

Geometriai szerkesztések tanítása

Témavezető: Dr. Kovács András

Készítette: Balogh Imre

**Debreceni Egyetem,
Természettudományi Kar, Matematika Intézet
Debrecen 2008**

„A matematikához nem vezet királyi út.”

Euklidész

Tartalom

Bevezetés	4
1.1 A geometriai szerkeszthetőség	5
1.1.1 Kockakettőzés	6
1.1.2 Szögharmadolás	6
1.1.3 Körnégyszögesítés (és körkiegyenesítés):	7
1.1.4 A szabályos n-szög	7
1.2 Szerkesztések	8
2.1 Euklideszi szerkesztések– GeoGebra-val	10
2.1.1 A GeoGebra program:	11
2.1.2 Közvetlen adatbevitel:	13
2.1.3 Parancsok	16
1) Általános parancsok	16
2) Numerikus parancsok	16
3) Szög	18
4) Pont	18
5) Vektor	20
6) Szakasz	21
7) Félegyenes	21
8) Sokszög	21
9) Egyenes	21
10) Kúpszelet	23
11) Függvény	23
12) Ív és cikk	25
13) Kép	26
14) Mértani hely	26
15) Geometriai transzformációk	26
2.2 Szerkesztések GeoGebrával	28
2.2.1 A sík egybevágósági transzformációi:	29
2.2.2 Háromszögek	31
A háromszög köré írt, beírt és hozzáírt köre	34
A Thalész-tétel	36
2.2.4 Szimmetrikus négyszögek	40
2.2.5 A kör és részei	42
2.2.6 Párhuzamos szelők	45
2.2.7 Pont körre vonatkozó hatványa	49
2.2.8 Aranymetszés	51
2.2.9 Inverzió	53
2.2.10 Kúpszeletek	57
<i>Az ellipszis</i>	57
<i>A hiperbola</i>	58
<i>A parabola</i>	59
Befejezés	61
Köszönetnyilvánítás	62
Irodalomjegyzék	63

Bevezetés

A geometria végigkíséri mindennapjainkat, körülvesz bennünket. Bármit is nézünk meg az utcán, az beleillik egy geometriai modellbe; gyakorlatilag a világunk maga is egy geometriai modell, s mint olyan, bármilyen bonyolultnak tűnik, a legegyszerűbb elemekből épül fel. Adott körülmények között hogy viselkednek ezek az építőelemek? Egyáltalán mit tudunk mondani róluk?

A számítógépek térnyerésével új lehetőségek nyíltak a modellek, és ezzel együtt az építőelemeik vizsgálatára. Már a régi görögök is szerették volna tudni, hogyan néz ki egy adott kockánál kétszer nagyobb kocka. Számítógép segítségével nekünk már megvan a lehetőségünk, hogy megláthassuk. De hogyan kapjuk meg? Ha körzővel és vonalzóval kellene megszerkeszteni egy oldalát, sikerülne-e?

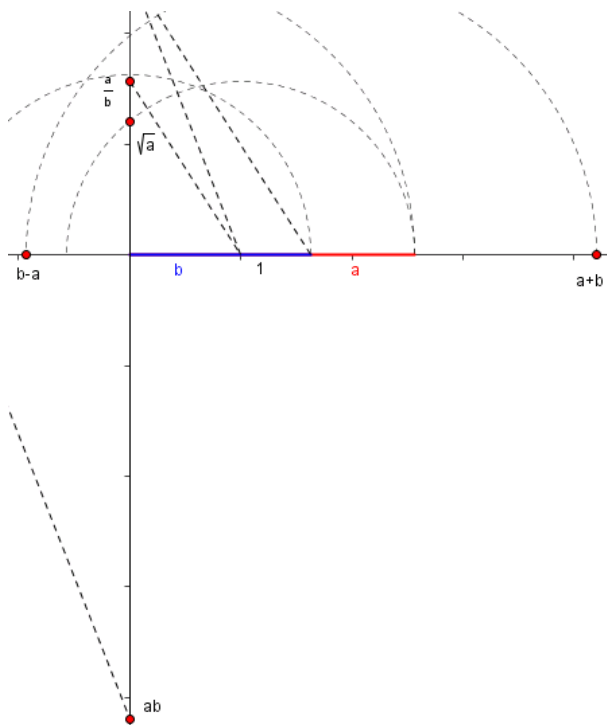
Szakedolgozatom első részében egy rövid elméleti áttekintés keretében próbálok választ adni az ilyen, és ehhez hasonló kérdésekre.

A második részben pedig a számítógépet segítségül hívva megpróbálom bemutatni, hogyan lehet „elektronikus körzővel és vonalzóval” végezni euklideszi szerkesztéseket, néhány alapvető (mint például egy háromszög köré írható kör), és izgalmasabb (mint például inverzió, ami már elméletében legalább is, túlmutat az euklideszi geometrián) szerkesztést bemutatva, természetesen némi elméleti alapozás után.

A geometria a térbeli törvényszerűségek, összefüggések leírásából kialakult ága; maga a geometria szó görögül eredetileg földmérést jelentett. Kialakulásában és több eredményének felfedezésében nagy szerepet játszott az ókori keleti kollektív munkára épült gazdasági rendszer (innen ered a terület- és térfogatszámítás), és a szintén keleti eredetű, de a görögök által is művelt csillagászat. A geometria az i.e. 5. század körül azonban lassan-lassan elszakadt tapasztalati gyökereitől, az eleata filozófusok (leginkább Zénón) és olyan tudósok, mint Thalész hatására. A geometria az első tudományág, amit deduktív módon, vagyis axiómarendszer formájában építettek fel (ez elsősorban Eukleidész nevéhez fűződik, aki az Elemek című munkájával alapozta meg a geometria axiomatikus felépítését). Arra a kérdésre, hogy mi is tulajdonképp a geometria, manapság lehetetlen egy mondatban válaszolni. Közvetlen, gyakorlati alkalmazása miatt a geometria a matematika elsőként kifejlődő ága volt, és az első ismeretterület, melyet sikerült, több próbálkozás után, axiomatikus elvekre építeni. A görögök számos szerkesztés jellegű

kérdéssel foglalkoztak. A következő jelentős lépésre egy évezreddel később, az analitikus geometria felfedezésével került sor, melyben megjelentek olyan fogalmak, mint a koordináta rendszerek, és ahol a pontokat számpárokkal vagy számhármassokkal írták le. Ezen új nézőpont is segíthetett abban, hogy kifejlődjenek az euklideszitől eltérő geometriák. Mintegy kétezer éven át Eukleidész axiómarendszere uralkodónak számított, és nemcsak a geometria, de az összes tudomány bizonyos értelemben mintaképnek tekintette.

1.1 A geometriai szerkeszthetőség



Legyen adott az euklideszi síkon a P_1, P_2, \dots pontoknak egy (legalább kételemű) H_0 halmaza. Rajzoljuk meg az összes P_i, P_j ($i \neq j$) pontpáron átmenő egyenest, továbbá az összes P_k pont körüli $\overline{P_i P_j}$ sugarú köröket. Ezen egyenesek és körök metszéspontjainak H_1 halmaza tartalmazza H_0 pontjait. Tekintsük most H_1 pontjait adottnak, és ismételjük meg az alábbi eljárást. Az így nyert pontok halmaza legyen H_2 , $H_1 \subseteq H_2$. Ennek megismétlésével a $H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots$ ponthalmazhoz jutunk. Egy P pontot a H_0 halmazból megszerkeszthetőnek mondunk, ha P benne van valamelyik H_i -ben.

Legyen adott a (legalább két elemű) H_0 ponthalmaz, és legyen T_0 a H_0 -hoz tartozó(egyik alap) számtest. Egy pont akkor szerkeszthető meg a H_0 ponthalmazból, ha a koordinátái olyan T_i számtestnek az elemei, amely T_0 -ból véges sok lépésben áll elő a következőképp: $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_i$, ahol $T_{j+1} = T_j(\sqrt{a_j})$, ($0 < a_j \in T_j; j=0 \dots i-1$).

A Galois-elmélet¹ felhasználásával a szerkeszthetőség kritériuma a következőképp is megadható: Legyen adott a (legalább két elemű) H_0 ponthalmaz, és legyen T_0 a H_0 -hoz tartozó (egyik alap) számtest. Egy x_0 valós szám akkor szerkeszthető meg H_0 -ból, ha x_0 zérushelye egy olyan, a T_0 fölötti irreducibilis $f(x) \in T_0[x]$ polinomnak, amelynek Galois-csoportja 2^k , $k \geq 0$ rendű. Ennek következménye, ha az $f(x) = x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$, $c_i \in \mathbb{R}$ polinom a $T_0 = \mathbb{Q}(c_1, c_2, c_3)$ test fölött irreducibilis, akkor egyetlen zérushelye sem szerkeszthető meg a $0, 1, c_1, c_2, c_3$ számokkal jellemzett pontok H_0 halmazából.

A racionális együtthatós és a racionális számtest fölött irreducibilis harmadfokú polinomnak egyik gyöke sem szerkeszthető meg a $0, 1$ számokkal adott pontokból.

Az ókor nevezetes szerkesztési problémái ezek szerint nem oldhatók meg.

1.1.1 Kockakettőzés

Adott az egységszakasz, szerkesszük meg a $V = 2$ kocka oldalát; a szerkesztendő szakasz hossza kielégíti az $x^3 = 2$ egyenletet, tehát a szerkesztendő $\sqrt[3]{2}$ hosszú szakasznak, azaz az $f(x) = x^3 - 2$ polinom zérushelyének a megszerkesztését jelenti a 0 és 1 számokhoz tartozó pontokból. Most $T_0 = \mathbb{Q}$, $f(x)$ pedig nyilvánvalóan irreducibilis \mathbb{Q} fölött.

1.1.2 Szögharmadolás

Adott α szög, szerkesszük meg $\frac{1}{3}\alpha$ -t. Szerkesszük meg a 60° harmadát, a 20° -ot. Adott a 0 és 1 számmal jelzett két pont, s hozzájuk tartozó számtest \mathbb{Q} . Tehát most $T_0 = \mathbb{Q}$. A 20° -os szög megszerkesztése egyenértékű az $x = \cos 20^\circ$ pont megszerkesztésével. A trigonometriai összefüggések alapján kapjuk a $\cos 3\alpha = 4\cos^2\alpha - 3\cos\alpha$ azonosságot. Ebből $x = \cos 20^\circ$ választásával a $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ egyenlethez jutunk, ami irreducibilis \mathbb{Q} fölött. (Ezzel csak azt bizonyítottuk, hogy nem tudjuk tetszőleges szög harmadát megszerkeszteni; viszont vannak olyan szögek, amiknek elvégezhető szerkesztéssel a harmadolása.)

¹ A Galois-elmélet, valamint a hozzá kapcsolódó csoport és gyűrűelmélet megértéséhez jó alap Bódi Béla: Algebra 1 – A csoportelmélet alapjai, és Algebra 2 – A gyűrűelmélet alapjai című egyetemi jegyzetei.

1.1.3 Körnégyesítés (és körkiegyenesítés):

Szerkesztendő az egységkörrel azonos területű, (illetve kerületű négyzet) oldala. Azaz, kerület esetén a keresett négyzet területe $x^2 = \pi$ (illetve oldala $4x = 2\pi$), tehát $\sqrt{\pi}$ -t (illetve $\frac{\pi}{2}$ -t) kell megszerkeszteni. Ebben az esetben is $T_0 = \mathbb{Q}$. A feladat megoldását az $f(x) = x^2 - \pi$ (illetve $f(x) = 2x - \pi$) polinom zérushelye szolgáltatja. Mivel π transzcendens, ezért $\sqrt{\pi}$ (és $\frac{\pi}{2}$) is transzcendens, a \mathbb{Q} -ból megszerkeszthető pontok viszont mind algebrai számokkal jellemezhetők.

1.1.4 A szabályos n -szög

A szabályos n -szög akkor szerkeszthető meg, ha $n = 2^k p_1 \dots p_r$ ($k \geq 0, r \geq 0$), ahol $p_i = 2^{2^t} + 1$ ($t = 0, 1, 2, \dots$) alakú prímszám. (Az ilyen alakú prímelek a Fermat-prímelek.) Ezek szerint a szabályos ötszög szerkeszthető.

1.2 Szerkesztések

Egy síkbeli alakzatot bizonyos adatok alapján megrajzolhatunk, megszerkeszthetünk. Ehhez szükséges, hogy elegendő és ellentmondást nem tartalmazó adatok álljanak rendelkezésre, s hogy kellő eszközök birtokában legyünk.

A szerkesztés megbízhatósága a használt eszközök pontosságától s attól függ, milyen gondal dolgozunk. Bár e tényezők a gyakorlatban igen fontosak, elméleti vizsgálatoknál feltételezzük, hogy eszközeink tökéletesen pontosak, s hogy a szerkesztést kifogástalan gondal végeztük. E feltételezés mellett kérdezni lehet, hogy bizonyos eszközök birtokában és pontosan megszabva, hogy ezeket az eszközöket hogyan használjuk, milyen szerkesztéseket tudunk elvégezni.

A legegyszerűbb eszköz a vonalzó és a körző. Az ezekkel megtehető legegyszerűbb lépések:

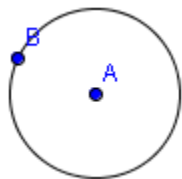
1. A vonalzót két ponthoz illesztve megrajzolhatjuk a két ponton áthaladó egyenest.



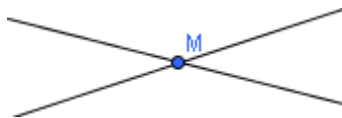
2. Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.



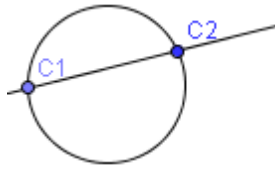
3. Adott pont körül adott körzőnyílással kört rajzolhatunk.



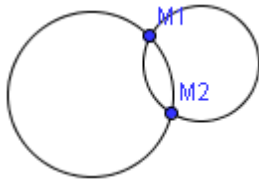
4. Két metsző egyenes metszéspontját megkereshetjük.



5. Egy kör és azt metsző egyenes mindkét metszéspontját megkereshetjük.



6. Két egymást metsző kör mindkét metszéspontját megkereshetjük.



Ha egy szerkesztést pusztán a felsorolt hat lépés véges sokszori alkalmazásával elvégezhetünk, akkor *euklideszi szerkesztésnek* (körzővel és vonalzóval végzett szerkesztésnek) nevezzük. A szerkeszthetőség kérdésénél feltesszük, hogy van tetszőlegesen hosszú vonalzónk és tetszőlegesen nagynyílású körzőnk.

Axiomatikus tisztasággal euklideszi szerkesztésnek az olyan eljárást nevezzük, melynél az adatokból kiindulva a kívánt alakzathoz úgy jutunk el, hogy közben:

1. Csak olyan pont szerepeltethető, ami két ismert egyenes, két ismert kör, vagy ismert egyenes és ismert kör metszéspontja.
2. Csak olyan egyenes szerepeltethető, aminek két pontja ismert.
3. Csak olyan kör szerepeltethető, aminek középpontja ismert, és sugara két ismert pont távolsága.
4. Szerepeltethető a síknak két, semmilyen előírással meg nem kötött pontja is, különben nem tudunk elindulni.

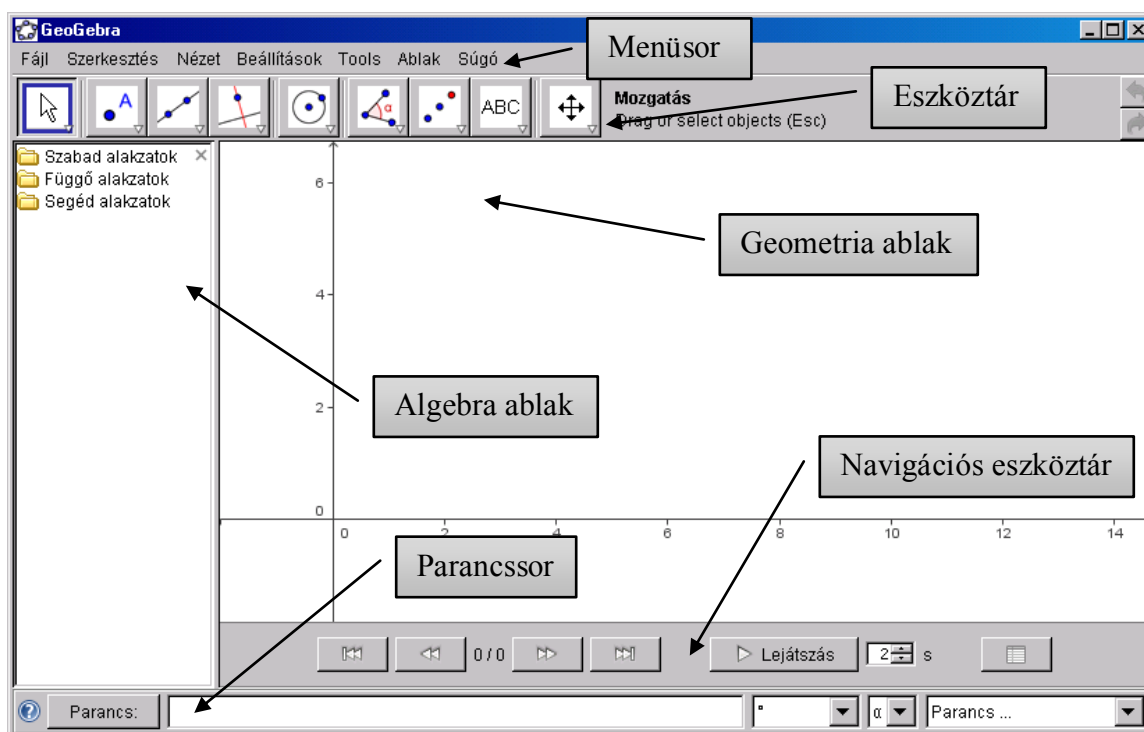
2.1 Euklideszi szerkesztések– GeoGebra-val

Ma már minden iskolában van számítógép és a diákok nagy többsége használja is. Miért ne lehetne bemutatni, tanítani alapvető szerkesztéseket számítógépen? Ez amellet, hogy érdekesebbé teszi a matematika tanulást, fejleszti a számítógép használatot is.

Ennek szemléltetésére a GeoGebra programot használtam. Ez egy platform független matematika-oktatási segédeszköz, mely témájában a geometriához, algebrához, és kalkulushoz kapcsolódik. A programot Markus Hohenwarter fejleszti a Salzburgi Egyetemen, középiskolai segédletként is kiválóan használható, éppen ezért érdemes egy kicsit megismerkedni a használatával. A program egyrészt egy dinamikus geometriai rendszer, ahol pontokat, vektorokat, szakaszokat, egyeneseket, kúpszeleteket, függvényeket ábrázolhatunk, illetve ezeket dinamikusan változtathatjuk. Másrészt egyenletek és koordináták is megadhatók vele közvetlenül. A GeoGebra képes a függvények deriváltjának és integráljának meghatározására, emellett parancsokat biztosít a gyökök és szélsőértékek kereséséhez. Tehát egy alakzat egyszerre van jelen kifejezés és geometriai rajz formájában. A GeoGebra egyéni felhasználásra ingyenesen letölthető a www.geogebra.org címről. Használatához szükséges még egy Java virtuális gép (JVM), ez szintén ingyenesen letölthető a java.sun.com–ról. Telepítése egyszerű, némi hiányossággal ugyan, de „beszéli” a magyar nyelvet is. Ha már van a gépre telepítve JVM, telepítéskor meg kell adni a GeoGebra- nak a JVM helyét; ha nincs, először a JVM- et kell telepíteni, utána a GeoGebra- t.

2.1.1 A GeoGebra program:

A programot a GeoGebra.exe-vel elindítva a következő képernyő fogad minket:



A program induló ablakának részei

- 1) Menüsor: a program által elérhető funkciókat tartalmazza. Legérdekesebb menüpontja a Fáj\Export:
 - i) Dinamikus munkalap, mint weblap (html): megadható a szerkesztés címe, a szerző és a dátum. Írható a szerkesztéshez magyarázó szöveg a szerkesztés elé és után. Ide kerül beágyazásra maga a szerkesztés, melynek a mérete pixelben megadható. Exportáláskor három fájl keletkezik egyszerre, melyeknek egy könyvtárban kell lennie, hogy a dinamikus munkalap működjön. Az így elkészült exportált fájl bármilyen böngészővel megnézhető (Java környezet itt is szükséges) és számos szövegszerkesztővel szerkeszthető. Az elkészült három fájl:
 - egy .html fájl, ez tartalmazza a munkalapot
 - egy .ggb fájl, ami a szerkesztést tartalmazza

- egy geogebra.jar, ami az interaktivitást biztosítja (Java alapokon)
- ii) Rajzlap, mint kép (png, eps): exportálás esetén választhatunk, hogy a képet png formátumban pixel grafikus képként mentjük el, vagy eps formátumban vektorgrafikus képként. A png formátumú kép felbontása szabályozható 72-600 dpi között, míg az eps formátumú kép felbontása fixen 72 dpi.
 - iii) Rajzlap vágólappra másolása: egy png formátumú, képernyő nagyságú képet másolunk a vágólappra. Előnye, hogy mentés nélkül tudjuk a vágólapon lévő képet más dokumentumokba beszúrni.
- 2) Eszköztár: az adatok, objektumok geometriai úton való bevitelére szolgál. Az eszköztár ikonjait kattintással tudjuk kiválasztani a megfelelő csoport legördülő listából, melyet az ikonok sarkán található kis háromszög jelez. Az aktuálisan kiválasztott ikon keretezetten jelenik meg, illetve jobb oldalt, az ikonok mellett kiírja a program, hogy melyik az aktuális ikon.
 - 3) Algebrai ablak: a program objektumainak értékét, illetve képletét tartalmazza:
 - Szabad alakzatok: mi vesszük fel ezeket, és a síkon szabadon mozgathatók
 - Függő alakzatok: a szabad alakzatok függvényében változnak, egyébként nem mozgathatók.
 - Segéd alakzatok: ide mi helyezhetünk le tetszőleges objektumokat.
 - 4) Geometriai ablak (azaz rajzlap): az alakzatok megjelenítésére szolgál. Tulajdonságait a Beállítások\Rajzlap menünél állíthatjuk be.
 - 5) Navigációs eszköztár: a már elkészült szerkesztés lépésein tudunk oda-vissza lépegetni. A Lejátszás gombra kattintva a teljes szerkesztés menetét tudjuk visszajátszani a megadott

sebességgel. A lejátszás gomb mellett található ikon pedig a Szerkesztő protokoll, ami a szerkesztés lépéseit mutatja sorrendben, feltüntetve az adott alakzatok definícióját is.

- 6) Parancssor: az adatok, objektumok közvetlen bevitelére szolgál. Objektumokat a rajzlapon közvetlenül, parancsok segítségével is felvehetünk, vagy az eszköztár ikonjainak segítségével is megjeleníthetünk. Mindkét esetben megkapjuk magát az alakzatot a rajzlapon és az alakzat képletét az algebra ablakban.

2.1.2 Közvetlen adatbevitel:

A program lehetőséget nyújt a közvetlen adatbevitelre, amikor is egy objektumot nem az eszköztár segítségével veszünk fel, hanem a parancssorban vesszük be. Ekkor lehetőségünk van megadni az objektum nevét, például $O=(0,0)$, illetve indexelhetjük is az objektumokat. Az O_1 -nek megfelel az O_1 . Használhatók a szokásos aritmetikai műveletek, úgymint az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, illetve a zárójelek, a faktoriális és a hatványozás is.

Számok esetében a $.$ jelöli a tizedesvesszőt. A GeoGebra a megadott számot csak annyi tizedesjellel veszi figyelembe, amennyit a Beállítások\Tizedes hely menünél megadtunk (alapértelmezésben kettő). Pl.: $a = 3.21$.

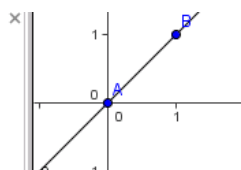
Szögeket megadhatunk mind fokban, mind radiánban. Emellett azt is meghatározhatjuk, hogy engedélyezzük-e a reflex szögek használatát. Ha nem, akkor a program két félegyenes által bezárt szögek közül automatikusan a kisebbet adja. Pl.: $\gamma = 45^\circ$, vagy $\delta = \pi/3$.

A pontok mind Descartes-féle koordinátákkal, mind polár koordinátákkal megadhatók. Egy pont Descartes-féle koordinátákkal pl.: $O = (0,1)$, ugyanez a pont polár koordinátákkal $O = (1,90^\circ)$.

Egyeneseket paraméteres formában, vagy lineáris egyenletként adhatunk meg. Paraméteres egyenletben az x és y változók használhatók. A paraméteres alakban pedig X és t változó és előre

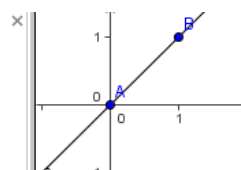
megadott pont és vektor használható. Az egyeneseket kis betűvel (pl.: e, f) jelöljük, és kettősponttal (:) választjuk el. Pl.: az $A = (0,0)$ és $B = (1,1)$ pontokra illeszkedő e egyenes paraméteres formája $e: X = (0,0) + t(1,1)$, a lineáris egyenlete $e: -x + y = 0$.

Szabad alakzatok
 $A = (0, 0)$
 $B = (1, 1)$
 Függő alakzatok
 $e: -x + y = 0$



az e egyenes lineáris egyenlete

Szabad alakzatok
 $A = (0, 0)$
 $B = (1, 1)$
 Függő alakzatok
 $e: X = (0, 0) + \lambda (1, 1)$



az e egyenes paraméteres formája

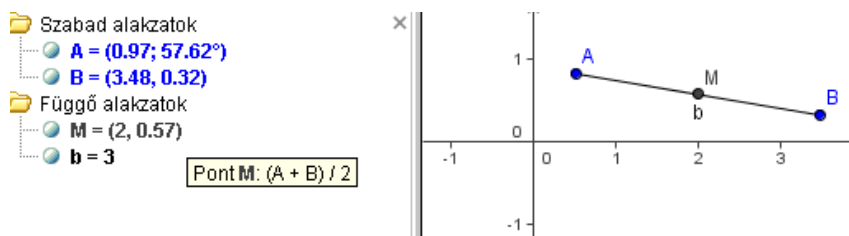
Függvények beviteléhez használhatjuk a már korábban definiált objektumainkat, illetve használhatjuk a GeoGebra beépített függvényeit.

A beépített függvények:

összeadás	+
kivonás	-
szorzás	*
osztás	/
hatványozás	^, vagy ² , ³
faktoriális	!
Gamma függvény	gamma()
zárójelek	()
x koordináta	x()
y koordináta	y()
abszolút érték	abs()
előjel	sgn()
négyzetgyök	sqrt()
exponenciális függvény	exp()
logaritmus (természetes)	log()

koszinusz	cos()
szinusz	sin()
tangens	tan()
arc koszinusz	acos()
arc szinusz	asin()
arc tangens	atan()
koszinusz hiperbolikus	cosh()
szinusz hiperbolikus	sinh()
tangens hiperbolikus	tanh()
koszinusz antihyperbolikus	acosh()
szinusz antihyperbolikus	asinh()
tangens antihyperbolikus	atanh()
számnál nem nagyobb, legnagyobb egész	floor()
számnál nem kisebb, legkisebb egész	ceil()
kerekítés	round()

Például: az M , mit az A és B pontokkal jelölt szakasz középpontja, megadható a következő formában: $M = (A + B)/2$.



Egy vektor hossza kiszámolható, mint $l = \text{sqrt}(v * v)$.



2.1.3 Parancsok

Parancsok segítségével létre tudunk hozni új objektumokat, illetve meg tudjuk változtatni azokat.

1) Általános parancsok

- *Kapcsolat*

Kapcsolat[a alakzat, b alakzat]: egy üzenet ablakban megmutatja az a és b alakzatok közötti kapcsolatot.

Ez a parancs lehetőséget biztosít számunkra, hogy megvizsgáljuk két alakzat egybevágóságát, pont egyenesre ill. kúpszeletre illeszkedését, valamint egyenes kúpszelethez viszonyított érintő, metsző vagy kitérő voltát.

- *Törlés*

Törlés[alakzat]: töröl egy alakzatot minden leszármazottjával együtt.

2) Numerikus parancsok

- *Hossz*

Hossz[vektor]: egy vektor hossza.

Hossz[A pont]: az A ponthoz tartozó helyvektor hossza.

- *Terület*

Terület[A pont, B pont, C pont, ...]: pontokkal megadott sokszög területe.

- *Távolság*

Távolság[A pont, B pont]: az A és B pontok távolsága.

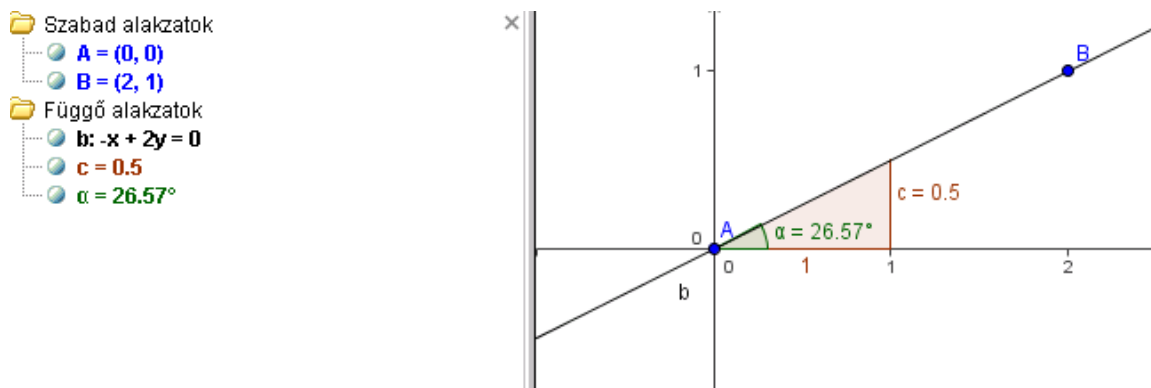
Távolság[A pont, g egyenes]: az A pont és a g egyenes távolsága.

Távolság[g egyenes, h egyenes]: a g és a h egyenes távolsága. Metsző egyenesek távolsága 0. Ez a függvény párhuzamos egyenesek esetén használható.

- *Meredekség*

Meredekség[egyenes]: egy egyenes meredeksége. Ez a parancs kirajzol egy meredekségi háromszöget is, melynek mérete változtatható.

Például az $A(0, 0)$ és a $B(2, 1)$ pontokra illeszkedő b egyenes meredekségét a kapott derékszögű háromszög α szögének tangense adja:



- *Sugár*

Sugár[kör]: egy kör sugara.

- *Paraméter*

Paraméter[parabola]: egy parabola paramétere (a vezéregyenes és fókusz távolsága).

- *Nagy tengely hossza*

NagyTengelyHossz[kúpszelet]: egy kúpszelet nagytengelyének hossza.

- *Kis tengely hossza*

KisTengelyHossz[kúpszelet]: egy kúpszelet kistengelyének hossza.

- *Excentricitás*

Excentricitás[kúpszelet]: egy kúpszelet excentricitása.

- *Alsóösszeg*

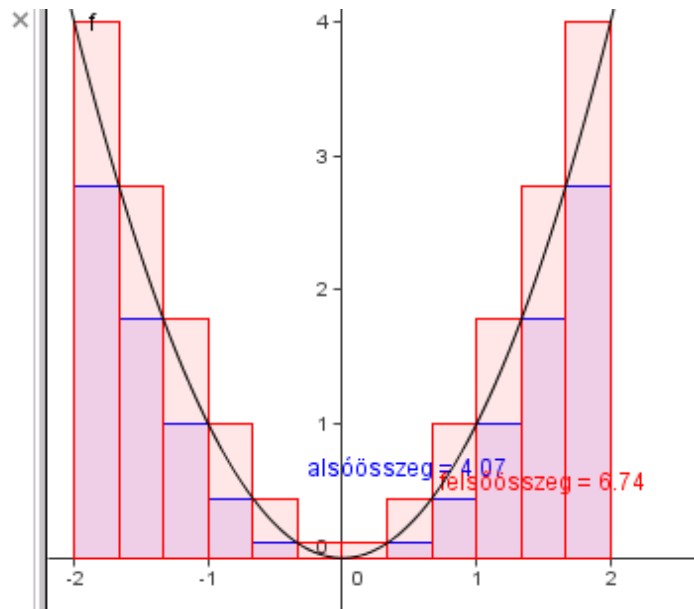
AlsóÖsszeg[f függvény, a szám, b szám, n szám]: az $f(x)$ függvény alsó összege az $[a,b]$ intervallumon, n beosztással. Megrajzolja az alsó összeget, mint téglalap területet is.

- *Felsőösszeg*

FelsőÖsszeg[f függvény, a szám, b szám, n szám]: az $f(x)$ függvény felső összege az $[a,b]$ intervallumon, n beosztással. Megrajzolja az felső összeget, mint téglalap területet is.

Például az $f(x) = x^2$ függvény $[-2, 2]$ intervallumon vett alsó és felső összege:

- 📁 Szabad alakzatok
 - 🔵 $f(x) = x^2$
- 📁 Függő alakzatok
 - 🔵 alsóösszeg = 4.07
 - 🔴 felsőösszeg = 6.74



3) Szög

Szög[vektor, vektor]: két vektor szöge (0° és 360° között).

Szög[egyenes, egyenes]: két egyenes irányvektora közötti szög (0° és 360° között).

Szög[A pont, B pont, C pont]: az ABC pontok által határolt szög (0° és 360° között). B a szög csúcsa.

Szög[A pont, B pont, α szög]: az A, B és az A pont B körüli α szöggel való elforgatásából keletkező A' pontok által meghatározott szög. Ekkor az A pont elforgatott képe is létrejön. (Forgatás[B, α , A]).

Szög[kúpszelet]: a kúpszelet nagytengelyének az x tengellyel bezárt szöge.

Szög[v vektor]: az x tengely és v vektor által bezárt szög.

Szög[A pont]: az x tengely és A pont helyvektora által bezárt szög.

Szög[szám]: szög átalakítása radiánná (az eredmény 0 és 2π közötti).

Szög[sokszög]: egy sokszög összes belső szöge.

4) Pont

- Pont

Pont[egyenes]: pont egyenesen.

Pont[kúpszelet]: pont kúpszeleten.

Pont[függvény]: pont függvényen.

Pont[vektor]: pont vektoron.

Pont[P pont, v vektor]: $P + v$ pont.

- *Középpont*

Középpont[A pont, B pont]: az A és a B pontok által meghatározott szakasz középpontja.

Középpont[szakasz]: szakasz középpontja.

- *Közép*

Közép[kúpszelet]: kúpszelet középpontja.

- *Fókusz*

Fókusz[kúpszelet]: kúpszelet (összes) fókuszpontja.

- *Csúcspont*

Csúcspont[kúpszelet]: kúpszelet (összes) csúcspontja.

- *Súlypont*

Súlypont[sokszög]: sokszög súlypontja.

- *Metszéspont*

Metszéspont[g egyenes, h egyenes]: a g és a h egyenesek metszéspontja.

Metszéspont[g egyenes, c kúpszelet]: a g egyenes és a c kúpszelet összes metszéspontja.

Metszéspont[g egyenes, c kúpszelet, n szám]: a g egyenes és c kúpszelet n-edik metszéspontja.

Metszéspont[c kúpszelet, d kúpszelet]: a c és d kúpszeletek összes metszéspontja.

Metszéspont[c kúpszelet, d kúpszelet, n szám]: a c és d kúpszeletek n-edik metszéspontja.

Metszéspont[f polinom, g polinom]: az f és g polinomok összes metszéspontja.

Metszéspont[f polinom, g polinom, n szám]: az f és g polinomok n-edik metszéspontja.

Metszéspont[f polinom, g egyenes]: az f polinom és g egyenes összes metszéspontja.

Metszéspont[f polinom, g egyenes, n szám]: az f polinom és g egyenes n-edik metszéspontja.

Metszéspont[f függvény, g függvény, A pont]: az f és g függvények metszéspontja az A kezdőértékkel.

Metszéspont[f függvény, g egyenes, A pont]: az f függvény és a g egyenes metszéspontja az A kezdőértékkel.

- *Gyök*

Gyök[f polinom]: az f polinom összes gyöke (pontként).

Gyök[f függvény, a szám]: az f függvény egy gyöke az a kezdőértékkel.

Gyök[f függvény, a szám, b szám]: az f függvény egy gyöke az [a, b] intervallumon.

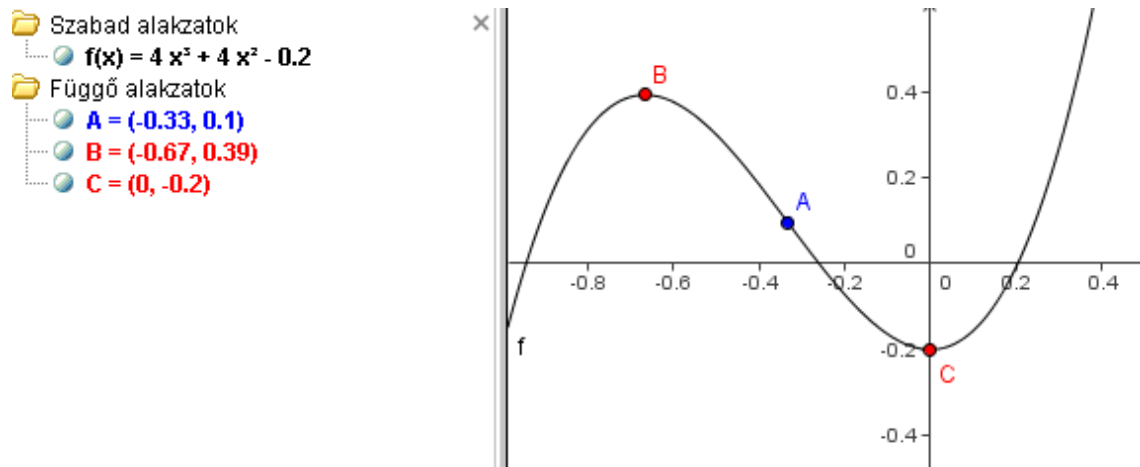
- Szélsőérték

Szélsőérték[f polinom]: az f függvény összes helyi szélsőértéke (pontként)

- Inflexiós pont

InflexiósPont[f polinom]: f függvény összes inflexiós pontja.

Például az $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + 0,2$ függvény inflexiós pontja (A) és szélsőérték helyei (B és C) a következőképp néznek ki:



5) Vektor

- Vektor

Vektor[A pont, B pont]: AB irányú vektor.

Vektor[pont]: a pont helyvektora.

- Irány

Irány[egyenes]: az egyenes irányvektora. Ha az egyenes egyenlete $ax + by = c$, akkor irányvektora $(b, -a)$.

- Egységvektor

EgységVektor[egyenes]: az egyenes egység hosszúságú irányvektora.

EgységVektor[vektor]: a vektor egységvektora.

- Normálvektor

NormálVektor[egyenes]: az egyenes normálvektora. Ha az egyenes egyenlete $ax + by = c$, akkor normálvektora (a, b) .

NormálVektor[vektor]: a vektor normálvektora. Ha a vektor koordinátái (a, b) , akkor a normálvektoráé $(-b, a)$.

- *Egységnyi normálvektor*

EgységnyiNormálVektor[egyenes]: az egyenes egységnyi normálvektora.

EgységnyiNormálVektor[vektor]: a vektor egységnyi normálvektora.

6) Szakasz

Szakasz[A pont, B pont]: az A és B pontok által meghatározott szakasz.

Szakasz[A pont, a szám]: az A kezdőpontú, a hosszúságú szakasz. A szakasz másik végpontja is létrejön.

7) Félegyenes

Félegyenes[A pont, B pont]: A kezdőpontú, B-re illeszkedő félegyenes.

Félegyenes[A pont, v vektor] A kezdőpontú, v irányvektorú félegyenes.

8) Sokszög

Sokszög[A pont, B pont, C pont, ...]: a pontok által meghatározott sokszög.

9) Egyenes

- *Egyenes*

Egyenes[A pont, B pont]: az A, B pontokra illeszkedő egyenes.

Egyenes[A pont, g egyenes]: A-ra illeszkedő, g-vel párhuzamos egyenes.

Egyenes[A pont, v vektor]: A-ra illeszkedő, v irányvektorú egyenes.

- *Merőleges*

Merőleges[A pont, g egyenes]: A-ra illeszkedő, g-re merőleges egyenes.

Merőleges[A pont, v vektor]: A-ra illeszkedő, v normálvektorú egyenes.

- *Szakaszfelező*

Szakaszfelező[A pont, B pont]: az AB szakasz szakaszfelező merőlegese.

Szakaszfelező[s szakasz]: az s szakasz szakaszfelező merőlegese.

- *Szögfelező*

Szögfelező[A pont, B pont, C pont]: az ABC szög szögfelezője. A B pont a szög csúcsa.

Szögfelező[g egyenes, h egyenes]: a g és h egyenes által meghatározott szögek szögfelezői.

- *Érintő*

Érintő[A pont, c kúpszelet]: az A pontból a c kúpszelethez húzott (összes) érintő.

Érintő[g egyenes, c kúpszelet]: a c kúpszelet összes olyan érintője, amelyik párhuzamos a g egyenessel.

Érintő[a szám, f függvény]: az $f(x)$ függvény érintője az $x = a$ pontban.

Érintő[A pont, f függvény]: az $f(x)$ függvény érintője az $x = x(A)$ pontban.

- *Aszimptota*

Aszimptota[c hiperbola]: egy hiperbola mindkét aszimptotája.

- *Vezéregyenes*

Vezéregyenes[c parabola]: egy parabola vezéregyenesese.

- *Tengelyek*

Tengelyek[c kúpszelet]: egy kúpszelet nagy- és kistengelye.

- *Nagytengety*

NagyTengely[c kúpszelet]: egy kúpszelet nagytengetye.

- *Kistengely*

KisTengely[c kúpszelet]: egy kúpszelet kistengelye.

- *Poláris*

Poláris[A pont, c kúpszelet]: az A pont c kúpszeletre vonatkozó polárisa.

- *Átmérő*

Átmérő[g egyenes, c kúpszelet]: a c kúpszelet egy átmérője, mely párhuzamos a g egyenessel.

Átmérő[v vektor, c kúpszelet]: a c kúpszelet egy átmérője, mely párhuzamos a v vektor tartóegyenesével.

10) Kúpszelet

- *Kör*

Kör[M pont, r szám]: kör M középponttal és r sugárral.

Kör[M pont, s szakasz]: kör M középponttal és s sugárral.

Kör[M pont, A pont]: M középpontú A pontra illeszkedő kör.

Kör[A pont, B pont, C pont]: Három pontra (A, B, C) illeszkedő kör.

- *Ellipszis*

Ellipszis[F pont, G pont, a szám]: két fókuszával (F, G) és főtengelyének hosszával (a) megadott ellipszis. (feltétel: $2a > \text{Távolság}[F,G]$)

Ellipszis[F pont, G pont, s szakasz]: két fókuszával (F, G) és főtengelyének hosszával (s) megadott ellipszis. (feltétel: $a = \text{Hossz}[s]$)

- *Hiperbola*

Hiperbola[F pont, G pont, a szám]: két fókuszával (F, G) és valós tengelyének hosszával (a) megadott hiperbola. (feltétel: $0 < 2a < \text{Távolság}[F,G]$).

Hiperbola[F pont, G pont, s szakasz] Két fókuszával (F, G) és valós tengelyének hosszával (s) megadott hiperbola. (feltétel: $a = \text{Hossz}[s]$)

- *Parabola*

Parabola[F pont, g egyenes]: fókuszpontjával (F) és vezéregyenesével (g) megadott parabola.

- *Kúpszelet*

Kúpszelet[A pont, B pont, C pont, D pont, E pont]: öt pontra illeszkedő kúpszelet (négy pont nem illeszkedhet egy egyenesre).

11) Függvény

- *Derivált*

Derivált[f függvény]: az $f(x)$ függvény deriváltja.

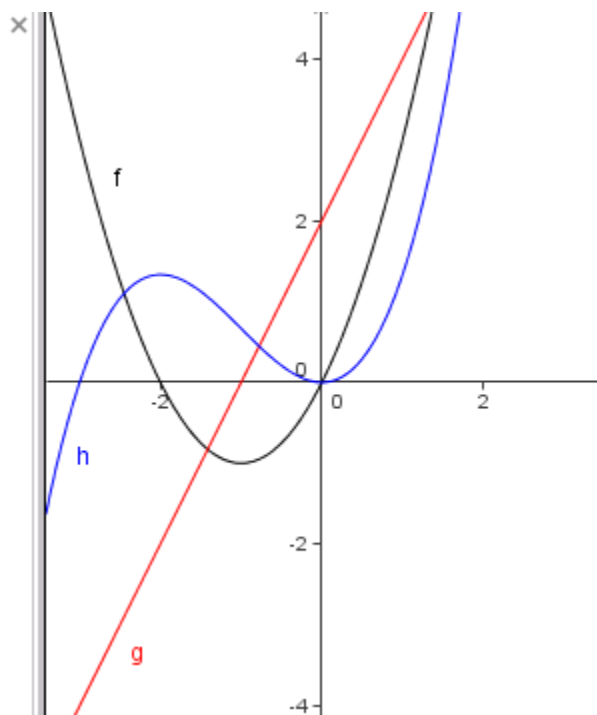
Derivált[f függvény, n szám]: $f(x)$ függvény n-edik deriválta.

- *Integrál*

Integrál[f függvény]: az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja.

Például az $f(x) = x^2 + 2x$ függvény deriváltja ($g(x)$), illetve integrálja ($h(x)$) a következőképp néz ki:

- 📁 Szabad alakzatok
 - 🔵 $f(x) = x^2 + 2x$
- 📁 Függő alakzatok
 - 🔴 $g(x) = 2x + 2$
 - 🔵 $h(x) = 0.33x^3 + x^2$

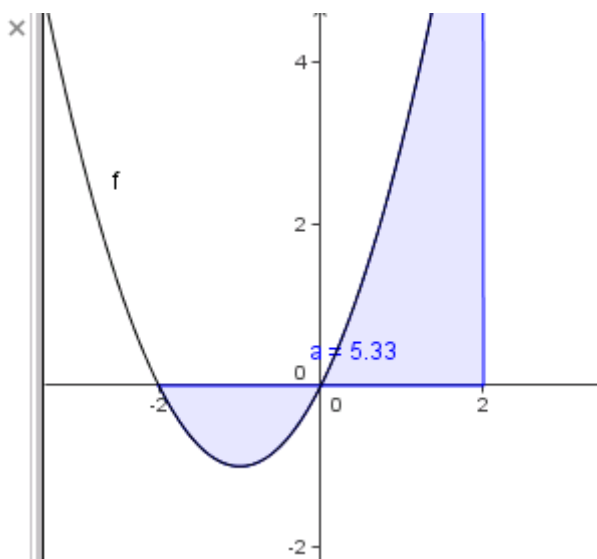


Integrál[f függvény, a szám, b szám]: az $f(x)$ határozott integrál az $[a, b]$ intervallumon. Valamint berajzolja az $f(x)$ függvény és az x tengely közötti síkidom területét.

Például az $f(x) = x^2 + 2x$ függvény határozott integrálja a $[-2; 2]$ intervallumon, illetve az f függvény alatti terület (berajzolva, illetve számértékkel is kifejezve):

- 📁 Szabad alakzatok
 - 🔵 $f(x) = x^2 + 2x$
- 📁 Függő alakzatok
 - 🔵 $a = 5.33$

Szám **a**: Integrál $f(x)$ (x) -2 míg 2

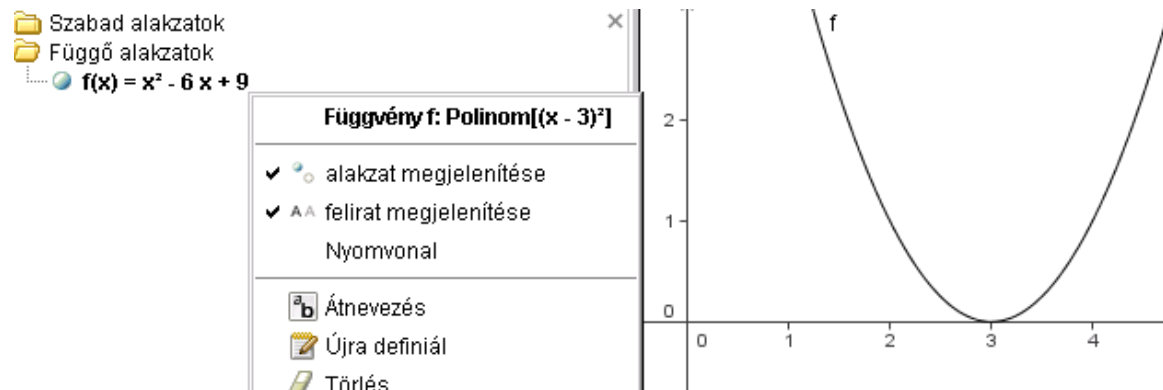


Integrál[f függvény, g függvény, a szám, b szám]: az $f(x)-g(x)$ határozott integrál az $[a,b]$ intervallumon. Valamint berajzolja az $f(x)$ és $g(x)$ függvény közötti síkidom területét.

- *Polinom*

Polinom[f függvény]: ábrázolja az f polinomfüggvényt.

Például: $\text{Polinom}[(x - 3)^2]$ jelenti az $x^2 - 6x + 9$ polinomfüggvényt



- *Függvény*

Függvény[f függvény, a szám, b szám]: ábrázol egy függvényt, ami az $[a,b]$ intervallumon megegyezik az f függvénnyel, azon kívül pedig nincs definiálva

12) Ív és cikk

Az ív algebrai értéke a hossza, a cikk értéke pedig a területe.

- *Félkör*

Félkör[A pont, B pont]: az AB szakaszra rajzolt félkör.

- *Körív*

Körív[M pont, A pont, B pont]: körív az A és B pont között M középponttal. (a B pontnak nem kell illeszkednie a körívre)

- *Körív2*

Körív2[pont, pont, pont]: három pontra illeszkedő körív.

- *Ív*

Ív[c kúpszelet, A pont, B pont]: az A és B pont közé eső kúpszelet ív. (kör vagy ellipszis).

Ív[c kúpszelet, t1 szám, t2 szám]: ív a t_1 és t_2 paraméterek között, ahol a paraméterek a következő formájúak:

- kör: $(r \cos(t), r \sin(t))$, ahol r a kör sugara.
- ellipszis: $(a \cos(t), b \sin(t))$, ahol a és b a fő- ill. a kistengely hossza.

- *Körcikk*

Körcikk[M pont, A pont, B pont]: körszelet az A és B pontok között M középponttal. (a B pontnak nem kell illeszkednie a körívre)

- *Körcikk2*

Körcikk2[pont, pont, pont]: három pontra illeszkedő körszelet.

- *Cikk*

Cikk[c kúpszelet, A pont, B pont]: kúpszelet cikk, amelyet az AOB szög kimetsz (lehet kör vagy ellipszis, az O pont a kúpszelet középpontja).

Cikk[c kúpszelet, t1 szám, t2 szám]: szelet a t_1 és t_2 paraméterek között, ahol a paraméterek a következő formájúak:

- kör: $(r \cos(t), r \sin(t))$, ahol r a kör sugara.
- ellipszis: $(a \cos(t), b \sin(t))$, ahol a és b a kúpszelet fél nagy- ill. kistengelye.

13) Kép

Sarok[kép, n szám]: a megadott kép n-edik sarkával megegyező koordinátájú pontot hoz létre. (n = 1, ..., 4; az 1. sarok a bal alsó, 4. a jobb alsó)

14) Mértani hely

Mértanihely[Q pont, P pont]: ábrázolja a Q pont P ponttól függő mértani helyét. A P pontnak illeszkednie kell egy alakzatra.

15) Geometriai transzformációk

Ha egy új névhez rendeljük az alábbi parancsok bármelyikét, akkor transzformált alakzat egy másolata jön létre. A Tükörczés[A, g] parancs tükrözi az A pontot a g egyenesre és megváltoztatja

az A pont helyzetét (a saját maga tükörképe lesz). A $B = \text{Tükrözés}[A, g]$ parancs viszont létrehoz egy új pontot (B) és az A pontot változatlanul hagyja.

- *Eltolás*

Eltolás[A pont, v vektor]: az A pont v vektorral való eltolása.

Eltolás[g egyenes, v vektor]: a g egyenes v vektorral való eltolása.

Eltolás[c kúpszelet, v vektor]: a c kúpszelet v vektorral való eltolása.

Eltolás[c függvény, v vektor]: az f függvény v vektorral való eltolása.

Eltolás[P sokszög, v vektor]: a P sokszög v vektorral való eltolása. Az új csúcsok és oldalak is létrejönnek.

Eltolás[p kép, v vektor]: a p kép v vektorral való eltolása.

Eltolás[v vektor, p pont]: a v vektor P kezdőpontba való eltolása.

- *Forgatás*

Forgatás[A pont, α szög]: az A pont origó középpontú α szöggel való elforgatása.

Forgatás[v vektor, α szög]: a v vektor origó középpontú α szöggel való elforgatása.

Forgatás[g egyenes, α szög]: a g egyenes origó középpontú α szöggel való elforgatása.

Forgatás[c kúpszelet, α szög]: a c kúpszelet origó középpontú α szöggel való elforgatása.

Forgatás[P sokszög, α szög]: a P sokszög origó középpontú α szöggel való elforgatása. Az új csúcsok és oldalak is létrejönnek.

Forgatás[p kép, α szög]: a p kép origó középpontú α szöggel való elforgatása.

Forgatás[A pont, α szög, B pont]: az A pont B pontra vonatkozó α szöggel való elforgatása.

Forgatás[g egyenes, α szög, B pont]: g egyenes B pontra vonatkozó α szöggel való elforgatása.

Forgatás[c kúpszelet, α szög, B pont]: a c kúpszelet B pontra vonatkozó α szöggel való elforgatása.

Forgatás[P sokszög, α szög, B pont]: a P sokszög B pontra vonatkozó α szöggel való elforgatása. Az új csúcsok és oldalak is létrejönnek.

Forgatás[p kép, α szög, B pont]: p kép B pontra vonatkozó α szöggel való elforgatása.

- *Tükrözés*

Tükrözés[A pont, B pont]: az A pont B pontra vonatkozó tükörképe.

Tükrözés[g egyenes, B pont]: a g egyenes B pontra vonatkozó tükörképe.

Tükrözés[c kúpszelet, B pont]: a c kúpszelet B pontra vonatkozó tükörképe.

Tükrözés[P sokszög, B pont]: a P sokszög B pontra vonatkozó tükörképe. Az új csúcsok és oldalak is létrejönnek.

Tükrözés[p kép, B pont]: a p képnek B pontra vonatkozó tükörképe.

Tükrözés[A pont, h egyenes]: az A pont h egyenesre vonatkozó tükörképe.

Tükrözés[g egyenes, h egyenes]: a g egyenes h egyenesre vonatkozó tükörképe.

Tükrözés[c kúpszelet, h egyenes]: a c kúpszelet h egyenesre vonatkozó tükörképe.

Tükrözés[P sokszög, h egyenes]: a P sokszög h egyenesre vonatkozó tükörképe. Az új csúcsok és oldalak is létrejönnek.

Tükrözés[p kép, h egyenes]: a p kép h egyenesre vonatkozó tükörképe.

- *Nyújtás*

Nyújtás[A pont, f szám, S pont]: az A pont S középpontú, f együtthatós nyújtása.

Nyújtás[h egyenes, f szám, S pont]: a h egyenes S középpontú, f együtthatós nyújtása.

Nyújtás[c kúpszelet, f szám, S pont]: a c kúpszelet S középpontú, f együtthatós nyújtása.

Nyújtás[P sokszög, f szám, S pont]: a P sokszög S középpontú, f együtthatós nyújtása. Az új csúcsok és oldalak is létrejönnek.

Nyújtás[p kép, f szám, S pont]: a p kép S középpontú, f együtthatós nyújtása.

2.2 Szerkesztések GeoGebrával

A fenti szemelvényes áttekintés is képet ad a GeoGebra képességeiről. Mint láttuk, a GeoGebra elsődlegesen matematikaoktatási segédeszköz, és mint ilyen, alkalmas arra, hogy olyan alakzatokat is megmutathassunk az órán, amit egyébként számítógép nélkül nem lenne egyszerű. Ezeket az alakzatokat (mit például egy másodfokú függvény, vagy egy parabola) a diákok is elkészíthetik a számítógépen, és talán könnyebben megértik az összefüggéseket, illetve jobban elsajátíthatják a tanultakat. A kényelemes program és a kapott szemléletes, dinamikus ábrák jobban motiválják a diákokat, mintha kézzel kellene ábrázolniuk. Az elkészített ábrák szemléltetése egyszerű, mivel ki tudjuk vetíteni őket.

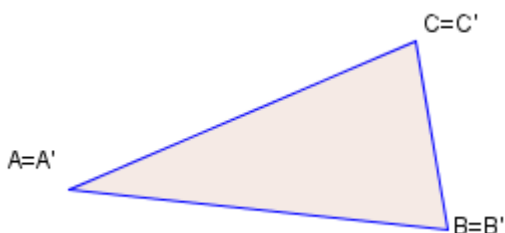
Bármennyire is igyekszünk, körzővel és vonalzóval nem tudunk teljesen pontos szerkesztéseket végezni, csupán közelítőleg jó eredményt kapunk. Számítógéppel történő szerkesztésnél ilyen

gondjaink nincsenek. A GeoGebra azért is alkalmas szerkesztések bemutatására, mert lépésenként vihetjük végig a szerkesztést, illetve visszajátszhatjuk a szerkesztés lépéseit.

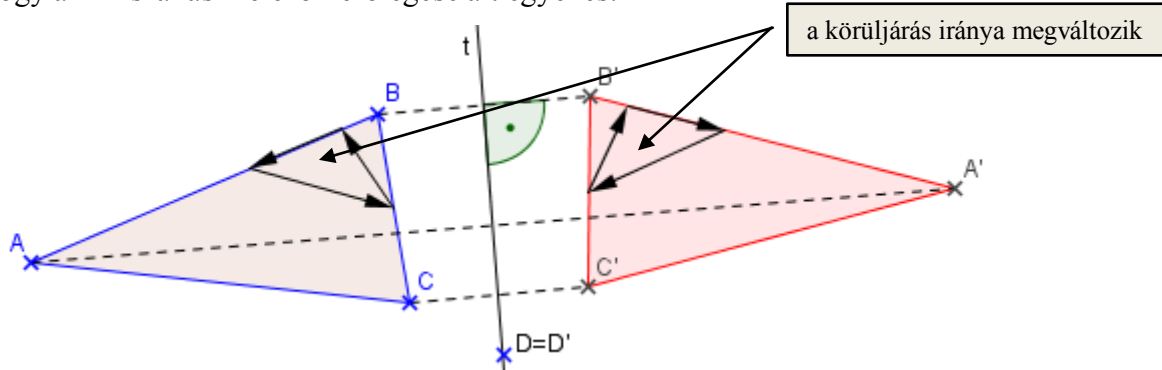
2.2.1 A sík egybevágósági transzformációi:

Olyan transzformációkat keresünk, amik az $ABCA$ -et a vele egybevágó $A'B'C'$ -be viszi.

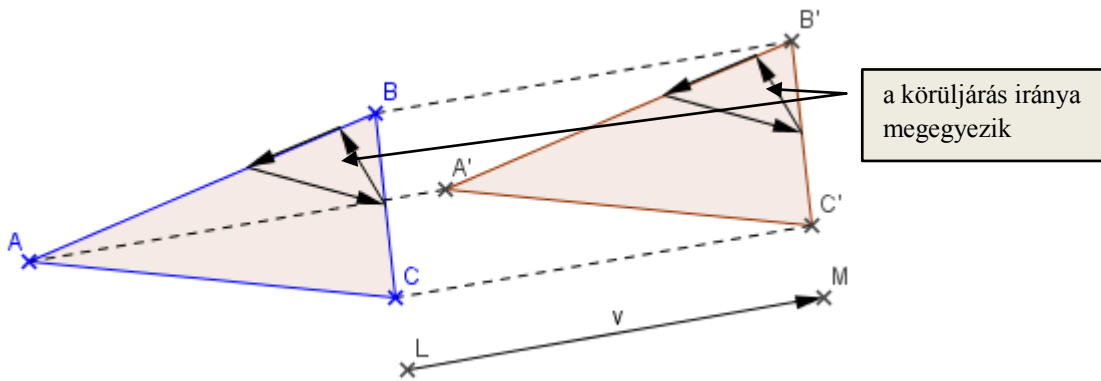
- (1) *Identitás*: olyan geometriai transzformáció, ami minden ponthoz önmagát rendeli.



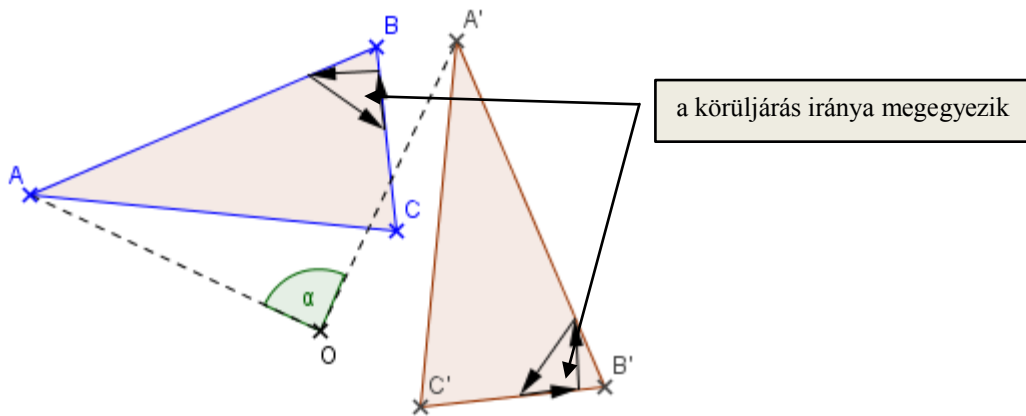
- (2) *Tengelyes tükrözés*: olyan geometriai transzformáció, ami egy adott t egyenes minden pontjának önmagát felelteti meg, és a sík bármely másik P pontjához úgy rendeli a P' pontot, hogy a PP' szakasz felezőmerőlegese a t egyenes.



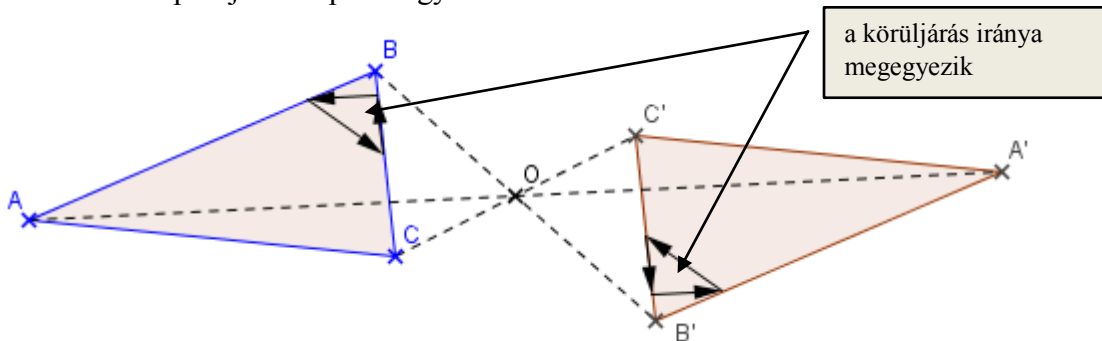
- (3) *Eltolás*: olyan geometriai transzformáció, ami bármely P ponthoz úgy rendeli a P' pontot, hogy a PP' szakasz megegyezik egy adott vektorral.



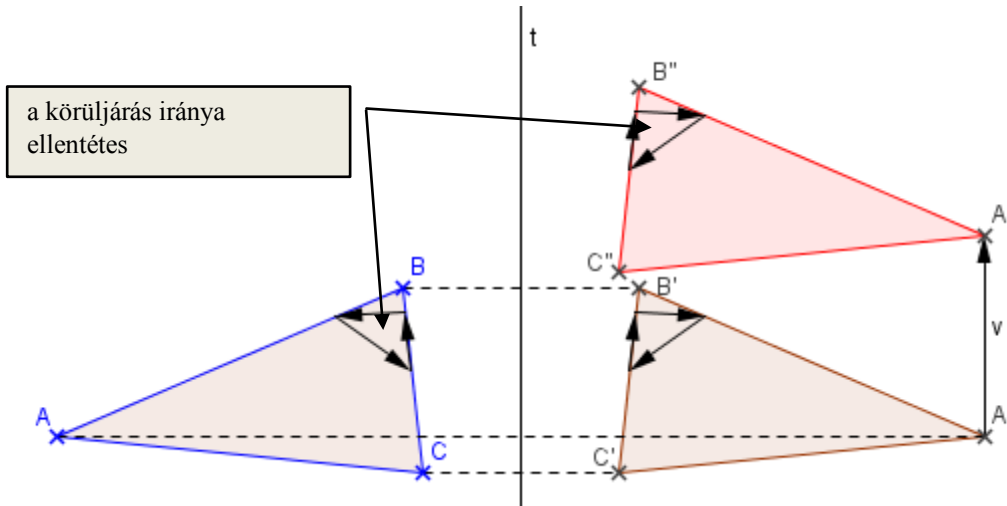
(4) *Forgatás:* olyan geometriai transzformáció, ami a sík egy adott O pontjának önmagát felelteti meg, és a sík bármely más pontjához úgy rendel egy P' pontot, hogy $OP=OP'$ és a POP' irányított szög megegyezik egy adott α szöggel.



(5) *Középpontos tükrözés:* olyan geometriai transzformáció, ami a sík egy adott O pontjának önmagát felelteti meg, és a sík minden más P pontjához úgy rendeli a P' pontot, hogy a PP' szakasz felezőpontja az O pont legyen.



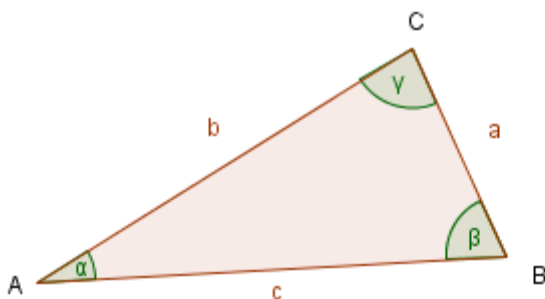
(6) *Csúsztatva tükrözés:* egy tengelyes tükrözés és egy, a tengelyes tükrözés tengelyével párhuzamos eltolás egymás utáni elvégzése. Egyetlen egybevágósági transzformációnak tekintjük.



2.2.2 Háromszögek

Bármely sokszöget háromszögekre tudunk bontani, ezért nézzük meg először a háromszögek geometriáját:

A háromszögek jellemzése:



A háromszög csúcsait nagybetűkkel, oldalait kisbetűkkel, a szögeit görög betűkkel jelöljük.

Egy háromszög hegyesszögű, ha mindegyik szöge hegyesszög; derékszögű, ha egyik szöge derékszög; tompaszögű, ha egyik szöge tompaszög.

Minden háromszög konvex.

Derékszögű háromszög esetén a derékszöget közrefogó oldalakat befogóknak, a derékszöggel szemközti oldal átfogónak nevezzük.

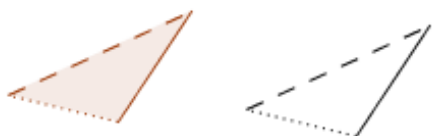
Egy háromszög egyenlő szárú, ha van két egyenlő oldala; ezt a két egyenlő oldalt száraknak, a harmadik oldalt alapnak nevezzük. A szárak által bezárt szöget szárszögnek, az alapon nyugvókat alapszögnek nevezzük.

Egy háromszög szabályos (vagy egyenlő oldalú), ha mindhárom oldala egyenlő.

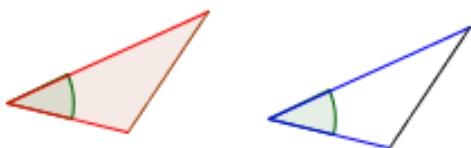
A háromszögek egybevágóságának¹ alapesetei:

Két háromszög *egybevágó*, ha

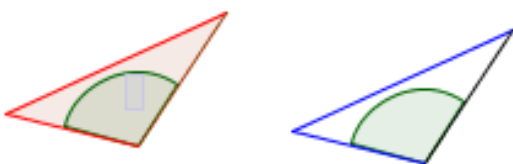
- (1) megfelelő oldalaik hossza egyenlő



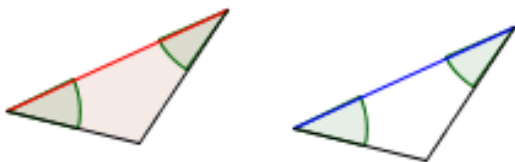
- (2) két-két oldal hossza, és az általuk közbezárt szög nagysága egyenlő



- (3) két-két oldaluk és a két oldal közül a nagyobbikkal szemközt lévő szögük nagysága egyenlő



- (4) egy-egy oldaluk hossza és a rajta fekvő két-két szögük nagysága egyenlő



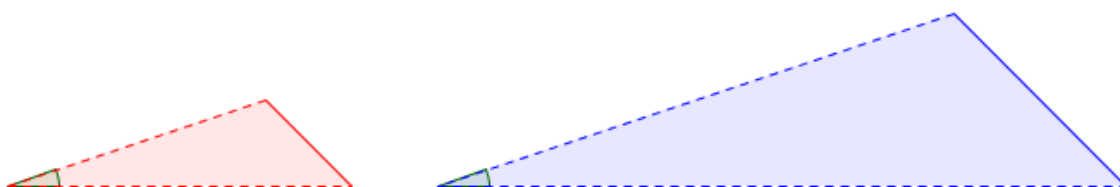
Két háromszög *hasonló*, ha egyenlő

¹ Két alakzat egybevágó, ha van olyan távolságtartó geometriai transzformáció, ami az egyiket a másiknak felelteti meg. Jele: \cong

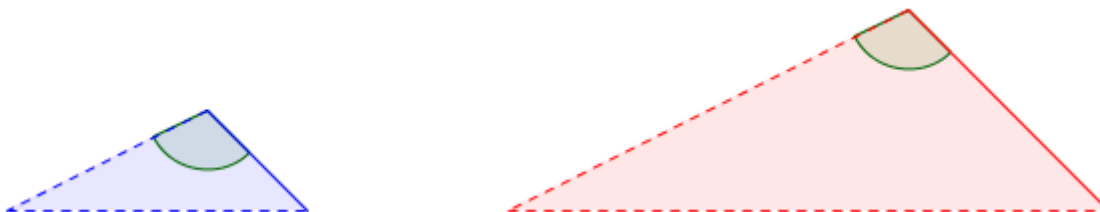
(1) két-két szögük




(2) két-két oldaluk aránya és az ezek által közrezárt szögük




(3) két-két oldaluk aránya és a nagyobbikkal szemben fekvő szögük



A GeoGebrával egyszerűen bemutathatjuk az órán, mikor egybevágó illetve hasonló két háromszög, szemléltetve, hogy miket emelünk ki. A táblarajzzal szemben nagy előnye, hogy a háromszögpárok tényleg egybevágóak, illetve hasonlóak.

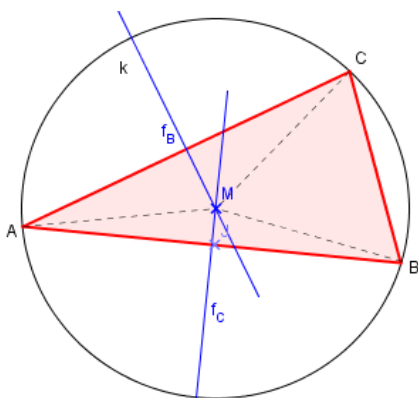
Az ábrák megszerkesztése a következőképp néz ki: felvesszünk a munkalapon 3 pontot (például A, B, C), majd a sokszög[A,B,C] paranccsal megkapjuk a kívánt háromszöget. Ezután a vektor ikonra kattintva  felvesszünk egy tetszőleges vektort, majd az eltolás[háromszög neve, vektor neve] paranccsal meg is kapjuk az egybevágó háromszöget. Hasonló háromszögeknél vagy bekapcsoljuk a rácsot a Nézet\Rács menüpontban, és ott hozunk létre hasonló háromszögeket, de elegánsabb megoldás, ha eltoljuk a háromszöget, majd vektorral λ -szorosára nagyíthatjuk.

Szöveget beszúrni az eszközsor  ikonjával lehet. Miután kiválasztjuk az ikont az eszközsoron, a rajzlapon kattintva megjelenik a beviteli ablak, ahova be kell írunk a megjeleníteni kívánt szöveget. A szöveget „” jelek közé kell tenni, a paraméterértékeket viszont nem. Ezek természetesen dinamikusak, tehát ha változtatom a paraméter értékét, akkor a szövegben is változik az értéke. Több dolgot egymás mellett + jel segítségével tudunk összekapcsolni.

A háromszög köré írt, beírt és hozzáírt köre

Adott $ABC\Delta$ köré szerkesszünk kört!

A kör középpontjához olyan pontot kell keresnünk, ami a háromszög mindhárom csúcsától



egyenlő távolságra van. Az AC oldal felezőmerőlegesének pontjai egyenlő távolságra vannak mind az A, mind a C csúcsoktól. Hasonlóan, az AB oldal felezőmerőlegesének pontjai is egyenlő

távolságra vannak az A és B csúcsoktól. Természetesen, mindez fennáll a BC szakaszra, illetve a szakasz felezőmerőlegesére. Az oldalfelező merőlegesek M metszéspontja tehát mindhárom csúcstól egyforma távolságra

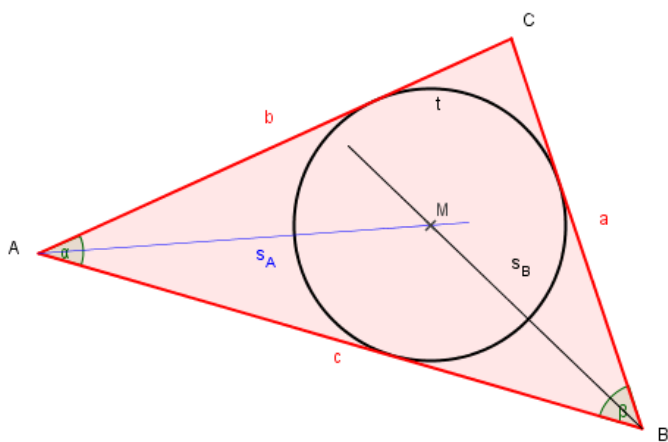
van. A kör középpontja tehát az oldalfelező merőlegesek metszéspontja lesz. A szerkesztés lépéseit jól szemlélteti a mellékelt [dinamikus munkalap](#). Ezt úgy kapjuk meg, hogy a kész objektumot a Fáj\Export\Dinamikus munkalap mint weblap(html)... menüponttal mentjük el. Ekkor megkapjuk a fájl_neve.ggb fájlt, a fájl_neve.html fájlt, és a geogebra.jar fájlt. Ezek egy könyvtárban kell legyenek. A szerkesztési lépések bemutatásához egy eddig még nem ismertett eszköz, a szerkesztési protokoll használható. Ez a Nézet\Szerkesztő protokoll... menüpont alatt található. A geometriai ablakban bevitt szerkesztési lépéseket egy táblázatban látjuk viszont, ahol az egyes lépések sorszámozva jelennek meg. Alapértelmezésben minden egyes lépést lejátszik, de csoportorsíthatjuk ezeket, illetve lehetőségünk van arra, hogy a technikai, illetve esztétikai mozzanatok ne kerüljenek lejátszásra. A szerkesztő protokoll segítségével lejátszásra elkészített objektumot a Nézet\Navigációs eszköztár a szerkesztési lépésekhez menüpont alatt előhívható

No.	Név	Definíció	Parancs	Algebra	Töré...
1	Háromszög A, B, C	Sokszög A, B, C	Sokszög[A, B, C]	poly1 = 5.33	<input checked="" type="checkbox"/>
2	Szöveg T1			T1 = "A"	<input checked="" type="checkbox"/>
3	Szöveg T2			T2 = "B"	<input checked="" type="checkbox"/>
4	Szöveg T3			T3 = "C"	<input checked="" type="checkbox"/>
5	Kör d	Kör közép A	Kör[A, 3]	d: (x - 2.78) ² ...	<input checked="" type="checkbox"/>
6	Kör e	Kör közép C	Kör[C, 3]	e: (x - 6.76) ² ...	<input checked="" type="checkbox"/>
7	Pont D	metszéspontja	Metszéspont[d	D = (3.89, 1.00)	<input checked="" type="checkbox"/>
8	Pont E	metszéspontja	Metszéspont[d	E = (5.65, -2.00)	<input checked="" type="checkbox"/>
9	Szakasz	Szakasz[D, E]	Szakasz[D, E]	f _B = 4.06	<input checked="" type="checkbox"/>
10	Szöveg T4			T4 = "1) Az A...	<input checked="" type="checkbox"/>
11	Kör g	Kör közép B	Kör[B, 3]	g: (x - 7.38) ² ...	<input checked="" type="checkbox"/>
12	Pont F	metszéspontja	Metszéspont[d	F = (4.89, -3.00)	<input checked="" type="checkbox"/>
13	Pont G	metszéspontja	Metszéspont[d	G = (5.27, 0.00)	<input checked="" type="checkbox"/>
14	Szakasz	Szakasz[F, G]	Szakasz[F, G]	f _C = 3.82	<input checked="" type="checkbox"/>
15	Szöveg T5			T5 = "2) Az A...	<input checked="" type="checkbox"/>
16	Pont M	metszéspontja	Metszéspont[f	M = (5.13, -1.00)	<input checked="" type="checkbox"/>

lejátszó segítségével lehet lejátszani. A lejátszás megállítható, visszatekerhető. Ha html fájlba mentjük az objektumot, beállítható, hogy a dinamikus munkalapon szeretnénk-e megjeleníteni a szerkesztő protokollt. Ekkor a Nézet menüben a „Gomb a szerkesztő protokoll megnyitásához” menüpont ki van pipálva és a dinamikus munkalapon is állíthatunk a szerkesztési lépéseken.

Adott $ABC\Delta$ -be szerkesszünk kört!

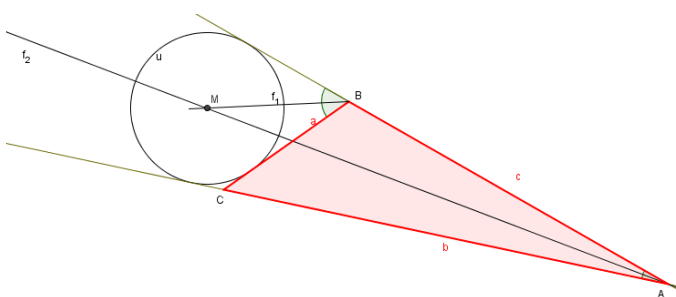
A kör középpontja olyan pont lesz, ami a háromszög mindhárom oldalától egyenlő távolságra van. Az a csúcsonál lévő α szög szögfelezőjének pontjai egyenlő távolságra vannak a b és c



oldalától. Ugyanígy a B csúcsonál lévő β szög szögfelezőjének pontjai is egyenlő távolságra vannak az a és c oldalától. Hasonlóan, a C csúcsonál lévő szög szögfelezője is. A szögfelezők M metszéspontja adja a beírt kör középpontját. M-ből merőlegest bocsájtok az a, b, vagy c oldalra, és ez a szakasz lesz a beírt

kör sugara. A szerkesztést részletesen bemutatja a mellékelt [dinamikus munkalap](#). Természetesen itt is nyomon követhető minden egyes lépés; valamint az is beállítható, hogy hány másodpercenként kövessék egymást a lépések.

Adott $ABC\Delta$ -höz szerkesszünk hozzáírt kört!



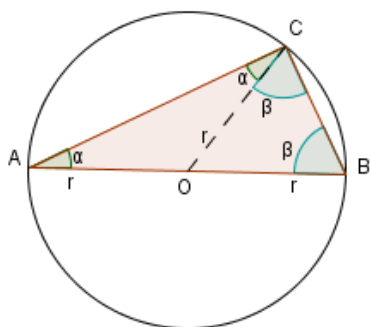
A kör középpontja olyan pont lesz, amnek középpontja a háromszög egyik oldalától és a másik két oldalának meghosszabításától egyenlő távolságra van. Az A csúcsnál lévő szög szögfelezőjének összes pontja egyenlő

távolságra van a b és a c szakasztól, így a meghosszabbított félegyenesektől is. A B csúcsnál lévő, a c félegyenesen fekvő külső szög kisebb, mint 180° , így a szögfelezője két hegyesszöggé darabolja. Mivel a keresett kör középpontja ugyanolyan távolságra van az a szakasztól, mint a c félegyenesestől, itt is a szögfelezőn kell a pontot keresni. A két szakasz metszéspontja adja a keresett kör középpontját. A kör sugara a középpontból valamelyik oldalra vagy a meghosszabbított félegyenesre eső merőleges. A szerkesztés jól nyomon követhető a mellékelt [munkalapon](#). A végábra kissé nehezen átlátható, de lépésekre lebontva érthető.

A Thalész-tétel

Ha egy P pont az AB szakasznak nem végpontja, akkor a konvex $APB\angle$ -ről mondjuk, hogy az AB szakasz a P pontból ekkora szögben látható. Ez a látószög

A Thalész-tétel szerint a sík adott szakasza pontosan annak a körvonalnak a pontjaiból látszik



derékszög alatt, amelyek a szakaszhoz, mint átmérőhöz tartoznak, kivéve a szakasz végpontjait.

Legyen P a kör A-tól és B-től különböző tetszőleges pontja. $OA=OB=OP=r$ miatt az $AOP\Delta$ és a $POB\Delta$ egyenlő szárúak, így az azonosan jelölt egyenlők. Mivel az $ABP\Delta$ belső szögeinek összegére

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ \text{ teljesül, ebből}$$

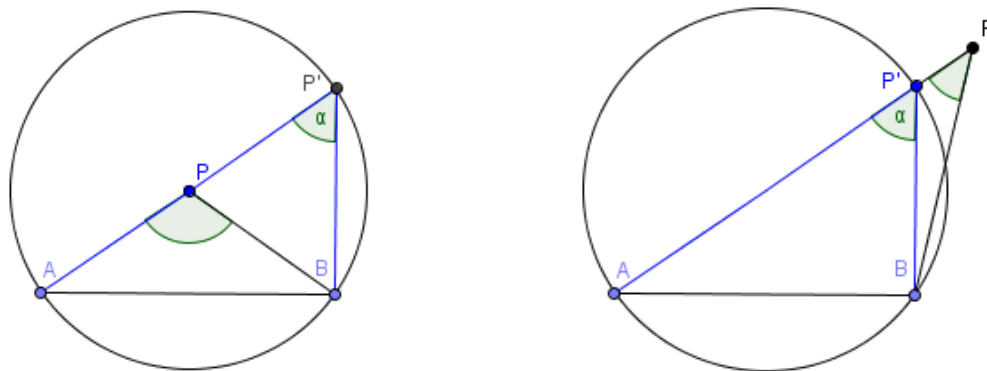
$(BPA\angle =) \alpha + \beta = 90^\circ$ következik.

Tehát ha egy szakasz fölé Thalész-kört rajzolunk, akkor pontosan 90° -ban látjuk a szakaszt a kör bármely pontjából, kivéve a a szakasz két végpontját.

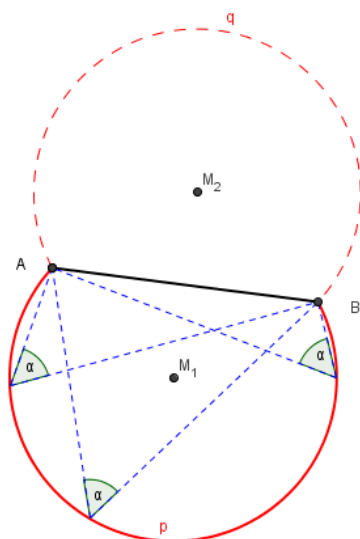
Szerkesszük meg azon pontok halamzát, ahonnan az AB szakasz $\alpha < 180^\circ$ szögben látszik!

Láttuk, hogy 90° esetén a kör középpontja a szakasz felzöpontja lesz. Hol lesz a középpont nem 90° esetén? Ha α nem egyenlő 90° -kal, akkor az AB szakasz mint húr, olyan két körívre bontja a kört, hogy a két körív közül az egyik hosszabb a másiknál. Melyik köríven belül lesz a kör középpontja?

A köríven belüli pontokból a szakasz α -nál nagyobb, a köríven kívüli pontokból α -nál kisebb szög alatt látszik.




Ha ugyanis a P pont a körvonalon belül lenne, akkor P'-ből a szakasz α szög alatt látszana (a kerületi szögek tétele miatt). Az $\angle APB > \alpha$, mivel a $\angle PBP'$ egyik külső szöge, α -nál mindenképp nagyobb.



Hasonlóan, ha a P pont a körvonalon kívül helyezkedik el, akkor, mivel P'-nél található az α szög, és ez a $\angle P'BP$ egyik külső szöge is egyben, így a P pontból az AB szakasz α -nál kisebb szög alatt látszik.

Ez alapján, ha $\alpha < 90^\circ$ esetén a kör középpontja a nagyobbik körív alatt lesz, ellenkező esetben pedig a kisebbik alatt. A körívnek a szakasz egyenesére vonatkozó tükrképéből is – a tengelyes tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt – ugyanakkora szög alatt látszik a szakasz. Ez természetes is,

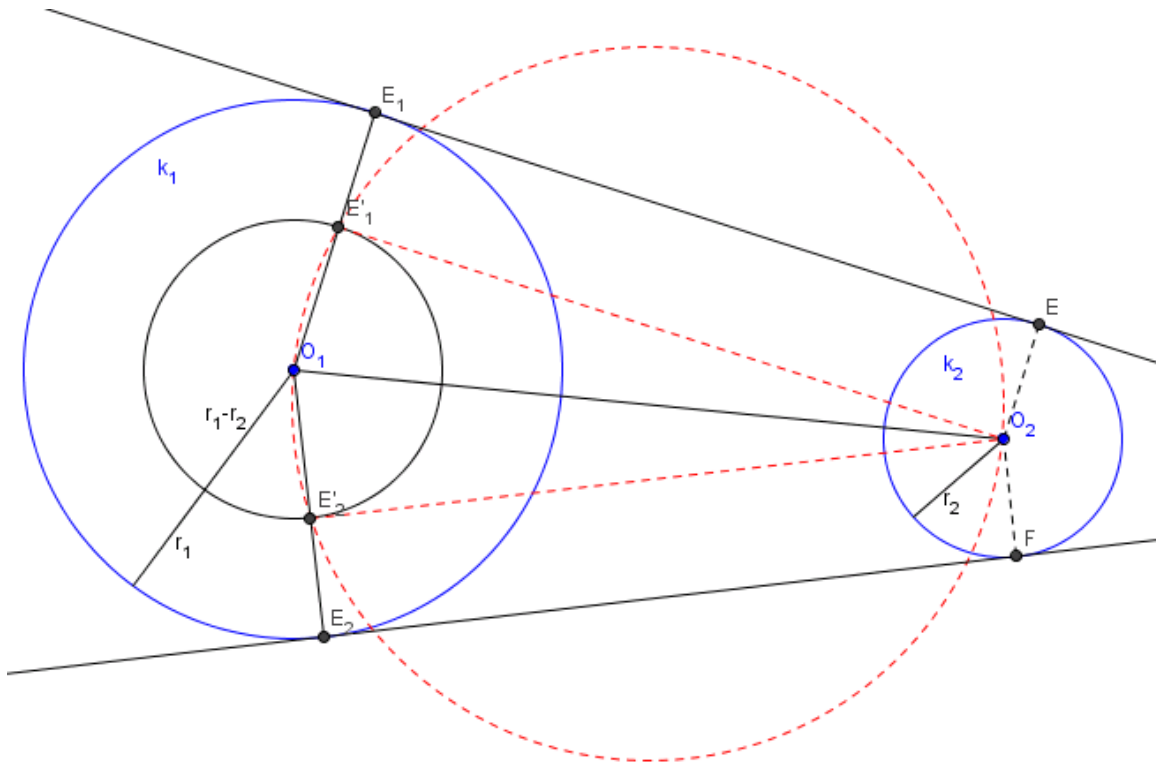
hiszen ha belegondolunk, minél messzebről nézzük a szakaszt, annál kisebbnek látjuk, következésképp annál kisebb szögbe fér bele, és fordítva, minél közelebről nézzük, annál nagyobb szögbe fér csak bele.

A mellékelt [dinamikus munkalapon](#) nyomon követhetők a szerkesztés lépései. Néhány új lépés jelent meg. A merőlegesek szerkesztésénél, ahol csak lehet, érdemes használni a GeoGebra beépített merőleges szerkesztőjét.  Csupán ki kell választani, hogy miből mibe szeretnénk merőlegest állítani, majd az ikonra kattintva meg is kapjuk a kívánt merőlegest. Hasonlóan tudunk párhuzamost, szakaszfelezőt, szögfelezőt, kör érintőt szerkeszteni. Ha a diákok már biztosan tudják ezeket a szerkesztéseket, érdemes megtanítani a GeoGebra beépített geometriai szerkesztőinek használatát, átláthatóbbá és gyorsabbá teszi a munkát.

Szerkesszünk egy r_1 és egy r_2 sugarú körhöz közös érintőt úgy, hogy

a. azok külső érintők legyenek:

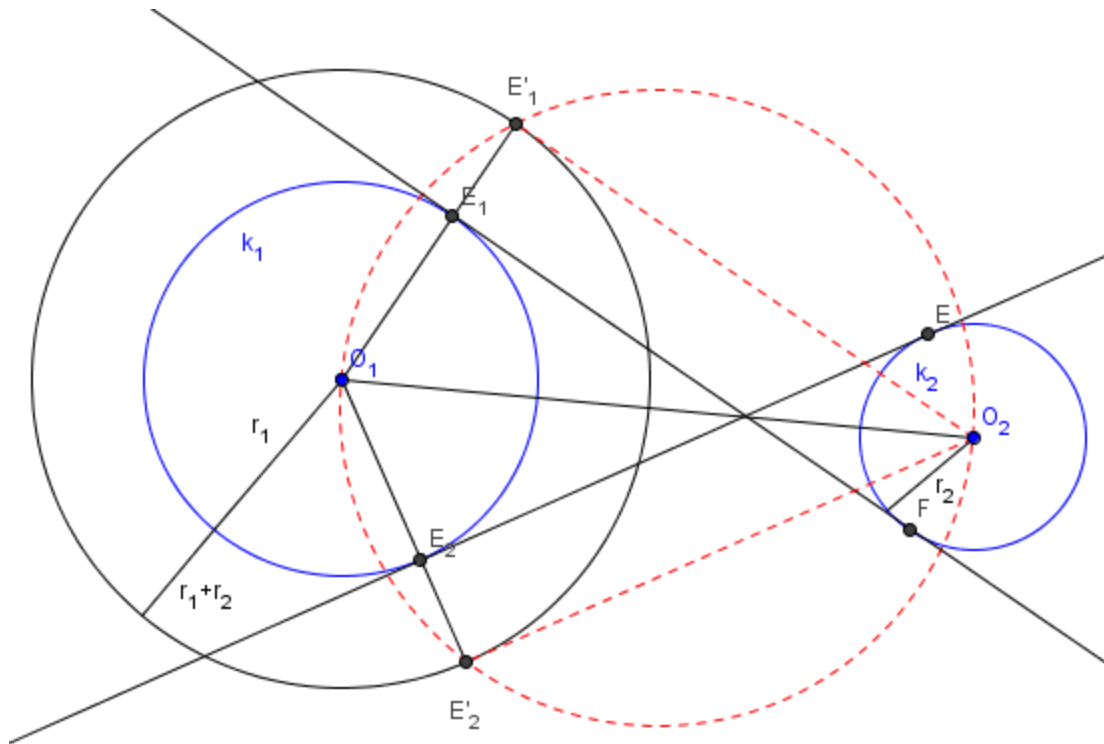
- 1) Szerkesszünk az O_1O_2 szakasz fölé Thalész-kört.
- 2) Szerkesszük meg az O_1 középpontú, $r_1 - r_2$ sugarú kört.
- 3) Határozzuk meg ezen kör és a Thalész-kör E'_1 és E'_3 metszéspontjait.
- 4) Húzzuk meg az O_1 kezdőpontú $O_1E'_1$ és $O_1E'_2$ félegyeneseket, majd határozzuk meg ezeknek az O_1 középpontú r_1 sugarú körrel alkotott E_1 és E_2 metszéspontjait.
- 5) Húzzunk az E_1 és E_2 párhuzamosakat rendre az $O_2E'_1$ és $O_2E'_2$ szakaszokkal; ezek határozzák meg a keresett érintőket.



A szerkesztés lépései a [munkalapon](#) is megtekinthetők.

b. azok belső érintők legyenek:

- 1) Szerkesszünk az O_1O_2 szakasz fölé Thalész-kört.
- 2) Szerkesszük meg az O_1 középpontú, $r_1 + r_2$ sugarú kört.
- 3) Határozzuk meg ezen kör és a Thalész-kör E'_1 és E'_2 metszéspontjait.
- 4) Húzzunk az E_1 és E_2 párhuzamosakat rendre az $O_2E'_1$ és $O_2E'_2$ szakaszokkal; ezek határozzák meg a keresett érintőket.
- 5) Húzzunk az E_1 és E_2 párhuzamosakat rendre az $O_2E'_1$ és $O_2E'_2$ szakaszokkal; ezek határozzák meg a keresett érintőket.



A [munkalapon](#) jól nyomon követhetők a szerkesztési lépések. Mind ennél, mind a másik munkalapnál egyszerűsítve van a szerkesztés; például merőlegest egy lépésben meg lehet szerkeszteni a GeoGebra segítségével.

2.2.4 Szimmetrikus négyszögek

A tengelyesen szimmetrikus háromszögeknél a háromszög egyik csúcsának a szimmetriatengelyen kell elhelyezkednie, míg a másik két csúcs egymás tükörképei.

Négyszögek esetében azonban csak úgy képzelhető el a tengelyes szimmetria, ha vagy

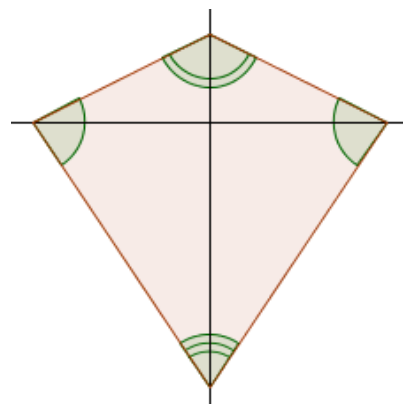
- 1) két csúcsuk van a szimmetriatengelyen, és ekkor a másik két csúcs egymás tükörképe, vagy
- 2) a négy csúcs közül kettő van a szimmetriatengely egyik oldalán, de nem a tengelyre merőleges egyenesen, míg a másik két csúcs a másik oldalon, ezek tükörképeként helyezkednek el.

Az 1) esetben deltoid, a 2) esetben húrtrapéz keletkezik.

A tengelyes szimmetriából következnek e négyszögek alábbi tulajdonságai.

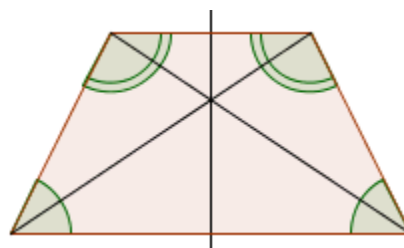
A deltoidnál

- két-két szomszédos oldal egyenlő;
- az egyik átló két szöget felez;
- a másik két szög egyenlő;
- az átlók merőlegesek egymásra;
- az egyik átló illeszkedik a szimmetriatengelyre;
- a szimmetriatengely felezi a másik átlót.



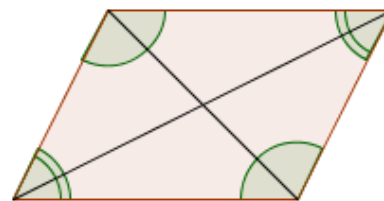
A húrtrapéznál

- van két párhuzamos oldal (alapok);
- a másik két oldal egyenlő (szárak);
- az azonos oldalon fekvő szögek egyenlők;
- az azonos száron fekvő szögek kiegészítő szögek;
- a szemben fekvő szögek kiegészítő szögek;
- az átlók egyenlők;
- az átlók a szimmetriatengelyen metszik egymást;
- a szimmetriatengely áthalad a szárak egyenesének metszéspontján.



A *paralelogramma* középpontos szimmetriájából következnek a paralelogramma alábbi tulajdonságai:

- szemközti oldalai egyenlők;
- átlói felezik egymást, az átlói felezőpontja a paralelogramma szimmetriaközéppontja.
- szemközti szögei egyenlők;
- Két szomszédos szögének összege 180° .



Az olyan négyszöget, melynek oldalai ugyanannak a körnek az érintői, *érintőnégyyszögnek* nevezzük.

Mivel az érintőnégyyszögbe írt kör érintési pontjai az érintőnégyyszög oldalain – és nem azok meghosszabbításán – vannak, így minden érintőnégyyszög konvex, hiszen csak konvex szögek lehetnek.

2.2.5 A kör és részei

A körvonal a sík olyan pontjainak mértani helye¹, amelyek a sík egy megadott pontjától adott (nem 0) távolságra vannak.

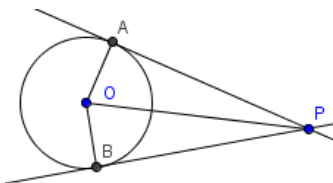
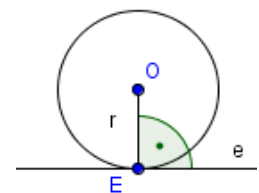
A kör középpontja az a pont, amelyiktől a kör pontjai ugyanakkora távolságra vannak.

A kör sugara ez a távolság. A kört egyértelműen meghatározza a középpontja és a sugara, illetve a középpontja és egy pontja.

A körvonalon belül elhelyezkedő pontok a körvonal pontjaival együtt a körvonal által határolt körlemez alkotják.

A körbe írt sokszögek területei a kör területénél kisebbek, a kör köré írt sokszögek területei a kör területénél nagyobbak. Minél nagyobb oldalszámú szabályos sokszöget vizsgálunk, annál jobban megközelítik területei a kör területét. Mivel az oldalszám növelésével a beírt és a körülírt sokszögek területei egymást is egyre jobban megközelítik, az a közös érték, amelyhez ezek tartanak, nem más, mint a kör területe. A kör területe a kör sugarának négyzetével arányos, ezt az arányossági tényezőt π -vel jelöljük: $T = r^2\pi$.

A kör érintője olyan egyenes, aminek a körrel egy közös érintési pontja van, ez az érintési pont. A kör érintője merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra.

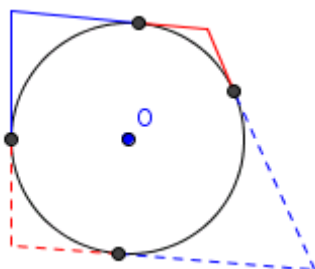


Az érintőszakaszok tétele szerint egy külső P

pontból a körhöz húzott két érintőszakasz egyenlő (tehát $PA=PB$); ez az OAP és OBP háromszögek egybevágóságából következik.

Ennek következménye: a konvex érintőnégyyszög két-két szemközti oldalának az összege egyenlő. Az érintőnégyyszög oldalait ugyanis az érintési pontok két-két

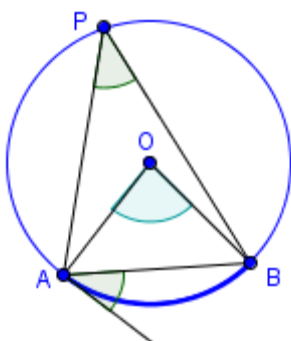
¹ Ha olyan tulajdonságot adunk meg, amellyel pontok rendelkezhetnek, akkor beszélhetünk az ilyen tulajdonságú pontok mértani helyéről. Ennek az alakzatnak minden pontja rendelkezik a megadott tulajdonsággal, más pont azonban nem



darabra vágják; a két-két szemközi oldalpáron lévő szakaszok összességükben ugyanazok. Igaz e tétel megfordítása is: ha egy konvex négyszög két-két szemközi oldalának az összege ugyanakkora, akkor a négyszög érintőnéyszög.

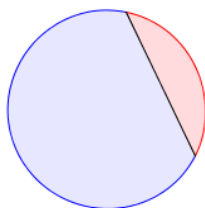
A körvonalat két pontja két körívre bontja. E két körív közös része a körívet határoló két pont, a körívek két közös végpontja.

A kör A és B pontja közötti ívének (az AB ívnek, jelölve: \widehat{AB} ; konkrét esetben azonban jelölnünk



kell, hogy a két lehetséges AB ív közül melyikről van szó; az ábrán vastagítottal van jelölve) végpontjait összekötve a kör O középpontjával, az így kapott $AOB\angle$ -et az \widehat{AB} -hez tartozó középponti szögnek nevezzük. Vegyünk fel a kör \widehat{AB} -n kívüli részén – tehát az AB egyenesnek az \widehat{AB} -t nem tartalmazó oldalán – egy P pontot az $ABP\angle$ az \widehat{AB} -hez tartozó (egyik) kerületi szög. Fontos összefüggés közöttük a következő: ugyanazon ívhez tartozó

kerületi szög fele a középponti szögnek. Ez még akkor is igaz, ha a kerületi szög egyik szára az érintőn van. Ennek következménye, hogy egy AB ívhez tartozó kerületi szögek mind egyenlők, hiszen ugyanaz a középponti szög tartozik hozzájuk.

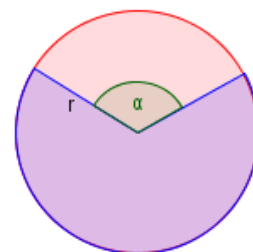


A kör két pontját összekötő szakasz a kör húrja; a leghosszabb, a középpontot tartalmazó húr az átmérő, ennek hossza kétsugárnyi.

A körszelet olyan síkidom, amit a körvonal egy íve és a kör egy húrja határol. (Mind a piros, mind a kék körszelet.)

A körcikk olyan síkidom, amelyet a körvonal egy íve és a kör két sugara határol. (mind a piros, mind a kék körcikk.)

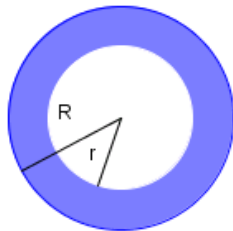
A körcikk területe egyenesen arányos azzal a (középponti) szöggel, amelyet a körcikket meghatározó sugarak zárnak be egymással. Az egyenes arányosság miatt az r sugarú, α szöggel rendelkező körcikk területére felírható a



$$\frac{t}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

összefüggés, amiből

$$t = r^2 \pi \frac{\alpha}{360^\circ}$$

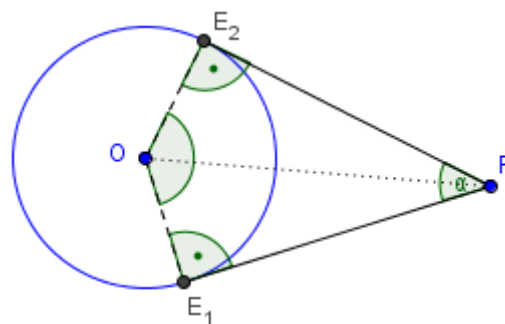


A körgyűrű olyan síkidom, amelyeket a koncentrikus (azonos középpontú) R és r ($R \neq r$) sugarú körvonalak határolnak. Területe $R > r$ esetén:

$$t = \pi(R^2 - r^2)$$

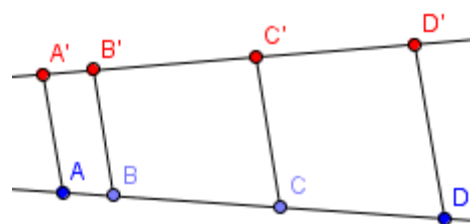
Egy r sugarú körhöz egy külső pontból húzott két érintő α szöget zár be. Mekkora az érintési pontok által meghatározott két körív hossza?

Érdeemes a feladathoz vázlatot készíteni. A jó vázlat megkönnyíti a feladatmegoldást, átláthatóbbá teszi a munkát. A GeoGebra segítségével az eredményhez közelítő vázlatokat tudunk szerkeszteni. Az ábrát nézve könnyebb rájönni, hogy adott pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. Tudjuk, hogy az érintő az érintési pontból kiinduló sugárral derékszöget zár be. Az O és a P pontot összekötő szakaszt szimmetriatengelynek tekintve máris kaptunk egy tengelyesen szimmetrikus négyszöget (pontosabban deltoidot), aminek két szemközti szöge derékszög. Tudjuk, hogy a négyszög szögeinek összege 360° , így a keresett középponti szög: $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$. Ennek ismeretében pedig a körív hossza könnyen kiszámolható.

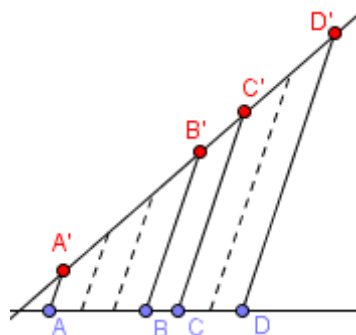


2.2.6 Párhuzamos szelők

Vegyünk fel a síkon két egyenest, és jelöljük ki az egyik egyenesen két egyenlő hosszúságú szakaszt, AB-t, és CD-t. A szakaszok végpontjaiban húzzunk a másik egyenest rendre A',B',C',D' pontokban metsző, egymással párhuzamos egyeneseket. Ekkor az ezen

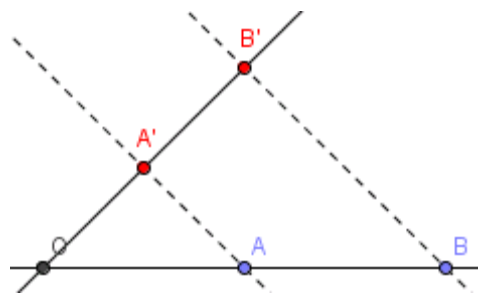


pontok által meghatározott szakaszokra $A'B' = C'D'$ teljesül. Ez alapján kimondható a következő tétel: ha két egyenes egyikén felvesszünk két egyenlő hosszúságú szakaszt, és a szakaszok végpontjain át a másik egyenest metsző párhuzamosokat húzzunk, akkor ezek a másik egyenesből is egyenlő hosszú szakaszokat metszenek ki.

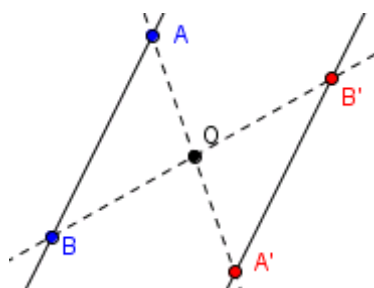


Vegyünk fel a síkban két egyenest, és jelöljük ki az egyik egyenesen két olyan AB, és CD szakaszt, amelyek hosszainak aránya 3:2. A szakaszok végpontjaiba húzzunk a másik egyenest rendre A',B',C',D' pontokban metsző, egymással párhuzamos egyeneseket.

Az előző tétel alkalmazásával kapjuk, hogy az ezen pontok által meghatározott szakaszokra $A'B':C'D' = 3:2$.



A háromszögek hasonlósági alaptételeivel egyenértékű a párhuzamos szelők tétele: ha az O csúcsú szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor az egyik száron nyert metszetek aránya egyenlő a másik száron nyert metszetek arányával; továbbá a párhuzamosok metszeteinek aránya egyenlő a szárakon lévő metszéspontjaik O-tól mért távolságaik arányával. Vagyis ha a párhuzamosok egyike a szögcsúszárakat A-ban, illetve B-ben

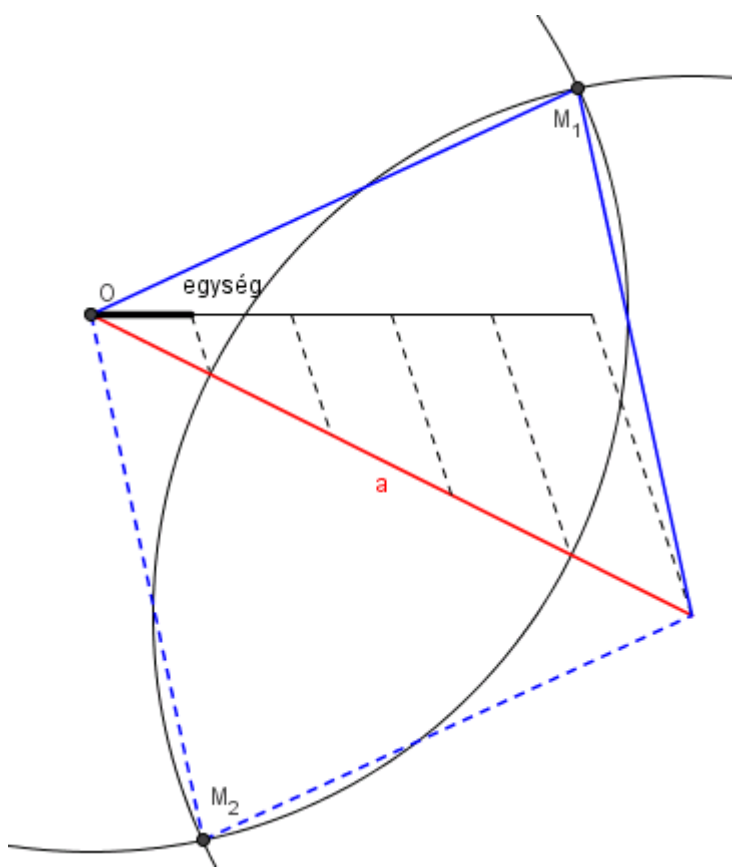


metszi, a másik párhuzamos pedig A'-ben, illetve B'-ben, akkor

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} \text{ és } \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

A párhuzamos szelők tétele egyébként abban az esetben is igaz, ha AB és A'B' két metsző egyenes olyan párhuzamos metszetei, amelyeket az egyenes O metszéspontja elválaszt egymástól.

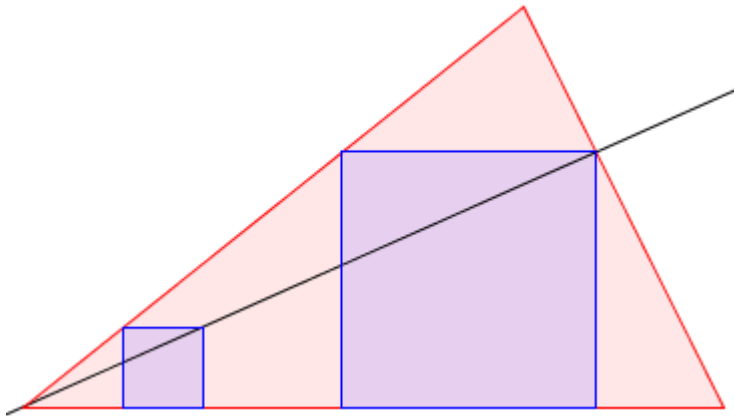
Szerkesszünk olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja a , a szára ennek $\frac{4}{5}$ -szöröse.



[dinamikus munkalapon](#) nyomon követhető.

A szerkesztés egyszerű: a párhuzamos szelők tétele alapján az egyik száron meghatározzuk az egységet, majd még egymás után négyszer felmérjük a szárra. Az a szakasz végpontját összekötjük az utolsó egységszakasz végpontjával. Az így kapott szakaszt párhuzamosan eltolva az egységekbe, megkapjuk az a szakasz beosztását öt egyenlő részre. Ezután a két végpontot a beosztás négyszeresével körzőnyílásba véve a két kör metszéspontjai kijelölik a szárakat. Természetesen a tengelyes szimmetria miatt két egybevágó egyenlőszárú háromszöget kapunk. A szerkesztés a

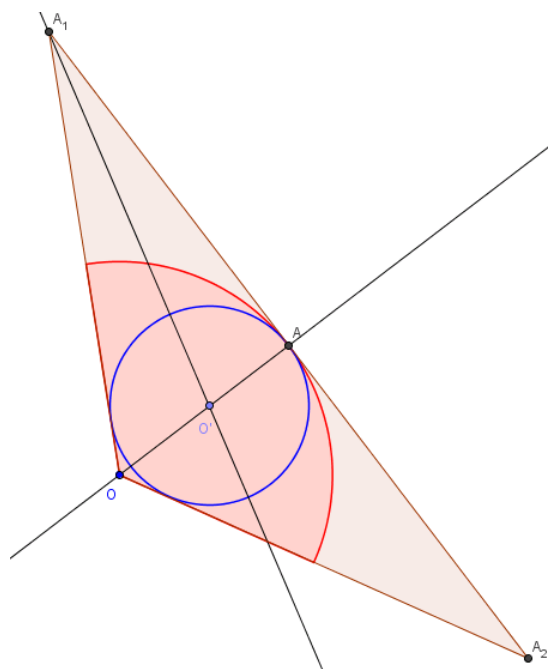
Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek mind a négy csúcsa egy adott háromszög egy-egy oldalára esik.



Ha háromszögbe szerkesztünk négyzetet, hova kerülhetnek a négyzet csúcsai, ha mindegyik rajta van a háromszög valamelyik oldalán? Három csúcsot el tudunk helyezni három különböző oldalon, a negyedik csúcs azonban már valamelyik, az egyik csúcsot tartalmazó oldalra kerül. Ezek szerint a négyzet egy

oldalát tartalmazni fogja a háromszög egyik oldala. Vegyünk fel egy pontot a háromszög tetszőleges oldalán, minél közelebb az egyik csúcshoz. A pontot tartalmazó oldalra szerkesszünk merőlegest a ponton keresztül. Ez a merőleges egyenes el metszi a szemközti csúcsot. Ez a szakasz legyen egy négyzet oldala. Megszerkesztve a többi oldalát, a háromszög megfelelő csúcsával kössük össze a négyzet szemközti csúcsát. Ez a szakasz metszi a háromszög kiválasztott csúcsával szemközti oldalát. Ez a metszéspont lesz a középpontos hasonlóság miatt a keresett négyzet csúcspontja; innen pedig az könnyen szerkeszthető, az előbbi négyzet mintájára. (A nehézséget a megfelelő pont kiválasztása adja, ugyanis ha a csúcstól távol veszünk fel pontot, a kezdeti négyzet oldala hosszabb lehet, mint a keresetté, ez esetben pedig nem tudjuk megszerkeszteni.) A szerkesztés megértését megkönnyíti a [dinamikus munkalap](#). Látható, hogy csak a fő lépések vannak kiemelve; a GeoGebrával gyorsan és pontosan szerkeszthetők az olyan részfeladatok, mint például merőleges szerkesztése, ponton átmenő egyenes szerkesztése, párhuzamos eltolás.

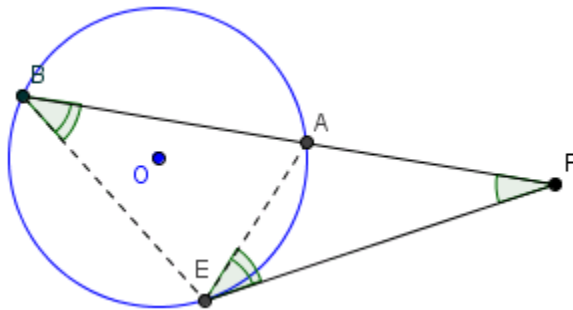
Adott körcikkbe szerkesszünk olyan kört, amely a körcikket határoló sugarakat és körívet is érinti.



A keresett kör középpontja egyenlő távolságra van mind a két sugártól, mind a körvonaltól. Ha háromszögbe kellene úgy kört szerkeszteni, hogy mindhárom oldaltól egyenlő távolságra legyenek, akkor a szögfelezők metszéspontja lenne a kör középpontja. A rendelkezésünkre álló egyetlen szög a cikkhez tartozó középponti szög. A kör szimmetriatulajdonságai miatt a középpont a körcikk szögfelezőjén lesz. Megszerkesztve a középponti szög szögfelezőjét, húzzunk érintőt a körcikkhez a körcikk és a szögfelező metszéspontjába (A). Innen már látható, hogy mi a

következő lépés: a körcikket határoló sugarak meghosszabbításával kapott szakaszok és a körcikket érintő egyenes metszéspontjai, valamint a kör középpontja által meghatározott egyenesszerű háromszög ($OA_1A_2\Delta$) alapjának középpontja (és ezzel csúcsának szögfelezője) lesz a körcikkhez tartozó érintési pont, ami egyben a körcikk és a beírt kör közös pontja is lesz. A kapott $OA_1A_2\Delta$ egyik alapon fekvő szögét megfeleztve megkapjuk a keresett középpontot (O'). A kissé bonyolultnak tűnő szerkesztés egyszerűvé válik, amint a [dinamikus munkalapon](#) végigkövetjük a szerkesztési lépéseket. Ilyen feladatok megoldásánál is kitűnik a GeoGebra hatékonysága, dinamikussága és egyszerű kezelhetősége. Érdemes tehát alkalmazni az órákon, különösen a gyakorlóórákon példák bemutatására.

2.2.7 Pont körre vonatkozó hatványa



Ha egy külső ponton át egy érintőt és szelőt húzunk a körhöz, akkor az érintő szakasz hossza mértani közepe a ponttól a metszéspontokig terjedő szelőszakaszok hosszának.

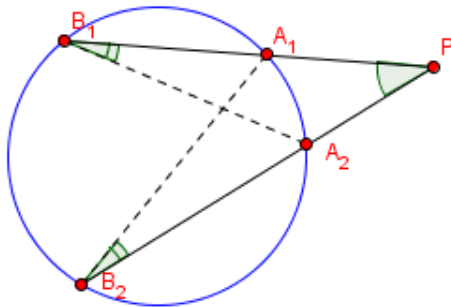
Ugyanis az ábra szerint $PAE\Delta \sim PBE\Delta$, mivel két-két szögük páronként egyenlő (egyik szögük

közös, a másik két, egymásnak megfelelő szög ugyanazon az íven nyugvó kerületi szög) A hasonlóság miatt a két háromszög megfelelő oldalainak aránya páronként egyenlő, azaz rájuk

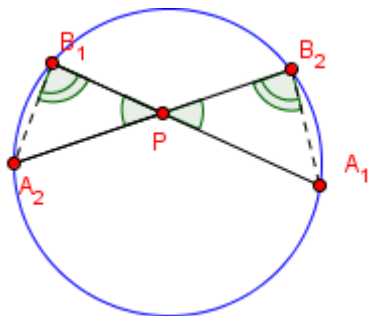
$\frac{PE}{PA} = \frac{PB}{PE}$ teljesül. Ebből a PE érintőszakaszra a $PE = \sqrt{PA \cdot PB}$ eredményt kapjuk.

Húzzunk egy ponton át szelőket egy körhöz. Bizonyítsuk be, hogy a ponttól a metszéspontokig terjedő szakaszok hosszának szorzata állandó.

- (1) Ha P a körön van, akkor a $PA \cdot PB$ szorzat értéke 0.
- (2) A P pont nem illeszkedik a körvonalra.
 - A P pont a körön kívül van.



- A P pont a körön belül van.



$PA_1B_2\Delta \sim PA_2B_1\Delta$, ugyanis az ábrákon egyformán jelölt szögek egyenlő nagyságúak. (Az egyíves szögek egybeesnek, illetve csúcsszögek, a kétívesek ugyanazon az A_1A_2 íven nyugvó kerületi szögek.)

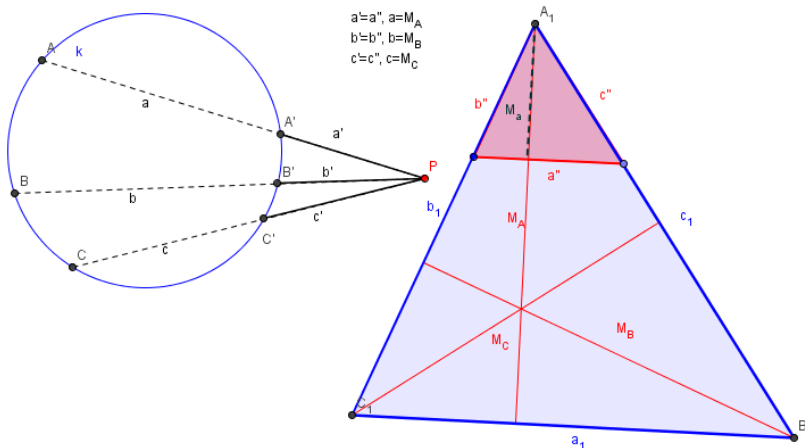
A hasonlóság miatt:

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{PB_2}{PB_1}$$

Innen: $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$. A PA és PB szelőszakaszok hosszainak szorzata a szelők helyzetétől függetlenül mindig állandó. Ez alapján kimondhatjuk a P pont k körre vonatkozó hatványát:

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } P \in k \\ PA \cdot PB, & \text{ha } P \text{ külső pont} \\ -PA \cdot Pb, & \text{ha } P \text{ belső pont} \end{cases}$$

Szerkesszünk háromszöget, ha adott a három oldalhoz tartozó magasság.

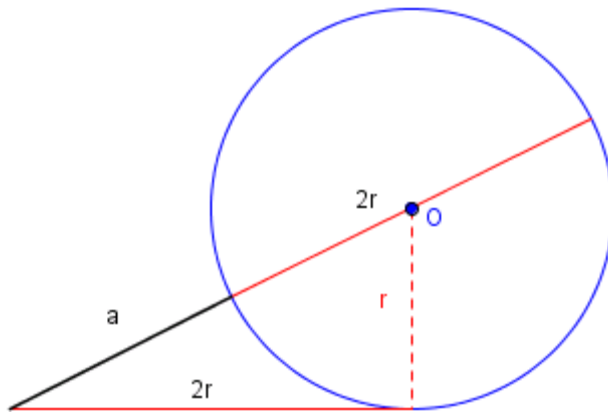


A három magasságnak (a, b, c) legyen P közös kezdőpontja, úgy hogy a P pontból, mint külső pontból a k körvonalhoz húzott érintők hosszai legyenek rendre a, b és c (azaz PA, PB, PC háromszög megfelelő oldalhoz tartozó magasságai). A kör és a magasságok

metszéspontjai által keletkezett A', B', C' pontok és a P pont által határolt szakaszok legyenek rendre a', b', c' . A pont körre vonatkozó hatványa miatt $\frac{PA'}{PB'} = \frac{a}{b}$, hasonlóan a többi oldal arányára is. A háromszögek hasonlósági tételei miatt a PA', PB', PC' oldalú háromszög hasonló a szerkesztendőhöz. Szerkesszünk a kapott a', b', c' szakaszokból háromszöget. Az ábrán $a' = a'', b' = b'', c' = c''$. A kapott a'', b'', c'' oldalú háromszög egyik oldalához a megfelelő csúcsból szerkesszünk a hosszú merőlegeset (M_A). A háromszög a'' oldalával párhuzamost húzva M_A végpontjából, valamint a b'', c'' szárakat meghosszabbítva az M_A -beli párhuzamossal metszve

megkapjuk a keresett háromszöget. A [dinamikus munkalapon](#) nyomon követve a szerkesztés lépéseit, könnyen megérthető a gondolatmenet.

2.2.8 Arany metszés



Alkalmazzuk a pont körre vonatkozó hatványát az ábra szerinti esetben. Milyen összefüggéshez jutunk?

Az $a(a + 2r) = (2r)^2$ összefüggésből

$$\frac{a}{2r} = \frac{2r}{a + 2r}$$

következik. Ekkor $2r < a + 2r$ miatt $a < 2r$ teljesül. (Az egyenlőségben szereplő törtek számlálója kisebb a nevezőnél.) Az a , $2r$,

$a+2r$ hosszúságú szakaszokra tehát igaz, hogy a kisebbik szakasz hosszúsága úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobbik a két szakasz összegéhez. Ez az arany metszés.

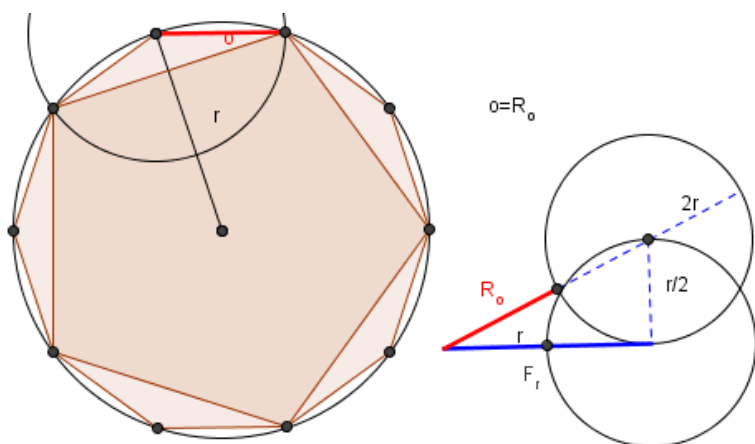
Arany metszés (sectio aurea): egy szakasz két szeletre vágása, ha a szeletek kisebbike úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a nagyobbik az egész szakaszhoz, azaz a p és q szeletekre (ha $p < q$) a $\frac{p}{q} = \frac{q}{p+q}$ aránypár teljesül. Egy adott szakasz arany metszése csak egyféleképp lehetséges (ha a szeletek sorrendjét nem nézzük), hiszen adott $p+q$ mellett q csökkentésekor p növekszik, és így a fenti aránypár belfüggőjének szorzata csökken, külfüggőjéé viszont növekszik, azaz q megváltoztatása után az aránypár már nem teljesülhet. Mínt hogy az arany metszésből nagyítással vagy kicsinyítéssel minden szakasz arany metszéséhez eljuthatunk, így az arany metszésnél szereplő arányok számértéke a szereplő szakaszok hosszától független.

Ha a fenti aránypárban szereplő q adott, akkor a mondottak szerint p is egyértelműen meghatározott. Ehhez a távolsághoz szerkesztéssel a következőképp jutunk: az $AB = q$ szakaszra B -ben merőlegest állítunk, erre felmérjük a $BC = \frac{q}{2}$ távolságot, majd a C körül $\frac{q}{2}$ sugárral írt kört az AC egyenessel metsszük; az így adódó, A -hoz közelebb eső D metszéspont adja a keresett $AD = p$ távolságot. Ennek a szerkesztésnek a helyessége belátható, ha kétféleképp felírjuk az A

pontnak a C középpontú körre vonatkozó hatványát. Az így adódó $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AE}$ egyenlőség a $q^2 = p(p + q)$ összefüggést adja, és ez az aranymetszést biztosító aránypár helyességét mondja ki. Az ókori görögök az aranymetszést felhasználták a szabályos tízszög – és ezáltal a szabályos ötszög – szerkesztéséhez. Tudták, hogy a szabályos tízszög oldala annak az aranymetszésnek a kisebbik szelete, amelynek a nagyobbik szelete a kör sugara.

Adott r sugarú körbe szerkesszünk szabályos ötszöget.

A fent említett szerkesztés segítségével a következő a szerkesztés: az r sugár egyik végpontján, mint középponton át $\frac{r}{2}$ sugarú kört szerkesszünk. A sugár középpontként használt végpontjából merőlegest állítunk úgy, hogy messe a kört. Ez a metszéspont lesz a középpontja egy újabb $\frac{r}{2}$ sugarú körnek. Az r sugár másik végpontját a második kör középpontjával összekötő szakasz két helyen metszi a kört. A sugár végpontja és a közelebbi metszéspont által közbezárt szakasz adja a

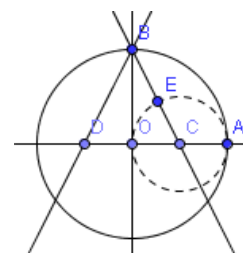


tízzög oldalát (az aranymetszés arányossága miatt). Ezután ezt a szakaszt felmérve tízszer az r sugarú körre, megkapjuk a keresett tízzöget. A tízzög minden második csúcsát összekötve pedig szabályos ötszöget kapunk (Látható, hogy a feladatunk annyi is lehetett volna, hogy szerkesszünk olyan egyenlő

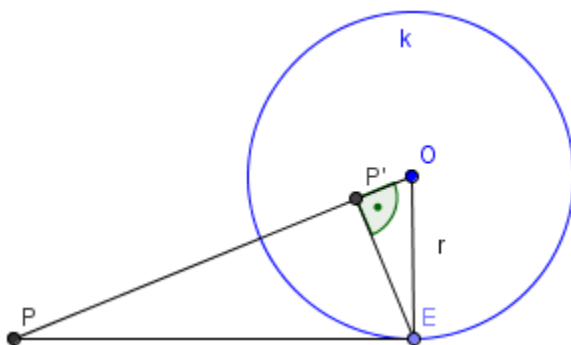
szerű háromszöget, aminek csúcsában 36° -os szög áll.) A szerkesztés könnyen és gyorsan elvégezhető a GeoGebrával, mint ahogy az a [mellékelt munkalapon](#) is látszik.

A körbe írt szabályos tízszög és ötszög oldalának megszerkesztését egy ábrába tömöríthetjük:

A kör merőleges OA, OB sugaraiból indulunk ki. Az OA sugár C felezőpontjának B-től mért távolságát a CO félegyenesre felmérve a CD szakaszt kapjuk; OD adja a beírt szabályos tízszög, BD pedig a beírt ötszög oldalát.



2.2.9 Inverzió



Vegyünk fel a síkon egy O középpontú, r sugarú kört. Húzzunk egy körön kívüli P pontból érintőt a körhöz, majd az E érintési pontot vetítsük le merőlegesen az OP szakaszra: így egy P' ponthoz jutunk. Ekkor $OP \cdot OP'$ értéke független P választásától.

Írjuk föl az OPE derékszögű háromszög OE

oldalára a befogótételt. Ez alapján:

$$OE^2 = OP \cdot OP'$$

Az $OE=r$ miatt ez az összefüggés a következő alakba írható:

$$r^2 = OP \cdot OP'$$

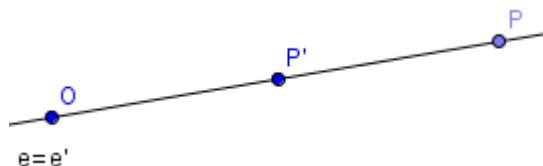
Ezzel az eredménnyel meghatároztuk a szorzat értékét, ezzel lehetővé téve, hogy bevezethessük az inverzió fogalmát.

Adott a síkon egy O középpontú, r sugarú kör. Rendeljük hozzá a sík egy O -tól különböző P pontjához az OP félegyenesnek azt a P' pontját, amelyre $r^2 = OP \cdot OP'$ teljesül. Az így megadott transzformációt *inverzió*nak, o -t az inverzió pólusának, az O középpontú, r sugarú kört az inverzió alapkörének nevezzük. A P' pont a P pont inverz képe.

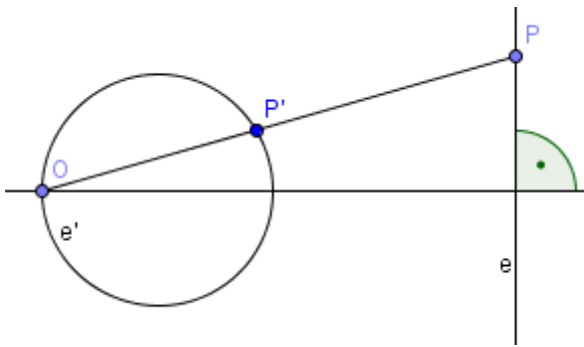
Az inverzió a sík minden O -tól különböző pontjához rendel egy inverz pontot. Ha P az alapkörön belül van, akkor P' kívül és fordítva. (P és P' szerepe felcserélhető.) A körvonalon lévő pont képe önmaga.

Inverzió esetén:

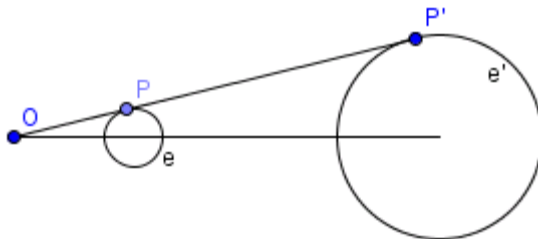
- (1) Póluson áthaladó egyenes képe póluson áthaladó egyenes.



- (2) Póluson át nem haladó egyenes képe póluson áthaladó kör (és fordítva: póluson áthaladó kör képe póluson át nem haladó egyenes).



(3) Póluson át nem haladó kör képe póluson át nem haladó kör.



Az inverzió tulajdonságai:

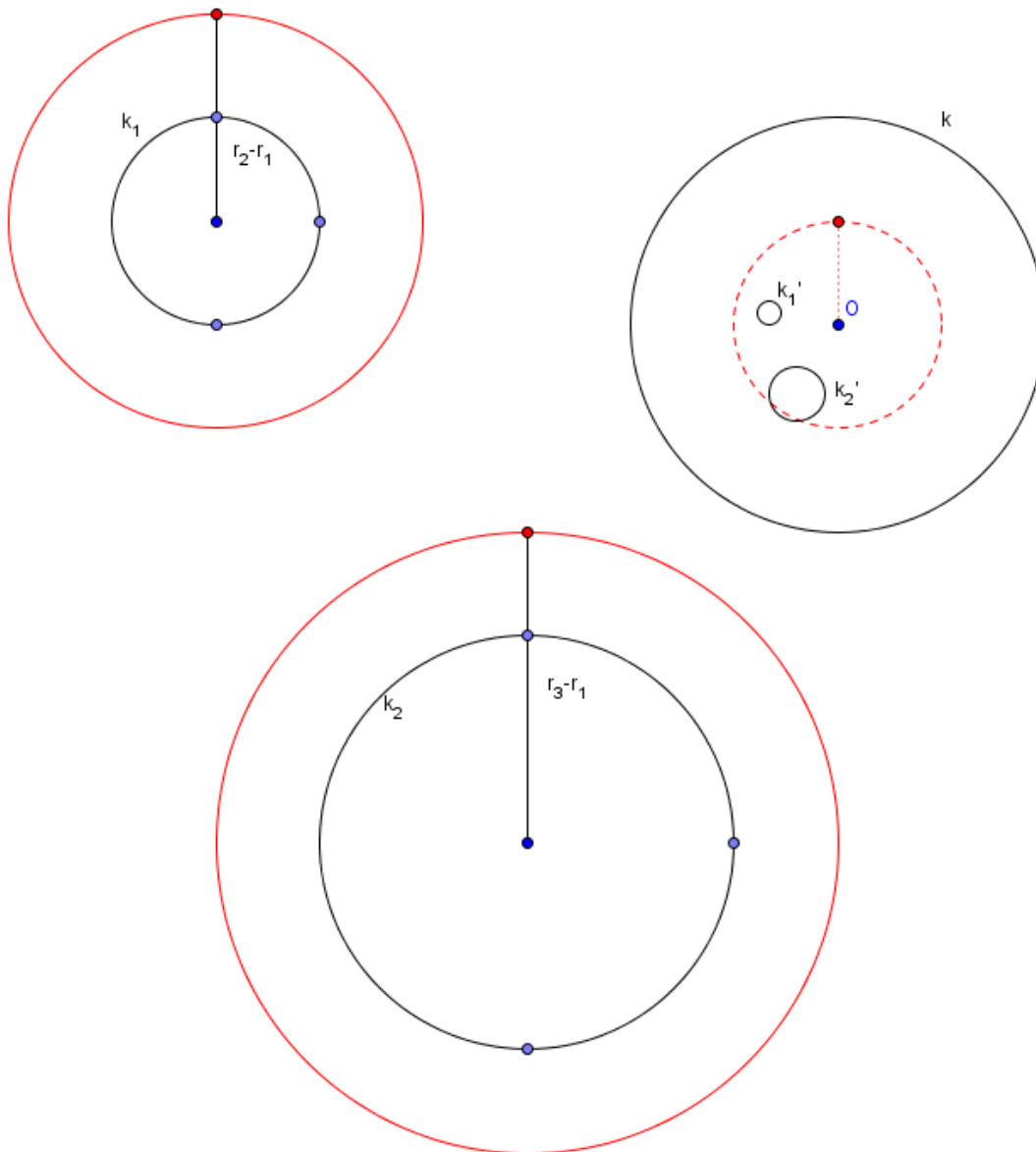
- nem távolságtartó
- nem egyenestartó
- nem szakasztartó
- szimmetrikus
- ha egy kör és egy egyenes vagy két kör egymást a pólustól különböző pontban érinti, akkor az alakzatok inverzei is érintik egymást.

Adott 3 kör, amik nem érintik és nem metszik egymást. Szerkesszünk olyan kört, ami érinti mindhárom kört.

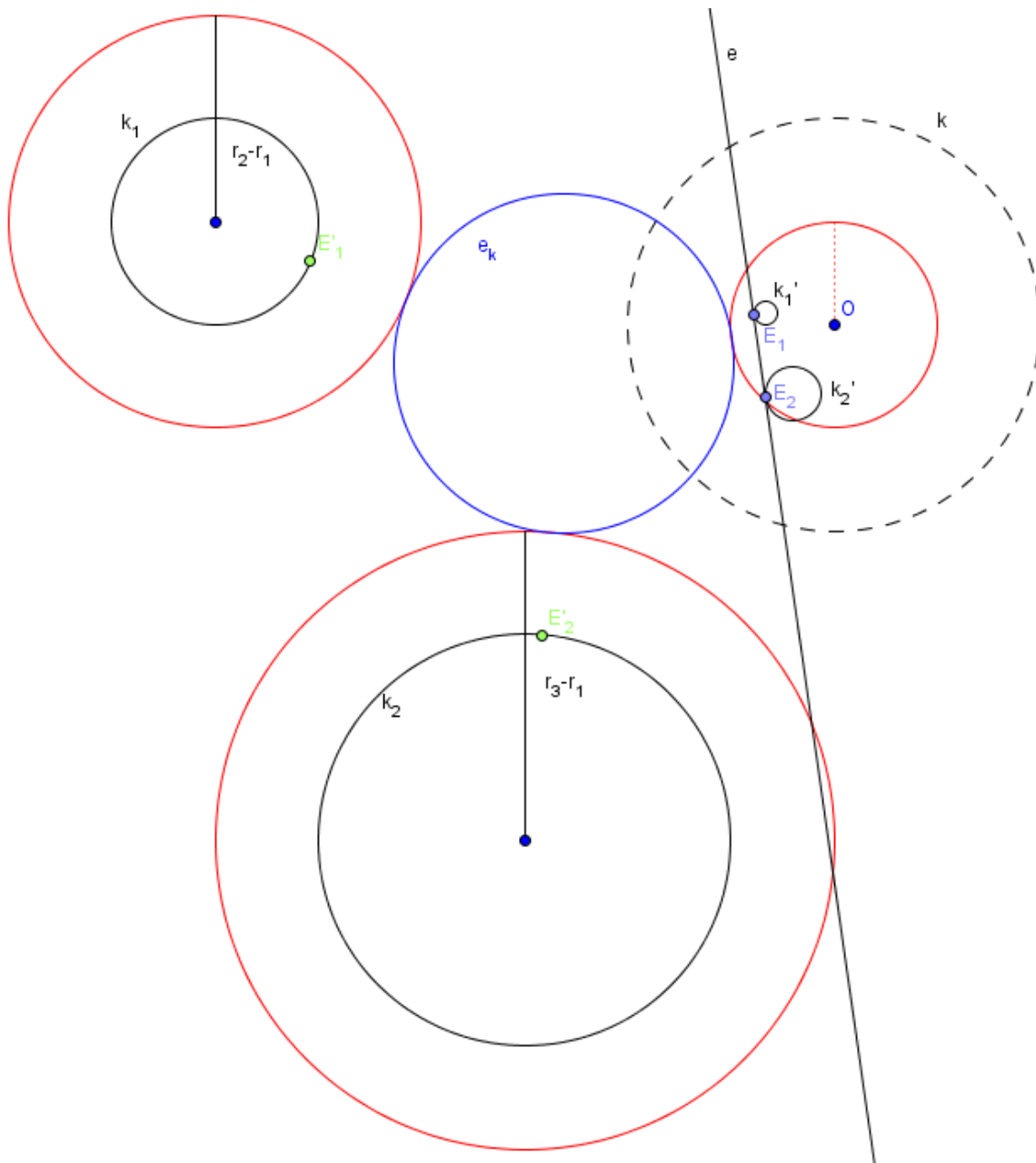
Az inverzióról leírtak alapján szerkeszthető meg a feladat (3 alakzathoz – pont, egyenes, kör-érintő kör szerkesztése, ezt a matematika Apollóniosz- feladatok néven említi. A most megszerkesztésre kerülő feladat a legnehezebb.)

Válasszuk ki a legkisebb sugarú kört, ennek középpontja legyen O, sugara r_1 . Csökkentsük r_1 -gyel a másik két kör sugarát ($r_2 - r_1$, illetve $r_3 - r_1$), majd ezekkel a csökkentett sugarakkal szerkesszünk olyan köröket, amiknek középpontjai az eredeti középpontok. Így egy pontot (az r_1 -

hez tartozó pont, sugár nélkül), és két kört kapunk (k_1, k_2). Legyen az inverzió pólusa O , köre k . Amennyiben a szerkesztésben eddig eljutunk, a következő ábra fogad minket:



A már tanultak alapján szerkesszünk a k'_1, k'_2 körökhöz közös érintőt (e). Az e érintőn lévő érintési pontok inverz képét (egyébként a k'_1, k'_2 körök bármely pontja megteszi) szerkesszük meg (E'_1, E'_2). Innem már könnyű dolgunk van: az $E'_1 E'_2 O$ háromszög köré kell kört szerkesztenünk. Ez már könnyen megy a tanultak alapján. A kapott kör sugarát r_1 -gyel csökkentve pedig megkapjuk a három kört érintő kört (e_k).



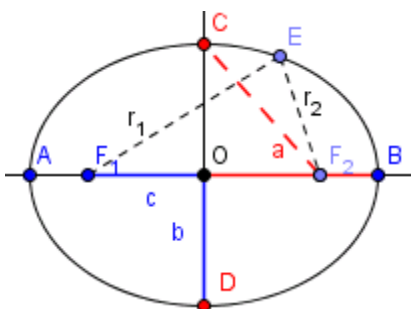
A [mellékelt munkalapon](#) a lépések nyomon követhetők. A szerkesztés sok lépésből áll, az alapvető szerkesztéseket (mint például adott pontból merőleges szerkesztése, háromszög köré kör szerkesztése nem mutatom be). Az órán érdemes az egyes lépések között szünetet tartani, és megbeszélni a látottakat, illetve az egyes nagyobb lélegzetvételű lépéseket, mint különálló feladatokat megszerkeszteni.

2.2.10 Kúpszeletek

Kúpszeletek néven három síkgörbefajtát foglalunk egy csoportba: az ellipszist (kört), a hiperbolát és a parabolát. Elnevezésüknek az alapja, hogy mindhárom görbe előállítható forgáskúp (illetve forgáshenger) síkmetszeteként.

Az ellipszis

Az ellipszis azoknak a pontoknak a halmaza, amelynek két rögzített ponttól mért távolságösszege állandó. A két pont az ellipszis fókusza, egy pontját a fókuszokkal összekötő szakaszok a ponthoz tartozó rádiuszvektorok.

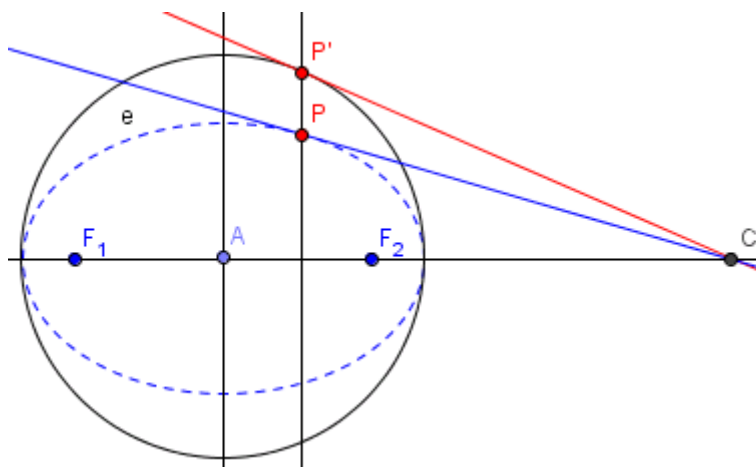


Az ellipszis a fókuszokat összekötő szakasz egyenesére, felezőmerőlegesére és felezőpontjára szimmetrikus alakzat. A fókuszokat összekötő szakasz egyenesét és felezőmerőlegesét, tehát az ellipszis szimmetriatengelyeit a az ellipszis tengelyeinek nevezzük. A tengelyek egymást az ellipszis szimmetriacentrumában merőlegesen metszik. Ez a pont az ellipszis centruma. A fókuszoknak a tengelyektől mért távolságát lineáris excentricitásnak nevezzük.

Ha az F_1, F_2 fókuszoktól az egyenes pontokhoz vezető rádiusz vektorok r_1, r_2 , akkor az ellipszis pontjait az $r_1 + r_2 = 2a$ egyenlet jellemzi, s az a állandóra teljesül, hogy $a > c$ egyenlőtlenség, ahol c a lineáris excentricitás.

A tengelyeken elhelyezkedő ellipszispontokat tengelypontoknak nevezzük. Az ellipszis tengelyei egymást a középpontban merőlegesen felezik. Hosszuk felét, az a és b értéket az ellipszis féltengelyeinek mondjuk, és $a > b$. Ennek megfelelően AB az ellipszis nagytengele, CD a kistengelye. Az ellipszis egyik fókusza körül a nagytengelelyel mint sugárral írt kört az ellipszis vezérkörének nevezzük.

Adott az ellipszis nagytengelye és egy P (P nem tengelypont) pontja; szerkesszük meg a P -beli érintőt.



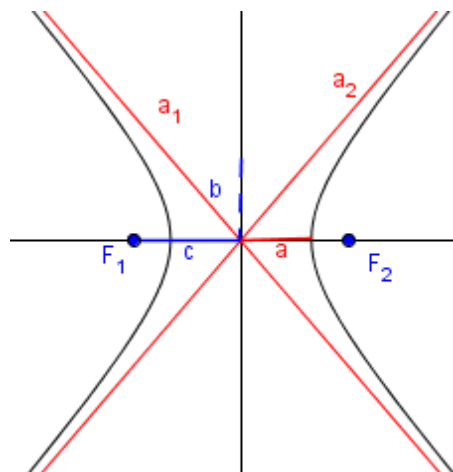
Mivel csak a nagytengely és a P pont adottak, ezekkel kell dolgozzunk, Vegyük fel a főkört, majd vetítsük a P pontot merőlegesen a főkörre (P'). Körnek meg tudjuk szerkeszteni az érintőjét: szerkesszünk hát érintőt P' -ből. A nagytengelyt tartalmazó egyenes és az érintő egyenes metszéspontja (C) lesz a szerkesztés

fixpontja. C -t összekötve P -vel, megkapjuk a keresett érintőt. A szerkesztés lépéseit a [munkalap](#) tartalmazza. A GeoGebra természetesen kezeli a kúpszeleteket is.

A hiperbola

A hiperbola a sík azon pontjainak halmaza, amelyeknek a sík két megadott pontjától mért távolságuk különbségének abszolútértéke állandó. Ez az adott érték a két pont távolságánál kisebb. A két megadott pont a fókusz, egy hiperbolapontot a fókuszokkal összekötő szakaszok a ponthoz tartozó rádiusz vektorok. A két rádiusz vektor közül az egyik kisebb a másikonál, hiszen a különbségük nem 0 . A hiperbola pontjai közül azok, amelyek az egyik fókuszhoz vannak közelebb, a hiperbola e fókuszhoz tartozó ágát alkotják.

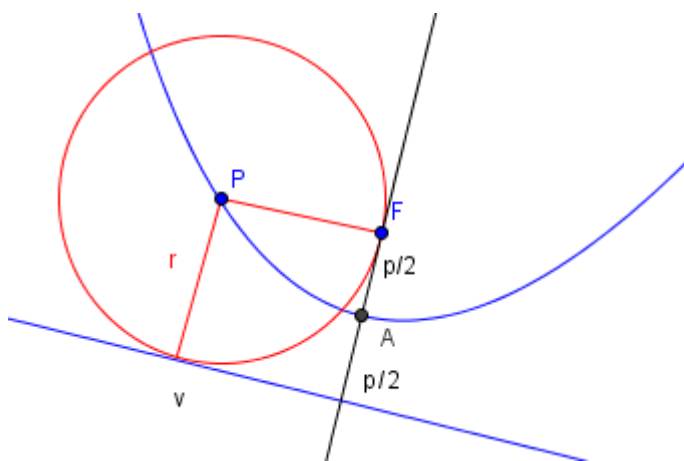
A hiperbola és mindkét ága szimmetrikus a fókuszokon áthaladó egyenesre, a fókuszokat összekötő szakasz felezőmerőlegesére és felezőpontjára. A fókuszokat összekötő szakasz egyenesét és felezőmerőlegesét hiperbola tengelyeinek nevezzük. A tengelyek merőlegesen metszik egymást a szimmetriacentrumban. Ez a pont a hiperbola középpontja. A fókuszoknak a középponttól mért távolsága a



hiperbola lineáris excentricitása. Ha az F_1, F_2 fókuszoktól az egyenes pontokhoz vezető rádiusz vektorok r_1, r_2 , akkor az ellipszis pontjait az $|r_1 - r_2| = 2a$ egyenlet jellemzi, s az a állandóra teljesül, hogy $a < c$ egyenlőtlenség, ahol c a lineáris excentricitás.

A fókuszokat tartalmazó valós tengelyen a hiperbolának két pontja van, azok a tengelypontok, az összekötő szakaszuk a valós tengely. A hiperbola képzetes tengelye a $b^2 = c^2 - a^2$ érték. Az a_1, a_2 egyenesek a hiperbola aszimptotái.

A parabola



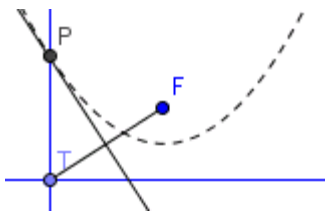
A parabola azon síkbeli pontok halmaza, amelyek a sík egy megadott egyenesétől és egy, az egyenesre nem illeszkedő megadott pontjától egyenlő távolságra vannak.

Az adott pont a parabola fókusza, az adott egyenes a parabola vezéregyenes (direktrix). A fókuszról egy parabolaponthoz vezető szakasz az ehhez

a ponthoz tartozó rádiusz vektor. A parabola a fókuszról a vezéregyenesre merőlegesen bocsátott egyenesre szimmetrikus, ez a tengely a parabola szimmetriatengelye. A tengelynek és a parabolának egyetlen közös pontja van, s ez felezi a fókuszról a vezéregyenesre bocsátott merőleges szakaszt. Ez a pont a parabola tengelypontja. A fókusz és a vezéregyenes távolsága a parabola paramétere. A tengelypont a vezéregyenesről és a fókuszról egyaránt $\frac{p}{2}$ távolságra van, ha p a paramétert jelöli.

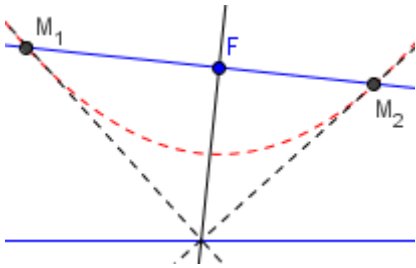
Adott a parabola fókusza és a vezéregyenes, valamint egy, a vezéregyenesre merőleges egyenes. Szerkesszük meg a parabola és az egyenes közös pontját.

A vezéregyenesre merőleges, azt T pontban metsző egyenes pontja akkor és csak akkor van a parabolán, ha T -től és a fókuszról ugyanakkora távolságra van. Ennek a merőlegesnek a



parabolához tartozó pontját ezért az FT szakasz felezőmerőlegese metszi ki. Minden esetben egy metszéspont van, mert FT nem párhuzamos a vezéregyenessel. A szerkesztés egyszerű, lépéseit a [munkalap](#) mutatja.

Adott a parabola vezéregyenese és fókusza, valamint egy, a fókuszon áthaladó, a vezéregyenestől különböző egyenes. Szerkesszük meg az egyenes és a parabola metszéspontjait.



A fókuszon áthaladó, a tengelytől különböző e egyenes pontjai akkor tartoznak a parabolához, ha a vezéregyenestől és a fókuszban e-re emelt m erőlegestől egyenlő távolságra vannak. Ebből következik, hogy az e egyenesnek a parabolához tartozó pontjait a v, m egyenesek szögfelező egyenesei metszik ki.

Mindig két ponthoz jutunk, mert m metszi a vezéregyenest, hiszen e nem azonos a tengellyel, és metsző egyenesek szögfelezői mindig metszik az egyenesek valamelyikére merőleges egyenest. Ez a szerkesztés is egyszerű, különösen, ha [dinamikus munkalappal](#) szemléltetjük

Befejezés

Pólya György egyik írásában a matematikatanárt egy „jó árus”-hoz hasonlította, azaz olyannak kell lennie, aki a portékáját el tudja adni a vevőnek, azaz a diáknak. A matematika tanár talán legfontosabb feladata a motiváció felkeltése, kialakítása és fenntartása. A motiváció a didaktikában alapelv, s rengeteg formája létezik. A számítógéppel segített oktatás mindenféleképpen rendelkezik ilyen motiváló hatással.

A geometria szerencsés helyzetben van motivációs szempontból a matematikán belül, hiszen látványos, a befektetett munkának látható eredménye van, ráadásul az eredmény sokszor szemet gyönyörködtető. Emellett olyan nagyszerű programok állnak rendelkezésre, mint a GeoGebra. Ez a program nem csak a tanárnak könnyíti meg a munkáját a látványos és pontos objektumaival, hanem a diáknak is segít megérteni a feladatokat egyszerű kezelhetőségével és dinamikusságával. Remélem, hogy szakdolgozatommal a teljesség igénye nélkül is sikerült kicsit közelebb hoznom mind a geometriát a mindennapokhoz, mind a számítógépeket a matematikához.

Köszönetnyilvánítás

Hálás vagyok Dr. Szilasi Józsefnek, Dr. Vincze Csabának és Dr. Kovács Zoltánnak, amiért az egyetemen bevezettek a geometria világába.

Mindenekfölött és elsősorban azonban szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Kovács Andrásnak, aki óráin kicsit közelebb hozta az egyetemi matematikát a diákjának, valamint amellet, hogy kiváló ötletekkel látott el, a kezdetektől fogva teljes mértékben támogatott e szakdolgozat megírásában.

Irodalomjegyzék

- Hajós György: Bevezetés a geometriába (Tankönyvkiadó, Budapest 1984)
- Reiman István: Bevezetés a geometriába (Gondolat, Budapest 1986)
- Dr. Szendrei János : Algebra és számelmélet (Tankönyvkiadó, 1986)
- Dr. Czeglédy István – Dr. Hajdu Sándor – Hajdu Sándor Zoltán – Dr. Kovács András – Róka Sándor: Matematika 9 (Műszaki Kiadó, Budapest, 2006)
- Dr. Czeglédy István – Dr. Hajdu Sándor – Hajdu Sándor Zoltán – Dr. Kovács András: Matematika 10 (Műszaki Kiadó, Budapest, 2006)
- Dr. Czeglédy István – Dr. Hajdu Sándor – Hajdu Sándor Zoltán – Dr. Kovács András: Matematika 11 (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2004)
- Dr. Czeglédy István – Dr. Hajdu Sándor – Hajdu Sándor Zoltán – Dr. Kovács András: Matematika 12 (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2005)
- Sulik Szabolcs: GeoGebra 2.5 kézikönyv (2006)