Debreceni Egyetem
Informatika Kar

Európai és egzotikus opciók árazása Monte Carlo szimulációval

Témavezető:
Dr. Gáll József Mihály
Egyetemi docens

Készítette:
Biró Gábor
gazdaságinformatikus

2010
Debrecen

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Vállalatirányítási szakirányra jelentkezett gazdaságinformatikus hallgatóként szakdolgozati témaként, a szakirány törzsanyagának igen nagy részét kitevő pénzügyi matematikára,azon belül pedig az opicóárazásra esett a választásom. Ez lefedi a gazdaságinformatikus képzés mind a két területét az informatikát és a gazdaságtant, hiszen a pénzügyi vonatkoztatású részek megértéséhez elengedhetetlen valamiféle gazdasági ismeret, a különféle modellek eredményeinek a kiszámítása, esetleges jövőbeli értékének a meghatározása számítógépekkel igen kényelmes. A gazdasági, pénzügyi élet hatékony irányítása ma már elképzelhetetlen egzakt tudományos módszerek alkalmazása, matematikai modellek kialakítása és számítógépes támogatás nélkül.

A modern pénzügyi élet alapvetően meghatározza az emberek hétköznapjait. Elég arra gondolni, ha külföldre kívánunk utazni, akkor ösztönösen is az utazásunk előtt elkezdjük nézegetni, hogyan mozognak a valuták napi árfolyamai, - most csökkenő vagy éppen növekvő tendenciát mutat - érdemes-e esetleg most beváltani arra az adott valutára, vagy várjunk vele holnapig. Mindez nagyon hasonló azokhoz a folyamatokhoz, amelyek a tőzsdén is lejátszódnak, bár a tőzsdepiacon való aktív részvétel pénzügyi befektetés, így ennek az elemzése jóval bonyolultabb, mint valami trend elemzés alapján történő döntés. A dolgozatban a számtalan pénzügyi befektetés közül a határidős (derivatív) ügyleteket, azon belül pedig az európai és egzotikus opciós ügyleteket kívánom vizsgálni.

A fejlett pénzügyi rendszerrel rendelkező társadalmakban a lakosság egy igen jelentős része - tudatosan vagy tudattalanul – a megtakarításainak egy részét valamilyen derivatív struktúrákba helyezik, hiszen itt olyan befektetési stratégiákat folytathatnak, amit a hagyományos tőzsdei kereskedésben nem, vagy csak nagyon nehezen lehet megvalósítani, így fontos megértenünk ezeknek a működését. A magyar tőzsdepiacon is igen jelentős a származékos piaci kereskedés, amely még mindig magán hordozza a válság hatásait, ezért is érdemes ezzel a témával komolyabban foglalkozni.

A válság során megmutatkozott, hogy az ember bekerült a pénzügyi élet „ördögi körébe”. A válság kirobbanásában a bonyolult derivatív struktúrák nem megfelelő szinten tartása nagy szerepet játszott. Ezeknek a struktúráknak köszönhetően túlzott tőkeáttételes pozíciók jelenhetnek meg, aminek a lényege az, hogy a befektetőnek nem szükséges az ügylet értékének megfelelő pénzösszeget elhelyezni a számláján, hanem elég annak egy meghatározott mértékű részét, majd az ügylet lezárásakor következik a pénzügyi elszámolás, ez ismerős lehet mindenki számára, elég az építőipari körbetartozásra gondolni. Mivel a származékos ügyletek esetén az ügylet ára az alapjául szolgáló terméktől függ, így érthető, hogy miért éppen a származékos piac szenvedte meg legjobban a válság hatását.

A Magyarországi származékos piac is küszködik a válság és a recesszió hatásaival, a teljes forgalomhoz viszonyított aránya 2 százalékponttal esett vissza 2009-ben, illetve még a származékos piacon belül is történtek átalakulások, hiszen a deviza alapú termékek javára tolódott el inkább a forgalom 52%-ról 58%-ra, az index és részvény alapú termékek kárára.[1]

Az utóbbi évtizedekben a pénzügyi befektetések struktúrája is megváltozott. A részvények és kötvények portfóliói mellett megjelentek a határidős termékek, amely a modern pénzügyi élet egyik legváltozatosabb és legdinamikusabban fejlődő területe. Ezt a gyors fejlődést nem követi megfelelő jogi szabályozás nemzeti és nemzetközi szinten, így ezek sok veszélyt rejtenek az összefüggő pénzpiacok stabilitásának szempontjából.

Az opció egy speciális határidős termék, amely a modern kockázatkezelés fontos, talán a legfontosabb része. Az opció egyfajta jogot biztosít a tulajdonosának egy adott termék egy meghatározott áron történő megvásárlására vagy eladására. Ez még majd később ismét felmerül, hiszen a különböző opcióknak az igazságos árát fogom meghatározni különböző módszerekkel.

A dolgozat első részében azokat a helyeket mutatom be, ahol értékpapírokkal kereskednek, majd a második rész az opció jellemzőiről lesz szó. A dolgozat gerince a negyedik fejezet, ahol az európai opciók árazását először a binomiális modellel hajtom végre, majd a Black-Scholes féle opcióárazási modellel, végül pedig két útvonalfüggő egzotikus opció árazására is sor kerül. Az egyes modellek esetén kiszámítjuk az explicit formulával kapott árat - ahol létezik - és a szimulációval kapott árat, majd ezeket összevetem. Az egyes modellekben lesznek feltételezéseink a részvényárfolyammal kapcsolatban, és a feltételek mellett meghatározzuk a lehetséges részvényárfolyamokat. Az utolsó fejezetben pedig megpróbálom összefoglalni a dolgozatban leírtakat.

---

[1] http://bet.hu/data/cms153244/Sajtoanyag_20100107_hun.pdf

A szimulációt egy ingyenes és nyílt forráskódú szoftverrel, az R programcsomaggal végzem. A programcsomag a nyílt forráskódja miatt rengeteg statisztikai, pénzügyi és egyéb csomaggal, illetve különféle beépített függvénnyel rendelkezik. A dolgozatban az opció árazásának megértéséhez szükséges elméleti háttér, illetve a program részleteinek a magyarázatára is sor kerül.

A dolgozatom megírásában nagy segítséget nyújtott Dr. Gáll József Mihály, aki hasznos tanácsaival, ötleteivel, ajánlott szakirodalmakkal segítette a munkámat, amiért szeretnék neki köszönetet mondani.

2. A származtatott termékek

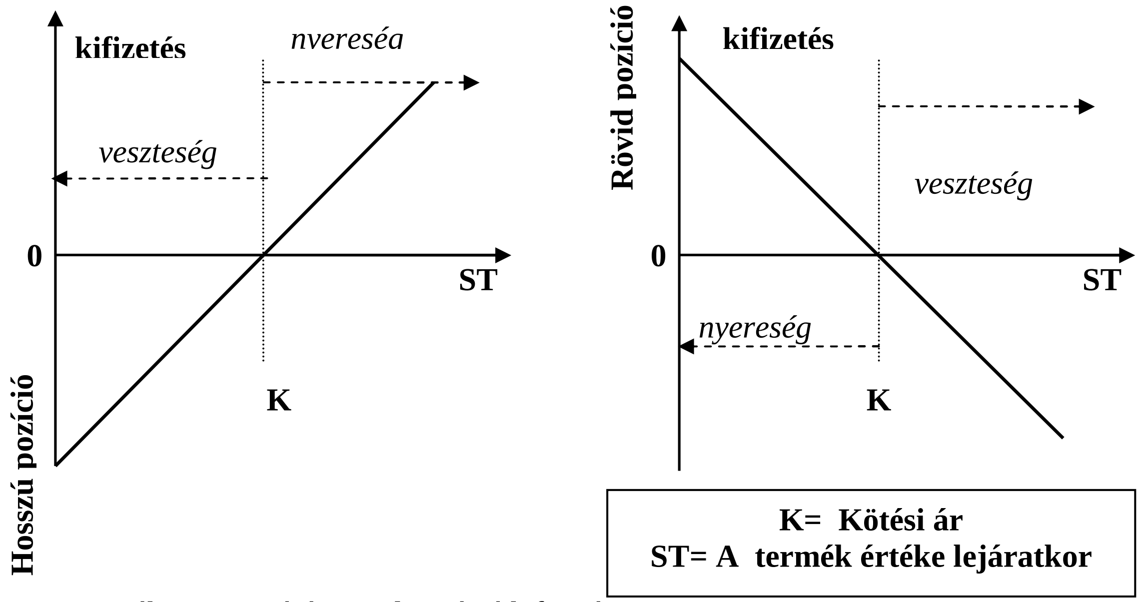
2.1. Az értékpapír kereskedés színhelye

A származtatott értékpapír olyan pénzügyi eszköz, amelynek értéke más alapvető változók értékétől függ (Hull 1999). Léteznek tőzsdén kívüli határidős ügyletek illetve tőzsdei határidős ügyletek ahol származtatott értékpapírral kereskednek.

2.1.1 Tőzsdén kívüli határidős ügylet

A **tőzsdén kívüli határidős ügylet** esetén általában két pénzügyi intézet, vagy egy intézet és annak ügyfele tesz olyan megállapodást, hogy valaki egy adott áron egy adott jövőbeli időpontban vásárol vagy elad egy bizonyos terméket. Ez a termék bármi lehet (deviza, árucikk…). Azaz ügyfél, aki a megállapodás szerint egy adott áron megvásárolja a terméket, hosszú pozícióban van, az ő kötelezettsége hogy a lejárat időpontjában az adott áron átvegye a terméket, míg a másik szereplő rövid pozícióban van, neki kötelessége a terméket adott áron leszállítani a vevőnek a lejárat után megbeszélt időpontra. Az ügyletben előre meghatározott árat kötési árnak nevezi a szakirodalom.

A hosszú pozíció kifizetési függvénye S_T-K, hiszen az ügylet tulajdonosának K-ért kell megvennie azt a terméket ami S_T-t ér ezzel szemben a rövid pozíció kifizetés függvénye K- S_T, hiszen K-ért kell eladnia azt ami S_T-t ér.



1. ábra Hosszú és rövid pozíció kifizetése

2.1.2 Tőzsdei határidős ügylet

A **tőzsdei határidős ügyletek** a tőzsdén kívüli határidős ügyletekhez hasonló, hiszen itt is egy adott terméket, egy adott jövőbeli pillanatban, előre meghatározott áron történő vásárlásra vagy eladásra vonatkozik a két fél közötti megállapodás. A vásárlás vagy eladás megkönnyítése érdekében a tőzsde bizonyos szabályokat, szabványokat állít fel. Mivel a két fél ismeretlen, a tőzsde szabályai miatt csökkenti a két fél közötti bizonytalanságot, növeli a likviditást. A tőzsdén kívüli határidős ügyletekkel ellentétben itt nincs meghatározott leszállítási időpont. Speciális fajtája az opciós ügylet.

A tőzsde nyilvános, központosított és szervezett piac. A magyarországi tőzsde jogi személy, önkormányzattal rendelkezik, nem nyereségorientált, de bevételeiből tartja fenn magát. Üzletet csak tőzsdeügynökön (alkusz) keresztül lehet kötni. A tőzsdei kereskedelemben részt vevő áruknak vagy értékpapíroknak nem kell jelen lenniük, mivel az egyes áruk helyettesíthetők, illetve egymással kicserélhetők. Az eladni és vásárolni szándékozók árelképzelései befutnak a tőzsdei üzletkötőkhöz (brókerek), akik ezeket megpróbálják a piacon érvényesíteni.

A határidős ügyleten kívül létezik azonnali tőzsdei ügylet is.

3.Opciók

A határidős ügyletek egyik speciális fajtája az **opció**, amivel 1973-ban kereskedtek először, azóta nagymértékű növekedés történt az opciós piacokon. Opciók cserélhetnek gazdát a tőzsdei illetve tőzsdén kívüli piacokon. A tőzsdén kívüli határidős ügyletek esetében tárgyalt hosszú (long) és rövid (short) pozíció mintájára létezik eladási és vételi opció is.

3.1 Opció fajták

Két fő típusa létezik a **plain vanilla (egyszerű)** és az **egzotikus** opció. A **plain vanilla** opcióknak két fajtája létezik az **amerikai** és az **európai.** Az **amerikai** opció esetén a lejárat időpontjáig bármikor lehívható, az opció lejáratkori értéke megegyezik a jegyzési ár és az alaptermék árának különbségével, vagy nullával, amíg az **európai** opció csak a lejárat időpontjában hívható le, az opció lejáratkori értéke (vagy lehíváskor értéke) megegyezik a jegyzési ár és az alaptermék árának különbségével, vagy nullával. Az amerikai típusú opció értéke, a korábbi lehívás lehetőségének köszönhetően, nagyobb vagy egyenlő az európai típusú opció értékéhez viszonyítva.

Az **egzotikus** opciók olyan opciók, amelyek a standard opciókból vannak származtatva. Számtalan fajtája létezik, ilyen például az **ázsiai** opció ez egy európai típusú opció, melynek lejáratkori értéke megegyezik a lejáratkori alaptermék árának és az alaptermék opció élettartama alatti átlagárának különbségével, vagy nullával.

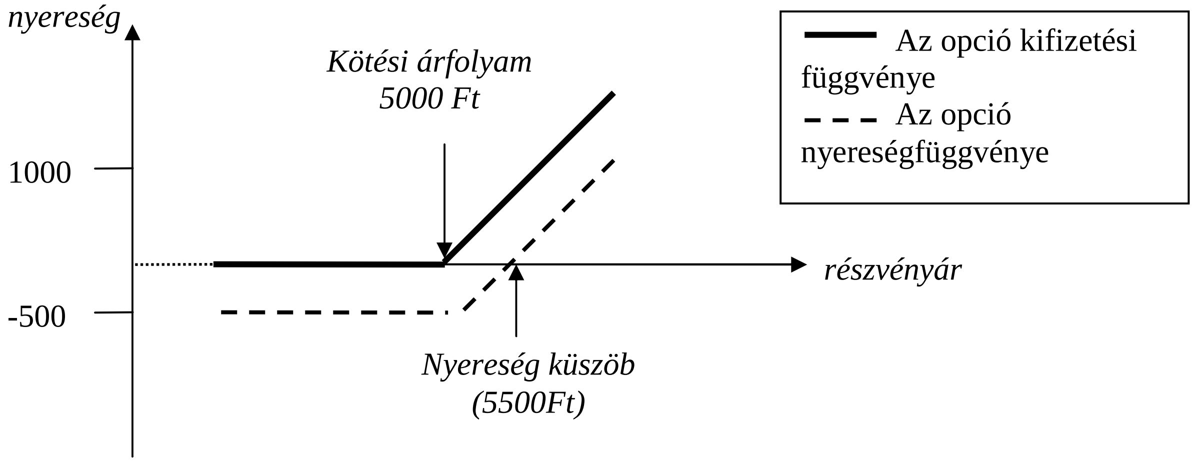
Az opcióban vállalt pozíció alapján a **vételi** vagy angolul call opció jogot biztosít a tulajdonosának, hogy egy alapterméket - ami lehet bármi –megvásároljon egy adott áron egy adott időpontban. Az **eladási** vagy angolul put opció jogot biztosít a tulajdonosának arra, hogy egy alapterméket eladjon egy adott időpontban egy előre meghatározott áron. Ezt az árat nevezzük kötési árnak.

Minden opciós ügyletnek megvannak a saját költségei ezeket opciós díjnak vagy opciós árnak szoktak nevezni. Ez a legnagyobb és legalapvetőbb különbség a határidős ügyletek és az opciók között. Az opció költsége azért merül fel, mert ez csak egy jog, és nem egy kötelezettség, így szabadon döntöm el, hogy élek-e ezzel a jogommal vagy sem. Tulajdonképpen én ezért a jogért fizetem ki a díjat. A lehívás azt jelenti, hogy élek az opciós jogommal, azaz egy adott értékpapírt, (amit most az egyszerűség kedvéért nevezzünk részvénynek) céláron (kötési áron) eladom, vagy megveszem és kifizetem az opciós díjat.

Persze ez nem jeleni azt, hogy csak ennyi díja van egy opciónak. Lehetnek még egyéb díjak is, bizonyos tranzakciós költségek illetve egyéb illetmények, de ezeket most elhanyagolhatónak fogjuk tekinteni, így egyszerűbb lesz a modell. Igazából azt sem lehet mondani, hogy egy határidős ügyletnek nincs díja. Ennek is van egy valamilyen szintű díja, de ezt már beleépítik az ügylet árába.

3.2 Opció kifizetési függvénye

Mivel az opcióknak van díja, ezért a korábban ismertetett (hosszú és rövid pozíciós) kifizetési függvények nem igazak rájuk. Ezt egy egyszerű példán keresztül könnyen megérthetjük: Legyen egy európai vételi opció, amelynek aktuális részvény árfolyama 4600 Ft, kötési ára 5000 Ft, az opció díja 500 Ft. Az európai vételi opció azt jelenti, hogy egy adott részvényt egy adott kötési áron megvásároljuk. A mostani állapotban, nem hívnánk le az opciót, hiszen miért vennénk meg egy olyan részvényt 5000 Ft-ért, amikor csak 4600 Ft-ot ér. Ekkor elveszítjük az opciós árat, hiszen azt ki kell fizetnünk az opció tulajdonosának, ami 500 Ft-unkba kerül. Ha az opcióban szereplő részvény árfolyama mondjuk 5600 Ft lesz, akkor lehívjuk az opciót és megvásároljuk a részvényt 5000 Ft-ért, kifizetjük az opciós díjat ami 500 Ft, így realizálunk 100 Ft nyereséget. Beláthatjuk, hogy a veszteségünk korlátozott, hiszen maximum az opciós díjat bukhatjuk el, a nyereség pedig a piaci lehetőségek között korlátlan.



2. ábra Az opció nyereségfüggvénye és kifizetési függvénye

Ezt a példát hasonlóképpen meglehet vizsgálni eladási opcióra, illetve vizsgálni lehet olyan szempontból is, hogy hosszú vagy rövid pozícióban veszünk részt az opcióban. Így négy pozíció lehetséges:

	Kifizetés függvény:
➢ Hosszú pozíció egy vételi opcióban	$Max(S_T-K,0)$
➢ Hosszú pozíció egy eladási opcióban	$Max(K- S_T,0)$
➢ Rövid pozíció egy vételi opcióban	$-Max(S_T-K,0)$
➢ Rövid pozíció egy eladási opcióban	$-Max(K- S_T,0)$

3.3 A „plain vanilla-ötös”

Az opciók megvásárlása során a jogosult opciós díjat, prémiumot fizet az opció tulajdonosának, amelynek tükröznie kell az opció mindenkori értékét. Ellenkező esetben az opció alul- vagy felülértékelt.

Ezt a díjat a plain vanilla opciók esetén öt tényező befolyásolja, a korábban említett **kötési ár** és a **lejáratig hátralévő idő** mellett még az **azonnali részvényárfolyam** (vagy bármilyen más alaptermék árfolyama), a **volatilitás**, a **kockázatmentes kamatláb**, illetve az opció futamideje alatt esedékes **osztalékok** befolyásolják az opciós ügylet díját. Egzotikus opciók esetén ezeken kívül még számtalan más tényező is befolyásolhatja az opció árát, mint például valamilyen korlát. Ezen tényezők közül valamelyik már adott, mint például a kockázatmentes kamatláb, hiszen azt az adott ország jegybankja határozza meg a piaci viszonyok függvényében. A pillanatnyi részvényárfolyam, a kötési árfolyam és a lejáratig hátralévő idő is adott. Az osztalék összege vagy az osztalékfizetési ráta ismert, amiből meghatározható az osztalékfizetés összege, az osztalék hatása pedig megjelenik a részvényárfolyamon, hiszen az osztalékfizetés utáni napon csökken a részvényárfolyam, a volatilitást viszont nekünk kell meghatározni.

A **volatilitás** nem más, mint a részvényárfolyam változékonysága egy adott időintervallum alatt. Leegyszerűsítve a dolgot azt mondhatjuk, hogy mekkora a részvényárfolyam jövőbeli bizonytalansága. A volatilitás meghatározása két módon lehetséges, az egyik a volatilitás becslése historikus adatokból, a másik pedig a visszaszámított volatilitás.

A **visszaszámított volatiltiás** esetén már a piacon meglévő opciókból számítjuk ki a volatilitást, valamilyen árazó képletet használva a következő módon: azt feltételezve, hogy a piacon az opciót egy konkrét opcióárazó képlet segítségével árazták, megvizsgáljuk mi az a volatilitásérték, amely mellett a feltételezett árazó képlettel számolt opcióár megegyezik a piacon megfigyelt opcióárral.

Előtte azonban egy dolgot tisztázni kell, milyen összefüggés van az opció ára és a volatilitás között. Ha nő a volatilitás, akkor nő az opciós díj is. Ahogy a volatilitás nő, egyre nagyobb lesz annak az esélye, hogy a részvény vagy nagyon jól, vagy nagyon rosszul teljesít. A vételi opció tulajdonosa jól jár, ha az árak emelkednek, de a vesztesége korlátozott, ha az árak csökkennek. Hasonlóan az eladási opció birtokosa nyer az árak csökkenése esetén, viszont korlátozott a veszteség árnövekedés esetén. Megállapitható, hogy nagy volatilitás esetén mind a két fél jobban járhat, ezért az opciós díjnak nőnie kell.

Az egyik legegyszerűbb módszer a közelítésre a következő: tegyük fel 30% a volatilitás, kiszámolom a feltételezett képlettel az árat, ha ez az ár alacsonyabb, mint a piaci ár akkor újraszámolom 40%-os értékkel, ha nagyobb, akkor pedig 20%-os értékkel. Ha 30% és 40%-os volatilitással kapott ár között van a piaci ár, akkor megfelezem az intervallumot és kiszámítom 25%-os volatilitással az árat. Ha ettől kisebb a piaci ár, akkor tovább felezem az intervallumot, mondjuk 22%-ra és megvizsgálom ezzel. Egészen addig felezem az intervallumot, amíg meg nem kapom a megfelelő volatilitási értéket.

A historikus esetben a múltbéli részvényárfolyam adatokból empirikus becsléssel kapjuk a volatilitást, ami a hozam változékonysága**.** Ezt a változékonyságot a folytonos kamatozással számított hozam szórásával szokás mérni. Ezt a megoldást fogom alkalmazni az opcióárazás során a volatilitás meghatározásához. A módszer a következő: veszünk egy meghatározott időszakot amikorra vizsgálni akarjuk a volatilitás. Általában 90 és 180 nappal szoktak számolni, de az is egy jó megoldás, hogy ahány hónap az opció lejáratáig hátralévő idő annyi időre számítjuk vissza a volatilitást.

Ez R-ben úgy néz ki, hogy felvesszük az árakat egy vektorba:

```
arak<c(683,693,698,691,688,677,688,680,675,665,670,687,682,686,675,68
8,680,684,680,674,673,670)
```

```
hossz<-length(arak)  # Meghatározza a vektor hosszát a length() függvény
```

Ezen időszak alatt megfigyeljük a napi, heti, esetleg havi záróárfolyamokat. Kiszámítjuk ezen árfolyamok loghozamát. Az i-ik loghozam Ln($\frac{Si}{Si-1}$), ahol S_i az i-ik záróárfolyam.

```
loghozam<-c()
loghozam=log(arak[2:hossz]/arak[1:(hossz-1)])
```

Majd az így kapott mintának kiszámítjuk a korrigált empirikus szórását.

hozamszoras<-sd(loghozam) # Az sd() függvény kiszámítja a szórást

Mivel ΔT idő alatt a variancia $\sigma^2 \Delta T$, így napi adatokból számolva a szórás gyökösen arányos az idővel, így

```
volatilitas<-hozamszoras/sqrt(1/252)
```

A volatilitás kapcsán egy érdekes kérdés, hogy napi adatok esetén naptári évi (360 nap) vagy kereskedési (252) napokkal számoljunk. Jelen esetben én kereskedési napokkal számoltam és így kaptam meg az évesített volatilitást.

Ez a Magyar Telekom részvény 1 hónapos volatilitása 2010. július 10. és 2010. szeptember 10 közötti napi záróárfolyamokkal számolva.[2] R programmal számolt volatilitás: [1] 0.1945030

A portfolio.hu internetes portálon megtalálható a részvény 1 hónapos volatilitás adata is, amely 19,5%, ez pont annyi, amit az R-el is kiszámoltam, tehát itt a historikus adatokból történő becslést alkalmazzák, és tőzsdei napokkal számolnak.

A részvény 3 havi volatiltása 23%.[3]

[2] A záróárfolyamokat a protfolio.hu weboldalról le lehet tölteni az adott időszakra Excel formátumban.

[3] A fenti kód 3 hónapra kibővített adataival számolva, amelyet a portfolio.hu portál is megerősít

4. Opcióárazás MONTE CARLO szimulációval

4.1Történeti áttekintés[4]

Az 1945-ben elkészített, majd 1949-ben publikált Monte Carlo módszer (a továbbiakban: MC) feltalálása – közvetetten – Neumann János és E. Fermi nevéhez fűződik, és azóta számos alkalmazási terület problémáinak megoldásához bizonyult alkalmasnak, a fizikában, a meteorológiában, a vegyiparban és a közgazdaságtan keretei közt is alkalmazzák.

A módszer alkalmazását a gyakorlatban Georges Louis Leclerc Comte de Buffon híres tű-feldobásos problémájánál találjuk meg. 1777-ben G. L. Leclerc végzett egy kísérletsorozatot, hogy vajon mennyi annak a valószínűsége, hogy egy "l" hosszúságú tű feldobás után az asztallapra felrajzolt, egymástól "d" távolságban lévő párhuzamos vonalak valamelyikét metszeni fogja, ahol "d">"l". Ezt a valószínűséget analitikusan megoldotta, majd egy kísérletsorozatot N-szer végrehajtotta, megszámolta az esemény bekövetkezésének a gyakoriságát (n), és azt találta, hogy a n/N elég nagy N esetén elég jó közelítést ad a valószínűségre.

A Student néven publikáló W. S. Gosset statisztikus szintén alkalmazott ehhez hasonló statisztikai mintavételt bűnözőkkel kapcsolatos kutatásai során 1908-ban. Az eljárást a Manhattan projekten dolgozó Neumann János teamjének tagjai fedeztek fel újra a második világháború alatt. Neumann egyik lengyel származású kollégája, Stanislaw Ulam az atom- majd később a hidrogénbombával kapcsolatos erőfeszítései mellett az 52 lapos passziánsz sikeres lerakásának valószínűségén töprengett, amikor rájött, hogy az általuk épített számítógép segítségével könnyedén lehet szimulálni megfelelő számú leosztást, amiből már közelítő megoldásra juthat.

Neumann másik kollégája Nicholas Metroplis nevezte el az eljárást Monte Carlo-nak, vélhetően a rulett kerekek véletlen-szám generáló képességére asszociálva, és fejlesztette ki az első, ezen a módszeren nyugvó számítógépes alkalmazást. Az elnevezés arra utal, hogy a módszerhez szükséges véletlen számokat akár egy játékkaszinó eredményeiből is vehetnénk.

[4] S. Kaplan: Monte Carlo methods for option pricing c. munkája alapján

Ulam-val együtt 1949-ben publikálták első írásukat a témakörben. A gyakorlatban viszont a véletlen számokat a számítógépek maguk állítják elő, ezért lehet a pénzügyi szektor, a matematika és a számítástechnika egyik legnagyobb „felhasználója”, alkalmazója. A banki szolgáltatások a nagyteljesítményű számítástechnikai eszközöktől, a kifinomult aprólékosan optimalizált matematikai algoritmusokig, az informatika széles skáláját kihasználják.

A MC kutatása Boyle (1977) munkája után a pénzügyi területeken felvirágzott, és napjainkban egyre több feladathoz használják. Figlewski (1992), Hull és White (1987) már alkalmazták a Monte Carlo eljárást az opciós piacok elemzése során. Jellemzője, hogy nagy a számítási kapacitás szükséglete, ezért is talált megfelelő alkalmazási területre a pénzügyi intézményeknél, ahol a számítási igények mellé elegendő kapacitást is tudtak biztosítani. A MC többek között pénzügyi számításokra, deviza/valuta árfolyamok alakulására, opciók, részvények árának előrejelzésére alkalmas.

A módszernek létezik több változata, attól is függően, hogy mely tudományágban alkalmazzák, illetve milyen területen használják. Numerikus szempontból az opcióárazásához igen kényelmes, hiszen az alaptermék számának növekedésével közel lineárisan növekszik a tesztelésre szánt idő is, illetve rugalmas, hiszen könnyű implementálni és módosítani. A szimulációnak matematikai szempontból is vannak előnyei, hiszen ez egy olyan becslés, amely torzítatlan és konzisztens, illetve megkaphatjuk az eljárás során a standard becslési hibát is. A becslés pontosságát antitetikus (ellentétes előjelű) változók alkalmazásával javíthatjuk.

Persze a Monte Carlo szimulációnak is voltak ellenzői, kételkedői. Ők elsősorban azt emelték ki, hogy nem túl költség-hatékony megoldás (Philippatos [1972]), csak akkor alkalmas, amikor szinte lehetetlen vagy túl drága megfigyelni az adatokat, vagy a matematikai kísérlet megerősítése túl drága, esetleg a megfigyelt rendszer túl komplex (Rubinstein [1981])[5]. Monte Carlo módszer csak nehezen alkalmazható amerikai típusú származtatott termékek értékelésére (HULL 1999)

[5] David Nawrocki, Ph.D.: The Problems with Monte Carlo Simulation c. munka alapján

Leszűrve a konzekvenciát, azt mondhatjuk el, hogy olyan esetekben nem érdemes alkalmazni származtatott termék értékelésére, ahol pontos eredmények szükségesek és a megfelelő adatok rendelkezésre állnak, létezik olyan explicit formula, amellyel kiszámolhatjuk az opció igazságos árát. A származtatott termékek értékelése abban az esetben, ha nem állnak rendelkezésünkre pontos képletek, esetleg pontos adatok, szimulációs eljárással igen célravezető, illetve ha a derivatíva ára nem csak a lejártakori elméleti árfolyameloszlástól, hanem valamilyen egyéb feltételektől is függ. A dolgozat következő részében mind a két esetet megvizsgálom.

Talán az eljárás legnagyobb hibáját és szerintem egyben a legnagyobb előnyét is Rees and Sutcliffe [1993] mondta ki, miszerint a Monte Carlo szimuláció akkor hasznos, amikor már semmi más nem működik.[5]

A Monte-Carlo szimulációs eljárás esetén véletlen számok segítségével becsüljük a származtatott ügylet alapját képező változók által felvett értékek azon lehetséges sorozatait, amelyeket a változók kockázatsemleges világban követhetnek. [6]

Mi az a kockázatsemleges világ és arbitrázsmentesség?

Az opcióárazásnak - függetlenül attól, hogy milyen opcióárazási modellben árazunk - a keretrendszer feltétele az arbitrázsmentesség és a kockázatsemlegesség. Az arbitrázs ügyleteket végző piaci szereplők (arbitrázsőrök) tevékenységének lényege, hogy a piaci tökéletlenségeket kihasználva próbál kockázatmentes profitra szert tenni. Az arbitrázsőrök csak akkor lépnek piacra, amikor kockázatmentes profitot lehet realizálni, azaz akár egyes piacok között, akár egyes termékek között olyan árkülönbségek alakulnak ki, amelyeket ki tudnak használni: vesznek az olcsóbb helyen és eladnak a drágább helyen. A kockázatsemlegesség azt jelenti, hogy a befektetők semlegesek a kockázattal szemben, így az opciótól elvárt hozam megegyezik a kockázatmentes hozammal.

Amikor egy opció igazságos árát határozom meg a modellekben, akkor mindig azt kell érteni, hogy a piacon nincsenek arbitrázs lehetőségek.

---

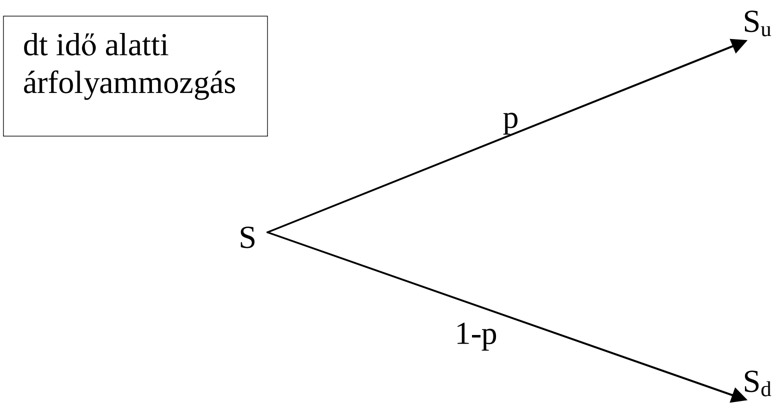
[6] ASWATH DAMODARAN : A Befektetések Értékelése, Panem 2006

4.2 A Cox-Ross-Rubinstein formula és közelítése Monte Carlo szimulációval

1979-ben Cox, Ross és Rubinstein egy a korábbiakhoz képest intuitívebb opcióárazási modellt vezettek be. A binomiális módszer, mint diszkrét idejű modell az opciók egy leegyszerűsített értékelését teszik lehetővé.

4.2.1A modell:

Az opcióárazás egyik lehetséges módja a binomiális fa szerkesztésén alapuló eljárás. Ez egy olyan fa, ami a származtatott termék és a mögöttes termék (jelen esetben részvény) árfolyama által követett lehetséges utakat jelenít meg. Cox, Ross és Rubinstein javaslata szerint a részvényárfolyam-változások nagyszámú, kis léptékű binomiális mozgásokkal elég jól modellezhető. Minél inkább tartunk a lépésszámmal a végtelen felé, annál inkább tekinthetjük a modellt időben folytonosnak. Tehát az opció élettartamát felosztjuk N darab „dt” nagyságú időtartamra. Így N*dt=T-t, ahol T-t az opció lejárati ideje. Egy ilyen kis „dt” időtartam alatt a részvényárfolyam két értéket vehet fel egy S kezdeti részvényárfolyamról elmozdulva, ez a két érték S_d és S_u . Az első esetben a részvényárfolyam lefelé mozdult el, ennek a valószínűsége 1-p, amíg a második esetben felfelé mozdult az árfolyam, ennek a valószínűsége p.



3. ábra A felfelé és lefelé mozdulása adott valószínűséggel

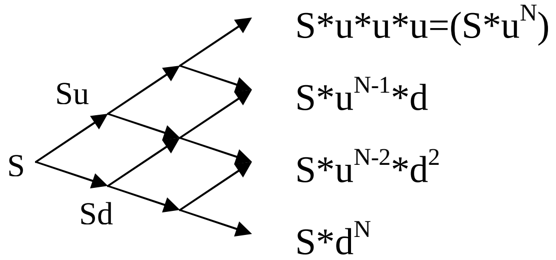
A kockázatsemleges értékelésből és Rubinsteinék által javasoltakból meghatározható a p, az u, a d paraméter.

$$u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$$

$$p = e^{r*dt}\text{-d/u-d}$$

Az S és az u és d paraméterek segítségével kiszámíthatjuk a fa végén lévő értékeket. Így N db elmozdulás esetén N+1 db érték lesz a fa végén.



4. ábra ''N" db elmozdulás esetén a részvénvfa

Az opció értékelésekor a fa végéből indulunk ki és visszafelé haladva kiszámítjuk az opció értékét. Az opció értékét egy „t" időpontban ismerjük, hiszen ebben a pontban az opció értéke egyenlő a kifizetés függvényével, ami call esetben max(S_t-K,0) put esetben max(K-St,0). A kockázat semleges világot feltételezve ezekben a pontokban a kifizetés függvények által kapott értékeket diszkontálnunk kell, a kockázatmentes kamatlábbal. Végül visszafelé haladva megkapjuk az opció értékét a 0. időpontban.

Ez az eljárás nagyszámú „dt" időintervallum esetén igen lassú lehet, nem is beszélve arról, hogy nagyszámú 20-30 alaptermék árazásakor körülményes és nehézkes. Ezért szokták ezt az opcióárazási módszert közelíteni Monte Carlo szimuláció segítségével.

A következőkben az R program segítségével beárazunk egy európai opciót a Cox-Ross-Rubinstein formulával. Ahhoz hogy ezt megtehessük, le kell töltenünk és fel kell telepítenünk az R program 'fOptions' csomagját. Erre még később is szükség lesz a Black-Scholes formulával történő árazáskor. Az R-ben utána be kell tölteni ezt a csomagot majd kiadni a CRRBinomialTreeOption(TypeFlag = ("ce", "pe", "ca", "pa"), S, X,Time, r, b, sigma, n, title = NULL, description = NULL) parancsot megfelelően felparaméterezve.

Nézzük meg egy konkrét példán keresztül, majd hasonlítjuk össze a Monte Carlo-val kapott árral:(a Cox-Ross-Rubinstein hármasra a CRR kifejezéssel utalok a továbbiakban)

A Portfolio.hu internetes portál és az általam számolt Mtelekom részvényeinek volatilitása 3hónap alatt (2010.jún. 10. és 2010 aug. 10. között vizsgálva) 23%. 2010. augusztus 11-én a Mtelekom részvényárfolyam nyitóára 661Ft volt.

Árazzunk be egy fél éves lejárati idejű európai eladási opciót, amelynek kötési árfolyama 700Ft, a piacon a kockázatmentes kamatláb 8%. (Naponta figyeljük a részvényárfolyam változást)

Kiadjuk a következő parancsot:

CRRBinomialTreeOption(TypeFlag= "pe",S=661,X=700,Time=0.5, r=0.08, b=0.08, sigma=volatilitas,n=180)@price

A binomiális modellel számolva az opció igazságos ára: [1] 49.27583

4.2.2 A szimuláció:

Nézzük meg Monte Carlo szimulációval:

>u=exp(volatilitas*sqrt(1/360))
> d=exp(-volatilitas*sqrt(1/360))
> p= (exp(kamatlab*(1/360))-d)/(u-d) ## ezek az árazási formulából megmaradnak

Az u és d paraméterek ugye megegyeznek a korábban bemutatott értékekkel, amelyek a Cox-Ross-Rubinstein által adott ajánlásokból következnek. Az exp() függvény az exponenciális függvény.

Maga a szimuláció egy függvénnyel van megvalósítva, amely paraméterként megkapja, hogy hányszor végezze el a szimuláció a benne lévő iterációt (ciklust).

A szimuláció során kihasználom az R egyik nagyon jó tulajdonságát, hogy képes vektorokat összeadni, kivonni és egyéb műveleteket végezni velük anélkül, hogy ciklussal bejárnánk őket, amelyet már a volatilitás számításnál is alkalmaztam. Ezt illetve a prod() függvény alkalmazásával a részvényárfolyam generálás elég egyszerű és gyors. A prod() függvény esetén a () között megadott objektum elemeinek a szorzatát adja vissza

A Monte Carlo szimuláció esetén a véletlen tag segítségével generáljuk le a részvényárfolyamokat, az árfolyam segítségével meghatározhatjuk a kifizetésfüggvények értékét, ezek az értékek fogják adni statisztikai szempontból a mintát. Mi ennek a mintának vagyunk kíváncsiak a várható értékére. Statisztikai szempontból egy minta várható értékének a becslésére tökéletes mutatószám a mintaátlag. A mi esetünkben a minta a kifizetésfüggvények, így ezeket a kifizetéseket átlagolnunk kell, majd ezt az átlagot diszkontálni. Ez a diszkontált átlag lesz az opció díjának becslése, amely a minta nagyságának növelésével egyre pontosabb. A diszkontálásra azért van szükség, mert az opciós díjat most kell kifizetnem, viszont én a jövőbeli részvényárfolyamból kaptam meg az értékét.

A részvényárfolyam generálásnak az alapja az, hogy a modellben szimuláljuk a részvényárfolyam felfelé illetve lefelé mozgásának a valószínűségét Bernoulli-eloszlással. Az u, d és p paraméterek a fenti képletből számolhatóak, így az i-ik részvényárfolyamot az $S_i=S_{i-1}$*(d+(u-d)*epszilon) képlet segítségével határozható meg, ahol az epszilon Bernoulli-eloszlású valószínűségi változó. Ebből látszik, hogy epszilon=1 esetén $S_i=S_{i-1}$*u, míg 0 esetén $S_i=S_{i-1}$*d. Ezután már csak a kifizetés függvény kiszámítása maradt a lejárati időpontban a szokásos módon, majd diszkontálni a kifizetést és megkapjuk az opció igazságos árát.

> MonteCarlo<-function(elemszam){ ## függvény deklarálás

+ f<-c() ## lista deklarálás, ez tárolja a kifizetéseket

t_t=0.5 ## a lejáratig hátralévő idő

+

+ for (i in 1:elemszam){

+ epszilon<- rbinom(180, 1, p) ## Bernoulli-eloszlás generálása binomiális-eloszlás segítségével (első paraméter hogy hány db ilyen eloszlású változót generáljon, a második paraméternek 1-nek kell lennie, hiszen az *X* valószínűségi változó *n* és *p* paraméterű binomiális eloszlást követ (jelölés: $X \sim B(n,p)$), akkor speciális n=1 esetben (jelölés: $X \sim B(1,p)$) X-et Bernoulli-eloszlásúnak nevezzük, a harmadik paraméter a valószínűség)

+ valtozo<-d+(u-d)*epszilon ## ez biztosítja a felfelé/lefelé mozdulást, látható amennyiben az epszilon értéke 1 akkor a valtozo értéke u lesz, tehát a részvényárfolyam felfelé mozdul el, ha 0 akkor a valtozo értéke d lesz, így lefelé mozdul el az árfolyam

+ f[i]=max(700-(661*(prod(valtozo))),0) #lejáratkori részvényárfolyam generálás,majd kiszámítjuk a kifizetést a szokásos max(K-St,0) alakú európai kifizetés függvénnyel.

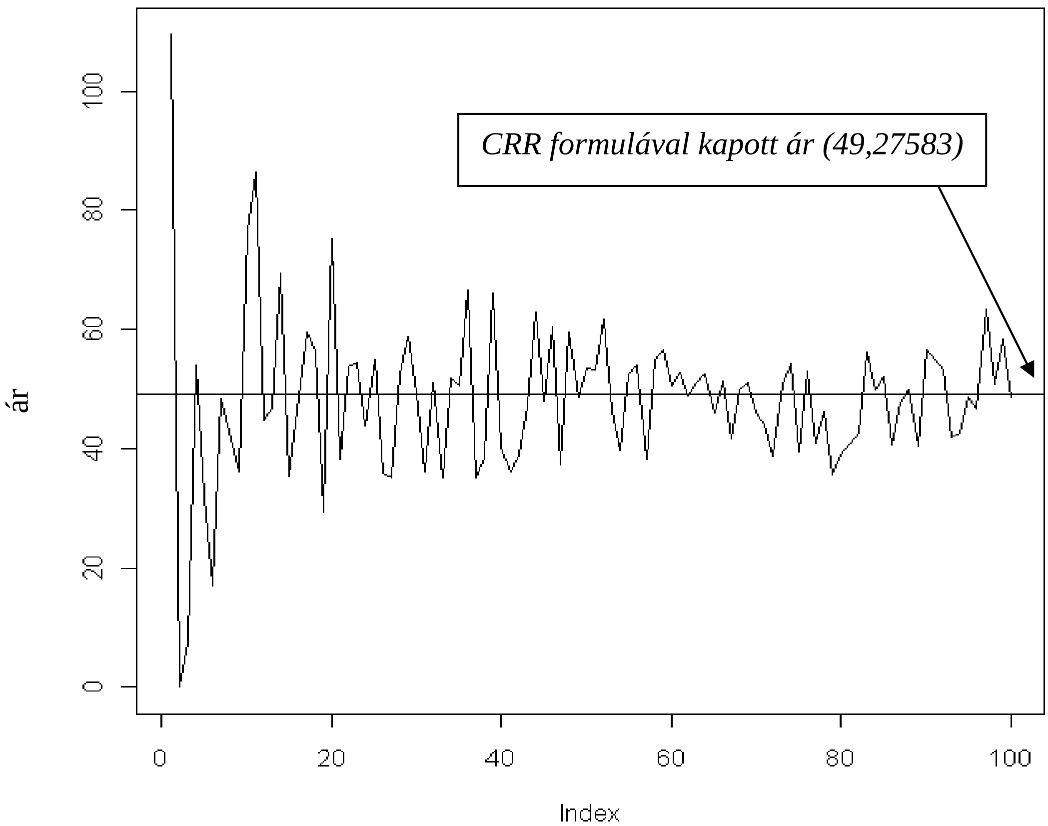
+ atlag<-mean(y) #átlagoljuk kifizetéseket
+ opciosdij=(exp((-kamatlab)*t_t)*atlag) #diszkontáljuk az előző átlagot
+ opciosdij}

A szimulációval kapott ár kis elemszám (1000) esetén:
> MonteCarlo(1000)
[1] 48.28576
5000-es minta esetén:
> MonteCarlo(5000)
[1] 49.09491
20000 és 40000-es mintaelemszám esetén:
> MonteCarlo(20000)
[1] 49.12511
> MonteCarlo(40000)
[1] 49.17352

A binomiális modellel számolva az opció igazságos ára: [1] 49.27583

A Monte-Carlo szimulációval kapott európai opció igazságos ár kis minta elemszám esetén meglehetősen nagy eltérést mutat a Cox-Ross-Rubinstein árazással kapott igazságos ártól, viszont a minta elemszám növekedésével jól konvergál ahhoz.

Az 5. ábrán látható, ami az előző példában is, hogy a lépésszám növelése esetén (amely most 1 és 100 között van) a Monte Carlo szimulációval kapott ár egyre inkább konvergál a Cox-Ross-Rubinstein formulával kapott árhoz.



5. ábra Az elemszám növelésével a Monte Carlo konvergenciája egyre jobb

4.3 A Black-Scholes formula és közelítése Monte Carlo szimulációval

A tőzsde napjaink nagy érdeklődőst kiváltó gazdaságelméleti területe. Az a felismerés, hogy a különböző értékpapírok árfolyamainak mozgása jól leírható sztochasztikus folyamattal, megnyitotta az utat a tőzsde, illetve a különböző értékpapírok és származékaik árfolyamainak matematikai modellezése irányába. Az 1970-es évek elején Fischer Black és Myron Scholes jelentős áttörést ért el olyan differenciálegyenlet levezetésével, amelyet ki kell elégíteni bármely, osztalékot nem fizető részvénytől függő származtatott termék árfolyamának, később 1997-ben Scholes és Merton Nobel-díjat is kapott.

4.3.1 A modell:

Az egyenletet részvényre szóló európai vételi és eladási opciók értékeléséhez használták leggyakrabban, de az alapképlet átalakításával lehet vele deviza-, index- és határidős opciókat is értékelni. Mertonék rájöttek arra, hogy az európai opciók igazságos árát, meghatározhatjuk a kifizetésfüggvény várható jelenértékével kockázatsemleges világban, ehhez mindössze öt paraméter értékét kell ismernünk, amelyek befolyásolják az alaptermékre vonatkozó európai típusú opció igazságos árát. Ez a jelenlegi részvényárfolyam, a kötési árfolyam, a kockázatmentes kamatláb, a lejáratig hátralévő idő és a volatilitás.

Ehhez annak kell teljesülni, hogy a részvény árfolyamnak geometriai Brown-mozgást kell követnie.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

ahol dz Wiener-folyamat és dz= $\varepsilon * \sqrt{dt}$

A Brown-mozgásból az Ito-lemma segítségével bizonyítható hogy a részvényárfolyam logaritmusa által követett folyamat normális eloszlást követ, illetve a normális eloszlás tulajdonságainak köszönhetően belátható, hogy a részvényárfolyam lognormális eloszlást követ. Egy opcióból és részvényből álló portfóliót alkotva, bizonyos átalakítások segítségével levezethető a Black-Scholes féle differenciálegyenlet.[7] Ezt az egyenletet megoldották és

[7] Bővebben ld.: HULL, J. C. : Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek, Panem. 1999

sikerült egy explicit formulát nyerniük az európai eladási- és vételi opció igazságos árának a meghatározására.

Az európai vételi opció árazási képlete:

$$c=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Az európai eladási opció árazási képlete:

$$p=Ke^{-r(T-t)}N(d_2)- SN(d_1) ,$$

ahol $$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2= d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

és az „N(x) a kumulatív valószínűségeloszlás függvénye egy olyan változónak, amely normális eloszlású nulla várható értékkel és 1 szórással.”(J. C. Hull [1999])

A Black-Scholes képlet egy explicit formula, az opció prémiumának a meghatározására, amely csak bizonyos feltételek mellett igaz. Ezen feltételezések a következőek:

- az alaptermék árfolyamváltozása normális eloszlást követ. Ezt a feltételezést használja ki a Monte Carlo szimuláció is
- kockázatmentes kamatláb állandó
- az alaptermék volatilitása állandó
- nincs tranzakciós költség illetve arbitrázs lehetőség
- az alaptermék kereskedése folyamatosan zajlik

Valós piaci körülmények között ezen feltételezések nem mindegyike tartható elfogadhatónak. Empirikus kutatások igazolják, hogy a normalitás feltétel sem tökéletes, hiszen az alaptermék árfolyamváltozásának eloszlása kicsit csúcsosabb mint a normális eloszlás, az állandóság feltételek hatása elhanyagolható, a kereskedést a piaci kereslet, kínálat határozza meg. Ezek a tényezők felelősek a Black-Scholes modell torzításáért, amelynek egyik megjelenési formája az implikált volatilitás esetében a volatilitás mosoly.

A fenti képletből látszik, hogy ezt papíron elég körülményes számolni, ezért itt is az R program ’fOption’ csomagját használom az opció árának meghatározására. Ehhez a csomag betöltése után kiadom a GBSOption(TypeFlag = "c", S , X , Time , r , b , sigma) parancsot megfelelően paraméterezve.

4.3.2 A görögök:

A görögöknek nevezik azokat az elemeket, amelyek az opció értékének és kockázatának meghatározó elemei, ezek közül az első paraméter a delta, amely azt mutatja meg, hogy mennyit változik a prémium az alaptermék árfolyam egy adott egységnyi változására. Tehát a delta megmutatja hány egységnyivel nő az opció értéke, ha egységnyivel nő a jelenlegi részvényárfolyam.

A .GBSDelta parancs kiszámolja az opció deltáját, amely az opció kifizetésfüggvényének a változását jelenti a részvényár függvényében. Kiadva a .GBSDelta("p",S,X,r,b,sigma,Time) parancsot megfelelően paraméterezve, akkor kiszámolja az opció deltáját.

A Monte Carlo szimulációt alkalmazhatjuk az opció deltájának a becslésére. Ennek a hátterében a következő dolog áll:
Ha f az opció kifizetésfüggvénye és S a részvényárfolyam akkor a delta=f’/S’
Az f függvény, x pontbeli deriváltja nem más mint:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

, ahol h a független változó növekménye

Gondoljuk azt, hogy az f(S) az opció árát megadó formula a részvényár függvényében, így a kifizetés S és S+q ár mellett, f(s), f(s+q), így a delta paraméter becsülhető az alábbi formula segítségével:

$$\hat{\Delta} = \frac{f(S+q) - f(S)}{q}$$

, ahol q elég kicsi és ez lesz a növekmény

4.3.3 A szimuláció:

Maga a szimuláció egy függvénnyel van megvalósítva, amely paraméterként megkapja, hogy hányszor végezze el a szimuláció a benne lévő iterációt (ciklust).

A szimuláció során kihasználom az R egyik nagyon jó tulajdonságát, hogy képes vektorokat összeadni, kivonni és egyéb műveleteket végezni velük anélkül, hogy ciklussal bejárnánk őket, amelyet már a volatilitás számításnál is alkalmaztam. Ezt illetve a prod() függvény alkalmazásával a részvényárfolyam generálás elég egyszerű. A prod() függvény esetén a () között megadott objektum elemeinek a szorzatát adja vissza.

A Monte Carlo szimuláció esetén a véletlen tag segítségével generáljuk le a részvényárfolyamokat, ezen árfolyam segítségével meghatározhatjuk a kifizetésfüggvények értékét, ezen értékek fogják adni statisztikai szempontból a mintát. Ennek a mintának vagyunk kíváncsiak a várható értékére, amelynek a becslése a mintaátlag segítségével történik, így ezeket a kifizetéseket átlagolnunk kell, majd ezt az átlagot diszkontálni. Ez a diszkontált átlag lesz az opció díjának becslése, amely a minta nagyságának növelésével egyre pontosabb. A becslés standard hibáját megkapjuk, ha a minta szórását elosztjuk a minta nagyságának a gyökével.

A binomiális modell esetén a részvényárfolyam felfelé illetve lefelé mozdulását szimuláltuk adott eloszlással. Ebben a modellben a részvényárfolyamra tettünk egy fontos megszorítást, mégpedig a normalitás feltételt, hogy a részvényárfolyam változás normális eloszlást követ, hiszen ez a folyamat egy Ito-folyamat (speciális Wiener-folyamat) $\frac{r - sigma^2}{2}$*dt várható értékkel és sigma*dt szórással. Ebből következik, hogy a hozam: $\frac{r - sigma^2}{2}$*dt+sigma*$\sqrt{dt}$*epszilon, ahol epszilon standard normális eloszlású valószínűségi változó.

Itt a hozamokat a kockázat semleges értékelés miatt nem elég megszorozni a részvényárfolyammal, hanem venni kell a hozamoknak az exponenciális függvénybe behelyettesített értékét és ezzel kell a részvényárfolyamot szorozni, majd a kifizetés függvény és a diszkontálás az már teljesen ugyanaz, mint a binomiális modell esetén.

kamatlab<<-0.08 # a kamatláb

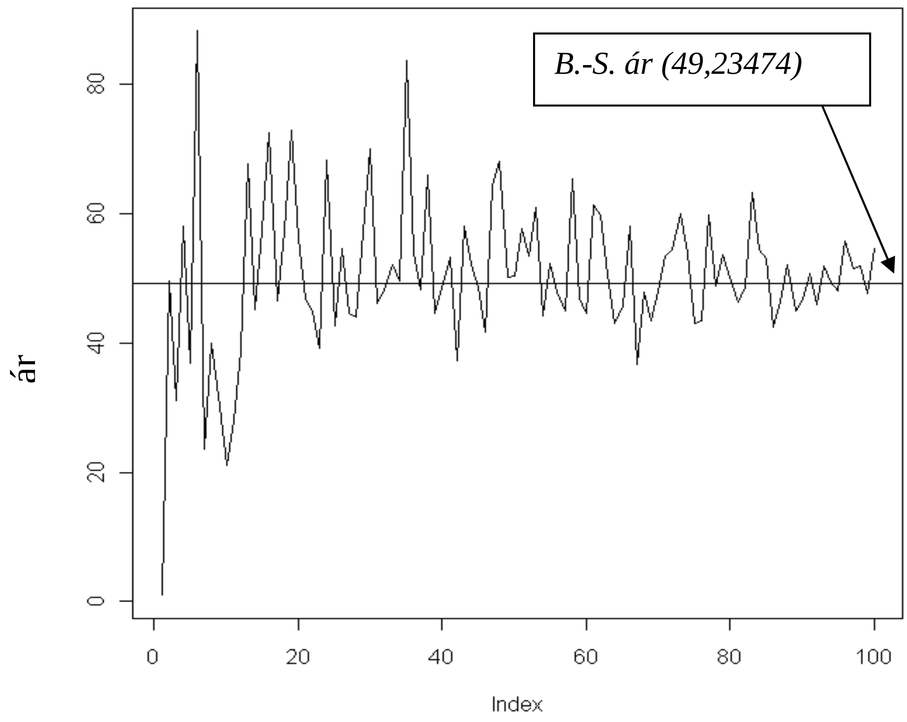
```
dt=1/360
t_t=0.5                  #lejáratig hátralévő idő
n=trunc(t_t/dt)          # a trunc() függvény a kerekítő függvény
x<-700         #kötési árfolyam
f<-c()
fq=c()
epszilon<-c()
MonteCarlo<-function(elemszam){
for (i in 1:elemszam){
epszilon<-rnorm(n,0,1)  # n elemű standard normális eloszlás generálás
s<-661  # a részvényárfolyam
q=s*0.001
sq=s+q                   # a módosított részényárfolyam, amely a delta becsléséhez szükséges
uj<-(kamatlab-0.5*volatilitas^2)*dt+volatilitas*sqrt(dt)*epszilon
#a hozam generálása
s<-s*prod(exp(uj))    # a részvényárfolyam generálása lejárati időben (emlékeztetőül: a
prod()fgv a paraméterként megadott objektum elemeinek a szorzatát adja vissza)
sq=sq*prod(exp(uj))          # módosított részvényárfolyam generálás lejáratkor

f[i]<-max(0,x-s)             # kiszámoljuk a kifizetéseket
fq[i]<-max(0,x-sq)           # kiszámoljuk a kifizetéseket
}
atlag<-mean(f)               # átlagoljuk a kapott mintát(ami itt a kifizetésfüggvény lesz)
qatlag=mean(fq)              # a kapott mintát(ami itt a kifizetésfüggvény lesz)

hiba<<-sd(f)* exp(-kamatlab*t_t)/sqrt(elemszam)         # a becslés standard hibája
opciosdij=(exp(-kamatlab*t_t)*atlag)              # diszkonttényező
qopciosdij=(exp(-kamatlab*t_t)*qatlag)            # diszkonttényező

delta<<-(qopciosdij-opciosdij)/q             # a delta parméter becslése
opciosdij}                   # a függvény visszaadja az opciós díjat
```

Nézzük meg egy konkrét példán keresztül, majd összehasonlítjuk a Monte Carlo-val kapott árral:

Az előző feladatban lévő Mtelekom részvényt árazzuk be a Black-Scholes formula segítségével egy európai eladási opciót, ahol a kockázatmentes kamatláb 8%, a volatilitás 23%, a lejáratig hátralévő idő fél év, a kezdeti részvényárfolyam 661Ft, kötési árfolyam 700Ft.

GBSOption(TypeFlag = "p", S = 661, X = 700, Time = 1/2, r = 0.08, b = 0.08, sigma = volatilitas) @price parancsot kiadva megkapjuk az opciós díjat, amely [1] 49.23474.

A következő részben bebizonyítom, hogy növelve az elemszámot a szimulációval kapott ár is egyre inkább közelíti a Black-Scholes féle árat.



6. ábraAz Elemszám növelésével a Monte Carlo konvergenciája egyre jobb

A 6. ábrán látható, hogy 1 és 100 elemszám esetén, növelve az elemszámot a szimulációval kapott ár egyre jobban közelíti a Black-Scholes formula árát.

A szimulációt végrehajtva 1000-es minta esetén:

> MonteCarlo(1000)

[1] 50.96495

> delta

[1] -0.5245775

5000-es elemszám esetén:

> MonteCarlo(5000)

[1] 49.01508

> delta

[1] -0.5047357

20000-es elemszám esetén:

> MonteCarlo(20000)

[1] 49.11401

> delta

[1] -0.5093644

A becslés standard hibája: [1] 0.4321952

100000-es elemszám esetén:

> MonteCarlo(100000)

[1] 49.30955

> delta

[1] -0.5065091

A tényleges ár [1] 49.23474, amely elég kis eltérést mutat a Monte Carlo szimulációval kapott ártól [1] 49.30955.

A Monte-Carlo szimulációval kapott európai opció igazságos ár kis minta elemszám esetén meglehetősen nagy eltérést mutat a Black-Scholes árazással kapott igazságos ártól, viszont a minta elemszám növekedésével jól konvergál ahhoz.

Kiadva a .**GBSDelta("p",S=661,X=700,r=0.08,b=0.08,sigma=0.23,Time=0.5)**
A tényleges delta: **[1] -0.5100599**

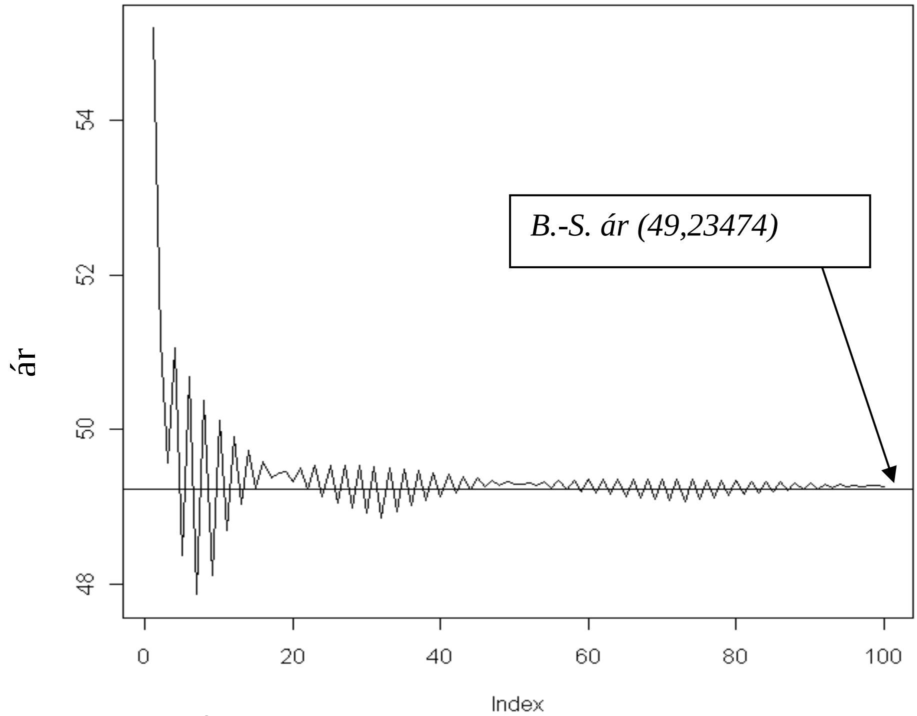
A Monte Carlo szimuláció segítségével közelíthető a delta paraméter értéke, amelyre szintén jellemző, hogy az elemszám növelésével egyre inkább közelít a becsült érték a tényleges értékhez, hiszen ennek is a részvényárfolyamhoz és a kifizetés függvényhez van köze. Így ezekre is jellemzőek a korábban említett tulajdonságok.

4.3.4 A CRR és Black-Scholes közötti kapcsolat:

A CRR függvénynek van még egy érdekes „tulajdonsága”, mégpedig az hogy növelve a lépésszámot a CRR formula segítségével kapott opciós árak konvergálnak a Black-Scholes féle igazságos árhoz.

> bc=c()
> for (k in 1:100){
+ bc[k]=CRRBinomialTreeOption(TypeFlag= "pe",S=661,X=700,Time=0.5, r=0.08, b=0.08, sigma=volatilitas,n=k)@price}
> plot(bc, type="l") # a plot(valt , type=”par”) parancs segítségével a valt nevű változóban tárolt értékeket rajzolja ki, a type=”par „ típusú grafikonon, ahol az "l" vonalgrafikon
> abline(h=GBSOption(TypeFlag = "p", S = 661, X = 700, Time = 1/2, r = 0.08, b = 0.08, sigma = volatilitas) @price)

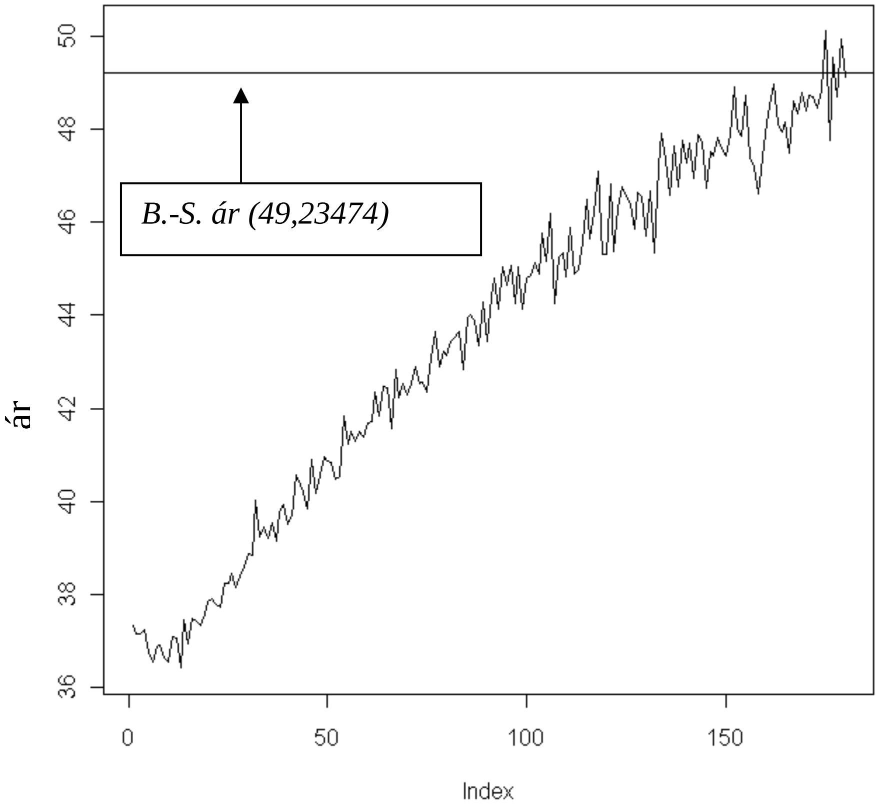
Látható a 7. ábrán, hogy a lépésszám növelésével a CRR függvénnyel kapott ár tényleg konvergál a Black-Scholes féle formulával kapott árhoz. A 8. ábra nem lesz túl látványos, csak azt szemléltetem, hogy az általam készített Monte Carlo szimuláció esetén is ez a jelenség tapasztalható.



7. ábra A CRR formula növekvő elemszám esetén konvergál a Bs árhoz

A kód ugyanaz, mint ami az első példánál volt, csak annyi a különbség, hogy az **epszilon<- rbinom(180, 1, p)** részt kell módosítani a következőképpen **epszilon<- rbinom(180, 1, p),** ahol a k helyén korábban 180 szerepelt. Majd kiadva a következő utasításokat:

kc=c() **# a** szimulációval kapott kifizetéseket tároló lista deklarálás
> **for (k in 1:180){**
+ **kc[k]=MonteCarlo(10000)** #feltöltés
+ **}**
> **plot(kc, type="l")** #grafikont készítő parancs, ahol a type=”l” jelzi hogy vonalgrafikont készít
> **abline(h=GBSOption(TypeFlag = "p", S = 661, X = 700, Time = 1/2, r = 0.08, b = 0.08, sigma = volatilitas) @price) #a** tényleges Bs árat rajzolja be egy vízszintes vonallal



8. ábra Konvergencia szimulációval

A 8. ábrán a Monte Carlo szimulációt 10000-es minta elemszám esetén 1 és 180 közötti lépésszám esetén látható, hogy ez is közelíti a Black-Scholes árat.

Az ábrán a konvergálás nem olyan mértékű, mint az előző esetben, ennek oka az elméleti háttér. A Monte Carlo szimuláció egy becslési eljárás, amelynek a statisztikai tulajdonságaiból következik, hogy a minta nagyságának a növelésével egyre pontosabb. Jelen esetben a minta elég kicsi volt.

4.4 Útvonalfüggő opciók árazása Monte Carlo szimulációval

Az egzotikus opciókat már korábban említettem, ezek alatt a korábban tárgyalt egyszerű hagyományos (Plain Vanilla) opcióknál bonyolultabb termékeket értünk, amelyeknek értéke általában több különböző feltételtől függ. Tehát ezek olyan termékek, ahol az opció lejáratkori kifizetése nem kötődik lineárisan a mögöttes eszközhöz. A nevüket onnan kapták, hogy ezek valamilyen szempontból eltérnek az elsődlegesen alkalmazott opciós típusoktól.

Az egzotikus opciók a modern monetáris politika egyik eszköze, hiszen piaci megjelenésük kifejezhet egyfajta piaci várakozást, másrészt viszont bonyolult spekulatív stratégiák is megvalósíthatóak a segítségükkel. Az egzotikus opciók révén a manapság használatos termékkínálatnak csak a fantázia szabhat határt, a volatilitástól az egyes alaptermékek árának egy bizonyos sávban maradásáig vagy egy adott árszint elérésig szinte bármire köthet fogadást az opció kiírója és vásárlója. Ezek az opciók nagyon érzékenyek az árfolyamváltozásra, mivel a kifizetésük nem csak a részvényárfolyamtól, hanem valamilyen más feltételtől is függ.

Az egzotikus opcióknak több típusa is létezik, ezek közül az útvonalfüggő opciókkal foglalkozom, ahol a kifizetés nem csak a lejáratkori árfolyamtól, hanem attól is függ milyen úton jutott el oda. Ennek a típusú opciónak is létezik számtalan variánsa, amelyek közül a barrier opciókkal és a lookback opciókkal foglalkozom bővebben. Az ilyen típusú opciók esetén csak a kifizetésfüggvény feltételeiben van különbség, erre később nézünk egy példát.

Az egzotikus opciók sokszínűsége miatt, az ilyen opciók új befektetési területet nyitottak a spekulánsok illetve a különböző piaci szereplők számára, természetesen ezzel párhuzamosan növekedett a kockázat és vele együtt a kockázatkezelés jelentősége is. Az egyes típusoknál különböző árazási képletek léteznek, előfordul olyan eset is, amikor nem létezik az opció árának meghatározásához explicit képlet, vagy ezekkel a képletekkel bonyolult számolni, ezért érdemes ilyen esetben alkalmazni a Monte Carlo szimulációt.

4.4.1 Barrier opciók

A barrier típusú opciók olyan egyszerű (plain vanilla) európai opciók, amelyek kiegészítésképpen egy vagy két korlátot tartalmaznak, amelyek megszűntetik (knock out) vagy aktiválják (knock in) az opciót (ezt „trigger level”-nek is szokták nevezni). A bináris opció abban különbözik a barrier opciótól, hogy amennyiben típustól függően eléri vagy éppen nem a korlátot, akkor fix kifizetést kap, különben elértéktelenedik az opció.

A barrier típusú opciók közül a knock out típusút árazom Monte Carlo szimulációval. Ez egy olyan barrier típusú opció, ami abban különbözik a vanilla típustól, hogy kiegészítésképpen egy korlátot is tartalmaz. Ha az alaptermék ára eléri a korlátot bármikor az opció futamideje alatt, akkor az opció elértéktelenedik. Amennyiben lejáratig nem éri el a korlátot, az opció ugyanakkora kifizetéssel jár, mint egy vanilla európai típusú opció. Vételi opció esetén a korlátnak spot érték alatt kell lennie (ez esetben down-and-out típusról beszélünk). Eladási opció esetén a korlátnak spot érték felett, kell lennie (ez esetben up-and-out típusról beszélünk).

A knock in típusú barrier opció is tartalmaz egy kiegészítő korlátot, azonban ilyenkor az opció egészen addig értéktelen (OTM), amíg el nem éri az adott korlátot. Amint meghaladja a korlátot az opció ugyanolyan kifizetéssel jár mint egy hagyományos plain vanilla opció. Vételi opció esetén a korlátnak spot érték alatt kell lennie (ez esetben down-and-in típusról beszélünk). Eladási opció esetén a korlátnak spot érték felett kell lennie (ez esetben up-and-in típusról beszélünk).

Az előző fejezetekben alkalmazott Mtelekom részvényt árazzuk be Monte Carlo szimulációval, ahol az opció knock out típusú barrier eladási opció (up-and-out) , ahol a kockázatmentes kamatláb 8%, a volatilitás 23%, a lejáratig hátralévő idő negyed év, a kezdeti részvényárfolyam 661Ft, kötési árfolyam 680Ft (a korábbi példában 700Ft volt a kötési ár, ez most a spot lesz), a korlát 700Ft, amennyiben ezt eléri az opció elértéktelenedik.

A példa megoldásához, a korábban használt Monte Carlo szimulációt végző kód kifizetési függvényében van szükség módosításra. Korábban az európai opció kifizetésfüggvényét használtuk a max (St-K ; 0) illetve a max (K-St ; 0) , attól függően, hogy vételi vagy eladási opcióról volt szó. Most a kifizetésfüggvényünk úgy néz ki, hogy ha részvényár maximuma elér egy B küszöbérték, akkor az opció elértéktelenedik, így a kifizetésfüggvénye 0, ellenkező esetben pedig marad a hagyományos kifizetésfüggvény.

Ez kód szinten a következőképpen néz ki:

```
if (max(s[j])<B)
f[i]<-max(0,x-s[n]) else
f[i]=0
```

A teljes kód:

```
kamatlab<<-0.08
volatilitas=0.23
dt=1/360
t_t=0.25
n=trunc(t_t/dt)
s<-c()
x<-680    ## A kötési ár
B=700    ## a küszöbérték, amennyiben ezt az értéket eléri a részvényárfolyam akkor az
            opció elértéktelenedik (knock out esetben)
f<-c()    ## a kifizetésfüggvényt tároló lista deklaráció
epszilon<-c()   # a normális eloszlást tároló lista deklaráció
MonteCarlo<-function(elemszam){
for (i in 1:elemszam){
epszilon<-rnorm(n,0,1)       # normális eloszlás generálása

s[1]<-661       # a kezdeti részvényárfolyam
for (j in 1:(n-1)){
uj<<-(kamatlab-0.5*volatilitas^2)*dt+volatilitas*sqrt(dt)*epszilon[j]
s[j+1]<-s[j]*exp(uj)  ## itt a részvényár generálást ciklussal valósítható meg, hiszen itt nem
elég lejáratkor ismernünk a részvényárat, ahhoz hogy a kifizetésfüggvényt meghatározzuk
}
if (max(s)<B)            #ha bármikor az opció futamideje alatt eléri az árfolyam a küszöbárat
akkor a kifizetés függvénye a szokásos európai put kifizetésfüggvénnyel egyezik meg,
```

különben elértéktelenedik az opció.

f[i]<-max(0,x-s[n]) else #szokásos európai kifizetésfüggvény

f[i]=0 # elértéktelenedik az opció

}

atlag<-mean(f) #átlagoljuk a kifizetésfüggvényeket

opciosdij=(exp(-kamatlab*t_t)*atlag) #kifizetésfüggvény diszkontálása

opciosdij} #kiírjuk az opció díját

A szimuláció eredménye:

```
> MonteCarlo(1000)
[1] 25.74639
> MonteCarlo(5000)
[1] 26.98376
> MonteCarlo(10000)
[1] 25.95118
> MonteCarlo(30000)
[1] 25.88121
>
```

A hasonló típusú európai put opció díja:

GBSOption(TypeFlag = "p", S = 661, X = 680, Time = 1/4, r = 0.08, b = 0.08, sigma = volatilitas) @price

[1] 48.20279

Az európai opció díja magasabb, mint a hasonló típusú barrier opció, ez azért lehetséges, mert az opció a küszöbértéket elérve rendszerint elértéktelenedett.

4.4.2 Lookback opciók

Az útvonalfüggő opciók egyik altípusa a visszatekintő (Lookback) opció, ahol a kifizetés a lejárati időpont előtt, az árfolyam által realizált maximum és minimum értéktől függ. Sok altípusa felépíthető attól függően, hogy mit szeretnénk elérni az opcióval. Például az opció kifizetése lehet a realizált maximum és a lejáratkori részvényár különbözete (lebegő), esetleg a maximum és a minimum érték különbözete, ilyen és ehhez hasonló esetben nincs szükség kötési árra, de elképzelhető olyan szisztéma is, amikor a fix kötési árhoz viszonyítjuk a maximum/minimum értéket (fix). Ez az opció a futamidő alatt a legkedvezőbb árszinten ad lehetőséget az opció lehívására.

A Monte Carlo szimuláció segítségével azt az esetet fogom vizsgálni, amikor a maximum vagy minimum árat az opció típusától függően, viszonyítom egy fix kötési árhoz, és így kapom meg az opciós díjat. Ezt megtehetem call és put opció esetén is, így ezek alapján négy fajta kifizetés függvény létezik, ezek között lényeges különbség nincs, az európai opció kifizetésfüggvényének mintájára minimális változtatás mellett egyik típusból a másikba juthatunk.

Nézzük meg azt a lehetőséget, amikor call opció esetén a maximum árat viszonyítom a kötési árhoz (call on the maximum):

$$\mathrm{LOOKBACK}_{call,max}\text{: } \max(\max(St)-K\ ;\ 0)$$

Put opció esetén, amikor a minimum árat viszonyítom a fix kötési árhoz(put ont he minimum):

$$\mathrm{LOOKBACK}_{put,min}\text{: } \max(K-\min(St)\ ;\ 0)$$

ahol a részvényárfolyam által elért maximum max(St), a kötési ár K.

Ugyanez lebegő esetben:

Nézzük meg azt a lehetőséget, amikor call opció esetén a maximum árat viszonyítom a lejáratkori részvényárhoz:

$$\mathrm{LOOKBACK}_{call,max}\text{: } \max(\max(St)-ST\ ;\ 0)$$

Put opció esetén, amikor a minimum árat viszonyítom a lejáratkori részvényárhoz:

$$\text{LOOKBACK}_{put,min}: \max(ST-\min(St) ; 0) \ ,$$

ahol a részvényárfolyam által elért maximum max(St), a részvény lejáratkori ára ST.

Az előző fejezetekben alkalmazott Mtelekom részvényt árazzuk be Monte Carlo szimulációval, ahol az opció útvonalfüggő eladási opció és a részvényár minimumát viszonyítom a fix kötési árhoz, a kockázatmentes kamatláb 8%, a volatilitás 23%, a lejáratig hátralévő idő negyed év, a kezdeti részvényárfolyam 661Ft, kötési árfolyam 680Ft.

Az előző fejezetben használt kódban a kifizetésfüggvényünk úgy néz ki, hogy ha részvényár elér egy B küszöbértéket, akkor az opció elértéktelenedik, így a kifizetésfüggvénye 0, ellenkező esetben pedig marad a rendes kifizetésfüggvény.

Ez kód szinten a következőképpen néz ki:

```
if (max(s)<B)
f[i]<-max(0,x-s[n]) else
f[i]=0
```

A mostani kifizetésfüggvényünk alakja a következő $\text{LOOKBACK}_{put,min}: \max(K-\min(St) ; 0)$ amely kód szinten így írható fel: **f[i]<-max(0,x-min(s))**

A teljes kód:

```
kamatlab<<-0.08
volatilitas=0.23
dt=1/360
t_t=0.25
n=trunc(t_t/dt)
s<-c()
x<-680
f<-c()
uj=c()
epszilon<-c()
MonteCarlo<-function(elemszam){
for (i in 1:elemszam){
```

```
epszilon<-rnorm(n,0,1)

s[1]<-661
for (j in 1:(n-1)){
uj<<-(kamatlab-0.5*volatilitas^2)*dt+volatilitas*sqrt(dt)*epszilon[j]
s[j+1]<-s[j]*exp(uj)
}
f[i]<-max(0,x-min(s))

 }
atlag<-mean(f)

opciosdij=(exp(-kamatlab*t_t)*atlag)
opciosdij}
```

```
> MonteCarlo(1000)
[1] 66.80998
> MonteCarlo(5000)
[1] 67.68498
> MonteCarlo(20000)
> 66.26012
 > MonteCarlo(30000)
[1] 66.09388
```

Az előző példában 30000-es elemszám mellett a díj 25.88121 Ft volt, amely most ugyanilyen elemszám mellett 66.09388 Ft, ebből leszűrhetjük azt a konzekvenciát, hogy ez a fajta opció tényleg a legkedvezőbb árfolyamon ad lehetőséget lehívni az opciót, természetesen magasabb díjért.

Az egzotikus opciók esetén már érdekes lehet - az úgynevezett szóráscsökkentő eljárások alkalmazása, mint - a korábban említett antitetikus változós technika, mivel az ilyen opciók esetén nincs minden esetben lehetőség az explicit képlettel történő összehasonlításra.

A antitetikus változós technika mellett egy másik lehetséges módszer a szórás csökkentésére a kvázi-véletlen sorozatok alkalmazása, amelyet a „Kvázi Monte Carlo” szimulációnak nevezett módszer használja. Ennek a fajta Monte Carlo szimulációnak a konvergenciája jobb, mint „hagyományos” Monte Carlo szimulációnak.

5. Összefoglalás

Dolgozatomban a 70-es évektől kezdve rohamosan fejlődő opciós ügyleteket vizsgálom és árazom. Az ügyletek fejlődésével párhuzamosan különféle árazási modellek jelentek meg a pénzügyi szakirodalomban. A teljesség igénye nélkül ezek közül kettőt vizsgáltam egy konkrét példán keresztül. Zárt, analitikus képlettel meghatároztam az opció díját, illetve szimulációs eljárás segítségével „becsültem”, és az így kapott értékeket összevetettem. Ez a két árazási mód a Binomiális modell és a Black-Scholes formula.

Az opció egy Magyar Telekom részvényre szólt, 661Ft-os nyitóárral, 700Ft-os kötési ár, 23% volatilitás, 8%-os kamatláb, lejáratig hátralévő idő fél év. Az opció árára a modellek a következő eredményeket adták:

Modell:	Explicit képlet szerinti ár	MC szimulációval kapott ár	Minta-nagyság
Binomiális 180elmozdulás	49.27583	48.28576	kis minta
		49.17352	nagy minta
Black-Scholes	49.23474	50.96495	kis minta
		49.30955	nagy minta

1. táblázat CRR, Black-Scholes., M.C.-val kapott opcióár

A korábban levont konzekvenciák a táblázaton kirajzolódnak, miszerint a Binomiális modell nagy darabszámú elmozdulás (például 180) esetén közelíti a Black-Scholes árat, illetve a Monte Carlo szimuláció esetén a minta nagyságának növelésével a „becslés” egyre pontosabb.

Ezen kívül a két fentiekhez hasonló zárt, analitikus árazási képlettel nem rendelkező két egzotikus opciót, egy barrier és egy lookback opciót áraztam be Monte Carlo szimuláció segítségével.

Az opció egy Magyar Telekom részvényre szólt, 661Ft-os nyitóárral, 680Ft-os kötési ár, a küszöbérték 700Ft, 23% volatilitás, 8%-os kamatláb, lejáratig hátralévő idő negyed év. Az opció árára a modellek a következő eredményeket adták:

<table>
<tr><th>Opció</th><th>MC -val kapott ár</th><th>Minta-nagyság</th><th>Európai put opció</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Barrier</td><td>26.98376</td><td>kis minta</td><td rowspan="4">48.20279</td></tr>
<tr><td>25.88121</td><td>nagy minta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Lookback</td><td>66.80998</td><td>kis minta</td></tr>
<tr><td>66.09388</td><td>nagy minta</td></tr>
</table>

2. táblázat Barrier, lookback opcióár

A 2. táblázaton látható, hogy a barrier és a lookback opció nagy és kis minta esetén is igen nagy eltérést mutatott egymáshoz és a hasonló típusú európai opcióhoz képest. Ez azzal magyarázható, hogy a kifizetésfüggvényükben van bizonyos eltérés, így amennyiben a barrier opció esetén a küszöbérték elég kicsi, a részvényárfolyam gyakran haladja meg ezt az értéket, így az opció rendszerint elértéktelenedik, és alacsonyabb lesz a díja. Ezzel szemben a Put on the minimum lookback opció esetén amennyiben a részvényár minimuma egyre alacsonyabb, az opció díja egyre magasabb lesz, mint az európai opcióé.

A barrier opció díja antitetikus változó alkalnazásával 25,84 Ft körüli, amíg a lookback opcióé esetén 66,18 Ft körüli eredményt kaptam.

Az első táblázatból látszik, hogy amennyiben létezik explicit formula, és a pontosság megkívánja, akkor érdemes az analitikus képletet alkalmazni. Amikor nem létezik explicit formula, akkor pedig marad a szimuláció, bár igaz léteznek más módszerek is ilyen esetben a díj meghatározására, de ez a „legkényelmesebb” módszer.

Az árazási modellek használatához szükségem volt a volatilitás meghatározására, amely során konstans historikus volatilitást feltételeztem.

Irodalomjegyzék

HULL, J. C. [1999]: Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek, Panem.

HULL, J. C. [2006] : Options, futures and other derivatives (6th edition), Pearson/Prentice Hall

P. G. ZHANG [1996]: Exotic Options: A Guide to Second Generation Options, World Scientific Pub Co Inc

SOLYMOSI N. [2005]: <- ...erre, erre...! Bevezetés az R nyelv és környezet használatába
Elérhető az interneten: http://cran.r-project.org/doc/contrib/Solymosi-Rjegyzet.pdf

BALOGH A. [2005]: Pénzügyi területeken alkalmazott Monte Carlo szimuláció párhuzamosítása JGrid rendszeren, (TDK dolgozat)

SZÁZ J.[1999] : Tőzsdei Opciók vételre és eladásra, Tanszék Kft.

BENEDEK G. [1999]: Opcióárazás numerikus módszerekkel, Közgazdasági Szemle, XLVI. évf., 905–929. o.

ASWATH D. [2006]: A Befektetések Értékelése, Panem

S. KAPLAN [2008] : Monte Carlo Methods For Option Pricing, Institute of Applied Mathematics (IAM), METU Term Project, Advisor: Coşkun Küçüközmen
Elérhető az interneten: http://www3.iam.metu.edu.tr/iam/images/d/d6/Sibelkaplanterm.pdf

D. NAWROCKI [2001] (Ph.D).: "The Problems with Monte Carlo Simulation." Journal of Financial Planning, 2001 November 01., p. 106-119.

RÓZSA A. [2007]: A reálopciók lehetőségei és korlátai a stratégiai beruházások értékelésében. Szakmai Füzetek (Budapesti Gazdasági Főiskola Külkereskedelmi Főiskolai Kar), XIX. szám

K. S. MOON. [2008]: Efficient Monte Carlo algorithm for pricing barrier options. Commun.Korean Mat.Soc, p. 285-294

J. M. JABBOUR, YI-KANG L. [2005]: Option Pricing and Monte Carlo Simulations, Journal Of Business & Economics Research, Vol.3, Num. 9,

Internet:

Az R program ’Foptions’ csomag leírás:
http://cran.r-project.org/web/packages/fOptions/fOptions.pdf

Az R program letölthető az összes dokumentációjával:
http://www.r-project.org/

Jeszenszky Péter: Az R használata c. diasorozata:
http://www.inf.unideb.hu/~jeszy/download/R/R-usage-2x2.pdf 2010. szeptember 11.

A Magyartelekom részvényárfolyam adatait a portfolió.hu internetes portálon elérhetőek:
http://www.portfolio.hu 2010. szeptember 11.