáció*, alkalmazkodás, idomulás. Piaget a fejlődés egyik alapvető folyamatát írta le ezzel, amelynek során a tanuló idomul a helyzethez; a meglévő sémák a külső hatásokhoz igazodva alakulnak. Ez jelentheti a sémák átrendezését, illetve az új információ hozzáalakítását a meglévő sémákba nem illeszthető tapasztalatokhoz, a valóság olyan jelenségeinél, melyek feldolgozására nem áll rendelkezésre asszimilációs séma. Ha ez nem lehetséges, akkor egy új sémát kell létrehozni, hogy megértsük és megőrizzük az új információt.

Az *interiorizáció* a „külső” „belsővé” válása, Piaget koncepciójában az intellektuális fejlődés lényegi folyamata, amelynek során a külső cselekvésekből létrejönnek a szenzomotoros sémák, amelyek belső szemléleti képekké, majd képzetekké sűrűsödnek, azután konkrét műveletekké, végül formális logikai műveletekké válnak. A fejlődés révén a gyermek a műveleteket már nemcsak konkrét tárgyakkal, hanem gondolatban azok szimbólumaival is képes elvégezni. A művelet így nem más, mint interiorizált cselekvés. Az *interiorizáció* az *asszimiláció* és az *akkomodáció* kiegyensúlyozódása, amely az egyensúly felbomlása és újraszerveződése folytán megy végbe.

„az értelem az az egyensúlyi állapot, amely felé az összes, egymást követő érzékszervi-mozgásos és megismerő alkalmazkodás, valamint a szervezet és a környezet közti összes asszimilációs és hozzáidomulásos cserefolyamat irányul.” (Az értelem pszichológiája 24. oldal)

Piaget az értelmi fejlődést *univerzális* jellegűnek gondolja, azt egyetlen folyamatként fogja fel, nem bontja fel a különböző összetevők fejlődésére és a kialakuló műveleti struktúrákat az értelmi működés tartalmától függetlenül mindenütt érvényesülőnek gondolja. Nem számol a fejlődés egyéni különbségeivel vagy a különbségeket befolyásoló tényezőkkel, pl. azzal, hogy a különböző kultúrákban felnövekvő gyermekek eltérő fejlődési sajátosságokkal rendelkeznek. Az értelmi fejlődés szakaszos jellegű, azaz a fejlődés többé-kevésbé állandó állapotokból más állapotokba való átmenetek révén megy végbe. A fejlődés nem egyszerű mennyiségi növekedés, hanem minőségileg különböző stádiumok sorozatán megy keresztül.

Piaget az értelmi fejlődésben négy fő szakaszt különböztetett meg, amelyek közül kettő alapvető jelentőséggel bír a mérések tanításában.

- Az érzékszervi, mozgásos szakasz (0-1,5 éves korig). Ebben az életkorban elsősorban csak azok a tárgyak léteznek a gyerek számára, melyek közvetlenül elérhetők. Fokozatosan kezdi a tárgyakat a saját cselekvésétől függetlenül elképzelni.

- Műveletek előtti szakasz (1,5-7 éves korig). Ez további két szakaszra bontható: a fogalom előtti gondolkodás (1,5-4 éves korig), amelyet a szimbolikus és prekonceptuális fejlődés jellemez; ezt követi a szemléletes, intuitív gondolkodás (4-7 éves korig), amely az előző szakasszal a belső folytonosságot megtartva alakul ki. „A 4-től 7 éves korig figyelhetjük meg a reprezentatív kapcsolatok fokozatos koordinációját, vagyis a növekvő konceptualizációt, amely el fogja vezetni a gyereket a szimbolikus vagy előfogalmi fázistól a műveletek küszöbéig.” (Piaget, 1997, p. 180.) A szemléletes gondolkodásnak nagy szerepe van az objektumok invarianciájának alakulásában.
- Konkrét műveletek szakasza (7 – 11/12 éves korig) Ebben az időszakban lesznek a műveleti csoportosulatokból a belsővé válás során műveleti struktúrák. Eljutnak a tanulók az osztályok elkülönítésének logikai műveleteihez, és az aszimmetrikus összefüggések sorba rendezésének a műveleteihez. Felfedezik az átmenetiség fogalmát (tranzitivitás), amely a dedukció alapja. Ekkor alakul ki a tömeg és a súly invarianciája, a műveletek megfordíthatósága.
- A formális műveletek szakasza (11/12-), amikor a tárgyakat, tulajdonságokat, fogalmakat nevével jellemezzük. „A tanuló képes hipotetikus, deduktív gondolkodásra, azaz egyszerű elvonatkoztatásokra, amelynek semmilyen szükséges kapcsolata nincs a valósággal.” (Piaget, 1997, p. 206.)

Ezeknek a szakaszoknak a határai eltolódhatnak, nem lehet egyértelműen csak az életkorhoz kapcsolni, hiszen az egyes gyerekek fejlődése különböző, de a fejlődés szakaszossága mindenkinél megfigyelhető.

A pszichológiában a XX. század negyedik negyedében a kutatók figyelme elfordult az értelmi fejlődés általános stádiumaitól, és inkább az egyes tudásterületek, szakértelmek, kompetenciák elsajátításának jellemzőire, például a kontextus szerepére irányult. Piaget fejlődéseméletének az értelmi fejlődés kutatására gyakorolt hatása továbbra is megmaradt, és a gondolkodás fejlesztését szolgáló tananyagok kidolgozásában játszott szerepe.

#### **5.4.2. Bruner-féle reprezentáció elmélet**

Bruner elsősorban a gondolkodási folyamatokkal és a fogalomalkotással foglalkozott. (Ambrus, 1995, 37-40. oldal) Szerinte a matematikaoktatásban elsősorban olyan alapelvekre kell koncentrálni, amelyek feltárják a valóság és a matematika belső világának kapcsolatát, és lehetővé teszik azok magyarázatát. Ahhoz, hogy a tanuló egy anyagot megértsen az szükséges, hogy ezt megelőzően intuitív formában feldolgozza. Bruner elmélete szerint minden gondolkodási folyamat háromféle síkon mehet végbe:

- a) materiális sík (enaktív sík)  
Az ismeretszerzés konkrét tárgyi tevékenységek, manipulációk révén megy végbe.
- b) ikonikus sík  
Az ismeretszerzés szemléletes képek, illetve elképzelt szituációk segítségével történik.
- c) szimbolikus sík

Az ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével történik. Ezeket ő reprezentációs síkoknak nevezi.

E kutatásnak egyik alapelve az, hogy a hosszúság és kerület fogalmának alakulása során mindhárom reprezentációs szinten való gondolkodás bejárása elengedhetetlenül fontos.

### **5.4.3. Richard R. Skemp elméleti kifejtése a matematikai fogalmak alakulásáról**

A matematikai fogalmak alakulásának folyamatát Richard R. Skemp is vizsgálta, eredményeit többek között „A matematika pszichológiai problémái” című munkájából ismerjük. Munkájában hangsúlyozza a matematikai fogalmak és a tanulás irányának absztraktságát, ezzel a fogalomalkotás nehézségeire kívánja felhívni a figyelmet, mind a közlési folyamatban részt vevő küldő, mind pedig a befogadó számára.

A fogalomalkotás osztályba sorolással kezdődik. Minden alkalommal osztályba sorolunk, amikor felismerünk egy előzőleg már látott tárgyat. A hasonlóságok alapján tapasztalatainkat különböző csoportokba soroljuk. Az absztrakció tartós szellemi változás, az absztrahálás eredménye, ami képessé tesz bennünket arra, hogy felismerjük az új tapasztalatot, egy már előzőleg megformált osztályhoz való hasonlóság alapján. (Ez tulajdonképpen asszimiláció.) Érdemes különbséget tenni az absztrakció mint tevékenység, és az absztrakció mint végeredmény között, az utóbbit fogalomnak nevezzük. Egy fogalom megalkotásához számos olyan tapasztalatra van szükségünk, melyekben valami közös van. A mindennapi élet fogalmai a mindennapok tapasztalatából erednek, az ezekre vonatkozó példák térben és időben véletlenszerűen jelennek meg. (Skemp, 1975, p. 23-24.)

A fogalom és a fogalom jelölésére használt név közötti különbség az, hogy a fogalom tulajdonképpen egy eszme; a fogalom megjelölésére használt név viszont hangok egy csoportja vagy jel a papíron, amely kapcsolatban van az eszmével. Ez a kapcsolat létrejöhet a fogalom megalkotása után vagy a fogalom megalkotásának folyamatában. Ha ugyanazt a nevet halljuk vagy látjuk minden alkalommal, amikor a fogalom egy példája megjelenik, akkor mire a fogalom kialakul, az elnevezés olyan szorosan fog kapcsolódni hozzá, hogy nem csoda, ha a gyerekek összetévesztik az elnevezést a fogalommal. Pl. összekeverik a métert (amely matematikai fogalom) a méterrúddal (annak egy megjelenési formája). (Skemp, 1975, p. 26.)

A fogalmak két fajtája: az elsődleges fogalmak, amelyek a külvilággal való érzékleti és mozgásos tapasztalatokból erednek; másodlagos fogalmak, amelyek más fogalmakból keletkeznek absztrakció útján. (Skemp, 1975, p. 28-29.)

Mivel az összes hosszúságjellegű mértékegységet valamihez való viszonyítással kapjuk, másodlagos fogalmak.

A definíciók pontosítják a már kialakult fogalom határait, és megállapítják annak a többi fogalomhoz való kapcsolatát. A fogalmak csak akkor használhatók fel új, magasabb rendű fogalmak alkotásához szükséges példaként, ha leválaszthatók azoktól az eredeti érzékleti tapasztalatoktól, amelyekből származnak. (Skemp, 1975, p. 30-33.)

Tapasztalataink egybecsengenek a Skemp által megfogalmazottakkal a definiálással, a definíciók tanításával kapcsolatban.

1. Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.

2. Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal”.(38. oldal)

Ez a megállapítás a definiálásról rendkívül fontos a mértékegységek tanításánál, mert a gyerekek nehezen tanulják meg azokat és alkalmazásánál is problémái lesznek, ha nincs elegendő mérési tapasztalata, gyakorlata az ezekhez kapcsolódó munkafolyamatokban. Továbbá ha az egyes mértékegységek közötti összefüggéseket nem konkrét cselekvés során állapítja meg a gyerek, akkor sohasem lesz ügyes a mértékváltásokban sem.

Skemp a szellemi struktúrákra a szkéma kifejezést használja, amelynek tartalma a Piaget műveiben szereplő séma megfelelője lehet. Szinte minden, amit tanulunk, összefüggésben van valami mással, amit már tudunk. A szkémának két fő funkciója van: integrálja a meglevő tudást, és szellemi eszközként szolgál az új tudás elsajátításához. Azaz ha szkémák szerint tanulunk, akkor egyrészt hatásosabban tanulunk, másrészt olyan szellemi eszközt dolgozunk ki a magunk számára, amellyel megkönnyíthetjük az adott területen a későbbi tanulást. A szkéma nélküli tanulás során, ha az egyén halad előre, akkor a megtanulandó szabályok száma fokozatosan növekszik, ami a megértést igen megnehezíti. Egy állandó növekvő szkéma helyett, amellyel az egyén megszervezi múltbeli tapasztalatait és asszimilálja az új adatokat, a szkémának akkomodálnia kell az új helyzethez. (Skemp, 1975, p. 59-55.)

A kezdeti szakaszban a tanárnak kell figyelnie arra, hogy tanulói szkémák szerint tanuljanak, ne csupán szimbólumokkal való műveletek memorizálását végezzék. Tudnia kell azt is, melyek azok a pontok, amelyek csak egyszerű asszimilációt igényelnek, és hol van szükség akkomodációra. Segíteni kell a tanulóknak, hogy ők is megtalálják az alapvető rendszereket, mindig keressék ezeket és készen álljanak szkémáik folyamatos akkomodálására, azaz meg kell tanítani a tanulóinkat a matematika tanulására. (Skemp, 1975, p. 69-69.)

A természetes számok rendszerét ki kell terjeszteni úgy, hogy minden esetben elvégezhető legyen a folytonos tárgyak mérése. Ehhez be kell vezetnünk a törteket, azaz új struktúrát kell létrehozni, ha az egységnél kisebb méretekkkel is foglalkozni akarunk.

#### **5.4.4. A geometriai gondolkodás fejlődésének Van Hiele szintjei**

A Van Hiele által készített ötfokozatú elméleti modell, segít megérteni a geometriai fogalomalkotás sajátos folyamatát. (Piskalo 1963, p. 9-12.)

##### **I. Szint.**

Ezen a szinten az egyén a geometriai alakzatokat még mint egységes egészeket fogja fel. Még nem képes elkülöníteni az alakzatok részeit, nem látja meg a különböző alakzat vagy az egyazon alakzat elemei közötti összefüggéseket. Az alakzatokat az általuk nyújtott egészes kép alapján különbözteti meg. Könnyen felismeri például a téglalapot, a négyzetet, sőt más alakzatokat is, és viszonylag gyorsan megtanulja a nevüket, de az ilyen szinten lévő egyén számára a téglalap „egészen más valami”, mint a négyzet.

##### **II. Szint.**

Az egyén már kezdi az alakzatok alkotórészeit megkülönböztetni egymástól, köztük kapcsolatokat fedez fel, és ugyanígy összefüggést lát meg a különböző alakzatok között is, vagyis ezen a szinten megkezdődik a megismert alakzatok

elemzése. Ez a folyamat a megfigyelések, mérések, rajzolások és modellezések segítségével megy végbe. Az alakzatok alaptulajdonságait csak kísérleti alapon állapítja meg a tanuló, s ezeket csak körülírja, de nem határozza meg. Az alakzatok tulajdonságaik hordozói, ezek segítségével különbözteti meg azokat egymástól

### III. Szint.

Az egyén már összefüggéseket állapít meg az alakzatok és tulajdonságaik között. Ezen a szinten már képes az alakzatokat tulajdonságaik alapján rendezni. Már következtetni is tud az alakzatok egyik tulajdonságáról a másikra; érti a meghatározás (definíció) szerepét. Az alakzatok és tulajdonságaik közötti összefüggést már definíció segítségével állapítja meg. Még nem látja minden esetben a dedukció lehetőségeit: általában nem képes valamely alap-megállapításból elméleti úton eljutni egy másikba. Pl. A harmadik szinten a négyzet már téglalap, sőt paralelogramma is.

### IV. Szint.

Az egyén felfogja a határozott célú dedukció értelmét, sőt már arra is képes, hogy egyszerűbb tételeket konstruáljon, továbbfejlesszen. Gondolkodása ilyen mérvű fejlettsége teszi lehetővé számára, hogy felfogja az axiómák, meghatározások, tételek lényegét és jelentőségét, a bizonyítások gondolatmenetét. A dedukciót már nemcsak egyes alakzatok tulajdonságainak elemzésére, hanem bizonyítási módszerként is alkalmazza. Például a paralelogramma egyik definíciója alapján megvizsgálja, hogy melyek annak a főbb ismertetőjegyei, és más tulajdonságokat alapul véve képes a paralelogramma más módon való meghatározására is.

### V. Szint.

A modern (Hilbert-féle) gondolkodási szint. Itt megtörténik az objektumok egyedi sajátosságaitól, köztük levő kapcsolatok konkrét jellegétől való elszakadás. Az egyén képes pusztán elméleti síkon gondolkodni. A geometria általános jellegű lesz, és tágabb értelmet nyer. Elfogadja, hogy tetszőleges tárgyak, jelenségek vagy állapotok „pontoknak” tekinthetők, a „pontok” tetszőleges együtteseit „alakzatoknak”.

Az egyik fejlődési fokozatról a másikra való átlépés folyamata nem feltétlenül a biológiai fejlődést követi, nem megy végbe önmagától. Még a legkorszerűbb tanítási módszer sem teszi lehetővé, hogy átugorjunk a fokozatokat. Az egyik szintről a másikra való átlépéshez időre van szükség, ezt az időtartamot a különböző módszerek módosíthatják.

Minden szintnek megvan a maga sajátos fogalmi nyelve, jelölésrendszere, logikai felépítése, amelynek kialakulásához sok gyakorlásra van szükség. Az átmenet szükségképpen a nyelvi kifejezőképesség bővülésével jár.

## **5.4.5. Az észlelési konstanciák és műveleti megőrzések**

### **5.4.5.1. Piaget elmélete az észlelési konstanciák, műveleti megőrzések alakulásáról a hosszúságmérés során**

A mérés tanításának megkezdése előtt szükség van a tanítandó mennyiség észlelési konstanciája szintjének ismeretére. Piaget az Értelem pszichológiája és a

Gyermeklélektan c. könyveiben foglalkozik az észlelési konstanciák alakulásával. Piaget minden mérésre kiterjedően támpontokat adott a szintek vizsgálatához.

A továbbiakban csak a hosszúságok észlelésére tett megállapításait ismertetjük.

Mivel a mérések tanítása összehasonlítással kezdődik, amely alapul szolgál a becslési készség fejlesztésénél, először ennek a pszichológiai háttérét elemezzük, s ezt követik a megőrzések a transzformációk, műveletek során.

Két tárgyat összehasonlíthatunk az észlelés és az értelem szintjén.

„Az észlelés olyan ismeret, melyet a tárgyról vagy mozgásairól közvetlen és valóságos kapcsolat révén alkotunk, míg az értelem olyan megismerés, mely olyankor jön létre, amikor kitérők lépnek közbe, és a térbeli, valamint időbeli távolságok fokozódnak az alany és a tárgyak között.” (Piaget, 1997, p. 81.)

### *Észlelési megőrzések*

Ha az értelem szintjén hasonlítunk össze két tárgyat, akkor sem a hasonlító (mérőeszköz), sem a hasonlított (tárgy) nem torzul az összehasonlítás során. Az észlelési összehasonlításban viszont, amikor egy fix eleme szolgál alaplémértékül a változó elemek becslésében, rendszeres torzulások jöhetnek létre, ezt „etalontévesztésnek” nevezzük. (Az értelem pszichológiája p. 105-107.) Az az elem, amelyre a figyelmünket összpontosítjuk, rendszeresen felértékelődik, ez egyaránt érvényes a magassági vagy a mélységbeli összehasonlításoknál. Az etalon túlértékelése pusztán azért történik, mert az illető elemet hosszabb ideig nézzük, s ezáltal az megnő, mintha a tárgy, melyre a tekintet irányul, az észlelési tér tágulását hozná létre. Ezt bárki ellenőrizheti, ha váltogatva figyel két tárgyat, akkor minden alkalommal annak méretét növeli, amit néz. Minden objektív különbséget az észlelés szubjektíve felnagyít, gyakran eltúlozza a kontrasztot. A gyermeki gondolkodás egész fejlődése – különösen annak intuitív formái – közel állnak az észlelési formákhoz.

A differenciálási küszöbök nagysága arányos az összehasonlított elemekkel, pl. a 6-7 évesek meg tudnak különböztetni 1 méter és 2 méter hosszúságot egymástól, de a 11 és a 12 métert már nem. Ez a küszöb azonban sok gyakorlással csökkenthető. Ha az elemek nagyon különböznek, a kontrasztok élesebbek. (Piaget, 1997, p.108-118.)

Két különböző hosszúságú vonal összehasonlításánál a megfelelési pontok hasonlósági asszociációkhoz, a megfelelés nélküliek különbözőségi asszociációkhoz vezetnek. Ha nagy különbség van a két vonal között, akkor a különbözőségi asszociációk vannak fölényben, míg a minimális különbségek esetében a hasonlósági asszociációk kerekednek felül. Pl.: két utca hosszúságának összehasonlításánál ha nagy a különbség, akkor könnyen tudnak a tanulók dönteni, de ha közel azonosak, akkor lehetnek támpontok, pl. a házak, a fák száma, a középületek stb.

Két egymástól túlságosan távoli tárgy összehasonlításánál az észlelési tevékenység térbeli átvitelek formájában meghosszabbítódik. Ezeknek az átviteleknek a tanulmányozása kimutatta, hogy az életkorral határozottan csökken a torzulás, azaz kimutathatóan fejlődik a nagyságok távolról történő becslése.

Az értelemnek az irányító fellépése még világosabb az észlelési koordináták területén, tehát a függőleges és vízszintes tengelyekhez való viszonyításkor, az idomok vagy vonalak irányításának megítélésekor. Pl. ugyanolyan hosszúságú függőleges és ferde vonal összehasonlítása nehéz a felnőtt számára, elég nagy hibákkal jár, sokkal jobb viszont az 5 és 6 éveseknél, mert a kicsik nem törődnek a vonalak tájolásával. 5-6 éves kor és 12 éves kor között a hosszúságbecslés hibája 9-10 éves korig nő, itt eléri a

maximumot, aztán kismértékben csökken. 9-10 éves korban az értelem terén megszerveződik a műveleti koordináták rendszere, ekkor kezd észrevenni a gyerek az irányokat, ami zavarja őt a hosszúságok észleléssel való becslésében.

### ***Műveleti megőrzések***

Az észlelési és műveleti megőrzések mindegyike a tárgy valamilyen tulajdonságának megőrzésében áll:

- az észlelési konstancia a tárgy tényleges nagyságának megőrzésében;
- a műveleti konstancia a tárgy látszólagos nagyságának megőrzésében.

A látszólagos nagyságok észlelése nehéz az átlagos felnőtt számára. Ha pl. az 1 méteres rudat egy 10 cm hosszúságú szakasszal szemléltetünk, akkor a 4 méteresnek egy 40 cm hosszúság felel meg, amit az átlagos felnőtt 20 cm-esre taksál. Bár a 6-7 éves gyerek nagyon nehezen érti meg az ilyen feladatot az arányosság ismerete nélkül, de ha már megértette, sokkal jobb eredményeket ér el a felnőtteknél. Ezután a fogalom fejlődésével az észlelés romlik. Ez azt bizonyítja, hogy a fogalom nem eredhet csupán az észlelésből. Az észlelés a megfigyelő pillanatnyi nézőpontjának megfelelő képet nyújt, míg a fogalom feltételezi valamennyi nézőpont koordinálását, és az egyik nézőpontból a másikba vezető átalakítások megértését is.

A nagyságállandóságnál a távolság növekedésével a látszólagos nagyság csökken, és a tényleges nagyságot e két változó koordinálásának közelítő állandójaként értékeljük. (Piaget-Inhalder, 1999, p. 43-47.)

A hosszúságok megmaradását vizsgáljuk: egyenes szakasz összehasonlításával vele azonos hosszúságú egyenes vagy törött vonallal; töröttvonal összehasonlításával egy vele egybevágó töröttvonalal, amit az előzőből eltolással, tükrözéssel, forgatással keletkezett; vagy két egyforma egyenes rúd, amelyek közül az egyiket a másikhoz képest eltoljuk. (Piaget-Inhalder, 1999, p. 90.)

A térbeli mérték a számtól függetlenül alakul ki, de azzal szoros kapcsolatban, a mérték a folytonos részekre osztásával és a részek egymásba illesztésével kezdődik. Az egység kialakításához a részek egyikét folytatólagosan rá kell helyezni az egészre rendezett elmozdítással. A mérték így az elmozdulások és a részek összeadásának szintézise. (Piaget-Inhalder, 1999, p. 97.)

Piaget a mérés fogalmának alakulásában alapvetőnek tartja a sorbarendezés műveletének a kialakulását a gyermekben. A sorbarendezés művelete nem alakul ki a „nagyobb” művelet tranzitivitásának alkalmazni tudása nélkül. A mérés során is az egységnek a mérendő tárgyhöz való folytatólagos ráhelyezése is egy sorba rendezésnek felel meg.

A sorba rendezés művelete egy tetszőleges  $B$  elemet úgy tekint, hogy az egyidejűleg nagyobb, mint az előzőek, és kisebb, mint a későbbiek. Ez a megfordíthatóságnak a reciprocitásból fakadó formája. A struktúra zárttá válásával, azonnal következik belőle az  $A < C$ , ha  $A < B$  és  $B < C$  tranzitivitás. (Piaget-Inhalder, 1999, p. 93.)

#### **5.4.5.2. Műveleti megőrzések, konstanciák Freudenthal elméletében**

Freudenthal (1983) gyakorlati példákon keresztül világítja meg a méréshez szükséges fogalmakat. A hosszúságmegmaradás fogalmának alakulását több szempont szerint vizsgálja.

„Szinte semmi olyan információnk nincs a hosszúság fogalmának kialakításáról, amit a hagyományos kutatásokból levezethetnénk. Ebben a tárgykörben az olyan kifejezések, mint a megmaradás és megfordíthatóság rejtve vannak.” (Freudenthal, 1983, p.11.)

Az egyenes szakaszokat olyan matematikai absztrakcióknak tekintik, melyek a szilárd testekből származtathatók. A szilárd testek során minden mozgás megengedett, feltéve, hogy azt véges sokszor végezzük, s a kapott test a műveletek során egybevágó lesz önmagával. Ezáltal nyomon követhető a méretek megmaradása.

Felhívja a figyelmet arra, hogy a hasonlósági leképezések is fontos szerepet játszanak a vizuális megfigyelésben. Az észleléseink folyamán tudat alatt megfigyeljük és tudatosítjuk magunkban, hogy ami távolabb van, az kisebbnek látszik. (Freudenthal, 1983, 10-14. oldal)

Fontosnak tartja a fogalomalkotás során, hogy foglalkozzunk azzal, hogy a testek deformálódásakor hogyan változnak vagy nem változnak meg az egyes méretek. A test deformálódása történik pl. ha az ember leül. Két ember magasságát összehasonlítjuk álló helyzetben, és meg vagyunk győződve arról, hogy ez nem változik meg, ha leülnek.

Külön foglalkozást igényel annak megértése, hogy a mérés során bizonyos deformációk megengedettek. Két objektumot összehasonlíthatunk egymás mellé helyezéssel vagy egyiket a másikra téve, miközben bizonyos deformációk megengedettek. Erre jó példa a mérőeszközök használata, hiszen a mérőszalag, az összehajtott vagy összetekert zsebmérőléc, vagy akár a madzagdarab alkalmasak a deformációra. Freudenthal foglalkozik azzal, hogy a hajlítható tárgyak görbítése során bizonyos méretek nem változnak.

„a madzag két csodálatos módot is ad a hosszúságok összehasonlítására: kifeszített állapotban az egyenes hosszát mérjük, a görbe forma határvonalát pedig körbe illesztéssel határozzuk meg.” (Freudenthal, 1983, p. 15.)

A testek matematikai absztrakciói a geometriai alakzatok, amelyeket síkbeli és térbeli mozgásoknak, transzformációknak vethetünk alá. A hosszúságmérésnél elegendőnek tartja a tárgyak invarianciáját csupán egy dimenzióban bemutatni, nem szükséges egy tárgyat a többi dimenzióban is kimerevítsük. Ezt az idealizált tárgyat a matematikában görbének hívjuk – görbék azok, amelyeket megrajzolhatunk egy mozgó pont segítségével, vagy amelyek egy síkbeli alakzat határáként tűnnek fel.

„Az ívhossznak, amely egyenes szakaszokkal helyettesíthető a mérés során, invariánsnak kell lenni a hajlításra.” (Freudenthal p. 16.)

Freudenthal szerint a hosszúság invarianciájának megértését a szétdarabolás – összerakás transzformáció során is külön kell vizsgálni. A szétdarabolás – összerakás transzformáció egy tárgy hosszában történő szétdarabolását és újraépítését jelenti. A tárgy lehet egy bot, amelyet széttörünk, vagy egy madzag, amit elvágunk, vagy egy vonatszerelvény, amit két vagy több részvonalra osztunk. Az első két példában a hosszúságok összerakása nem lesz tökéletes, még ha nagyon óvatosan végezzük is azt. A második esetben valami veszteségünk biztosan lesz, ha a madzagdarabokat összekötjük. A harmadik esetben az összetevés tökéletes lehet, bár ez nem szükségszerű, mivel a részeket összetehetjük egy másik sorrendben, és ez láthatóvá is válhat, ha a legjellemzőbb blokkok különböző hosszúságúak, színűek, vagy más tulajdonságban különböznek egymástól. (Freudenthal, 1983, p.18-19.)

„Egy lényeges és nem triviális állítás, hogy a szétdarabolás – összerakás transzformáció során a hosszúság invariáns.” (Freudenthal, 1983, p. 18.)

A hosszúság invarianciájának megértését a szétदारabolás – összerakás transzformáció alkalmazása során két komponensre bontja:

- egy hosszú tárgyat szétदारabolással és egyesítéssel transzformálunk hosszú tárgyakba és ekkor vizsgáljuk a hosszúság invarianciáját;
- a hosszú tárgy összerakásánál a hosszúság alakulása szempontjából nincs szerepe az alkotó részek sorrendjének.

Ez a két komponens adja Freudenthal szerint a hosszúságmérés alapját.

A hosszúságinvariancia elfogadásának következménye, hogy a hosszúság mint tárgyak és számok közötti függvény jelenik meg. Ez azonban nem fedi le a hosszúságok minden esetét. Hiszen az A és B közötti távolságot is hosszúságnak tekintjük. A „milyen távol van A B-től?” kérdésben két pont tűnik fel változóként, a „milyen hosszú ez a tárgy?” kérdésben pedig a tárgy az egyetlen változó. Ebben az értelemben a hosszúság az egész tárgy függvénye, míg a távolság két pont, az „itt” és „ott” függvénye. A felnőttek már hozzáadódtek azokhoz a folyamatokhoz, amelyek mindkét fogalmat összekapcsolják, de vajon ez a kapcsolat olyan nyilvánvaló-e a gyerek számára is? Átvezetésként, ha a „milyen távol?” kérdést akarjuk transzformálni a „milyen hosszú?” kérdésbe, akkor egy hosszú tárgyat kell helyezni A és B között. Az A és B közötti útszakaszt konkrét hosszú tárgyként tekinthetjük. Ha csak egy útvonal van az A és B között, akkor ezek távolsága megegyezik az útvonal hosszával; ha több is van, akkor meg kell állapodni, hogy melyiket is értjük alatta. (Freudenthal, 1983, p. 20-21.)

Ezek a problémák merülnek fel akkor is, mikor megkérdezzük a gyereket, hogy „Milyen távol laksz az iskolától?”, ennek a kétváltozós két pont közötti függvény az egyváltozós megfelelője „Milyen hosszú utat teszel meg az iskoláig?”. A „Melyik út hosszabb: otthonról az iskoláig, vagy az iskolából hazáig?” kérdés a megfordíthatóság tulajdonságát veti fel. Erre egyértelmű válasz akkor adható, ha a két hely között csak egy útvonal lehetséges, vagy konkrét rajz alapján kell meghatározni azt.

## **5.5. NYELVI PROBLÉMÁK A MATEMATIKA, A HOSSZÚSÁGMÉRÉS TANÍTÁSÁNÁL**

„Nyelvi nehézségekkel küszködik minden tudomány és szakma, amely pontosan akarja kifejezni fogalmait és eredményeit. A matematika kijelentéseknek teljesen pontosaknak kell lenniük. Ha nem pontosak, akkor nincs is értelmük. Ez a magyarázata annak, hogy a matematikában a nyelvi sorompó tűnik rögtön a legfélelmesebbnek. A köznyelvi szavak jelentése általában eléggé határozatlan, így a beszélgetőknek könnyen lehet az a benyomásuk, hogy megértik egymást, még ha nem is pontosan ugyanazt gondolják. A matematika ki akarja küszöbölni ezt a kétértelműséget. Ki is küszöböli – de cserébe elveszti az érintkezés könnyedségét. Minél gazdagabb és szabatosabb egy információ, annál nehezkesebb az átültetése.” (Revuz, 1973, 24-25. oldal)

A tudományos nyelv és a hétköznapi nyelv közötti kapcsolatnak, ezek elemzésének nagy jelentősége van a matematika tanításában.

„Szakszavak tanítása során sokkal nehezebb dolgunk van, mint az anyanyelv egyes fogalmai esetén. Különösen akkor, ha azok a köznyelvben már jelentenek valamit” (Szendrei, 2005, p.398.)

Ez a nehézséget tovább fokozza, hogy óriási különbségek lehetnek az egyes gyerekeknél a nyelvhasználat szintjében iskolába lépéskor. Nagy előnnyel kezdik azok

tanulók a „tudományos” munkát, akik nyelvileg fejlettebb környezetből indulnak az iskolába, ők szavakkal is ki tudják fejezni magukat.

A tudományos fogalmak alakulásának folyamatával elsők között Vigotszkij foglalkozott. Kutatási eredményeit a Gondolkodás és beszéd című munkájában fejt ki. Fontos megállapításokat tett a hétköznapi és a tudományos fogalmak kialakulására, fejlődésének irányára és tempójára.

Vizsgálatokat végzett, melynek eredményeivel támasztotta alá, hogy a tudományos fogalmak hamarabb alakulnak ki, rendeződnek, szerveződnek egységgé, mint a hétköznapi fogalmak. „... a tudományos fogalmak fejlődése megelőzi a spontán fogalmak fejlődését.” (Vigotszkij, 2000, p. 206.). A tudományos fogalmak fejlődésének útja során „... elsődleges a verbális meghatározás, amely szervezett rendszer körülményei között leszál a konkrétig, míg a köznapi fogalmak fejlődési tendenciája meghatározott rendszeren kívül megy végbe – alulról felfelé az általánosítások felé” (Vigotszkij, p. 207). A köznapi és tudományos fogalmak fejlődése ellentétes irányba halad, de szoros, bensőséges kapcsolatban vannak egymással. A köznapi fogalom fejlődésének el kell érni egy bizonyos szintre, hogy képes legyen a tudományos fogalmak befogadására, de a köznapi fogalmak fejlődése is függ a tudományos fogalmak alakulásától, ugyanis ezek a fogalmak felfelé a tudományos fogalmakon keresztül terjeszkednek. A tudományos fogalmak átalakítják, és magasabb szintre emelik a hétköznapi fogalmakat.

A gyerekek nem tantárgyakban, hanem problémákban gondolkodnak, az iskolarendszer kényszeríti rájuk a tantárgyakban való gondolkodást. Előfordul, hogy ugyanannak a szónak más jelentése van az egyes tantárgyakban, ami hátráltathatja a gyerek nyelvi fejlődését.

„A gyermek absztrakt gondolkodása minden tanórán fejlődik, és fejlődése egyáltalán nem hullik szét egyes ágazatokra az iskolai oktatás egyes tárgyainak megfelelően.” (Vigotszkij, 2000, p. 271.)

Freudenthal is kitér a hosszúságmérés és a matematikai fogalmak kapcsán a nyelvi problémák elemzésére.

Számos matematikai fogalmat nevezünk meg melléknévvel. A hosszúsághoz kapcsolódó melléknévek: „hosszú, rövid”, „bő, szűk”, „vastag, vékony”, „magas, alacsony”, „mély, sekély”, „távol, közel”, „széles, keskeny” „magas termetű, robusztus, pici, jelentéktelen”. Ahhoz, hogy ezeket a tulajdonságokat meg tudjuk különböztetni, először ki kell tudnunk fejezni azokat nyelvi szinten. A felnőttek számára egyértelmű, hogy ezek a kifejezések kapcsolódhatnak ugyanahhoz a hosszúsághoz is, és gyakran feltételezzük, hogy a gyerek is rendelkezik ezeknek a relációknak az ismeretével. (Freudenthal, 1983, 1. oldal)

„A hosszúságra vonatkozó melléknévek komplexitását nem lehet minden fiatal gyerek esetében működésbe hozni a tudatosság tényével még idősebb gyerekeknél is lehet probléma. Az elsajátításhoz és tudatossá váláshoz, matematikai tevékenységek végzésére van szükség.”  
(Freudenthal, 1983, p.11.)

## 6. A KÍSÉRLET TANTERVI, TANTÁRGYI HÁTTERE

### 6.1. A NAT MATEMATIKAI MŰVELTSÉGTERÜLET KÖVETELMÉNYEINEK ÉRVÉNYESÜLÉSE A FEJLESZTÉSBEN

A NAT 2007 (<http://www.okm.gov.hu/main>.) a gondolkodási módszerek fejlesztését egész tanévre kiterjedő feladattá tette. Nagy hangsúlyt fektet a tanulók differenciált fejlesztésére és a szövegértő képességük javítására. Fontosnak tartja a matematika és a valóság kapcsolatának felfedeztetését, s a matematika alkalmazhatóságát a gyakorlatban és más tudományokban.

A NAT által kiemelt fejlesztési feladatainak kapcsolódása a hosszúság és kerület fogalmának kialakításához, s ezek tanításánál alkalmazott tevékenységek végzéséhez.

- A tanulóknak jól kell tájékozódniuk a térben és a *világ mennyiségi viszonyaiban*, a becslési, mérési feladatok végzésénél, a töröttvonalak négyzetrácsos lapra történő rajzolásánál.
- Fontos a *tapasztalatszerzés*, azok tudatosítása, rögzítése, visszaolvasása a mérési munkák és a becslések végzésénél, az adatokat táblázatba rögzítésénél.
- A tanulók *képzeletére* támaszkodunk, a szabványos mértékegységek a jelöléseik alapján történő sorba rendezésénél és az alakzatok téglalappá való átalakításánál, „átdarabolásánál”.
- A mérési eredményekről, mérés végzésének módszeréről szóló beszámolókkal, a gyerekek *emlékezetére* támaszkodva felidézük a foglalkozások történéseit.
- A tanulók a tapasztalataik alapján következtetéseket fogalmaztak meg, melynek során saját *gondolkodásukat* is felülvizsgálták.
- Az *ismereteik rendezésére* célszerű táblázatokat használni. Fontos azt is beláttatni a gyerekekkel, hogy a hosszúság szabványos mértékegységei egy részhalmazát képezik a hosszúság-mértékegységeknek.
- Sok alkalmi és szabványos mérőeszközt célszerű használni a hosszúság tanítása során, erre alkalmas mindenféle madzag, szalag, szívószál, cérna, színes rudak, mérőszalag, vonalzó.
- A mértékegységek, összefüggések folyamatos ismétlésével, felidézésével sikeresebben lehet az új fogalmakat a régiekhez kapcsolni. Nagy hangsúlyt kell fektetni az *ismeretek alkalmazására* is, amihez ötleteikkel a tanulók is hozzájárultak.
- A becslült és a mért adatok *összevetésével*, a gyerekek végiggondolhatták tévedéseik okait, s közösen keresték a *probléma megoldását*.
- Az *alkotó képességük és kreativitásuk* érvényesült a szívószálakból való háromszögek és négyszögek készítésénél.
- Hangsúlyt kapott a témakörben a köznapi nyelv és a szaknyelv kapcsolatának folyamatos alakítása, pl. a térbeliséget kifejező szavak jelentését vizsgáltuk a matematikában, a hétköznapi életben és más tudományterületeken.
- A tanítás során a közös munkára helyeztük a hangsúlyt, a gyerekek a hosszúságok mérési gyakorlatainak többségében párban vagy kisebb-nagyobb csoportokban dolgoztak. A hosszúságmérések végzése során fontos az *együtműködés*, minden tanuló kapjon feladatot, hogy mindenki fontosnak érezhesse magát.
- A hosszúság és kerületmérésről való beszélgetés során a tanulók felfedezték, hogy a matematikai ismeretek mennyire fontosak más tudományokban és a

mindennapokban. Ez a felismerés újabb kérdésekre, problémák keresésére *motiválta* őket.

- A tanításnál arra is figyeltünk, hogy mindenki be tudjon kapcsolódni a munkába. Ezáltal *saját értékeit* is reálisabban tudta megélni.

## **6.2. A KERETTANTERVEK IRÁNYELVEI A HOSSZÚSÉGMÉRÉS-NÉL ÉS A KERÜLETFOGALOM ALAKÍTÁSÁNÁL**

Mivel a NAT nem adja meg a tananyagot azt a kerettantervek és a helyi tantervek tartalmazzák. A NAT által megadott fejlesztési feladatok megvalósítására. A kerettantervek<sup>1</sup> a tananyagot különböző (4-5) fejezetekre osztották.

A célok, feladatok megjelölésében elég egységesek a fenti kerettantervek, mivel a NAT cél- és feladatrendszerére támaszkodnak. Az OKI-s tanterv egyenes leszármazottja az 1978-as tantervnek. Az OM kerettanterve elég sok szabadságot, de ugyanakkor segítséget is ad a tanítóknak a helyi tanterv és a tanmenet kidolgozásához. Nem szabja meg, hogy az egyes témakörök tananyagának elsajátítására szánt időt, nem bontja le az egyes témakörökhöz kapcsolódó célokat és feladatokat, de segít a tananyag és a tevékenységi formák tervezésében. A Mozaik tanterve megadja a témakörökre szánható órákat. Részletezi a célokat és feladatokat, valamint a követelményeket is minden egyes témakörnél, ebből a szempontból megegyezik az OKI-s tantervvel, viszont nem ad segítséget a tevékenységi formák tervezéséhez és az általánosítások végzéséhez.

Mindegyik tanterv egyezik abban, hogy a mérésekkel nem csak a geometria témakörben foglalkozik. (számтан algebra, összefüggések, függvények, sorozatok, statisztika). A mérések jó segítséget nyújtanak a matematika és a hétköznapi élet kapcsolatának bemutatásához, mely szintén mindhárom tantervben nyomon követhető. A számfogalom kialakításánál, a szám, mint mérés eredménye nélkülözhetetlen elem mind a kisebb, mind a nagyobb számok szemléletes bemutatásához. A becslés és mért adatok táblázatba rögzítése összekapcsolja a méréseket a statisztikával, hiszen a táblázatkezelést ott tanítjuk meg, amelyre szintén minden tanterv utal.

Mindhárom kerettanterv kicsit másképpen kívánja megvalósítani a NAT által megfogalmazott célokat, fejlesztési feladatokat. Mivel pontosan ez volt a NAT célja, hogy szabad kezét adjon az egyéni kezdeményezéseknek a matematika tanításában, tanulásában, ezért a fenti tanterveket nincs szándékunkban minősíteni. Az OM elég nagyvonalúan fogalmazza meg a tananyagot, több szabadságot adva ezzel a helyi tanterveknek és tanmeneteknek. A Mozaik kerettanterve a síkidomok vizsgálatát, azok kerületének meghatározását szinte csak a téglalapra és a négyzetre szűkíti le. Az Országos Közoktatási Intézet tanterve nagyon részletesen megadja a tevékenységi és munkaformákat. Sokkal lassúbb tempót ír elő az első két osztályban, a harmadik és negyedik osztályban viszont több összefüggésre és kapcsolatra világít rá, mint az előző kettő. Az első két évben főleg a tapasztalatszerzés dominál, ezekre építve a későbbiekben már több fogalom ismeretét, alkalmazni tudását építi.

A fentiek közül ez az egyetlen olyan tanterv, amely külön hangsúlyozza a hosszúságjellegű szavak ismeretét, alkalmazni tudását az oktatásban és a mindennapi életben, ami a dolgozat egyik vizsgálati szempontja. A becslés fontosságára és folyamatosságára is ez a tanterv tesz egyértelmű utalásokat, amely a másik fontos pillére a dolgozatnak.

---

<sup>1</sup> 1. melléklet. Mellékletek 1-3. oldal.

## 6.3.A TÉMA CROSS-CULLICULARIS KAPCSOLATAINAK LEHETŐSÉGEI

### 6.3.1. Magyar nyelv és irodalom

*Alapelvek, célok* megjelölésében az alábbiak kapcsolhatók a hosszúság és kerület fogalmának kialakításához.

A nyelv az emberi kommunikáció, a gondolkodás, a tanulás közege, előfeltétele és legfőbb eszköze. Az anyanyelv sokoldalú, árnyalt és reflexív ismerete gazdagodik a hosszúsághoz kapcsolódó kifejezések használatával.

A folyamatosan fejlődő szövegértési és szövegalkotási képességek lehetővé teszik, hogy az egyén önállóan és másokkal együttműködve képes legyen a verbális és nem verbális kommunikáció eszközeinek és kódjainak, a különböző információhordozók üzeneteinek a megértésére és feldolgozására

Az irodalmi művekről, ezen belül a mesékről folytatott aktív párbeszéd segíti az egyént a kulturális és történelmi érzék fejlesztésében, így régi magyar hosszúságmértékek ismeretében is.

Az magyar nyelv *néhány fejlesztési feladata*, melyek kapcsolódnak a mérések tanulásához, tanításához:

- *Szóbeli szövegek megértése, értelmezése és alkotása* során fejlesztjük a különféle mondatok felismerését, megértését a közlés céljának megfelelő helyes használatát. Használhatjuk mindennapi élmények és olvasmányok tartalmának felidézése, elmondása során utalhatunk az abban előforduló hosszúságméréssel kapcsolatos fogalmakra – irányított felfedeztetéssel.  
A tanulócsoporthoz folyó beszélgetésben és vitában saját vélemény megfogalmazása során az adott hosszúságfogalomhoz kapcsolódó kifejezések használatára is koncentrálnunk.
- *Az olvasás, az írott szöveg értését, az értő olvasást, a megértés szóbeli és írásbeli alkalmazását* fejlesztjük az elemi feladatmegoldástól a beszélgetésen át az önálló problémakifejtésig. Az egyszerű szövegek szó szerinti jelentésének megértése nagyon fontos a matematikai fogalom pontos meghatározásához.  
Az aktív szókinccset gazdagíthatjuk a különböző olvasott szövegekben előforduló térbeliséget kifejező szavak értelmezésével, használatával.  
Egy-két mondatos vélemény megfogalmazása, kifejtése az olvasott szövegekben szereplő helyzetekről, azok térbeli viszonyairól, mértékéről szintén elősegíti a szövegértés fejlődését.
- *Az írásbeli szövegalkotás* fontos fejlesztési terület a matematika tanításában is. Saját álláspont kialakítása, a feladatok, problémák megoldásának pontos, változatos, önálló kifejtése folyamatosan fejlesztendő feladat. Pl. Mondatok kiegészítése a megfelelő hosszúságjellegű melléknevekkel, feladatok szövegének átfogalmazása, kreatív írás, stb.
- *Anyanyelvi kultúra* fejleszthető azáltal is, hogy a diák saját szavaival fogalmazza meg bizonyos hosszúságjellegű szavak, kifejezések jelentését. A hosszúság viszonzyszavainak megfelelő használatával az aktív és passzív szókinccset folyamatosan bővítjük. Az anyanyelvi kompetenciát erősítjük. A meghatározásokat

(definíciókat) folyamatosan pontosítjuk a nyelv és a nyelvtani ismeretek bővülésével.

### 6.3.2. Ember és természet

A műveltségterületen megfogalmazott *alapelvek, célok* egy része szorosan kapcsolódik a hosszúságméréshez.

A NAT célként fogalmazza meg többek között az életben nélkülözhetetlen, és elsősorban a természettudományokban begyakorolható megismerési, tanulási értelmezési technikák és módszerek azonosítását, fejlesztését (pl. megfigyelés, kísérletezés, mérés, következtetés, összehasonlítás); a tudomány természetére, történetére vonatkozó ismeretek alakítását (Mértékegységek, mérőeszközök fejlődéstörténete).

Az alábbi *fejlesztési feladatok* kapcsolódnak a hosszúságmérés tanításához:

- Természettudományos ismeretekkel tárgyalható technikai, társadalmi kérdések megfogalmazásánál, a családi környezetből hozott, s az életkornak megfelelő ismeretrendszerből indulunk ki. Az előtt, mögött, felett, alatt, között, mellett, messze, közel, távol szavakkal kifejezhető ismeretek kapcsolódnak a térlátáshoz és a hosszúság méréséhez, becsléséhez.
- Természettudományos megismerés, a természeti és technikai tárgyakkal (mérőeszközökkel), jelenségekkel összefüggő elképzelések megfogalmazásával (idő- és térbeli elhelyezkedés), az ezekkel kapcsolatos megbeszélésekben való részvétel során fejlődik.  
A mindennapi életben fontos szerepet játszó mennyiségek és azok mérésének fokozatos megismerése, gyakorlat szerzése különböző tárgyak, élőlények, jelenségek mennyiségi jellemzőinek elemi szintű összehasonlításában, a változások felismerése, leírása, okainak megkeresése is a természettudományos megismerést segíti. (Tárgyak méretei; domborzati formák magassági, vizek mélységi adatainak értelmezése; élőlények nagysága, testrészeinek méretei: hosszú fül, rövid láb, stb.; a növekedés, mint mennyiségi változás nyomon követése, ehhez kapcsolódó becslés, mérés.)
- Az élő és élettelen természetről való tájékozódás során fejlődik a térérzet tudatosítása, a térben való tájékozódás, az irányok, távolságok, hosszak, nagyságrendek meghatározása. (Térképtani ismeretek; alaprajz, kicsinyítés, nagyítás, mértékszám – arányszám – vonalas mérték. Távolságmérés térképen, az iskola környezetének alaprajzi ábrázolása.)
- Az emberi vonatkozások megismerésével, a saját test méreteinek meghatározásával – hosszúság: testmagasság, lábméret, vállméret, stb.; körméretek: nyakméret, derékbőség, stb. – fejlődik az önismeret.

### 6.3.3. Művészeti nevelés

#### 6.3.3.1. Ének-zene

A zeneirodalom alkotásainak megismerésén keresztül más műveltségi területekkel is kapcsolat teremődik. A hosszúságjellegű szavak, kifejezések a zenében is jelen vannak. Pl. *magas hang, hangtávolság, hangmagasság* stb.

Az alábbi *fejlesztési feladatok* kapcsolhatók a hosszúságméréshez a hosszúságjellegű kifejezések alkalmazásához:

- A tanult gyermek- és játékdalok mozgással kísért csoportos előadása. Népszokások megismertetés mozgással, táncsal. A mozgásnál és a táncnál szerepet játszanak a térformák, a térbeli tájékozódás.
- A magas és a mély hangok kapcsolódnak az emberi hang és a hangszerek hangjának színeihez.
- A dalok ritmikai sajátosságainak megjelenítése mozgással, táncsal, kreatív játékokkal. A metrikus lüktetés keretén belül hosszabb, rövidebb időarányok érzékeltetése. Hangnevek meghatározása a vonalrendszerben. Magas hang, mély hang az egyik vagy másikkal közelebb vagy távolabb helyezkedik el, fontos ezek távolságának meghatározása.

#### **6.3.3.2. Vizuális kultúra**

A vizuális kultúra műveltségterületen megfogalmazott *fejlesztési feladatok* kapcsolat a hosszúság és kerületméréssel, becsléssel.

- Tájékozódás a lakóhelyen és annak környékén. A tájékozódás a térben, a közeli és távoli térformák méreteinek és elhelyezkedésének összefüggése. Műalkotások, természeti látványok megfigyelés, leírása. Ebben sokszor az alkotások méretének is szerepe van.
- Különböző tárgyak külső jegyeinek összehasonlítása. Az egyik külső jegy lehet a tárgy kiterjedése és az ehhez kapcsolódó hosszúságjellegű melléknevek használata. Tárgyak csoportosítása méretek alapján. Képek, látványok, események leírása, leírás alapján kép készítése. Itt már a méretek változásairól és az arányok állandóságáról is döntenek a gyerekek.
- Egyszerű közlő ábrák értelmezése, készítése. Ezek a vetületábrák három képsíkossal, hogy az egyén tudja síkra redukálni, vetületté változtatni a térformát. Átélt, elképzelt vagy hallott esemény vizuális megjelenítése. Az élmények rekonstruálása szöveg alapján, a valós arányoknak megfelelően.

#### **6.3.4. Testnevelés és sport**

A testnevelés és sport – ismereteivel és funkciójával – sajátosan összetett műveltségi terület. A mozgás az élet velejárója, nélküle nem képzelhető el semmilyen kognitív funkció működtetése.

Összefonódik mindazon műveltségterületekkel, amelyek az emberi tevékenységekkel, azok hatásaival foglalkoznak.

A testnevelés és sport a bevezető időszakban, a saját testérzékelés megalapozása során kiemelten fejleszti a megfigyelés, a gondolkodás, tanulás képességének fizikai-élettani alapjait.

*Fejlesztési feladatai*, melyek kapcsolódnak a hosszúságméréshez és a hosszúság fogalmához.

- A legalapvetőbb alaki képzés/tornasor, fordulatok helyben, tér- és távköz felvételének egyszerű módjai.

- Oldalasság, saját test érzékelése, testhatárok érzékelése. Az oldalasságnál jelentkezik a bal és jobb irányok megkülönböztetése, valamint az is, hogy az egyén bal- illetve jobbkezes. Úgy jobbkezes, mint a balkezes egyén, a játékban más-más helyen támad, más a térlátása, máshogy kell vele szemben játszani.
- Rövid távú gyors futások. Futások irányváltoztatással. Hosszú távú futások saját tempóban. A futásfajták, ugrásfajták megnevezésénél alkalmazzuk a térbeliséget kifejező szavakat.
- Eszközhasználatú sportági technikák tanulása (pl. ugrálókötél, labda, karika, szalag, kislabda) a gyermek méreteihez és erejéhez igazodó szersúly kiválasztásával.

### 6.3.5. Életvitel, gyakorlati ismeretek

Az *Életvitel és gyakorlati ismeretek* műveltségterület alapvetően a világ tapasztalati megismerésére és gyakorlati tudás szerzésére nyújt lehetőséget. A becslés, mérés is gyakorlati tudás, ami fontos szerepet játszik a tárgyak minta utáni alkotásánál.

Konkrét problémahelyzetekből indulunk ki, életszerű megoldásokkal, eljárásokkal dolgozunk, ezáltal kapcsolatot teremtünk az iskolai tanulás és az iskolán kívüli világ között. A mérés során is nagy szerepe van a hétköznapi és tudományos fogalmak, kifejezések kapcsolatának.

*Fejlesztési feladatainak kapcsolata a hosszúságfogalmának alakulásához:*

- *Az alkotás folyamata, a gyakorlati problémamegoldó folyamat részeit* képezik a kézzel megcsinálható egyszerű tárgyak minta után vagy fejből való készítése (gondolati modell). A terv funkcionális és formai megfelelésének megállapítását is folyamatosan fejleszteni kell. A formai megfelelésnél a méreteknél is szerepe van. A terv megvalósítása térben történik.
- A rendelkezésnek, a formának, valamint a készítési eljárásnak megfelelő egyszerű megoldás kiválasztása és elkészítése mintakövetéssel és eleinte gondolati terv alapján történik. A mintakövetésnek nagy jelentősége van az alkotásban.  
A konstruáláshoz szükséges terv megértését (szövegértés, rajzolvásás, mintakövetés) és a saját gondolat kifejezésének képességét is állandóan szem előtt kell tartani.
- *Munkavégzési és tanulási szokások* kialakítása és fejlesztése jól követhető a formák megfigyelésénél, vizsgálatánál, tapasztalati megismerésénél. Fontos az építőmunka fázisainak játékos, tapasztalati megismerése, a művelési és téri rend betartása a munka során. Figyelni kell a távolságokra, alkalmazni kell a térbeliséget kifejező szavakat, kifejezéseket.

## **7. A KUTATÁS HÁTTERÉNEK BEMUTATÁSA**

### **7.1. AZ ISKOLA BEMUTATÁSA**

A kísérletet egy lakótelepi iskolában, a debreceni Bocskai István Általános Iskolában végeztük. Ez az iskola, a kiváló sporttagozata miatt, a város egyik legjobbjának számít. A városban itt épült először iskolai uszoda. Az 1980-as években az iskola nagy szerepet vállalt a közéletben is. A Tanítóképző Főiskola második gyakorlóiskolája volt. Kiváló, kreatív, az új módszerek iránt fogékony tanítókkal, tanárokkal. Ez az időszak mély nyomot hagyott a tanítóknak, tanároknak. Változatlanul tovább él a tanítás és a gyerekek szeretete, de az utóbbi időben kissé lecsökkent az új iránti igény, mint ezt több helyen is tapasztalhattuk a vizsgálatok során. Sajnos az utóbbi években még kéthónapos tanítási gyakorlatokra sem vállalnak negyedéves tanítóképzős hallgatókat az iskolában, pedig a jól képzett tanári testület sokat segíthetne a hallgatók felkészítésében. Ennek egyik oka lehet, hogy azokra a tanítási órákra, melynek állandó szem- és fültanúja van, a tanítónak is többet kell készülnie. Sokszor a gondolkodásukkal, módszereikkel nem azonos irányba kell haladniuk, hogy megfeleljenek a gyakorlatvezetőtől elvártaknak. Ezek a sok munkán túl állandó feszültséget is jelentenek számukra.

Az iskolának nincsenek beiskolázási gondjai, jól működő sporttagozata, patinás múltja még mindig sok szülőt motivál arra, hogy ide járassa a gyermekét. Az alsó tagozatos oktatás a hagyományos, többnyire verbális közlésen alapuló módszerei ellenére is jó szintűnek mondható. A verbális közlés dominanciájának egyik oka, hogy oktatási segédanyagok terén az iskola felszereltsége nincs a legjobbak között. A matematika, a geometria oktatásánál nincsenek meg a feltételek a különféle tevékenységek végzéséhez, amelyek a gyerekek képességeinek jobb kibontakoztatásához vezethetnének. Nagyon kevés munka- és szemléltető eszközzel tanítanak matematikát.

A kísérleti oktatás megkezdésekor az iskolában három első osztály indult. A kiválasztott osztály tanítójának módszerei és oktatási stílusa állt legközelebb a kísérletezőhöz. Azért döntöttünk az adott osztály mellett, mert ez a tanárváltás okozott a gyerekeknek a legkevesebb problémát. A gyakorlatban a tanítók és a vezetés is támogatta a kísérlet végzését, végig nyomon követték a munkát.

### **7.2. AZ OSZTÁLY BEMUTATÁSA**

Az osztályba a kutatás kezdetekor 24 tanuló járt. Közben volt egy kis mozgás, mert 6 tanuló iskolát változtatott a három év során, és új tanulók is jöttek az osztályba. A legtöbb változás elsőből második osztályba lépéskor volt. Mivel két gyerek még második osztályban bekapcsolódott a kísérleti folyamatba, az ő teljesítményeik szinte alig mutatnak eltérést a többiekétől. A második osztályban ide kerülő gyerekek könnyedén elsajátították társaiktól azokat az ismereteket, amelyeket első osztályban tanultunk, mivel másodikban, sőt harmadikban is sokat mértünk arasszal, rőffel és öllel, ezek meghatározásait és méretüknek a szabványmértékegységekhez való viszonyait is többször átismételtük.

Az osztály az első ciklusban nagyon fegyelmezett volt, mivel ezeket a foglalkozásokat a délelőtti időszakban tartottuk, de a későbbiekben a délutáni foglalkozásokon kissé lazult a fegyelem. Ennek volt pozitív és negatív hatása is. Bár egy élénkebb osztályban többet kell „fegyelmezni”, de sokkal kreatívabbak, mint azok a gyerekek, akik meg sem mernek szólalni, nehogy valami rosszat mondjanak, kivívva

ezzel a tanító rosszallását. A kötetlenebb tanítási formának köszönhetően a szerző sok olyan információhoz jutott a gyerekekről, előző ismereteikről, tapasztalataikról, gondolkodásukról, ami az osztálytanító számára is fontos volt, ő is tudta azokat hasznosítani a tanítása során.

A második ciklustól kezdve a foglalkozások a gyerekek szabadidejének (többnyire játékidőjük) terhére történtek, ezért nem mindig kezdtek lelkesedéssel a munkához. Az érdekes feladatok végzése során azonban egyre aktívabbak lettek.

Az osztályba járó gyerekek jól kiegészítették egymást. Egyik dolgról az egyiknek, másiktól a másiknak volt előzetes ismerete, amit a foglalkozásokon hasznosíthattak, s megtaníthatták, bemutathatták azt a többieknek. A szóbeli és írásbeli kifejezőképességük sokat fejlődött a négy év során. Negyedikben már nem kellett biztatni őket véleményük, gondolataik kifejezésére vagy azok írásbeli kifejtésére.

## 8. A KUTATÁS TARTALMA

### 8.1. A KUTATÁS ELŐZMÉNYEI

A kísérlet megkezdése előtt, annak indoklása végett, két mérőlap<sup>2</sup> kitöltésének elemzésével vizsgáltuk a gyerekek ismereteit, képességeit a hosszúságmérés témakörében. Az egyik a mesékben szereplő régi magyar hosszúság-mértékegységek ismeretére vonatkozott, a másik a szabvány hosszúság-mértékegységek tudásszintjét és a tanulók becslési képességének szintjét mérte.

A mérőlapokat két iskola, – a Kölcsey Ferenc Református Tanítóképző Főiskola Gyakorló Általános Iskolájának és a debreceni Bocskai István Általános Iskolának egy – egy negyedik osztályába járó tanulói töltötték ki 2004. márciusában.

#### 8.1.1. Régi magyar hosszúság-mértékegységek ismerete

A régi magyar hosszúság mértékegységeket mesekörnyezetben kellett a gyerekeknek felismerni. A kérdéseket, problémákat a gyerekek nagy része érdekesnek tartotta, nagy lelkesedéssel oldották meg azokat. Többek között ez a lelkesedés indított bennünket arra, hogy ezekkel a meseelemekkel motiválni lehetne a gyerekeket, és ezáltal érdekesebbé, hatékonyabbá tehetnénk a hosszúság és kerületmérés tanítását.

*Milyen mérést jelentenek a meséből kiemelt szavak, próbáld meg azokat a mai mértékegységekkel kifejezni!*

*A szegény legény hétmérföldes csizmát húzott, s 5 fertály óra múlva elérte azt a várat, ahol a királykisasszonyt fogva tartják.*

*Mérföld:.....*

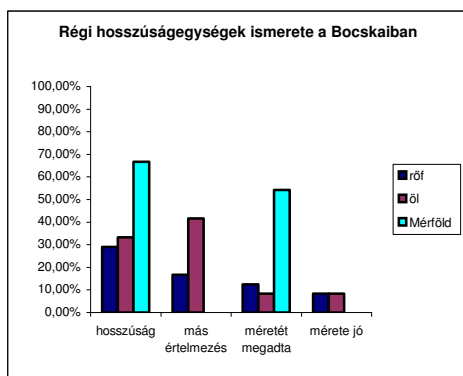
*Fertályóra: .....*

*Ludas Matyi 6 rőf kötéllel kötözte egy jó öles fához Döbrögit.*

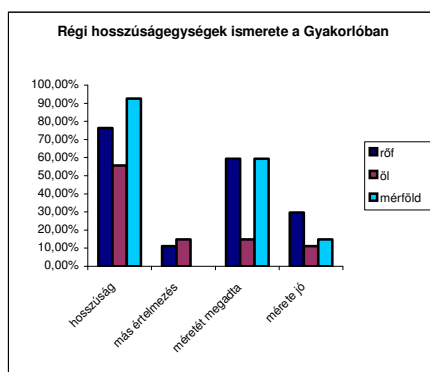
*Rőf:.....*

*Öl:.....*

A két iskola tanulóinál a mesében előforduló hosszúság-mértékegységek ismeretének szintjét a következő grafikonok szemléltetik.



8.1.1. ábra



8.1.2. ábra

<sup>2</sup> A mérőlapok feladatait a 2. és 3. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 4-5. oldal)

A mérőlap megoldása két érdekességgel szolgált. Egyrészt megtudtuk, hogy az öl mértékegységet sem ismerik jobban a gyerekek, mint a rőföt, pedig az öl szóval és mértékegységgel a négyyszögöl alkotó elemeként még ma is elég gyakran találkozhatunk a hétköznapi életben. Másrészt látszólag a mérföld ismerete jónak mondható, mivel a hosszúság-mértékegységek közé sorolták azt a gyerekek, de a magyar mérföld méretét nagyon kevesen ismerik. A legtöbben az 1 mérföldet 1600 méterben adták meg, ami az angol mérföld hosszának felel meg.

A Bocskai Általános Iskola tanulóinak teljesítményét bemutató grafikon és a későbbi beszélgetések is azt bizonyították, hogy az itt tanuló gyerekek általában kevesebb népmesét olvasnak, ismernek.

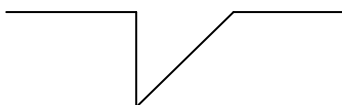
### 8.1.2. A hosszúság szabványmértékegységeinek ismerete

A mérőlap öt feladatot tartalmazott:

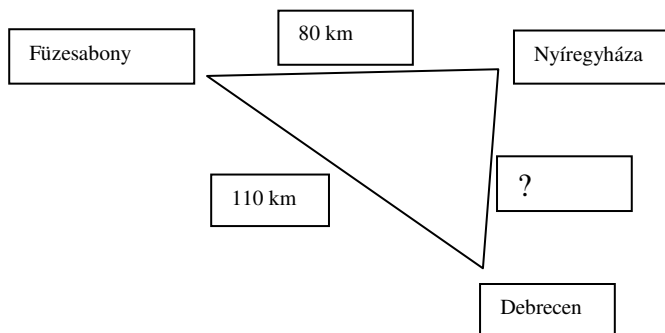
- különböző szabványmértékegységek közül a hosszúság-mértékegységek kiválasztása; *Kilogramm, hektoliter, kilométer, milliliter, centiméter, dekagramm, milliméter, liter, deciméter, tonna.*
- adott mértékváltások között a helyesek megtalálása;  
*Húzd alá a jó megoldásokat!  $36\text{ dm} = 360\text{ mm}$ ,  $1\text{ km } 56\text{ m} = 1056\text{ m}$ ,  $560\text{ mm} = 56\text{ cm}$ ,  $5\text{ m } 4\text{ cm} = 54\text{ cm}$ ,  $1\text{ m } 5\text{ dm } 3\text{ mm} = 1503\text{ mm}$ ,  $2014\text{ cm} = 2\text{ m } 1\text{ dm } 4\text{ cm}$ .*
- különböző mértékegységekkel megadott hosszúságok összehasonlítása;  
*Melyik nagyobb? Tedd ki a relációs jeleket!*

<i>134 dm</i>	<i>10 m</i>
<i>1 m 2 dm 5 mm</i>	<i>1205 mm</i>
<i>975 cm</i>	<i>100 dm</i>
<i>1 km 56 m</i>	<i>1560 dm</i>
<i>56 mm</i>	<i>1 m</i>

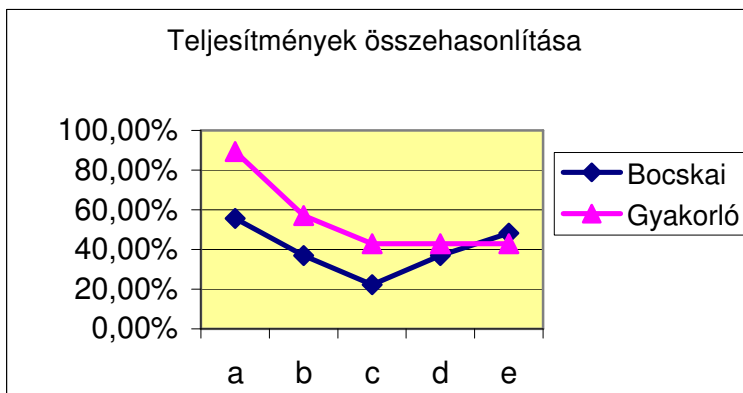
- törött vonal hosszának centiméterben történi becslése;



- adott volt három város – a valóságnak megfelelő elrendezésben –, a városokat jelölő pontok összekötő szakaszai egy háromszöget alkottak. Kettő-kettő távolságának ismeretéből kellett következtetni a tanulóknak a harmadik párra.



A megoldások értékelését a következő grafikon szemlélteti:



8.1.3. ábra

A két osztály hosszúság-mértékegységbeli tudása közötti különbség az utolsó két feladatnál szinte alig mutatható ki. Ezek a kérdések már nem kifejezetten az iskolában tanult lexikai ismeretekre épültek, hanem a gyerekek mindennapi tapasztalataira, a méréseknek a valósághoz, a mindennapokhoz való kapcsolódására.

A fenti eredmények alapján úgy döntöttünk, hogy a kísérletet a Bocskai István Általános Iskolában végezzük, mert ezeknek a gyerekeknek az ismeretei közelebb vannak az átlagos szinthez, és így a kísérlet során tapasztaltak megbízhatóbbak lesznek.

## 8.2. A KÍSÉRLETI MUNKA TERVEZÉSE

A kísérleti tanításban központi szerepet kapott a tevékenység, mivel alapvetőnek tartottuk azt a megállapítást, hogy csak az az ismeret hatékony és maradandó, amit magunk tapasztalunk, magunk fedezünk fel.

A munka tervezésénél figyeltünk a matematikai fogalmak megértésének szintjeire. Lehetőleg csak akkor léptünk tovább, ha minden gyerek elért az adott szintre.

A megértés szintjeit az alábbi fázisokra bontottuk:

- a tanuló megértheti a tananyagot egy adott óra kontextusában, ha az újonnan tanultakat hozzá tudja kapcsolni az órán felmerülő más fogalmakhoz. Például a deciméter fogalmát hozzá tudja kapcsolni a méterhez;
- az adott témakörön belül át tudja tekinteni az összefüggéseket. Például a hosszúság mértékegységeinek kapcsolata;
- tágabb megértésnek minősül az, ha a tanuló átfogja a tantárgy egészét. Például mérések kapcsolata a geometriával, hosszúságmérés és kerületszámítás vagy az űrmérés és térfogatszámítás közötti összefüggés;
- a kapcsolatok tovább építhetők a tantárgyak között. Mérések alkalmazása a környezetismeret és technika órákon;
- kapcsolat felfedezése az iskolában és az iskolán kívül szerzett tudás között. Az iskolai tanítás nem feltétlenül és nem közvetlenül segíti a hétköznapi problémák megoldását.

Az iskolai matematika tanítás egy nagy hibája, hogy a gyerek a megszerzett ismereteket csak begyakorlott helyzetben tudja alkalmazni, tudását nem megfelelően tudja transzferálni az új problémahelyzetekre. (Pólya: Problémamegoldó gondolkodás)

A tanítás eredményesebbé tételéhez változatos munkaformákat és tevékenységeket alkalmaztunk.

A munka tervezésénél arra is gondot fordítottunk, hogy minél többféle problémával, problémahelyezettel találkozzanak a gyerekek, hogy a fogalom mindig előhívható legyen.

Az ismeretek forrásaiként az alábbiakat vettük figyelembe:

- Cselekvés, konkrét tárgyi tevékenység;
- Észlelés, spontán és irányított megfigyelés, bemutatás;
- Szóbeli ismeretszerzés;
  - Közlő módszerek (elbeszélés, magyarázat),
  - Megbeszélés (beszélgetés),
  - Szövegek tanulmányozása (írásbeli feladatmegoldások).

Ezeket az ismeretforrásokat az adott témakörben való oktatás során a fogalomtól függően más-más arányokban alkalmaztuk. (Kelemen 1984)

A kísérleti tanítás során az első két ciklusban felmerült a mese mint olyan környezet, amelyet sikeresen lehet alkalmazni a hosszúság fogalmának kialakításához és a hosszúság-mértékegységek bevezetéséhez egyaránt.

Kiemelt feladatnak tekintettük a hosszúságmérés kapcsolatának bemutatását és alkalmazását a matematika más területein, más tudományágakban és a hétköznapi életben.

A kísérletet a korábbi óralátogatások, a releváns pedagógiai és pszichológiai irodalmak tanulmányozása és a mérőlap eredményeinek alapján hat ciklusra terveztük. A tervezésnél a NAT fejlesztési feladatait útmutatóként használtuk. Az OKI kerettantervének egyes elemeit beépítettük a munkába. Eredetileg tanítási órákban gondolkodtunk, mivel azonban a hosszúságmérés tanítása elég rapszodikusnak jelent meg az iskola helyi tantervében, a második ciklustól kezdve a foglalkozásokat a délutáni napköziben tartottuk. A délutáni napközis tevékenységek 30-45 percesek voltak. Az időtartam a tanulók elfoglaltságától függött, a szerint változott. A kísérletet 2004. májusában kezdtük, és 2007. márciusában fejeztük be.

A hat ciklusra tervezett kísérleti anyag összefoglaló leírását az alábbi táblázatban foglaltuk össze.

A hosszúság és kerületfogalom	Cél	Tartalom	Eszköz
1. ciklus 12 tanítási óra	Gazdag tapasztalatra épülő hosszúságfogalom kialakítása, a becslési készség fejlesztése a tárgyak összehasonlításával és mérésével. Jó gyakorlottság a nagy mozgással megvalósítható alkalmi egységekkel	A mesékben szereplő régi magyar hosszúság-egységek bevezetése: öl, rőf, arasz, láb. Szabványmértékegységek (méter, deciméter, centiméter) bevezetése Hosszúságok összehasonlítása, mérése, összemérése, becslése a tanulók közvetlen környezetében.	Mesefeldolgozás, csoportos mérési gyakorlatok, táblázatok, mérőeszközként szalagok, színes rudak. Feladatlapok.

	való mérésben.		
2. ciklus 14 délutáni foglalkozás	A hosszúságfogalom tapasztalati gazdagítása, nagyobb tárgyak méretének meghatározásával a mérési technika és a becslési készség fejlesztése. A téglalap és a négyzet fogalmának előkészítése. Jó gyakorlottság a táblázatkezelésben.	A mesékben előforduló régi magyar hosszúság-egységek bevezetése: hüvelyk, és a képzelet fejlettebb szintjét igénylő mérföld. Nagyobb hosszúságok becslése, mérése a tanteremben, iskolaudvaron és az iskolán kívül. Téglalapok, négyzetek alkotása a tanteremben, illetve az iskolaudvaron.	Mesefeldolgozás. Feladatlapok. Táblázatok, mérőeszközök, alkalmi és szabvány. (szalagok, színes rudak, mérőszalag, méterrúd, vonalzó)
3. ciklus 12 délutáni foglalkozás	A hosszúságfogalom tapasztalati gazdagítása kisebb-nagyobb dolgok hosszúságának mérésével. Finomabb motoros mozgást koordinációt igénylő mérések végzése. A becslési készség fejlesztése. A téglalap és a négyzet fogalmához szükséges tartalmi jegyek felfedeztetése. A sokszögek kerületfogalmának előkészítése, az oldalak hosszúságának összeadásával.	Töröttvonalak rajzolása szabadon és szóbeli utasítások alapján, azok hosszúságának meghatározása. Háromszögek, négyzetek és téglalapok alkotása, oldalaik hosszának és azok összegének meghatározása.	Négyzethálós lapok a töröttvonalak rajzolásához. Szívószálak a háromszögek, téglalapok, négyzetek alkotásához. Feladatlapok az ellenőrzéshez.
4. ciklus 14 délutáni foglalkozás	A hosszúságfogalom tapasztalati gazdagítása, kisebb-nagyobb tárgyak méretének becslésével, mérésével. A téglalap és négyzet tartalmi jegyeinek tudatosítása, azok fogalmaik alakítása. A matematikatanulás nyelvi vonatkozása a térbeliséget kifejező szavak pontos	Becslések, mérések végzése. Töröttvonalak rajzolása írásban adott utasítások szerint. A téglalap kerületének meghatározása többféle módon. Téglalapok alkotása különböző sokszögek átdarabolásával. Hosszúságot kifejező különböző térbeli szavak használata (hosszú,	Feladatlapok az ismereti szint méréséhez és az órai munka végzéséhez. Táblázatok a kerületfogalom előkészítéséhez. Szívószálak a sokszögek alkotásához. Sokszögek az átdaraboláshoz.

	használat.	rövid...), kapcsolata más tudományokkal és a mindennapi élettel.	
5. ciklus 12 délutáni foglalkozás	A becslési készség fejlesztése. Törekvés a mérések pontosságának fejlesztésére. A különböző mértékegységek kapcsolatának ismerete. A térbeliséget kifejező szavak pontos értéke és alkalmazni tudása különböző szituációkban. A téglalap és négyzet fogalmi kapcsolatának felfedeztetése. A téglalap és négyzet területének megfogalmazása és meghatározása.	Becslések, mérések végzése. További térbeliséget kifejező szavak használat, alkalmazása a szűkebb és tágabb környezetünkben a tárgyak méreteinek kifejezésére. Téglalapok és négyzetek alkotása, a két alakzat kapcsolata. A négyzet és téglalap területének többféle meghatározása.	Feladatlapok az ismereti szint méréséhez és a munka végzéséhez. Táblázatok a mérések végzéséhez, az adatok lejegyzéséhez. Sokszögek az átdaraboláshoz.
6. ciklus 6 délutáni foglalkozás	A kép és a valóság közötti kapcsolat felfedezése. A becslési készség kiterjesztése. A szóbeli és írásbeli kifejezőkészség fejlesztése.	Méretarányok a térképeken, fényképeken, ezek összehasonlítása, valóság tartalmának megállapítása. Becslési készség fejlesztése térkép, kép alapján.	Feladatlapok. Fényképek. Térképek a közvetlen és tágabb környezetünkből – határainkon belül és túl.

### 8.3. A KÍSÉRLET ELSŐ CIKLUSÁNAK BEMUTATÁSA

A fejlesztő kísérlet első ciklusát 1. osztály második félévében, 2004 májusában végeztük.

A ciklusban az alábbi tevékenységek végzését terveztük:

- a régi magyar hosszúság mértékegységek bevezetése: rőf, öl, arasz;
- a hosszúság szabványmértékegységek bevezetése: méter, deciméter, centiméter;
- mérési gyakorlatok végzése alkalmi és szabványmértékegységekkel.

#### 8.3.1. Régi magyar mértékegységek bevezetése a mesék segítségével

Az első mese a három, öt és a hétfejű sárkány legyőzéséről szól. A sárkányoknak a fejük számának megfelelő mérőszámú rőfnyi hosszú láng szakadt ki a torkukból. A mese részleteinek megbeszélése után a súlypontot a rőf, mint hosszúság-mértékegység értelmezésére helyeztük. Megállapítottuk, hogy egy rőf az a hosszúság, amely kinyújtott

kar hossza válltól a mutatóujjig. A mese értelmében a háromfejű sárkány három, a hétfejű hét rőf hosszú lángot lövellt ki a szájából. Az ötfejű sárkány legyőzésének esetét a mesélő az olvasóra bízta. A gyerekek ki is egészítették ezen a ponton a mesét, használták az analógiát a meseszövegnél, s a visszamondásnál már beleszózták azt is, hogy az ötfejű sárkánynak ötrőfnyi volt a lángja. Megbeszéltük, hogy mi alapján választották őseink ezt a mértékegységet. Bemutattuk, hogy mekkora az egy rőf. Az osztályban rőföst választottunk úgy, hogy mindenki összemérte a padtársával a karja hosszát, s akié hosszabb volt, az továbbra is versenyben, azaz állva maradt. Ezt az összeméretegetést addig folytattuk, amíg már csak az a tanuló maradt állva, akinek a leghosszabb a karja. A legkisebb karhosszúságú gyereket is ugyanígy választottuk ki. Kimértük piros és kék farkasfogból mindkét gyerek rőfjével a hétfejű sárkány szájából kicsapó hétrőfnyi hosszú lángot, ezután összehasonlítottuk a szalagból kimért lángok hosszúságát. Megállapítottuk, hogy nem azonosak. A gyerekek ügyesen indokolták is ezt. Amikor a két gyerek rőfösként szalagot árult, felrúgták az elméletet, szinte mindenki P.E.-től akart vásárolni, akinek karhosszúsága a legrövidebb az osztályban. A választásnál nem a rőf hossza, hanem a népszerűség döntött. Még akkor sem lehetett a tanulókat teljesen meggyőzni, hogy a nagyobb karhosszú rőföstől vásároljanak, amikor bebizonyítottuk, hogyha ugyanannyiért adják rőfjét, akkor járunk jobban, ha a hosszabb karú gyerektől vásárolunk.

A gyerekek elismerték, látszólag megértették ezt, de a választásnál mégis hezitáltak. A válaszaikból idézünk néhányat:

- A kisebbeknek a kicsi, a nagyoknak a nagy kell.
- Azért vennék V.N.-től, mert több pénzért adja. (A több pénzt adok érte, vagy több pénzt kapok valamiért, ez a kettő számára ugyanazt jelenti.)
- Szerintem mindkettőtől, mert ha úgy van kedvünk, hogy kisebbet veszünk, akkor P.E.-től, ha nagyobbat akarunk venni, akkor V.N.-től.

Az *öl* fogalmát az Erős Jánosról szóló mese segítségével vezettük be. Mivel az *öl* szó a mai nyelvben is értelmezett, sőt több jelentéssel bír, értelmezni kellett a jelentését a hosszúság értelmében. „Mekkora lehet egy *öl*?” kérdésre L.M. nagyon jó megfogalmazást adott: „Akkora, mint egy ölelés.”

Megbeszéltük, hogy egy *öl* az a hosszúság, ami mellső középtartásban lévő karnál a két mutatóujj távolsága között van. Kiválasztottuk azt a gyereket, akinek az osztály véleménye szerint legnagyobb az *öle*. Ezt először becsléssel próbáltuk meghatározni. Három gyerekre tippeltek, s közülük összemérésekkel, összehasonlítóval választottuk ki azt, akinek a leghosszabb az *öle*. A leghosszabb gyerek *ölével* kimértük piros szalagból a kilenc *ölet*, s ennek segítségével próbáltuk eldönteni, hogy befér-e a tanterembe a kilenc *öles* szarufa. A gyerekek becslése szerint befért, sőt ők először a tanterem szélességébe akarták elhelyezni azt. Mikor a mérésnél 4 *öllel* elértünk az ajtótól az ablakig, azt javasolták, hogy tegyük akkor a terem hosszúságába, oda biztosan befér. Ez is rövidebb volt, mint kilenc *öl*, ezért bekanyarodtunk a terem végénél. Megállapítottuk, hogy a kilenc *öles* szarufa nem fér el a teremben, csak feldarabolva, de ekkor már nem szarufa. Megbeszéltük azt is, hogy minden embernek az *öle* körülbelül akkora, mint a magassága. Ezt a gyerekek kis kétkedéssel fogadták, nem volt számukra elég meggyőző a lemért *ölük* és magasságuk hosszának egybeesése. P.E. *ölével* megmértük a tanári asztal hosszúságát. Mivel láttuk, hogy P.E. *öle* pontosan megegyezik azzal, az előbbi állítás bizonyítása végett ráfektettük a tanári asztalra. A gyerekek így meggyőződhetnek ezek egyenlőségéről, s ezt boldog nevetéssel konstatálták. Még negyedik év végén is, ha rákérdeztünk, hogy mennyi az asztal hosszúsága, többen rávágták, hogy egy P.E.. Minden gyereknek lemértük az *ölét* egy madzaggal, amit aztán

magával vihetett. A szünetben ezzel méricskéltek az udvaron, összehasonlították egymás ölének hosszát, megmérték vele a ping-pong asztalt, az udvari padokat, stb.

Az *araszt* (kisarasz, amely a kifeszített tenyérnél a hüvelykujj és a mutatóujj távolsága és a nagyarasz, ugyanabban a helyzetben a hüvelykujj és a kisujj távolsága), a Pengő című meséből vezettük be, mely egy bakarasznyi emberről szólt. Ennek a bakarasznyi emberkének hét rőf hosszú szakálla volt. Mivel ekkor már a gyerekek ismerték a rőf hosszát nevetésben törtek ki. Elképzelték a bakarasznyi emberkét a hét rőf szakállával. P.E. megjegyezte, hogy „Biztosan feltekerte egy botra, úgy vitte magával”. Ezután megmértük kisarasszal a pad hosszúságát, szélességét, magasságát. Kerestünk a környezetünkben olyan tárgyakat, amelyek egy arasz hosszúak. Minden gyereknek piros szalagból kimértük a kisarasz, kékszalagból a nagyarasz hosszúságát. Ezeket a szalagokat használtuk a továbbiakban mérőeszközként a mérési gyakorlatoknál.

A ciklus vége felé megemlítettük a láb nevű mértékegységet is, mivel ezzel is találkozunk nemcsak a mesében, de a mindennapi életben is.

K. Á. azonnal közölte, hogy a Spektrum csatornán ő látta, hallotta, hogy a tengerek mélységét és a hegyek magasságát lábbal fejezték ki.

Összehasonlítottuk a lábat a lépéssel. Megmértük lábbal és lépéssel a tanterem szélességét és hosszúságát. Összehasonlítottuk a mért értékeket egymással is, és a méterrel mért hosszúsággal is. A hétköznapi életben is gyakran szoktunk „lelépni” távolságokat, ha nincs nálunk mérőeszköz. Ehhez tudni kell, hogy mekkora lehet kb. egy lépés hossza. Ez a tapasztalat jól alkalmazható a becsléseknél is.

### **8.3.2. Szabványmértékegységek bevezetése**

A *méter* bevezetéséhez szemléltető eszközként a földgömböt használtuk. Ez nagy motiváló erővel bírt, rengeteg kérdést fogalmaztak meg a gyerekek. Legtöbben arra voltak kíváncsiak, hogy „hol van, és mekkora Magyarország?” a Föld többi országához képest. Megállapították, hogy Magyarország nagyon-nagyon kicsi. Ezek után, amikor körbe megmutattuk az egyenlítőt, megállapította az egyik gyerek: „Akkor az nagyon-nagyon, nagyon hosszú lehet”. Megbeszéltük, hogy ennek egy meghatározott nagyon kicsi részét választották régen a hosszúság hivatalos egységének, a méternek. Megmutattuk a méterrudat, s minden gyerek megpróbált a karjával 1 métert mutatni. Egyenként megmértük a rúddal az általuk mutatott távolságokat, hogy megtapasztalják annak tényleges hosszúságát. Megállapítottuk, hogy az ölnél kisebb, a rőfnél és az araszoknál nagyobb. Mérőszalagjuk segítségével, ami egy méter hosszú, kerestünk a teremben 1 méteres hosszúságokat. Mivel a tanteremben nagyon kevés olyan dolgot találtak, ami pontosan 1 méter, megállapították, hogy nem lehet a méterrel mindent pontosan megmérni. Kerestünk a tanteremben a méternél rövidebb és hosszabb tárgyakat is, előkészítve ezzel a többi mértékegység bevezetésének szükségességét.

A továbbiakban minden órát az addig tanult mértékegységek ismétlésével kezdtünk. Szókartyákat készítettünk az ismert mértékegységek neveivel (rőf, öl, kisarasz, nagyarasz, méter), amelyeket a kiválasztott gyerekek homlokára helyeztünk úgy, hogy egyikük sem láthatta a sajátján lévő szókartyát, csak a többiekét. A mértékegységek nagysága alapján kellett sorba állniuk. Ez nem volt könnyű feladat, mert a mértékegységeket fejben kellett összehasonlítani és rendezni. Ez a mértékegységek bővülésével egyre nehezedett. Eleinte nagyon lassan ment a „sorba állás”, de a vége felé a gyerekek 1-3 perc alatt könnyedén rendeződtek a fejükön levő mértékegységek alapján növekedő vagy csökkenő sorrendbe. Alig akadt közöttük olyan gyerek, aki nem találta a

„helyét”. A sorba rendeződés az osztály előtt történt, a tanulók véleményezték a munkát, javították a hibát. A javítás után minden mértékegységet bemutatott a „tulajdonosa”.

A *deciméter* bevezetésénél 1 dm hosszúságú szalagot kapott minden gyerek, s közösen raktuk ki ezekkel az 1 métert. Annyi gyereket szólítottunk ki, hogy szalagjaikat egymás után rakva pontosan végigérjen a méterrúdon. Megállapítottuk, hogy 10 gyereket kellett kiszóllítani, mert 10 db fért rá a méterrúdra. A tanulók az ujjakkal is igyekeztek pontosan megmutatni a deciméter hosszúságot, folyamatosan összehasonlították azt a szalaggal. Mivel a teremben található tárgyak között nem találtunk olyat, amely pontosan egy deciméter, a deciméter többszöröseivel próbálkoztunk. Kerestünk olyan tárgyakat, dolgokat, amelyek két vagy három deciméter hosszúak. Minden gyerek kapott egy 2 dm hosszúságú nemzeti színű szalagot. Ezzel méregetve már találtak olyan tárgyakat, amelyek valamely mérete kb. 2 deciméter hosszúságú volt.

A *centimétert* az 1 centiméteres élű fehér kiskockával szemléltettük, érzékeltettük. Korábbi mérésekre utalva indokoltuk, hogy miért van szükség újabb mértékegység bevezetésére. A pad szélességét nem tudtuk sem a méterrel, sem a deciméterrel pontosan megmérni. Megállapítottuk, hogy 3 deciméternél több, de 4 deciméternél kevesebb. A mérésnél 3 deciméter hosszúság kirakása után kiskockákkal mértünk tovább, még 8 db kiskockára volt szükség. Így már „pontos” lett a mérés. Az 1 deciméter hosszúságú piros szalagot is és az 1 deciméter hosszúságú narancssárga rudat is kirakták 1 cm élű kockákkal, hogy több tapasztalatot gyűjtsenek a két mennyiség kapcsolatához. A kirakások után megállapítottuk, hogy az 1 deciméter hosszúságot 10 db fehér kiskockával lehet helyettesíteni. A fehér kockához rendeltük az 1 centiméter hosszúságot. A gyerekek az ujjakkal mutatták az 1 dm-t és az 1 cm-t. A matematika nyelvén is kifejeztük, hogy 1 deciméter = 10 centiméter.

Kezdetben minden mértékegységet teljes névvel írtunk le, de meg kellett ismerni a gyerekeknek a szabványmértékegységek rövidítéseit. A rövidítések bevezetése visszavetette néhány órára őket, lassabban oldották meg így a problémákat. Ez már magasabb absztrakciót követelt tőlük, mivel két szimbólumot kellett nekik összehasonlítani.

### **8.3.3. Mérési gyakorlatok**

Az *első mérési gyakorlatot* a rőf, az öl, az arasz és a méter alkalmazására terveztük. A gyerekek szűkebb környezetében, a tanteremben végeztünk méréseket. Minden csoportnak egyetlen tárgy méreteit kellett meghatározni. A mérés során a gyerekeknek sokat kellett segítenünk, mert még nem tudták a mértékegységeket jól illeszteni, nem ismerték a mérés trükkjeit, a táblázatok kezelését is meg kellett ismerniük. Ennek a feladatnak a megoldásánál tanulták meg, hogyan kell a mért értékeket a táblázatba rendezni. A csoportban minden gyerek kapott egy-egy ölnyi, rőfnyi és arasznyi szalagot, egy tanuló pedig a méterrúddal mért. A kapott szalaggal határozták meg az adott tárgy (tábla, ajtó, szekrény) méreteit. Az öllel való méréshez két gyerekre volt szükség. Az „alkalmi” mértékegységeknél a tanító öle, rőfje, arasza volt az „etalon”. Ezt a problémát a csoportok csak részben tudták megoldani a sok segítség ellenére is, mivel még nem volt táblázatkezelési gyakorlatuk. A táblázatba is túl sok adatot kellett rögzíteni, ami tovább nehezítette a helyzetet.

A munka után a csoportok beszámoltak a mérési tapasztalataikról az osztály előtt. A beszámoló becsléssel kezdődött. Azok a tanulók, akik az adott mérésben nem vettek részt, megpróbálták meghatározni a kérdéses tárgyak hosszúságát, szélességét,

magasságát a kívánt mértékegységekben, így mindenki bekapcsolódhatott a munkába. A saját mérésnél szerzett tapasztalás segítette a tanulók becslését. Ezt bizonyítja, hogy egészen jól megközelítették az adott objektum méreteit.

Néhány térbeliséget kifejező szó jelentéséről is beszélünk, mivel gondot jelentett az objektumok hosszúságának, magasságának és szélességének meghatározása. Ez nagyon nehéznek bizonyult számukra, még nem voltak azon a nyelvi szinten, hogy megértsék ezek viszonylagosságát. Ennek a témának a feldolgozását későbbre halasztottuk.

A *második mérési gyakorlaton* minden csoport csak két mértékegységgel mért, hogy az adott órán megbeszélhessük a mért értékeket, a mért és a becsült adatok közötti eltéréseket is. A mértékegységek nagyságát a tárgyhoz úgy választottuk, hogy a mérés eredményeit a 20-as számkörön belül tartsuk. Itt is csak a mérőszámokat kellett beírni a táblázatba.

A beszélgetésekkel a tanulók becslési készségét is fejleszteni kívántuk. A mértékegységek és mérőszámok viszonyára is utaltunk, bár még nem mondtuk ki, hogy mit nevezünk mérőszámnak és mértékegységnek. A gyerekek ezeket az összefüggéseket a saját nyelvükön és gondolkodásuknak megfelelően elég jól megfogalmazták.

A méréseknél szerzett tapasztalatokból összefüggéseket fogalmaztak meg a gyerekek. T. Cs.-nek meg kellett mérni a tábla szélességét és a tábla alsó és felső szélének távolságát a padlótól. Csak két mérést végzett el. Azt válaszolta, hogy „Teljesen felesleges megmérni a tábla felső szélének magasságát, mert az alsó szél magasságához egyszerűen csak hozzá kell adni a tábla szélességét”.

Közös mérésekkel akartuk a gyerekeket rávezetni arra, hogy egy hosszúságot többféle mértékegységgel meg lehet mérni, és a tárgy hosszúságát kifejezhetjük egyidejűleg két-, háromféle mértékegységgel is. Ennek igazolására a tanári asztal hosszúságának mérésénél először ráillesztettük a méterrudat és kiegészítettük 2 narancssárga rúddal. Megállapítottuk, hogy annak hosszúsága 1 m 2 dm; másodszer 12 gyerek helyezte el a narancssárga rúdját az asztalon, s közösen megszámoztuk, meghatároztuk, hogy az asztal 12 narancssárga rúd hosszúságú, azaz 12 dm. Megkérdeztük, hogy ki lehet-e rakni másképpen az asztal hosszúságát.

#### **A gyerekek az alábbi megoldásokat javasolták:**

- J.T. 120 cm, azaz 120 kiskocka. (ennek megvalósítását elvetettük, mivel egyrészt a 20-as számkörön belül akartuk tartani a mérőszámokat, másrészt nem tudtuk volna az asztal hosszát kiskockákkal pontosan kirakni, mivel a kiskockákat nehéz pontosan egymás mellé illeszteni, a méreteik sem teljesen pontosak)
- Gy.P. javaslatára kiraktuk a méterrúddal és 20 kiskockával. Lefordítottuk a matematika nyelvére a kirakást, s megállapítottuk, hogy az asztal hosszúsága 1 m 20 cm.
- L.M. javaslatára megmértük annak hosszúságát a méterrúddal, egy narancssárga rúddal és 10 db kis fehér kockával.

A centiméter bevezetése után, kisebb tárgyak méreteit is meg tudták határozni, pl. dobozokét, a matematikakönyvét, füzetekét. A méréseket szalaggal, a narancssárga rúddal és a fehér kiskockákkal végezték. Azt a gyerekeknek kellett felfedezni a korábbi mérési, becslési tapasztalataik alapján, hogy az adott hosszúságot milyen eszközökkel mérhetik meg pontosan, melyik egységet vagy egységeket célszerű használni. A mérés

eredményeit itt is táblázatba rögzítették. Az adott hosszúságot egyes esetekben többféle mértékegységgel ki kellett fejezniük.

Egészen jól érezték az összefüggést a mérőszámok és mértékegységek között, még ha nem is tudták azokat pontosan kifejezni. J.T., akinek az egyik órán be kellett mutatni a centimétert, az alábbiakat válaszolta. „Ez a legkisebb mértékegység, s ezzel lehet a legpontosabban és a legtöbbet mérni.” Mikor rákérdeztünk, hogy mit ért azon, hogy „legtöbbet mérni”, azt válaszolta: „A legtöbb mindent ezzel megmérhetjük, s nagyobb lesz a száma, mintha méterrel vagy deciméterrel mérnénk.”

A kilencedik órán megbeszéltük, hogy minden mérés eredményéhez két érték tartozik, a szám, amit mérőszámnak nevezünk, és a mértékegység. A kettő csak együtt fejezi ki a tárgy hosszúságát.

Ahogy ügyesedtek a gyerekek a mérések elvégzésében, egyre összetettebb feladatot kaptak. Egy tárgy adott méretének pontos meghatározásához eleinte egy, majd kettő, s végül három mértékegységre is szükség volt.

Egyik alkalommal minden csoport kapott egy zöld szalagot, amely hosszúságát legpontosabban már három mértékegységgel tudták kifejezni úgy, hogy a mérőszámok a húszas számkörön belül maradjanak. Ezt a mérést kivétel nélkül minden csoport sikeresen végezte el, és az eredményt többen próbálták még további mértékegységekkel is kifejezni. Szívesen használtak nagyobb számokat. Minden csoportban volt olyan gyerek, aki talált több jó megoldást, a tapasztalataikat azonban még nem mindig tudták pontosan megfogalmazni.

#### **8.3.4. A fejlesztés első ciklusának értékelése**

A fejlesztés értékelését egy mérőlap<sup>3</sup> kitöltésével vizsgáltuk.

A gyerekek négy feladatot kaptak, amelyek tartalma az alábbi volt:

- különböző irányú egyenes vonalak összehasonlítása;
- különböző mértékegységekkel megadott mennyiségek kapcsolatának jelölése;
- mennyiségekkel megadott nyitott mondatok kiegészítése, igazgató tétele;
- tárgyak becslése természetes és szabványegységekkel.

Az *egyenes vonaldarabok* hosszának összehasonlítását sikeresen elvégezték a gyerekek, nem zavarta őket az irányok különbözősége. Hiányosság mindössze abban mutatkozott, hogy néhány gyerek nem írt mértékegységet a mennyiségekhez. Négyen viszont kétféle mértékegységben is kifejezték az adott hosszúságot. (centiméterben és deciméterben)

Az öt pár *különböző mértékegységekkel kifejezett hosszúság összehasonlítása* közül legalább két relációt minden tanuló helyesen értelmezett. A legtöbb problémát a mérőszámok különböző nagyságrendje okozta. Csak kevés gyerek tudta összehasonlítani a 17 cm-t és a 2 dm-t. A tanulás folyamatában a 2 dm hosszúságú nemzeti színű szalagot, minden tanuló önállóan kirakta, illetve megmérte kiskockákkal, de ezt az ismeretet nem tudták felidézni az adott feladatnál. A gyerekek 80 %-a viszont sikeresen döntött arról, hogy 1 dm kevesebb, mint 13 cm. Itt viszont előfordulhatott, hogy egyszerűen csak a két mérőszámot hasonlították össze. A tanári asztal hosszának mérésénél a gyerekek tapasztalták, hogy az 1 m 2 dm-rel egyenlő. Ez a hosszúság

---

<sup>3</sup> Egy gyerek által kitöltött mérőlapot a 4. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 6-8. oldal.)

többféleképpen is kifejezhető, 1m 20 cm, 12 dm. Az itt tapasztaltakat csupán a tanulók 40 %-a tudta alkalmazni az 1m 1 dm és 1m 10 cm összehasonlításánál.

Az órákon jól boldogultak az 1 deciméterre való kiegészítéssel, de az itt tapasztaltakat nem sikerült az osztály nagy részének átvinni a *2 dm-re való kiegészítésre*. Ez nem azt jelenti, hogy nincs cm vagy dm fogalmuk. Mindenki tudta, hogy 1 dm = 10 cm, de a sok mérési gyakorlat ellenére is gondot jelentett számukra, hogy 2 dm = 20 cm. Még nagyobb gondot okozott az, amikor két nagy szám összegeként egy kis számot kaptak, mert ehhez már biztos hosszúságfogalomra és még több tapasztalatra lett volna szükség. A 2 dm-ből 2 gyerek kivételével mindenki tudta, hogy 0 dm-t kell elvenni, hogy 2 dm maradjon. Többen csak azért nem írtak mértékegységet, mert az előzőek alapján nem tudták, hogy melyiket írják, mivel több megoldása is volt, s ilyen típusú feladat korábban még nem fordult elő.

A becslések végzésénél kevésbé voltak eredményesek a gyerekek. Ez részben ellentmond az órán tapasztaltaknak, mert azok is rosszul tippeltek, akik az órai becslések végzésénél nagyon ügyesek voltak.

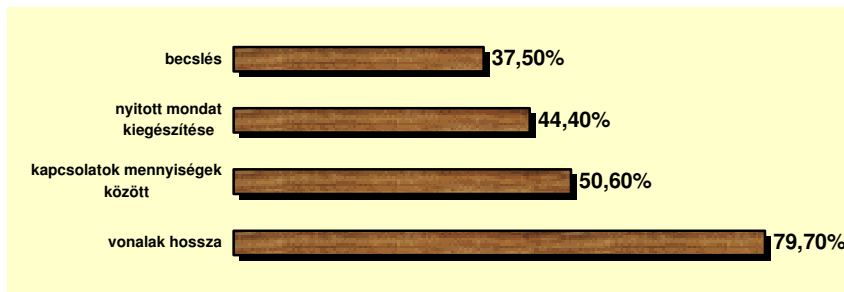
Ennek okai lehetnek:

- az utolsó mérési gyakorlat a teszt kitöltése előtt legalább három héttel történt. Talán mindenki elsősorban arra emlékezett, amit az ő csoportja mért, a mérést követő beszélgetés nem pótolta a tapasztalat megszerzését;
- a gyerekek többsége becsléseinél nem alkalmazta a méréseknél szerzett tapasztalatait;
- a tárgyak méretét közvetlenül az adott mértékegységgel hasonlították össze. Ha nagy volt a különbség a mértékegység és a mérendő tárgy nagysága között, akkor nehezebben találták meg az arányokat. Bár egy adott tárgy méretének becsléséhez a tanulók a nagyobb mértékegységből kevesebbet írtak, a kisebből többet, de ezek nem mindig feleltek meg a tényleges viszonyoknak.
- a becsléseknél nem kerestek összefüggéseket, minden mértékegységgel külön-külön hasonlították össze az adott tárgyat. A gyerekek tudták, hogy a centiméter kisebb, mint a deciméter, ezért centiméterrel mérve ugyanazt a tárgyat a mérőszám nagyobb lesz mint a deciméterrel való mérésnél, de ennél tovább nem gondolkodtak. T.S. 4 dm-re és 17 cm-re becslése a tankönyv hosszúságát;
- minden tanuló tudja, hogy az arasa nagyobb, mint 1 dm, de a deciméterben való becslésnél nem írtak nagyobb mérőszámot;
- a terem hosszúsága 9 és fél méter, ezt megmértük korábban. Azt is tudták, hogy a 9 öl nem jó megoldás a hosszúságra, ezért senki nem is becslte azt 9 öltre. A többség kevesebbre, de volt, aki többre gondolt.

**Megjegyzés:** Szalaggal szemléltettük a tanítás során azt a tényt, hogy a kilenc öles szarufa nem fér el a tanteremben, de ez a gyerekek egy részének valószínűleg nem jelentett tökéletes bizonyítást. Bár az egyik gyerek egészen jól elmagyarázta a tanórán, hogy mi a szarufa, de szemléltetni a valóságban nem tudtuk. Mivel a szalagot behajlíthattuk, arra már valószínűleg nem emlékeztek, hogy a szarufa nem hajlítható.

A tanulók jobban becsltek természetes mértékegységekben, mint a szabványegységekben. Ez valószínűleg annak köszönhető, hogy a természetes mértékegységekkel többet mértünk.

A fejlesztés értékelését a következő grafikon mutatja.



8.3.1. ábra

### Tapasztalatok:

A gyerekeknek nagy élmény volt a meseszerű bevezetés, mert még öt hét múlva is szinte mindenki emlékezett a konkrét mesékre.

A tanteremben minden tárgy hosszmeretéről a valósághoz közeli becsléseket adtak, s ezt többféle mértékegységekben is meg tudták határozni.

L.M.: „Az ajtó szélessége kevesebb, mint egy méter, felesleges az öllel próbálkozni, mert az még a méternél is nagyobb.” A tanulók fele egészen jól érzékelték az összefüggést a mérőszámok és mértékegységek között, még ha nem is tudta azokat pontosan kifejezni.

A tanítás során arra is kitértünk, hogy ezeket a mértékegységeket alkalmazzuk más tudományokban és a mindennapi életben. Ez hatással volt a gyerekekre. A testnevelő tanár elmondása szerint, amikor középtartásban volt a karjuk, többen megjegyezték, hogy ölnyire állnak egymástól, az előre nyújtott karjuknál pedig szívesen használták a rőf kifejezést.

A gyakorlati mérések kifejezetten motiválóan hatottak a gyerekekre, de azok a mértékváltások, amelyek nem kapcsolódtak közvetlen méréshez, már kevésbé érdekelték őket.

## 8.4. A KÍSÉRLET MÁSODIK CIKLUSÁNAK BEMUTATÁSA

A ciklusban az alábbi tevékenységek végzését terveztük:

- becslések mérések végzése a tanulók szűkebb – tantermi – és tágabb – udvari, utcai – környezetében, hosszúságok meghatározása öllel, rőffel, méterrel, lépéssel;
- töröttvonalak rajzolása, hosszuk meghatározása;
- új mértékegységek bevezetése: mérföld, hüvelyk;
- a négyzet és téglalap kerület fogalmának előkészítése nyitott és zárt töröttvonalak hosszának meghatározásával;
- görbe vonalak hosszának meghatározása.

### 8.4.1. Diagnosztizáló teszt

Egy mérőlap<sup>4</sup> kitöltésével készítettük elő a ciklusban tartott foglalkozásokat

<sup>4</sup> Egy gyerek által kitöltött mérőlapot az 5. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 9-10. oldal)

Az alábbi öt kérdéskörben vizsgáltuk a gyerekek ismereteinek szintjét:

- hosszúság-mértékegységek kiválogatása, különbözőfajta mértékegységek közül;
- mértékváltás;
- négyzethálón adott töröttvonal rajzolása, hosszának meghatározása;
- utasítás alapján megrajzolása és hosszuk megadása;
- tornyok magasságának meghatározása, az építőelemek magasságának ismeretében.

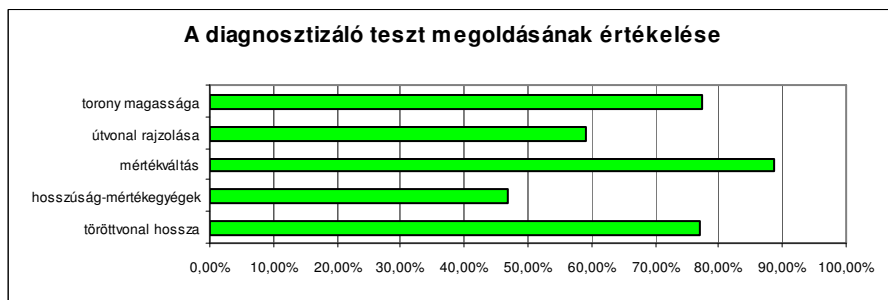
Néhány tanuló a különböző mértékegységek közül a hosszúság-mértékegységekhez sorolta a deciliter is. Ez mint utóbb kiderült olvasási probléma volt. Nem olvasták végig a gyerekek az adott mértékegységeket, azaz a deci prefixum számukra a decimétert jelentette. Három gyerek minden mértékegységet a hosszúság-egységekhez sorolt. Ez is eredhet olvasási problémából, mivel a feladatban csak mértékegységeket adtunk meg, s előfordulhatott, hogy a hosszúság szón egyszerűen átsiklottak.

A mértékegységek váltásánál a hiba főleg a kisebb mértékegységek nagyobbban való kifejezésénél volt. A mértékegységek megadásánál is problémák mutatkoztak, nem ismerik eléggé a gyerekek mértékegységek rövidítéseit.

A töröttvonal rajzolásánál többen tévesztettek irányt. A hosszának meghatározásánál a gyerekek egy része nem a vonalra eső rácsvonalak számát adta meg, hanem a határoló négyzeteket számlálta.

A torony magasságának meghatározásánál, mint az várható volt, többen a kockák számát adták meg a magasság helyett, s sokan nem írtak mértékegységet.

A mérőlap értékelését a következő grafikon mutatja:



8.4.1. ábra

## 8.4.2. Becslések, mérések

A foglalkozások mindig irányított beszélgetéssel kezdődtek, kapcsolni akartuk a tanítandó ismeretet a gyerekek korábbi tapasztalataihoz, érdeklődési köréhez és a mindennapi élethez.

A tanulók először a saját közvetlen környezetükben lévő tárgyak méretét (pad, tankönyv, füzet, stb.), majd a terem hosszát és szélességét becsülték, határozták meg különböző mértékegységekkel.

A méréseket csoportokban végezték. A terem hosszát az egyik csoport öllel mérte, – a „szabvány” öl hosszát madzagból készítettük el – a másik csoport ugyanezt végezte a röffel, a harmadik pedig a méterrúddal.

Az ölnyi madzagot két gyerek kifeszítette az osztály előtt, hogy meghatározhassák annak hosszát, s pontosabban tudjanak becsülni. Minden gyerek ölét összemértük a „hivatalos” öllel, s így tapasztalhatták, hogy még a leghosszabb karú gyerek öle is sokkal kisebb annál. Az öl hosszát az osztály fele két méterre tippelte, a másik fele hosszabbnak vélte, és senki nem gondolta két méternél kevesebbnek.

A terem hosszát a tanulók fele 3 öltre becsülte, pedig már tudták, hogy az öl kb. 2 méter, a terem hosszúsága viszont több mint 9 méter. Még mindig nehezen alkalmazták az adott probléma megoldásánál a korábbi tapasztalataikat. A terem magasságának az öllel való meghatározását először úgy akarta segíteni a tanító, hogy a tanterem közepére állt azért, hogy a magasságával segítsen a gyerekeknek a becslésben. Ez nem igazán segítette a becslés jóságát. A falhoz illesztett öles madzag sokkal jobb segítségnek bizonyult.

Mivel fontosnak tartottuk, hogy a gyerekeknek legyen tapasztalata nagyobb tárgyak méréséről is, az iskola Munkácsy utca felőli és a Víztorony utca felőli kerítésének hosszát becsültük és mértük meg különböző mértékegységekkel (öl, rőf, méter, láb). Ezt a gyakorlatot az osztály két csoportban végezte. Külön dolgoztak a fiúk és a lányok. Sokkal kevesebb vita van a gyerekek között, ha azonos neműek dolgoznak együtt. A csoportokban közösen végezték el a becslést, a közösség által megállapított értéket írták be a táblázatba. Gondot okozott, hogy bár a gyerekek szeretnek nagy számokkal dolgozni, nem ismerik ezek valóságtartalmát.

Minden mértékegységgel két gyerek mért, két gyerek kezelte a táblázatot. A gyerekek sok eredeti ötletéről, jó módszerekről, logikáról és problémakezelésről tettek tanúbizonyságot a becslések, mérések során. Pl. a méterrel való becslésnél ketten kifeszítették az egy ölnök megfelelő zsineget, s rögtön megállapították, hogy ez nagyobb, mint egy méter, tehát ebből kevesebbet kell írni. A rőfről pedig megállapították, hogy kisebb, mint egy méter, abból tehát többet kell írni. Lépéssel való becslésnél megnézték a kiválasztott gyerekek lépéseinek hosszát, s ennek alapján elég jó becslést adtak a kérdéses hosszra. Ez azért örvendetes, mert ebben a ciklusban még nem foglalkoztunk mélyebben a mértékegység és a mérőszám kapcsolatával.

A méterrel mérők felfedezték, hogy a kerítésnél két oszlop köze kb. két méter, s a közöket kell megszámolni és szorozni kettővel.

A másik csoportban a lányok dolgoztak egy másik tanár vezetésével. Ők nem voltak olyan lelkesek, mint a fiúk. Kevesebb érdeklődést mutattak a mérés iránt, pontatlanabban becsültek, de sokkal pontosabban mértek. Több türelmük volt a munka kivitelezésénél, pontosabban illesztették az eszközöket, mint a fiúk.

Mindkét csapat élményszerűen, lelkesedéssel számolt be a munkájáról, tapasztalatairól.

#### **8.4.3. Töröttvonalak rajzolása, hosszának meghatározása**

Új elemként jelentkezett a töröttvonalak rajzolása és hosszának meghatározása – a gyerekek „turista” útvonalaknak nevezték azokat. Mivel a diagnosztizáló tesztben mindössze négy gyereknek sikerült hibátlanul megoldani a problémát, több időt szántunk ennek gyakorlására a foglalkozásokon. P.E. jelentkezett, hogy ő már tudja, hol hibázott. „Nem a rácsvonalak hosszát adtam össze, hanem a rácsvonalakat.” Néhány gyerek a vonalra eső négyzetek számát adta meg, és egyesek még ezek számlálásánál is irányt változtattak. Ennek a feladattípusnak a gyakorlására azért is kellett nagyobb hangsúlyt fektetni, mert nagy szerepe van a kerület fogalmának meghatározásában. A gyerekeknek maguknak is kellett ilyen útvonalat tervezni. Ez lehetőséget teremtett arra, hogy a lassabban haladók is „kistanítók” lehettek, azaz lerajzoltathatták diktálás útján az általuk tervezett társaikkal. A turistautak rajzolásából egyetlen gyerek sem maradhatott ki,

mindenki lediktálta az általa tervezett útvonalat. Ezzel egyrészt felelősségteljesebben odafigyelt az irányokra, mert a többiek megleckéztették azt, aki elvétette. Másrészt olyan gyerekek is szerepléshez jutottak, s elismerést vívhattak ki maguknak, akiknek korábban nem volt erre lehetősége. Sz.G. egy viszonylag egyszerű útvonalat rajzolt, amelyet elsőként lediktálhatott a többieknek. Ezután folyamatosan jól teljesített minden foglalkozáson, s nagyobb gonddal töltötte ki a feladatlapokat is.

A zárt töröttvonalak rajzolására és hosszuk meghatározására azért helyeztünk nagyobb hangsúlyt, mert ezt szántuk a kerületfogalom egyik alapozó feladatának. A téglalapok és négyzetek rajzolásával ezek fogalmát is előkészítettük.

Mikor a gyerekek már szinte hibátlanul dolgoztak, áttértünk a szóbeli utasításokról az írásbelire. Három feltétellel indítottunk (pl. jobb 2, le 5, bal 3), s ezek számát fokozatosan növeltük.

#### **8.4.4. Mértékegységek bevezetése**

Ebben az időszakban két régi mértékegységet vezettünk be. Az egyik a mérföld, amely megismerését meseolvasással kapcsoltuk össze, a Mirkó királyfiról szóló mesével. Ekkor már a gyerekek rögtön tudták, hogy melyik kifejezés fontos számunkra, s a buzogány 70 mérföldről való hazadobását emelték ki a meseelemek közül. Beszéltünk arról, hogy többféle mérföld van, s ezek közül a mese a magyar mérföldre utal, ami több mint 8 kilométer. Kerestünk olyan hosszúságot a tágabb környezetünkben, ami egy mérföld lehet. Ez nehéz feladat volt a gyerekeknek, mert nagy hosszúságokat sem elképzelni, sem összehasonlítani nem tudnak.

A másik új mértékegység a hüvelyk (zoll, inch) volt. Ezt ma is használjuk, hiszen a számítógép képernyőjének méretét ebben a mértékegységben határozzák meg, így ez nem is tekinthető réginek. A számítógépük használatáról és azok méreteiről beszélgetve vezettük be a hüvelyk mértékegységet. Ez nem okozott gondot a gyerekeknek, mert ebben az időszakban egy tanuló kivételével mindenkinek volt otthon számítógépe. Mivel az osztályteremben nem volt számítógép, megmértük, hogy mekkora a képernyője a teremben lévő televízióknak. Mindenki megpróbálta megmutatni, hogy mekkora az otthoni számítógép monitora. L.M. azt mondta, hogy 5 cm-szer 10 cm-es az övé, s meglepődött, mikor lerajzoltuk, hogy az milyen kicsi. Valószínűleg 15,1 inches a képernyő, s L.M. a 15-re úgy gondolt, mint 10+5.

Bár megbeszéltük, hogy a monitorokat hüvelykben, vagyis inchben mérik, úgy tűnt, hogy nem minden gyerekekhez jutott el ez az információ. A tanulók felének olyan vonalzója volt, amelynek egyik szélén centiméteres, a másikon inches beosztás volt. Ez eleinte sok problémát okozott a vonalzóval való méréseknél.

#### **8.4.5. A négyzet- és a téglalapkerület fogalmának előkészítése**

A négyzet és téglalap fogalmát tevékenységek és beszélgetések során kívántuk formálni. A beszélgetés kapcsán azt próbáltuk megtudni, hogy milyen téglalapfogalommal rendelkeznek a tanulók. A fogalmi szintet ebben a témakörben az alábbi két órarészlettel mutatjuk be. A fogalmak Van Hiele modelljében még az első szinten vannak. Az első két osztályban még nemcsak a téglalapot és a négyzetet kezelik külön, hanem a téglalapokat is szeparálják. Az olyan téglalapot, amelynek egyik oldala 1 cm, a másik 10 cm, a gyerekek többsége nem tekinti téglalapnak. Véleményük szerint az egy csík.

## A téglalap ismereti szintjének feltárása beszélgetések során

2004. november 11-én tartott foglalkozás egy részlete:

T.S.: *A téglalap a téglához hasonlít.*

D.P.: *A téglalap nem olyan, mint a tégl, mert a téglalap csak kétdimenziós, a tégl pedig három.* (D.P. megmutatta a szekrény három dimenzióját, megfogalmazta a magasságot, de a másik két dimenziót csak megmutatta, nem tudta megnevezni.)

J.T.: *A téglalapnak nem minden oldala egyenlő, mert van két hosszabb oldala, nem olyan, mint a négyzet, amelynek minden oldala egyenlő.*

D.P.: *Ez a papír csak kétdimenziós, mert csak szélessége és hosszúsága van.*

T.Cs.: *Nem igaz, mert van neki vastagsága is.* (T.Cs. vitába szállt D.P.-vel)

Közben a táblára a gyerekek felváltva téglalapokat rajzoltak, s értékelték egymás munkáját.

K.Á.: *A környezetünkben nagyon sok téglalap van. A könyv, a füzet, a pad, a szekrény, az ajtó mind téglalap alakú, illetve felfedezhető rajta a téglalap.*

T.S.: *A pad csak akkor lesz téglalap, ha a műanyagot leveszik a keretről, mert annak vastagsága is van.* (T.S. a pad felső műanyag rétegére gondolt, mint téglalapra.)

T.Cs.: *A műanyagnak is van vastagsága.* (ezt már felfedezte a papír esetében is.)

Sz.Z.: *A matematikafüzetet, ha úgy tartjuk, hogy a hosszabbik oldala a vízszintes, akkor téglalap, de ha rendesen tartjuk, akkor nem.*

A tanár mutatta neki, hogy egy alakzat méretei az elforgatással nem változnak. Bólintott, hogy érti, de látszott rajta, hogy a véleményét továbbra is fenntartja.

T.S.: *A füzet kinyitva is téglalap alakú.*

L.M.: *Szerintem, ha kinyitjuk a füzetet, akkor a nyitás vonalában van benne egy hullám, s ettől az már elveszti téglalap voltát.*

**Megjegyzés:** A gyerekeknek a téglalapról már van képük, meghatározott szituációkban (ha a hosszabbik oldala a „vízszintes” a rövidebbik a „függőleges”) fel is ismerik azokat. Az elforgatás során kapott téglalapok felismerésével a tanulók nagy részének gondja van. Tudják azt is, hogy a téglalap síkidom, bár néhányan keverik a téglalappal. Még nem tudják azonban megfogalmazni lényeges ismertetőjegyeit, csak körbeírják.

## 2004. december 1-én tartott foglalkozás

T: *Mi okozta tegnap T.Cs. és L.M. között a vitát?*

T.Cs.: *Ha a szélesség kicsi és a hossza 8 km, az is téglalap?* (Maga válaszolt a kérdésére, hogy igen. Pedig előző nap még nem hitte el L.M.-nek, hogy a vonalas tábla két vonala és a tábla széle is egy téglalapot alkot. Ekkor még nagyon kardoskodott amellet, hogy az nem téglalap, hanem egy csík.)

T: *Mit tanultunk a téglalapról?*

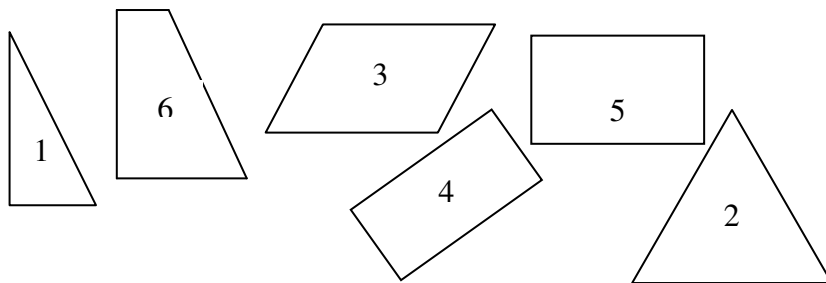
Gy.P.: *Nincs magassága, ha felfelé fordítom, akkor is téglalap.* (A nincs magassága számára azt jelenti, hogy síkidom, tehát nincs harmadik kiterjedése. A „felfelé fordítom” pedig az elforgatásra, mint egybevágósági transzformációra utal.)

K.Á.: *Négy oldala van, és négy szöge van.*

J.T.: Egy rendes téglának, ha úgy fordítjuk, hogy itt van a nagyobb része, itt meg a ... az is téglalap. (A téglalap és téglalap szavakat néha még a jobb tanulók is szinonim szavakként használják.)

L.M.: A téglalapot senki ne tévessze össze, mert az nem a téglából ered szerintem, hanem ennek biztosan valami megmagyarázni valója van, de biztosan nem az építőanyagról, mert az építőanyagba mindig tesznek bele lejtőket, hogy ne tudjon nagyon mozogni a téglalap, amikor összeteszük. Nem hiszem, hogy innen kaphatta a nevét. (L.M. a falazóblokkokra gondolt.)

A tanár háromszögeket és négyszögeket rajzolt a táblára. A gyerekeknek ezeket a rajzokat véleményezni, javítani kellett, valamint hasonlókat készíteni, ugyancsak a táblánál. (A tanulók szeretnek a táblára dolgozni. A téglalappá való átalakításokat nagyon kedvelik. Ezeknél a tevékenységeknél sokat tanultak egymás ötleteiből is.)



T: Mutass egy olyat, amelyik nem téglalap!

T.S.: Az 1-es számmal jelölt egy háromszög.

D.D.: Három csücske is van, és három oldala.

I.B.: A 2-es sem téglalap, mert három oldala és három csücske van.

J.T.: A 6-os nem téglalap. (Ezzel viszont nem mindenki ért egyet)

K.A.: Négy sarka, négy oldala és négy szöge van. (K.A.-nak ennyi tulajdonság teljesülése elegendő a téglalaphoz.)

J.T.: Azt szeretném mondani, hogy ha az 1-es mellé még egy ugyanolyat rajzolnánk, akkor kijönne a 2-es. (Be is mutatta a táblánál, hogy hogyan gondolta.)

T.S.: A 6-os azért nem téglalap, mert az oldala ferde vonal és nem egyenes.

T: Hogyan alakíthatnánk át a 6-ost, hogy téglalap legyen?

L.M.: Hozzáírnék egy pizza alakot.

Két gyerek a táblánál átalakítja ezt a síkidomot. Az egyik kiegészíti a trapézt egy háromszöggel, a másik levág egy háromszöget belőle.

L.M.: Ezt rajzban ki lehet pótolni, de ha a valóságban széttörnének egy üveget azt nem lehet teljesen úgy összejátszani.

T: A téglalap szomszédos oldalainak hogyan kell elhelyezkedni?

A tanulók a testükkel és a karjukkal szemléltetik, hogy hogyan kell állni a téglalap szomszédos oldalainak.

Az egyik tanuló közösen kettévágta a 2-es háromszöget és úgy alkotott belőle téglalapot.

J.T.: Én máshogy is át tudnám alakítani a kettést. (Ő kiegészítéssel dolgozott.)

Az átalakítás után T.Cs. megjegyezte: De az majdnem négyzet.

L.M.: Az a bajom velem, hogy majdnem négyzet.

T: *A négyzet szomszédos oldalainak helyzete nem ugyanolyan, mint a téglalapé?* (Ez a gyerekekből mindig lázadást váltott ki, hogy a négyzet nem téglalap.)

K.Á.: *Ez is téglalap.* (mutat a hármas paralelogrammára)

J.T.: (határozottan felháborodással közölte) *Nem, ez a téglalap!* – mutatott egy valódi téglalpra. (Javítva K.Á. kijelentését.)

Szinte követhetetlen vitába szálltak egymással, melynek tárgya az alakzatok osztályozása, téglalappá való átalakítása.

Gy.P. (pontot tett a vita végére.) *A K.Á. által mutatott paralelogramma azért nem téglalap, mert nem minden oldala egyenes.* (Ez azt jelenti, hogy a függőleges és vízszintes vonalaktól eltérők számukra nem egyenesek.)

T: *Most olyat mondjatok, amelyek téglalap.*

Gy.P.: *Az ötös téglalap.*

D.D.: *A 4-es téglalap.* (ez egy figyelemre méltó megállapítás volt, mert az elforgatott téglalapot ritkán ismerik fel, ennek pedig ráadásul „ferdek” voltak az oldalai.)

T.Cs.: *A hármas nem is négyzet, nem is téglalap, mert annak két vonala is ferdén áll. Négy csúcsa van, de nem téglalap.*

**Megjegyzés:** Már érzékelhető, hogy a gyerekek nagy része tisztában van a téglalap tulajdonságainak egy részével, csak szavakkal nem tudja magát pontosan kifejezni. Azonban az is látszik, hogy ezt a fogalmat még érlelni kell.

#### **8.4.6. Tevékenységek a téglalap és négyzet fogalmának elmélyítésére és a kerület fogalmának előkészítésére**

Célunk az volt, hogy a tanulók felfedezzék és megfogalmazzák, hogy a téglalap szemközti oldalai egyenlőek, ezért ha a kerületet meg akarjuk határozni, akkor nem kell minden oldalt megmérni.

A gyerekek csoportokban dolgozva, szalaggal, zsinórral, farkasfoggal különböző téglalapokat kerítették körbe a teremben. Vizsgáltuk ezek oldalainak egymáshoz való viszonyát és hosszúságát. A csoportok által mért eredményeket táblázatba foglaltuk, hogy áttekinthetőbb legyen, s az összefüggést (a szemközti oldalak egyenlőségét) jobban észrevehessék.

A gyerekek csak segítséggel tudtak téglalapot formálni az adott hosszúságú szalagokból, farkasfogakból. A táblázat kezelése már jól ment. Az azonban senkinek sem jutott eszébe, hogy ha „jó” téglalapot formál, akkor nem kell megmérni mind a négy oldalt.

A tevékenység során tapasztaltak megbeszélése.

T: *Mivel foglalkoztunk a múlt órán?*

T.Cs.: *Téglalapot csináltunk farkasfogból.*

T: *Milyen méretű téglalapot csináltatok?*

T.Cs.: *Rendes téglalapot, de nem volt pontos.*

L.M.: *Van rajta egy olyan kis szépséghiba, ami úgymond eltéveszti a rendes alakját. De egyik sem lett pontos, kivéve annak, aki egyenes oldalú szalagot kapott, mert mi farkasfogasok, azok ... a farkasfog így megy (mutatta a farkasfog cakkjait), s a téglatestnek egyenesnek kéne lenni.*

T: *Mennyi volt a szalag hossza?*

L.M.: *A mi hosszunk, a rendes 6 lenne, de a görcs levitte róla a 2 cm-t, s így 5 m 9 dm és 8 cm.* (A gyereke kötötték össze a kapott zsinórokat. Az összekötésnél keletkezett görcsről beszéltek. Erre több részt használtak el a zsinórból, mint terveztük.)

J.T.-ék mérésüket ellenőrizték a lapról, 298 cm volt.

J.T. *Az tulajdonképpen 3 m, és azért lett 2m 9 dm 8 cm, mert itt is a görcs levitte.*

P.E.-ék szalagjának hossza 4 m lett volna, de nem jutottak végére a feladatnak. Ők dm-ben mértek és nagyon ügyesen becsültek is.

**Megjegyzés:** Mivel az osztályterem túl kicsinek bizonyult a téglalapok formálásához, nem látták át jól a problémát, ezért a következő foglalkozást az iskolaudvaron tartottuk.

Két csoportban (fiúk, lányok) dolgoztunk. A gyerekek maguk, illetve a csoportvezető döntötte el, hogy ki, milyen feladatot lát el, de megegyeztek abban is, hogy ki kivel mikor cserél, hogy minden munkafolyamatból kivegye a részét.

Mindkét csoportban négy gyerek, akik a téglalap csúcsait alkották, lépésekkel alakította ki a többiek állandó irányításával a téglalapot, majd ezt zsinórral körbe kerítették. Meghatározták a zsinór teljes hosszát lépésben és méterben is. A kapott téglalap oldalait lépegetéssel kellett változtatni úgy, hogy újra téglalapot kapjanak, s a kötél is feszes legyen. Itt nagy szerepe volt az irányítóknak, mert ők igazították ki a lépéseket, hogy a szemközti oldalak egyenlőek legyenek. Szerencsére a párhuzamossággal nem kellett foglalkozni, mert a járólapok segítettek a gyerekeket az iránytartásban. Minden új téglalap oldalainak hosszát lépéssel és mérőszalaggal is megmérték, s meghatározták a területét is. Többször utaltunk rá, hogy a téglalap oldalai ugyan megváltoztak, de a kötél hossza nem változott.

A lányoknál egy nagyon „sovány” téglalapot formáltunk, s azt kellett „kövériteni”, a fiúknál fordítva. Így mindkét csapatnak kellett négyzetet alkotni is az adott hosszúságból. Ezzel kívántuk előkészíteni, hogy a négyzet egy speciális téglalap.

Elég jó téglalapokat alakítottak ki, de a lányoknál sok gond volt a méréssel. P.E. magára vállalta a mérést, s így rájöttünk, hogy csak kicsi tárgyakat tud mérni. Ez nem derült volna ki, ha csak a feladatlapon határozzuk meg téglalapok területét, mivel az ott megadott téglalapok minden oldala 10cm alatt volt. Ezt a vonalzóval könnyen meg tudta mérni. Az 5 m 48 cm-es hosszúságot 8-nak mérte, mert az utolsó számjegy 8-as volt.

**Megjegyzés:** A fiúk sokkal könnyebben boldogultak a téglalapok kialakításával, az oldalak mérésével, a lányok ebben a kérdésben nagyon sok segítséget igényeltek.

### **A területfogalom alakítását feladatlappal is segítettük.**

A feladatlapon<sup>5</sup> lévő különböző téglalapok között voltak azonos területűek, de nem egybevágók is. Ezzel alkalmunk volt bemutatni itt is, hogy sok olyan téglalap van, amelynek nem egyenlőek a megfelelő oldalai, de azonos lehet a területe. A gyerekeknek azonos területű téglalapokat kellett rajzolni a négyzethálón. Természetesen annak is örültünk, ha a gyerek csak elforgatta, mert számára ez is egy új megoldás volt, s azt is látta, hogy elforgatásnál a terület nem változik.

---

<sup>5</sup> Egy gyerek által kitöltött mérőlapot a 6. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 11. oldal)

Számlálással megmutattuk, hogy a belső határoló négyzetek száma kevesebb, mint a kerület, a külső határnégyzetek száma, amennyiben a csúcsonál lévő négyzeteket nem számoljuk egyenlő a kerülettel, de ha a csúcsonál lévőket is beszámítjuk, akkor nagyobb számot kapunk, mint a kerület. Ezzel azt akartuk elérni, hogy ne a határoló négyzeteket, hanem a rácsvonalakat számolják.

A téglalapok területét méréssel is meghatározták. Folyamatosan felmerült az a kérdés, hogy fontos-e minden oldalt megmérni a terület meghatározásához. A másodikos gyerekek véleménye szerint igen.

A feladatlapokon folyamatosan változtattunk. Először négyzetrácsos lapon adtuk meg a téglalapokat, négyzeteket, hogy a rácsvonalak mentén könnyebb legyen azokat megrajzolni és a területet meghatározni. Majd az alakzat által tartalmazott belső négyzeteket kivettük, hogy a gyerekek figyelmét jobban a kerületre irányítsuk. Ekkor még mindig volt lehetőség a területnek számolással való meghatározására. A sima lapokon adott sokszögek területét már csak méréssel határozhatták meg a tanulók.

### 8.4.7. Görbe vonalak hosszának meghatározása

Eddig olyan turistaútvonalak (töröttvonalak) hosszát határoztuk meg, amelyek egyenes vonaldarabokból álltak. Mivel a mindennapi életben sokszor előfordul, hogy egy görbe vonal hosszát kell meghatározni, ezért ennek mérését is fontosnak tartottuk.

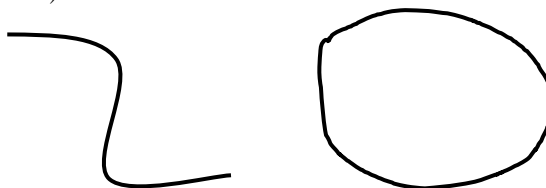
Különbféle nyitott és zárt görbe vonalakat adtunk meg, amelyeknek a hosszát centiméterekben kellett meghatározni először becsléssel, majd méréssel. A gyerekek cérnát és vonalzót használtak a méréshez. A görbe vonalak hosszúságát csak közvetítéssel lehetett meghatározni, azaz először cérnát illesztettek a vonalhoz, majd a felhasznált cérna hosszát mérték meg.

#### Az első feladatlap feladatai:

*Hány centiméter hosszú ez az útvonal? Hány centiméter hosszú cérna szükséges a nyaklánc elkészítéséhez? (2004. december)*

Becslés: .....

Mérés: .....

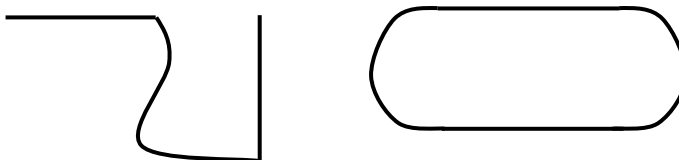


#### A második feladatlap feladatai:

*Hány centiméter hosszú a vonal? Milyen hosszú zsinór kell az asztalterítő körbekerítéséhez? (2004. december)*

Becslés: .....

Mérés: .....



#### Tapasztalatok:

- Sokan csak a mérés után írták be a becsléseket, vagy a mérés alapján korrigálták azt.

- Elég pontosan meg tudták mérni a vonalak hosszát.
- A második feladatlapon már jobban odafigyeltek a becslésre. A fiúk között volt néhány, aki egyenes szakaszokkal közelítette meg a görbe vonal hosszát is, ebből viszont az következett, hogy sokkal nagyobb lett a mért értékek szórása.
- A mérések alapján az asztalterítő körbeszegéséhez 31 cm-től 38 cm-ig mérték a zsinór hosszát, de az útvonal hosszára már egységesebb volt a mért érték. Valószínűleg azért, mert nem volt olyan nagy a görbület. Hasznosították az előző foglalkozáson tapasztaltakat, sokkal reálisabb becsléseket adtak a vonalak hosszára. A gyerekek nem szívesen mértek cérnával, szívesebben osztották kis szakaszokra a görbét, amellyel gyakorlatilag visszavezették a görbe vonalak hosszának mérését a töröttvonalak hosszának meghatározására.

### **Beszélgetés a második feladatlap megoldásáról.(2004. december)**

T: *Mivel mértük meg az alakzatokat határoló vonal hosszát?*

Gyerekek: *Cérnával, vonalzóval.*

P.E.: *A cérnával megfogtuk, hogy mennyit mértünk le, s a vonalzóra ráraktuk és azzal meg tudtuk mérni.*

T.Cs. *A vonal egyenes részét közvetlenül is meg lehetett vonalzóval mérni. Az első görbét részekre bonthatjuk szét.*

T: *Hány részre bontottátok?*

B.J.: *Három.*

Megbeszéltük, hogy ha egy görbét nagyon kis darabokra vágunk, akkor az egyes darabok már szinte egyenesnek tűnnek.

B.Á.: *A görbe is beletartozik az alakzatba, s az alakzatot mértük, tehát a görbét is meg kellett mérni.*

T: *Ha egy vonal zárt, akkor annak a hossza milye az alakzatnak?*

K.Á.: *A szöglete.(K.Á. a kerületre gondolt.)*

P.E.: *A kerülete.*

A tanár egy síkidomot rajzolt a négyzetrácsos táblára. B.J. a táblánál megmutatta, hogy mi alapján határozzuk meg a kerületet. Bár ő valójában körberajzolta, azaz nem pontosan a vonal mentén haladt.

T: *Milyen mértékegységgel mértétek meg a vonalak hosszát?*

J.T.: *Centiméterrel vagy milliméterrel.*

T.Cs. *Szerintem deciméterrel is megmérhetnénk.*

T: *Mennyi lett a terítő kerülete?*

T.Cs.: *34 cm, 3 dm és 4 cm.*

Gy.P.: *340 mm.*

**Megjegyzés:** A foglalkozásokon csak ilyen formában jelent meg a mértékváltás.

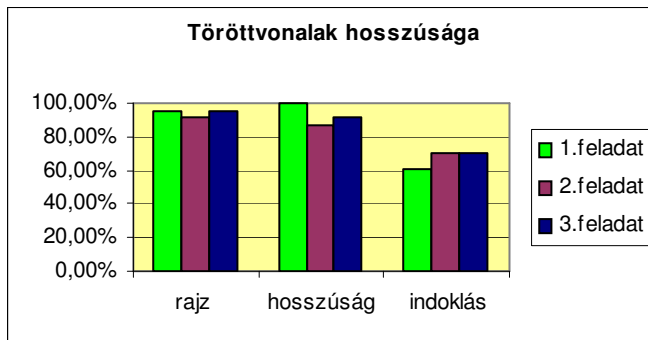
### **8.4.8. A második ciklusban tartott foglalkozások értékelése**

2004. december 9-én egy mérőlap<sup>6</sup> kitöltésével ellenőriztük a gyerekek ismereteinek alakulását. A mérőlap első feladata töröttvonalak rajzolása és hosszuk meghatározása volt (egy nyitott és két zárt, az egyik egy téglalap). A gyerekek többsége pontosan határozta meg a vonaldarabok hosszát. A hosszúság meghatározásánál a készített rajz alapján megadott hosszúságot tekintettük helyesnek. Az alakzatok lerajzolásának,

---

<sup>6</sup> A feladatokat a 7. és 8. melléklet tartalmazza. (Melléklet 12-13. oldal)

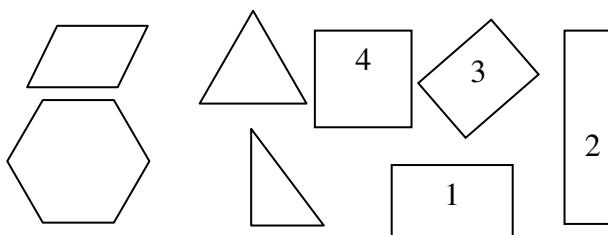
hosszúságaik helyes meghatározásának, és a gondolkodási lépések leírásának értékelését az alábbi grafikon mutatja.



8.4.2.ábra

**Megjegyzés:** Mivel az utasításokat írásban adtuk meg, a vonalak hosszúságának meghatározását a tanulók többsége nem a négyzetrácsok vagy esetleg a határoló négyzetek megszámlálásával, hanem a megadott lépések számainak összeadásával állapította meg. A meghatározáshoz nem is volt fontos a rajz, de azért mindenki elkészítette azt. Az indoklasként a lépések összegének meghatározását írták le, szöveges magyarázatot nem adtak.

A mérőlap második feladata sokszögfelismerésre, a kerületek meghatározására vonatkozott.



Háromszögek: .....

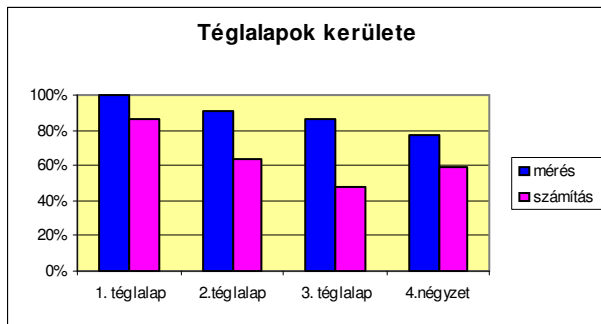
Négyszögek: .....

Téglalapok: .....

Határozd meg a téglalapok oldalainak hosszát, s azok összegét! Írd bele az alakzatba a kapott hosszát! .....

A tanulók 77 %-a a négyzetet nem sorolta a téglalapok közé, ami teljesen megfelel az életkori sajátosságnak megfelelő geometriai szintnek (Van Hiele 1. szint). Ekkor még a téglalpra és a négyzetre, mint két teljesen különböző alakzatra gondolnak.

A mérések és a hozzákapcsolódó számítások elvégzésének szintjét a következő grafikon mutatja.



8.4.3.ábra

**Megjegyzés:** A terület meghatározásánál elég sok számolási hibát ejtettek a gyerekek. A négyzet területének meghatározása azért tűnik kevésbé eredményesnek, mert egy részük még nem sorolta a téglalapok közé. Így nem határozta meg annak területét sem. A mértékegység használatát jónak tekinthetjük, javult az előzőekhez képest, mert mindössze két tanuló nem jelölte azt a méréseknél, számításoknál.

## 8.5. A KÍSÉRLET HARMADIK CIKLUSÁNAK BEMUTATÁSA

A harmadik ciklusban a foglalkozásokat szintén a délutáni napköziben tartottuk.

A ciklusban az alábbi tevékenységek végzését terveztük:

- A ciklus kezdetén kitöltött mérőlap megoldása alapján csoportos és páros interjúk alkalmazásával a hibák megbeszélése, a hiányosságok pótlása.
- Becslések, mérések végzése.
- Töröttvonalak hosszának meghatározásával a kerületszámítás előkészítése.
- A négyzet és téglalap fogalmának alakítása a szívószálakból való alkotás során.
- Háromszögek alkotása szívószálakból, a háromszögek oldalak szerinti csoportosításának előkészítése, területének kiszámítása.

### 8.5.1. A mérőlap megoldásának értékelése

A 2005. április 6-án kitöltött mérőlap<sup>7</sup> megoldásának értékelése, elemzése alapján terveztük meg a továbblépés irányait.

A megoldások hibáit több csoportban megvitattuk a tanulókkal, korrigáltuk azokat. A csoportokban való foglalkozásokon a tanulók elvégezték azokat a becsléseket, méréseket, amelyben a legtöbben hibáztak, kijavították a saját és mások rossz megoldásait.

#### 8.5.1.1. A hibák elemzése csoportos interjú keretében

Az első alkalommal öt gyerekekkel beszélgettünk, a csoportot B.K., V.N., T.S., K.F. és D.B. alkotta.

A beszélgetésben a legtöbbet B.K. és T.S. szerepelt.

<sup>7</sup> Egy gyerek által kitöltött mérőlapot a 9. és 10. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 14-16. oldal)

Mindenki előtt ott volt az általa kitöltött feladatlap. Értékelnie kellett korábbi megoldását, megjelölni esetleges hibáit. Arra a kérdésre, hogy ki változtatna a korábbi munkáján, senki sem reflektált, mindenki jónak gondolta a megoldását.

Miután mindenkinek összehasonlítottuk az ölet a méterrúddal, újra tapasztalhatták, hogy az öl nagyobb egy méternél.

A kerítés hosszára adott becsléseiket ellenőriztük.

B.K. 345 öltre és 80 méterre becsült, T.S. becsülte 3 m-re a kerítést.

B.K. nem találta kezdetben a becslésében a hibát. Pedig mindenki megállapította, hogy az öle nagyobb, mint a méter.

B.K.: *Én összekevertem az ölet a rőffel.* (válaszolt hosszas gondolkodás után.)

T: *Ha most becsülnél, akkor több öltre tippelnél vagy kevesebbre?*

B.K.: *Kevesebbre, mert az öl nagyobb, mint a méter. Így most 70 öltre tippelném a kerítés hosszát.*

K.F. (Szívesen bekapcsolódna a munkába, de nehezen tudja kifejezni gondolatait. A mértékegység és a mérőszám fordított viszonyát szeretné kifejezni, de általánosítani még nem tud. Végül sikerül helyes megállapítást tennie) *A méter nagyobb, mint a deciméter, s ezért a méter száma kisebb, mint a deciméteré.*

T.S.: *Ha deciméterrel mérjük azért hosszabb, mert abból sokkal több kell, mint az ölből.* (T.S. csak a tanterem hosszával foglalkozik, egyáltalán nem érdeklí a kerítés. A hosszabb szót a több, a nagyobb mérőszám helyett használja. Bemutatja, hogy ha 9 dm-t mérünk 9 méter helyett, akkor alig távolodunk el a táblától.)

A változatosság és a másféle megközelítés miatt színes rudakkal dolgozunk.

T: *Vajon 20 darab narancssárga rúddal ki tudjuk-e rakni a termet?*

T.S.: *Szerintem sokkal több kell.*

T.S.: *A deciméterekkel lerakjuk, akkor ugyanaz lesz mint a méter.* (érdekes ez az okfejtés, mert a szóbeli közlés alapján arra következtethetünk az elmondottakból, hogy egy hosszúság deciméterrel való mérésénél ugyanaz lesz a mérőszám, mintha méterrel dolgoznánk. Tulajdonképpen ő azt szeretne volna elmondani, hogy mindegy, hogy méterben vagy deciméterben mérjük, a mérés eredménye ugyanaz. Ezt viszont többszöri próbálkozással is nehezen tudta kifejezni.)

B.K.: *És igen, egy kocka lehet kettő is.* (Itt arra gondol, hogy egy négyzet két oldala is lehet a téglalap határán. Mivel mindenki nézte a saját kitöltött feladatlapját, nem a vitatott részhez kapcsolódtak, hanem a saját megoldásaikon elmélkedtek.)

B.K.: *Ha a lépéseket összeadjuk, akkor ugyanazt kell kapjuk.* (Ez a megjegyzés a töröttvonal rajzolására és hosszának meghatározására vonatkozott.)

B.K. nagyon aktív volt, de V.N. és D.B. most is igyekezett háttérbe húzódni.

T: *Mit tanultatok a mai foglalkozáson?*

K.F. először nem tudott a kérdésre válaszolni. Aztán V.N.-t kérdeztük, de ő meg sem szólalt. Végül K.F. válaszolt.

K.F.: *Azt tanultam, hogy az öl nagyobb, mint a méter.*

**Megjegyzés:** A kialakított csoportokban a gyerekek – bár közel ugyanazokat a hibákat követték el – mégsem tudtak minden esetben jól együtt gondolkodni. Ennek több oka is lehetett. Egyrészt a négy-öt fő soknak bizonyult ahhoz, hogy belelássanak egymás fejébe, megismerjék a másik gondolatait. Az egyes gyerek ismeretei, hibái

boncolgatásába nem kapcsolódott be mindenki, nem érdekelte mások problémája. Előfordult az is, hogy egy gyerek nem illett abba a csapatba. Néhány gyerek kifejezetten jól dolgozott együtt, ezek a megfigyelések fontos szerepet játszottak a későbbi páros munkák megszervezésénél. Aki visszahúzódó volt az osztálymunkában, az a csoportos beszélgetéseknél is igyekezett háttérbe húzódnival. Néhány gyerekekben viszont óriási szereplési vágy volt, folyton jelentkeztek, még akkor is, ha nem tudtak válaszolni a feltett kérdésre. Néha eredeti gondolatokkal is előrukkoltak, de nem volt meg mindig a megfelelő tudásuk annak pontos kifejezéséhez.

Mivel a csoportos interjúkat nem találtuk elég sikeresnek, ezért a megoldások elemzéseit, a hibajavítást párokban való beszélgetéssel folytattuk.

### 8.5.1.2. Páros interjúk

A párokban való beszélgetésnél kevesebb volt a „várakozási idő” a gyerekeknek, amíg rá került a sor, s nem volt lehetőség arra sem, hogy a másik mögé rejtőzzék. A foglalkozások is rövidebbek lettek, mivel két gyerek sokkal jobban tudott figyelni egymásra, alkalmazkodni a másik gondolkodásához.

B.Á. és K.A. mérőlapjai elemzésével azt kívántuk elérni, hogy B.Á. segítsen K.A.-nak a problémák megértésében és megoldásában. B.Á. a feladatait jól oldotta meg, K.A. viszont nehézségekkel küzd a becslésnél és a mérésnél egyaránt. A beszélgetés során K.A. ismereteit próbáltuk K.Á. segítségével „jó útra” terelni. A foglalkozás sikeres volt, mert K.A. megtanult pontosan mérni a vonalzóval, és gondolatait is jobban ki tudta fejteni társa segítségével.

T: *Vajon van-e annyi narancssárga (10 cm hosszú) rudunk, hogy kirakjuk vele a terem hosszát?* (20 db volt)

K.A.: *Nincs.*

B.Á.: *Szerintem a méterrúddal kéne mérni, mert 10 dm egy méter.*

T: *Szerintetek meddig ér el a 20 db rúd kirakása?*

K.A.: *kb. a feléig.*

Mivel nem ért el a feléig, meg kellett beszélnünk ennek a hosszúságát. K.A. csak akkor győződött meg róla, hogy ez csak két méter, amikor mellé raktuk a méterrudat. Bár B.Á. folyamatosan mondogatta, hogy méterrúddal kellene mérni, mert ez csak 2 m.

T: *Ha végigmérenénk, akkor hány méter lenne a tanterem hosszúsága?*

B.Á. *9 m.*

K.A. *10 m.* (Ez az előzőhöz képest nagyon jó megállapítás volt.)

Megmértük a terem hosszúságát méterrúddal, majd a kimaradó részt narancssárga rudakkal. A mérés eredménye 9 méter 7 dm lett.

B.Á. felfedezte, hogy a feladatlapon elfelejtette a második sorbeli lépéseket figyelembe venni a töröttvonal rajzolásánál. (Ő volt az első, aki saját hibáját ki tudta javítani.)

K.A. a négyzetrácsok megszámlálásával, B.Á. a lépések számának összegével határozta meg a töröttvonal hosszát.

P.E. és Z.J. közel azonos képességűek. A feladatmegoldásaikban is hasonló eredményeket érnek el. P.E. becslése közelebb van a valósághoz, és elég bőbeszédű lévén, érdekes válaszokat adott. Z.J. viszont még így is csak egyszer-kétszer válaszolt a feltett kérdésekre, viszont mindig kijavította P.E. hibás megjegyzéseit.

A harmadik alakzat egy háromszög volt, velük erről beszélgettünk.

P.E.: *Nem pontos háromszög, de mindegy.*

T: *Miért nem pontos?*

P.E.: *Mert nem minden oldala ugyanolyan méretű.*

T: *Mit nevezel háromszögnek?*

P.E.: *Azokat nevezük háromszögeknek, amelyeknek három szögük van, vagy három csúcsuk.*

T: *Miből van még három?*

P.E.: *Lap.*

A határoló szakaszokra mutatott a tanár, s közölte, hogy ezeket oldalaknak nevezzük.

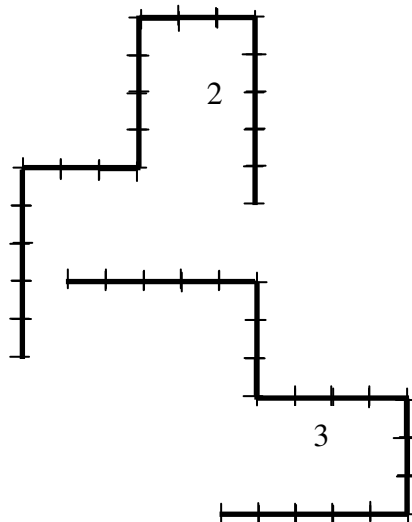
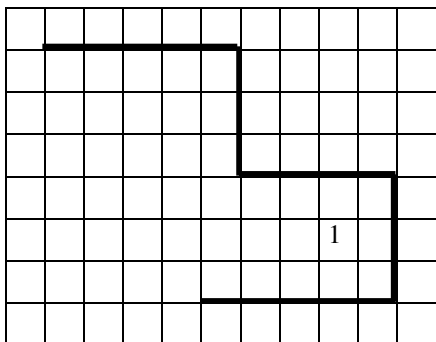
P.E.: *De nem mindegyik az oldala, mert ha pl. egy kockát lerakunk, akkor nem mindegyik az oldala.* (Számára keveredik a négyzet és a kocka fogalma is.)

T: *Melyik nem az oldala?*

P.E.: *Az az oldal, amire ráraktuk, az alsó lapja.* (Tehát P.E. szerint az oldal az, ami nem alul van.)

Kíváncsiak voltunk a tesztben arra is, hogy a tanulók felfedezik-e az egyenlő hosszúságot eltolás, elforgatás, tükrözés során?

Melyik vonal a leghosszabb?<sup>8</sup>



*Válaszodat indokold!.....*

*Hogyan határozta meg? .....*

Ennek a feladatnak a megoldásáról beszélgettünk B.J.-vel és Sz.Z.-vel. Ők szerettek együtt dolgozni, szívesen segítettek egymásnak. Mivel nem fedezték fel az egybevágóságot a töröttvonalaknál, kíváncsiak voltunk, hogy észreveszik-e, ha újra megvizsgálhatják azokat.

B.J.: *Ez a kettő ugyanaz, mert ugyanolyan félig-meddig kocsinak néz ki.* (Az 1-esre és a 3-asra mutatott.)

Közben Sz.Z. a másikat számlálással ellenőrzi.

Sz.Z.: *Ez 25 szerintem.* (A rácspontokat szakaszonként megszámlálta, majd ezeket összeadta.)

B.J.: *A 2-es a legnagyobb. Mert ez is húsz, meg ez is*

Sz.Z.: *Az egyik nagyobbnak látszik, a másik kisebbnek, de mégis hosszabb.*

<sup>8</sup> Egy gyerek által kitöltött feladatlapot a 11. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 17. oldal)

B.J. *A harmadik is kocsi alakú. Mind a három félig meddig kocsi alakú.*  
(Megállapította, hogy mind a három ugyanaz, de nem volt teljesen meggyőződve igazáról, inkább csak tippelt.)

**Megjegyzés:** A feladat megoldásánál a tapasztaltak szerint kevés gyerek ismerte fel az egybevágóságot a töröttvonalak között. Csak egy tanulónál volt konkrét utalás erre. (L.M.: Egyenlő mind, mert mindegyik ugyanaz a forma, csak megforgatva.) További négy tanuló válaszolta, hogy ugyanaz mindegyik, de nem volt egyértelmű, hogy az „ugyanaz” csak a hosszúságra, vagy a formára is vonatkozik.

### **8.5.2. Töröttvonalak hosszának meghatározása, kerületszámítás**

A harmadik ciklusban legtöbbször párokban dolgoztak a gyerekek, a feladatlapokat is párban töltötték ki. Ezzel a módszerrel kötetlenebbé tettük a foglalkozásokat. A párokban lehetőség volt az egymás ötleteinek, gondolatainak kicserélésére és a hibák javítására is. Így sokkal lelkesebben dolgoztak a tanulók.

Az egyik feladatlapon egy *kert területét* kellett meghatározni a pároknak rajz alapján, és megadni, hogy mekkora lehet az a valóságban. Megadtuk, hogy ami a rajzon 1 cm, az a valóságban 10 m. A párok nagy része jó mérőszámot adott a téglalap kerületére, de a többség nem tudta megadni a valóságnak megfelelő mennyiséget.

A háromszögek, téglalapok méreteinek megadásában ügyesek voltak a párok. A mértékegységeket mindenki helyesen adta meg, a terület kiszámításánál is csupán egy-két számolási hiba fordult elő. A háromszögeknél könnyen ment a terület meghatározása. Mind a három oldal hosszúságát be kellett írni a táblázatba, s automatikusan vették ezek összegét. A téglalapoknál viszont csak két adatnak volt helye, ahova a szomszédos oldalak hosszúságát kellett beírni. Minden páros jól dolgozott, mert az oldalak összegét megszorozták kettővel. Ez a korábbi megfigyeléseinkhez viszonyítva jó eredménynek számít második osztályban.

### **8.5.3. Szívószálakból alakzatok készítése, területük meghatározása**

A téglalap, négyzet, háromszög és terület fogalmának tanításához kiváló eszköznek bizonyult a szívószál. Méretre lehet vágni, különböző sorrendben fel lehet a darabokat fűzni. A darabok száma, amennyiben azokból sokszög formálható, megegyezik az oldalak számával.

A szívószálakkal való tevékenységgel az volt a célunk, hogy a terület és terület fogalma élesebben elkülönüljön egymástól. A szívószálak felfűzésénél ugyanis felismerheti a gyerek, hogy a terület hosszúságjellegű fogalom.

A szívószálakból való alkotásokat is párokban végezték a gyerekek, hiszen a darabok felfűzéséhez, összekötéshez segítségre volt szükség.

A foglalkozásokat minden esetben feladatlap<sup>9</sup> segítettük. Az elkészített négyzetek, téglalapok, háromszögek oldalainak hosszát egyenként lemérték a tanulók, és táblázatba rögzítették. Minden esetben meg kellett mérni a felfűzött elemek hosszúságának összességét az összekötés előtt.

---

<sup>9</sup> 12. melléklet B.K. és F.R. feladatlapja.

13. melléklet B.Á. és V.N. feladatlapja.

14. melléklet T.Cs. és L.M. feladatlapja. (Mellékletek 18-20. oldal)

A tanulók először szabadon alkottak, minden megkötés nélkül különböző négyszögeket, négyzeteket készítettek. Itt az volt a célunk, hogy tudjanak azonos darabokat levágni, és tudják a szívószáldarabok méretét összehasonlítani. Az alkotások során felfedezték, hogy a felfűzés után még nem négyzetet kaptak, pedig mind a négy szívószáldarab hossza megegyezett. Ebből csak akkor lett négyzet, ha sikerült jól „beállítani”. Ezzel már tovább léptünk, mert sikerült olyan helyzetet teremteni, amelyben belátták, hogy nem elegendő a négyzet meghatározásához az, hogy olyan négyszög, amelynek mind a négy oldala egyenlő, hanem az oldalak egymáshoz való síkbeli viszonya is fontos. Korábban a rombuszt a gyerekek egy része a négyzethez sorolta, a másik azzal indokolta, hogy nem négyzet, hogy „annak az oldalai nem egyenesek”.

A négyzet szomszédos oldalai helyzetének szemléltetésére a legjobb eszköz maga a gyerek volt. A tanulók felemelték jobb karjukat oldalsó középtartásba, s az egyik gyerek rögtön meg is állapította, hogy ez a derékszög. Ezt ő már hallotta otthon a testvéreitől. Erre a többi gyerek is felfigyelt, s megerősítettük, hogy ez valóban a derékszög.

A téglalapok alkotásánál már több feltételt szabhattunk. Felfedezték, hogy itt már a felfűzés sorrendjének is van jelentősége. A felfűzés után már az első dolguk volt, hogy lemérték az összhosszúságot, amit azonosítottak a kerülettel. (ezt a második foglalkozástól kezdve már kérés nélkül tették)

A munka során a tanulók az egyes levágott szívószáldaraboknak a hosszúságát megmérték, táblázatba írták, majd a felfűzés után is megmérték az együttes hosszát. Ezt a hosszát összehasonlították a táblázatba írt hosszak összegével. A felfűzés utáni mérést egy idő után már többen elnagyolták vagy nem végezték el, mert véleményük szerint ez a munka felesleges. A „lustaság” is segítette annak meglátását, hogy a kerület nagysága megkapható az oldalhosszak összeadásával.

A többségnek az sem okozott nehézséget, amikor nem az oldalak hosszát, hanem a kerületet adtuk meg.

A gyerekek nagyon pontosan dolgoztak. A párok 60 %-a igen jól méretezett, a többieknél is alig volt egy-két milliméter eltérés.

A tetszőleges háromszögek alkotásánál kezdetben mindenki csak egyenlő oldalú háromszögeket készített. Minden probléma nélkül megalkották viszont azokat az egyenlő szárú és általános háromszögeket, amelyeket a tanár kért tőlük.

Adott kerületű háromszögek készítése már sokkal nagyobb kreativitásra ösztönözte őket. Először olyan kerülethosszúságot adtunk meg, amely osztható volt hárommal. Minden gond nélkül tudtak szabályos háromszöget készíteni, hiszen már könnyen osztottak hárommal. A 16 cm kerületű háromszög készítése már problémát jelentett. L.M. azonnal jelezte: „Ilyen háromszöget nem tudunk készíteni, mert a 16 nem osztható hárommal.”

Néhány előzőleg elkészített modell segítségével meg lehetett őket győzni, hogy nem minden háromszög egyenlő oldalú. Ezután sokan alkottak egyenlő szárú háromszögeket, de olyan háromszöget, amelynek minden oldala különböző hosszúságú, akkor még senki sem készített.

Az egyik pár a feladatlapon a 10 cm, 3 cm, 3 cm felbontását adta a 16 cm-nek. Kissé meglepődtek, amikor a felfűzött darabokat nem tudták összekötni. Először azt gondolták, hogy rossz a sorrend, s miután minden lehetséges módon próbálkoztak, a tanárhoz fordultak segítségért. Mikor megtudták, hogy nem az ő mérésükben és felfűzésükben

van a hiba, hanem egy nagyon fontos geometriai problémára tapintottak rá, J.T., a páros egyik tagja rájött a megoldásra. „Mert ez a kettő együtt annyira rövid, hogy nem éri át a harmadikat.”

Ez a megjegyzés elindított egy beszélgetést.

T.Cs.: *A kéket ketté (ez volt a 10 cm-es darab) kell vágni, s akkor össze lehet kötni.*

T: *Csak akkor már négyszög lesz.*

T.Cs.: *Én úgy gondolom, hogy a fehér legyen egy és a kéket ketté kell vágni.* (T.Cs. jót mondott, mert úgy valóban össze lehet kötni, de akkor már a kerülete nem 16 cm lesz.)

Gy.P.: *A két kicsi együtt nagyobb legyen, mint a nagy.*

A foglalkozásokról készült képek



8.5.4. ábra



8.5.5. ábra

**Megjegyzés:** Gy.P. és J.T. észrevétele már a háromszög egyenlőtlenségi probléma tevékenységközpontú megoldása volt.

### **8.5.4. A harmadik ciklusban tartott foglalkozások eredményességének értékelése**

A ciklus végére mindenki jól használta a vonalzót. Ez a páros tevékenységeknek is köszönhető, ahol a tapasztaltabb tanuló segítette társát abban, hogy hogyan kell a vonalzót a tárgyhoz illeszteni.

A sok beszélgetés, a meseértelmezések, a páros interjúk, a csoportos és páros munkák eredményeként a gyerekek szóbeli kifejezőkészsége sokat fejlődött. Ez jól követhető a hangfelvételek elemzésekor.

A legnagyobb gondot számukra a megoldások indoklása, a szöveges válasz jelentette.

Az azonos hosszúságot az osztály fele a párhuzamos eltolás során már felismerte, de az elforgatás során még nagyon kevesen érzékelték a méret megmaradását. A páros beszélgetések során még néhány tanuló felfedezte az alakzatok azonosságát az eltolásnál, de az elforgatásnál elbizonytalanodtak. Többségük a négyzetet sem ismerte fel az elforgatás során, ha annak az oldalai „ferdek”.

### **8.6. A KÍSÉRLET NEGYEDIK CIKLUSÁNAK BEMUTATÁSA**

A ciklusban az alábbi tevékenységek végzését terveztük, ezekre kívántunk nagyobb hangsúlyt fektetni:

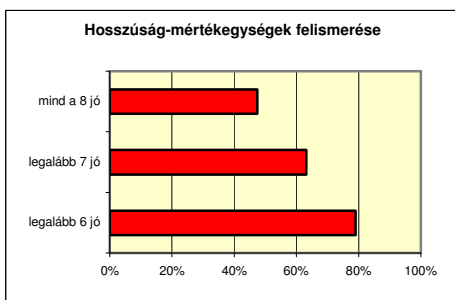
- nagyobb tárgyak méreteinek becslése, mérése;
- különböző állású téglalap oldalainak megnevezése;
- terület kiszámítása többféle módon;
- mérés kapcsolata más tudományterületekkel és a mindennapi élettel;
- téglalapok felismerése különböző egybevágósági transzformációk alkalmazása során;
- a térbeliséget kifejező szavak matematikai és más területeken való alkalmazása, jelentésük értelmezése.

### 8.6.1. Diagnosztizáló teszt

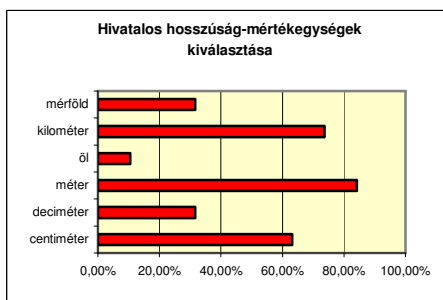
Az eddigi fejlesztés eredményeinek értékelése és a további munka tervezése egy késleltetett teszt<sup>10</sup> segítségével történt, amit 2005. november 14-én végeztünk.

*Az alábbiak közül a hosszúság mértékegységek kiválasztása és a ma használatos egységek megjelölése: méter, kilogramm, liter, deciméter, kilométer, dekagramm, nap, deciliter, öl, óra, arasz, hektoliter, mérföld, perc, centiméter, véka, rőf.*

A fejlesztés eredményességét mutatja, hogy a tanulók közel 50 %-a a különbözőfajta mértékegységek közül mind a nyolc hosszúságegységet kiválasztotta, és senki sem sorolt ide más mennyiséget kifejező egységet. Egy kislány, valószínűleg nem olvasta végig a feladatot, ezért csak egy hosszúságegységet emelt ki, a többiek legalább négyet – ezek főleg a szabványmértékegységek voltak. Az alábbi grafikonok százalékosan jól mutatja a megoldás eredményességét



8.6.1.ábra



8.6.2.ábra

Többen biztosan azért sorolták a mérföldet a szabványmértékegységek közé, mert filmekben látták, hallották, hogy Angliában és Amerikában jelenleg is mérföldben mérik az utakon a távolságokat.

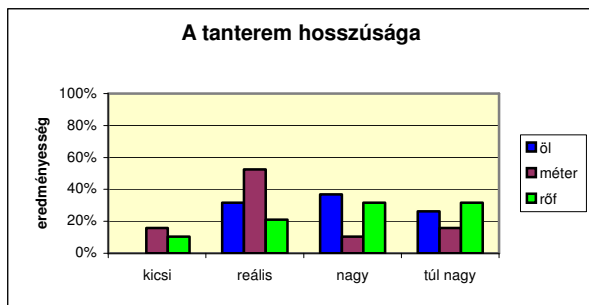
A decimétert a tanulók csupán 32 %-a gondolta szabványmértékegységnek. A beszélgetések során a tanulók kifejtették, hogy szinte egyáltalán nem találkoztak a deciméterrel a hétköznapi életben. Az ölöt pedig azért sorolták a szabványmértékegységek közé, mert már néhányan hallották a négyszögöl kifejezést. (Bár az is lehet, hogy mivel sokat mértünk vele, a gyerekek ettől szabványegységgé vált.) Ez azt is jelentheti, hogy számukra szabványegység azt jelenti, hogy a mindennapi életben gyakran előfordul.

<sup>10</sup> A teszt feladatait és annak egy megoldását a 15. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 21-24. oldal)

### Becslések végzésének értékelése

A pad írófelületének szélességét araszban, deciméterben és centiméterben, a tanterem hosszúságát ölben, méterben és rőfben, az iskola Munkácsy utca felőli és Víztorony utca felőli kerítésének hosszát ölben és méterben kellett a gyerekeknek meghatározni, a becsült értékeket táblázatokba rendezni.

A tanterem hosszúságára adott becslés értékelését az alábbi grafikon mutatja.



	öl	méter	rőf
A tanterem hosszúsága			

8.6.3.ábra

A gyerekek 52,6 %-nál az öl mérőszáma kisebb volt, mint a méter mérőszáma, az öl és a méter reális kapcsolatára viszont a gyerekek mindössze 15,8 % emlékszik, a többiek vagy túl kicsinek vagy túl nagynak gondolják a különbséget, de valószínűleg ezt nem is mérlegelték.

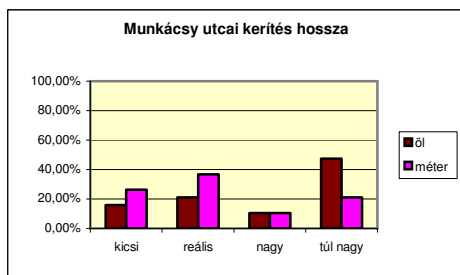
A rőf mérőszáma a gyerekek 78,9 %-ánál nagyobb volt a méter mérőszámánál. A többség a rőf mérőszámának meghatározásánál elég nagy értéket adott, ami azt mutatja, hogy nem emlékeztek a rőf nagyságára, csak arra gondoltak, hogy kisebb, mint a méter. A fejlesztés során legtöbbször és a legtöbb dolgot méterrel mértük, s ezeknek a gyakorlati tevékenységeknek köszönhetően a tanterem szélességének méterrel való becslése a legjobb.

A kerítések hosszának becslésnél is a korábbi méréseiket kellett felidézni a gyerekeknek.

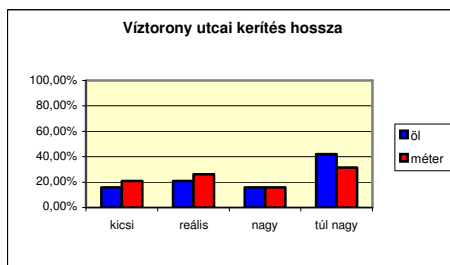
A korábbi méréseik voltak:

- Az iskola Munkácsy utca felőli kerítésének hossza kb. 100 m vagy 54 öl vagy 136 rőf.
- A Víztorony utcai kerítésének hossza kb. 80 m vagy 43 öl vagy 100 rőf.

A diagnosztizáló testben a kerítések hosszúságára adott becslések értékelését a következő grafikonok mutatják.



8.6.4.ábra



8.6.5.ábra

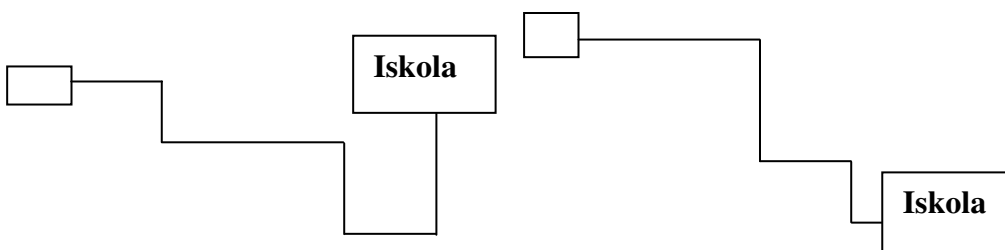
A Munkácsy utcai kerítést tartja nagyobbnak a tanulók 47,4 %-a, kisebbnek a tanulók 38,8 %-a, 10,5 % pedig egyenlőnek gondolja. Az öl mérőszáma a gyerekek 57,9 %-ánál kisebb volt, mint a méter mérőszáma, 21 %-uk az arányokra is figyelt.

Az utcák hosszára a lányok közül egy tanuló, a fiúknak viszont az 50 %-a adott reális becslést.

A három tárgy nagyságának szabványmértékegységekkel való becslése a lányok 48,5 %-nál, a fiúk 71 %-nál a valóságnak megfelelő volt.

**Megjegyzés:** A becsléseknél megfigyelhető, hogy néhányan csak azokra az eredményekre emlékeznek, amit maguk végeztek el, a társaik beszámolóira csak felületesen figyeltek.

*Az alábbi útvonalak hosszának meghatározása (ami a rajzon 1 cm, az a valóságban 10 m).*

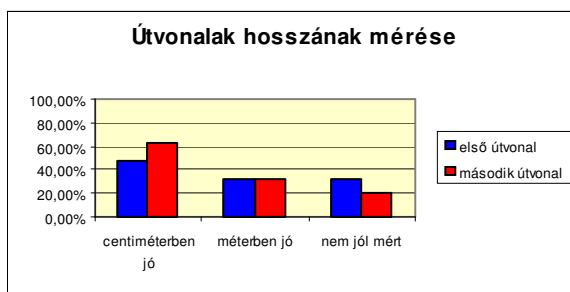


A tanulóknak vonalzó segítségével kellett meghatározni a töröttvonalak hosszát, s következtetéssel kiszámítani annak valódi hosszát.

A gyerekek többsége csak a törött vonalak hosszát adta meg centiméterekben, a beszélgetések során kiderült, hogy nagy részük el sem olvasta a valóságos méretre vonatkozó utasítást.

Néhány gyerek nem mérte meg minden szakaszát a töröttvonalnak, néhányan egy-egy szakaszt átugrottak.

A megoldás értékelését a következő grafikonon láthatjuk.



8.6.6.ábra

A tanulók több mint 60 %-a képes egy 5 szakaszból álló töröttvonal hosszának pontos meghatározására.

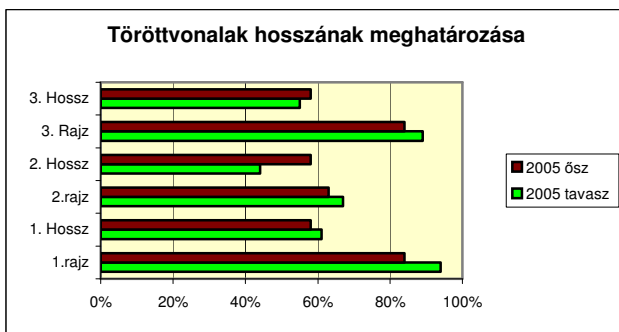
Megjegyzés: Mivel a második útvonal kevesebb darabból állt, könnyebben meg tudták határozni a hosszát. Valószínűleg azért tudták eredményesebben meghatározni a hosszát. A mérőeszközök használata sokat javult, de még van néhány gyerek, aki nem a 0-tól kezd mérni a vonalzóval. Ez nem tipikus hiba, hiszen még ugyanaz a tanuló sem mér mindig rosszul. Mindössze egy tanulónak volt igazi gondja a vonalzó használatával.

Töröttvonalak rajzolása és hosszának meghatározása volt a következő feladat:

- a. Indulj el a bal felső rácspontból! Lépések: jobb 5, le 4, bal 2, le 1. Add meg a vonal hosszát centiméterekben! .....
- b. Indulj el a jobb felső rácspontból! Lépések: le 4, bal 6, fel 2, jobb 3, fel 1 jobb 2, fel 1, jobb 1.
- c. Indulj el a bal alsó rácspontból. Lépések: jobb 12, fel 3, bal 12, le 3.

1 centiméteres oldalhosszúságú négyzethálón rajzolták meg a töröttvonalakat a gyerekek. Ennél a feladatnál az irányoknak is szerepe volt.

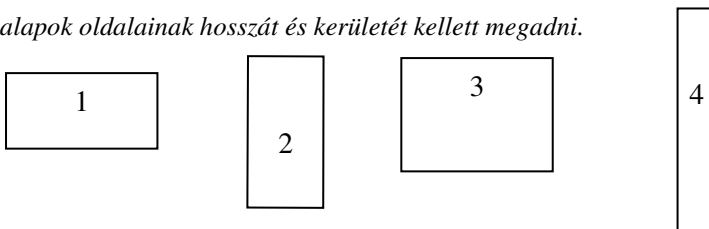
A feladatot már egy fél évvel korábban is megoldották a tanulók, a grafikon a két megoldás értékelésének összehasonlítását mutatja.



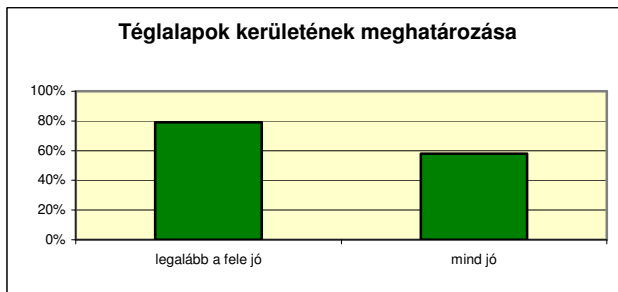
8.6.7.ábra

Megjegyzés: Ennek a feladatnak a megoldását eredményesnek tekinthetjük mind a tavaszi, mind az őszi ciklusban. Sokat fejlődtek a tanulók az indoklások lejegyzésében, igyekeztek egész mondatban kifejezni gondolataikat. A töröttvonalak hosszát még az őszi felmérésnél is sokan a rácscok számlálásával határozták meg, de már alig volt iránytévesztés.

A téglalapok oldalainak hosszát és területét kellett megadni.



A megoldás értékelését az alábbi grafikon mutatja.



8.6.8.ábra

A gyerekek harmadánál még előfordulnak mérési pontatlanságok. A tanulók 74 %-a a mérőszám mellé írt mértékegységet is.

**Megjegyzés:** A tanulók egy része olyan vonalzót használt, amelyen nem jelölték a nullát, ezért bizonytalanok voltak abban, hogy honnan kell mérni. Többen az 1 cm-es beosztástól vagy a műanyag szélétől indítottak.

A „Mit vettél észre a téglalapoknál?” kérdésre az alábbi válaszokat kaptuk:

- *Az első kettő és a 3-as és 4-es egyforma kerületű.*
- *Páros számok jöttek ki.*
- *Hogy négyzetnek is mondható mindegyikre jellemző. Mindegyiknek van szemközti oldala. Mindegyiknek van derékszöge.* (L.M. a két alakzat kapcsolatát fordítva értelmezi, szerinte minden téglalap négyzet.)

### Beszélgetések a teszt kitöltésének értékeléséről

#### A 2005. november 21-i foglalkozás egyik része.

T: *Miért sorolták kevesen a decimétert a szabványmértékegységek közé?*

K. Á.: *Én nem tudok róla, hogy mostanában használták volna a decimétert.*

L.M.: *Viszont jó, hogyha tanítják a decimétert, mert átváltani sokan úgy tudnak, hogy mit tudom én, valaki kér 1000 cm-t, akkor azt én inkább deciméterben határozom meg.*

T: *Miért soroltátok a mérföldet a hivatalos mértékegységek közé?*

I.B.: *Vannak olyan kocsi, amelyek mérföldben mérik, hogy milyen gyors.*

L.M.: *Én azt gondolom, hogy jó, ha az emberek ritka mértékegységeket is ismernek, mert én sem tartom butaságnak, ha egy ember ilyet mond, hogy innen mondjuk 8 mérföldre van valami.*

B.Á.: *Angliában nem a kilométert használják az utakon, hanem a mérföldet.*

J.T.: *Szerintem azért nem használják Angliában a kilométert, Magyarországon azért használják, mert Magyarország területét megmérhetjük kilométerben, de Angliáé már majdnem kétszer annyi.*

I.B.: *A magyar mérföld nagyon nagy azért nem használják.*

**Megjegyzés:** A gyerekek nagy része tudja, hogy a magyar mérföld kb. 8 km hosszú.

### 8.6.2. A hosszúságmérés a természetismeretben és a mindennapi életben

Harmadik osztály első félévében természetismeretből a gyerekek a halakat tanulták. Ennek kapcsán megjegyeztük, hogy az igazi sporthorgászok csak „mérétes” halat fognak ki. Azok, akik horgásztak már, örömmel számoltak be a többieknek a tudásukról.

L.M. megmutatta a kezével a „méretes” törpeharcsának a hosszát. (A mutató és a hüvelykujj derékszögben, a hüvelykujjak összeérnek éppen, s ebben az esetben a két mutatóujj távolsága felel meg a méretes törpeharcsának.) A többiek megpróbálták megbecsülni ezt a hosszat, aztán gyorsan elővették a vonalzót (kérés nélkül), s megmérték.

Ennek kapcsán beszélgettünk a különféle nagyobb állatok méreteiről.

T: *Mekkora lehet az óriás kékbálna?*

Gy.P.: *23-26 elefánt.*

T: *Milyen hosszú lehet?*

K.Á.: *Másfél kilométer.* (K.Á. mindig hajlamos volt túlbecsülni a dolgokat.)

J.T.: *100 méter.*

I.B.: *35 méter.*

T: *Az eddig kifogott legnagyobb kékbálna 34 és fél méter.*

K.F.: *A macskacápa, amely halakat eszik, mindössze egy méteres.*

A gyerekek maguktól kezdtek mesélni a különböző állatokról, amiket ismertek.

I.B.: *A rája olyan mintha két háromszögből lenne. A méretei hosszúságban 1-2 méter, szélességben 1 méter.*

K.F.: *Szerintem akkora széles lehet a rája, mint egy ember meg egy kisgyerek.*

P.E.: *Van olyan törperája, amely 15 cm-es.*

T: *A Tiszában másfél vagy két méteres harcsa is van. Az ajtótól majdnem az asztalig ér.*

D.D.: *Én azt hittem akkora a kékbálna.*

T: *Milyen értelemben használjuk az óriás szót?*

T.Cs.: *Nagyon nagy.*

Gy.P.: *Az óriás varangy 23 cm hosszú. Ez a fajtájához képest óriás.*

A gyerekek kérdés nélkül előveszik ilyenkor a vonalzót és megnézik, hogy mennyi az a 23 cm.

**Megjegyzés:** Ez az órarészlet is azt bizonyította, hogy a gyerekekben valóban nagy tudásvágy van és nagyon sok ismeret, amire bátran lehet építeni a tanítás során. Érdemes a tantárgyak közötti kapcsolatot megteremteni.

### **8.6.3. A térméret, a térhelyzet és a térbeli kiterjedés kifejezései**

A fejlesztés során a különböző térbeliséget kifejező szavak használatára több ciklusban is nagy hangsúlyt fektettünk. A széles, keskeny, hosszú, rövid, magas, alacsony, mély, sekély stb. térbeliséget kifejező szavak helyes alkalmazása a matematikában, az anyanyelvben és mindennapjainkban is nagyon fontos. A több jelentésű szavak értelmezése minden tantárgynak feladata. A széles, mély, magas, rövid stb. szavak többféleképpen értelmezhetők, de a mérésnél ezeknek csak egy jelentését használjuk.

Ezeket a szavakat, az ehhez kapcsolódó kifejezéseket különböző szituációkban, mondatokban értelmeztük. Célunk az volt, hogy azok matematikai jelentését elmélyítsük.

#### **8.6.3.1. A mély szó értelmezése**

A gyerekek meglévő ismereteit vizsgáltuk a beszélgetés során.

T: *Mikor beszélünk mélységről?*

T.Cs.: *Van egy doboz és annak a mélysége, vagy van egy szekrény és annak a mélysége.*

J.T.: *Mély a víz.*

B.J.: *Mély a Föld.*

J.T.: *Mély gödör, mély szakadék.*

Gy.P.: *Mély a tűzhányó.*

Megbeszéltük, hogy a tűzhányó krátere lehet mély.

I.B.: *Mély alagút.*

T: *Ezt inkább úgy használják, hogy mélyen van az alagút. Ha benne vagy az alagútban, akkor mit mondhatunk?*

Gy.P.: *Hogy milyen mélyen vagyok.*

**Megjegyzés:** A magas, a szűk és a keskeny szavak használatát is vizsgáltuk, foglalkoztunk ezek matematikai és hétköznapi jelentéseivel.

#### 8.6.4. Becslések, mérések frontális osztálymunkában

A gyerekek becslési készségének fejlesztésére, a mértékegység mérőszám közötti kapcsolat felfedezésének elősegítésére a tanteremben különböző - korábban már elvégzett - becsléseket, méréseket újra elvégeztük. A méréseket a gyerekek ötletei alapján végeztük.

Megmértük rőffel és öllel a tanterem szélességét. A gyerekek egymás mögé álltak kinyújtott karral, így a számukból meg lehetett állapítani, hogy körülbelül hány rőf a tanterem szélessége.



8.6.9.ábra

L.M.: *Ez nem igaz, mert az embereknek is van szélességük, és vagy két rőföt kitennének, ha összeállnának*

Gy.P.: *Szerintem 10 és fél.* (Gy.P. becslése reális volt.)

A mérés után L.M. az alábbi megállapítást tette.

L.M.: *Azért sem pontos, mert mindenkinek más a rőffe, és pl. V.N.-nek lefelé kellett tartani a kezét, hogy elérje P.E.-t.*

A terem szélességének ölben való meghatározásánál 5 gyerek feleslegessé vált. Ez is L.M. igazát bizonyította, mivel a mérés alapján azt tapasztaltuk, hogy az öl kétszerese a rőfnek, de ez a valóságnak nem felel meg. Itt az volt a célunk, hogy a mértékegységek és mérőszámok közötti kapcsolatot tapasztalat alapján rögzítsék a gyerekek.



8.6.10.ábra

T: *5 öl volt a tanterem szélessége, hány méter lesz?*

Gyerekek: *Úgy tíz körül. Mások 8-9-re tippelnek.*

A mért értékeket (ölben, méterben és rőfben) felírtuk a táblára, s vizsgáltuk, hogy mire lehet ezekből következtetni.

P.E.: *Arra következtetek, hogy milyen hosszú a terem.*

P.E. keveri a szélességet és a hosszúságot.

J.T.: *Ezt osztással is meg lehet határozni, mivel az öl egyenlő két rőffel.*

Ez a megállapítás a pontatlan mérésnek a következménye volt, de a mért adatok alapján helyesen következett.

T: *Melyiknek legnagyobb a mérőszáma?*

K. Á.: *A rőfnek a legnagyobb a mérőszáma, mert ő a legkisebb.*

J.T.: *Az ölnak a legkisebb a mérőszáma, mert az öl a legnagyobb.*

J.T.: *Ha milliméterben mérnénk le a termet, az olyan 6500 mm lenne.*

A terem hosszúságát is megbecsültük rőfben, méterben, ölben. A gyerekek még nem érzékelték jól a nagyságviszonyokat, mert eleinte csak 1 rőffel mondtak többet, mint amennyi méter. Közösen megállapodtunk a 13-14-ben rőfben.

A mérés eredményeként 13 rőföt kaptunk.

A téglalap kerülete sok mérés és hosszú gyakorlás után vezethető be, most érkezett el ennek az ideje.

T: *Hogyan mérhetnénk meg a terem területét?*

D.D.: *Megmérnénk ott – mutatta a terem egyik oldalát és rámutatott a szemközti oldalra –, mert ott is ugyanannyi, - aztán a szomszédos oldalra mutatott, s mondta, hogy – ott is megmérnénk, mert a szemközti oldal úgyis ugyanannyi.*

T: *Ki tud másik megoldást?*

K.Á.: *Mindenki öllel körbeállna.*

A gyerekek körbeállták a tantermet, karnyújtásnyira egymástól, s megállapították, hogy 19 fő (ennyi tanuló vett részt aznap a foglalkozáson) nem elég a körbekerítéséhez, olyan 22-23 öl lehet a kerület.



8.6.11.ábra

8.6.12.ábra



8.6.13.ábra

8.6.14.ábra



8.6.15.ábra

B.K.: *Meg lehetett volna csinálni úgy, hogy Margó néni lefényképezi a táblánál állókat, majd ők beállnak a hiányzó helyre. És akkor úgy ki lehetett volna rakni.*  
 Megjegyzés: B.K. javaslatát megvalósítottuk a következő alkalommal, s eredményül 23 ötlet kaptunk. Mindig fontosnak tartottuk, hogy a gyerekek ötleteit megvalósítsuk, mert ez további ötletek kidolgozására motiválta őket.

### 8.6.5. A téglalapok alkotása, a téglalap oldalainak megnevezése a különböző állásokban, és kerületük kiszámítása

A téglalap kerületének meghatározásával már korábban is foglalkoztunk, de a mélyebb és alaposabb megértés végett folyamatosan visszatértünk rá. Egyre több és újabb meghatározási módokat kerestünk, hogy a gyerekek a későbbiekben ne csak képletként gondoljanak a kerületre a számításoknál.

A téglalap kerületének meghatározásához sokszor fontos az oldalak megnevezése a mondanivaló kifejtéséhez. A téglalap állásától függően az oldalaknak többféle neve lehet.

#### 8.6.5.1. A különböző állású téglalap oldalainak megnevezése

A beszélgetés célja az volt, hogy a gyerekek minden helyzetben megtalálják a megfelelő szavakat a téglalap oldalainak kifejezésére.

T: *Milyen alakzat ez?* – egy papírlapot mutat.

Gyerekek kórusban: téglalap

T: *Mit értünk ennek a téglalapnak a magasságán?*

J.T. megmutatta azt álló és fekvő helyzetben is.

T: *Egy téglalap oldalait hogyan neveznétek meg?*

J.T.: *Szemközti, szomszédos.*

I.B.: *Hosszúság és szélesség.*

J.T.: *Meg magasság.*

T: *Milyen alakú a terem oldalfala?*

I.B.: *Téglalap*

T: *Hogyan neveznéd ennek a téglalapnak oldalait?*

Gy.P.: *Magasság és mennyiség.*

T: *A padlap oldalait hogyan neveznétek?*

Kórusban mondták, hogy *hosszúsága és szélessége meg magassága is van.*

T.Cs.: *A fekvő téglalapnak – hosszúsága és szélessége, egy állónak – szélessége és magassága, a táblával párhuzamos helyzetű téglalapnak – szélessége és magassága, vagy hosszúsága és magassága van.*

T.Cs. jól összefoglalta a téglalap oldalaira alkalmazott szavak használatát.

#### 8.6.5.2. A következő beszélgetés a téglalapok alkotásáról, kerületük meghatározásáról folyt:

K.Á.: *Lehet variálni a téglalapok formáját.*

T: *Mit értesz formálás alatt?*

K.Á.: *Szét lehet húzni, össze lehet nyomni.*

Mivel itt a szívószálakból készített téglalapokra gondolt, meg kellett jegyezni, hogy az összenyomásnál nem téglalap keletkezik.

L.M.: *A formálást úgy értem, hogy plusz, mínusz, azaz az egyik oldalából elveszek a másikhoz hozzáadok, akkor ugyanolyan lesz a ....* (L.M. itt felhasználta azt a tapasztalatot, amit a négyzethálón való rajzolások során szerzett, hogy ha a téglalap egyik párhuzamos oldalpárja egy-egy négyzetráccsal rövidebb, a másik pedig egy-egy négyzetráccsal hosszabb, akkor a kerülete nem változik.)

**Megjegyzés:** Mivel a téglalap kerületének fogalmát akartuk erősíteni, a korábbi mérésekre, feladatok megoldásaira folyamatosan visszatértünk.

Gy.P.: *Tegyük fel, hogy az egyik oldal 10 m a másik 6 és fél méter, - javasoltuk, hogy gondoljon inkább hatra, mert könnyebben számol – akkor  $6 + 6 = 12$  és  $10 + 10 = 20$ , az 32 méter a kerület.*

T: *Van-e más megoldás?*

J.T.: *Azt akarom mondani, ha van itt két alak, és az egyik oldalból elveszünk és a másik oldalhoz hozzáteszünk, az már nem ugyanaz lesz.*

T: *A téglalap valóban nem ugyanaz lesz, de a kerülete megegyezhet.*

L.M.: *Én úgy számolnám ki, hogy a szemközti oldalakból az egyiket megmérném, a másik szemközti oldalakból is az egyiket megmérném, és akkor azt összeadnám, s mivel tudjuk, hogy a szemközti oldalak általában ugyanannyik, sőt szinte mindig, s ami kijött eredmény ebből és ebből azokat összeadnám.*

T: *Hányféleképpen tudjuk kiszámítani?*

Először közösen körbemutatjuk a tanterem alapjának oldalait és sorba írjuk hozzá a hosszúságokat:  $10\text{ m} + 6\text{ m} + 10\text{ m} + 6\text{ m} = 32\text{ m}$ . Ezt a gyerekek egyéni megoldásai követik:

Gy.P. szerint:  $10\text{ m} + 10\text{ m} + 6\text{ m} + 6\text{ m}$

T.Cs.: *Hogy egyből megmérjük a teljes kerületet.*

B.J.:  $20\text{ m} + 12\text{ m}$

B.K.:  $6\text{ m} + 6\text{ m} + 10\text{ m} + 10\text{ m}$  vagy  $6\text{ m} + 6\text{ m} + 20\text{ m}$ .

T: *Tavaly tanultatok szorozni. Tudnátok-e alkalmazni a szorzást?*

B.J.: *2-szer 10, meg 2-szer 6.*

K.Á.: *2-szer 16 méter.*

B.Á.: *20 m meg 2-szer 6 m*

J.T.: *2-szer 10 méter, meg 12 méter.*

I.B.: *12 méter meg 20 méter.*

A fenti értékek felkerültek a táblára is, így a tanulók eldönthették, hogy számukra melyik a legjobb megoldás, s azt is, hogy melyik a lepraktikusabb. Az osztály a legjobb kiszámítási módnak a B.J. megoldását tartotta.

## **8.6.6. A negyedik ciklus fejlesztését értékelő mérőlapok<sup>11</sup> és az azt követő elemző beszélgetések**

### **8.6.6.1. A kerület meghatározásai és kapcsolata a területtel**

Négyzetrácson adott téglalapok kerületének meghatározásán túl meg kellett adni az általa tartalmazott kiségyzetek számát. Mivel a téglalapok azonos kerületűek voltak, ez lehetőséget adott annak felfedezéséhez, hogy azonos kerületű téglalapoknak nem feltétlen azonos a területe. Ezt a tulajdonságot ebben a formában egyik gyerek sem fogalmazta meg.

A tanulók az alábbiakat válaszolták a „Mit figyeltél meg?” kérdésre:

K.Á.: *Azt, hogy a kerület mindig 22 cm hosszú, 1-esnél 1 sor van a 2-esnél 2 sor van a 3-asnál 3 sor van a 4-esnél 4 sor van 5-ösnél 5 sor van.*

---

<sup>11</sup> Egy gyerek által kitöltött mérőlapot a 16. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 25-26. oldal)

B.J.: Azt, hogy a kerületei ugyanaz mind az öt alakzatnak. Azt még, hogy a kiségyzetei mindig változatos számok. Más az alakzata mind az ötnek.

D.B.: mindegyik egy sorral nagyobb és ahogy nagyobbodik egyre kisebb az oldala.

D.B. itt azt akarta mondani, hogy minden következő alakzatnak az egyik oldalát egy egységgel növelte és a szomszédost pedig egy egységgel csökkentette.

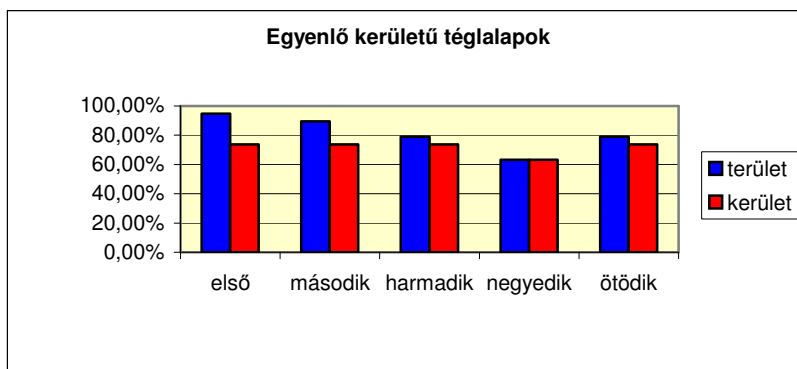
Gy.P.: Azt, hogy a szomszédos oldalak száma csak a négyzeteknél ugyanaz a téglalapoknál nem.

T.S.: Azt, hogy mindegyiknek a kerülete 26 cm.

T.S. még mindig a külső határoló négyzeteket számlálja, amibe beleérti a csúcsnál levőket is.

T.Cs.: Azt, hogy mindegyik alakzatnak ugyanannyi a kerülete. Ha tömörítjük az alakját, akkor nő a benső terület.

A megoldás érékelését a következő grafikon szemlélteti:



8.6.16. ábra

**Megjegyzés:** A területet meghatározása azért tűnik eredményesebbnek, mert könnyebb a belső négyzeteket megszámlálni, mint a határoló szakaszokat, s ha négyzetrácson adjuk meg a téglalapokat, akkor többen inkább számlálással oldják meg a feladatot, mint méréssel. A sima lapokon azonban még csak a kerületet tudják megadni, de azt eredményesebben, mert a vonalzó kezelése elég jó szintű.

#### 8.6.6.2. A becslés és a térbeliséget kifejező szavak ismereti szintjét ellenőrző mérőlap<sup>12</sup>

Mivel a továbbiakban is foglalkozni kívántunk a térbeliséget kifejező szavakkal, becsléseket pedig folyamatosan végeztünk, ezek ismereti szintjét is folyamatosan ellenőrizni kellett. A két dolog ismereti szintjének vizsgálatát egy feladatban kapcsoltuk össze.

A vastagságok becslésénél a tankönyv és pad vastagságát a gyerekek több mint 70 %-a reálisan becsülte, egyedül a fal vastagsága nem volt egyértelmű számukra.

<sup>12</sup> A mérőlap egy gyerek által megoldott feladatait a 17. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 27. oldal)

Mivel a fal vastagságának becslésénél nem szerepelt az, hogy melyik falról van szó, szóban egészítettük ki az utasítást. A tanulók megjegyzései azt mutatták, hogy sokuknak volt ismerete a különböző faltípusokról. Hiába tisztáztuk azonban, hogy melyik fal vastagságáról (főfal) van szó, a megoldásaikban sokkal nagyobb hangsúlyt kapott a hétköznapi ismeretük, amit korábban otthon tapasztalhattak, hallottak, mint a valóságnak megfelelő érték. Kevesen adtak reális becslést, a tanulók nagy része vagy túl, vagy alábecsülte annak vastagságát.

A beszélgetésekből egyértelműen kiderült, hogy sokszor hallották azt a kifejezést, hogy vékonyak a falak, minden áthallik. Ezért az adott fal szélességére a gyerekek mindössze 33 %-a adott reális becslést, a többiek 10 cm-re, vagy annál is kevesebbre tippeltek.

A füzet lapjának vastagságánál, egy tanuló kivételével mindenki a legkisebb tanult mértékegységgel válaszolt, 61 % egy milliméternél kisebbre, a többiek 1 milliméterre becsülték, ennél pontosabb megoldásra ezen a szinten nem is számítottunk.

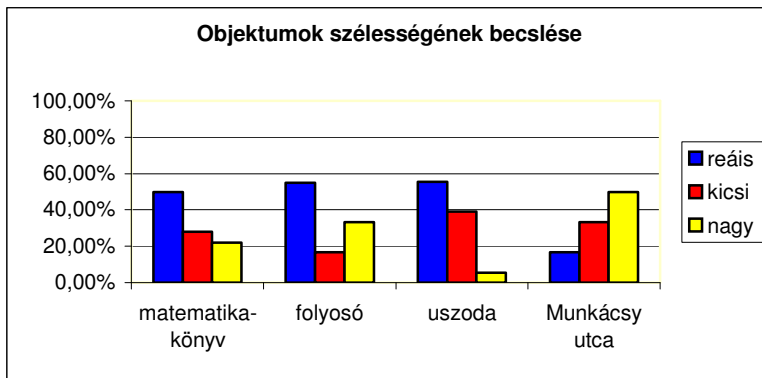
Gondjaik voltak a saját, a pad és a Víztorony magasságának megállapításával is. A gyerekek nem ismerték saját magasságukat sem, ennek egyenes következménye a többi magasság túl- vagy alábecslése. A pad magassága és vastagsága mindig gondot jelentett számukra, ezt a két térbeliséget kifejező mennyiséget néhányan még keverték. Ez a hiba a két szó hétköznapi használatából eredt. Korábban a cipőtalpra alkalmaztuk a vastag és a magas szavakat.

A tanterem magasságáról már többször beszéltünk, sokszor viszonyítottunk nagyobb magasságokhoz, erre a tanulók 78 %-a adott jó becslést, és senki nem adott irreálisan nagyot vagy kicsit.

Az iskola és a Víztorony magasságánál nem voltak ennyire sikeresek a gyerekek, pedig korábban ezek magasságát már megbecsültük. Megbeszéltük, hogy milyen viszonyításokat használhatunk ehhez. A tanulók mindössze 44 %-a adott reális becslést ezekre.

Néhány gyereknél előfordult még, hogy a keverte a mértékegységeket, bár a beszélgetések során kiderült, hogy nem a mértékegységekkel volt igazán gondjuk, hanem azok rövidítésével.

A szélességek becslésénél abból adódtak problémák, rossz megoldások, hogy néhány gyerek egyes dolgoknál keverte a szélesség és a hosszúság szavakat.



8.6.17.ábra

A keskeny szót a gyerekek egy része a kísérleti kutatás előtt nem ismerte, nem tudták egészen pontosan, hogy mit jelent. Néhányan jelezték, hogy ők még sohasem használták. A térbeliséget kifejező szavak alkalmazása során megfigyelhettük, hogy egyes melléknevek használata egészen jó, mások alkalmazása terén hiányosságok mutatkoznak.

Az ellenőrzés során a keskeny szó használatára a gyerekek 78 %-a írt hosszúságjellegű kifejezést.

A vékony szót valamely dimenzióra a gyerekek mindössze 33 %-a alkalmazta. Leginkább a sovány szó szinonimájaként vagy a kis körméretű tárgyakra használták. Pl. vékony gyerek, vékony cérna, fa, stb.

Két gyerek megoldása a keskeny és vékony szavakra:

K.Á.: Keskeny: folyosó, sikátor, ajtó, utca, cső, szoba, pohár, cipő, szekrény, szellőző.

Vékony: lány, cérna, ceruza, hajszál, búzaszalma, gyertya.

L.M.: Keskeny: út, autó gumija, járda, sikátor, valaminek a szélessége.

Vékony: ruha, damil, rés, haj, lap, üveg.

**Megjegyzés:** K.Á. megoldásában a hétköznapi kifejezések a dominánsabbak, L.M. már jobban érzékeli a vékony szó használatát a hosszúságra vonatkoztatva.

## 8.7. A KÍSÉRLET ÖTÖDIK CIKLUSÁNAK BEMUTATÁSA

Ezt a ciklust is tudásszint méréssel<sup>13</sup> indítottuk, ellenőriztük az eddigi fejlesztéseken elsajátított ismereteket. Kíváncsiak voltunk, hogy tudnak-e a mondatokhoz hosszúságjellegű szavakat, kifejezéseket találni. Ez most is szükséges volt a további munkánk tervezéséhez.

Ebben a ciklusban az alábbiakra helyeztük a hangsúlyt:

- a becslési készség folyamatos alakítására, fejlesztésére. Ebben a ciklusban elsősorban a magasságok becslését helyeztük előtérbe;

<sup>13</sup> Egy gyerek által kitöltött mérőlapot a 18. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 28. oldal)

- a térbeliséget kifejező szavak használatára a matematikában, más tudományokban és a mindennapi életben;
- a négyzet és a téglalap területének meghatározására.

## 8.7.1. Az eddigi fejlesztés eredményességének mérése

### 8.7.1.1. A térbeliséget kifejező szavak használati szintje a hétköznapi életben.

Adott nyitott mondatokat a szövegösszefüggés alapján kellett a térbeliséget kifejező szavakkal kiegészíteni.

A feladat megoldásának értékelését a következő grafikon mutatja:



8.7.1.ábra

A tanulók többsége elég járatos a különböző hosszúságjellegű melléknevek matematikai értelmű használatában. A melléknévpárok közül általában a nagyobb tárgyat, objektumot, személyt kifejező jelzőket használják gyakrabban. A keskeny szóval kevesen dolgoztak, nem nagyon használták. Az alacsony és a rövid szó helyett a gyerekek a kicsi szót alkalmazták. A sekély szóval szintén viszonylag kevés gyerek dolgozott. Az alacsony, sekély, keskeny szavaknak a megfelelő párját alkalmazták tagadó formában. (nem magas, nem mély, nem széles)

### 8.7.1.2. Adott szöveg átfogalmazása

Adott mondatok átfogalmazása térbeliséget kifejező szavakkal elég nagy problémát jelentett a gyerekek nagy részének.

„Debrecentől Miskolcig hosszabb idő alatt tesszük meg az utat, mint Nyíregyházáig.”

Ennek átfogalmazását a gyerekek mindössze 40 %-a végezte el, de csak 20 % gondolkodott az adott mondatban.

Néhány megoldás:

- B.Á.: *Mert Nyíregyháza közelebb van Debrecenhez, mint Miskolc.*
- B.J.: *Debrecentől Nagycseréig ugyanannyi utat teszünk meg, mint Nyíregyházáig.*

- K.F.: *Nagyon hosszú idő alatt érünk Nyíregyházára, de rövidebb az út Miskolcig.*
- M.B.: *Debrecenről Miskolcig hosszú idő alatt tesszük meg az utat, mint Nyíregyházáig.*
- Sz.G.: *ugyanannyi az út oda.*

„A francia ágy nem fér be az ajtón.”

Erre a tanulók 45 %-a adott helyes megoldást.

- Gy.P.: *A franciaágy nem fér be az ajtón, mert nagy, széles.*
- K.F.: *A franciaágy nagyon vastag és nem fér be az ajtón, viszont a fotel vékonyabb és befért.*
- L.M.: *Mert az ajtó keskeny, az ágy meg széles.*
- T.S.: *A franciaágy azért nem fér be az ajtón, mert nagyon terebélyes.*

„Kata és Zsuzsa folyton beszélgetnek egymással az órán.”

Ennek a mondatnak az átfogalmazásánál már a közvetlen tapasztalataikat alkalmazták. A tanulók többsége érzelmileg reagált a mondatra.

- B.K.: *Kati és Zsuzsi az órán mindig arról beszélgetnek, hogy ki hány cm.*
- F.R.: *Katát és Zsuzsát szét kellene ültetni.*
- M.B.: *Kata és Zsuzsa közel beszélgetnek egymással az órán.*
- V.N.: *Kata és Zsuzsa folyton beszélgetnek egymással az órán, mert közel ülnek.*

A mérőlap feladatainak megoldását a tanulók 80 %-a legalább 50%-ra teljesítette.

### **8.7.2. Magasságok becslése, mérése**

Minden ciklusban újra megbecsülte mindenki a saját magasságát, hiszen folyamatosan nőttek a gyerekek. A becsült és mért értékeket táblázatba rögzítettük. Mindenki összehasonlította becslését, a mért értékkel.

A tárgyak magasságának becslésében hibáztak a legtöbbet, ezért főleg ilyen irányú becsléseket, méréseket végeztünk. Többnyire önállóan mértek, meghatározták a pad felső lapjának és az ülő lapjának távolságát a padlótól.

A mérőlapok kitöltésénél sokszor a vastagságot gondolták magasságnak, pl. a padlap magasságának becslésénél. A hiba elkerülése végett vastagságokat is becsültünk, mértünk. Folyamatosan becsültünk nagyobb objektumokat, amelyek méreteinek meghatározásához támpontokat kerestünk. Az iskola magasságára következtetni tudtunk a tanterem, a Víztorony magasságára pedig a mellette álló tízemeletes házak magasságából.

Végül olyan szinten kialakult bennük a bizonyítási igény, hogy a teremben való becslések végzése után valamelyik gyerek kérés nélkül elővette a méterrudat vagy a mérőszalagot, hogy ellenőrizze az általa adott mennyiségek helyességét.

Folyamatosan oldottunk meg olyan feladatokat, ahol az asztal, a pad és különféle dobozok szalaggal való körbe díszítéséhez szükséges anyagmennyiség meghatározása volt a feladat. Ezekkel folyamatosan felszínen tartottuk, fejlesztettük a kerület fogalmát.

Adott kerületű háromszögek alkotásánál már egyre többen készítettek egyenlő szárú háromszöget abban az esetben is, amikor a szám osztható volt hárommal. A tanulók harmada már olyan háromszöget is megadott, amelynek minden oldala különböző. A párok 40 %-a adott meg olyan háromszögeket, amelyekből nem lehet azokat megalkotni.

### 8.7.3. A térbeliséget kifejező szavak használata

A hosszúságjellegű szavakat, kifejezéseket alkalmaztuk már első osztályban, amikor az ajtó szélességét, magasságát kellett meghatározni. Ezek alakulását folyamatosan nyomon követtük, a hibákat javítottuk, de alaposabb elemzésre és fejlettebb nyelvi szintre volt szükség ezek kiküszöböléséhez.

Az egyes melléknévpárok használatáról, különböző értelmezéseiről külön-külön foglalkozásokat tartottunk. Minden tanuló kapott egy előre megírt mondatot, ezt kellett értelmeznie.

A melléknévek alkalmazását összekapcsoltuk a becsléssel és méréssel is, hogy biztosítsuk annak folyamatos gyakorlását.

#### 8.7.3.1. A széles szó használata a gyerekek ismeretében

Először mindig összegyűjtöttük a gyerekek ismereteit, amelyeket már korábban tanultak, vagy amit az adott témában már készen hoztak az iskolába.

T: *Milyen tárgyaknál használjuk a széles szót?*

B.Á.: *Széles a szekrény.*

Gy.P.: *Széles az út.*

K. Á.: *Széles a tábla.*

A tábla szélességét közben T.Cs. meg is mutatta – helyesen.

T: *Mennyi az uszoda szélessége?*

L.M.: *Én úgy gondolom, hogy 15 méter lehet.*

T: *Ki gondol 15 méternél kevesebbre?*

J.T.: *200 deciméter.*

Ezen derült az osztály, melyre J.T. válaszolt, hogy „az 20 méter”.

Senki nem vállalta, hogy kevesebb, mint 15 méter, holott sokan 6-9 méterre becsülték korábban.

T: *Hogyan gondolkodott az a tanuló, aki nagyon kevésre becsülte?*

T.Cs.: *Itt van a fal és itt van az uszoda (ezeket megmutatta a tantermet véve alapul) és ők csak a medencére gondoltak.*

T: *Mennyi lehet a Munkácsy utca szélessége?*

T.Cs.: *Az utca szélessége kerítéstől kerítésig tart úgy 20 méter lehet.*

L.M.: *Szerintem még több.*

T: *Mennyi egy kocsi szélessége?*

T.Cs.: *2 méter*

J.T.: *2 és 3 méter, 2 és fél méter.*

T: *Hány kocsi fér el egymás mellett az úton?*

Gy.P.: *Kettő.*

B.K. és K. Á. az előző foglalkozáson megmérték a Munkácsy utca szélességét, s beszámoltak a tapasztalataikról.

B.K.: *Először is megbecsültük Ágival, hogy mennyi a járda szélessége, és ha jól tudom több volt, mint két méter.*

K.Á.: *Majdnem három.*

B.K.: *Amikor ezt lemértük, mentünk tovább a parkírozó széléig. Majd megmértük az úttestet, aztán az úttest másik oldalán a füves részt és a járdát.*

K.Á.: *Összeadtuk a számokat, 18 méter az iskola kapujától a szemközti ház kapujáig.*

T: *Milyen széles a folyosó?*

Gy.P.: *2 méter*

T.Cs. és Gy.P. már mentek is megmérni azt, 2 méter 40 cm lett a mérésük eredménye.

Megjegyzés: A beszélgetés alapján megállapíthatjuk, hogy a széles szó használatánál nincs probléma, helyesen értelmezik azt a gyerekek.

### **8.7.3.2. A közel és távol szavak használata a gyerekek ismeretében**

T: *Mikor használjuk a közel szót?*

J.T.: *Hú de közel van!*

T: *Meg tudnátok-e fogalmazni, hogy mit jelent az, hogy közel?*

J.T.: *Nincs olyan messze tőlünk.*

K.F.: *Akkor van közel, ha nem kell kimenni sehova, hanem itt van valahol körülöttünk.*

T.S.: *Itt van a Víztorony, de ha nagyon messze megyünk tőle, akkor távol van. Ha közel megyünk hozzá, egy az, hogy magasabbnak látjuk, másrészt közel vagyunk hozzá.*

**Megjegyzés:** Szerettük volna elérni, hogy a gyerekek észrevegyék a különbséget a közel és távol szavak és az eddig használt térbeliséget kifejező szavak használata között. A közel és távol szavakat csak két tárgy, objektum viszonyában, azok közötti távolság meghatározásánál alkalmazzuk. Ez tulajdonképpen két pont függvénye. Erre utalt Freudenthal is a Didaktikai fenomenológiák című munkájában.

### **8.7.3.3. A mély és sekély szavak használata a gyerekek ismeretében**

A korábbi beszélgetések során azt tapasztaltuk, hogy a tanulóknak nehézségeik vannak ezeknek a szavaknak az alkalmazásánál.

A mély és sekély szavakkal írt mondatok értelmezésénél a gyerekek érdeklődve olvasták azokat, egymással konzultáltak jelentésükről. Bár mindenkié más volt, de volt, aki az egyiket, volt aki a másikat tudta jobban értelmezni.

Gy.P. értelmezi a „mély tudás”-t: *Szerintem azt jelenti, hogy valaki nem elég logikusan gondolkodik.*

A gyerek logikája a hibás megoldás ellenére is jól működött, mert ő a magas műveltséggel vetette össze, amiről már hallott. Ennek jelentését ismerte, s az ellentettjére gondolt, mivel a mély ellentettje a magasnak.

I.B.: *Szerintem pont az ellenkezője.*

B.K.: *Sok tudás.*

P.E.: *„A ház az erdő mélyén van”. Én ezt úgy tudnám megfogalmazni, hogy benn van a közepén.*

A gyerekek megállapították, hogy ebben az esetben nem lefelé, hanem hosszan befelé kell menni.

B.J.: *„Mélyen néz valakinek a szemébe.” A mondat értelmét L.M. fejti meg.*

L.M.: *Szemez vele. Szemkontaktus.*

B.Á.: *Erősen belenéz valakinek a szemébe.*

K.Á.: „A földnyelv mélyen belenyúlik a tengerbe”. *A Föld bemegy a tenger alá. Ahogy nyúlik befelé a homok, a víz ellepi.*

Többen tiltakoztak, hogy akkor a sok félsziget sem lenne, mert ezek is benyúlnak a tengerbe.

M.B. A „mély csendet” értelmezi. *Ő nagy csendre fordítja.*

T.Cs.: *Síri csend.*

K.F.: „Mély bölcsességet” értelmezi. *Nagyon bölcs.*

A mély hangot bemutatással érzékeltették.

I.B. „,mélyen nyúl a zsebébe”. *Ez azt jelenti, hogy az erszényébe.*

J.T.: *Nagyon lenyomja a kezét.*

B.Á.: *Sokat költ.*

T.Cs. A „sekély vizet” értelmezi, azt jelenti, hogy *nem mély* a víz.

K.F. A „mélyen meghajol” kifejezést bemutatással értelmezi, - nagyon mélyen lehajol.

Majdnem hibátlanul döntöttek a gyerekek abban a kérdésben, hogy a náluk levő mondat melyike fejez ki hosszúságot, egyedül a mély sebet nem sorolták a térbeliséget kifejező dolgok közé.

T: *Az alacsony és magas szavak milyen kapcsolatban vannak a mélyvel és a sekéllyel?*

L.M.: *Ami a föld szintjétől van, ami a szárazföldön rajta van, azt úgy mérjük, hogy kicsi, magas, vékony stb. Ami a föld szintje alatt van, ami gödörszerű, azt már mélynek mondjuk.*

#### **8.7.3.4. Az alacsony és magas szavakat tartalmazó mondatok értelmezése**

A tanulók sok olyan helyzetet tudtak sorolni, ahol az alacsony és magas szavak hosszúságot fejeznek ki.

T: *Az alacsony és a magas szavakkal olyan dolgokat mondjatok, amit nem tudunk cm-rel megmérni.*

Alacsonyan van a Nap. Alacsonyan van a felhő. Alacsonyan szálló gém. Alacsonyan száll a füst. Alacsony tudás. Alacsony hőmérséklet. Alacsony hang. Magas hang. Magas páratartalom. Magasfeszültség. Alacsonyfeszültség. Magas légnyomás. Alacsony légnyomás.

**Megjegyzés:** Bár ezek között van olyan, amit hosszúsággal mérhető, de a gyerekek az általuk ténylegesen kivitelezhető mérésre gondoltak.

J.T.: *A magas vízállás azt jelenti, hogy sok meleg vizet fogyasztott.*

T: *Az magas vízfogyasztás.*

I.B.: *Az, hogy nagyon magas a víz a tóban.*

T: *A tónál ritkán szoktak magas vízállásról beszélni. Hol alkalmazzák?*

I.B.: *A folyónál?*

L.M.: *Az a folyó ki tud áradni, amelynél magas a vízállás.*

Gy.P.: *Alacsony eszmények azt jelenti, hogy valaki még addig a tudásig sem jutott el.*

B.J.: *Magas ár azt jelenti, hogy valami egy kicsit drága.*

P.E.: *Alacsony származású szerintem azt jelenti, hogy nem olyan nemes.*

L.M.: *Magas kor azt jelenti, hogy nagy kor, 90 éves.*

L.L.: *Magas magánhangzó az „á”. (L.L.-nek nemcsak a matematikában vannak problémái, de ő is sokat fejlődött a fejlesztés során.)*

V.N.: *Magas építés, aki magas házakat épít.*

T: *Mi lehet a mélyépítés?*

I.B.: *Alagutakat épít, mert vagy a földön csinálják vagy a föld alatt.*

F.R.: *Magas láz azt jelenti, hogy valaki nagyon beteg.*

T.S.: *A magasugrás szerintem azt jelenti, hogy fölmegy valahova, s onnan leugrik.*

Az osztály tiltakozik. És testnevelési órán? Ekkor T.S. meglepődött, hogy ő erre nem is gondolt.

**Megjegyzés:** A mondatok értelmezésénél a gyerekek egy része elég jó tájékozottságot mutatott, de sokan voltak, akik nem tudták önállóan értelmezni a leírtakat.

#### **8.7.3.5. A hosszú és a rövid szavakkal adott kifejezések, mondatok értelmezése**

T.S. értelmezi a „röviden szólva” kifejezést, szerinte *röviden elmond valamit. Kevés szóval elmond valamit.*

T.Cs.: A hosszú legényt, átfordítja *magas legényre.*

V.N.: A hosszúra nyúlt előadást értelmezi. *Több ideig tartott a kellesténél.*

D.B.: *Hosszú utazás, sokáig tartó utazás.*

T.S.: *Valahova mennek, s az is hosszú út, amíg odaér.*

**Megjegyzés:** D.B. időben, T.S. térben gondolkodott.

B.Á.: *Rövid magánhangzó, mint az a.*

J.T.: *Rövidáru az lehet, amely nagyon hamar elromlik.*

**Megjegyzés:** A gyerekek válaszaiból jól tükröződik, hogy néhány gyerek kiváló logikával rendelkezik. A tanulók nagy része a rövid szót az időméréshez kapcsolja. Ebben a ciklusban foglalkoztunk a négyzet és téglalap kerületének meghatározásával, s ezek többfajta lejegyzésével is.

#### **8.7.4. A ciklusban elsajátított ismeretek szintjét értékelő mérőlapok**

Két-két mérőlapot töltöttek ki a gyerekek, márciusban és májusban. A márciusi utolsó mérőlap és a májusi mérőlapok között már nem volt újabb gyakorlás, így májusban az ismeretek tartósságát is ellenőriztük.

##### **8.7.4.1. A 2006. március 6-i mérőlap<sup>14</sup> megoldásának értékelése**

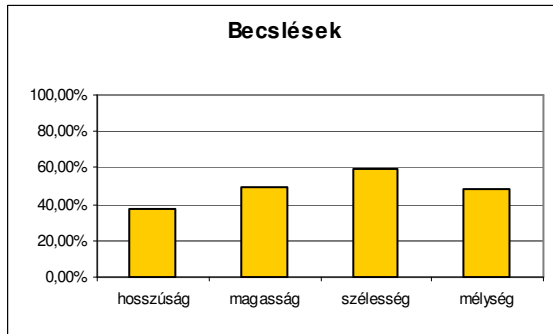
Az első feladat a tanulók becslési szintjét ellenőrizte.

- ceruza, matematikafüzet, Munkácsy utca, Víztorony utca hosszúságának becslése;*
- Kati néni, Marika néni, szekrény, nagy tornaterem magasságának becslése;*
- matematika tankönyv, egyenes vonalzó, ajtó, szalag szélességének becslése;*
- doboz, szekrény, a Balaton, a Tisza folyó mélységének becslése.*

A térbeliséget jelölő szavakkal megadott hosszúságjellegű mennyiségek becslésének szintjét az alábbi grafikon szemlélteti:

---

<sup>14</sup> Egy gyerek által kitöltött mérőlapot a 19. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 29. és 30. oldal)



8.7.2.ábra

A közvetlen környezetükben levő tárgyak hosszúságára a gyerekek 50 %-a adott reális becslést. Az eredményt negatívan befolyásolta, hogy még mindig nem tudtak nagyobb hosszúságokat becsülni.

A szekrény magasságára a gyerekek 70 %-a jó megoldást adott, de a tanárnők magasságát az osztály fele túlbecsülte, sokkal nagyobbak látják őket a valóságos méreteiknél. A szélesség és a mélység beclése megfelelt a várakozásnak.

Megjegyzés: A mélységeknél beszéltünk korábban az átlagmélységről, amit a korábban becsült és megvitatott hosszúságokhoz és magasságokhoz képest sokkal jobban vissza tudtak adni.

Az alacsony szóval mindenkinek sikerült olyan kifejezést alkotni, amely hosszúságot fejez ki, 15 % írt más értelmezést is. A rövid szót a gyerekek többsége eleinte csak az időméréshez kapcsolta, de a beszélgetések eredményeként ezen a mérőlapon a tanulók 80 %-a írt olyan mondatot, amely a hosszúságra vonatkozott.

A rövid és alacsony szavak használata három tanuló megoldásában:

- B.Á.: Nagyon rövid ez a szoknya.  
Rövid idő múlva találkozunk.  
Peti a legalacsonyabb az osztályban  
Alacsony feszültségű villanyvezeték
- J.T.: Rövid papír. Rövid levél. Rövid vezeték. Rövid függöny.  
Rövid fény.  
Alacsony I.B.. Alacsony fa, szám, ház. Alacsonyan szálló repülő.
- B.K.: Alacsony P.E.. Alacsony ember. Alacsonyan van a vetítő.  
Alacsony IQ.

Sima lapon adott, vonalzóval meghatározható téglalapok kerületének meghatározása:

1

2

3

	hosszúság	szélesség	kerület
1. téglalap			
2. téglalap			
3. téglalap			

A három téglalap kerületének meghatározásánál a tanulók fele 90 % vagy a fölött teljesített, mindössze egy gyerek teljesített 50 % alatt. A megoldást is egyre többen indokolták, bátrabban közölték az észrevételeiket. Jó eredménynek tartottuk, hogy már csak egyetlen tanuló nem írt semmiféle indoklást. Ezt előrelépésnek tartottuk a szövegértés és önmaguk kifejezése terén.

Az osztály 25 %-a kijavította a táblázatban a 3. téglalap elnevezését, hogy az nem téglalap, hanem négyzet (valóban négyzet volt).

**Megjegyzés:** Az mindenképpen elgondolkodtató, hogy azoknál a harmadikos gyerekeknél, akikkel folyamatosan érzékeltettük a két síkidom kapcsolatát, több, mint negyede bizonyítottan nemcsak nem érezte az alá-fölérendelt viszonyt a két fogalom között, hanem még vitába is szállt az „igazáért”.

P.E.: Vonalzóval mértem meg a kerületet.

(A hármast bekarikázta és megjegyezte) „Szerintem tévedés történt itt.”

Azt vettem észre, hogy a 3. egy négyzet és két téglalap van.

Négy tanulónak okozott gondot, hogy a táblázatban már csak két adatnak volt helye. Ők ezek összegeként határozták meg a kerületet.

#### 8.7.4.2. A 2006. március 27-i mérőlap<sup>15</sup> értékelése

A deciméter, véka, kilométer, öl, kilogramm, milliméter, deciliter, perc, méter, dekagramm, hektoliter, centiméter, rőf, tonna, arasz mértékegységek között a tanulók 70 %-a teljesen hibátlanul megtalálta mind a 8 hosszúságegységet. Mindössze három tanuló sorolt más mértékegységeket a hosszúságegységek közé. (tömeg vagy űr).

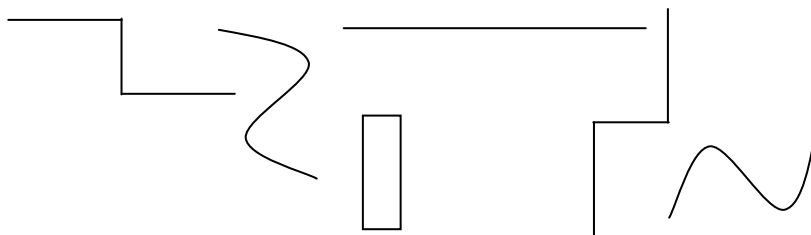
A kiválasztott hosszúság-mértékegységeket a tanulók 50 %-a hibátlanul rendezte növekvő sorrendbe, de ha csak a szabványos mértékegységek rendezését tekintjük, akkor a tanulók 70 %-a sikeresen dolgozott. Probléma az arasz és deciméter, illetve a rőf, a méter és az öl nagyságrendi viszonyában volt.

Az épületek (iskola, nagy tornaterem, tanterem, tízemeletes ház, uszoda) magasságuk szerinti csökkenő sorrendbe rendezése megnyugtató eredményt hozott. Egyetlen tanuló volt, aki növekvő sorrendbe tette az épületeket, és azt helyesen is rendezte.

A gyerekek 50 %-a hibátlanul dolgozott, de az öt dolog közül legalább három kapcsolatában az osztály 80 %-a jól döntött.

**Megjegyzés:** Kialakult a tanulóknál az ezekhez szükséges látásmód. Néha már spontán is megfigyeltek dolgokat, s ezekről beszámoltak a foglalkozásokon.

Az egyenként 8 cm-es vonal hosszát kellett becsléssel meghatározva megadni a tanulóknak.



<sup>15</sup> A mérőlap feladatainak egy megoldását a 20. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 31. és 32. oldal)

A gyerekek többsége (63,4 %) reális becslést adott a hosszúságokra, s a tanulók 55 %-a az egybevágóságot is felismerte. Voltak, akik csak az egyik vonalpárnál vették észre az elforgatást. A gyerekek 25 %-a becsülte azonosra, 10 cm-re mind a hat vonaldarabot.

Nem kértünk szöveges indoklást, ezért figyelemre méltó volt, hogy néhányan írásban is megfogalmazták az észrevételeiket.

- B.K.: Ezeknek a vonalaknak párjuk van és mindnek ugyanannyi a hosszuk.
- I.B.: A hullámvonalnak és a bal alsó sarokban levő izének van párja.
- J.T.: Margó néni szerint is, ha megfordítjuk az ábrákat ugyanannyi a hosszuk?
- T.S.: Ha úgy vesszük, mindegyiknek van párja, kivétel a vízszintes vonal és a téglalap.

**Megjegyzés:** A gyerekek tudása ebben a témában elég jó szintűnek mondható, de kíváncsiak voltunk, hogy az idő múlásával változik-e ismereteik szintje, felejtenek-e? Ezért két hónap múlva újabb mérőlap kitöltésével ellenőriztük tudásukat ezen a területen. A feladatok stílusa ugyanaz maradt, csak a szövegkörnyezeten változtattunk kicsit.

#### 8.7.4.3. A 2006. május 15-i felmérés értékelése

A mérőlap<sup>16</sup> első feladata: *mondatok kiegészítése a rövid, hosszú, széles, keskeny, közel, távol, messze, magas, alacsony, mély, sekély, vékony, vastag szavakkal.*

*A gödör nagyon ....., nem tudok kimászni belőle.*

*Ez a járda elég ....., nem férünk el hárman egymás mellett.*

*Nem lehet a ..... jégen korcsolyázni.*

*A Nagytemplom .....van az iskolától.*

*Ez a zsinór túlságosan ..... lett, le kell belőle vágni.*

Ezzel a térbeliséget kifejező szavak alkalmazásának szintjét ellenőriztük. A megoldás értékelését a következő grafikon mutatja.



8.7.3.ábra

A mondatok kiegészítésében a tanulók 89 %-a legalább négy jó megoldást adott.

A második feladatban a sekély és mély szavakkal egy tanuló kivételével mindenki írt legalább egy jó mondatot.

<sup>16</sup> Az egyik gyerek által kitöltött mérőlapot a 21. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 33. oldal)

A tanulók 56 %-ának a sekélyhez a víz, 67 %-ának a mélyhez pedig a gödör kapcsolódik. A tanulók harmada írta a mély tudást, és 39 %-a a mély gondolkodást. A sekély szóval kevés olyan mondatot írtak a gyerekek, amelyek nem kapcsolódtak a hosszúságméréshez.

Néhány mondat a gyerekek megoldásaiból:

- Nem lehet hajózni a folyó sekélysege miatt.
- Apály idején a tenger vize sekély.
- Az Eiffel torony tetejéről mélyen van a föld.
- A Nagytemplom mélyen van a város belsejében
- Mélyen vannak az alapok.

#### **8.7.4.4. A 2006. május 22-i mérőlap<sup>17</sup> értékelése**

A mérőlapon elsősorban a tanulók becslési készségét kívántuk ellenőrizni, megállapítani annak szintjét.

A tanulók a ciklus folyamán állandóan méricskéltek a teremben, fogadásokat kötöttek bizonyos tárgyak hosszúságára, szélességére, magasságára, vastagságára stb., s ennek alapján bárki azt gondolná, hogy sokat fejlődött a becslési készségük. A valóságban azonban lassabban mennek a dolgok.

*A szekrény magassága, mélysége, szélessége. A folyosó hosszúsága, szélessége, magassága.*

A szekrény különböző méreteit már első osztályos koruktól kezdve többször megmérték. Beszélgettünk az egyes térbeliséget kifejező szavak használatáról a matematikában és a hétköznapi életben. A magasságot és a szélességet elég reálisan becsülték meg a tanulók, a mélységnél azonban már nem érzékelték olyan jól a kiterjedés nagyságát.

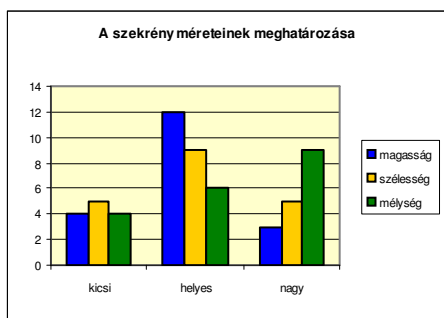
A folyosó szélességét korábban, a negyedik ciklusban megmértük, ennek szélességet becsülték meg pontosabban a tanulók.

A folyosó magasságára a terem magasságából helyesen következtettek. A hosszúság becslésénél azonban nem alkalmazták a korábbi tapasztalatokat, hiszen korábban megmérték a kerítés, az épület hosszát. Erre nagyon kevesen gondoltak, többen csak a tanterem előtti folyosó hosszát vagy csak annak is egy részét (közvetlenül a tanterem előtti részt) becsületék meg.

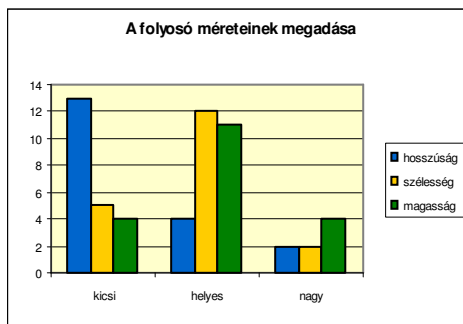
A becslések szintjét a következő grafikonok mutatják:

---

<sup>17</sup> A mérőlap feladatait egy megoldással a 22. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 34. oldal)



8.7.4.ábra



8.7.5.ábra

**Megjegyzés:** A gyerekek nem keverték a különböző térbeliséget kifejező szavakat a fenti két objektum méreteinek becslésénél.

*Hasonlítsd össze a matematikakönyved és a matematikafüzeted méreteit! Használd a szélesebb, keskenyebb, rövidebb, hosszabb, vékonyabb, vastagabb stb. szavakat!*

A tanulóknak lehetőséget adtunk arra, hogy további térbeliséget kifejező szavakat használjanak az összehasonlításnál.

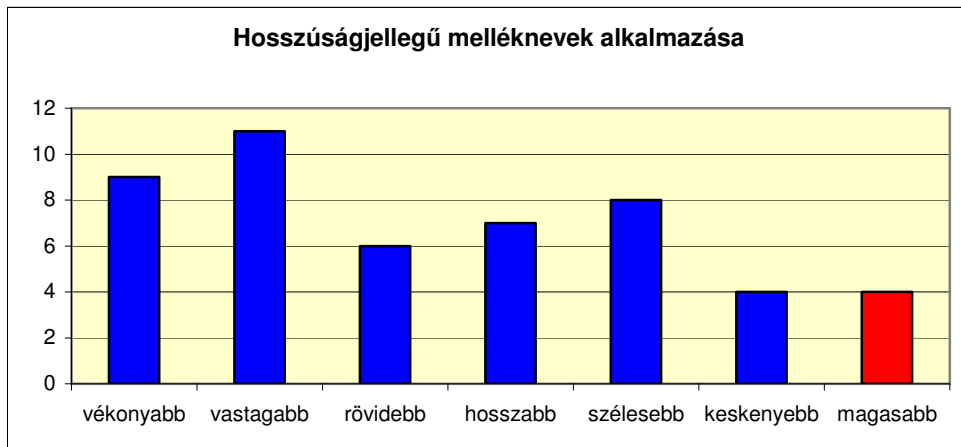
A könyvekre általában a vastag és vékony jelzőket használjuk a mindennapi életben, ezért főleg ezekkel a melléknevekkel írtakat mondatokat, összehasonlításokat a gyerekek is. Az egyik tanuló használta a könyvre a „több lapúbb”, négyen a magasabb kifejezést.

**Megjegyzés:** A magas szót alkalmazzuk a könyv könyvespolcra való elhelyezésénél, pl. ha nem tudjuk „állítva” berakni a polcra a könyvet, akkor a mindennapi életben gyakran mondjuk, hogy „a könyv magas, nem fér be” oda.

A matematikakönyv és -füzet összehasonlítására írt mondatok közül válogattunk néhányat:

- M.B.: *A matematikám 22 cm, a füzetem 20 cm, ezért a matek könyv a szélesebb.* (bár ez a hosszúsága lenne)
- Z.J.: *2 cm-rel magasabb, a füzet vékonyabb.* (Z.J. itt a vastagság helyett használja a magasságot.)
- L.M.: *A matek könyv vastagabb a füzetnél. Hosszabb a könyv, mint a füzet és szélesebb. Tehát a könyv minden szempontból nagyobb, mint a füzet.* (L.M. szeret következtetéseket levonni minden szituációban. Ez a beszélgetéseknél mindig nagyon inspirálta az osztály többi tanulóját is a gondolatai kifejezésére.)
- D.B.: *A matek könyv vastagabb, szélesebb és magasabb.* (D.B. a magasságot a hosszúság helyett alkalmazza. Kifejtette, hogy a könyvszekrénybe sem fér el a könyv, ha túl „magas”.)

Néhányan két mondatba sűrítették az összes megadott közép fokú melléknevet, de a legtöbben egyenként alkalmazták azokat. A tanulók által írt mondatok helyességének értékelését a következő grafikon szemlélteti. A grafikonon pirossal jelöltük azt a térbeliséget kifejező szót, amit a tanulók maguktól írtak.



8.7.6.ábra

## 8.8. A KÍSÉRLET HATODIK CIKLUSÁNAK BEMUTATÁSA

2006. évi őszi foglalkozásokon főleg a korábban tanultak ismétlése, egy-két hiányosság pótlása, valamint a tanult fogalmaknak más tudományággal és a való élettel való kapcsolatának egy más nézőpontból való megvilágítása volt a cél.

A ciklusban az alábbiakra helyeztük a hangsúlyt:

- a különböző térbeliséget kifejező szavak és a hosszúság-mértékegységek más tudományterületen való alkalmazása;
- távolságok, magasságok, hosszúságok, stb. becslése, mérése a valóságban, térképen és kép alapján;
- téglalap és négyzet kerületének meghatározása képlettel;
- mértékegységek kapcsolatának tudatosítása.

### 8.8.1. A mérés kapcsolata más tudományterületekkel

#### 8.8.1.1. Ugrálókötél kiválasztása testnevelésórán

Közösen megállapítottuk, hogy az ugrálókötél hossza nem lehet sem túl kicsi, sem túl nagy.

*T: Hogyan választhatjátok ki testnevelés órán az ugrálókötelet?*

*K.Á.: Hogy majdnem elérje a magasságunkat.*

*L.M.: Megmérjük a testmagasságunkat, s olyan kötelet választunk, ami a fejünk felett kényelmesen elfér, azaz ami kb. így a vállamtól leér a lábamig.*

*P.E. Rá kell lépni.*

*M.B. folytatta a mondatot és aztán a vállig érjen.*

*T.Cs.: 2 méter 50 cm.*

L.M. leszámította a testmagasságából a fejét, s ezt megkétszerezte, s úgy döntött, hogy neki is kb. 2 és fél méteres kötéll kellene a kényelmes ugráláshoz.

**Megjegyzés:** A foglalkozás végén mindenki tudta, hogy hány méteres ugrálókötélre van szüksége a játékhoz.

### **8.8.1.2. Az iskola közelében lévő utcák hosszának meghatározása térkép segítségével**

Már korábban is alkalmaztunk térképet a foglalkozásokon, de most a közvetlen környezetükben kellett térkép alapján tájékozódni és távolságokat meghatározni.

Mindenki kapott egy felnagyított térképet az iskola közvetlen környezetéről. Megállapítottuk, hogy ami a térképen 1 cm, az a valóságban 70 méter.

A Munkácsy utca hosszúsága kb. 9 cm volt a térképen, s könnyedén megállapították, hogy az a valóságban kb. 600 méternek felel meg.

Meglepődtek, mikor megállapították, hogy a Víztorony utca is 9 cm hosszú a térképen, azaz a két utca szinte egyenlő hosszúságú.

Mivel a közelben van a Csillag utca – itt lakik J.T. –, ennek hosszát még lelkesebben mérték. Nagyon inspirálta őket a személyes élmény. Megállapították, hogy az is kb. olyan hosszú, mint a másik kettő.

Az 1 km hosszú keresésénél már mértékváltást is alkalmazni kellett. Ez komoly problémamegoldásnak tűnt számukra. Hosszas vita után eldöntötték, hogy a térképen kb. 14 cm-es hosszúságú utcát kell keresni.

A 300 méter hosszú utca keresésénél már sokkal hamarabb célt értek, becslés alapján a Nap utcára tippeltek. Ez az utca elég görbe, ezért cérnával mértük meg annak hosszát. Bár itt is volt, aki egy centiméteres szakaszokra bontotta azt. Ezzel a görbe vonalak hosszának meghatározási módját is felelevenítettük.

**Megjegyzés:** Érdeklődtek, a többi utca hosszáról. Ezek nem voltak a térképen, így nem tudták megmérni. Kérték, hogy a következő alkalommal olyan térképet vigyek, amelyen mindenkinek rajta van az utcája, ahol lakik, hogy megmérhessék a hosszát. Ezzel lehetőségünk nyílt tanulóira kérésre többféle léptékű térképen tájékozódni.

### **8.8.2. Beszélgetés a kerület meghatározásáról**

Felelevenítettük a korábbi tapasztalatokat, amit a szívószálból, kötélből való alkotások, átdarabolások során szereztek a gyerekek.

J.T.: *A szomszédos oldalaknak derékszögeknek kell lenni.*

T: *Hogyan határoztuk meg a téglalapok és négyzetek kerületét?*

A táblán egy téglalap volt, s egyszerre több gyerek is ír mellé kerület-meghatározásokat.

T.Cs.: *Ezt nem is kell írni, ezt fejben is meg lehet oldani. (Ő egyáltalán nem szeret írni.)*

A felírások után megbeszéltük a megoldásokat, hogy melyik gyerek, hogyan gondolkodott.

Gy.P.: *Az első úgy gondolkodott, hogy összeadta az oldalak hosszát.*

B.Á.: *Gy.P. úgy gondolkodott, hogy összeadta a szomszédos oldalak hosszát és megszorozta kettővel.*

J.T.: *Egy sokszög kerületét megkapjuk, ha lemérjük az oldalakat és összeadjuk. (J.T. általánosította a kerület fogalmát.)*

### 8.8.3. A hatodik és egyben a hat ciklus fejlesztésének értékelése, eredményességének vizsgálata

#### 8.8.3.1. A 2006. decemberi mérőlap<sup>18</sup> megoldásainak értékelése

Az első feladat több részből állt, melynél a megoldás értékelését részenként végeztük, és a végén összegeztük a tapasztalatainkat. Ezt a feladatot minden tanuló megoldotta.

*Milyen magasan van az ablak felső széle?*

Mivel az ablak felső széle majdnem a mennyezetig ér, ezért akik 2,5 és 3,5 méter közötti értéket adtak rá, jónak fogadtuk el – ezt a becslést az osztály 67 %-a jól végezte el. A tanulók 28,6 %-a adott alacsony becslést, s mindössze egy tanuló gondolta, hogy 4 méter magasan van az ablak felső szegélye.

**Megjegyzés:** Véleményünk szerint ez egyértelmű alkalmazásszintű ismeretet takar.

*Milyen széles az ajtó?*

Az ajtó szélességét már többször többféle mértékegységgel, öllel, röffel, méterrel, deciméterrel megmérték, s megállapítottuk, hogy a deciméter a legpontosabb a fentiek közül. A többség 1 méterre becsülte, 1 méternél nagyobb becslést senki nem adott. Egy tanuló 6 cm-re becsülte, valószínűleg a vastagságra gondolt, bár az is lehet, hogy dm-re gondolt.

*Milyen vastag a tanári asztal lapja?*

Erre nem írtak a gyerekek irreális értékeket, senki sem becsülte 1 cm-nél kisebbre és 5 cm-nél nagyobbra. 1,5 cm – 3 cm közötti becsléseket jónak fogadtuk el. Ebbe az intervallumba esett a gyerekek 71,4 %-a. Ez is jól mutatja, hogy a kisebb tárgyak hosszának meghatározását pontosabban meg tudják határozni.

*Milyen távol van az ajtótól az ablak mellett álló szekrény?*

Ezt a feladat újszerű volt, mert eddig olyan becsléseket, méréseket végeztünk, ahol a tárgy a tanterem hosszúságában, szélességében vagy magasságában helyezkedett el, azaz a téglatest valamely élével párhuzamos volt a keresendő távolság. Jelen esetben azonban a téglalap átlójának hosszát kellett megbecsülni. Azokat a megoldásokat fogadtuk el helyesnek, akik többre becsülték, mint a tanterem hosszúsága, de kevesebbre, mint a két különböző oldal hosszának összege, azaz 9 méternél nagyobbra, de 15 méternél kisebbre. Ebbe az intervallumba a tanulók mindössze 24 %-a került. Összesen 2 tanuló gondolta, hogy 17 m –18 m –re lehet. A többiek becslései sokkal kisebbek voltak a valóságosnál.

A szívószálakkal való foglalkozások eredményességét vizsgáltuk három kérdés kapcsán.

Mindhárom kérdésben hangsúlyoztuk, hogy a szívószál hossza 20 cm. Ez részben felesleges adat volt, mivel nem kellett vele foglalkozni, de fontos volt abból a szempontból, hogy ebből mindhárom alakzat elkészíthető. Ez az adat csak egy-két gyereket zavart a megoldásnál.

---

<sup>18</sup> A feladatsort, és annak egy megoldását a 23. számú melléklet tartalmazza. (Mellékletek 35. és 36. oldal)

*Mekkora lehetnek annak a háromszögnek az oldalai, melynek kerülete 19 cm?*

A feladattal a tanulók 85,7 %-a foglalkozott, de csak 52,4 %-uk látott értően a problémához. A tanulók 19 %-a még mindig csak egyenlő oldalú háromszögekben gondolkodott. Ők 6 cm-es és kb. 6,5 cm-es oldalú háromszöget adtak meg. A gyerekek 33,3 %-a írt legalább egy hibátlan megoldást, és 14,3 %-a többet is. Egyetlen gyerek volt, aki olyan háromszög oldalait adta meg, amelyben mindegyik különböző hosszúságú, a többiek legfeljebb egyenlő szárú háromszöget. Senki nem darabolta fel a 19 cm-es kerületet olyan szakaszokra, amelyből nem lehetett háromszöget alkotni.

*Gy.P.: Ebből a szívószálból kb. 6,5 cm-esek az oldalai, ha pontos háromszög legyen.*

**Megjegyzés:** A pontos háromszöget sokan használják az osztályban az egyenlő oldalú háromszög megnevezés helyett. Itt felfedezhetjük azt is, hogy Gy.P. a 20 cm-es hosszúságot sem hagyta figyelmen kívül, mert abból biztosan „kitelik” a 19 és fél cm.

*Mekkora lehetnek annak a téglalapnak az oldalai, melynek kerülete 16 cm?*

A feladat megoldásához a tanulók 90,5 %-a kezdett hozzá és 52,4 %-uk legalább egy jó megoldást írt és 14,3 %-uk többet. A gyerekek 19 %-a a négyzetet is ide sorolta, a 4cm-es oldalú téglalapot. Kettő számolási hibát vétettek és egy tanuló nem foglalkozott a téglalap fogalmával. A megoldásában a 16-ot négy tag összegére bontotta, azaz  $5 + 5 + 4 + 2$ -re.

*Hány cm-es oldalú négyzeteket készíthetünk egy 20 cm-es szívószálból?*

A feladat megoldásához a tanulók 85,7 %-a fogott hozzá. A tanulók 76,2 %-a legalább egy jó megoldást írt, de 19 %-uk az összes lehetséges egész oldalú négyzetet megtalálta. Mivel itt nem adtuk meg, hogy mennyit használhat fel a szívószálból, ezért legtöbb megoldás a 20 cm teljes felhasználásáról szólt.

L.M.: Minden oldala legalább 5 cm, de ha két oldala rövidebb a maradék két oldala annival hosszabb, amennyivel rövidebbek az oldalak. (Ez a válasz jól mutatja, hogy L.M. megfordította a tartalmazási viszonyt, az ő véleménye szerint minden téglalap négyzet.)

*Egy tárgyhoz mértékegység választása, amellyel a legjobban kifejezhetik annak méretét.*

Egy tárgy méréséhez több mértékegységet is fel lehetett sorolni.

Néhányan ezt összekapcsolták a becsléssel. Nemcsak a mértékegységet adták meg, hanem ezt egy konkrét adathoz kötötték. Ez különösen a testmagasság meghatározásához választott mértékegységeknél látszott. Valószínűleg ez azért volt, mert ilyen típusú feladat eddig még nem fordult elő a mérőlapokban.

Az *úszómedence szélességének* méréséhez használt mértékegységhez egy tanuló kivételével (aki a decimétert tartja a legmegfelelőbbnek) mindenki a métert írta. Három tanuló a méter mellé más mértékegységet is írt, ezzel arra utalva, hogy a pontosabb méréshez kisebb mértékegységeket is kell használnunk.

A *szekrény mélységénél* már nem voltak ilyen biztosak a gyerekek az ismereteikben, többen nem emlékeztek a pontos hosszra (62 cm), mert 10 tanuló is megjelölte a métert, bár ez azért nem mondható teljesen rossznak, mert közülük néhányan használják a tizedes törteket a műveletek eredményeinek leírásánál, s gondolhattak arra is, hogy az fél méter mély. Egyetlen tanuló volt, aki nem hosszúságegységet írt. Mivel a mélység szót

elsősorban a vizek mélységénél használtuk, azért fordulhatott elő, hogy az egyik gyerek litert használt itt mértékegységként.

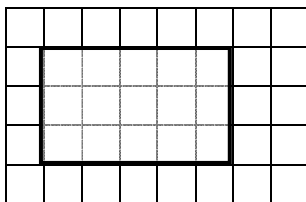
Az M3-as autópálya hosszúságának megadásához egy tanuló kivételével mindenki írt mértékegységet. 11 tanuló szerint kilométerrel, 2 tanuló szerint mérfölddel és 4 tanuló szerint mindkettővel mérhető. Mivel nem adtuk meg azt, hogy hol található az M3-as autópálya 17 tanuló választát helyesnek tekinthetjük. Két tanuló méterben mérné azt.

A *testmagassághoz* használható mértékegységeknél már sokkal gyakorlatiasabban gondolkodtak a gyerekek, 13-an a métert és centimétert jelölték meg. Mivel a hétköznapi életben nem azt szoktuk mondani, hogy 160 centiméter vagyok, hanem 1 méter 60. A hatvan után még a mértékegységeket sem szoktuk említeni, mert mindenki tudja, hogy ez cm-t jelent. A gyerekek mindenhova írtak mértékegységet. 7-en gondolták azt, hogy centiméterben határozzák meg a magasságukat, egy tanuló a decimétert és egy tanuló a millimétert is használta.

A *vonalzó vastagságát* 15 tanuló milliméterben kívánja meghatározni, 4-en centiméterben. A centimétert választók közül ketten a vonalzó szélességét adták meg a vastagság helyett, ezt a megadott mérőszám bizonyítja.

A *tanári asztal szélességnek* meghatározásánál néhány tanuló a hosszúságára gondolt. 19-en méterben határoznák meg, néhányan olyan mértékegységet írtak még a méteren kívül, amellyel ki tudjuk fejezni az asztal hosszúságát.

*Adott téglalap területének meghatározása többféleképpen*

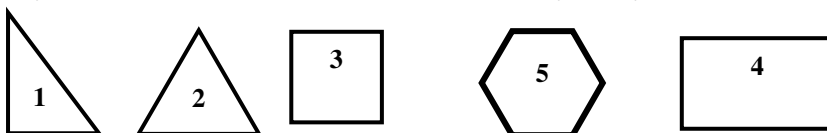


A téglalap területét a tanulók 66,7 %-a jól határozta meg. Az osztály 42,9 %-a legalább két számítást írt. A tanulók 19 %-a betűkkel is próbálta leírni a területet.

A tanulók által adott kiszámítási módok:

- Az oldalak különböző sorrendben való összeadásával oldotta meg 15 fő
- Szorzással és összeadással 13 fő. (Ebből zárójelet használt 3 fő)
- Betűk és összeadásjel segítségével írta le 9 fő
- Betűk, összeadás- és szorzásjellel írta le 5 fő. (Itt senki nem használt zárójelet.)

*Kerületük szerint növekedő sorrendbe kellett tenni a következő alakzatokat.*

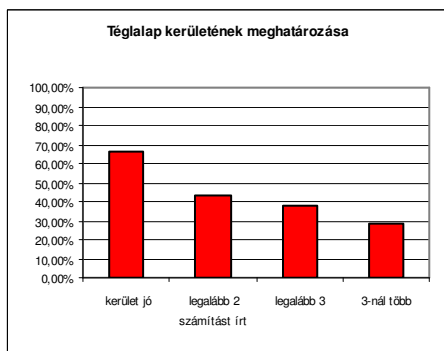


Ennek a feladatnak a megoldása lett a legeredményesebb.

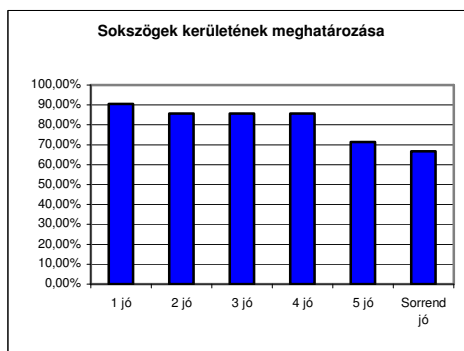
Egy kivétellel minden gyerek hozzákezdett a feladathoz, és sokkal pontosabb megoldásokat adtak, mint a négyzetráccsal támogatott esetben.

A tanulók 90 %-a legalább egy jó megoldást adott. Ennél a feladatnál a mértékegységek kiírása volt a legnagyobb probléma. A gyerekek csupán 52,4 %-a írta oda minden esetben a mértékegységeket. Néhányan a háromszögek oldalainak mérésénél illetve a kerületük meghatározásánál hibáztak.

A két feladat megoldásának értékelését a következő grafikonok jól szemléltetik.



8.8.1.ábra



8.8.2.ábra

**Megjegyzése:** Az utóbbi két feladat megoldása azt mutatta, hogy nem képlethez, hanem valódi mérésekhez, alkotásokhoz kapcsolható biztos kerületfogalommal rendelkeznek a gyerekek.

### 8.8.3.2. A 2007. február 19-én írt mérőlap<sup>19</sup> értékelése

Két feladatot terveztünk, melyekkel a függvényszerű szemléletet vizsgáltuk a mérések témakörében.

Az elsőben 14 objektumot és 15 hosszúságmennyiséget soroltunk fel. A felsorolt 14 objektum közül 12-nek legalább egyik méretét meghatároztuk a fejlesztés során, de mindegyikre adtunk becslést. A gyerekeknek a tárgyat és a tárgy valamely méretét kellett egymáshoz rendelni.

*Dolgok: tanterem, szekrény, uszodai medence, víztorony, Munkácsy utca, folyosó, tábla, ajtó, matematikakönyv, vonalzó, tanári asztal, padsor, kerítés, Balaton.*

*Becslések értékei: 184 cm, 67 cm, 2 m 2 dm, 1m, 90 cm, 2 mm, 8 dm, 50 cm, 1 cm 7 mm, 70 m, 7 mm, 45 m, 6 m 2 dm, 300 m, 11 m.*

A ..... magassága .....

A ..... hosszúsága .....

A ..... szélessége .....

A ..... mélysége .....

A ..... vastagsága .....

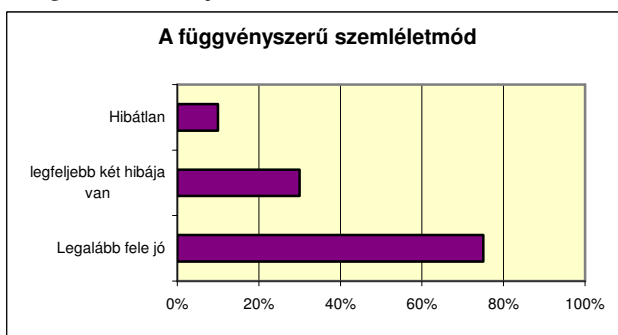
A túl sok adat szerepeltetése miatt nehéznek bizonyult a feladat. Minden objektumhoz csak egy térbeli kiterjedéshez rendeltünk mennyiséget, ezért még nehezebb

<sup>19</sup> Egy gyerek által kitöltött mérőlapot a 24. melléklet tartalmazza. (Mellékletek 37. oldal)

dolga volt a gyerekeknek. Sok esetben az objektum és a hozzákapcsolható mennyiség kiválasztása helyett a tanulók saját maguk által kitalált tárgyakhoz rendeltek ugyancsak általuk kitalált mennyiségeket. Néhány gyerek egy tárgy mindhárom térbeli kiterjedéséhez rendelt mennyiséget. Pl. a vonalzóról a gyerekeknek hamarabb jutott eszébe a hosszúsága, mint a vastagsága, márpedig a feladatban a vonalzó vastagságára gondoltunk.

**Megjegyzés:** A párosítások során kiderült, hogy három gyereknek még gondja van a szövegértéssel, a tárgyak térbeliségét kifejező szavak értelmezésével és megnevezésével. Ők hárman még további fejlesztést igényelnek ezen a téren. Egy kivétellel a gyerekek változtattak a megadott hosszúságértékeken, de hat gyerek a tárgyakat is bővítette. A nehézségek ellenére nagyon élvezték a feladat újszerűségét. Úgy gondoltak rá, mint egy izgalmas rejtvényre.

A megfeleltetések a sok adat ellenére is elég sikereseknek bizonyultak. A megoldás értékelését a következő grafikon mutatja.



8.8.3.ábra

A másodikban adott hat hosszúságmennyiséghez, adott feltételek mellett tárgyakat kellett rendelni. Egy értékhez több tárgy is tartozhatott.

*32 méter területű tárgy megadása.*

A tanulók mindössze 25 %-a gondolt a tanterem területére. A többiek igyekeztek új tárgyakat keresni, melyek megfeleltek a feltételnek. Válaszaikban a következők fordultak elő: autóbusz, vonat, ház, uszoda, iskola, tábla, garázs, stb.

*25 mm vastag tárgy megadása.*

Erre a tanulók 65 %-a adott helyes választ.

*180 cm magas*

A szekrény magasságát a gyerekek mindössze 25 %-a jelölte meg megoldásként. A tanulók több tárgyat is megjelöltek: kisebb fát, magas embert, ajtó magasságát, stb. Összességében a gyerekek 70 %-a a kért mennyiségnek és térbeliségnek megfelelő méretű tárgyat nevezett meg.

*7 dm területű*

A 7 dm területű tárgyat nem mértünk korábban, de reméltük, hogy a kezükben lévő lap segíti őket a megoldásban. Ez mindössze két gyereknek jutott eszébe. Adtak jó megoldásokat, pl. többen gondoltak a kinyitott tolltartóra, de megjelöltek lehetséges

megoldásként dobozt, lampion főkörét. Volt, aki az araszával megmérte a feje körméretét, s ezt adta meg lehetséges objektumként. Az osztály 50 %-a adott olyan megoldást, amely megközelítette a 7 dm területet.

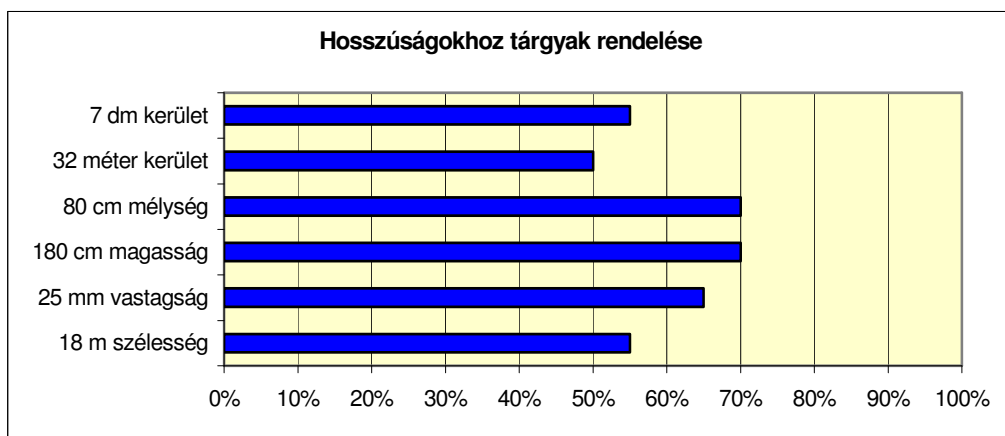
#### *18 méter széles*

A Munkácsy utca és a Víztorony utca szélességét csak az a négy gyerek jelölte meg, aki lemérte. A többiek más megoldással próbálkoztak. Ez jól mutatja, hogy nem ugyanaz mérni, mint a mérés eredményét követni. Bár sok érdekes megoldás született a 18 méter szélességre, nem volt mind helyes. Volt, aki a Kínai-nagyfal szélességét jelölte megoldásként, mások a tornaterem, uszoda, autópálya stb. szélességére gondoltak. A tanulók 55 %-a adott megfelelő tárgyat az adott szélességhez.

#### *80 centiméter mély*

Sokkal egységesebb volt a megoldás, bár volt, aki arra gondolt, hogy a tanteremben függő lampion ilyen mélyen nyúlik befelé. A tanulók 70 %-a adott megfelelő választ a kérdésre.

**Megjegyzés:** Erre a néhány kérdésre adott válasz is tükrözi, hogy a kisebb tárgyak becslésében sokkal eredményesebbek, mint a nagyobbaknál. A kilométer sajnos továbbra is csak konkrét tapasztalat nélküli ismeret maradt a számukra.



8.8.4.ábra

## 9. A FEJLESZTŐ KÍSÉRLET EREDMÉNYESSÉGÉNEK ELEMZŐ ÉRTÉKELÉSE, HIPOTÉZISVIZSGÁLAT

A fejlesztés során azt tapasztaltuk, hogy a régi magyar mértékegységek bevezetése a meséken keresztül élményt jelentett a gyerekeknek<sup>20</sup>. Ezt a video- és hangfelvételek is bizonyítják. Még negyedikben is szinte minden tanuló emlékezett az első és második osztályban hallott mesékre. Az élményszerű tanításnak köszönhetően minden gyerek meg tudja mutatni, hogy mekkora egy rőf, egy öl. Sokan emlékeznek arra, hogy mekkora hosszúságú volt a sárkány hét rőfnyi lángja, és arra is, hogy a kilenc öles szarufa nem fér be a tanterembe. A gyerekek ezeket az órákat játéknak tartották, talán azért is, mert nem dolgoztunk a füzetbe. Mindenki szabadon elmondhatta a véleményét, ha nem akart dolgozni azt is megtehetette, nem volt teljesítménykényszer. Ennek ellenére alig akadt egy vagy két tanuló, aki egyszer-egyszer élt ezzel a lehetőséggel. A kötetlen munkaforma nem ment át szabadosságba. Ezt az is bizonyítja, hogy minden táblázatot, feladatlapot nagy gonddal töltöttek ki a gyerekek. A szöveges indoklások miatt lázadtak néhányan, de ugyanakkor azt tapasztaltuk, hogy a vége felé már akkor is indokoltak, amikor nem kértük azt tőlük. Ezzel nemcsak az írásbeli, hanem a szóbeli kifejezőképességük is javult.

A foglalkozások a tanárok számára is élményt jelentettek. Sok új ismeretet szereztek a fejlesztő kísérlet során a gyermeki gondolkodásról, amit jól kamatoztathatnak a mindennapos tanításnál is<sup>21</sup>. Öröm volt tapasztalni azt is, hogy a tanulók az idő múlásával egyre bátrabban, összeszedettebben mondták el gondolataikat, és a felnőttek képzeletét meghaladó ötletekkel rukkoltak elő.

A gyerekek büszkék voltak arra, hogy a gondolataikat értékeseknek, figyelemre méltónak és fontosaknak tartottuk. Az elismerés további ötletek kidolgozására motiválta őket. Az alkalmazott eszközök változatossága is mindig tetszést váltott ki. Minden új eszköz új gondolatok megfogalmazására, új problémák megoldására ösztönözte őket.

Többek között ezeknek az élményeknek, valamint a csoportos- és páros méréseknek hatására a **becslési** készségük sokat fejlődött a négy év során. A tanteremben minden tárgy hossz méretéhez egészen reális értékeket rendelt a gyerekek többsége, többféle mértékegységben is meg tudták határozni az objektumok méreteit. Elég jól alkalmazták becsléseiknél a mérőszámok és mértékegységek közötti összefüggést, még ha nem is tudták azt mindig pontosan kifejezni nyelvi szinten. A deciméterrel való becslésnél gyakran az araszukkal való mérés után „tippeltek”. Az öllel való becslésnél sokan viszonyítottak a méterhez és fordítva, felhasználták, hogy az öl majdnem kétszerese a méternek. Ezek jól tükröződnek az esettanulmányokban is. Csupán egy-két gyerek adott szélsőséges becsléseket azokra a tárgyakra, amelynek mérését már korábban elvégeztük. A kisebb tárgyak becslése akkor is megfelelő volt, ha a korábbi foglalkozásokon nem határoztuk meg annak méretét. Néhány tanuló a beszélgetések és viták után sem alkalmazta becsléseinél a korábbi mérési tapasztalatait. Nem viszonyított a tárgy méretét egy már ismert dolog méretéhez, minden tárgyat közvetlenül az adott mértékegységgel hasonlított össze.

---

<sup>20</sup> A 25. és 26. mellékletekben két gyerek értékeli a fejlesztő munkát.

<sup>21</sup> A 27. melléklet az osztályt tanító tanárok véleményét tartalmazza. Mellékletek 38-40. oldal)

Azt, hogy a gyerekek szabványmértékegységekkel való becslései egyre közelebb kerültek a valóságos értékekhez, nagyban elősegítette, hogy minden „tippelés” után szükségét érezték a bizonyításnak, azonnal megmérték a kérdéses dolog nagyságát (ha az a szűkebb környezetükben volt), vonalzóval, vagy mérőrúddal, vagy mérőszalaggal – a tárgy nagyságától függően.

A sok becslés és mérés ellenére sem alakult ki a tanulók nagy részénél a hosszabb és a magasabb tárgyak reális becslése. Ezen a területen nem értünk el kimagasló eredményt. Hiába mértük meg az utca szélességét, ez nem segítette őket a hosszának meghatározásában, ezeket szinte mindig kevesebbre becsülték. A Víztorony magasságának meghatározásánál viszonyítottunk a mellette álló ház magasságához, mivel ilyen irányú mérési tapasztalatuk nem volt, ezek pusztán megállapítások maradtak, s a magasságokat változatlanul túlbecsülték. A hosszúságokat általában alá, a magasságokat pedig fölé becsülték. Ez teljesen egybecseng Piaget megállapításával.

A becslési készség folyamatos fejlesztést igényel, amely nem érhet véget kisiskolás korban, mivel alapvető szerepet játszik a térszemlélet fejlesztésében is. Ennek elhanyagolása bizonytalan térfogalom állandósulásához vezet. Ennek fontosságára Carl Jung is utal a *Mélységeink ösvényein* című művében.

„Valószínűbbnek vélem, hogy a kicsinyítési, illetve túlnagyítási (óriások!) hajlammak a tudattalan tér és időfogalma különös bizonytalanságához van köze. Az emberi méretezés, vagyis a kicsiről és nagyról alkotott racionális fogalmunk kimondottan antropomorfizmus, amely nemcsak a fizikai jelenségek birodalmában veszti érvényét, de kollektív tudattalan azon térségein is, amelyek túl vannak a specifikusan emberi hatótávolságon.” (Carl. G. Jung: *Mélységeink ösvényein* 225. oldal)

A gyerekek ismerete a hosszúság-mértékegységek körében jó szintűnek mondható, ezt a feladatlapok megoldásainak értékelései is alátámasztják. A tanulók egyetlen más mértékegységgel sem tévesztik össze a hosszegységeket. Ennek alapján kijelenthetjük, hogy a gyerekeknek biztos hosszúságmennyiség fogalma van. Jó eredménynek tartjuk azt is, hogy a hosszúság **szabványmértékegységeinek** sorrendjében senki nem hibázott. Ehhez valószínűleg hozzájárultak a tevékenységek során szerzett tapasztalatok.

A foglalkozásokon folyamatosan hangsúlyoztuk a hosszúságmérés és mértékegységeinek használatát más tudományterületeken és a mindennapi életben. Egy idő után a gyerekek is kerestek olyan élethelyzeteket, amikor ezeket kell alkalmazni. Szinte mindenkinek sikerült olyan szituációt találni, ahol a mérésnek gyakorlati hasznát alátámasztották. Ennek eredményeként a gyerekek még fontosabbnak tartották a mérési gyakorlatok végzését.

A **vonalzó**, mint mérőeszköz használata sokat alakult a fejlesztő foglalkozások során. Az utolsó feladatlapokon az adott sokszögek kerületének mérésénél már szinte alig hibáztak a tanulók. Még ugyan egy-két tanulónál negyedikesben is előfordult, hogy vagy a vonalzó szélétől kezdett mérni, vagy az egységtől. Ez azonban már sokszor figyelmetlenségéből is adódott, mert akik rosszul mértek, ők sem mértek mindent rosszul. Ez a **páros** foglalkozások során végzett tevékenységeknek is köszönhető, ahol a tapasztaltabb tanuló segítette társát a vonalzó helyes használatában.

A csoportos és páros mérések végzésénél a csoportok, illetve a párok összetételét gyakran változtattuk, hogy egyre eredményesebb legyen a közös munka. A gyerekek egy

része ezeken a közös méréseken tanult meg nagyobb hosszúságokat mérni. Sokat tanultak a gyerekek egymástól.

A **töröttvonalak** rajzolását nagy kedvvel végezték a gyerekek, a harmadik ciklus végére szinte alig akadt olyan tanuló, akinek gondja volt az irányokkal. A hosszuk meghatározásánál egyre többen használták a vonalzót még akkor is, ha négyzethálón adtuk meg az alakzatokat. Ennek eredményeként pontosabban adták meg a vonaldarabok hosszát, mint számlálásnál tették.

A hosszúság megmaradását az osztály fele a párhuzamos eltolás során kis segítséggel felismerte. Ezt az egyik páros interjú és a feladatlapokra írt indoklások is bizonyítják.

Adott sokszögek téglalappá való átalakításában, átdarabolásában is sokat fejlődtek, egyre több jó megoldást adtak a tanulók. Eleinte nehezen értették meg a problémát, nem látták az új formát, de a végén már kérés nélkül rohantak a táblához, hogy egy alakzatot átalakíthassanak, vagy hogy egy átalakítást, amellyel nem értettek egyet, kijavíthassanak. Ez a fejlettebb térlátást mutatja. Ezek meglátását papírháromszögek és négyszögek szétdarabolásával segítettük. A táblai átalakításoknál viszont a tanulók jobban tudták követni a másik gondolkodását. Értékelték egymás munkáját, egymást javították, a tanár csak a háttérből irányított. Csupán néhány kérdést kellett feltenni, s elindult az ötletfolyam. A tanulók egymás gondolatait kiegészítették, javították, a végén már kérdeztek is egymástól.

Az adott kerületű téglalapok rajzolásánál a gyerekek eleinte számolgotással kerestek újabb lehetőségeket, de később már algoritmuszerűen oldották meg a problémát – az egyik oldalt csökkentették egy egységgel, a másikat pedig növelték ugyanannyival.

A **téglalap és négyzet kerületének** meghatározásánál nagy élvezettel keresték a különféle megoldásokat. Nemcsak egymást akarták túllicitálni, hanem saját megoldásukat is. A táblai munka még negyedikben is motiválta őket – azt különösen élvezték, hogy nem kell engedélyt kérni ahhoz, hogy valaki a táblára írjon, ott adja meg megoldásait.

A legnagyobb problémát a megoldásuk indoklása, a válasz jelentette számukra. Bár ezen a téren is volt a fejlődés, a feladatlapokra írt indoklások is ezt igazolják, de ez elmaradt a várt eredménytől.

A **tárgyak térbeliségét** kifejező szavak matematikai és hétköznapi értelmezésénél kicsit átrajzolódott az osztály. Ezeken a foglalkozásokon néhány olyan gyerek is középpontba került, aki korábban nem nagyon szerepelt. Volt olyan tanuló, aki teljesen kimagaslott ezeknek a kifejezéseknek a magyarázatánál. Ez olyan motiváló erővel bír számára, hogy a későbbi foglalkozásokon is sokkal aktívabb lett, mint korábban. A szavak, kifejezések magyarázatánál a matematikai jelentésen túl nemcsak a mindennapi szóhasználatra, hanem a más tudományokban használt értelmezésével is foglalkoztunk. Mivel egy-egy alkalommal nem akartunk csak „beszélgetni”, ugyanannak a kifejezésnek az alkalmazására többször is visszatértünk. Ezzel a folyamatos gyakorlással sokkal biztosabb ismeretet sikerült kialakítani ezen a területen. A beszélgetések segítettek a gyerekeknek a megfelelő szavak, kifejezések megtalálására a gondolataik kifejezéséhez.

A szívószálakból való alkotások során felfedezték, hogy a négyzet meghatározásához nem elegendő az a feltétel, hogy minden oldala egyenlő. Az oldalakat be kell „állítani”, hogy valóban négyzet legyen. Hogy ezt kis is tudják fejteni,

szükségessé vált a derékszög fogalmának ismerete. Felfedezték, hogy a téglalapnak és a négyzetnek is derékszögei vannak. De ez nem azt jelenti, hogy felfedezték a két alakzat kapcsolatát. Sokan még negyedikben is tiltakoztak a négyzetek téglalapok közé való besorolása ellen. Néhányan látszólag elfogadták ezt a kapcsolatot, de ez csak az osztályt tanító matematikatanárnak szólt. Mivel ő definíciókat is kért tőlük, megtanulták, de belül nem ezt gondolták.

Ha a feladatlapok és az esettanulmányok kiértékelésénél tapasztaltakat a korábban megfigyelt osztályok teljesítményeihez viszonyítjuk, arra a következtetésre jutunk, hogy a foglalkozások eredményesek voltak. Az eredményességet az is bizonyítja, hogy a foglalkozás, a ciklus, illetve és a kísérlet befejezése utáni beszélgetések során vissza tudták idézni a korábban elvégzett feladatokat, néhányan még a megoldásaikra, hibáikra is emlékeztek. Két gyerek írásban is megfogalmazta a véleményét, ezeket a .... melléklet tartalmazza.

Ezek a tevékenységek könnyen megvalósíthatók a napközis foglalkozás keretében. A délutáni foglalkozásokon, az udvaron való méréseknél a gyerekek ugyanúgy levegőznek, mintha csak egyszerűen sétálnának vagy játszanának. Így a napközis foglalkozásokat is tartalmasabbá tehetnénk, és ezzel a geometriatanítás egyik fogyatékoságát – az időszakos feladatmegoldásokat és gyakorlatok hiányát – orvosolhatnánk, folyamatossá tennénk.

A fentiek alapján úgy véljük, hogy a hipotézisünk reális volt, s az abban megfogalmazottak tükröződnek az elért eredményekben.

## 10. KONKLÚZIÓ

A kísérleti kutatómunkánk alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy az alábbiakra nagyobb hangsúlyt célszerű helyezni és/vagy figyelemmel kísérni a hosszúságmérés tanítása során a következőket:

- A tanulóknak már iskolába lépés előtt jelentős mennyiségű ismereteik vannak az anyagi tárgyak nagyságáról, ezek közötti kapcsolatokról, amelyeket eredményesen be lehet kapcsolni az oktatásba.
- A rádióban, tévében, otthon, az utcán, az iskolában, a mesékben számos olyan kifejezéssel találkozhatnak a tanulók, amelyek a tárgyak alakjára, helyzetére, tulajdonságaira, egymáshoz való viszonyaikra vonatkoznak. Ezzel sok geometriai szakkifejezést sajátíthatnak el, bár sokszor nem egészen értik ezek jelentését, vagy pedig hamis fogalmuk alakul ki róluk. Az iskolában a tanár dolga, hogy a gyerekek már meglévő geometriai fogalmait helyes tartalommal töltsék meg.
- A tanulók mérési készségének fejlesztésére irányuló tananyag tervezése során gondoskodni kell arról, hogy kialakítsuk a geometriai mennyiség fogalmát, s ezt az ismeretet használjuk fel a szám fogalmának, a számokkal való műveletek tulajdonságainak tanulása során. Mindezeket szorosan hozzá kell kapcsolni az alakzatok tanításához.
- Fontos, hogy a tanulók különböző mérőeszközökkel ismerkedjenek meg, és jártasságot szerezzenek azok használatában.
- A méréshez kapcsolódó ismeretek tanítása során törekedni kell arra, hogy az itt szerzett tudás alkalmazható legyen az oktatás más területein.
- A gyerekek becslési készségének fejlesztése folyamatos feladat, különösen nagy jelentősége van a mindennapi életben és a térszemlélet fejlesztésében.

- A mesék alkalmazása több tantárgy oktatásában segítené a valóságos probléma és a képzelet közötti különbség megmutatására, s a hétköznapi és tudományos fogalmak közötti szakadék áthidalásában. Erre különösen az általános iskola első és második osztályában van lehetőség, mert ekkor még ezt a formát erősen igénylik a gyerekek.
- A tanulók nagy része még második osztályban is elég nehezen tud egyszerű mértékváltásokat végezni. Pl. minden gyerek tudta, hogy  $1\text{ m} = 10\text{ dm}$ , de amikor  $5\text{ métert}$  kellett kifejezni deciméterekben, elég sok gyereknek volt gondja. Ez azt mutatja, hogy ilyen mérvű absztrakciókra a gyerekek még nem képesek. Csak azokat az átváltásokat végzik könnyen, amelyeket korábbi tevékenységeik során megtapasztaltak. Első osztályban átváltások végzésére még nagyon kevés gyerek érett, de még a másodikosoknak is nehézséget okoz a mértékegység és a mérőszám fordított arányú változásának megértése.
- A későbbiekben is nagy elővigyázatossággal kell bánni ezzel a témával, mert kellő tapasztalat hiányában a mértékegységek és a köztük levő váltószámok tanítása mechanikussá válik, nélkülöz minden valóság alapot, ezért a gyerek nemcsak az azonos típusú mértékegységek közötti kapcsolatokat fogja keverni, hanem még a különbözőfajta mértékegységeket is.
- A tankönyvek tagolása, feladatai sem nyújtanak kellő segítséget a megfelelő mérési tapasztalatok megszerzéséhez, a becslési készség fejlesztéséhez, mivel a legtöbb tanító a tankönyvben megadott sorrendiséget követi, ahol a mérések túlságosan koncentráltan jelentkeznek. Ennek következtében nincs idő a kellő gyakorlatok végzésére, ezáltal nem alakul ki a gyerekekben a mennyiségfogalom. Ekkor viszont a mértékváltásokat mechanikusan végzik, s nagyobb lesz a tévedési lehetőség.
- Több szóbeli indoklásra, beszélgetésre van szükség a tanítás folyamán, hogy az esetleges hibák, fogalmi pontatlanságok időben kiderüljenek.

## 11. TOVÁBBI KUTATÁSI TERV

A dolgozatban már többször történt utalás a területmérésre. A területmérés és számítás szorosan kapcsolódik a kerületméréshez, ezért a továbbiakban ennek a két fogalomnak a kialakulására, fejlődésének vizsgálatára, és azok kapcsolatára helyezük a hangsúlyt. A terület szónak is több jelentése van, s ennek a nyelvi vonatkozásaival is foglalkozni kívánunk.

Már ebben a fejlesztésben is végeztünk vizsgálatokat a logikai kifejezések és a mérések kapcsolatára vonatkozóan, ennek egy mélyebb kidolgozását tervezzük.

Vizsgálatainkat kiterjesztjük a teljes mérések tanítására, arra törekedve, hogy minden gyereknek alkalmazásra képes tudást biztosítsunk. A szakemberek többségének szüksége van ilyenfajta ismeretekre a munkájuk végzéséhez.

A mérésekhez kapcsolódó fogalmak és ismeretek könnyebb és eredményesebb elsajátításához hatékony módszereket kívánunk kidolgozni.

## 12. IRODALOMJEGYZÉK

1. Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, 1995.
2. Ambrus András: Nemzetközi tendenciák a matematika oktatásban, <http://xml.inf.elte.hu/~mathdid/ambros/tendenc.pdf>, 2002. (p. 8-9.)
3. Bábosik István: Pedagógiai kísérlet, In Falus Iván (szerk): Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe, Keraban Könyvkiadó, Budapest, 1993.
4. Balázs Márton- Kolumbán József: Matematikai analízis, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1978.
5. V. T. Baziljev – K. I. Dunyicsev: Geometria II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
6. Benedek Elek: Magyar mese és mondavilág I. A csodaszarvas; Móra Ferenc Ifjúsági Könyvkiadó, Budapest, 1987.
7. Benedek Elek: Magyar mese és mondavilág II. A fekete kisasszony; Móra Ferenc Ifjúsági Könyvkiadó, Budapest, 1988.
8. Benedek Elek: Magyar mese és mondavilág III. A tűzmadár, Móra Ferenc Ifjúsági Könyvkiadó, Budapest, 1989.
9. Bogdán István: Régi Magyar mértékek, Gondolat, Budapest, 1987.
10. Bolyai Farkas: Az arithmetica eleje, M. Vásárhelyt. 1830.) in BOLYAI Biográfia – Bibliotéka – Biográfia, szerk.: Nagy Ferenc, Better – Püski, Budapest, 2000.
11. H.S.M. Coxeter: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
12. Az iskolai tudás, szerk. Csapó Benő, Osiris Kiadó, Budapest, 2002.
13. Christopher Danielson: Perimeter in the Curriculum, For the Learning of Mathematics 25, March, 2005.
14. Dávid Lajos: A két Bolyai élete és munkássága, Gondolat, Budapest, 1979.
15. Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát, Gondolat, Budapest, 1973.
16. Robert Fisher: Hogyan tanítsuk gyerekeinket gondolkodni? Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.
17. Hans Freudenthal: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Dordrecht, D.Reidel Publishing Company, 1983.
18. Dr. Fodor György: Mértékegység lexikon, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994.
19. Gázsó-Mosonyi-Vörös: A matematika tanítása, Tanárképző főiskolai tankönyvek, Tankönyvkiadó, 1979.
20. Dr. Gődény Imréné dr. Szarvas Edit: Régi Magyar hosszúság, terület és térfogatmértékek a korabeli matematika könyvek tükrében, Doktori értekezés 1984.
21. Dr. Lenni I. Haapasalo: Decimals and Units: Constructing Conceptual and Procedural Knowledge by Measuring Length
22. Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
23. Reuben Hersh: A matematika természete, Typotex Kiadó, 2000.
24. John Holt: Iskolai kudarcok, Gondolat, Budapest 1991.
25. I. P. Jegerov: Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
26. Carl. G. Jung: Mélységeink ösvényein, Gondolat, Budapest 1993.
27. Kelemen László: A tanulók gondolkodása 6 – 10 éves korban, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

28. Dr. Kelemen László: A gondolkodás nevelése az általános iskolában, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
29. Kovács Zoltán: Geometria: Az euklideszi geometria metrikus megalapozása, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2002.
30. Lánzos Kornél: A geometriai térfogalom fejlődése. A geometriai fogalmak fejlődése Püthagorasztól Hilbertig és Einsteinig, Gondolat, Budapest, 1976.
31. Lénárd Ferenc: Az absztrakció kialakítása kisiskolás korban, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982.
32. Maróthi György: Arithmetica, avagy számvetésnek mestersége, Debrecen, 1652. in Dr Gödény Imréné dr. Szarvas Edit: Régi Magyar hosszúság, terület és térfogatmértékek a korabeli matematika könyvek tükrében, Doktori értekezés 1984.
33. Edwin E. Moise: Elementary Geometry from an Advanced Standpoint, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Printed in the United States of America, 1963.
34. Nahalka István: A Nemzeti Alaptanterv tanulásszemlélete, Új pedagógiai szemle, 7-8. szám, 9-27. oldal.
35. Nahalka István 2002. *Hogyan alakul ki a tudás a gyerekekben? Konstruktivizmus és pedagógia.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
36. C.Neményi Eszter: Geometria, mérések, ELTE TOFK, Budapest, 1999.
37. Így tanítjuk a matematikát II. kötet, szerk.: dr. Pelle Béla, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
38. Peller József: Matematikai ismeretszerzési folyamatról, ELTE Eötvös Kiadó Kft. Budapest, 2003.
39. Peller József: Matematikai Ismeretszerzési Folyamat ([http://human.kando.hu/pedlex/lexicon/M.xml/matematikai\\_ismeretszerzesi\\_folyamat.html](http://human.kando.hu/pedlex/lexicon/M.xml/matematikai_ismeretszerzesi_folyamat.html))
40. Jean Piaget: Az értelem pszichológiája, Kairosz Kiadó, 1997.
41. Jean Piaget – Bärbel Inhelder: Gyermeklélektan, Osiris – Budapest, 1999.
42. A.M. Piskalo: Geometria az 1-4. osztályban, Tankönyvkiadó, 1977.
43. Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
44. Raum Frigyes: A méter mértékrendszer <http://www.scitech.mtesz.hu/08raum/09.htm>, 2005.
45. André Revuz: Modern matematika – élő matematika, Gondolat, Budapest, 1973.
46. Sasovits Sándor: A méter története ([http://www.sasovits.hu/anyag/meter/meter\\_sztori.htm](http://www.sasovits.hu/anyag/meter/meter_sztori.htm) - 46k -)
47. Richard R. Skemp: A matematikatanulása pszichológiája, Gondolat, Budapest, 1975.
48. Radnainé dr. Szendrei Julianna-Makara Ágnes-Mátyásné Kokovay Jolán-Pálfy Sándor: Tanulási nehézségek a matematikában, IFA-BTF-MKM, Budapest, 1994.
49. Szénássy Barna: Bolyai Farkas, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
50. Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknak és érdeklődőknek, Typotex Kiadó, Budapest, 2005.

51. Margit Tarcsi: Introduction of the Concept of Length and Perimeter in Primary School, [http://www.math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57\\_tarcsi.pdf](http://www.math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57_tarcsi.pdf) - 2005.
52. Margit Tarcsi: High or Low, Deep or Shallow, Wide or Narrow? *Estimation by Young Learners*, CIEAEM 58 International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education, University of West Bohemia, Plzen, 2006. (p. 88-93.)
53. Margit Tarcsi: How Deep is Children's Knowledge? In CIEAEM 59 International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education, Varga J.T. Foundation, Budapest, 2007. (p. 102-107.)
54. Margit Tarcsi: Mathematics through Children's Literature In Children's Literature in Language Teaching, Trezor Kiadó, Budapest, 2004. (p.227-234).
55. Margit Tarcsi: Once upon a Time ... *The role of old Hungarian measurements in the teaching of mathematics in lower primary classes*. In Special issue of OCTOGON Mathematical Magazine 2005. (p. 137 - 141.)
56. Margit Tarcsi: Learning and Knowledge: *The results, lessons and consequences of a development experiment on establishing the concept of length and perimeter*. Teaching Mathematics and Computer Science 2007/1 (p. 119-145.)
57. Tarcsi Margit: A mérés fogalmának alakulása 7-11 éves korban. In Apáczai Csere János Tanítóképző Főiskola Évkönyve, Győr, 2002. (p. 302-310).
58. Dr. Török Tamás.: Mérések elmélete és módszertana a matematika tanításában, Calibra Kiadó, Budapest, 1995.
59. Veszprémi László: Didaktika. APC-Stúdió, Gyula, 2000.
60. Forrai Tiborné, Jakab Albert, Kiss Péter, Lénárd Ferenc, Pelle Béla, Surányi János, Szombathy Miklós, Varga Tamás: Új utak a matematika tanításában I. Néhány hazai és külföldi kísérlet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.. munkája.
61. Vigotszkij: Gondolkodás és beszéd, Trezor Kiadó, Budapest, 2000.
62. Nemzeti Alaptanterv (NAT 2007)(<http://www.okm.gov.hu/main>.)
63. Kerettanterv az alapfokú nevelés-oktatás bevezető és kezdő szakaszára (1-4. évfolyam) (<http://www.okm.gov.hu/main>.)
64. MOZAIK kerettanterv rendszere az általános iskolák számára, NAT 2003. Készítette Árvainé Libor Ildikó, Juhász Nándor, Szabados Anikó (<http://www.mozaik.info.hu/Homepage/NAT2003/doc./matek1-4.doc>)
65. OKI96CNEMAT1-4 (<http://www.oki.hu/tanterv/also.lap/123000115.htm-8k>)

## TARTALOMJEGYZÉK

1.	Bevezetés, témaválasztás indoklása.....	1
1.1.	Témaválasztás indoklása.....	2
1.2.	Geometriatanításunk problémái.....	3
2.	A kutatás .....	4
2.1.	A kutatás témája.....	4
2.2.	A kutatás célja.....	5
2.3.	A kutatás hipotézisei.....	5
2.4.	Kutatási kérdés.....	6
2.5.	A kutatás módszerei.....	6
3.	A kutatás témájának történeti áttekintése.....	7
3.1.	A hosszúságmérés történeti áttekintése.....	7
3.2.	A fejlesztő kísérlet tartalmához szükséges történelmi áttekintés.....	14
3.2.1.	A mértékegységek, váltásaik, ill. változásai a korabeli tankönyvekben.....	14
3.2.2.	Régi magyar hosszúság-mértékegységek és térbeliséget kifejező szavak a népmesékben.....	15
4.	A kutatás témájának matematikai vonatkozásai.....	17
4.1.	A hosszúságmérés metrikus megközelítése.....	17
4.2.	Töröttvonalak hosszúsága.....	20
4.3.	Görbe vonalak.....	21
4.4.	Sokszögek, síkidomok kerülete.....	21
4.5.	Izometriák.....	23
4.6.	Hosszúságokon értelmezett műveletek.....	23
5.	A kutatáshoz kapcsolódó pedagógiai és pszichológiai elméletek.....	25
5.1.	Nemzetközi törekvések a tanítás, a matematikatanítás megújítására.....	25
5.1.1.	Comenius szerepe az oktatás elméletének megalapozásában.....	25
5.1.2.	A reformpedagógia, az új pedagógiai áramlatok néhány előfutára.....	25
5.1.3.	Reformpedagógiai irányzatok a XX. Században.....	25
5.2.	Magyar reformerek, reformok a matematika tanításának megújításáért.....	27
5.3.	A magyar matematikatanítás fejlődésének néhány fontos állomása.....	28
5.4.	A dolgozat témájához kapcsolódó pszichológiai elméletek.....	31
5.4.1.	A gyermeki gondolkodás jellemzői, fogalomalkotás kiskorúak körében.....	31
5.4.2.	Bruner-féle reprezentáció elmélet.....	33
5.4.3.	Skemp elméleti kifejtése a matematikai fogalmak alakulásáról.....	34
5.4.4.	A geometriai gondolkodás fejlődésének Van Hiele szintjei.....	35
5.4.5.	Az észlelési konstanciák és műveleti megőrzések.....	36
5.5.	Nyelvi problémák a matematika, a hosszúságmérés tanításánál.....	40
6.	A kísérlet tantervi, tantárgyi háttere.....	42
6.1.	A NAT matematikai műveltségi terület követelményeinek érvényesülése a fejlesztésben.....	42
6.2.	A kerettantervek irányelvei a hosszúságmérés és a kerületfogalom alakításánál.....	43
6.3.	A téma cross-cullicularis kapcsolatainak lehetőségei.....	44
7.	A kutatás háttérének bemutatása.....	48
8.	A kutatás tartalma.....	50
8.1.	A kutatás előzményei.....	50
8.2.	A kísérleti munka tervezése.....	52

8.3. A kísérlet első ciklusának bemutatása.....	55
8.3.1. Régi magyar mértékegységek bevezetése a mesék segítségével.....	55
8.3.2. Szabványmértékegységek bevezetése.....	57
8.3.3. Mérési gyakorlatok .....	58
8.3.4. A fejlesztő kísérlet első ciklusának értékelése.....	60
8.4. A kísérlet második ciklusának bemutatása.....	62
8.4.1. Diagnosztizáló teszt.....	63
8.4.2. Becslések, mérések.....	63
8.4.3. Töröttvonalak rajzolása, hosszának meghatározása.....	64
8.4.4. Mértékegységek bevezetése .....	65
8.4.5. A négyzet és a téglalap kerületfogalmának előkészítése .....	65
8.4.6. Tevékenységek a téglalap és négyzet fogalmának elmélyítésére és a kerület fogalmának bevezetésére.....	68
8.4.7. Görbe vonalak hosszának meghatározása.....	70
8.4.8. A második ciklusban tartott foglalkozások értékelése.....	71
8.5. A kísérlet harmadik ciklusának bemutatása.....	73
8.5.1. A mérőlap megoldásának értékelése.....	73
8.5.2. Töröttvonalak hosszának meghatározása, kerületszámítás.....	77
8.5.3. Szívószálakból alakzatok készítése, kerületük meghatározása.....	77
8.5.4. A harmadik ciklusban tartott foglalkozások eredményességének értékelése.....	79
8.6. A kísérlet negyedik ciklusának bemutatása.....	79
8.6.1. Diagnosztizáló teszt.....	80
8.6.2. Hosszúságmérés a természetismereti órákon és a mindennapi életben.	84
8.6.3. A térméret, a térhelyzet és a térbeli kiterjedés kifejezései .....	85
8.6.4. Becslések, mérések frontális osztálymunkában .....	86
8.6.5. Téglalapok alkotása, oldalainak megnevezése és kerületük kiszámítása.....	88
8.6.6. A negyedik ciklus fejlesztését értékelő mérőlapok megoldását követő elemző beszélgetések.....	90
8.7. A kísérlet ötödik ciklusának bemutatása.....	93
8.7.1. A négy ciklus fejlesztésének eredményessége .....	93
8.7.2. Magasságok becslése, mérése.....	95
8.7.3. A térbeliséget kifejező szavak használata.....	95
8.7.4. A ciklusban elsajátított ismeretek szintjét ellenőrző mérőlapok.....	99
8.8. A kísérlet hatodik ciklusának bemutatása .....	104
8.8.1. A hosszúságmérés kapcsolata más tudományterületekkel.....	105
8.8.2. Beszélgetés a kerület meghatározásáról .....	106
8.8.3. A hatodik és egyben a hat ciklus fejlesztésének értékelése.....	106
9. A fejlesztő kísérlet eredményességének elemzése, értékelése, hipotézisvizsgálat..	113
10. Konklúzió.....	116
11. További kutatási terv.....	117
12. Irodalomjegyzék.....	118
13. Mellékletek .....	121

## 1. Melléklet

A három kerettanterv összehasonlítása. Félkövér belüvel szedtük a teljes átfedéseket.

	OM	Mozaik	Országos Közoktatási Intézet
1. osztály	<p><b>Összehasonlítások, összemérések</b> a gyakorlatban (pl. magasabb, rövidebb).  <b>Mérés alkalmilag választott egységekkel.</b>                      Különböző mennyiségek mérése azonos mértékegységgel, azonos mennyiségek mérése különböző mértékegységekkel.                      A méter fogalma.                      Kapcsolatok felismerése mennyiségek, mértékegységek, mértékegységek és mérőszámok között.                      Mérési tapasztalatok megfogalmazása.                      A becslés és mérés képességének fejlesztése gyakorlati tapasztalatszerzés alapján.</p>	<p><b>Tárgyak hosszúságának összehasonlítása, összemérése,</b> sorba rendezése.                      Mérés előtti becslés.  <b>Alkalmilag választott és szabványmértékegységek</b> megismerése.                      A méter fogalma.                      Különböző mennyiségek mérése azonos mértékegységgel, azonos mennyiségek mérése különböző mértékegységgel.                      A becslés és mérés képességének fejlesztése gyakorlati tapasztalatszerzés alapján.                      Kapcsolatok felismerése mennyiségek, mértékegységek és mérőszámok között.</p>	<p>Alakuljon ki a hosszúság fogalma a különféle hosszúságjellegű mennyiségek (magasság, hosszúság, szélesség, mélység, vastagság, körméretek) összehasonlítása, összemérése és mérése során; Jó gyakorlottság az <b>alkalmi egységekkel való gyakorlati mérésekben.</b></p>
2. osztály	<p><b>Hosszúság mérése alkalmilag választott és szabványegységekkel (m, dm, cm)</b>                      Gyakorlati mérések az egység többszöröseivel.                      Megfelelő pontosság elérése, ítéletalkotás, vélemény megfogalmazása.                      Helyes eszközhasználat.                      Pontosság.</p>	<p><b>Hosszúság mérése (m, dm, cm)</b>  <b>Összemérések, mérések alkalmi és szabványegységek használatával.</b> Egyszerű átváltások a tanult mértékegységekkel.                      Mennyiség jellemzők szerinti összehasonlítása, becslés.  <b>Téglalap, négyzet megkülönböztetése.</b></p>	<p>A különféle hosszúság-jellegű mennyiségek (magasság, hosszúság, szélesség, mélység, vastagság, körméretek) összehasonlítása, összemérése, mérése során. <b>Alkalmi és néhány szabványegységgel való gyakorlati mérés.</b>  <b>A méter és a centiméter helyes</b></p>

	<p><b>Síkidomok másolása, előállítása egy-két feltétel szerint. Téglalap, négyzet előállítása.</b></p> <p>Kerület mérése tevékenységgel.</p>	<p><b>Síkidomok előállítása, vonalzó, sablon használata.</b></p> <p>Sokszögek tulajdonságainak megfigyelése, területének mérése tevékenységgel.</p>	<p><b>használata.</b> Azonos mennyiségek mérése kisebb és nagyobb egységekkel.</p> <p><b>A téglalap és a négyzet ismerete.</b></p> <p><b>Síkbeli alkotások pálcákból (szívószálakból), rajzolás szabadkézzel, vonalzóval.</b></p>
3. osztály	<p><b>Mérések alkalmi egységekkel, szabványos egységekkel (mm, cm, dm, m, km).</b> Mérés az egységek többszöröseivel. Át és beváltások gyakorlati mérések esetében.</p> <p><b>Kerületmérés körülkerítéssel.</b></p> <p>A pontosság mértékének kifejezése gyakorlati mérésekben.</p> <p>A matematika és valóság kapcsolatának építése.</p> <p>Síkidomok előállítása tevékenységgel, szabadon, másolással és egy-két feltétel megkötésével.</p> <p>A téglalap és négyzet tulajdonságai: oldalak, csúcsok szám. A tulajdonságok összehasonlítása.</p>	<p><b>A hosszúság mérése alkalmilag választott és szabvány egységekkel (km, m, dm, cm).</b></p> <p>Mérőszám, mértékegység és mennyiség kapcsolata.</p> <p>Különböző mennyiségek mérése azonos mértékegységgel, azonos mennyiségek mérése különböző mértékegységekkel.</p> <p>Egyszerű átváltások a tanult mértékegységgel.</p> <p>Mennyiségi jellemzők szerinti összehasonlítás, becslés. Tudatos és pontos eszközhasználat.</p> <p>A négyzet és a téglalap tulajdonságainak megfigyelése, összehasonlítása.</p> <p><b>Kerületmérés körülkerítéssel.</b></p> <p>Síkidomok területének kiszámítása méréssel, összeadással.</p>	<p><b>Mérések különféle alkalmi és szabványos egységekkel, különféle eszközökkel.</b></p> <p>Különböző mennyiségek meg- és kimérése.</p> <p><b>Mértékegységek: mm, cm, dm, m, km.</b> A mérés pontatlanságának kifejezése. Becslés végzése különböző mértékegységekkel.</p> <p><b>Hosszúság, terület mérése alkalmilag választott és szabványos egységekkel, adott pontossággal.</b></p> <p>Többféle a feltételeknek megfelelő alakzatok létrehozása, azonosítása, megkülönböztetése.</p> <p>Síkbeli alkotások szívószálból, rajzolás síkon, hálón pontrácson vonalzóval, szabadon másolással szavakban adott feltételek szerint. Adott feltételeknek megfelelő alakzatok előállítása, megkülönböztetése, egyszerű esetekben az összes lehetséges alkotás megkeresése.</p>

<p>4. osztály</p>	<p><b>A hosszúság mérése alkalmi és szabványos egységekkel.</b>  <b>Át- és beváltások a tanult mértékegységekkel</b>  gyakorlati mérésekhez kapcsolva, illetve ilyenek felidézése nyomán.  Számítások a kerület megállapítására.  Adott feltételeknek megfelelő geometriai alakzatok építése a síkban.</p>	<p><b>A hosszúság mérése alkalmilag választott és szabvány (km, m, dm, cm, mm) mértékegységekkel.</b>  Egyszerű átváltások a tanult mértékegységgel.  Mennyiségi jellemzők szerinti összehasonlítás, becslés. Mérési eljárásokra, módszerekre való emlékezés.  A téglalap és a négyzet kerületének kiszámítása összeadással, szorzással.  Kerületszámítással kapcsolatos szöveges feladatok.</p>	<p><b>Gyakorlottság a hosszúságmérések végzésében, becslésben a mérési eredmények értékelésében, a méréshez kapcsolódó átváltásokban,</b> a mérőszámmal és mértékegységgel adott mennyiség elképzelésében. Adott kerületű síkidomok területének mérése, adott területű síkidomok kerületének megfigyelése, vizsgálata.  A négyzet és téglalap tulajdonságainak vizsgálata, tudatosítása, összegyűjtése és megjegyzése, egymáshoz való viszonyának felismerése.  Adott feltételeknek megfelelő minél több alakzat előállítása, megkülönböztetése, egyszerű esetekben az összes lehetséges alkotás megkeresése.</p>
-------------------	--	--	---

## 2. Melléklet

Milyen mérést jelentenek a meséből kiemelt szavak? Próbáld meg azokat a mai mértékegységekkel kifejezni!

1. A szegény legény hétmérföldes csizmát húzott, s 5 fertály óra múlva elérte azt a várat, ahol a királykisasszonyt fogva tartják.
  - Mérföld:.....
  - Fertályóra:.....
2. A betyár két icce bort ivott a csárdában, aztán megjelent a zsandár, aki három kupa bort rendelt.
  - Icce:.....
  - Kupa:.....
3. Ludas Matyi 6 róf kötéllel kötözte egy jó öles fához Döbrögit.
  - Róf:.....
  - Öl:.....
4. A kocsmárosnak 20 akó bora volt a pincében, volt közöttük 3 puttonyos aszú is.
  - Akó:.....
  - Puttony:.....
5. A szatmáriak három üst szilvalekvárt küldtek a királynak ajándékba, aki megjutalmazta őket ezért három véka és két uncia arannyal.
  - Üst:.....
  - Véka:.....
  - Uncia:.....
6. Ha az emberek kimásznak a bajból, gyakran újabb nehézség leselkedik rájuk. Azt szoktuk mondani, hogy csöbörből, vödörbe esünk.
  - Csöbör:.....
  - Vödör:.....

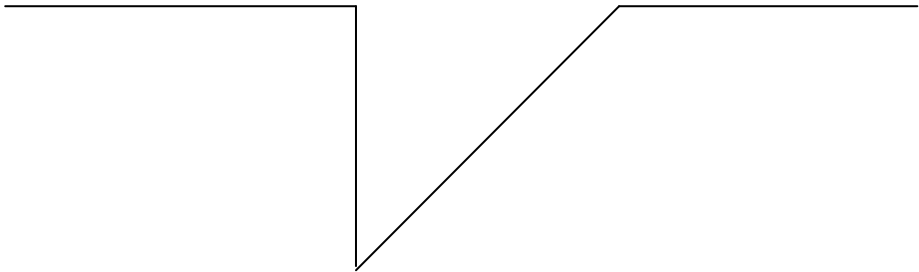
### 3. Melléklet

- Húzd alá a hosszúság-mértékegységeket! Kilogramm, hektoliter, kilométer, milliliter, centiméter, dekagramm, milliméter, liter, deciméter, tonna.
- Melyek igazak az alábbi átváltások közül? Húzd alá a jó megoldásokat!  $36 \text{ dm} = 360 \text{ mm}$ ,  $1 \text{ km } 56 \text{ m} = 1056 \text{ m}$ ,  $560 \text{ mm} = 56 \text{ cm}$ ,  $5 \text{ m } 4 \text{ cm} = 54 \text{ cm}$ ,  $1 \text{ m } 5 \text{ dm } 3 \text{ mm} = 1503 \text{ mm}$ ,  $2014 \text{ cm} = 2 \text{ m } 1 \text{ dm } 4 \text{ cm}$ .

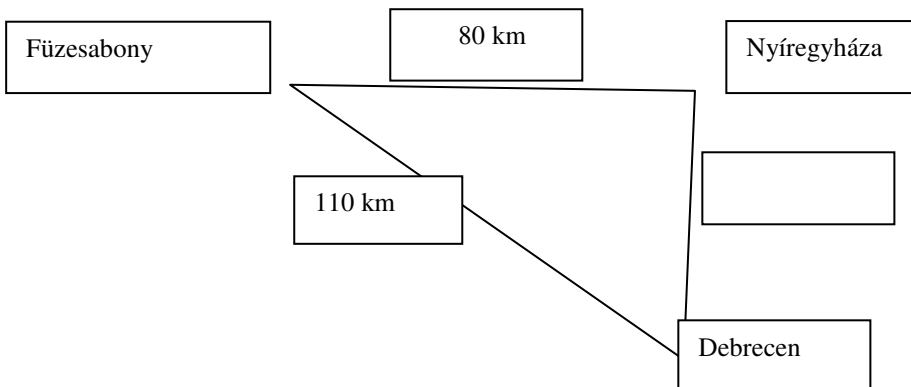
- Melyik nagyobb? Tedd ki a relációs jeleket!

134 dm	10 m
1 m 2 dm 5 mm	1205 mm
975 cm	100 dm
1 km 56 m	1560 dm
56 mm	1 m

- Becsüld meg a vonal hosszát centiméterben!



- Milyen messze lehet egymástól Debrecen és Nyíregyháza?



#### 4. Melléklet

Tedd ki a relációs jelet!

$$13 \text{ cm} > 1 \text{ dm}$$

$$1 \text{ m } 2 \text{ dm} = 12 \text{ dm}$$

$$1 \text{ m } 1 \text{ dm} = 1 \text{ m } 10 \text{ cm}$$

$$17 \text{ cm} > 2 \text{ dm}$$

$$8 \text{ dm} > 1 \text{ m}$$

2 deciméter legyen!

$$7 \text{ cm} + 5 \text{ dm} = 2 \text{ dm}$$

$$1 \text{ dm} + 12 \text{ cm} = 2 \text{ dm}$$

$$2 \text{ dm} - 0 \text{ cm} = 2 \text{ dm}$$

1 méter legyen!

$$2 \text{ cm} + 6 \text{ dm} = 1 \text{ m}$$

$$13 \text{ dm} - 12 \text{ cm} = 1 \text{ m}$$

$$1 \text{ m } 2 \text{ dm} - 24 \text{ cm} = 1 \text{ m}$$

## 4. Melléklet

Becsüld meg a tábla hosszúságát!

10..... méter

19..... rőf

12..... öl

Becsüld meg az ajtó szélességét!

0..... méter

0.....rőf

10..... kisarasz

10..... nagyarasz

0..... öl

10..... deciméter

Becsüld meg a pad magasságát!

8..... deciméter

Becsüld meg a matematika könyved hosszúságát!

3..... dm

9.....cm

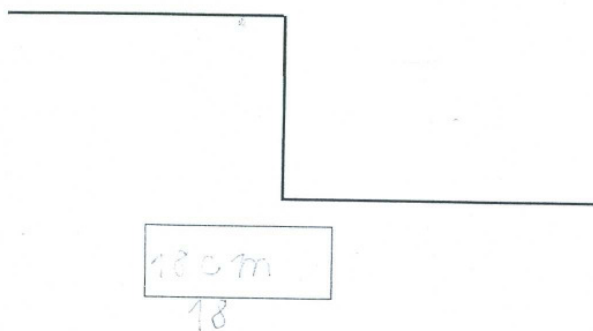
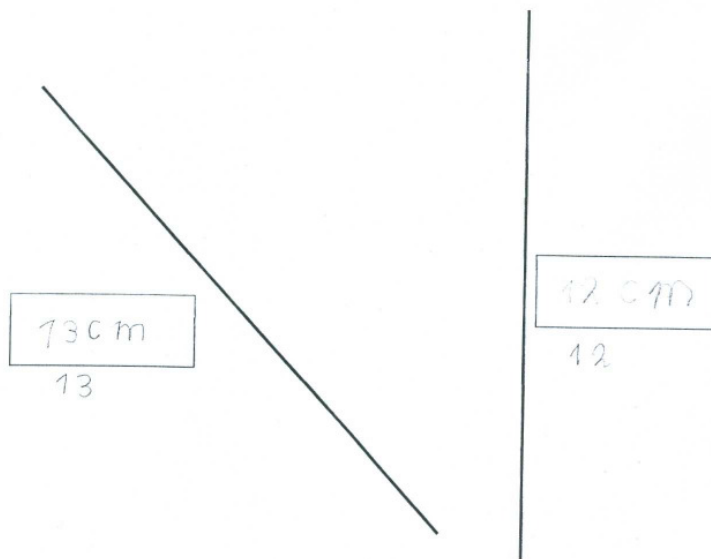
Becsüld meg a tanterem hosszúságát!

6..... öl

10..... Rőf

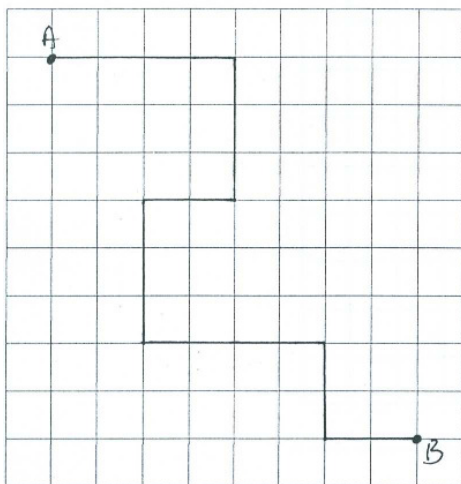
9..... méter

#### 4. Melléklet



## 5. Melléklet

1. Milyen hosszú az A-ból B-be futó vonaldarab hossza, ha egy négyzetrács egy centiméter széles?



.....22.....

2. Húzd alá azokat a mértékegységeket, amelyekkel hosszúságot mérsz!

Méter, öl, kilogramm, deciliter, arasz, centiméter, liter, rőf, dekagramm, milliméter.

3. Hány deciméter?

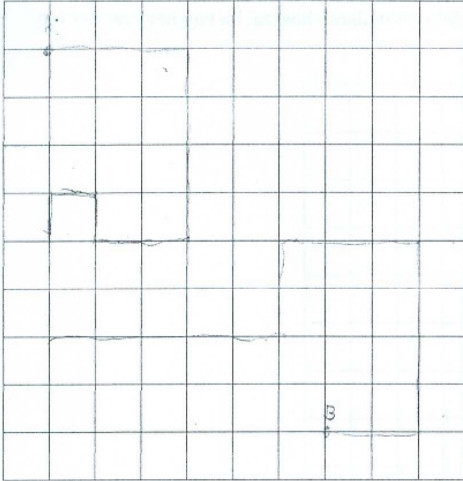
1 m = ..10..dm

2 m = ..20..dm

30 cm = .....dm

## 5. Melléklet

4. Kati elindult Bettihez. Rajzold le, az útvonalat a tanár utasítása alapján!

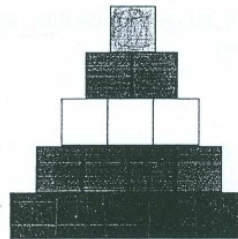


Hány decimétert ment? ..... 31,42 .....

5. Hány centiméter magasak ezek az oszlopok, ha egy kocka magassága 1 cm?

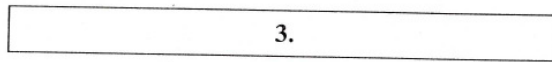
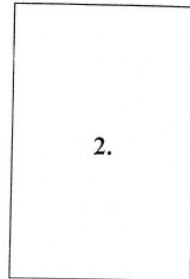
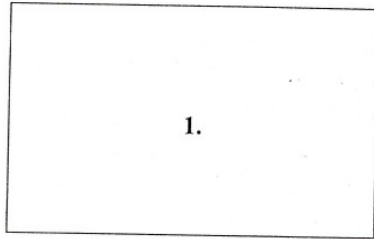


4 cm



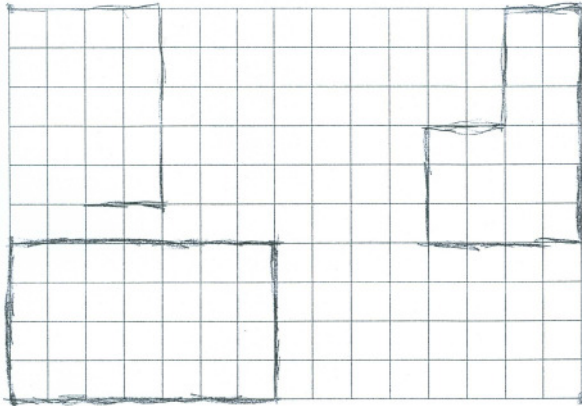
4 cm

## 6. Melléklet



Téglalapok	1.	2.	3.
Egyik oldal hossza	8 cm	4 cm	12 cm
Másik oldal hossza	8 cm	4 cm	12 cm
Harmadik oldal hossza	5 cm	6 cm	1 cm
Negyedik oldal hossza	5 cm	6 cm	1 cm
Az oldalaik hossza összesen	26 cm	26 cm	26 cm

## 7. Melléklet



1. Indulj el a bal felső rácspontból. Lépések: jobb 4, le 5, bal 2.

Hossza: 11.....

Hogyan számoltál? megszámláltam a négyzeteket.

2. Indulj el a jobb felső rácspontból. Lépések: le 6, bal 4, fel 3, jobb 2, fel 3,

jobb 2. Hossza: 20.....

Hogyan számoltál? összeadtam a lépéseket: 6+4+3+2+3+2.

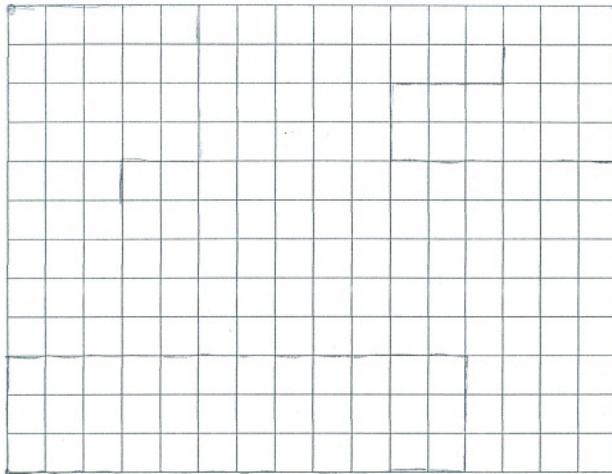
3. Indulj el a bal alsó rácspontból. Lépések: jobb 7, fel 4, bal 7, le 4.

Hossza: 22.....

Hogyan számoltál? 7+7+7+4.



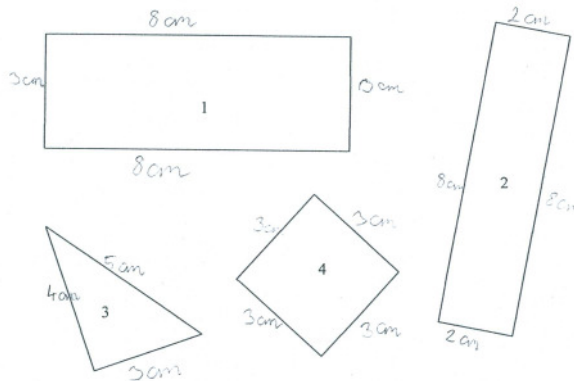
## 9. Melléklet



1. Indulj el a bal felső rácspontból! Lépések: jobb 5, le 4, bal 2, le 1. Add meg a vonal hosszát centiméterekben! *10 cm*..... Ha tudod add meg a hosszát más mértékegységben is! *1 dm = 10 cm = 10 mm*.....  
Hogyan határozhatod meg a vonal hosszát?  
*5 cm + 4 cm + 2 cm + 1 cm = 12 cm*.....
2. Indulj el a jobb felső rácspontból! Lépések: le 4, bal 6, fel 2, jobb 3, fel 1 jobb 2, fel 1, jobb 1.  
Add meg a vonal hosszát centiméterekben és deciméterekben!  
*16 cm = 1 dm + 6 cm*.....  
Hogyan határozhatod meg a vonal hosszát?  
*4 cm + 6 cm + 2 cm + 3 cm + 1 cm = 16 cm*.....
3. Indulj el a bal alsó rácspontból. Lépések: jobb 12, fel 3, bal 12, le 3.  
Mit kaptál? *12 cm*..... Add meg a vonal hosszát olyan mértékegységekkel, amilyenekkel tudod! *12 dm = 120 cm = 1200 mm*.....  
Hogyan határozhatod meg a vonal hosszát? *12 cm + 3 cm = 15 cm*.....

## 10. Melléklet

1. Hány öl hosszú lehet az iskola teljes kerítése?  
*226 öl*
  2. Hány méter hosszú lehet az iskola teljes kerítése?  
*416*
  3. Okoska azt állította, hogy 9 méter nemzetiszínű szalaggal kerítette körbe a táblát március 15-én. Igazat mondott-e? Válaszodat indokold!  
*igen mert 9 méter egy oldal egy tábla*
  4. Törpilla megmérte a lerajzolt alakzatok oldalait. Hogyan határozhatta meg a kerületüket?  
*centiméterrel*
- Ellenőrizzük, hogy jól dolgozott-e?



Törpilla az alábbi hosszúságokat adta:

Szerinte az egyes számú alakzat kerülete 2 dm. Helye-e ez? Írd le

véleményed a Törpilla munkájáról. *nem jó a munka*

Szerinte a 2-es számú alakzat kerülete 20 cm. Igaz-e ez? Miért?

*igaz mert 8 cm + 8 cm + 2 cm + 2 cm = 20 cm*

## 10. Melléklet

A 3-as alakzat kerületére 1 dm írt. Igaz-e ez? *nem, mert 12 cm...*

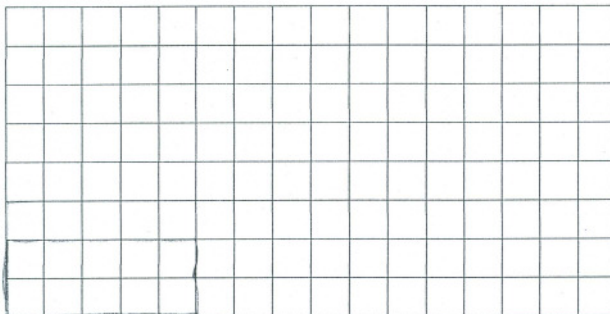
A négyes számú kerületét nem határozta meg. Végezd el a munkát helyette!

Milyen alakzat ez? *hócho*

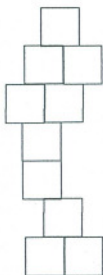
Hány centiméter hosszúak az oldalai? *5 cm*

Mekkora a kerülete? *12 cm*

5. Az alábbi rácson rajzolj olyan téglalapokat, amelyeknek a kerülete 14 centiméter!



6. Milyen magas az oszlop, ha a négyzet oldala 1 dm hosszú?



- 1m  
 8 dm  
 7 dm  
 9 dm



## 12. Melléklet

1. Fűzz fel egy 6 centiméteres egy 8 centiméter és egy 10 centiméteres szívószálat! Milyen alakzatot kapsz? *háromszög*  
 Mennyi a kerülete? *24 cm kerülete*  
 Hogyan határozhatod meg a területét? *Háromszög képletével*  
 .....  
 .....
2. Alkoss szívószálakból olyan háromszögeket, amelynek ugyanekkora a kerülete!

	Első háromszög	Második háromszög	Harmadik háromszög
Egyik oldal	8	10	
Másik oldal	8	10	
Harmadik oldal	8	4	
Kerület	24	24	

3. Alkoss szívószálakból olyan téglalapot, amelynek egyik oldala 4 cm hosszú a másik pedig 6 cm hosszú!  
 Mekkora a kerülete? *20*  
 Hogyan határozta meg a területet?  
*4 cm x 6 cm = 24 cm*  
*Utána megosztottam*  
 .....
4. Alkoss szívószálakból olyan téglalapokat, amelyeknek ugyanennyi a kerülete!

	Első téglalap	Második téglalap	Harmadik téglalap
Egyik oldal	6		
Másik oldal	6		
Harmadik oldal	4		
Negyedik oldal	4		
Kerület			

### 13. Melléklet

Hány szívószál szükséges egy négyzet kialakításához? *4 db*

Milyen hosszúságú szálakat használtak fel a négyzethez?

*5 cm*

Ha négy azonos hosszú szívószálat kapcsoltok össze, akkor biztosan négyzetet kaptok? *mindig*

Milyen szívószalakat használtak a téglalap megformálásához?

*nagy és kicsi szálakat*

Négy ilyen szívószál minden esetben téglalapot ad?

*igen*

Mit tudtok ezek hosszáról? *ket egyforma vagy négy egyforma*

Milyen sorrendben fűztétek fel a téglalagnál a szívószalakat?

*nagy, kicsi, nagy, kicsi*

Hogyan választottátok ki a hosszakat?

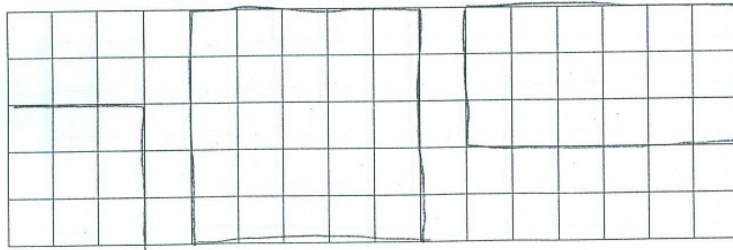
*le mentük*

A kialakított sokszögek közül melyiknek legnagyobb a kerülete?

*1 nagy téglalap*

Hogyan lehet ezt a kérdést eldönteni?

Rajzoljátok le a négyzethálóra, hogy milyen alakzatokat formáltak.



## 14. Melléklet

Alkoss 12 cm és 16 cm területű háromszögeket!

Háromszög	Oldalak hossza centiméterben	Oldalak hossza centiméterben	Oldalak hossza centiméterben	Oldalak hossza centiméterben
Egyik oldal	4 cm	6 cm	5 cm	6 cm
Másik oldal	4 cm	2 cm	5 cm	6 cm
Harmadik oldal	4 cm	4 cm	6 cm	4 cm
Kerület	12 cm	12 cm	16 cm	16 cm

Alkoss 12 cm és 16 cm területű téglalapokat!

Téglalap	Oldalak hossza centiméterben	Oldalak hossza centiméterben	Oldalak hossza centiméterben	Oldalak hossza centiméterben
Egyik oldal	2 cm	5 cm	6 cm	5 cm
Másik oldal	4 cm	5 cm	6 cm	5 cm
Harmadik oldal	2 cm	1 cm	2 cm	3 cm
Negyedik oldal	4 cm	1 cm	2 cm	3 cm
Kerület nagysága	12 cm	12 cm	16 cm	16 cm

## 15. Melléklet

1. Válogasd ki az alábbiak közül a hosszúság mértékegységeket!  
Méter, kilogramm, liter, deciméter, kilométer, dekagramm, nap,  
deciliter, öl, óra, arasz, hektoliter, mérföld, perc, centiméter, véka,  
rőf.

*méter, deciméter, kilométer, öl, arasz, mérföld,  
centiméter, rőf*

2. Rendezd a kiválasztott hosszúság-mértékegységeket növekvő  
sorrendbe!

*centiméter, arasz, deciméter, méter, öl, rőf, kilométer, mérföld*

3. Válogasd ki közülük azokat, amelyeket ma is használunk a  
mindennapi életben!

*méter, kilométer, mérföld*

4. Végezd el az alábbi becsléseket!

a.)

	kisarasz	deciméter	centiméter
A pad írófelületének szélessége	10	8	50

b.)

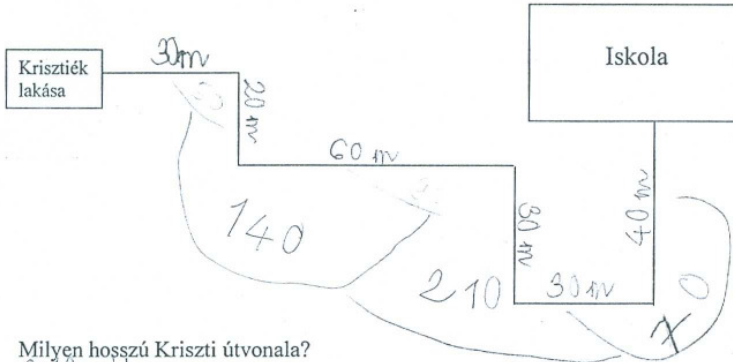
	öl	méter	rőf
A tanterem hosszúsága	12	10	22

c.)

	öl	méter
A kerítés hossza a Munkácsy utca felől	20	30
A kerítés hossza a Víztorony utca felől	30	40

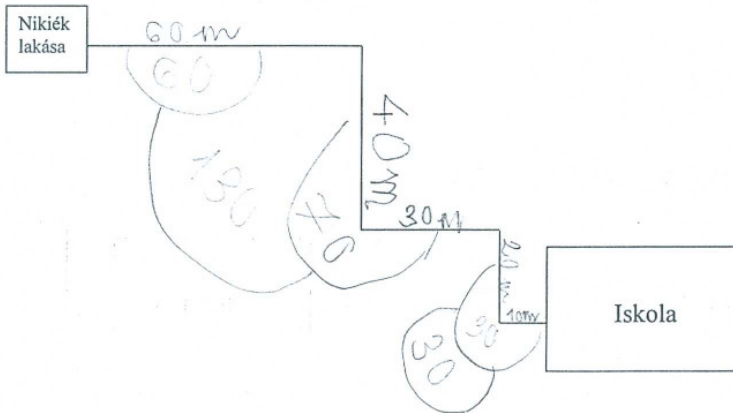
## 15. Melléklet

5. Határozd meg az alábbi útvonalak hosszát! (ami a rajzon 1 cm, az a valóságban 10 m)



Milyen hosszú Kriszti útvonala?

210 méter



Milyen hosszú Niki útvonala?

160 méter

Melyik útvonal hosszabb? Krisztiéé

Mennyivel hosszabb?

50 méterrel hosszabb

## 15. Melléklet

o. Készítsd el a rajzokat, az utasítás alapján!

a. Indulj el a bal felső rácspontból! Lépések: jobb 5, le 4, bal 2, le 1. Add meg a vonal hosszát centiméterekben! *1.1. centiméter*. Ha tudod, add meg a hosszát más mértékegységben is! *1.1. milliméter*.  
Hogyan határozta meg a vonal hosszát? *1.1. az a lépések száma*

b. Indulj el a jobb felső rácspontból! Lépések: le 4, bal 6, fel 2, jobb 3, fel 1, jobb 2, fel 1, jobb 1.

Add meg a vonal hosszát centiméterekben és deciméterekben!

*2.0 centiméter, 2.0 deciméter*

Hogyan határozható meg a vonal hosszát?

*az a lépések száma*

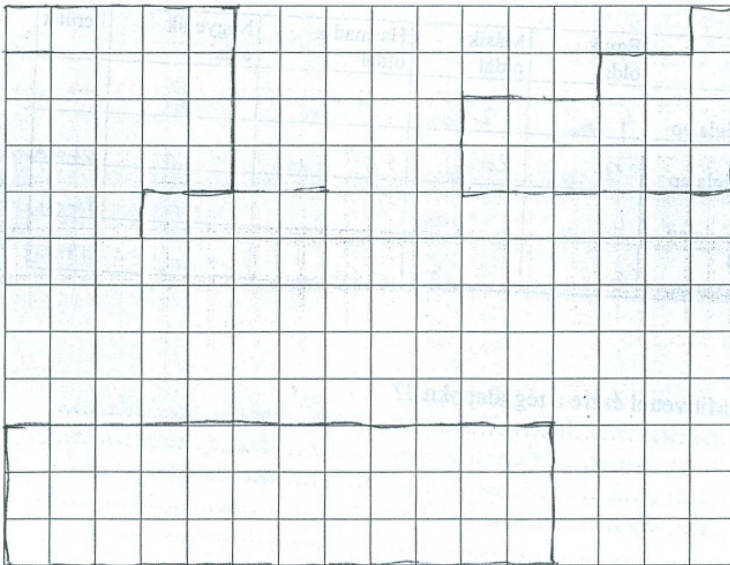
c. Indulj el a bal alsó rácspontból. Lépések: jobb 12, fel 3, bal 12, le 3.

Mit kaptál? *1.1. egy kör*

Add meg a vonal hosszát olyan mértékegységekkel, amilyenekkel tudod! *3 deciméter, 30 centiméter,*

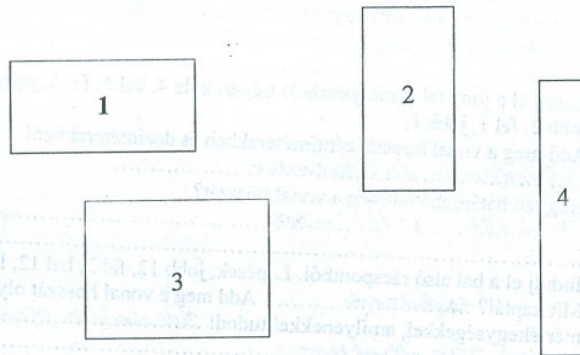
*3 méter, 300 milliméter*

Hogyan határozható meg a vonal hosszát? *az a lépések száma*



## 15. Melléklet

7. Határozd meg a téglalapok oldalainak hosszát és kerületét!



	Egyik oldal	Másik oldal	Harmadik oldal	Negyedik oldal	kerület
1. téglalap	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	12 cm
2. téglalap	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	12 cm
3. téglalap	4 cm	3 cm	4 cm	3 cm	14 cm
4. téglalap	6 cm	6 cm	1 cm	1 cm	14 cm

Mit vettél észre a téglalapoknál?

hogy az 1. és a 2. ugyan az a téglalap, az 1. oldal a kerület, 3...  
 az 4. oldal a kerület, ugyan az a téglalap, az 1. oldal a kerület  
 az 4. oldal a kerület, ugyan az a téglalap, az 1. oldal a kerület  
 az 4. oldal a kerület, ugyan az a téglalap, az 1. oldal a kerület

## 16. Melléklet

- Milyen alakzatok vannak a rácson? *húzlalapot*.....
1. Az első alakzatban hány kiségyzet van? *10 kocka*  
Mennyi az alakzat kerülete? *22 cm*.....  
Hogyan számítottad ki? *összeadtam a számokból, az oldalhosszát 2-vel megszorítottam*.....
  2. A második alakzat hány kiségyzetet tartalmaz? *18 kocka*  
Mennyi az alakzat kerülete? *22 cm*.....  
Hogyan határoztad meg? *összeadtam a számokból, az oldalhosszát 2-vel megszorítottam*.....
  3. A harmadik alakzat hány kiségyzetből áll? *24 kocka*.....  
Mennyi az alakzat kerülete? *22 cm*.....  
Hogyan határoztad meg? *összeadtam a számokból, az oldalhosszát 2-vel megszorítottam*.....
  4. A negyedik alakzatban hány kiségyzet van?  
*28 kocka*.....  
Mennyi az alakzat kerülete? *22 cm*.....  
Hogyan számítottad ki? *összeadtam a számokból, az oldalhosszát 2-vel megszorítottam*.....
  5. Mennyi négyzetből áll az ötödik alakzat? *30 kocka*.....  
Mennyi a kerülete ennek az alakzatnak? *22 cm*.....  
Hogyan határoztad meg? *összeadtam a számokból, az oldalhosszát 2-vel megszorítottam*.....
- Mit vettél észre? *lát, hogy a kerület mindig 22 cm hosszú, 1-esnél 100 van a 2-nél 100 van a 3-asnál 900 van a 4-esnél 1600 van 5-ösnél 2500 van*.....



## 17. Melléklet

Végezd el az alábbi becsléseket a legmegfelelőbb mértékegységekkel!

### 1. Becslések a magasságra:

Saját magasságod:  $170\text{ cm}$   
A pad magassága:  $1\text{ m}$   
A tanterem magassága:  $4\text{ m}$   
Az iskola magassága:  $10\text{ m}$   
A Víztorony magassága:  $50\text{ m}$

### 2. Szélességek becslése:

A matematika tankönyved szélessége:  $14\text{ cm}$   
A folyosó szélessége:  $2\text{ m}$   
Az uszoda szélessége:  $6-7\text{ m}$   
A Munkácsi utca szélessége:  $30-40\text{ m}$

### 3. Vastagságok becslése:

A matematika tankönyved vastagsága:  $2\text{ cm}$   
A pad vastagsága:  $2\text{ cm}$   
A fal vastagsága:  $10\text{ cm}$   
A füzet lapjának vastagsága:  $10\text{ cm}$

Sorolj fel olyan eseteket, amikor a keskeny szavakat használod!

Keskeny a szobnya.  
Keskeny a nádtrágya.  
Keskeny a ruha.  
Keskeny a zokni.  
Keskeny az a. kő.  
Keskeny a libatör.  
Keskeny a dő.

Sorolj fel olyan eseteket, amikor a vékony szavakat használod!

Vékony a nádtrágya.  
Vékony a zokni.  
Vékony a falst.  
Vékony a kesztyű.  
Vékony a szál.  
Vékony a sapka.

## 18. Melléklet

A hosszú, rövid, keskeny, széles, vékony, vastag, közel, távol, mély, sekély, alacsony, magas, kevés, sok, kicsi, nagy, szűk, tág, bő szavak közül írd be a kipontozott helyre a megfelelőket!

1. A kilátótorony nagyon *magas*....., messzire el lehet látni. ✓
2. Az út elég *keskeny* az iskoláig, ezért autóbusszal kell mennem oda. ✓
3. Az iskola *közeli*..... van a Víztoronyhoz. ✓
4. A papír *vékony*..... ✓
5. Az út elég *szűk*....., több kocsi is elfér egymás mellett. ✓
6. A cipőm talpa nem elég *vastag*....., mert fázik benne a lábam. ✓
7. Az úszómedence elég *mély*... ahhoz, hogy fejest tudjunk ugrani benne. ✓
8. Peti *alacsony*....., mert nem éri el a tábla felső szélét. ✓
9. Ez a nemzetiszín szalag elég *széles*....., mert nem lehet jól látni messziről.
10. A Balaton az elmúlt években elég *sekély*..... volt a déli parton, mert nagyon messzire be kellett gyalogolni ahhoz, hogy úszhassunk benne. ✓
11. A Nagytemplom *közel*..... van az iskolától. ✓
12. Ez a madzag *hosszú*..... lett, nem tudom vele átkötni a csomagot. ✓

Írd át az alábbi mondatokat úgy, hogy használd a hosszúsággal kapcsolatos szavakat!

- Debrecentől Miskolcig hosszabb idő alatt tesszük meg az utat, mint Nyíregyházáig.
- *Debrecen sokkal közelebb van Nyíregyházához mint Miskolc.*.....
- A francia ágy nem fér be az ajtón.
- *A francia ágy hosszúsága miatt nem fér be az ajtón.*.....
- Kata és Zsuzsa folyton beszélgetnek egymással az órán.
- *Kata és Zsuzsa kaphatna egy igazgatói figyelmet.*.....

## 19. Melléklet

1. Becsüld meg az alábbiak hosszúságát!

Ceruza:  $10\text{ cm}$   $8\text{ cm}$ .....

Matematika füzet:  $21\text{ cm}$ .....

Munkácsy utca:  $200\text{ m}$ .....

Víztorony utca:  $180\text{ m}$ .....

2. Adj becslést a magasságukra!

Kati néni:  $170\text{ cm}$ .....

Marika néni:  $185\text{ cm}$ .....

Szekrény:  $190\text{ cm}$ .....

Víztorony:  $80\text{ m}$ .....

Nagy tornaterem:  $18\text{ m}$ .....

3. Becsüld meg a szélességüket:

Matematika tankönyv:  $16\text{ és }18\text{ cm}$ .....

Egyenes vonalzó:  $2\text{ cm}$ .....

Ajtó:  $700$ .....

Szalag:  $1\text{ és }18\text{ cm}$ .....

4. Adj becslést az alábbiak mélységére:

A doboz:  $8\text{ cm}$ .....

A szekrény:  $60\text{ cm}$ .....

A Balaton átlagos mélysége:  $10\text{ m}$ .....

A nagyerdei csónakázó tó mélysége:  $1\text{ és }18\text{ m}$ .....

5. Írj egy-egy mondatot a közel és távol szavakkal!

Közel az igazság. Távol meg a hazugság.....

Közel van az ajtó. Távol az országút.....

Közel lát a szem. Távol meg az ember feke.....

Közel van az erdő. Távol van a Sivatag.....

Közel van a tó..... Távoli ismerős is van.....

6. Mikor használod a rövid és alacsony szavakat? Írj példákat és

húzd alá azokat, amelyeket mérőszalaggal is megmérhetünk.

látókör, szeme, utca, szék, szék.....

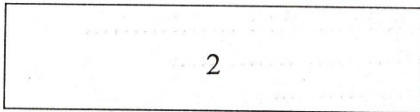
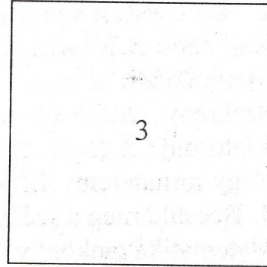
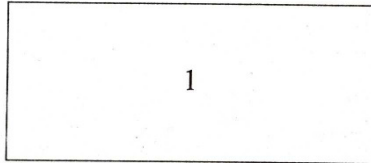
ember, gondolat, szállító repülő.....

lőcső, mondat, balon, ajtó.....

papír.....

## 19. Melléklet

7. Számítsd ki az alábbi téglalapok kerületét!



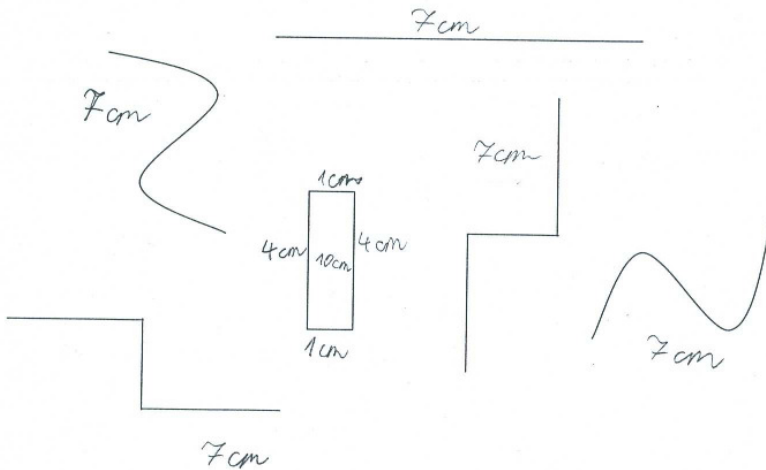
	hosszúság	szélesség	kerület
1. téglalap	7cm	3cm	20cm
2. téglalap	8cm	2cm	20cm
3. téglalap	5cm	5cm	20cm

Írd le, hogy hogyan számoltad ki a kerületüket! Több megoldást is írhatasz. Mit vettél észre?

A nem közi oldalak ugyanakkora  
 így nagyon könnyű összeadni ha  
 tudjuk a számaikat.

## 20. Melléklet

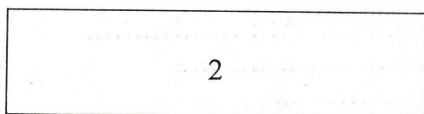
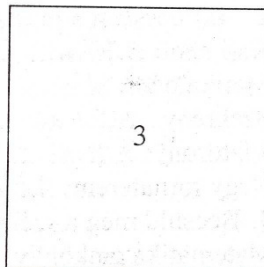
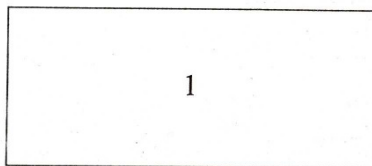
- Válogasd ki az alábbiak közül a hosszúság-mértékegységeket!  
 Deciméter, véka, kilométer, öl, kilogramm, milliméter, deciliter, perc,  
 méter, dekagramm, hektoliter, centiméter, róf, tonna, arasz  
 ..dm, km, öl, mm, m, cm, arasz.....
- Rendezd a fenti hosszúság-mértékegységeket növekvő sorrendbe, húzd alá a szabványmértékegységeket!  
 ..milliméter, centiméter, deciméter, arasz,  
 öl, öl, méter, kilométer.....
- Rendezd a következő tárgyakat magasságuk szerint csökkenő sorrendbe!  
 Iskola, nagy tornaterem, tanterem, tízemeletes ház, uszoda  
 Iskola, nagy tornaterem, tízemeletes ház, uszoda  
 ta.....
- Ha Kati magasabb Zsuzsinál és Csilla alacsonyabb Zsuzsinál, akkor igaz-e hogy Kati alacsonyabb Csillánál? Válaszodat indokold!  
 Nem igaz, mert Kati és Zsuzsi között  
 párhuzamos vonalak és ugyan úgy magasak és Zsuzsi akkor  
 ..
- A Balaton mélyebb a Velencei tónál, a Velencei tónál sekélyebbek a Hatosi, Fancsikai tavak. Írj állítást a Balaton és Fancsikai tavak kapcsolatára!  
 Ha úgy vesszük akkor a Velencei tónak nincs se mélység  
 ..de mélysége nincs.....
- Becsüld meg a vonalak hosszát centiméterben! Mindegyikre írd rá a becsléseidet!



Ha úgy vesszük mindegyiknek van párhuzamos vonal és a téglalap.

## 20. Melléklet

7. Számítsd ki az alábbi téglalapok kerületét!



	hosszúság	szélesség	kerület
1. téglalap	7cm	3cm	20cm
2. téglalap	3cm	2cm	20cm
3. téglalap	5cm	5cm	20cm

Írd le, hogy hogyan számoltad ki a kerületüket! Több megoldást is írhatasz. Mit vettél észre?

A nem körti oldalak ugyanakkorát  
igen nagyon könnyű összeadni ha  
tudjuk a hosszát.

## 21. Melléklet

1. Egészítsd ki a mondatokat a megadott szavak segítségével!  
Rövid, hosszú, széles, keskeny, közel, távol, messze, magas, alacsony, mély, sekély, vékony, vastag.
- A gödör nagyon *mély*, nem tudok kimászni belőle.
  - Ez a járda elég *keskeny*, nem férünk el hárman egymás mellett.
  - Nem lehet a *vékony* jégen korcsolyázni.
  - A Nagytemplom *távol* van az iskolától.
  - Ez a zsinór túlságosan *hosszú* lett, le kell belőle vágni.

2. Írj mondatokat a sekély és a mély szavakkal! Csillaggal jelöld azokat, amelyek méréséhez mérőszalagot használunk.

*Mély tó van az iskolánk.  
Ez a gödör nagyon mély.\*  
A tóparton van sekély.\**

3. Igazak-e az alábbi megállapítások? Döntésedet indokold! Rajzolj, ha szükséged van rá!

- Az iskola magasabb, mint a tornaterem. A tornaterem magasabb, mint az uszoda. Ezért az uszoda alacsonyabb az iskolánál.

*Nem igaz mert az uszoda ugyan olyan magas mint a torna terem*

- A Munkácsy utca rövidebb a Víztorony utcánál. A Munkácsy utca hosszabb az Arad utcánál. Ezért az Arad utca nem rövidebb a Víztorony utcánál?

*Nem igaz mert a Munkácsy u. 1. a Víztorony u. 2. az Arad u. 3.*

4. Az ágy szélesebb a kanapénál és a kanapé nem keskenyebb a fotelnél. Írj állításokat a fotel és az ágy, szélességének kapcsolatáról!

*Az ágy szélesebb is és hosszabb is mint a fotel*

## 22. Melléklet

2006-05-27

Név: .....

1. Helyesek-e az alábbi állítások? Indokold döntésedet!

- a. A Nagytemplom magasabb, mint a Csonka templom. A Csonkatemplomnál alacsonyabb az iskola épülete. Ezért az iskola épülete nem magasabb a Nagytemplomnál.

.....  
.....  
.....

- b. A szalag rövidebb a zsinórnál. A zsinór nem hosszabb, mint 2 méter. Ezért a szalag nem rövidebb 2 méternél.

.....  
.....

2. Végezd el az alábbi becsléseket!

A szekrény magassága: .....  
.....

Mélysége: .....  
.....

Szélessége: .....  
.....

A tábla szélessége: .....  
.....

Hosszúsága: .....  
.....

Vastagsága: .....  
.....

A folyosó hosszúsága: .....  
.....

Szélessége: .....  
.....

Magassága: .....  
.....

3. Hasonlítsd össze a matematika könyved és a matematika füzeted méreteit! Használd a szélesebb, keskenyebb, rövidebb, hosszabb, vékonyabb, vastagabb, stb. szavakat!

.....  
.....  
.....

4. Írja állításokat a tanteremről! Hasonlítsd össze a méreteit a folyosóéval és az uszodáéval! Használd a keskenyebb, magasabb, rövidebb, stb. kifejezéseket!

.....  
.....  
.....

## 23. Melléklet

1. a. Milyen magasan van az ablak felső széle? ... 3. M .....
- b. Milyen széles az ajtó? ... 2.2 m .....
- c. Milyen vastag a tanári asztal lapja? ... 2.5 cm .....
- d. Milyen hosszú a betűtábla? ... 4. M .....
- e. Milyen távol van az ajtótól az ablak mellett álló szekrény? ... 1.2 M .....

2. a. Van egy 20 cm hosszú sárga szívószálunk. Ennek feldarabolásával háromszöget készítünk. Mekkora lehetnek annak a háromszögnek az oldalai, melynek kerülete 19 cm?

... két oldaluk 6-6 cm de az egyik 7 cm hosszú lesz

- b. Van egy 20 cm hosszú piros szívószálunk. Ennek feldarabolásával téglalapot készítünk. Mekkora lehetnek annak a téglalagnak az oldalai, melynek kerülete 16 cm?

... két szemközti oldala lehet 4 cm a másik két oldal 4 cm

- c. Van egy 20 cm hosszú kék szívószál. Ennek feldarabolásával négyzetet készítünk. Hány centiméteres oldalú négyzeteket készíthetünk belőle?

... Minden oldala lehet 5 cm de az oldala ...  
 ... oldaluk 5 cm de az oldala ...  
 ... oldaluk 5 cm de az oldala ...

3. A Micimackó utca rövidebb a Kenguru utcánál. A Malacka utca hosszabb a Micimackó utcánál. Írj összefüggéseket a Kenguru és a Malacka utca hosszának kapcsolatára!

... Malacka utca hosszabb a Micimackó utcánál ...  
 ... Micimackó utcánál ...  
 ... Malacka utca hosszabb a Micimackó utcánál ...

4. Micimackó seprűje szélesebb a lapátjánál. A lapátja nem keskenyebb a szörkefejénél. Hasonlítsd össze Micimackó szörkefejének és seprűjének szélességét!

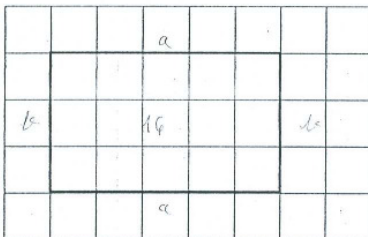
... seprű szélessége a szörkefejénél ...

## 23. Melléklet

5. Milyen hosszúság mértékegységekkel fejeznéd ki az alábbi tárgyak méreteit?

- a. Az úszómedence szélességét: *1 méter*
- b. A szekrény mélységét: *50 centiméter*
- c. Az M3-as autópálya hosszúságát: *160 kilométer*
- d. A testmagasságodat: *170 centiméter*
- e. A vonalzód vastagsága: *1 milliméter*
- f. A tanári asztal szélessége: *80 centiméter*

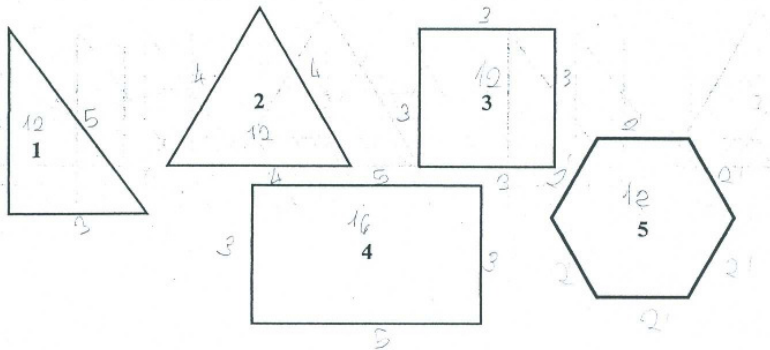
6. Határozd meg az alábbi téglalap kerületét többféleképpen!



$(a+b) + (a+b) = k$      $2 \cdot a + 2 \cdot b = k$      $(a+b) + (b+a) = k$   
 $a+b+a+b = k$      $4 \cdot a = k$      $16 \cdot 1 = k$      $4+4+4+4 = k$   
 $2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = k$      $8 \cdot 2 = k$      $8+8 = k$      $2+2+2+2+2+2+2+2 =$

7. Rakd kerületük szerint növekedő sorrendbe az alábbi alakzatokat!

$1 = 9 < 3 = 5 < 4$



## 24. Melléklet

1. Az alábbi dolgok közül helyettesíts egyet-egyet az első kipontozott helyre, és becsléseidet írd a második kipontozott helyre!

**Dolgok:** tanterem, szekrény, uszodai medence, víztorony, Munkácsy utca, folyosó, tábla, ajtó, matematika könyv, vonalzó, tanári asztal, padosor, kerítés, Balaton.

**Becslések értékei lehetnek:** 184 cm, 67 cm, 2 m 2 dm, 1m, 90 cm, 2 mm, 8 dm, 50 cm, 1 cm 7 mm, 70 m, 7 mm, 45 m, 6 m 2 dm, 300 m, 11 m.

- ✓ A Tábla magassága 1 m
- ✓ A Tábla hosszúsága 1 m
- ✓ A matematika könyv szélessége 16 cm
- ✓ A Balaton mélysége 13 m
- ✓ A kerítés vastagsága 1 cm
- ✓ A tanterem magassága 2 m
- ✓ A tanári asztal hosszúsága 1 m
- ✓ Az ajtó szélessége 2 m
- ✓ Az uszodai medence mélysége 120 cm
- ✓ A matematika könyv vastagsága 1 cm

2. Adj meg olyan dolgot, amelynek

Kerülete körülbelül 32 méter: A tanterem

Vastagsága körülbelül 25 milliméter: A tanári asztal felületlapja

Magassága körülbelül 180 centiméter: A tanterem

Kerülete körülbelül 7 deciméter: A kerítés

Szélessége körülbelül 18 méter: A tanterem

Mélysége körülbelül 80 centiméter: A tanterem

## 25. Melléklet

Köszönetemet fejezem ki, amiért Margó néni plusz  
óráinak köszönhetően az átlagnál jobban  
tudom a mértékváltást és a becslést. Nagyon  
tetszett az a módszer, amelyet a szabadban  
végstünk el. jobb lett volna, ha egy-egy matek  
óra helyett tartottuk volna. Az órai során  
a kreativitásomat is fejlesztette, hiszen néha mo-  
gunknak kellett kitalálni egy alakzat formáját  
és területét. Margó néninek köszönhetően a  
világ másik részén is hallottak rólam.  
Margó néni kitűnően bánik a gyerekekkel.

## 26. Melléklet

Margit néni órai program értékelés nélkül (Mandula a lelkület -  
levegővel nem mehetnek.) 1. osztály végül barátai az órák. Azóta már  
mindent megtanultam. A könnyű megfigyeléseket (a nyilvánvalókat)  
meg kell venni. A magán feladatok visszajelzéseket az órák. Azóta már  
órai személyes jól dolgoztam ide volt olyan személyes nem. Az óra  
magánom ezeket az órákat és néhány visszajelzést az órák. Volt olyan  
olyan óra amikor kimentem és ott megéreztem az időt. Az óra  
de nagyon tetszett. (Mik) amikor megfigyeléseket tanultam nem tudtam,  
keves ezeket is azt lehet vélelmezni. Szóval Margit néni órai nem  
csak értékelés nélkül és mindegyikük bizony értékelés nélkül.

## 27. Melléklet

Az osztály összetétele nagyon jó. Sok értelmes, okos gyerek tanul itt, emellett szorgalmasak, érdeklődők is. Magatartásukkal sincs probléma.

A Tarcsi Margit által tartott foglalkozások segítségünkre voltak a „Mennyiségek, mérések, mértékegységek”, a „Területmérés” témakörök tanításakor. A tanítási órákon meglehetősen kevés idő jut a gyakorlati tapasztalatszerzésre. Ezeken a foglalkozásokon a sok játékos feladat, a mesék világa közben a gyerekek észre sem vették, hogy valójában komoly elméleti tudásra tettek szert. Nagyon jól érezték magukat a „játszva tanulás” közben, s hétről-hétre várták ezeket az órákat.

A párhuzamos osztályhoz képest ők sokkal gyakorlatiasabbak, sokkal biztosabban váltják át a mértékegységeket, több megoldást találnak. A terület fogalmát, a kerületszámítást nagyon hamar megértették és készségszinten használják is. Sajnos 3-4. osztályban ezekre a témakörökre kevés az óraszám, a tanultak elmélyítésére kevés az idő. Éppen ezért volt igen jó ez a lehetőség a gyerekek számára. Biztosabb tudás birtokába jutottak, melyet a későbbiek során is fel tudnak használni.

Köszönjük Tarcsi Margit tanárnő áldozatos munkáját!

Debrecen, 2006. 12. 18.



Nagyné Ménes Katalin  
osztályfőnök



Kulcsár Gáborné  
matematikát tanító nevelő

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönettel és hálával tartozom Dr. Szendrei Julianna főiskolai tanárnak, Dr. Ambrus András és Dr. Lajkó Károly egyetemi docenseknek hasznos szakmai tanácsukért és segítségükért és azért a figyelemért, amelyet munkám iránt tanúsítottak.

Köszönöm témavezetőm, Dr. Daragó József megértését és türelmét, s azért külön hálás vagyok neki, hogy engedett szabadon kibontakozni.

Hálával tartozom kollégáimnak, különösen Dr. Uzonyi-Kiss Juditnak a stilisztikában, Dr. Tohol Évának az angol nyelvben és Herendiné Dr. Kónya Eszternek az informatikában nyújtott segítségéért.

Köszönet illeti a Bocskai István Általános Iskola vezetését, tanítóit, hogy lehetővé tették a kísérlet megvalósítását. Nagy hálával tartozom a gyerekeknek, akik aktivitásukkal és gondolatébresztő ötleteikkel nagyban hozzájárultak a dolgozat elkészítéséhez.

Köszönettel tartozom családomnak és barátaimnak türelmükért és biztató támogatásukért.

# A HOSSZÚSÁG ÉS KERÜLET FOGALMÁNAK ALAKULÁSA KISISKOLÁS KORBAN

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében  
a matematika tudományágban

Írta: Tarcsi Margit okleveles középiskolai tanár

Készült a Debreceni Egyetem  
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika programja  
keretében

Témavezető: Dr. Daragó József

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. ....  
tagok: Dr. ....  
Dr. ....

A doktori szigorlat időpontja: .....

Az értekezés bírálói:

Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....  
tagok: Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: .....