

Debreceni Egyetem  
Informatika Kar

## **Call Centerek matematikai modellezése**

Diplomamunka

*Témavezető:*

Prof. Dr. Sztrik János

Egyetemi tanár, az MTA doktora

*Készítette:*

Balla Anett

Programtervező matematikus

Debrecen

2009.

*Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Prof. Dr. Sztrik Jánosnak a  
dolgozatom elkészítéséhez nyújtott segítségét!*

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>2. Az Erlang C és Erlang A modellek</b>	<b>7</b>
2.1. Erlang-C modell (M/M/N) . . . . .	8
2.2. Erlang-A modell (A-abandonment, M/M/N+M) . . . . .	9
<b>3. M/M/n+G sorbanállási rendszer</b>	<b>16</b>
3.1. Baccelli és Herbuterne eredményi . . . . .	16
3.2. Brandt és Brandt eredményi . . . . .	19
3.3. Az M/M/n+G rendszer jellemzőinek rövid áttekintése . . . . .	27
3.4. Milyen kapcsolatban áll az Erlang C és az Erlang B modellekkel . . . . .	30
3.5. Kapcsolat az Erlang-A rendszerrel . . . . .	31
3.6. Kapcsolat az M/M/n+D modellel . . . . .	32
<b>4. Approximációs megoldások</b>	<b>34</b>
4.1. A klasszikus approximáció figyelmen kívül hagyva az elhagyást . . . . .	34
4.2. QED közelítés figyelmen kívül hagyva az elhagyást . . . . .	35
4.3. Közelítések Erlang-A modell esetén . . . . .	36
<b>5. M/M/n+G modell statisztikai háttere</b>	<b>38</b>
5.1. Az érkezési intenzitás becslése . . . . .	38
5.2. Az átlagos kiszolgálási idő becslése . . . . .	38
5.3. Az ügyintézők számának becslése . . . . .	39
5.4. A türelmi idő eloszlásának becslése . . . . .	39
5.5. Az integrálok aszimptotikája . . . . .	41

<b>6. Újabb gyakorlati eredmények</b>	<b>44</b>
6.1. QED rendszer $M/M/n+G$ modell esetén . . . . .	46
6.2. Minőség vezérelt működési elv . . . . .	62
6.3. A teljesítmény vezérelt működési elv . . . . .	64
<b>7. <math>M/M/C+M</math> modell elhagyás és újrapróbálkozás figyelembe vételével</b>	<b>68</b>
7.1. Stacionárius analízis . . . . .	70
7.2. Fluid approximáció . . . . .	71
7.3. A nem állandósult rendszer vizsgálata . . . . .	73
<b>8. Az <math>M/M/C/K+M</math> modell</b>	<b>75</b>
<b>9. QBD közelítések általános türelmi eloszlással</b>	<b>80</b>
9.1. QBD approximáció . . . . .	84
<b>10. Erlang kalkulátorok</b>	<b>87</b>
<b>11. Összefoglalás</b>	<b>90</b>
<b>12. Irodalomjegyzék</b>	<b>92</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

Az 1960-as években felmerült a kérdés, hogy milyen módon lehet kezelni azt az esetet, amikor ugyanazt a telefonos ügyintézőt rövid időn belül többen is el szeretnék érni telefonon. Ez időtáiban ezt úgy valósították meg, hogy az első hívást az alközpont kezelője a szabad mellékre kapcsolta, a másodikat is megpróbálta ugyanabban a szobában lévő számra irányítani, de ha érkezett egy újabb telefonáló, akkor őt meg kellett kérni, hogy próbálkozzon később, vagy esetleg eltehetette a hívást várakozó helyzetbe, és egy-két perc múlva megpróbálta újracsatlakoztatni a kívánt mellékhez. Sajnos erre az sem nyújtott volna megoldást, ha még több ügyintéző várja a hívásainkat, mert ha mindannyiuknak más telefonszáma van, akkor az alközpont kezelője nem biztos, hogy megfelelően tudja elosztani a hívásokat a mellékek között.

Kezdetben erre a célra létrehoztak egy Private Automatic Branch Exchanges, vagy röviden PBX szolgáltatást, ami biztosította, hogy ugyanazt a számot hívva, az alközpont automatikusan más és más mellékállomást kapcsoljon egy adott csoportból. Tekintsük azt a példát, amikor van három ügyintéző, akik egyaránt azzal foglalkoznak, hogy rögzítsék a gázóraállást. Így ők hárman egy PBX csoportot alkotnak, és egy közös telefonszámon lehet őket hívni. Ettől még persze saját különálló számmal rendelkeznek az egyes mellékállomások. A hívások elosztására különböző algoritmusok születtek. Volt olyan például, amelyik a beérkező hívást ahhoz az ügyintézőhöz irányította, amelyik a legrégebben kapott hívást.

Később megjelentek az Automatic Call Distributor rendszerek, amit a szakzsargon hívássorolónak is nevez. Az ACD rendszerek egy előre meghatározott algoritmus alapján végzik a hívások fogadását, az automatikus szövegek bejátszását, a megfelelő operátorhoz történő kapcsolást, valamint a különböző statisztikai adatok előállítását. A hívásokat

törekednek egyenletesen elosztani az ügyintézők között, teljes foglaltság esetén sorba állítja azokat, majd a sort kezeli. Az alközpontokba beépített ACD rendszerek megjelenése vezetett a Call Centerek létrejöttéhez.

Manapság még azt vehetjük észre, hogy az emberek jó része nem igazán van tisztában azzal, hogy mi is az a call center, pedig nap mint nap találkozunk vele. Egy call centert úgy képzelhetünk el, mint egy véget nem érő szobát, tele kis kabinokkal, ahol az operátorok telefonos fülhallgatóval a fejükön ülnek egy számítógép előtt, és a hozzájuk érkező hívásokat fogadják, egyfajta szolgáltatást nyújtva a láthatatlan ügyfelek számára.

Egy call center fizikai felépítésének része egy ACD-vel ellátott alközpont, továbbá olyan komplex interaktív munkaállomás, ahol a call centeres operátorok végzik a munkájukat. Része egy Interactive Voice Response (Interaktív Hangválasz) rendszer, ami egy, a telefonkészülék nyomógombjaival vezérelhető menürendszer, mely nem csak menüválasztásra alkalmas, hanem adatbázissal való kapcsolat esetén információk nyújtására is (számlainformációk, egyenlegek, átutalások stb). Valamint egy Computer Telephony Integration szerver, ami a call center kapcsolóközpontja és a számítógéphálózat között létesít kapcsolatot különböző programok alkalmazásával. Végül pedig egy olyan egység, ami a call center teljes forgalmát, adminisztrációját kezeli.

Az idők során különböző feladatokat ellátó call centerek jöttek létre. Call centerekkel rendelkeznek a közműszolgáltatók, a távközlési cégek, jelen van a marketing területén is, de vannak olyan különleges alkalmazások, mint például a távzavazás, vagy a T-Com által a siketnémák számára indított tolmácsszolgálat. A siketnéma ügyfél egy billentyűzettel rendelkező készüléket kap, ami a call centerrel lesz kapcsolatban. Az ügynök látja a begépelte szöveget, azt bemondja a hívott félnek, és a kapott választ begépelem a gépbe, amit a siketnéma már el tud olvasni.

Napjainkban problémáinkat már nem csak telefonon tudjuk elintézni, hanem faxon, SMS-en, emailen esetleg chaten keresztül is. Ennek előnye egyrészt az, hogy az azonos típusú problémákat egy helyen tudják kezelni, másrészt ez egyfajta lehetőséget biztosít a call centeres munkatársak leterheltségének elosztására. Ugyanis ha csúcsidő van, akkor a legtöbb munkatárs a telefonos kéréseket szolgálja ki, a munkaidő többi részén pedig tudnak az egyéb csatornán érkező igényekkel foglalkozni. Ezen multimédiás technikák megjelenésével, már nem is call, hanem contact centerekről beszélünk.

A call centerek fő feladata a nagyforgalmú ügyfélszolgálati tevékenység lebonyolítása. Céljuk, hogy a lehető legjobb minőségű szolgáltatás nyújtsák a legkisebb költségkeret mellett. A szolgáltatás minőségét kvalitatív és kvantitatív szempontból vizsgálják. A kvali-

tatív oldalt leíró modellek a tapasztalaton alapulnak, és elsősorban a szociális tudományok illetve a marketing területéről származnak. A kvantitatív oldalú modellek tipikusan analitikus eszközöket használnak, ezért ezek a modellek többnyire az operációkutatás, azon belül a sorbanállás elmélet eredményein alapulnak.

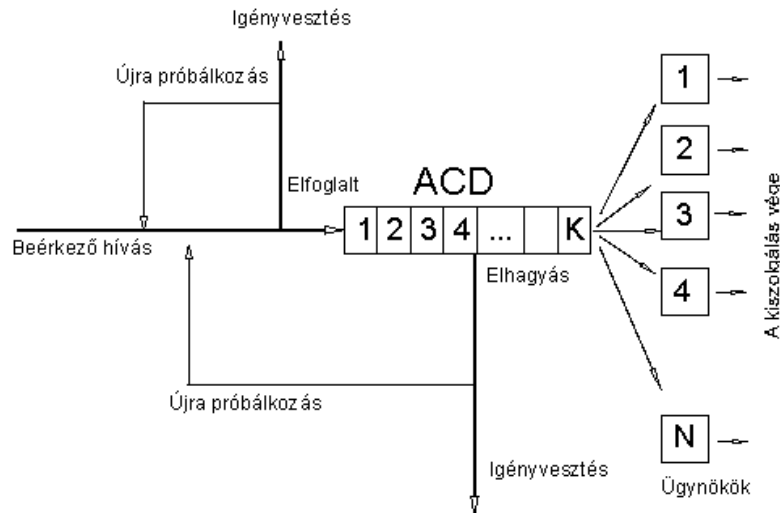
Dolgozatom témája a call centerek néhány sorbanállás elméleti modelljének bemutatása. Mint például az Erlang-C modell, amit a "tegnap" modelljeként is emlegetnek, az Erlang-A ami a "ma" (a legtöbb jól működő call center használja ezt a modellt, vagy az Erlang C modellnek egy olyan változatát, amelyik számításba veszi az "elhagyás"-t), és az M/M/n+G modell, ami remélhetőleg a "holnap" modellje. Összegyűjtöm a modellek legfontosabb rendszer jellemzőit, előnyeit, hátrányait és megpróbálom a közöttük lévő kapcsolatot is bemutatni. Mindezekhez nagy segítséget nyújtanak

- Garnett O., Mandelbaum A., Reiman M. [14],
- Sergey Zeltyn [15],
- M. Salah Aguir, Fikri Karaesmeny, O. Zeynep Aksin és Fabrice Chauvet [16],
- M. Salah Aguir, O. Zeynep Aksin, Fikri Karaesmen, Yves Dallery [17],
- Sergey Zeltyn, Avishai Mandelbaum [18], Ken'ichi Kawanishi [19]

munkái.

## 2. fejezet

# Az Erlang C és Erlang A modellek



Az ábra egy működését tekintve leegyszerűsített call centert ábrázol. Láthatjuk, hogy a beérkező hívások egy várakozási sort alkotnak, ahol az ügyfelek arra várnak, hogy kiszolgálják őket. Ezt a sort az ACD rendszer kezeli, amihez  $K+N$  darab közvetlen vonal csatlakozik. Fő feladata, hogy az ügyfeleket elérhető munkatársakhoz kapcsolja és a működési adatokat archíválja. Fontos, hogy ha akkor érkezik egy hívás, amikor minden vonal foglalt és a sor megtelt (azaz pontosan  $K+N$  igény van a rendszerben), akkor a hívó foglalt jelzést kap. Közöttük lesznek, akik később újrapróbálkoznak ("visszahív"), és lesznek akik végleg feladják("igény vesztés"). Ha a hívó érkezésekor minden kiszolgáló foglalt, de van szabad hely a sorban, akkor ő is bekerül a sorba. Sajnos a várakozók között lesznek akik türelmetlenek, és nem várják meg, hogy valamelyik munkatárs szabaddá váljon, ezért idő előtt leteszik a kagylót ("elhagyás, távozás"), de közöttük is lesz, aki később újra

telefonál. Mivel a közvetlen vonalak költsége elhanyagolható a személyi jellegű ráfordításokhoz képest, ezért a modellezés során végtelen hosszúságú várakozási sorokkal ( $K = \infty$ ) fogunk dolgozni és az  $N$ -re (kiszolgálók számára) koncentrálunk.

## 2.1. Erlang-C modell (M/M/N)

A klasszikus M/M/N, vagy másnéven Erlang C modell egy olyan rendszert vizsgál, ahol a hívások érkezése Poisson folyamat szerint történik, kiszolgálási idejük pedig exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Továbbá feltételezi, hogy nincs olyan ügyfél, aki kiszolgálás nélkül távozik a várakozási sorból, azaz nincs elhagyás. Sajnos a call center működésében ezek a hívások nem elhanyagolhatóak, éppen ezért elég nagy hibának számít, ha nem vesszük számításba ezeket.

A modellel kapcsolatban fontos megemlíteni a négyzetgyök szabályt, ami segít meghatározni egy megfelelő alkalmazotti szintet azaz, hogy hány darab call centeres ügyintézőre van szükségünk, ha az elhagyást figyelmen kívül hagyjuk. Ez egy fontos összefüggés a rendszer ideális kapacitásának meghatározására. Legyen  $R = \lambda/\mu$  a rendszer kihasználtsági tényezője, ahol  $\lambda$  az átlagos hívás érkezési intenzitás,  $1/\mu$  pedig az átlagos kiszolgálási idő, vagyis a hívás időtartama. Ekkor közepes és nagy  $R$  értékek esetén az alkalmazotti szintet az

$$N = R + \beta\sqrt{R} \quad (1)$$

képlet alapján határozhatjuk meg, ahol  $\beta$  egy pozitív konstans és értéke függ a kiszolgálás kívánt szintjétől. (Nyilván, ha az eredményül kapott  $N$  értéke nem egész szám, akkor egész számra kell kerekíteni.) A képlet levezetése és tárgyalása Ward Whitt[1] nevéhez kötődik, habár az 1970-es és 1980-as években többen is akadtak, akik hasonló szabályokkal rukkoltak elő. Azonban Whitt eredményének lényege az, hogy ha olyan rendszereket te-kintünk, amelyek közepes és nagy  $R$  értékekkel rendelkeznek, valamint ha az ügyintézők számát,  $N$ -et minden esetben a fenti formula alapján számoljuk ki, akkor mindegyik rendszer esetén a szolgáltatás minősége közelítően megegyezik. Vagyis a hívónak várakoznia kell a sorban mielőtt kiszolgáltatná. Ezek alapján meghatározhatjuk, az Erlang C formulát,  $P\{W > 0\}$ -át, ami annak valószínűsége, hogy egy újonnan beérkező hívás számára nincs szabad vonal, így sorba kell állnia.

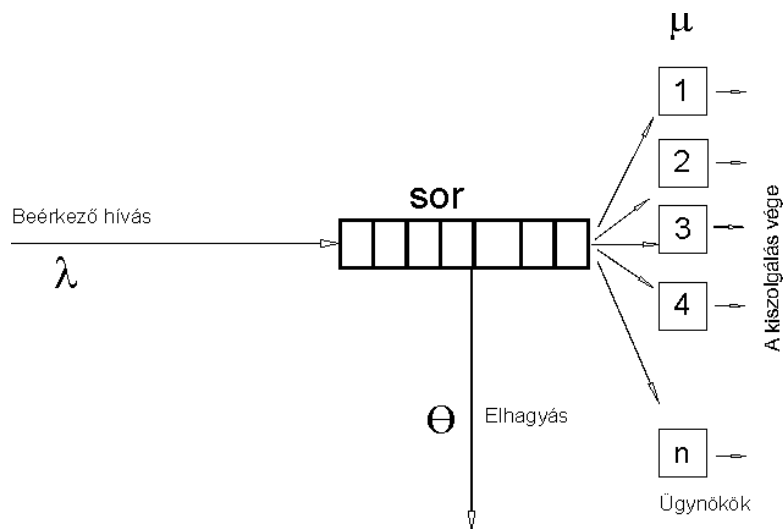
Az M/M/N modell hátránya, hogy nem veszi számításba az elhagyást, így olyan fontos információkról ad hibás vagy torzított eredményt, amelyek fontosak a call center kezelése

során. Ugyanis, amikor egy nagy méretű call centert nagy forgalom idején vizsgálunk, akkor fontos, hogy milyen hatással vannak a rendszerre a türelmetlen ügyfelek, mert előfordulhat, hogy túl sok, vagy éppen túl kevés kiszolgálót alkalmaznak a hívások fogadására. Ennek ellenére a vizsgálatok során elég gyakran alkalmazzák ezt a modellt.

## 2.2. Erlang-A modell (A-abandonment, M/M/N+M)

Az Erlang-A modell négy paraméterrel jellemezhető:

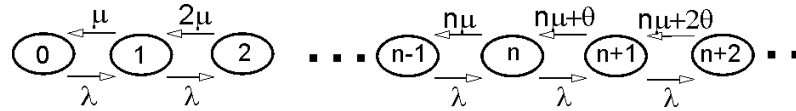
- $\lambda$  - a rendszerbe jövő igények érkezési intenzitása ( $\lambda > 0$ )
- $\mu$  - az egy ügyintézőre vonatkozó átlagos kiszolgálási intenzitás ( $\mu > 0$ )
- $n$  - az ügyintézők száma ( $n=1,2,\dots$ )
- $\theta$  - az egyén "elhagyási" intenzitása ( $\theta > 0$ )



A rendszer tulajdonságai röviden a következők: az ügyfelek egy  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a kiszolgáló rendszerhez. Minden ügyfél  $\tau$  türelmi idővel rendelkezik, mely után ha nem kerül kiszolgálásra, akkor elhagyja a rendszert. Az elhagyást egy  $\theta$  paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változóval adhatjuk meg. A kiszolgálási időközök szintén exponenciális eloszlásúak,  $\mu$  paraméterrel. A beérkezési folyamat, a türelmi és a kiszolgálási idők kölcsönösen függetlenek egymástól.

Egy adott ügyfél esetén  $\tau$  az az idő, amennyit hajlandó kivárni a kiszolgálásig. Amennyiben letelt ez az idő, és nem szolgálták ki, elhagyja a rendszert. Jelölje  $V$  az ajánlott várakozási időt, tehát azt az időt, amit ki kell várnia ahhoz, hogy sorra kerüljön és kiszolgálják. Ehhez feltételezzük, hogy az ügyfél végtelenül türelmes, és nem fogja elhagyni a sort. Ekkor az ügyfélnek a rendszerben való teljes tartózkodási idejét jelölje  $W$ , ahol  $W = \min\{V, \tau\}$ .

Jelölje  $L(t)$  a rendszerben tartózkodó hívók számát a  $t$  időpillanatban, akár kiszolgálás alatt vannak, akár várakoznak. Ekkor  $L = \{L(t), t \geq 0\}$  egy Markov-féle születési-halálózási folyamat, az alábbi állapot- és intezitás-átmeneti diagrammal.



Jelölje  $d_j$  a halálózási-intenzitást a  $j$  állapotban,  $0 \leq j < \infty$ . Ekkor

$$j \cdot \min\{\mu, \theta\} \leq d_j \leq j \cdot \max\{\mu, \theta\}. \quad (2)$$

Az egyenlőtlenség bal illetve jobb oldali korlátai megegyeznek egy  $M/M/\infty$  rendszer halálózási intenzitásával, ahol a kiszolgálási intenzitások  $\min\{\mu, \theta\}$  és  $\max\{\mu, \theta\}$ . Továbbá az egyenlőség csak akkor teljesül, ha a kiszolgálási és az elhagyási intenzitás megegyezik, azaz  $\mu = \theta$ .

Határozzuk meg  $L$  határeloszlását a következőképpen:

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L(t) = j\}, \quad j \geq 0,$$

Amennyiben létezik, akkor a határeloszlás egy stacionárius eloszlás, mely az alábbi egyenletek segítségével kiszámolható:

$$\begin{cases} \lambda \pi_j = (j+1) \cdot \mu \pi_{j+1} & , \text{ ha } 0 \leq j \leq n-1 \\ \lambda \pi_j = (n\mu + (j+1-n)\theta) \cdot \pi_{j+1} & , \text{ ha } j \geq n \end{cases} \quad (2)$$

Ebből közvetlenül megkapjuk a megoldást, mely szerint:

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} \pi_0 & , 0 \leq j \leq n \\ \prod_{k=n+1}^j \left( \frac{\lambda}{n\mu + (k-n)\theta} \right) \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \pi_0 & , j \geq n+1 \end{cases} \quad (4)$$

ahol

$$\pi_0 = \left[ \sum_{j=0}^n \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \prod_{k=n+1}^j \left( \frac{\lambda}{n\mu + (k-n)\theta} \right) \frac{(\lambda/\mu)^j}{n!} \right]^{-1} \quad (5).$$

A megoldás lényege és egyben az L Markov folyamat ergodigusságának feltétele, hogy az (5)-ben szereplő végtelen összeg konvergens. A (2)-ben szereplő alsó korlát következménye a következő:

$$\sum_{j=0}^n \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \prod_{k=n+1}^j \left( \frac{\lambda}{n\mu + (k-n)\theta} \right) \frac{(\lambda/\mu)^j}{n!} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\min(\mu, \theta))^j}{j!} = e^{-\lambda/\min(\mu, \theta)}.$$

A (4) és (5) -ös formulákban szereplő végtelen összegek numerikus problémákhoz vezethetnek. Ezen problémák kiküszöbölésére Palm [2] meghatározta az Erlang-A modell stationárius eloszlását és az egyéb fontos rendszer jellemzőket. Mindezekhez egy speciális függvényt használt. Definiáljuk a Gamma függvényt:

$$\Gamma(x) \triangleq \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0, \quad (6)$$

és a "csonkított" Gamma függvény:

$$\gamma(x, y) \triangleq \int_0^y t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0, y \geq 0. \quad (7)$$

Legyen

$$A(x, y) \triangleq \frac{x e^y}{y^x} \cdot \gamma(x, y) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y^j}{\prod_{k=1}^j (x+k)}, \quad x > 0, y \geq 0. \quad (8)$$

(Az egyenlőség második része Palm eredménye.)

Jelölje  $E_{1,n}$  az igényvesztés valószínűségét M/M/n/n (Erlang-B) rendszer esetén, melyet Erlang-féle veszteség- vagy Erlang-féle B formulának is neveznek:

$$E_{1,n} = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}{\sum_{j=0}^n \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}. \quad (9)$$

Az alábbi rekurzió használatával  $E_{1,n}$  számolását megkönnyíthetjük:

$$E_{1,0} = 0, \quad E_{1,n} = \frac{\rho E_{1,n-1}}{1 + \rho E_{1,n-1}}, \quad n \geq 1,$$

ahol  $\rho$  a kihasználtsági tényező egy ügyintézőre vonatkozóan, és:

$$\rho \triangleq \frac{\lambda}{n\mu}.$$

Később a (8) segítségével levezetjük az alábbi stacionárius eloszlás megoldását:

$$\pi_j = \begin{cases} \pi_n \cdot \frac{n!}{j! \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-j}}, & 0 \leq j \leq n \\ \pi_n \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{j-n}}{\prod_{k=1}^{j-n} \left(\frac{n\mu}{\theta} + k\right)}, & j \geq n+1 \end{cases} \quad (10)$$

ahol

$$\pi_n = \frac{E_{1,n}}{1 + \left[A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right) - 1\right] \cdot E_{1,n}}. \quad (11)$$

### A rendszer jellemzőinek meghatározása

Erlang-A modell esetén a türelmi időközök exponenciális eloszlásúak, ezért az eloszlás függvénye:

$$G(x) = 1 - e^{-x\theta}, \quad \theta > 0.$$

Határozzuk meg egy ügyfél várakozási idejének stacionárius eloszlását, azaz  $\mathbf{P}\{\mathbf{W} > \mathbf{0}\}$ -t:

- az (5), (8), (9)-es definíciót felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \pi_0^{-1} &= \sum_{j=0}^n \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} \prod_{k=n+1}^j \left( \frac{\lambda}{n\mu + (k-n)\theta} \right) = \\ &= \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot \left[ \frac{1}{E_{1,n}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda/\theta)^j}{\prod_{k=1}^j \left(\frac{n\mu}{\theta} + k\right)} \right] = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot \left[ \frac{1}{E_{1,n}} + A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

- Ezután

$$\pi_0 = \frac{E_{1,n}}{1 + \left[A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right) - 1\right] \cdot E_{1,n}} \cdot \frac{n!}{(\lambda/\mu)^n}. \quad (12)$$

- $1 \leq j \leq n$  esetén

$$\pi_j = \pi_0 \cdot \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} = \frac{E_{1,n}}{1 + \left[ A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right) - 1 \right] \cdot E_{1,n}} \cdot \frac{n!}{j! \cdot (\lambda/\mu)^{n-j}}. \quad (13)$$

- Speciálisan,

$$\pi_n = \frac{E_{1,n}}{1 + \left[ A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right) - 1 \right] \cdot E_{1,n}}. \quad (14)$$

- Végül ha  $j > n$

$$\pi_j = \pi_n \cdot \frac{\lambda^{j-n}}{\prod_{k=1}^{j-n} (n\mu + k\theta)} = \frac{E_{1,n}}{1 + \left[ A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right) - 1 \right] \cdot E_{1,n}} \cdot \frac{(\frac{\lambda}{\theta})^{j-n}}{\prod_{k=1}^{j-n} (\frac{n\mu}{\theta} + k)}. \quad (15)$$

- A várakozás valószínűsége ((14) és (15) segítségével kifejezhető):

$$\begin{aligned} P\{W > 0\} &= \sum_{j=n}^{\infty} \pi_j = \frac{E_{1,n}}{1 + \left[ A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right) - 1 \right] \cdot E_{1,n}} \cdot \left[ 1 + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\lambda/\theta)^{j-n}}{\prod_{k=1}^{j-n} (\frac{n\mu}{\theta} + k)} \right] \\ &= \frac{A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right) \cdot E_{1,n}}{1 + \left[ A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right) - 1 \right] \cdot E_{1,n}} \quad (16) \end{aligned}$$

Számoljuk ki az elhagyás valószínűségét, azaz a  $P\{Ab\}$ -t: előtte azonban szükségünk van az alábbi számítások elvégzésére:

- deriváljuk le a (8)-t, melyből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial y} A(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{x e^y}{y^x} \gamma(x, y) \right] = \frac{x}{y} + \left( 1 - \frac{x}{y} \right) \cdot A(x, y).$$

- $x > 0, y > 0$  esetén,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)y^j}{\prod_{k=1}^{j+1} (x+k)} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y^j}{\prod_{k=1}^j (x+k)} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y} [A(x, y) - 1] = \frac{\partial}{\partial y} A(x, y) = \frac{x}{y} + \left( 1 - \frac{x}{y} \right) \cdot A(x, y). \quad (17) \end{aligned}$$

- Jelölje  $P_j\{Sr\}$  annak valószínűségét, hogy  $n + j$  igény van a rendszerben, vagyis egy új hívó érkezésekor már  $j$  ügyfél a sorban várakozik. Feltesszük, hogy

$$P_0\{Sr\} = \frac{n\mu}{n\mu + \theta}.$$

Ezután

$$P_1\{Sr\} = \frac{n\mu + \theta}{n\mu + 2\theta} \cdot P_0\{Sr\} = \frac{n\mu}{n\mu + 2\theta},$$

ami azt jelenti, hogy az érkezés után azzal szembesülünk, hogy minden ügyintéző foglalt, és csak mi várakozunk a sorban. Ehhez az érkezés előtt vagy kiszolgáltak valakit, vagy valaki türelmetlen volt, és idő előtt elhagyta a rendszert. Általánosabban kifejezve:

$$P_j\{Sr\} = \frac{n\mu + j\theta}{n\mu + (j+1)\theta} \cdot P_{j-1}\{Sr\} = \frac{n\mu}{n\mu + (j+1)\theta}, \quad j \geq 1.$$

Ha  $j$  ügyfél várakozik a sorban az érkezés pillanatában, akkor az elhagyás valószínűsége:

$$P_j\{Ab\} = 1 - P_j\{Sr\} = \frac{(j+1)\theta}{n\mu + (j+1)\theta}, \quad \geq 0. \quad (18)$$

- (16)- és (18)-ből következik, hogy:

$$\begin{aligned} P[Ab|W > 0] &= \frac{\sum_{j=n}^{\infty} \pi_j P_{j-n}\{Ab\}}{P\{W > 0\}} \\ &= \frac{1}{A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right)} \cdot \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{j-n}}{\prod_{k=1}^{j-n} \left(\frac{n\mu}{\theta} + k\right)} \cdot \frac{\theta(j+1-n)}{n\mu + \theta(j+1-n)} \end{aligned}$$

(ahol megállapodás alapján  $\prod_{k=1}^0 \left(\frac{n\mu}{\theta} + k\right) \triangleq 1$ )

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^j \cdot (j+1)}{\prod_{k=1}^{j+1} \left(\frac{n\mu}{\theta} + k\right)} = \frac{1}{A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ A\left(\frac{n\mu}{\theta}, y\right) \right]_{y=\lambda/\theta} \\ &= \frac{1}{A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right)} \cdot \left[ \frac{n\mu}{\lambda} + \left(1 - \frac{n\mu}{\lambda}\right) A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right) \right] = \frac{1}{\rho A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right)} + 1 - \frac{1}{\rho}. \quad (19) \end{aligned}$$

ahol az utolsó sor a (17)-ből következik.

Most azt nézzük meg, hogy mi a kapcsolat a  $P\{Ab\}$ ,  $E[W]$  és  $E[Q]$  között:

- az első fontos összefüggés:

$$P\{Ab\} = \theta \cdot E[W]. \quad (20)$$

A bizonyítás egyrészt a

$$\theta \cdot E[Q] = \lambda \cdot P\{Ab\},$$

egyenleten, másrészt a Little formulán alapszik, mely szerint

$$E[Q] = \lambda \cdot E[W], \quad (21)$$

ahol  $Q$  jelöli a sorhosszt egyensúlyi állapotban.

A (20)-as összefüggéssel ekvivalens az alábbi:

$$P\{Ab|W > 0\} = \theta \cdot E[W|W > 0]. \quad (22)$$

Ekkor egy késleltetett/megvárakoztatott ügyfél átlagos várakozási idejét kiszámolhatjuk az (19) és (22) alapján a következőképpen:

$$E[W|W > 0] = \frac{1}{\theta} \cdot \left[ \frac{1}{\rho A\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right)} + 1 - \frac{1}{\rho} \right]. \quad (23)$$

A feltétel nélküli átlagos várakozási idő, az  $E[W]$  pedig előállítható a (16) és (23) alapján.

### **Milyen hatást gyakorolnak a modell paramétereinek változásai a rendszer jellemzőkre?**

A valós világban soha sem tudjuk megmondani a paraméterek pontos értékét. Ezért fontos a rendszer jellemzők érzékenységéről beszélni, melyek meghatározására létezik pontos numerikus algoritmus is, és léteznek különböző approximációs megoldások is. Ezekből a megoldásokból arra az eredményre jutottak, hogy az Erlang-A rendszer teljesítménye meglehetősen érzékeny az érkezési illetve kiszolgálási intenzitásban, vagy a kiszolgálók számában bekövetkező változásokra, de viszonylag érzéketlen az elhagyási intenzitás kis változásaira.

## 3. fejezet

### M/M/n+G sorbanállási rendszer

Egy olyan modellt szeretnék bemutatni, ahol a hívások  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek, a kiszolgálási időközök  $\mu$  paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. A rendszernek  $n$  darab kiszolgálója van, és  $G(\cdot)$  az általános türelmi idő eloszlását jelöli. Ekkor jelölje  $\bar{G} = \{\bar{G}(x), x \geq 0\}$  a  $\tau$  türelmi idő megbízhatósági függvényét:  $\bar{G}(x) = P\{\tau > x\}$ ,  $x \geq 0$ . Tegyük fel, hogy stacionárius állapotban az érkező ügyfél egy ajánlott várakozási idővel rendelkezik, jelöljük ezt  $V$ -vel ( $V$  az az idő, amit az ügyfélnek ki kell várnia ahhoz, hogy sorra kerüljön és kiszolgálják, mindehhez feltételezzük, hogy az ügyfél végtelenül türelmes). Ekkor a hívó teljes tartózkodási ideje stacionárius esetben  $W = \min\{V, \tau\}$ .

#### 3.1. Baccelli és Herbuterne eredményi

Baccelli és Herbuterne [3] azt feltételezték, hogy az ügyfelek már érkezésükkor ki tudják számolni a saját ajánlott várakozási idejüket, azaz a  $V$ -t. Így ha ez az idő meghaladja a türelmi idejüket, akkor az ügyfelek azonnal távoznak, és a sorhoz sem csatlakoznak.

A [3] vizsgálat alapját egy  $\{(N(t), \eta(t)), t \geq 0\}$  Markov folyamat képezi, ahol  $N(t)$  a foglalt kiszolgálók számát,  $\eta(t)$  pedig a virtuális várakozási időt (egy virtuális ügyfél ajánlott várakozása az érkezés  $t$ -edik pillanatában) jelöli. Ekkor egyensúlyi állapotban a jellemzőket az alábbi módon defináljuk:

$$\begin{cases} v(x) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P\{N(t)=n, x < \eta(t) \leq x + \epsilon\}}{\epsilon} & , \quad x \geq 0 \\ \pi_j \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = j, \eta(t) = 0, & , \quad 0 \leq j \leq n - 1 \end{cases} \quad (24)$$

ahol  $v(x)$  a virtuális ajánlott várakozási idő sűrűség függvénye. A stacionárius egyenlet általános megoldása:

$$\pi_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!} \pi_0, \quad 0 \leq j \leq n-1 \quad (25)$$

$$v(x) = \lambda \pi_{n-1} \exp\left\{\lambda \int_0^x \bar{G}(u) du - n\mu x\right\} dx, \quad (26)$$

ahol

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (1 + \lambda J)\right]^{-1}, \quad (27)$$

$$J \triangleq \int_0^\infty \exp\left\{\lambda \int_0^x \bar{G}(u) du - n\mu x\right\} dx. \quad (28)$$

Ezen felül az elhagyás valószínűségét kiszámolhatjuk a

$$P\{Ab\} = \left(1 - \frac{n\mu}{\lambda}\right) \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j\right) + \pi_{n-1} \quad (29)$$

képlettel is.

**Bizonyítás:** először azt kell belátni, hogy a stacionárius egyenletek kifejezhetők a következő alakban:

$$\lambda \pi_j = \mu(j+1) \pi_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq n-2, \quad (30)$$

$$\lambda \pi_{n-1} = v(0), \quad (31)$$

$$v(x) = \lambda \pi_{n-1} \exp\{-n\mu x\} + \lambda \int_0^x \bar{G}(u) v(u) \exp\{-n\mu(x-u)\} du. \quad (32)$$

A (30) egyenlőségek az M/M/n rendszerre vonatkozó Kolmogorov egyenlőségekből következnek:

$$\lambda \pi_0 = \mu \pi_1 \text{ és } (\lambda + \mu j) \pi_j = \lambda \pi_{j-1} + \mu(j+1) \pi_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

Ahhoz, hogy levezessük a Kolmogorov egyenletet az  $(n-1)$ -edik állapotra vonatkozóan, jegyezzük meg, hogy

$$P\{N(t) = n-1\} = P\{N(t-\epsilon) = n-1\} \cdot \{1 - (\lambda + \mu(n-1))\epsilon\}$$

$$+P\{N(t - \epsilon) = n - 2\} \cdot \lambda\epsilon + P\{N(t - \epsilon) = n, 0 < \eta(t) \leq \epsilon\} + o(\epsilon).$$

Egyensúlyi állapotban az utolsó egyenlet és a (24) második definíciója magába foglalja a:

$$(\lambda + \mu(n - 1))\pi_{n-1} = \lambda\pi_{n-2} + v(0),$$

melyet kombinálva a  $\lambda\pi_{n-2} = \mu(n - 1)\pi_{n-1}$  -el, megkapjuk a (31)-et. Ahhoz, hogy a (32)-es egyenlet is igaz legyen, szükségünk van a következőre:  $x \geq 0, t > 0, h > 0$  esetén

$$P\{\eta(t + h) > x\} = P\{\eta(t) > x + h\}$$

$$+P\{\eta(t + h) > x; \eta(t) = 0\} + P\{\eta(t + h) > x; 0 < \eta(t) \leq x + h\}.$$

Egyensúlyi állapotban

$$\int_x^\infty v(y)dy = \int_{x+h}^\infty v(y)dy + \lambda h \exp\{-n\mu x\}\pi_{n-1} + \int_0^x \lambda h \exp\{-n\mu(x-u)\}v(u)\bar{G}(u)du + o(h). \quad (33)$$

A (33)-as egyenlet második kifejezése azt írja le, hogy egy beérkező hívás  $(n - 1)$  foglalt és egyetlen szabad kiszolgálót talál a rendszerben. Ez az érkezés  $\{-n\mu x\}$  paraméterű exponenciális valószínűséggel növeli meg a valós várakozási időt,  $x$ -nél nagyobb mértékben. (Ha minden kiszolgáló foglalt a kiszolgálások között, akkor a valószínűség exponenciális eloszlású  $(n\mu)$  paraméterrel.)

A harmadik integrál pedig egy  $u$  virtuális ajánlott várakozási idővel rendelkező érkezést ír le. Ekkor az ügyfél  $\bar{G}(u)$  valószínűséggel kerül kiszolgálásra (befolyásolva ezzel az ajánlott várakozást).

Ha a (32) formula teljesül, akkor a

$$H(x) = \exp\{n\mu x\} \cdot v(x) \quad (34)$$

függvény megoldja az alábbi integrálegyenletet

$$H(x) = \lambda\pi_{n-1} + \lambda \int_0^x \bar{G}(u)H(u)du, \quad (35)$$

Másrésztől, a (35)-ös egyenlet megoldása megegyezik a következővel:

$$H(x) = \lambda \pi_{n-1} \exp \left\{ \lambda \int_0^x \bar{G}(u) du \right\}. \quad (36)$$

Ha kombináljuk a (34) és (36)-ot, akkor megkapjuk a (26)-ot.

A (25)-ös formula a (30)-as egyenletekből következik. A (27)-es egyenletet a normalizáló feltétel használatával kaphatjuk meg:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + P\{V > 0\} = 1,$$

és

$$P\{V > 0\} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j = \int_0^{\infty} v(x) dx = \lambda \pi_{n-1} J, \quad (37)$$

ahol a (37) utolsó egyenlete a (26) és (28) következménye.

Hogy az elhagyás valószínűségét leíró (29)-es formulát meg tudjuk határozni, meghatározzuk a kiszolgálók kihasználtságát, vagyis a  $\rho$ -t, az alábbi esetek valamelyikén:

$$\rho = \frac{\lambda}{n u} \cdot (1 - P\{Ab\})$$

vagy

$$\rho = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j \pi_j}{n} + \left( 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j \right). \quad (38)$$

Ezután a (29) már könnyen megkapható a (38) használatával:

$$P\{Ab\} = 1 - \frac{n\mu}{\lambda} \cdot \rho.$$

## 3.2. Brandt és Brandt eredményi

Brandt és Brandt [4,5] az  $M(k)/M(k)/n+G$  sorbanállási rendszert vizsgálták, ahol az érkezői és a kiszolgálási intenzitások a rendszerben tartózkodó ügyfelek számától függenek. Bacelli és Hebuterne [3] megoldásától eltérően Brandt és Brandt azt feltételezték, hogy az ügyfelek elhagyják a rendszert miután letelt a türelmi idejük, és addig nem szolgálták ki őket.

**A modell:** Brandt és Brandt [4,5] feltételezései szerint a türelmi időnek van egy folytonos  $g$  sűrűséggel rendelkező  $\bar{G}$  megbízhatósági függvénye.

Definiáljuk a(z):

- $N(t) \triangleq$  a  $t$  időpillanatban a rendszerben tartózkodó ügyfelek száma
- $L(t) = (N(t) - n)_+ \triangleq$  a sorhossz
- $(X_1(t), \dots, X_{L(t)}(t)) \triangleq$  a várakozó ügyfelek maradék türelmi idejei, az ügyfelek sorbeli pozíciója alapján rendezve.
- $(I_1(t), \dots, I_{L(t)}(t)) \triangleq$  a várakozó ügyfelek kezdeti (kiindulási, original) türelmi idejei, az ügyfelek sorbeli pozíciója alapján rendezve.
- $\pi_k = P\{N(t) = k\} \triangleq$  a rendszerben tartózkodó igények számának stacionárius eloszlása

A vizsgálandó Markov-folyamat:

$$(N(t); X_1(t), \dots, X_{L(t)}(t); U_1(t), \dots, U_{L(t)}(t)). \quad (39)$$

A stacionárius eloszlást jelöljük az alábbi módon:

$$P_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) \triangleq \quad (40)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n + l; X_1(t) \leq x_1, \dots, X_l(t) \leq x_l; U_1(t) \leq u_1, \dots, U_L(t) \leq u_l\},$$

ahol  $l$  a sorhossz. A FCFS(First Come First Served) kiszolgálási elvnek köszönhetően

$$\Omega_l \triangleq \{(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) \in R_{2l}^+ : u_1 - x_1 \geq \dots \geq u_l - x_l \geq 0\}. \quad (41)$$

Definiáljuk az egyensúlyi sűrűséget:

$$\pi_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) \triangleq \frac{\partial^{2l}}{\partial x_1 \dots \partial x_l \partial u_1 \dots \partial u_l} P = (x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l).$$

*Összefoglalva az eredményeket:*

- Először állítsuk elő az

$$F(\xi) \triangleq \int_0^{\xi/(n\mu)} \bar{G}(\eta) d\eta, \xi > 0$$

függvényt és a konstansokat

$$F_j \triangleq \frac{1}{j!} \int_0^\infty F(\xi)^j e^{-\xi} d\xi. \quad (42)$$

- Számítsuk ki a normalizáló konstans, melyet  $w$ -vel jelölünk és a következőképpen adunk meg:

$$w^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n! \cdot \lambda^j \mu^{n-j}}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{n+j} F_j. \quad (43)$$

- Ezután a stacionárius eloszlás:

$$\pi_k \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = k\} = w \frac{n! \cdot \lambda^k \mu^{n-k}}{k!}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (44)$$

$$\pi_k = w \lambda^k F_{k-n}, \quad (45)$$

$$\pi_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) = I\{(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) \in \Omega_l\} \cdot w \lambda^k \cdot \prod_{i=1}^l g(u_i) \cdot e^{-n\mu(u_1 - x_1)} \quad (46)$$

- A Little formulából azt kapjuk, hogy az átlagos várakozási idő:

$$E[W] = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)\pi_k}{\lambda}.$$

- Adott  $l$  ügyfél a várakozási sorban. Ekkor az  $\alpha_l$  elhagyási intenzitás kifejezhető az

$$\alpha_1 \triangleq \frac{1}{\pi_{n+l}} \sum_{i=1}^l \int_{R_+^{2l-1}} \pi_{n+l}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_l$$

$$du_1 \dots du_l = \frac{F_{l-1}}{F_l} - n\mu, \quad (47)$$

ahol  $F_l$  a (42) alapján határoztuk meg.

- Az elhagyás valószínűsége kifejezhető a lenti formában:

$$P\{Ab\} = \frac{\sum_{l=n+1}^{\infty} \alpha_{l-n} \pi_l}{\lambda}. \quad (48)$$

- A elhagyási intenzitások aszimptotikusan növekednek az alábbiak megfelelően:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha_l}{l} = \frac{1}{E[\tau]} \quad (49)$$

- Ha a türelmi idő eloszlásának  $m$ -edik momentuma véges  $m > 2$  esetén, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_l - \alpha_{l-1}) = \frac{1}{E[\tau]} \quad (50)$$

- Ha a türelmi idők exponenciális eloszlásúak, akkor az utóbbi két egyenlőség meglehetősen pontos.

### A rendszerben tartózkodó ügyfelek számának eloszlása

Markov-folyamat esetén a stacionárius egyenletek a következő formában adóttak:

$$\lambda \pi_k = (k + 1) \mu \pi_{k+1}, \quad 0 \leq k \leq n - 1 \quad (51)$$

$$\lambda \pi_n = \int_{R_+} \pi_{n+1}(0, u) du + n \mu \int_{R_+^2} \pi_{n+1}(x, u) dx du \quad (52)$$

$$\pi_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l)$$

$$= \pi_k(x_1 + h, \dots, x_l + h; u_1, \dots, u_l) \cdot (1 - \lambda h - n \mu h)$$

$$+ h \cdot \sum_{i=1}^{l+1} \int_{R_+} \pi_{k+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_l; u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_i, \dots, u_l) du$$

$$+ h n \mu \cdot \int_{R_+^2} \pi_{k+1}(x, x_1, \dots, x_l; u, u_1, \dots, u_l) dx du + o(h) \quad (53)$$

$$\pi_k(x_1, \dots, x_{l-1}, u_l; u_1, \dots, u_{l-1}, u_l) = \lambda \pi_{k-1}(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_{l-1}) \cdot g(u_l) \quad (54)$$

Az (51)-es egyenletek megegyeznek az M/M/n rendszer stacionárius egyenleteivel. Az (52)-ben szereplő első integrál az elhagyással, a második a kiszolgálás befejeződésével egyezik meg. Az (53)-as harmadik kifejezése annak a  $h$  hosszúságú időintervallum alatt bekövetkező rendszerbeli eseménynek a hiányával esik egybe, mint amikor a várakozó ügyfél elhagyja a rendszert, vagy befejezik a kiszolgálását. Végül az (54)-ben szereplő perem-feltételek egy új érkezést írnak le.

Bevezetjük az alábbi függvényt:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\triangleq \pi_k(x_1 + t, \dots, x_l + t; u_1, \dots, u_l)e^{-n\mu t} \\
&+ \lambda \int_t^\infty \pi_k(x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_l)e^{-n\mu \xi} d\xi \\
&- \sum_{i=1}^{l+1} \int_t^\infty \int_{R_+} \pi_{k+1}(x_1 + \xi, \dots, x_{i-1} + \xi, 0, x_i + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_i, \dots, u_l)e^{-n\mu \xi} dud\xi \\
&\quad - n\mu \int_t^\infty \int_{R_+^2} \pi_{k+1}(x, x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u, u_1, \dots, u_l)e^{-n\mu \xi} dx dud\xi \quad (55)
\end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy

$$e^{-n\mu(t+h)} - e^{-n\mu t} = -e^{-n\mu t} \cdot n\mu h + o(h)$$

kiszámolhatjuk a

$$\begin{aligned}
&\varphi(t+h) - \varphi(t) = \\
&= e^{-n\mu t} \cdot [\pi_k(x_1 + t + h, \dots, x_l + t + h; u_1, \dots, u_l) - \pi_k(x_1 + t, \dots, x_l + t; u_1, \dots, u_l)] \\
&\quad - e^{-n\mu t} \cdot n\mu h \cdot \pi_k(x_1 + t + h, \dots, x_l + t + h; u_1, \dots, u_l) \\
&\quad - \lambda h e^{-n\mu t} \pi_k(x_1 + t, \dots, x_l + t; u_1, \dots, u_l) \\
&+ h e^{-n\mu t} \cdot \sum_{i=1}^{l+1} \int_{R_+} \pi_{k+1}(x_1 + t, \dots, x_{i-1} + t, 0, x_i + t, \dots, x_l + t; u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_i, \dots, u_l) du \\
&\quad + n\mu h e^{-n\mu t} \cdot \int_{R_+^2} \pi_{k+1}(x, x_1 + t, \dots, x_l + t, u, u_1, \dots, u_l) dx du + o(h) \quad (56)
\end{aligned}$$

Ha a jobb oldalt egyenlővé tesszük nullával, akkor az (53)-féle stacionárius egyenlethez jutunk az  $(x_1 + t, \dots, x_l + t; u_1, \dots, u_l)$  pontban. Ezentúl, tekintettel arra, hogy az (53) érvényesül, a  $\varphi(t+h) - \varphi(t) = o(h)$ . Mivel a  $\varphi$  függvény folytonos,  $\varphi \equiv \text{const.}$  Nevezetesen

$$\varphi(0) = \varphi(u_l - x_l). \quad (57)$$

Az (55) alapján

$$\varphi(u_l - x_l) = \lambda \pi_{k-1}(x_1 + u_l - x_l, \dots, x_{l-1} + u_l - x_l; u_1, \dots, u_{l-1})g(u_l)e^{-n\mu(u_l - x_l)}. \quad (58)$$

Megjegyezzük, hogy

$$\begin{aligned}
& \varphi(0) = \pi_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) \\
& + \lambda \int_{R_+} \pi_k(x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} d\xi \\
& - \sum_{i=1}^{l+1} \int_{R_+^2} \pi_{k+1}(x_1 + \xi, \dots, x_{i-1} + \xi, 0, x_i + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_i, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} dud\xi \\
& - n\mu \int_{R_+^3} \pi_{k+1}(x, x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u, u_1, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} dx dud\xi \quad (59)
\end{aligned}$$

Az (57), (58) és (59) magába foglalja az integrál egyenletet

$$\begin{aligned}
& \pi_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) + \lambda \int_{R_+} \pi_k(x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} d\xi \\
& = \lambda \pi_{k-1}(x_1 + u_l - x_l, \dots, x_{l-1} + u_l - x_l; u_1, \dots, u_{l-1}) g(u_l) e^{-n\mu(u_l - x_l)} \\
& + \sum_{i=1}^{l+1} \int_{R_+^2} \pi_{k+1}(x_1 + \xi, \dots, x_{i-1} + \xi, 0, x_i + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_i, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} dud\xi \\
& - n\mu \int_{R_+^3} \pi_{k+1}(x, x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u, u_1, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} dx dud\xi \quad (60)
\end{aligned}$$

Másrésztől meg lehet mutatni, hogy a fenti formula magába foglalja az (53) és (54)-es egyenleteket. Pontosabban, ha  $x_l = u_l$ , akkor abból következik az  $\Omega_l$  fogalma (41). Ahhoz, hogy le tudjuk vezetni az (53)-t, ki kell számolni a

$$\pi_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) - \pi_k(x_1 + h, \dots, x_l + h; u_1, \dots, u_l)$$

kicsi  $h$  értékek esetén (60) segítségével. Ezért meg kell oldani az (51), (52) és (60)-at. Először,

$$\pi_k = w \lambda^k \mu^{n-k} \frac{n!}{k!}, \quad k \leq n, \quad (61)$$

ahol  $w$  a normalizáló konstans.  $\pi_k(\cdot)$ ,  $k \geq n$ -et a következő alakban keressük:

$$\pi_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) = w \lambda^k \cdot (x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l). \quad (62)$$

(61)-ből,  $\pi_n = w\lambda^n$ , ezért  $q_n = 1$ . (52)-t és (60)-t fel lehet úgy írni, mint

$$\int_{R_+} q_{n+1}(0, u) du + n\mu \int_{R_+^2} q_{n+1}(x, u) dx du = 1, \quad (63)$$

és

$$\begin{aligned} & q_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) + \lambda \int_{R_+} q_k(x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} d\xi \\ &= q_{k-1}(x_1 + u_l - x_l, \dots, x_{l-1} + u_l - x_l; u_1, \dots, u_{l-1}) g(u_l) e^{-n\mu(u_l - x_l)} \\ &+ \lambda \sum_{i=1}^{l+1} \int_{R_+^2} q_{k+1}(x_1 + \xi, \dots, x_{i-1} + \xi, 0, x_i + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_i, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} du d\xi \\ &+ \lambda n\mu \int_{R_+^3} q_{k+1}(x, x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u, u_1, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} dx du d\xi \quad (64) \end{aligned}$$

Most kétfelé választva az egyenleteket megmutatjuk, hogy mindkét esetben ugyanazt a megoldást kapjuk függetlenül  $\lambda$ -tól. A két egyenlet:

$$q_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) = q_{k-1}(x_1 + u_l - x_l, \dots, x_{l-1} + u_l - x_l; u_1, \dots, u_{l-1}) g(u_l) e^{-n\mu(u_l - x_l)} \quad (65)$$

és

$$\begin{aligned} & \int_{R_+} q_k(x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} d\xi = \\ &= \sum_{i=1}^{l+1} \int_{R_+^2} q_{k+1}(x_1 + \xi, \dots, x_{i-1} + \xi, 0, x_i + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_i, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} du d\xi \\ &+ n\mu \int_{R_+^3} q_{k+1}(x, x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u, u_1, \dots, u_l) e^{-n\mu\xi} dx du d\xi \quad (66) \end{aligned}$$

A (65)-ös megoldása

$$q_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) = I\{(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) \in \Omega_l\} \cdot \prod_{i=1}^l g(u_i) \cdot e^{-n\mu(u_l - x_l)}. \quad (67)$$

A (63) bal oldalába behelyettesítve a (67)-et:

$$\int_0^\infty g(u) e^{-n\mu u} du + n\mu \int_0^\infty \int_0^y g(u) e^{-n\mu(u-x)} dx du = \int_0^\infty g(u) du = 1.$$

Ebból azt kaptuk, hogy a (67)-es megoldás kielégíti a (63)-as egyenletet. Már csak azt kell megmutatni, hogy a (66)-ost is kielégíti. Helyettesítsük be (67)-et a következő kifejezésbe

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{l+1} \int_{R_+} q_{k+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_l; u_1, \dots, u_{i-l}, u, u_i, \dots, u_l) du \quad (68) \\
& + n\mu \int_{R_+^2} q_{k+1}(x, x_1, \dots, x_l; u, u_1, u_l) dx du \\
& = I\{(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) \in \Omega_l\} \cdot \prod_{i=1}^l g(u_i) \cdot \left( \int_{u_1-x_1}^{\infty} g(u) e^{-n\mu u} du \right. \\
& \quad \left. + e^{-n\mu(u_1-x_1)} \sum_{i=2}^{l+1} \int_{u_i-x_i}^{u_{i-1}-x_{i-1}} g(u) du \right. \\
& \quad \left. + n\mu \int_{u_1-x_1}^{\infty} \int_0^{u-(u_1-x_1)} g(u) e^{-n\mu(u-x)} dx du \right). \quad (69)
\end{aligned}$$

A (69) utolsó kifejezése egyenlő

$$n\mu \int_{u_1-x_1}^{\infty} g(u) e^{-n\mu u} \frac{1}{n\mu} \cdot [e^{n\mu[u-(u_1-x_1)]} - 1] du = \int_{u_1-x_1}^{\infty} g(u) \cdot [e^{-n\mu(u_1-x_1)} - e^{-n\mu u}] du,$$

melynek kiszámolásával az alábbi eredményre jutunk

$$\begin{aligned}
& = I\{(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) \in \Omega_l\} \cdot \prod_{i=1}^l g(u_i) \cdot e^{-n\mu(u_1-x_1)} \cdot \int_0^{\infty} g(u) du \\
& = q_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l). \quad (70)
\end{aligned}$$

Alkalmazva az egyenlőséget a (68) és (70) között a  $(x_1 + \xi, \dots, x_l + \xi; u_1, \dots, u_l)$  pontban, majd  $\xi$  szerint kiintegrálva a (66)-ot kapjuk eredményül. Kombinálva a (67)-t és a (62)-t, megkapjuk a (46)-ot:

$$\pi_k(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l) = I\{(x_1, \dots, x_l; u_1, \dots, u_l)\} \cdot w\lambda^k \cdot \prod_{i=1}^l g(u_i) \cdot e^{-n\mu(u_1-x_1)}$$

Végezetül integráljuk ki a (46)-ot, hogy megkapjuk a rendszerben tartózkodó igények

számának eloszlását  $k > n$  esetén. Legyen  $u_i = \xi_i + x_i$ , ekkor a levezetés a következő:

$$\begin{aligned}
\pi_k &= w\lambda^k \int_{R_+^{2l}} I\{\xi_1 \geq \dots \geq \xi_l\} \cdot \left[ \prod_{i=1}^l g(\xi_i + x_i) \right] e^{-n\mu\xi_1} dx_1 \dots dx_l d\xi_1 \dots d\xi_l \\
&= w\lambda^k \int_{R_+^{2l}} I\{\xi_1 \geq \dots \geq \xi_l\} \cdot \left[ \prod_{i=1}^l G(\xi_i) \right] e^{-n\mu\xi_1} d\xi_1 \dots d\xi_l \\
&= w\lambda^k \int_0^\infty e^{-n\mu\xi_1} \cdot \frac{1}{(l-1)!} \left[ \int_0^{\xi_1} G(\eta) d\eta \right]^{l-1} G(\xi_1) d\xi_1 \\
&= \frac{w\lambda^k}{l!} \int_0^\infty e^{-n\mu\xi_1} \cdot \frac{d}{d\xi_1} \left\{ \left[ \int_0^{\xi_1} G(\eta) d\eta \right]^l \right\} d\xi_1 \\
&= w\lambda^k \frac{n\mu}{l!} \int_0^\infty e^{-n\mu\xi_1} \cdot \left[ \int_0^{\xi_1} G(\eta) d\eta \right]^l d\xi_1 \\
&\quad (\text{legyen } \xi \triangleq n\mu\xi_1 \text{ és } l = k - n) \\
&= \frac{w\lambda^k}{(k-n)!} \int_0^\infty e^{-\xi} \cdot \left[ \int_0^{\xi/(n\mu)} G(\eta) d\eta \right]^{k-n} d\xi \\
&= \frac{w\lambda^k}{(k-n)!} \int_0^\infty e^{-\xi} [F(\xi)]^{k-n} d\xi = w\lambda^k F_{k-n},
\end{aligned}$$

így megkaptuk a (42)-t.

### 3.3. Az M/M/n+G rendszer jellemzőinek rövid áttekintése

Ebben a részben összegezném az M/M/n+G rendszer egzakt formuláit. Ezen definíciók és állítások nagyrésze Baccelli és Herbuterne eredményein [3] alapulnak. A modell négy input paraméterrel rendelkezik:

- $\lambda$  - az érkezési intenzitás
- $\mu$ - a kiszolgálási intenzitás
- $n$  - a kiszolgálók száma

- G - türelmi idő eloszlása ( $\bar{G}$  - megbízhatósági függvény)

A rendszer jellemzők leírásához szükségünk van a következő építőkövekre: legyen  $H(x) \triangleq \int_0^x \bar{G}(u)du$ .  $H(\infty) = \bar{\tau}$ , ahol  $\bar{\tau}$  az átlagos türelmi idő.

- Vezessük be

$$J \triangleq \int_0^\infty \exp\{\lambda H(x) - n\mu x\} dx, \quad (71)$$

$$J_1 \triangleq \int_0^\infty x \cdot \exp\{\lambda H(x) - n\mu x\} dx, \quad (72)$$

$$J_H \triangleq \int_0^\infty H(x) \cdot \exp\{\lambda H(x) - n\mu x\} dx, \quad (73)$$

$$J(t) \triangleq \int_t^\infty \exp\{\lambda H(x) - n\mu x\} dx, \quad (74)$$

$$J_1(t) \triangleq \int_t^\infty x \cdot \exp\{\lambda H(x) - n\mu x\} dx, \quad (75)$$

$$J_H(t) \triangleq \int_t^\infty H(x) \cdot \exp\{\lambda H(x) - n\mu x\} dx, \quad (76)$$

- Végül legyen

$$\epsilon \triangleq \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}} = \int_0^\infty e^{-t} \left(1 + \frac{t\mu}{\lambda}\right)^{n-1} dt. \quad (77)$$

- rekurzió használatával  $\epsilon$  számolását megkönnyíthetjük. Legyen

$$\epsilon_k \triangleq \frac{\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}, \quad k \geq 0,$$

és a rekurzió

$$\epsilon_0 = 1; \quad \epsilon_k = 1 + \frac{k\mu}{\lambda} \cdot \epsilon_{k-1}; \quad \epsilon = \epsilon_{n-1}.$$

## A rendszer jellemzők listája

Sok fontos rendszer jellemző könnyen kifejezhető a fent említett építőkövek segítségével. Ehhez az alábbi jelöléseket használjuk:

- $P\{Ab\}$  - az elhagyás valószínűsége
- $P\{Sr\}$  - a kiszolgálás valószínűsége
- $Q$  - a sorhossz
- $W$  - a várakozási idő
- $V$  - az ajánlott várakozás (az az idő, amit az ügyfélnek várakoznia kell, feltéve, hogy nem hagyja el a türelme)

Ekkor

$$P\{V > 0\} = \frac{\lambda J}{\epsilon + \lambda J}, \quad (78)$$

$$P\{W > 0\} = \frac{\lambda J}{\epsilon + \lambda J} \cdot \bar{G}(0), \quad (79)$$

$$P\{Ab\} = \frac{1 + (\lambda - n\mu)J}{\epsilon + \lambda J}, \quad (80)$$

$$P\{Ab|V > 0\} = \frac{1 + (\lambda - n\mu)J}{\lambda J}, \quad (81)$$

$$P\{Sr\} = \frac{\epsilon + n\mu J - 1}{\epsilon + \lambda J}, \quad (82)$$

$$E[V] = \frac{\lambda J_1}{\epsilon + \lambda J}, \quad (83)$$

$$E[V|V > 0] = \frac{J_1}{J}, \quad (84)$$

$$E[W] = \frac{\lambda J_H}{\epsilon + \lambda J}, \quad (85)$$

$$E[Q] = \frac{\lambda^2 J_H}{\epsilon + \lambda J}, \quad (86)$$

$$E[V|Ab] = \frac{(\lambda - n\mu)J_1 + J}{(\lambda - n\mu)J + 1}, \quad (87)$$

$$E[W|Ab] = \frac{J + \lambda J_H - n\mu J_1}{(\lambda - n\mu)J + 1}, \quad (88)$$

$$E[V|Sr] = E[W|Sr] = \frac{n\mu J_1 - J}{\epsilon + n\mu J - 1}, \quad (89)$$

$$P\{V > t\} = \frac{\lambda J(t)}{\epsilon + \lambda J}, \quad (90)$$

$$P\{W > t\} = \frac{\lambda \bar{G}(t) J(t)}{\epsilon + \lambda J}, \quad (91)$$

$$E[V|V > t] = \frac{J_1(t)}{J(t)}, \quad (92)$$

$$E[W|W > t] = \frac{J_H(t) - (H(t) - t\bar{G}(t)) \cdot J(t)}{\bar{G}(t)J(t)}, \quad (93)$$

$$P\{Ab|V > t\} = \frac{\lambda - n\mu}{\lambda} + \frac{\exp\{\lambda H(t) - n\mu t\}}{\lambda J(t)}, \quad (94)$$

$$P\{Ab|W > t\} = \frac{\lambda - n\mu - G(t)}{\lambda \bar{G}(t)} + \frac{\exp\{\lambda H(t) - n\mu t\}}{\lambda \bar{G}(t) J(t)}. \quad (95)$$

A fenti lista tartalmazza a  $P\{Ab\}$ ,  $P\{W > t\}$  és  $P\{Ab|W > t\}$  kifejezéseket. Ezek közül az utolsó kettő kiszámolható a  $P\{W > t; Ab\}$  segítségével. A másik három rendszer jellemző pedig könnyen kiszámítható. Például:

$$P\{W > t; Sr\} = P\{W > t\} - P\{W > t; Ab\}.$$

### 3.4. Milyen kapcsolatban áll az Erlang C és az Erlang B modellekkel

Tudjuk, hogy az M/M/n modell megegyezik az M/M/n+G modellel, végtelen hosszú türelmi idő esetén. Azaz  $\bar{G}(x) = 1$  és  $H(x) = x$ ,  $0 \leq x < \infty$  esetén. A  $V$  és a  $W = \min(V, \infty)$  azonosak. Az építőkövek a fenti képletek alapján :

$$J = \frac{1}{n\mu - \lambda},$$

$$J_1 = J_H = \frac{1}{(n\mu - \lambda)^2},$$

$$J(t) = \frac{e^{-(n\mu - \lambda)t}}{n\mu - \lambda},$$

$$J_1(t) = J_H(t) = \frac{e^{-(n\mu - \lambda)t}}{n\mu - \lambda} \cdot [1 + (n\mu - \lambda)t].$$

Az  $\epsilon$ -nal jelölt kifejezés megegyezik a (77)-tel. Ha behelyettesítjük ezen építőköveket a megfelelő képletekbe (78)-(95), akkor megkapjuk az Erlang-C modell jól ismert képleteit, ahol jelölje a kihasználtsági tényezőt  $\rho$ :

$$\rho \triangleq \frac{\lambda}{n\mu}.$$

Az így kapott képletek:

$$P\{W > 1\} = \frac{\rho}{\rho + (1 - \rho)\epsilon}, \quad (96)$$

$$E[W|W > 0] = \frac{1}{n\mu - \lambda}, \quad (97)$$

$$P\{W > t|W > 0\} = e^{-(n\mu - \lambda)t},$$

$$E[W|W > t] = t + \frac{1}{n\mu - \lambda}.$$

Az M/M/n/n modell egy olyan M/M/n+G modellnek feleltethető meg, ahol az ügyfelek egyáltalán nem fognak várakozni, ugyanis csak annyi ügyfél van a rendszerben, mint amennyi kiszolgáló. Ha nincs szabad kiszolgáló, akkor az újonnan érkező igény elveszlik. Ekkor  $H(x) \equiv 0$  és csak egyetlen építőköre van szükség, ami a

$$J = \frac{1}{n\mu},$$

és

$$P\{W > 0\} = P\{\text{igényvesztés}\}_{M/M/n/n} = \frac{\rho}{\rho + \epsilon}. \quad (98)$$

Az így kapott formula megegyezik a klasszikus Erlang-B formulával:

$$P\{\text{igényvesztés}\}_{M/M/n/n} = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}{\sum_{j=0}^n \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}$$

### 3.5. Kapcsolat az Erlang-A rendszerrel

Ebben az esetben a türelmi időközök exponenciális eloszlású valószínűségi változók  $\theta$  paraméterrel. Ekkor

$$H(x) = \frac{1}{\rho} \cdot (1 - e^{-\theta x}),$$

és a négy építőkö a következő:

$$J = \frac{\exp\left\{\frac{\lambda}{\theta}\right\}}{\theta} \cdot \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^{\frac{n\mu}{\theta}} \cdot \gamma\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}\right),$$

$$J(t) = \frac{\exp\left\{\frac{\lambda}{\theta}\right\}}{\theta} \cdot \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^{\frac{n\mu}{\theta}} \cdot \gamma\left(\frac{n\mu}{\theta}, \frac{\lambda}{\theta}e^{-\theta t}\right),$$

$$J_H = \frac{J}{\theta} - \frac{\exp\left\{\frac{\lambda}{\theta}\right\}}{\theta^2} \cdot \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^{\frac{n\mu}{\theta}+1} \cdot \gamma\left(\frac{n\mu}{\theta} + 1, \frac{\lambda}{\theta}\right),$$

$$J_H(t) = \frac{J(t)}{\theta} - \frac{\exp\left\{\frac{\lambda}{\theta}\right\}}{\theta^2} \cdot \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^{\frac{n\mu}{\theta}+1} \cdot \gamma\left(\frac{n\mu}{\theta} + 1, \frac{\lambda}{\theta}e^{-\theta t}\right),$$

ahol a  $\gamma(x, y)$  a csonkított Gamma függvény, ami megegyezik a (7)-el. Meg kell jegyezni, hogy a  $J_1$  és  $J_1(t)$  nem fejezhető ki a csonkított Gamma függvény segítségével, ezért azokat a formulákat (78)-(95), amelyek magukba foglalják  $J_1$ -et, vagy numerikusan, vagy valamilyen approximációs módszerrel lehet megoldani.

### 3.6. Kapcsolat az M/M/n+D modellel

Az M/M/n+G rendszer egy speciális esete az M/M/n+D, ahol a türelmi idő egy konstans  $D$  érték ( $D$ = deterministic). Ekkor

$$H(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq D \\ D & , x > D \end{cases}$$

Ha  $\lambda - n\mu \neq 0$ ,

$$J = \frac{1}{n\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{n\mu(n\mu - \lambda)} \cdot e^{-(n\mu - \lambda)D},$$

$$J(t) = \begin{cases} \frac{1}{n\mu - \lambda} \cdot e^{-(n\mu - \lambda)t} - \frac{\lambda}{n\mu(n\mu - \lambda)} \cdot e^{-(n\mu - \lambda)D} & , t < D \\ \frac{1}{n\mu} \cdot e^{\lambda D - n\mu t} & , t \geq D \end{cases}$$

$$J_1 = \frac{1}{(n\mu - \lambda)^2} - \left[ \frac{1}{(n\mu - \lambda)^2} - \frac{1}{(n\mu)^2} + \frac{\lambda D}{n\mu(n\mu - \lambda)} \right] \cdot e^{-(n\mu - \lambda)D},$$

$$J_1(t) = \begin{cases} \frac{e^{-(n\mu-\lambda)t} - e^{-(n\mu-\lambda)D}}{(n\mu-\lambda)^2} + \frac{te^{-(n\mu-\lambda)t} - De^{-(n\mu-\lambda)D}}{n\mu-\lambda} + \left[ \frac{D}{n\mu} + \frac{1}{(n\mu)^2} \right] \cdot e^{-(n\mu-\lambda)D} & , t < D \\ \left[ \frac{t}{n\mu} + \frac{1}{(n\mu)^2} \right] \cdot e^{\lambda D - n\mu t} & , t \geq D \end{cases}$$

$$J_H = \frac{1}{(n\mu - \lambda)^2} - [1 - e^{-(n\mu-\lambda)D}] - \frac{\lambda D}{n\mu(n\mu - \lambda)} \cdot e^{-(n\mu-\lambda)D},$$

$$J_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{(n\mu-\lambda)^2} \cdot [e^{-(n\mu-\lambda)t} - e^{-(n\mu-\lambda)D}] + \frac{t}{n\mu-\lambda} \cdot e^{-(n\mu-\lambda)t} - \frac{\lambda D}{n\mu(n\mu-\lambda)} \cdot e^{-(n\mu-\lambda)D} & , t < D \\ \frac{D}{n\mu} \cdot e^{\lambda D - n\mu t} & , t \geq D \end{cases}$$

Ha  $\lambda - n\mu = 0$ ,

$$J = D + \frac{1}{n\mu},$$

$$J(t) = \begin{cases} D - t + \frac{1}{n\mu} & , t < D \\ \frac{1}{n\mu} \cdot e^{\lambda D - n\mu t} & , t \geq D \end{cases},$$

$$J_1 = \frac{D^2}{2} + \frac{D}{n\mu} + \frac{1}{(n\mu)^2},$$

$$J_1(t) = \begin{cases} \frac{D^2 - t^2}{2} + \left[ \frac{D}{n\mu} + \frac{1}{(n\mu)^2} \right] \cdot e^{-(n\mu-\lambda)D} & , t < D \\ \left[ \frac{t}{n\mu} + \frac{1}{(n\mu)^2} \right] \cdot e^{\lambda D - n\mu t} & , t \geq D \end{cases},$$

$$J_H = \frac{D^2}{2} + \frac{D}{n\mu},$$

$$J_H(t) = \begin{cases} \frac{D^2 - t^2}{2} + \frac{D}{n\mu} & , t < D \\ \frac{D}{n\mu} \cdot e^{\lambda D - n\mu t} & , t \geq D \end{cases},$$

(A modellt Gnedenko és Kovalenko [6] vizsgálta.)

## 4. fejezet

# Approximációs megoldások

Igaz az Erlang-A és az M/M/n+G modellek vizsgálata során pontos képleteket határoztunk meg, azonban ezek mégis túl bonyolultak ahhoz, hogy fejlesztési irányelvként szolgáljanak a call center managerek számára. Ezen formulákkal nem lehet olyan kérdéseket megválaszolni, mint "Hány darab további kiszolgálóra lesz szükségem, ha az érkezési intenzitás megduplázódik?" vagy "Mennyire érzékeny a modell ha véletlenül bekövetkezik egy hiba a türelmi idő becslésekor?", stb.

Most az egyensúlyi közelítésekről lesz szó, kihangsúlyozzuk ezek közül az *Efficiency-Driven(ED)* azaz hatékonyság vezérelt, *Quality-Driven (QE)*, vagyis minőség vezérelt és a kettő keverékét a *Quality-Efficiency-Driven(QED)* approximációkat.

### 4.1. A klasszikus approximáció figyelmen kívül hagyva az elhagyást

A modell vizsgálata során olyan call centereket tekintünk, ahol sok kiszolgáló várja a hívásokat, valamint a számítások elvégzéséhez feltesszük, hogy a kiszolgálók száma  $n$  és a  $\lambda$  érkezési intenzitás végtelenhez tart.

Ekkor tekintsük példának az Erlang-C rendszer erős forgalmi korlátozásának egy olyan esetét, ahol rögzítjük a  $\mu$  kiszolgálási intenzitást, valamint az érkezési intenzitás  $\lambda \rightarrow \infty$ , és tegyük fel, hogy

$$n = R + \gamma, (99)$$

ahol  $R = \lambda/\mu$  a kihasználtsági tényező,  $\gamma > 0$  a szolgáltatás minőségét leíró paraméter.

Bebizonyították, hogy

- A várakozási idő valószínűsége  $P\{W > 0\}$  tart az egyhez.
- a kiszolgálók kihasználtsága  $\rho$  tart az egyhez, mivel  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} n(1 - \rho) = \gamma$ .
- egyensúlyi állapotban a várakozási idő megközelítőleg exponenciális eloszlású  $\gamma\mu$  paraméterrel.

A (99)-es formula olyan alkalmazotti szintet ír le, ami a hatékonyság vezérelt működési elvű rendszer egy példája.

A következő fontos közelítési módszert először Iglehart [7] mutatta be, aki egy olyan G/G/n rendszert vizsgált, ahol a  $\mu$  rögzített,  $\lambda \rightarrow \infty$  és feltesszük, hogy teljesül az alábbi összefüggés:

$$n = R \cdot (1 + \gamma) = R + \gamma R. \quad (100)$$

Ekkor

- a várakozási idő és az átlagos várakozási idő tart a nullához.
- a kiszolgálók kihasználtsága konvergál az  $\frac{1}{1+\gamma}$ -hoz.
- stacionárius állapotban a rendszerben tartózkodó igények számának eloszlása megközelítőleg normális eloszlású,  $R$  várhatóértékkel és  $\sqrt{R}$  szórással.

Az utóbbi approximáció a minőség vezérelt működési elvű rendszerekre vonatkozik, és különösen magas teljesítmény szint elérésére ad lehetőséget.

## 4.2. QED közelítés figyelmen kívül hagyva az elhagyást

A QED rendszer formális leírása és vizsgálata Halfin és Whitt [8] nevéhez fűződik, akik ezen vizsgálatokat az Erlang-C modellre vonatkozóan végezték el. Ez azt jelentette, hogy rögzítették a kiszolgálási intenzitást  $\mu$ -t, és feltételezték, hogy  $\lambda, n \rightarrow \infty$ . Ekkor a következő három aszimptotikus állítás egyenértékű:

- *négyzetgyök* szabály a kiszolgálók számának meghatározására:

$$n = R + \beta\sqrt{R} + o(\sqrt{R}), \quad \beta > 0, \quad (101)$$

ahol  $\beta$  a kiszolgálás foka,

- a kiszolgálók kihasználtsága  $\rho$  tart az egyhez, vagy még pontosabban

$$\sqrt{n} \cdot (1 - \rho) \rightarrow \beta. \quad (102)$$

- a várakozási idő valószínűsége tart egy konstans értékhez:

$$P\{W > 0\} \rightarrow \alpha(\beta) \triangleq \left[1 + \frac{\beta}{h(-\beta)}\right]^{-1}, \quad (103)$$

ahol  $h(\cdot)$  a normális eloszlás kockázati tényezője (hibaszázalék).

Továbbá a négyzetgyök szabálynak köszönhetően M/M/n rendszer esetén megkapunk további két közelítést a várakozási időre vonatkozóan:

$$E[W] \sim \frac{\alpha(\beta)}{\mu\beta\sqrt{R}} \sim \frac{\alpha(\beta)}{\mu\beta\sqrt{n}}, \quad (104)$$

$$P\{W > t\} \sim \alpha(\beta) \cdot e^{-t\beta\mu\sqrt{R}}. \quad (105)$$

A (102)-(104) összefüggésekről azt lehet elmondani, hogy megegyeznek a QED rendszer egy közvetlen leírásával: magas kihasználtság, a várakozás valószínűsége nem esik közel se nullához se egyhez, és végül az átlagos várakozási idő tart a nullához.

A QED rendszer vizsgálatát Erlang-B (M/M/n/n) modell esetén Jagerman [9] valósította meg. Megmutatta, hogy a (101)-re az igényvesztés valószínűsége  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  nagyságrendű:

$$E_{1,n} \triangleq P\{\text{igényvesztés}\} \approx \frac{h(-\beta)}{\sqrt{n}}, \quad -\infty < \beta < \infty. \quad (106)$$

### 4.3. Közelítések Erlang-A modell esetén

Az első alapvető modell, ami számításba veszi az elhagyást, az az Erlang-A (M/M/n+M). A modellre vonatkozóan Garnett, Mandelbaum és Reiman [10] QED közelítéseket fejlesztettek ki, melyek a következők:

- Négyzetgyök szabály a kiszolgálók számának meghatározására:

$$n = R + \beta\sqrt{R} + o(\sqrt{R}), \quad -\infty < \beta < \infty \quad (107)$$

(Megjegyzendő, hogy  $\beta$  a szolgáltatás fokát írja le, negatív értéket is felvehet, mivel az elhagyás stabilizálja a rendszert minden alkalmazotti szint mellett)

- a várakozási idő valószínűsége egy konstans értékhez konvergál:

$$P\{W > 0\} \sim \left[ 1 + \frac{h(\beta\sqrt{\frac{\mu}{\theta}})}{h(-\beta)\sqrt{\frac{\mu}{\theta}}} \right]^{-1}, \quad (108)$$

ahol  $\theta$  az egyéni elhagyási intenzitás.

- Az elhagyás valószínűsége  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  nagyságrendű:

$$P\{Ab\} \sim \frac{\delta}{\sqrt{n}},$$

ahol  $\delta > 0$  ami függ a  $\beta$  és a  $\frac{\mu}{\theta}$  aránytól.

- Egy kiszolgáló közelítő kihasználtsági tényezője:

$$\rho = \Delta \frac{\lambda}{n\mu} \approx 1 - \frac{\beta + \delta}{\sqrt{n}}.$$

## 5. fejezet

# M/M/n+G modell statisztikai háttere

Ahhoz, hogy a modellt a call centerek vizsgálatához is alkalmazni tudjuk fontos, hogy meg tudjuk becsülni a modell paramétereit, azaz a  $\lambda$ -t,  $\mu$ -t és az  $n$ -t. Ezek becslése általában a naplózott ACD adatokon alapulnak.

### 5.1. Az érkezési intenzitás becslése

Feltesszük, hogy a bejövő hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, ahol az érkezési intenzitások időben változnak. A célunk, hogy ezeket az érkezési intenzitásokat megbecsüljük. Ehhez olyan rövid időintervallumokat (15, 30 perc, esetleg 1 óra) választunk, melyekre már igaz, hogy egy intervalum alatt az intenzitások megközelítőleg állandóak.

Célunkat két lépcsőben érhetjük el. Az első az az, hogy idősoros (Time-series) algoritmusokat használva előre megjósoljuk a napi mennyiséget, figyelembe véve a tendenciákat és a speciális napokat (például szabadság, hétfő, kiárusítás, stb.). A második, hogy valamilyen (nem) paraméteres regressziós technikát használunk az időegységre jutó és a napi összes hívás hányadosának becsléséhez. Ha ezt az arányt kombináljuk az egész napival, akkor megkapjuk a tényleges érkezési intenzitásokat.

### 5.2. Az átlagos kiszolgálási idő becslése

A kiszolgálási időközökről feltételezzük, hogy exponenciális eloszlásúak. Az átlagos kiszolgálási idők viszonylag stabilnak tekinthetők napról napra, óráról órára. A gyakorlatban a kiszolgálásnak különböző fázisai vannak, mint a beszéd idő, rövid összefoglaló

készítése (hívás utáni munka), és amit csak úgy emlegetünk, hogy tartalék idő. Továbbá a "szabad idő", amikor egy ügyintéző közvetlenül elérhető. Ezután már lehetőségünk van az átlagos kiszolgálási idő meghatározására egy időintervallum alatt:

$$\frac{\text{teljes munka idő} - \text{teljes szabad idő}}{\text{a kiszolgált ügyfelek száma}},$$

ahol a teljes munka idő az ügyintézők számának mennyisége az intervallum alatt.

### 5.3. Az ügyintézők számának beclése

Az ügyintézők száma az M/M/n+G modell esetén egy input adat, a létszámszint szempontjából pedig egy kimeneti adatként szolgál. Éppen ezért n-et mindkét esetben normalizálni kell a sorrendi személyzeti tényezővel (RSF) vagy a csökkenési tényezővel, ami nyilván tartja a lógásokat és a nem tervezett szüneteket is. Ha például 100 ügyintéző szükséges a hívások fogadására, akkor ténylegesen ettől több embernek kell dolgozni egy műszakban (110, 120, ...) az RSF-től függően. Emellett alaposan ellenőrizni kell azt is, hogy az ACD által szolgáltatott létszámszintet leíró adatok helytállóak-e. Különösen fontos, hogy ezek az adatok a kiszolgálók tervezett vagy valós számát tükrözik-e. Egy másik kérdés, hogy az ACD számításba veszi-e az ügyintézők ütemezett és nem ütemezett szüneteit?

### 5.4. A türelmi idő eloszlásának beclése

- az érkező ügyfél  $\tau$  türelmi idővel rendelkezik. A türelmi idők G-eloszlásúak.
- az érkező ügyfél  $V$  ajánlott várakozási idővel rendelkezik.
- az ügyfél tényleges várakozási ideje  $W = \min(\tau, V)$ .
- ha  $\tau \leq V$ , akkor az ügyfél elhagyja a rendszert különben kiszolgálják.

Most csak azon ügyfelek türelmi idejére figyelünk, akik elhagyják a sort. Ha az ügyfelet kiszolgálják, akkor arra következtetünk, hogy a  $\tau$  türelmi idő nagyobb, mint a valós várakozási idő  $W$ .

**Kaplan-Meier becslés:** minden hívó esetén két dologra kell odafigyelni. Az egyik a várakozási idő, amit másodpercekben fejezünk ki  $(0,1,2,\dots)$ , a másik, hogy a hívó milyen módon távozik (kiszolgálják, vagy nincs türelme kivárni, hogy sorra kerüljön, ezért elhagyja a rendszert). Tegyük fel, hogy a hívások egy mintáját vizsgáljuk, melyek a minta felett ugyanolyan türelmi eloszlással rendelkeznek. Jelölje  $A_k$  azon ügyfelek számát, akik kilépnek a sorból, illetve  $S_k$  pontosan a  $k$ -adik másodpercben megkezdett kiszolgálások számát. Legyen  $\eta_k$  azoknak az ügyfeleknek a száma, akik se nem kerülnek kiszolgálásra, se nem hagyják el a sort a  $k$ -adik másodperc előtt.

Ezután a diszkrét kockázati tényező nemparaméteres Maximum-Likelihood becslése a következő képlettel adható meg:

$$\hat{h}_k = \frac{A_k}{\eta_k}, \quad k \geq 0. \quad (109)$$

A türelmi idők túlélési függvényének Kaplan-Meier becslése :

$$\hat{G}(t) = \prod_{k \geq t} (1 - \hat{h}_k), \quad t \geq 0. \quad (110)$$

A Greenwood formula a túlélési függvény szórásnégyzetének közelítését adja:

$$Var[\hat{G}(t)] = [\hat{G}(t)]^2 \cdot \sum_{k \leq t} \frac{A_k}{\eta_k(\eta_k - A_k)}. \quad (111)$$

**Biztosítás-matematikai becslés:** A gyakorlatban a türelmi és a várakozási idők inkább folytonos, mint sem diszkrét eloszlásúak. Az adatbázisban egy  $T > 0$  egész típusú várakozási idő megfelel egy körülbelüli kerekített várakozási időnek a  $(T - 0.5, T + 0.5)$  intervallumon. Ezért szükséges változtatni a diszkrét Kaplan-Meier becslés előfeltételein. Tegyük fel, hogy a türelmi idők eloszlása folytonos, szakaszosan konstans kockázati tényezővel. Jelölje a kockázati tényezőt  $h_j$  az  $[a_{j-1}, a_j)$ ,  $j \geq 1$  intervallumok felett, azzal a megszorítással, hogy  $a_0 = 0$  és  $a_0 < a_1 < a_2 \dots$ . Legyen az intervallumok hossza

$$b_j \triangleq a_j - a_{j-1}.$$

Ezen feltételek mellett a (109)-(111) formulákat a következőképpen kell módosítani:

$$\hat{h}_k = \frac{A_k}{b_k(\eta_{k-1} - 0.5 \cdot (S_k + A_k))}, \quad k \geq 1. \quad (112)$$

$$\hat{G}(a_j) = \prod_{k \geq t} \left(1 - \frac{A_k}{\eta'_k}\right), \quad j \geq 1. \quad (113)$$

$$Var[\hat{G}(a_j)] = [\hat{G}(a_j)]^2 \cdot \frac{A_k}{\eta'_k(\eta'_k - S_k)}, \quad j \geq 1, \quad (114)$$

ahol

$$\eta'_k \triangleq \eta_{k-1} - \frac{1}{2}S_k$$

az  $[a_{j-1}, a_j)$  intervallumon beállított kockázati érték. A (113)-as becslés a megbízhatósági függvény biztosítás-matematikai becslése.

**Az egyéni elhagyási intenzitás becslése az Erlang A modell esetén:** Ha a türelmi időt exponenciális eloszlásúnak feltételezzük, használhatjuk a (20)-as relációt a  $\theta$ -val jelölt egyéni elhagyási intenzitás becslésére. Az  $E[W]$  átlagos sorbanállási idő, és az ügyfelek távozásának valószínűségei,  $P\{Ab\}$ , valójában szabványos ACD outputok, ennél fogva a következő módon adják a  $\theta$  becsült értékét:

$$\hat{\theta} = \frac{P\{Ab\}}{E[W]} = \frac{\text{elhagyás valószínűsége}}{\text{átlagos várakozási idő}}.$$

## 5.5. Az integrálok aszimptotikája

### Laplace transzformált

A (71)-(77)-es integrálok aszimptotikus közelítésére szolgál a következő formula:

$$\int_0^{\infty} x^m \cdot e^{-f_\lambda(x)} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (115)$$

Rendszerint igaz az, hogy  $f_\lambda(0) = 0$ , minden  $\lambda > 0$  esetén, és  $f_\lambda(x) \rightarrow \infty$ , ha  $\lambda \rightarrow \infty$ , minden  $x > 0$  esetén. Továbbá az exponenciális kifejezés gyorsan tart nullához, ha  $x > 0$ . Ezután elvárható, hogy  $\lambda \rightarrow \infty$ , a (115)-ös kifejezés értéke elsősorban az integrálandó függvény viselkedésétől függjön az origóban.

Egy fontos speciális esetet ír le az alábbi:

$$\int_0^{\infty} x^m \cdot \exp\{-b\lambda^k x^l\} = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{l})}{lb^{\frac{m+1}{l}}} \cdot \lambda^{-\frac{k(m+1)}{l}}, \quad (116)$$

ahol  $k \geq 0, l > 0, b > 0$  és  $m \geq 0$ . Ha  $m = 0$ , akkor azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty x^m \cdot \exp\{-b\lambda^k x^l\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{l})}{lb^{\frac{1}{l}}} \cdot \lambda^{-k/l}, \quad (117)$$

Azonban a (115) értéke általában nem számolható ki analitikus eszközökkel, ezért meghatározásához valamilyen approximációs eszközt használunk. Ehhez be kell látni, hogy

$$\int_\delta^\infty x^m \cdot e^{-f_\lambda(x)} dx$$

elhanyagolható bármely  $\delta > 0$  esetén (a  $\delta$  értéke függhet  $\lambda$ -tól). Ezután alkalmazva a Taylor sorfejtést az origó körül és a (116)-(117) formulákat, az  $\int_0^\delta x^m \cdot e^{-f_\lambda(x)} dx$  approximál.

### Közelítő eredmények

**Lemma 1:** Legyenek  $b_1, k_1, l_1, l_2$  pozitív és  $b_2, k_2, m$  nem negatív számok. Tegyük fel, hogy  $l_1, l_2$  egész számok. Tekintsünk egy  $r_1 = \{r_1(\lambda), \lambda > 0\}$  függvényt, melyre igaz, hogy  $r_1(\lambda) \sim \lambda^{k_1}, \lambda \rightarrow \infty$ . Végül tegyük fel, hogy

$$\frac{k_1}{l_1} > \frac{k_2}{l_2}, \quad (118)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^m \cdot \exp\{-b_1 r_1(\lambda) x^{l_1} - b_2 \lambda^{k_2} x^{l_2}\} dx \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{l_1}\right)}{l_1 b_1^{\frac{m+1}{l_1}}} \cdot \lambda^{-\frac{k_1(m+1)}{l_1}} + o\left(\lambda^{-\frac{k_1(m+1)}{l_1}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (119)$$

és

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^m \cdot \exp\{-b_1 r_1(\lambda) x^{l_1} - b_2 \lambda^{k_2} x^{l_2}\} dx \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{l_1}\right)}{l_1 [b_1 r_1(\lambda)]^{\frac{m+1}{l_1}}} - \frac{b_2 \Gamma\left(\frac{m+l_2+1}{l_1}\right)}{l_1 b_1^{\frac{m+l_2+1}{l_1}}} \cdot \lambda^{k_2 - \frac{k_1(m+l_2+1)}{l_1}} + o\left(\lambda^{k_2 - \frac{k_1(m+l_2+1)}{l_1}}\right), \end{aligned}$$

**Lemma 2:** A (1)-es Lemma feltételein kívül legyen  $k_1 > k_2$  és feltesszük, hogy

$r_2 = \{r_2(\lambda) \mid \lambda > 0\}$  kielégíti az  $r_2(\lambda) = o(\lambda^{k_2})$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ . Ekkor

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^m \cdot \exp\{-b_1 r_1(\lambda) x^{l_1} - b_2 r_2(\lambda) x^{l_2}\} dx \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{l_1}\right)}{l_1 b_1^{\frac{m+1}{l_1}}} \cdot \lambda^{-\frac{k_1(m+1)}{l_1}} + o\left(\lambda^{-\frac{k_1(m+1)}{l_1}}\right), \end{aligned} \quad (120)$$

**Lemma 3:** Legyen  $b, k, l, \delta > 0$ ,  $m \geq 0$  egész, és  $-\infty < n < \infty$ . Tegyük fel, hogy  $r(\lambda) \sim \lambda^k$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ . Definiáljunk egy

$$S(\lambda) \triangleq \int_{\delta \lambda^n}^\infty x^m \cdot \exp\{-br(\lambda)x^l\} dx, \quad \lambda > 0,$$

és tegyük fel, hogy

$$nl + k > 0. \quad (121)$$

Ekkor létezik olyan  $v > 0$ , hogy

$$S(\lambda) = o(e^{-\lambda^v}). \quad (122)$$

## 6. fejezet

# Újabb gyakorlati eredmények

### A türelmi idő által előidézett rendezési relációk a rendszer jellemzőkre vonatkozóan

Adott a következő probléma. Rögzítsük az  $M/M/n+G$  modell  $\lambda$ ,  $\mu$  és  $n$  paramétereit. Így csak a  $G$  türelmi idő eloszlásán tudunk változtatni. A kérdés az, hogy lehet-e a modell különböző rendszer jellemzőit valamilyen reláció segítségével származtatni? Létezik-e olyan eloszlás, ami ezen rendszer jellemzők maximumát vagy minimumát adják meg?

Ezek a problémák valójában fontosak. Például olyan esetben, amikor a maximális várakozási idő nem csak az ügyféltől, hanem a rendszer kezelőjétől is függ. Vagy ha túlsordulás következik be, amikor egy ügyfél érkezik, és a sorban való várakozás folyamán átirányítják egy másik erőforráshoz, például, egy szabad kiszolgálóhoz, esetleg egy másik sorba, vagy a VRU-hoz (Voice Response Unit). A valós idejű kommunikációs rendszerek protokolljai ezért már figyelmet szentelnek a sorokban való maximális várakozási időre, mint idő korlátra.

A következő állítások megpróbálnak választ adni a fenti kérdéseinkre.

**Lemma 4:** Tekintsük egy  $M/M/n+G$  rendszer rögzített  $\lambda$ ,  $\mu$  és  $n$  paramétereit. Legyen  $G_1$  és  $G_2$  a türelmi idő két eloszlása. Tegyük fel, hogy igaz az

$$\int_0^x \bar{G}_1(\eta) d\eta \geq \int_0^x \bar{G}_2(\eta) d\eta \quad (123)$$

egyenlőtlenség, minden  $x > 0$  esetén, ahol  $\bar{G}_1$  és  $\bar{G}_2$  a megfelelő megbízhatósági függvények. Legyen  $P^i\{Ab\}$ ,  $P^i\{Ab|V > 0\}$ ,  $P^i\{W > 0\}$ ,  $i = 1, 2$  a megfelelő  $M/M/n + G_i$  rendszer stacionárius jellemzője. Ekkor

- a.  $P^1\{V > 0\} \geq P^2\{V > 0\}; P^1\{W > 0\} \geq P^2\{W > 0\}$ .
- b.  $P^1\{Ab\} \leq P^2\{Ab\}; P^1\{Ab|V > 0\} \leq P^2\{Ab|V > 0\}$ .

**Tétel 1:** Tekintsük az M/M/n+G rendszert, ahol rögzítjük a  $\lambda, \mu, n$  és  $\bar{\tau}$  paramétereit, ahol  $\bar{\tau}$  az átlagos türelmi idő. Ekkor a  $G_d$  determinisztikus eloszlás (azaz minden ügyfél pontos  $\bar{\tau}$  időt fog várakozni) a következő jellemzőkkel rendelkezik minden átlagosan  $\bar{\tau}$  várakozási idővel rendelkező türelmi eloszlás esetén.

- a. A determinisztikus eloszlás maximalizálja a várakozás stacionárius valószínűségeit, azaz a  $P\{W > 0\}$  és  $P\{V > 0\}$ -t.
- b. A determinisztikus eloszlás minimalizálja az elhagyás stacionárius valószínűségeit, azaz a  $P\{Ab\}$  és  $P\{Ab|V > 0\}$ -t.
- c. A determinisztikus eloszlás maximalizálja az átlagos várakozási időt egyensúlyi állapotban, azaz az  $E[W]$ -t.
- d. A determinisztikus eloszlás maximalizálja az átlagos sorhosszt egyensúlyi állapotban, azaz az  $E[Q]$ -t.

### Eredmények kis forgalom esetén

Ekkor rögzítjük a  $\mu$ , az  $n$  paramétereit és a  $G$  türelmi idő eloszlását. Próbáljunk meg különböző aszimptotikus formulákat előállítani kicsi  $\lambda$  esetén.

**Lemma 5:** Tekintsük azokat az M/M/n+G rendszereket, ahol a  $\lambda$  érkezési intenzitásán kívül minden paraméter rögzített. Tegyük fel, hogy  $\lambda \rightarrow 0$ . Ekkor

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{P_\lambda\{Ab\}}{E_\lambda[W]} = \alpha_1 \triangleq \frac{1}{\int_0^\infty \bar{G}(x)e^{-n\mu x} dx} - n\mu. \quad (124)$$

Ekkor  $\alpha_1$  egy adott sorban álló ügyfél elhagyási intenzitását adja meg. Továbbá,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P\{Ab|W > 0\} = 1 - n\mu \int_0^\infty \bar{G}(x)e^{-n\mu x} dx = P\{\tau < \exp(n\mu)\}, \quad (125)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E_\lambda[W|W > 0] = \int_0^\infty \bar{G}(x)e^{-n\mu x} dx = E[\tau \wedge \exp(n\mu)], \quad (126)$$

ahol a  $\tau$  türelmi idő független az  $\exp(n\mu)$  valószínűségi változótól.

## 6.1. QED rendszer M/M/n+G modell esetén

### Az eredmények

Tekintsünk egy M/M/n+G rendszert. Rögzítsük a  $\mu$  kiszolgálási intenzitást és a G türelmi eloszlást. Tegyük fel, hogy az érkezési intenzitás  $\lambda \rightarrow \infty$  és a kiszolgálók száma a következőképpen számolható

$$n = \frac{\lambda}{\mu} + \beta \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad -\infty < \beta < \infty, \quad (127)$$

A különböző rendszer jellemzők aszimptotikáit megkapjuk, ha  $\lambda \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Mindezek előtt a (71), (72) és (77)-ben definiált  $J, \epsilon$  és  $J_1$  építőkövek aszimptotikus kifejezéseit kell meghatároznunk, majd a rendszer jellemzőket a (78)-(95) lista formuláinak használatával.

**Lemma 6:** Jelölje a türelmi idő sűrűség függvényét  $g$ , ahol  $g = \{g(x), x \geq 0\}$ . Tegyük fel, hogy ez a függvény létezik az origóban, és értéke  $g(0) \triangleq g_0$  szigorúan pozitív. Ezután a QED működési elvű rendszer esetén, azaz ha  $\lambda \rightarrow \infty$  és  $n$ -et pedig a (127) alapján kiszámoljuk, akkor azt kapjuk, hogy

1.

$$J = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu g_0}} \cdot \frac{1}{h(\hat{\beta})} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (128)$$

ahol

$$\hat{\beta} \triangleq \beta \sqrt{\frac{\mu}{g_0}}. \quad (129)$$

és

$$h(x) = \frac{\phi(x)}{1 - \Phi(x)} = \frac{\phi(x)}{\bar{\Phi}(x)}.$$

a standard normális eloszlás kockázati tényezője ( $\Phi(x)$  a standard normális kumulatív eloszlás függvény,  $\bar{\Phi} = 1 - \Phi$  a megbízhatósági függvény és  $\phi(x) = \Phi'(x)$  a sűrűségfüggvény).

2.

$$\epsilon = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{h(-\beta)} + o(\sqrt{n}). \quad (130)$$

3.

$$J_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mu g_0} \left[ 1 - \frac{\hat{\beta}}{h(\hat{\beta})} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (131)$$

4. legyen

$$J_2 \triangleq \int_0^\infty x^2 \cdot \exp\left\{ \lambda \int_0^x G(u) du - n\mu x \right\} dx. \quad (132)$$

Ekkor

$$J_2 = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1}{(\mu g_0)^{3/2}} \left[ \frac{\hat{\beta}^2 + 1}{h(\hat{\beta})} - \hat{\beta} \right] + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \quad (133)$$

**Tétel 2 (Rendszer jellemzők):**

1. A várakozás valószínűsége egy konstanshoz tart, ami függ a  $\beta$ -tól és a  $\frac{g_0}{\mu}$  hányadostól:

$$P\{W > 0\} \sim \left[ 1 + \sqrt{\frac{g_0}{\mu}} \cdot \frac{h(\hat{\beta})}{h(-\beta)} \right]^{-1}. \quad (134)$$

Továbbá ha  $\lambda \rightarrow \infty$  és  $P\{W > 0\} \rightarrow \alpha$ , ahol  $0 < \alpha < 1$ , akkor

$$n = \frac{\lambda}{\mu} + \beta \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} + o(\sqrt{\lambda}), \quad (135)$$

ahol

$$\alpha = \left[ 1 + \sqrt{\frac{g_0}{\mu}} \cdot \frac{h(\hat{\beta})}{h(-\beta)} \right]^{-1}.$$

2. A várakoztatott ügyfél elhagyási valószínűsége  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  mértékben csökken:

$$P\{Ab|V > 0\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{g_0}{\mu}} \cdot \left[ h(\hat{\beta}) - \hat{\beta} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (136)$$

(A  $P\{Ab\}$  elhagyási valószínűség becsülhető a (134) és (136)-os eredmények szorzatával.)

3. Egy várakoztatott ügyfél átlagos ajánlott várakozási ideje  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  mértékben csökken:

$$E[V|V > 0] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_0\mu}} \cdot \left[ h(\hat{\beta}) - \hat{\beta} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (137)$$

Az átlagos ajánlott várakozási idő  $E[V]$  közelíthető a (134) és (137) szorzatának eredményével.

4. Az átlagos várakozási idő és az átlagos ajánlott várakozási idő kapcsolata:

$$E[W] \sim E[V]; \quad E[W|W > 0] \sim E[V|V > 0]. \quad (138)$$

Továbbá,

$$P[Ab|W > 0] \sim P[Ab|V > 0].$$

5. Az átlagos várakozási idő és az elhagyás valószínűségének hányadosa tart a türelmi idő sűrűség függvényének az origóban felvett (pozitív) értékéhez:

$$\frac{P\{Ab\}}{E[W]} = \frac{P\{Ab|W > 0\}}{E[W|W > 0]} \sim g_0. \quad (139)$$

6. A visszalépő ügyfelek átlagos ajánlott várakozási és átlagos tényleges várakozási idejei  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  mértékben csökkennek:

$$E[V|Ab] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_0\mu}} \left[ \frac{1}{h(\hat{\beta}) - \hat{\beta}} - \hat{\beta} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (140)$$

Továbbá feltételezzük, hogy az átlagos türelmi idő  $\bar{\tau} = E[\tau] < \infty$  és a türelmi időnek létezik folytonos sűrűség függvénye az origóban. Ekkor

$$E[W|Ab] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{g_0\mu}} \left[ \frac{1}{h(\hat{\beta}) - \hat{\beta}} - \hat{\beta} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (141)$$

vagy másképpen,

$$E[W|Ab] \sim \frac{1}{2} \cdot E[V|Ab] \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ezen felül a következő egyenlőtlenség is fennáll:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{h(\hat{\beta}) - \hat{\beta}} - \hat{\beta} \right] < h(\hat{\beta}) - \hat{\beta} < \left[ \frac{1}{h(\hat{\beta}) - \hat{\beta}} - \hat{\beta} \right], \quad -\infty < \hat{\beta} < \infty. \quad (142)$$

A 3-as és a 4-es pont kapcsolatából adódóan a (142) magába foglalja a megfelelő rendezési relációt  $E[W|Ab]$ ,  $E[W|W > 0]$ ,  $E[V|V > 0]$  és  $E[V|Ab]$  között. Vagyis a visszalépő ügyfelek átlagos ajánlott várakozási ideje aszimptotikusan nagyobb,

mint a várakoztatott ügyfelek átlagos várakozási ideje, ami viszont nagyobb, mint a visszalépő ügyfelek tényleges átlagos várakozási ideje.

7. A várakozási idő aszimptotikus eloszlását (Total Service Factor = TSF) úgy kapjuk meg, hogy összeszorozzuk a (134) jobb oldalát a

$$P\left\{\frac{W}{E[S]} > \frac{t}{\sqrt{n}} \mid W > 0\right\} \sim \frac{\bar{\Phi}\left(\hat{\beta} + \sqrt{\frac{g_0}{\mu}} \cdot t\right)}{\bar{\Phi}(\hat{\beta})}, \quad t \geq 0, \quad (143)$$

ahol  $E[S] = 1/\mu$  az átlagos kiszolgálási idő.

8. Az elhagyás valószínűsége, az adott sorbanállás után, aszimptotikusan egyenlő a

$$P\left\{Ab \mid \frac{W}{E[S]} > \frac{t}{\sqrt{n}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{g_0}{\mu}} \cdot \left[h\left(\hat{\beta} + t\sqrt{\frac{g_0}{\mu}}\right) - \hat{\beta}\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (144)$$

9. Az átlagos várakozási idő, adott sorbanállás mellett, aszimptotikusan egyenlő a

$$E\left[W \mid \frac{W}{E[S]} > \frac{t}{\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{g_0\mu}} \cdot \left[h\left(\hat{\beta} + t\sqrt{\frac{g_0}{\mu}}\right) - \hat{\beta}\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (145)$$

A (8)-(9) együttesen az (5) egy általánosított alakját adja:

$$\frac{P\left\{Ab \mid W > \frac{t}{\sqrt{n}}\right\}}{E\left[W \mid W > \frac{t}{\sqrt{n}}\right]} \sim g_0, \quad t \geq 0. \quad (146)$$

### A speciális eset: $\beta = 0$

Ha a (127)-es képletben a  $\beta = 0$ , akkor az alkalmazotti szint aszimptotikusan megközelelti azt az egyszerű szabályt, amely nem vesz figyelembe sztochasztikus elméleteket, vagyis a kiszolgálók száma egyenlő a rendszer kihasználtsági tényezőjének értékével, azaz  $\frac{\lambda}{\mu}$ -vel. Azonban ez a naiv megközelítés Erlang-C modell esetén a rendszer instabilitásához vezethet. Viszont az M/M/n+G rendszerrel (ami sokkal közelebb áll a call centerek valós világához, mint az Erlang-C) elfogadható teljesítmény szinthez juthatunk. Képletekben kifejezve:

$$P\{W > 0\} \sim \frac{\sqrt{\frac{\mu}{g_0}}}{\sqrt{\frac{\mu}{g_0}} + 1} = \frac{1}{1 + \sqrt{g_0/\mu}}, \quad (147)$$

$$P\{Ab\} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\mu}{g_0}}}, \quad (148)$$

$$P\{Ab|W > 0\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot \sqrt{\frac{g_0}{\mu}}, \quad (149)$$

$$E[W] \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot \frac{1}{g_0 + \sqrt{\mu g_0}}, \quad (150)$$

$$E[W|W > 0] \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{g_0 \mu}}, \quad (151)$$

$$P\left\{\frac{W}{E[S]} > \frac{t}{\sqrt{n}} \mid W > 0\right\} \sim 2\bar{\Phi}\left(\frac{1}{2} + t\sqrt{\frac{g_0}{\mu}}\right), t \geq 0. \quad (152)$$

*Megjegyzés:* A (134) formula általánosítja az Erlang-A modell állítását. Vagyis

$$P\{W > 0\} \sim w(-\beta, \sqrt{\mu/\theta}),$$

ahol

$$w(x, y) = \left[1 + \frac{h(-xy)}{yh(x)}\right]^{-1}$$

és  $\theta$  az elhagyási intenzitás. Ekkor ha  $\theta$  helyébe  $g_0$ -t helyettesítünk, megkapjuk a (134)-et.

### A türelmi idő sűrűség függvényének vizsgálata

**Lemma 7:** Tegyük fel, hogy a türelmi idő sűrűség függvényének értéke az origóban nulla  $g_0 = 0$ ; továbbá az első  $(k - 1)$ -edik derivált is nulla:  $g^{(i)}(0) = 0$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ , illetve a  $k$ -adik derivált értéke pozitív:  $g^{(k)}(0) \triangleq g_{0k} > 0$ .

Ha a  $\beta \neq 0$  (pozitív vagy negatív), akkor a QED rendszer alkalmazotti szintje legyen:

$$n = \frac{\lambda}{\mu} + \beta \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} + o(\sqrt{\lambda}). \quad (153)$$

Ha  $\beta = 0$ , akkor

$$n = \frac{\lambda}{\mu} + o(\lambda^s), \quad (154)$$

minden  $s < \frac{1}{k+2}$  esetén.

Az  $\epsilon$  aszimptotikus kifejezése egybeesik a (130)-éval minden 6-os fejezetbeli tétel esetén. A  $J$  és a  $J_1$  közelítéseit a következő formulák adják meg:

1. Ha  $\beta > 0$ , akkor

$$J = \frac{1}{n\mu - \lambda} - \frac{\lambda g_{0k}}{(\beta\sqrt{\lambda\mu})^{k+3}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{(k+1)/2}}\right), \quad (155)$$

$$J_1 = \frac{1}{(n\mu - \lambda)^2} - \frac{(k+3)\lambda g_{0k}}{(\beta\sqrt{\lambda\mu})^{k+4}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{(k+2)/2}}\right), \quad (156)$$

2. Ha  $\beta = 0$ , akkor

$$J = \frac{1}{k+2} \cdot \left[\frac{(k+2)!}{\lambda g_0}\right]^{1/(k+2)} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{k+2}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^{1/(k+2)}}\right), \quad (157)$$

$$J_1 = \frac{1}{k+2} \cdot \left[\frac{(k+2)!}{\lambda g_0}\right]^{2/(k+2)} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{k+2}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^{2/(k+2)}}\right), \quad (158)$$

3. Ha  $\beta < 0$ , akkor

$$J \sim \exp\left\{\frac{k+1}{k+2} \cdot \left[\frac{(k+1)!}{\lambda g_0}\right]^{1/(k+1)} \cdot (\lambda - n\mu)^{(k+2)/(k+1)}\right\} \cdot \sqrt{2\pi k!} \cdot (\lambda g_0)^{-1/(2k+2)} \cdot ((k+1)!(\lambda - n\mu))^{-k/(2k+2)}, \quad (159)$$

$$J_1 \sim \left(\frac{-\beta\sqrt{\mu}(k+1)!}{g_{0k}\sqrt{\lambda}}\right)^{1/(k+1)} \cdot J. \quad (160)$$

(159)-es kifejezés exponenciálisan növekszik a kitevőben lévő  $(\lambda - n\mu)^{(k+2)/(k+1)}$  miatt.

**Tétel 3 (rendszer jellemzők):** (7)-es lemma értelmében az M/M/n+G modell rendszer jellemzőinek becsléseit a következő képletekkel adhatjuk meg:

1. A várakozás valószínűsége: Ha  $\beta > 0$ , akkor a várakozás valószínűsége megegyezik a (103)-as Erlang C-féle közelítéssel:

$$P\{W > 0\} \sim \left[1 + \frac{\beta}{h(-\beta)}\right]^{-1}. \quad (161)$$

Ha  $\beta = 0$ , akkor annak valószínűsége, hogy azonnal megtörténik a kiszolgálás,  $\frac{1}{n^{k/(2k+4)}}$  sebességgel konvergál a nullához.

$$P\{W = 0\} = \frac{1}{n^{k/(2k+4)}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{k+2}{\Gamma\left(\frac{1}{k+2}\right)} \cdot \left[ \frac{g_{0k}}{\mu^{k+1}(k+2)!} \right]^{\frac{1}{k+2}} + o\left(\frac{1}{n^{k/(2k+4)}}\right). \quad (162)$$

Ha  $\beta < 0$ , akkor annak valószínűsége, hogy azonnal megtörténik a kiszolgálás, exponenciálisan csökken nulláig.

$$P\{W > 0\} \approx \exp\left\{-\frac{k+1}{k+2} \cdot \left[ \frac{(k+1)!}{\lambda g_{0k}} \right]^{1/(k+1)} \cdot (\lambda - n\mu)^{(k+2)/(k+1)}\right\} \cdot \frac{g_{0k}^{1/(2k+2)} \cdot (-\beta(k+1))^{k/(2k+2)}}{\lambda^{k/(4k+4)} \cdot \mu^{(k+2)/(4k+4)} \cdot \sqrt{2\pi k!} \cdot h(-\beta)}. \quad (163)$$

2. Az elhagyás valószínűsége: Ha  $\beta > 0$ , akkor

$$P\{Ab|V > 0\} = \frac{1}{n^{(k+1)/2}} \cdot \frac{g_{0k}}{(\beta\mu)^{k+1}} + o\left(\frac{1}{n^{(k+1)/2}}\right). \quad (164)$$

Ha  $\beta = 0$ , akkor

$$P\{Ab|V > 0\} = \frac{1}{n^{(k+1)/(k+2)}} \cdot \frac{k+2}{\Gamma\left(\frac{1}{k+2}\right)} \cdot \left[ \frac{g_{0k}}{(\mu)^{k+1}(k+2)!} \right]^{\frac{1}{k+2}} + o\left(\frac{1}{n^{(k+1)/(k+2)}}\right). \quad (165)$$

Ha  $\beta < 0$ , akkor

$$P\{Ab|V > 0\} = \frac{-\beta}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (166)$$

3. Az átlagos ajánlott várakozási idő: Ha  $\beta > 0$ , akkor az átlagos ajánlott várakozási idő a (104)-es Erlang C-féle becslésből adódik:

$$E[V|V > 0] \sim \frac{1}{\beta\mu\sqrt{n}}. \quad (167)$$

Ha  $\beta = 0$ , akkor

$$E[V|V > 0] = \frac{1}{n^{1/(k+2)}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{2}{k+2})}{\Gamma(\frac{1}{k+2})} \cdot \left[ \frac{(k+2)!}{\mu g_{0k}} \right]^{\frac{1}{k+2}} + o\left(\frac{1}{n^{1/(k+2)}}\right). \quad (168)$$

Ha  $\beta < 0$ , akkor

$$E[V|V > 0] = \frac{1}{n^{1/(2k+2)}} \cdot \left[ \frac{-\beta(k+1)!}{g_{0k}} \right]^{\frac{1}{k+1}} + o\left(\frac{1}{n^{1/(2k+2)}}\right). \quad (169)$$

4. Átlagos várakozási idő:

$$E[W] \sim E[V]; E[W|W > 0] \sim E[V|V > 0]. \quad (170)$$

Példa: Fázis-típusú türelmi idők

**Definíció:** Tekintsünk egy folytonos idejű Markov láncot  $\{X = X_t, t \geq 0\}$  véges állapotterrel  $\{1, 2, \dots, k, \Delta\}$ , ahol az  $1, 2, \dots, k$  átmeneti állapotok, a  $\Delta$  pedig abszorbeáló állapot.  $X$  eloszlás függvényének jellemzői:

- Kezdeti eloszlás:  $\bar{q} = q_1, \dots, q_k$ , ahol  $q_i = P\{X_0 = i\}$ ,  $1 \leq i \leq k$  (a lánc nem kezdődhet abszorbeáló állapottal)
- Fázis-típusú generátor mátrix  $R$ , ami egy olyan  $(k \times k)$ -s mátrix, amely az átmeneti állapotok közötti átmenet intenzitásokat tartalmazza. Azt tudjuk róla, hogy  $R_{kk} < 0$ ,  $R_{kj} \geq 0$ , ha  $k \neq j$ , és  $\sum_{i=1}^k R_{ki} \leq 0$ .
- Abszorpciós intenzitások:  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_k)'$ .

Összegezve,  $X$  generátor mátrixa felírható a következőképpen:

$$Q = \begin{pmatrix} R & \bar{r} \\ 0, \dots, 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol minden sor összege nulla, és  $\bar{r} = -R \cdot \bar{1}$ .

A

$$T \triangleq \inf\{t > 0 : X(t) = \Delta\}$$

jelöli az abszorpciós időt. Ekkor  $F_T(t) = P_q\{T \geq t\}$  egy fázis-típusú eloszlás  $(\bar{q}, R)$  paraméterekkel.

Az fázis-típusú eloszlás kummulatív eloszlás függvénye  $(\bar{q}, R)$  paraméterrel:

$$F_T(t) = 1 - \bar{q} \exp\{Rt\} \bar{1},$$

és a sűrűség függvénye:

$$f_T(t) = \bar{q} \exp\{Rt\} \bar{r}. \quad (171)$$

Annak érdekében, hogy a (3)-as tételt alkalmazni tudjuk, ki kell számolni a sűrűség függvényt az origóban, majd ezt le kell deriválni. A (171)-esből azt kapjuk, hogy a sűrűség függvény az origóban

$$f_T(0) = \bar{q} \bar{r}$$

és az n-edik deriváltja (a  $f_T^{(0)}(t) \triangleq f_T(t)$ )

$$f_T^{(n)}(0) = \bar{q} R^n \bar{r}. \quad (172)$$

**Tétel 4:** Egy fázis-típusú eloszlás alapjául szolgáló Markov folyamat állapot átmeneteit egy irányított gráf segítségével is szemléltethetjük. A j és k állapotok akkor és csak akkor köthetők össze, ha  $R_{jk} > 0$ . Minden j kezdő állapotban ( $q_j > 0$ ),  $L_j$  jelölje a j-ből a  $\Delta$  abszorbeáló állapotba vezető legrövidebb úton fekvő állapotok számát. Legyen

$$L \triangleq \min_j L_j. \quad (173)$$

Ekkor  $f_T^{(L-1)}(0) > 0$ . Továbbá, ha  $L \geq 2$ , akkor  $f_T^{(i)}(0) = 0$ ,  $0 \leq i \leq L - 2$  esetén.

## A türelmi idő késleltett eloszlása

**Lemma 8:** Tegyük fel, hogy a türelmi idő sűrűség függvénye a  $[0, c)$  intervallumon nullává válik, minden  $c > 0$  esetén. (Ez azt jelenti, hogy minden ügyfél hajlandó legalább c ideig várni.) Vegyük azt a legnagyobb c értéket, amelyben a türelmi idő sűrűség függvénye pozitív:  $g_c > 0$ . Ha  $\beta \neq 0$  (vagy negatív vagy pozitív), akkor legyen az alkalmazotti szint:

$$n = \frac{\lambda}{\mu} + \beta \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} + o(\sqrt{\lambda}).$$

Ha  $\beta = 0$ , akkor

$$n = \frac{\lambda}{\mu} + a, \quad -\infty < a < \infty \quad (174)$$

• Ha  $\beta > 0$ , akkor legyen

$$J = \frac{1}{n\mu - \lambda} - \frac{e^{-c(n\mu - \lambda)}}{\sqrt{\lambda}} \cdot \left\{ \frac{1}{\beta\sqrt{\mu}} - \frac{1}{h(\hat{\beta}_c)\sqrt{g_c}} \right\} + o\left(\frac{e^{-c(n\mu - \lambda)}}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad (175)$$

$$\hat{\beta}_c \triangleq \beta\sqrt{\frac{\mu}{g_c}}. \quad (176)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a \neq 0$

$$J \sim \frac{1}{\mu a} \cdot (1 - e^{-\mu a c}). \quad (177)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a = 0$

$$J \sim c. \quad (178)$$

Ha  $\beta < 0$

$$J \sim \frac{e^{c(\lambda - n\mu)}}{\sqrt{\lambda}} \cdot \left\{ \frac{1}{-\beta\sqrt{\mu}} + \frac{1}{h(\hat{\beta}_c)\sqrt{g_c}} \right\}. \quad (179)$$

• Ha  $\beta > 0$

$$J_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\beta^2\mu} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (180)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a \neq 0$

$$J_1 \sim \frac{1}{\mu^2 a^2} \cdot (1 - e^{-\mu a c}) - \frac{c e^{-\mu a c}}{\mu a}. \quad (181)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a = 0$

$$J_1 \sim \frac{c^2}{2}. \quad (182)$$

Ha  $\beta < 0$

$$J_1 \sim \frac{c e^{c(\lambda - n\mu)}}{\sqrt{\lambda}} \cdot \left\{ \frac{1}{-\beta\sqrt{\mu}} + \frac{1}{h(\hat{\beta}_c)\sqrt{g_c}} \right\}. \quad (183)$$

**Tétel 5 (rendszer jellemzők):** A (8)-as lemma értelmében az M/M/n+G modellnek a késleltetett türelmi idő eloszlásának figyelembe vételével a rendszer jellemzők becslése a következő:

• A várakozás valószínűsége: ha  $\beta > 0$ , a várakozás idő aszimptotikus valószínűsége

megegyezik az Erlang C modell becslésével (103 vagy 161):

$$P\{W > 0\} \sim \left[1 + \frac{\beta}{h(-\beta)}\right]^{-1}. \quad (184)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a \neq 0$

$$P\{W = 0\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{a}{1 - e^{-\mu ac}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (185)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a = 0$

$$P\{W = 0\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\mu c} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (186)$$

Ha  $\beta < 0$

$$P\{W = 0\} \sim e^{-c(\lambda - n\mu)} \frac{\frac{1}{h(-\beta)\sqrt{\mu}}}{-\frac{1}{\beta\sqrt{\mu}} + \frac{1}{h(\hat{\beta}_c)\sqrt{g_c}}}. \quad (187)$$

- Az elhagyás valószínűsége: ha  $\beta > 0$

$$P\{Ab|W > 0\} \sim \frac{e^{-c(n\mu - \lambda)}}{\sqrt{\lambda}} \cdot \left\{ \beta\sqrt{\mu} - \frac{\beta^2\mu}{h(\hat{\beta}_c)\sqrt{g_c}} \right\}. \quad (188)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a \neq 0$

$$P\{Ab|W > 0\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{ae^{-\mu ac}}{1 - e^{-\mu ac}} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (189)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a = 0$

$$P\{Ab|W > 0\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mu c} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (190)$$

Ha  $\beta < 0$

$$P\{Ab|W > 0\} = \frac{-\beta}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (191)$$

- Átlagos ajánlott várakozási idő: ha  $\beta > 0$

$$E[V|V > 0] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\beta\mu} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (192)$$

(Erlang-C approximáció)

Ha  $\beta = 0$  és  $a \neq 0$

$$E[V|V > 0] \sim \frac{1}{\mu a} - \frac{ce^{-\mu ac}}{1 - e^{-\mu ac}}. \quad (193)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a = 0$

$$E[V|V > 0] \sim \frac{c}{2}. \quad (194)$$

Ha  $\beta < 0$

$$E[V] \sim E[V|V > 0] \sim c. \quad (195)$$

- Átlagos várakozási idő

$$E[W] \sim E[V]; \quad E[W|W > 0] \sim E[V|V > 0]. \quad (196)$$

A (193)-(196) formulák esetén az átlagos várakozási idő egy pozitív konstanshoz konvergál. Ez különbözteti meg a késleltetett eloszlásokat a (127) és (128)-tól, ahol az  $E[W]$  a nullához konvergál.

**Tétel 6 (Determinisztikus türelmi idő)** Azt feltételezzük, hogy a türelmi idő determinisztikus, és egy  $c > 0$  konstanssal egyenlő. Ekkor

- A várakozás valószínűsége: Ha  $\beta = 0$ :

$$P\{W > 0\} \sim \left[1 + \frac{\beta}{h(-\beta)}\right]^{-1}. \quad (197)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a \neq 0$

$$P\{W = 0\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{a}{1 - e^{-\mu ac}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (198)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a = 0$

$$P\{W = 0\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\mu c} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (199)$$

Ha  $\beta < 0$

$$P\{W = 0\} \sim e^{-c(\lambda - n\mu)} \cdot \frac{-\beta}{h(-\beta)}. \quad (200)$$

- Az elhagyás valószínűsége: Ha  $\beta > 0$

$$P\{Ab|W > 0\} \sim \frac{e^{-c(n\mu-\lambda)}}{\sqrt{\lambda}} \cdot \beta\sqrt{\mu}. \quad (201)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a \neq 0$

$$P\{Ab|W > 0\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{ae^{-\mu ac}}{1 - e^{-\mu ac}} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (202)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a = 0$

$$P\{Ab|W > 0\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mu c} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (203)$$

Ha  $\beta < 0$

$$P\{Ab|W > 0\} = \frac{-\beta}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (204)$$

- Az átlagos ajánlott várakozási idő: Ha  $\beta > 0$

$$E[V|V > 0] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\beta\mu} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (205)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a \neq 0$

$$E[V|V > 0] \sim \frac{1}{\mu a} - \frac{ce^{-\mu ac}}{1 - e^{-\mu ac}}. \quad (206)$$

Ha  $\beta = 0$  és  $a = 0$

$$E[V|V > 0] \sim \frac{c}{2}. \quad (207)$$

Ha  $\beta < 0$

$$E[V] \sim E[V|V > 0] \sim c. \quad (208)$$

- Az átlagos várakozási idő:

$$E[W] \sim E[V]; E[W|W > 0] \sim E[V|V > 0]. \quad (209)$$

## Türelmi idő tétovázással

**Lemma 9:** Tekintsünk egy QED elvű működési rendszert, ekkor:

$$n = \frac{\lambda}{\mu} + \beta \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Tegyük fel, hogy a türelmi idő eloszlása nagyon kicsi 0-ban. Más szavakkal, ha a telefonáló-  
nak várakozni kell, akkor  $P\{\text{tétovázás}\} > 0$  valószínűséggel azonnal elhagyja a rendszert,  
vagy  $\bar{G}(0) = 1 - P\{\text{tétovázás}\} > 0$ . Továbbá tegyük fel azt is, hogy a megbízhatósági  
függvény  $\bar{G}$  deriváltja az origóban:  $\bar{G}' = -g_0$ . (A  $g_0$  a türelmi idő eloszlás függvényének  
jobb oldali deriváltja az origóban). Ekkor:

•

$$J = \frac{1}{\lambda \cdot P\{\text{tétovázás}\} + (n\mu - \lambda)} - \frac{g_0}{\lambda^2 \cdot P\{\text{tétovázás}\}^3} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (210)$$

•

$$J_1 = \frac{1}{n^2 \mu^2 P\{\text{tétovázás}\}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (211)$$

**Tétel 7 (Rendszer jellemzők)** A (9)-es Lemma értelmében az M/M/n+G modell rend-  
szer jellemzői a QED működési elv esetén a következő módon becsülhetők:

•

$$P\{V > 0\} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{h(-\beta)}{P\{\text{tétovázás}\}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (212)$$

• A várakozás valószínűsége  $1/\sqrt{n}$  mértékkel csökken:

$$P\{W > 0\} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(1 - P\{\text{tétovázás}\}) \cdot h(-\beta)}{P\{\text{tétovázás}\}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (213)$$

• A  $P\{Ab|V > 0\}$  elhagyás feltételes valószínűsége konvergál a tétovázás valószí-  
nőségéhez:

$$P\{Ab|V > 0\} = P\{\text{tétovázás}\} + \frac{1}{n} \cdot \frac{g_0}{\mu \cdot P\{\text{tétovázás}\}} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (214)$$

- A  $P\{Ab|W > 0\}$  elhagyás feltételes valószínűsége  $\frac{1}{n}$  mértékben csökken:

$$P\{Ab|W > 0\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{g_0}{\mu \cdot P\{\text{tétovázás}\} \cdot (1 - P\{\text{tétovázás}\})} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (215)$$

- Az elhagyás feltétel nélküli valószínűsége  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  mértékben csökken:

$$P\{Ab\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot h(-\beta) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (216)$$

- Az  $E[V|V > 0]$  ajánlott várakozási idő feltételes várható értéke  $\frac{1}{n}$  mértékben csökken

$$E[V|V > 0] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mu \cdot P\{\text{tétovázás}\}} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (217)$$

- Az átlagos ajánlott várakozási idő  $\frac{1}{n^{3/2}}$  mértékben csökken:

$$E[V] = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{h(-\beta)}{\mu \cdot P\{\text{tétovázás}\}^2} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \quad (218)$$

- Az átlagos várakozási idő feltételes valószínűsége  $\frac{1}{n}$  mértékben csökken:

$$E[W|W > 0] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mu \cdot P\{\text{tétovázás}\}} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (219)$$

- Az  $E[W]$  átlagos várakozási idő  $\frac{1}{n^{3/2}}$  mértékben csökken:

$$E[W] = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{(1 - P\{\text{tétovázás}\}) \cdot h(-\beta)}{\mu \cdot P\{\text{tétovázás}\}^2} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \quad (220)$$

Tekintsük a következő két esetet:

- $\{V > 0\}$ , ami azt jelenti, hogy a kiszolgálás nem történik meg azonnal.
- $\{W > 0\}$

Valójában  $\{W > 0\}$  megegyezik  $\{V > 0, \tau > 0\}$ -val.

A (127)-(131) tételekben nem teszünk különbséget a  $\{V > 0\}$  és  $\{W > 0\}$  között, ugyanis  $P\{\tau = 0\} = 0$ . Azonban a tétovázó rendszerek esetén körültekintően kell eljárunk, amikor a (214) és (215)-höz hasonló feltételes valószínűségeket számolunk. Ha a

$P\{\text{tétovázás}\} = 1$ , akkor a (212)-es megegyezik az M/M/n/n (Erlang B) modell QED elvű működését leíró (106)-al. Továbbá a (216)-os szemlélteti, hogy QED működési elv esetén az M/M/n+G modell pozitív tétovázási aránya megegyezik az M/M/n/n modell igényvesztésének arányával. Ebben az értelemben tehát a tétovázás megegyezik az igényvesztéssel.

### Türelmi Idő skálázott tétovázással

Ebben a részben egy kicsi, ám mégsem elhanyagolható tétovázással rendelkező M/M/n+G modellt mutatunk be.

**10 Lemma:** Tegyük fel, hogy a türelmi idő eloszlás függvénye a rendszer méretétől függ ( $n$ ). Legyen ekkor a tétovázás valószínűsége  $P_n\{\text{tétovázás}\} = \frac{p_b}{\sqrt{n}}$ , minden  $p_b > 0$ -ra. Tegyük fel, hogy a  $\bar{G}_n$  megbízhatósági függvény deriváltja az origóban független a rendszer méretétől:  $\bar{G}'_n(0) = -g_0$ . Ekkor

- $$J = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu g_0}} \cdot \frac{1}{h(\hat{\beta})} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (221)$$

ahol

- $$\hat{\beta} \triangleq (\beta + p_b) \cdot \sqrt{\frac{\mu}{g_0}}. \quad (222)$$

- $$J_1 = \frac{1}{n\mu g_0} \left[ 1 - \frac{\hat{\beta}}{h(\hat{\beta})} \right] o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (223)$$

**Tétel 8 (rendszer jellemzők)** A (10)-es lemma értelmében az M/M/n+G modell rendszer jellemzői QED működési elv esetén a következőképpen becsülhetők:

1. a késleltetés valószínűsége és a pozitív ajánlott várakozási idő értékei egy konstanshoz tartanak, és  $\beta$ ,  $p_b$ ,  $g_0/\mu$ -től függenek:

$$P\{V > 0\} \sim P\{W > 0\} \sim \left[ 1 + \sqrt{\frac{g_0}{\mu}} \cdot \frac{h(\hat{\beta})}{h(-\beta)} \right]^{-1}, \quad (224)$$

ahol  $\hat{\beta}$  a (222)-es formula alapján van meghatározva.

2. Az elhagyás feltételes valószínűségei  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  intenzitással csökkennek:

$$P\{Ab|V > 0\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left[ \sqrt{\frac{g_0}{\mu}} \cdot h(\hat{\beta}) - \beta \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (225)$$

$$P\{Ab|W > 0\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{g_0}{\mu}} \cdot [h(\hat{\beta}) - \hat{\beta}] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (226)$$

A  $P\{Ab\}$  értéke  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  mértékben csökken, és a (224) és a (225) képletek szorzatával közelíthető.

3. Az átlagos ajánlott várakozási idő feltételes valószínűsége  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  intenzitással csökken:

$$E[V|V > 0] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_0\mu}} [h(\hat{\beta}) - \hat{\beta}] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (227)$$

Az  $E[V]$  ajánlott várakozási idő  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  intenzitással csökken, és a (227) és (224) szorzatával becsülhető.

4. Az átlagos várakozási idő megegyezik az átlagos ajánlott várakozási idővel:

$$E[W] \sim E[V]; \quad E[W|W > 0] \sim E[V|V > 0] \quad (228)$$

5. A késleltetett ügyfelek elhagyási valószínűségének és a késleltetett ügyfelek átlagos várakozási idejének az aránya tart a türelmi idő sűrűség függvényének az origóban felvett értékéhez:

$$\frac{P\{Ab|W > 0\}}{E[W|W > 0]} \sim g_0. \quad (229)$$

## 6.2. Minőség vezérelt működési elv

A minőség vezérelt működési elv (QD) a következő képletekkel jellemezhető:

$$n = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 + \gamma) + o(\sqrt{\lambda}), \quad \gamma > 0. \quad (230)$$

Ekkor a rendszer kihasználtsági tényezője:

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} \rightarrow \frac{1}{1 + \gamma} < 1$$

Ha a (230)-ban az  $o(\sqrt{\lambda}) \equiv 0$ , akkor a  $\rho$  és a  $\gamma$  közötti pontos összefüggés a következő:

$$\rho = \frac{1}{1 + \gamma} \text{ és } \gamma = \frac{1 - \rho}{\rho}. \quad (231)$$

**Lemma 11:** Tegyük fel, hogy a türelmi idő sűrűség függvénye az origóban létezik és pozitív:  $g_0 > 0$ . Ekkor

1.

$$J = \frac{1}{n\mu - \lambda} - \frac{g_0}{\lambda^2 \gamma^3} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (232)$$

2.

$$\epsilon \sim \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \gamma)^{n-1} \cdot \exp\left\{-\frac{\lambda\gamma}{\mu}\right\}. \quad (233)$$

3.

$$J_1 = \frac{1}{(n\mu - \lambda)^2} - \frac{3g_0}{\lambda^3 \gamma^4} + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right). \quad (234)$$

**Tétel 9 (rendszer jellemzők)** A (11)-es lemma értelmében az M/M/n+G sorbanállási modell rendszer jellemzői QD esetén a következőképpen adhatók meg:

1. A várakozási idő valószínűsége exponenciálisan csökken n-ben, vagyis:

$$P\{W > 0\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{1}{1 + \gamma}\right)^{n-1} \cdot \exp\left\{\frac{\lambda\gamma}{\mu}\right\}. \quad (235)$$

2. Az elhagyás valószínűsége adott várakozási idő esetén:

$$P\{Ab|W > 0\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \gamma}{\gamma} \cdot \frac{g_0}{\mu} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \rho} \cdot \frac{g_0}{\mu} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (236)$$

(Ha a (230)-ban a  $o(\sqrt{\lambda})$  eltérése nem nulla, akkor a két  $o\left(\frac{1}{n}\right)$  értéke a (236)-ban nem lesz egyenlő. )

3. Átlagos ajánlott várakozási idő:

$$E[V|V > 0] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \gamma}{\gamma} \cdot \frac{1}{\mu} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \rho} \cdot \frac{1}{\mu} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (237)$$

4. Az átlagos várakozási idő:

$$E[W] \sim E[V]; E[W|W > 0] \sim E[V|V > 0]. \quad (238)$$

5. Az elhagyás valószínűsége és az átlagos várakozási idő hányadosa:

$$\frac{P\{Ab\}}{E[W]} \sim g_0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (239)$$

6. Total Service Factor:

$$P\left\{\frac{W}{E(S)} > \frac{t}{n} \mid W > 0\right\} \sim e^{-(1-\rho)t}. \quad (240)$$

**Megjegyzés 16.1** Tegyük fel, hogy a (16.1)-ben az alkalmazotti szint pontosan adott  $n = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 + \gamma)$  alapján. Ekkor a várakozási idő valószínűségének aszimptotikus formulája a következőképp alakul:

$$P\{W > 0\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot (\rho e^{1-\rho})^n \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Megjegyzés 16.2** Ha a (230)-ban az eltérés nagyobb, mint  $o(\sqrt{\lambda})$ , mint például:

$$n = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 + \gamma) + o(\lambda),$$

akkor a (236)-(240)-es képletek még mindig teljesülnek. Jóllehet a (235)-ös közelítés rossz eredményt adhat.

### 6.3. A teljesítmény vezérelt működési elv

A teljesítmény vezérelt működési elv (ED) a következő képletekkel jellemezhető:

$$n = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - \gamma) + o(\sqrt{\lambda}), \quad \gamma > 0. \quad (241)$$

A rendszer kihasználtsági tényezője:

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} \rightarrow \frac{1}{1-\gamma} > 1.$$

Ha a (241)-ben az  $o(\sqrt{\lambda}) \equiv 0$ , akkor a  $\rho$  és a  $\gamma$  közötti összefüggés a következő:

$$\rho = \frac{1}{1-\gamma} \text{ és } \gamma = \frac{\rho-1}{\rho}. \quad (242)$$

**Lemma 12** Tegyük fel, hogy a

$$G(x) = \gamma$$

egyenlőség egyetlen megoldása  $x^*$ , valamint a türelmi idő sűrűség függvénye pozitív :  $g(x^*) > 0$ . Ekkor:

1.

$$J \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g(x^*)}} \cdot \exp\{\lambda k(\gamma)\}, \quad (243)$$

ahol

$$k(\gamma) \triangleq x^* \cdot \left(1 - \frac{n\mu}{\lambda}\right) - \int_0^{x^*} G(u) du. \quad (244)$$

2.

$$\epsilon \sim \frac{1}{\gamma}. \quad (245)$$

3.

$$J_1 \sim x^* \cdot J \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g(x^*)}} \cdot x^* \cdot \exp\{\lambda k(\gamma)\}. \quad (246)$$

**Tétel 10 (rendszer jellemzők)** A (12)-es lemma értelmében az M/M/n+G sorbanállási modell rendszer jellemzői ED esetén a következőképpen adhatók meg:

- Exponenciálisan csökken annak a valószínűsége, hogy a kiszolgálás azonnal megtörténik:

$$P\{W = 0\} \sim \frac{1}{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{g(x^*)}{2\pi\lambda}} \cdot \exp\{-\lambda k(\gamma)\}. \quad (247)$$

- Az elhagyás valószínűsége a  $\gamma \approx 1 - \frac{1}{\rho}$

$$P\{Ab\} \sim \gamma. \quad (248)$$

- Az  $E[V]$  átlagos ajánlott várakozási idő az  $x^*$  konstanshoz konvergál:

$$E[V] \sim x^*. \quad (249)$$

Az ajánlott várakozási idő valószínűleg szintén  $x^*$ -hoz konvergál:

$$V \xrightarrow{P} x^*. \quad (250)$$

- Definiáljuk a  $G^* = \{G^*(x), x \geq 0\}$  eloszlás függvényt a következő módon:

$$G^*(x) = \begin{cases} \frac{G(x)}{G(x^*)} = \frac{G(x)}{\gamma} & , x \leq x^* \\ 1 & , x > x^* \end{cases}$$

(Valójában a  $G^*$  a  $\min(x^*, \tau)$  valószínűségi változó eloszlás függvénye, ahol  $\tau$  a türelmi idő.) Ekkor a  $W$  átlagos várakozási idő gyengén konvergál a  $G^*$  eloszlás függvényéhez:

$$W \xrightarrow{w} G^*. \quad (251)$$

Továbbá:

$$E[W] \rightarrow E[\min(x^*, \tau)] = \int_0^{x^*} \bar{G}(u) du. \quad (252)$$

- A várakozási idő eloszlását a következők adják:

$$P\{V > t\} \sim \begin{cases} 1 & , t < x^* \\ 0 & , t > x^* \end{cases}. \quad (253)$$

$$P\{W > t\} \sim \begin{cases} \bar{G}(t) & , t < x^* \\ 0 & , t > x^* \end{cases}. \quad (254)$$

A várakozási idő eloszlása  $x^*$  környékén a következő módon közelíthető: Legyen  $-\infty < t < \infty$ . Ekkor

$$P\left\{\frac{V}{E(S)} > \frac{x^*}{E(S)} + \frac{t}{\sqrt{n}} \mid V > 0\right\} \sim \bar{\Phi}\left(t\sqrt{\frac{g(x^*)}{\mu(1-\gamma)}}\right). \quad (255)$$

$$P\left\{\frac{W}{E(S)} > \frac{x^*}{E(S)} + \frac{t}{\sqrt{n}} \mid V > 0\right\} \sim (1-\gamma) \cdot \bar{\Phi}\left(t\sqrt{\frac{g(x^*)}{\mu(1-\gamma)}}\right). \quad (256)$$

*Megjegyzés:* ED működési elv esetén az átlagos várakozási idő nem konvergál nullához.

## 7. fejezet

# M/M/C+M modell elhagyás és újrapróbálkozás figyelembe vételével

Tekintsünk egy olyan call center modellt, ahol  $C$  darab kiszolgáló várja a beérkező hívásokat. A kiszolgálási időközök, melyek tartalmazzák a beszélgetés és a beszélgetés utáni rövid összefoglaló időszakokat, exponenciális eloszlásúak  $\mu$  paraméterrel. Az először próbálkozó ügyfelek hívásai  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek. Ezeket a hívásokat "elsődleges hívás" címkével látjuk el. Azok az ügyfelek, akik az érkezés pillanatában találnak szabad ügyintézőt, azonnal kiszolgálásra kerülnek, majd elhagyják a rendszert. Azonban, akik nem találnak szabad kiszolgálót az érkezéskor,  $\beta$  valószínűséggel blokkolódnak. Ezek a blokkolódott ügyfelek  $\delta$  paraméterű exponenciális eloszlású idő eltelte után  $p$  valószínűséggel újrapróbálkoznak. A gyakorlatban a  $p$  nem egy konstans valószínűség, de a könnyebb kezelhetőség érdekében most azt feltételezzük róla. Azok az ügyfelek, akik ugyan csatlakoznak a várakozási sorhoz ( $1 - \beta$  valószínűséggel), de bizonyos várakozás után mégsem találnak szabad kiszolgálót, elhagyják a rendszert. Az elhagyás exponenciális eloszlású  $\theta_1$  paraméterrel. Ezen távozó ügyfelekről feltételezhetjük, hogy azonos újrapróbálkozási tulajdonsággal rendelkeznek, mint a blokkolódott ügyfelek. Röviden összefoglalva:

- $\lambda$ : Az először próbálkozó ügyfelek hívásainak ("elsődleges hívások") érkezési intenzitása.
- $\lambda_0$ : A teljes hívás érkezési intenzitás (megfigyelt hívás intenzitás). ( $\lambda_0 > \lambda$ )
- $C$ : A kiszolgálók száma.

- $\mu$ : A kiszolgálási intenzitás.
- $\beta$ : A pillanatnyi blokkolás valószínűsége azon ügyfeleknél, akiket az érkezés pillanatában nem szolgáltak ki, mert nem volt szabad kiszolgáló.
- $\theta_1$ : Azon ügyfelek elhagyási intenzitása, akik csatlakoztak a sorhoz.
- $p$ : a blokkolódott és távozó (abandoning) ügyfelek újrapróbálkozásának valószínűsége.
- $\delta$ : a blokkolódott és távozó (abandoning) ügyfelek újrapróbálkozásának intenzitása.

*Megjegyzés:* A teljes hívás érkezések két különálló hívásáramlásból tevődnek össze: az elsődleges hívásokból ( $\lambda$  paraméterrel) és az ismételt hívásokból (újrapróbálkozások). A teljes hívás érkezési intenzitást  $\lambda_0$ -val jelöljük ( $\lambda_0 > \lambda$ ).

Most a modell egy olyan esete kerül bemutatásra, amikor az ügyfeleket tájékoztatják az előre látható várakozási idejükről az érkezés pillanatában. Ez az előre kiszámított idő egy becsült várakozási idő, ami azon alapszik, hogy ténylegesen mennyi ügyfél várakozik a sorban, szemben azzal, hogy mennyi érkezik. Így az ügyfél blokkolási tulajdonsága a sorban várakozó ügyfelek számának függvénye. Legyen  $r(k)$  ( $k \geq C$ ) annak a valószínűsége, hogy egy érkező ügyfél blokkolódik, ha  $k - C$  ügyfél várakozik a sorban. Ez annak valószínűségét jelenti, hogy a közölt várakozási idő meghaladja az ügyfél várakozásait, ami a következő módon fejezhető ki:

$$r(k) = \beta + (1 - \beta)P(T < S_k) \quad (257)$$

Az egyenletben szereplő  $T$  egy valószínűségi változó, ami az ügyfél türelmi idejének határértékét írja le,  $S_k$  pedig egy olyan valószínűségi változó, ami az ügyfél érkezése, valamint egy szabad kiszolgáló elérése közötti időt írja le. Mivel a kiszolgálási időközök exponenciális eloszlásúak, ezért az  $S_k$  Erlang eloszlású ( $k - C + 1$  és  $C\mu$  paraméterekkel). Ekkor hasznos lehet az egyenlőségben szereplő  $P(T < S_k)$  értéket a  $P(T < E[S_k])$  értékkel becsülnünk, ahol:

$$E[S_k] = \frac{k - C + 1}{C\mu}.$$

Ha feltesszük, hogy a  $T$  küszöbérték exponenciális eloszlású  $\theta_1$  paraméterrel, akkor:

$$r(k) = 1 - (1 - \beta)e^{-\theta_1 \frac{k - C + 1}{C\mu}}. \quad (258)$$

Ez a megközelítés felteszi, hogy ha egy ügyfél úgy dönt, hogy csatlakozik a sorhoz, akkor azután már nem hagyja el azt, míg ki nem szolgálják. Feltételezhetjük, hogy a sorban várakozó ügyfelek enyhíthetik a  $\theta$  intenzitású elhagyást, ahol az új elhagyási intenzitás kevesebb, mint a kezdeti (tájékozatlan)  $\theta_1$  elhagyási intenzitás. Továbbá, ha  $\theta$  elég kicsi, akkor az  $S_k$  nem változik jelentősen.

## 7.1. Stacionárius analízis

### A sztochasztikus modell

A Markov lánc alkalmazása lehetővé teszi az olyan call center modellézését is, ami a megismételt hívásokat is figyelembe veszi. Jelölje a rendszer állapotát  $(m, n)$ ,  $(m, n \geq 0)$ , ahol  $m$  jelenti az ügyfelek számát a valós rendszerben (azok, akik kiszolgálás alatt vannak és akik a sorban várakoznak), és  $n$  azon ügyfelek számát, akik ismétlik a hívásukat. (A hívás ismétlés exponenciális eloszlású,  $\delta$  paraméterrel.) A valós sor véges puffereivel ellentétben  $m$  és  $n$  végtelenek. A numerikus megoldás meghatározása céljából a korlátlan rendszert egy csonkított rendszerrel közelítjük, ahol  $m$ -et  $K_1$ -re,  $n$ -et  $K_2$  csonkítjuk.

Ekkor a Markov lánc átmenet intenzitásait a következőképpen írhatjuk le: Legyen  $Q_{(m,n)(m',n')}$  az  $(m, n)$  állapotból az  $(m', n')$  állapotba való átmenet intenzitás,  $m, m' = 0, 1, \dots, K_1, n, n' = 0, 1, \dots, K_2$ . A nemnulla átmeneti intenzitások a következők:

$$Q_{(m,n)(m+1,n)} = \begin{cases} \lambda & , 0 \leq m < C, 0 \leq n \leq K_2 \\ \lambda(1 - r(m)) & , C \leq m < K_1, 0 \leq n \leq K_2 \end{cases}$$

$$Q_{(m,n)(m-1,n)} = \begin{cases} m\mu & , 0 < m \leq C, 0 \leq n \leq K_2 \\ C\mu + (m - C)(1 - p)\theta & , C < m \leq K_1, 0 \leq n \leq K_2 \end{cases}$$

$$Q_{(m,n)(m+1,n-1)} = \begin{cases} n\delta & , 0 \leq m < C, 0 < n \leq K_2 \\ n\delta(1 - r(m)) & , C \leq m < K_1, 0 < n \leq K_2 \end{cases}$$

$$Q_{(m,n)(m-1,n+1)} = (m - C)p\theta \quad C < m \leq K_1, 0 \leq n < K_2$$

$$Q_{(m,n)(m,n+1)} = pr(m)\lambda \quad C \leq m \leq K_1, 0 \leq n < K_2$$

$$Q_{(m,n)(m,n-1)} = n(1 - p)r(m)\delta \quad C \leq m \leq K_1, 0 < n \leq K_2$$

Mivel ez nem tűnik egy speciális struktúrának, ezért nem is könnyű analitikusan megoldani a fenti Markov láncot. Azonban standard numerikus módszerek alkalmazásá-

val hozzájutunk egy numerikus megoldáshoz stacionárius eloszlás és csonkított (véges) állapotterület esetén. A fő cél egy pontos approximáció leírása végtelen állapotterű problémák megoldására, ahol a megvalósításkor megpróbáljuk a  $K_1$  és  $K_2$  csonkított korlátokat addig növelni, amíg a növelés már nem lesz hatással a stacionárius eloszlásra. Előtte azonban a rendszer jellemzők kerülnek bemutatásra. Legyen  $\pi_{m,n}$ ,  $m = 0, \dots, K_1$ ,  $n = 0, 1, \dots, K_2$  az  $(m,n)$  állapotbeli stacionárius valószínűség és legyen  $T_r$  a stacionárius visszatérési (újrapróbálkozási) intenzitás (a megismételt hívások száma egységnyi idő alatt). Ekkor:

$$T_r = \sum_{n=1}^{K_2} n \delta \sum_{m=0}^{K_1} \pi_{m,n} \quad (259)$$

Ezen felül a visszatérési intenzitást a Markov lánc numerikus megoldásának és a (259) kifejezés használatával is megkaphatjuk, ami ugyan numerikusan pontos eredményt ad, azonban mégis sok időt igényel a kiszámítása.

*Megjegyzés:* Legyen  $E[B]$  a foglalt kiszolgálók átlagos száma. Ekkor a  $T_r$  visszatérési intenzitás a következőképpen számolható:

$$T_r = \frac{p}{1-p} (\lambda - E[B]\mu) \quad (260)$$

## 7.2. Fluid approximáció

Habár a fent leírt sztochasztikus modell használatával numerikusan ki tudjuk számolni a rendszer jellemzőket a visszatérések figyelembe vételével, azonban ez a számolás igen nehézkes. Ezért a következő egyszerű approximációs módszer esetén a Markov lánc átmeneti intenzitásait kicseréljük determinisztikus áramlási intenzitásokra. Mivel a következő modell egy determinisztikus, folytonos áramlási modell, ezért fluid approximációként fogunk rá hivatkozni.

A modell leírásához első lépésben cseréljük ki az eredeti sztochasztikus modell szerinti diszkrét állapot teret egy folytonos állapot térre. Jelölje  $(x_1(t), x_2(t))$  azt az állapotot, ahol  $x_1(t)$  a valódi puffer állandó szintje,  $x_2(t)$  pedig a körpálya állandó szintje a  $t$  időpillanatban. Ekkor a teljes érkezési intenzitás az alábbi módon adható meg:

$$\lambda_0(t) = \delta x_2(t) + \lambda(t) \quad (261)$$

Az  $x_1(t)$  beérkező hívásáradat függ a  $\lambda_0(t)$ -től és a blokkolási intenzitás-tól a  $t$  időpill-

lanatban. Használva a determinisztikus approximációt, a növekedés aránya  $x_1(t)$ -ben:  $(1 - r(x_1(t)))\lambda_0(t)$ , ahol  $r(x)$  a blokkolás valószínűsége, ha  $x$  a valódi puffer szintje. Ahhoz, hogy ezt a valószínűséget meghatározzuk, kiterjesztjük a (258)-as egyenletet a folytonos állapot térre a következő módon:

$$r(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \beta)e^{-\theta_1 \frac{x-C+1}{C\mu}} & , \text{ ha } x \geq C \\ 0 & , \text{ egyébként} \end{cases}$$

A puffer szint csökken a kiszolgálások befejezése és az elhagyások miatt. Ez a csökkenési arány  $x_1(t)$ -ben a következő kifejezéssel egyenlő:

$$\mu \text{Min}(x_1(t), C) + \theta \text{Max}(x_1(t) - C, 0).$$

Ezek alapján

$$\frac{dx_1}{dt} = (1 - r(x_1(t)))\lambda_0(t) - \mu \text{Min}(x_1(t), C) - \theta \text{Max}(x_1(t) - C, 0) \quad (262)$$

Egy megegyező következtetéssel eljutunk a következő differenciál egyenlethez:

$$\frac{dx_2}{dt} = p(r(x_1(t)))\lambda_0(t) + \text{Max}(x_1(t) - C, 0) - \delta x_2(t) \quad (263)$$

A  $\lambda_0(t)$  helyére beírva a (261)-es egyenlőség jobb oldalát a következő differenciál egyenlet rendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (1 - r(x_1(t)))(\delta x_2(t) + \lambda(t)) - \mu \text{Min}(x_1(t), C) - \theta \text{Max}(x_1(t) - C, 0) \\ \frac{dx_2}{dt} = pr(x_1(t))(\delta x_2(t) + \lambda(t)) - \delta x_2(t) + \theta p \text{Max}(x_1(t) - C, 0) \end{cases} \quad (264)$$

melynek megoldásával megkapjuk az  $(x_1(t), x_2(t))$ -t. Melyből

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_1(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_2(t)}{dt} = 0, \quad (265)$$

ami lehetővé teszi, hogy elérjük a stacionárius puffer szinteket, azaz  $x_1$  és  $x_2$ -t:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2 \end{cases}$$

Az látható, hogy ha a kihasználtsági tényező  $\rho = (\lambda/C\mu)$  kisebb vagy egyenlő, mint 1,

akkor az  $x_2$  nulla. Ebben az esetben a közelítés nem szolgáltat információt a rendszer visszatérési intenzitásáról. Nézzük azt az esetet, amikor  $\rho > 1$ , ekkor a  $x_1 \geq C$ . Ezt felírhatjuk úgy is, hogy  $Min(x_1, C) = C$  és  $Max(x_1 - C, 0) = x_1 - c$ . Ekkor a (264)-es egyenlet rendszer alakja stacionárius esetben a következő:

$$\begin{cases} (1 - r(x_1))(\delta x_2 + \lambda) = C\mu + \theta(x_1 - C) \\ \delta x_2 = pr(x_1)(\delta x_2 + \lambda) + \theta p(x_1 - C) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(\delta x_2 + \lambda) = pC\mu + \theta p(x_1 - C) + pr(x_1)(\delta x_2) + \lambda \\ \delta x_2 = pr(x_1)(\delta x_2 + \lambda) + \theta p(x_1 - C) \end{cases}$$

és végül azt kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} p(\delta x_2 + \lambda) - \delta x_2 = pC\mu \\ \delta x_2 = pr(x_1)(\delta x_2 + \lambda) + \theta p(x_1 - C) \end{cases} \quad (266)$$

A valódi puffer szint stacionárius esetben:

$$(\lambda - pC\mu)r(x_1) + \theta(1 - p)(x_1 - C)(\lambda - C\mu) \quad (267)$$

A (267)-es egyenletet egyszerű matematikai módszerek segítségével már megoldhatjuk, melynek megoldásával megkapjuk  $x_1$  értékét. Majd az  $x_2$  értékét meghatározva azt vehetjük észre, hogy  $x_2$  független  $\theta$ -tól. Ez egy hasznos tulajdonság, melynek segítségével a többi paraméter ( $c$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$  és  $p$ ) is könnyebben becsülhető a gyakorlatban.

A visszatérési intenzitás,  $T_r$  (fluid) független  $\theta$ -tól.

### 7.3. A nem állandósult rendszer vizsgálata

A legtöbb esetben azok a paraméterek, amiket egy call center modellezése során használunk időben változnak. Gondoljunk a beérkező hívásokra. Nyilván egy olyan call center esetén, ami napi 24 órában működik, jól látható, hogy a hívások érkezési intenzitása más nappal és éjjel. Tehát időtől függő mennyiség, hiszen nem mindegy, hogy a nap, hét, vagy év melyik szakaszában járunk. Nyilván a beérkezési intenzitások változásának megfelelően kell változni a kiszolgálók számának is. A call centerek működése során talán ez jelenti az egyik legnagyobb problémát, hogy meghatározzák a szükséges kiszolgálók számát. Ezt tipikusan úgy oldják meg, hogy a napot időintervallumokra osztják, és ezekben az intervallumokban a kiszolgálók száma már állandónak (konstansnak)

tekinthető.

Most tekintsük a nap valamelyik hasonló,  $T$  hosszúságú időintervallumát. Ez idő alatt a rendszer paraméterei  $\lambda(t)$ ,  $C$ ,  $\mu$ ,  $\theta$ ,  $p$ ,  $\delta$  és  $r(x)$  állandóak. Tegyük fel, hogy az intervallum kezdetekor a valós sor hossza  $x_1^0$ , a körpályáé pedig  $x_2^0$ . Az alábbi differenciál egyenlet rendszer

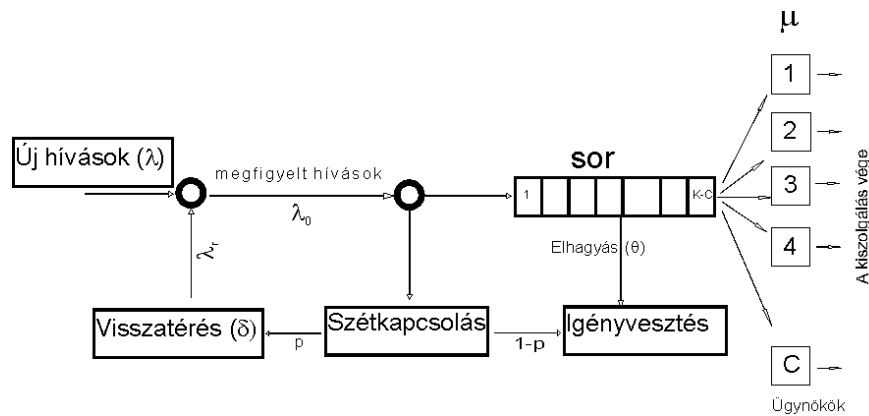
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (1 - r(x_1(t)))(\delta x_2(t) + \lambda(t)) - \mu \text{Min}(x_1(t), C) - \theta \text{Max}(x_1(t) - C, 0) \\ \frac{dx_2}{dt} = pr(x_1(t))(\delta x_2(t) + \lambda(t)) + \theta p \text{Max}(x_1(t) - C, 0) \end{cases} \quad (268)$$

lehetővé teszi, hogy megbecsüljük a sorban történő változásokat a tekintett időn belül. Pontosabban, ki tudjuk számolni a valós sor  $x_1^T$ , valamint a körpálya  $x_2^T$  hosszát a  $T$  időtartam alatt. Mivel ezt analitikus eszközökkel nem lehet kiszámolni, ezért egy numerikus algoritmust szeretnék bemutatni. Ehhez első lépésben válasszuk meg  $x_1^0$  és  $x_2^0$  megfelelő kezdeti értékét minden időintervallum esetén. Ekkor az algoritmus a következő:

- 1. lépés: Inicializálás:  $x_1^0 = x_2^0 = 0$ . A (268)-as egyenlet rendszer használatával határozzuk meg  $x_1(t)$  és  $x_2(t)$  értékét a megfelelő paraméter értékekkel ( $C, \lambda, \dots$ )  $0 \leq t \leq T$  esetén. Legyen  $x_1^T = x_1(T)$  és  $x_2^T = x_2(T)$ .
- 2. lépés: Inicializálás:  $x_1^0 = x_1^T$  és  $x_2^0 = x_2^T$ . (268)-as egyenlet rendszer használatával határozzuk meg  $x_1(t)$  és  $x_2(t)$  értékét  $T \leq t \leq 2T$  esetén. Legyen  $x_1^T = x_1(2T)$  és  $x_2^T = x_2(2T)$ .
- $i$ -edik lépés ( $i \geq 3$ ): Inicializálás:  $x_1^0 = x_1^T$  és  $x_2^0 = x_2^T$ . (268)-as egyenlet rendszer használatával határozzuk meg  $x_1(t)$  és  $x_2(t)$  értékét  $(i-1)T \leq t \leq iT$  esetén. Legyen  $x_1^T = x_1(iT)$  és  $x_2^T = x_2(iT)$ .
- Mindezt addig folytassuk, míg  $i = n$ .

## 8. fejezet

### Az $M/M/C/K+M$ modell



Tekintsünk egy call centert  $C$  kiszolgálóval. Feltételezzük, hogy az ügyfelek  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek, a kiszolgálási időközök pedig exponenciális eloszlásúak  $\mu$  paraméterrel. Azok az ügyfelek, akik az érkezés pillanatában nem találnak tétlen kiszolgálót, azok várakoztató állásba kerülhetnek. A rendszerben maximum  $K$  ügyfél tartózkodhat, melyből a várakoztatottak száma nem haladhatja meg a  $K - C$ -t. Ezen ügyfelek között lesz olyan, akinek a várakozás meghaladja a türelmét, ezért elhagyja a rendszert. Feltesszük, hogy az elhagyás exponenciális eloszlású  $\theta$  paraméterrel, melyet a modell paraméteréül szolgáló  $M$  jelöl.

Az az ügyfél, aki akkor érkezik, amikor  $K$  hívó már a rendszerben van, hall egy üzenetet, amiben megkérik, hogy telefonáljon később. Feltételezésünk szerint ezen ügyfelek  $\delta$  paraméterű exponenciális eloszlású idő eltelte után  $p$  valószínűséggel újrapróbálkoznak. Ugyanakkor feltesszük azt is, hogy aki elhagyja a rendszert az már később nem fog visszatérni.

## Modellezés folytonos idejű Markov lánc segítségével

A rajz alapján láthatjuk, hogy a rendszer egy kétdimenziós Markov lánc segítségével modellezhető. Az első dimenzió megegyezik a valós sorral, ami a C darab kiszolgálóból és a várakozási sorból áll. Ebben a valós sorban lévő összes ügyfél száma nem haladhatja meg a  $K$ -t. A második dimenzió megegyezik azon ügyfelek sorával, akik blokkolódnak és akik újratárcsáznak. A visszatérést figyelembe vevő irodalmakban ez a sor körpálya néven ismert. A sor hosszáról általában feltesszük, hogy végtelen. Ennél fogva az állapot  $(m,n)$  alakban írható fel,  $m = 0, 1, \dots, K$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , ami megegyezik azzal, hogy  $m$  ügyfél van a valódi sorban, és  $n$  pedig a körpályán. Ez utóbbi ügyfelek adott idő eltelte után újrapróbálkoznak.

### A visszatérés jelenségének numerikus analízise

Ha  $\delta$  nagyon nagy, akkor feltehetjük, hogy a szétkapcsolt ügyfelek  $p$  valószínűséggel azonnal újrapróbálkoznak, és  $1-p$  valószínűséggel fogják elhagyni a rendszert. Megismételve az előző kijelentésünket, láthatjuk, hogy a szétkapcsolt ügyfelekre eső újrapróbálkozások száma geometriai eloszlást követ, ezért az átlagos próbálkozások száma  $p/(1-p)$ . Ebből kifolyólag nagy  $\delta$  mellett egyensúlyi állapotban a visszatérési intenzitás a következő képlettel becsülhető:

$$\lambda_r = \frac{p\lambda}{1-p} p_K \quad (269)$$

Nagyon alacsony  $\delta$  értékek esetén, mivel az ügyfelek csak hosszú időszak eltelte után fognak újratárcsázni, feltehetjük, hogy a visszatérések áradata Poisson eloszlású és független az új hívásoktól. Ebben az esetben először a visszatérési intenzitást határozzuk meg stacionárius esetben:

$$\lambda_r = p\lambda_0 p_K \quad (270)$$

ahol  $p_K$  annak stacionárius valószínűsége, hogy a rendszerben  $K$  darab ügyfelet találunk úgy, hogy figyelmen kívül hagyjuk az újratárcsázást. Ez alkalommal az érkezési intenzitás egyenlő lesz  $\lambda_0$ -val. Így  $p_K$   $\lambda_0$  függvénye. Mivel  $\lambda_0 = \lambda + \lambda_r$ , ezért azt mondhatjuk, hogy a  $p_K$   $\lambda_r$  függvénye. A (270)-es egyenletből ezután egy fixpontos egyenletet kapunk. A fixpont eljárás meghatározza az állandósult visszatérési intenzitást a következő módon:

1. Legyen  $\lambda_0^1 = \lambda$ .
2. Számítsuk ki a  $\lambda_r^1$  értéket a (270)-es egyenlőség segítségével.

3. Legyen  $\lambda_0^{i+1} = \lambda + \lambda_r^i$ .

4. Ismételjük az utolsó két lépést addig, amíg  $|\lambda_0^{i+1} - \lambda_r^i| \leq \epsilon$ .

### Visszatérések figyelmen kívül hagyása

Cél a visszatérési modellezés hatásainak bemutatása a személyzet méretezésnek figyelembe vételével. Tegyük fel, hogy a call center meghatározza a személyzet létszámát azért, hogy minimalizálja a kiszolgálók számát, elérve egy adott  $\alpha_{NR}$  elvégzési intenzitást, amit elfogadási intenzitásnak is nevezhetünk, és ami megadja azon hívók arányát, akiknek sikerült kapcsolódni egy kiszolgálóhoz, azaz akik se nem blokkolódtak, se nem hagyták el véglegesen a rendszert. Meghatározzuk a kiszolgálók optimális számát, majd összehasonlítjuk az M/M/C/K+M modell azon esetével, amikor figyelmen kívül hagyjuk a visszatérést. Mindezt a megfelelő Markov lánc egyensúlyi állapotbeli eloszlásának megoldásával végezzük el.

Figyelmen kívül hagyva az újrapróbálkozásokat, az elfogadási intenzitást,  $\alpha_{NR}$ -et a következő képpen írhatjuk fel:

$$\alpha_{NR} = 1 - \frac{\lambda p_K + \theta L_Q}{\lambda}, \quad (271)$$

ahol  $p_K$  annak stacionárius eloszlása, hogy K ügyfelet találunk a rendszerben (blokkolási valószínűség) és  $L_Q$  az átlagos sorhossz. Ekkor a stacionárius valószínűség közvetlenül számolható. Ahhoz, hogy elérjük ezzel a kívánt kiszolgálási szintet, egy inverz rekurzív eljárás használatával meghatározhatjuk a szükséges kiszolgálók számát. Ebben az esetben nincs különbség az újonnan érkező és megfigyelt hívások között.

Abban az esetben amikor a visszatéréseket is figyeljük, akkor először ki kell nyernünk az újonnan érkező hívások beérkezési intenzitására vonatkozó információkat az adatbázisban tárolt hívási adatokból. Ezt a következő rekurzív algoritmus alapján tehetjük meg. Legyen  $f(\lambda, \mu, c, K_1, K_2, \theta, \delta, p)$  az a függvény, ami kiszámolja a  $\lambda_{megfigyelt}$  megfigyelt hívások intenzitását, amikor minden más paraméter adott.  $\lambda_0$  jelöli a kívánt megfigyelési intenzitást, és a  $\epsilon$  a kívánt pontosságot. Ekkor az algoritmus a következő:

1. inicializálás
2.  $x_{alsó} := 0$  és  $x_{felső} := \lambda_0$
3. amíg a *hiba*  $> \epsilon$ ,

4.  $\lambda := (x_{\text{alsó}} + x_{\text{felső}})/2$
5.  $\lambda_{\text{megfigyelt}} := f(\lambda, \mu, c, K_1, K_2, \theta, \delta, p)$
6. hiba:  $= |\lambda_{\text{megfigyelt}} - \lambda_0|$
7. ha ( $\text{hiba} > \epsilon$ )
8. ha ( $\lambda_{\text{megfigyelt}} < \lambda_0$ )
9. akkor  $x_{\text{alsó}} := (x_{\text{alsó}} + x_{\text{felső}})/2$
10. különben  $x_{\text{felső}} := (x_{\text{alsó}} + x_{\text{felső}})/2$

Jelölje  $\alpha_R$  a hívások azon hányadát, akik kapcsolódtak egy kiszolgálóhoz. Természetesen ez egy kiszolgálási szint, ami az elérhető adatokból könnyen kiszámolható. (a befejezett hívások száma / megfigyelt hívások száma).

Ha meghatároztuk az újonnan érkezett hívások intenzitását ( $\lambda$ ), akkor  $\alpha_R$  meghatározható a következő kifejezés használatával:

$$\alpha_R = \frac{\lambda_0 - \lambda \sum_{n=0}^{K_2} p_{K,n} - \delta \sum_{n=1}^{K_2} n p_{K,n} - \theta L_Q}{\lambda_0}. \quad (272)$$

Az egyenletben szereplő  $p_{K,n}$  valószínűség,  $n = 0, 1, \dots, K_2$  a fejezet első alrészében szereplő Markov láncnak felel meg, ahol megköveteljük a  $\lambda$  ismeretét.  $L_Q$  jelöli a modell átlagos sorhosszát, figyelembe véve az újrapróbálkozásokat. Ekkor:

$$L_Q = \sum_{i=C+1}^K \left( (i - C) \sum_{n=0}^{K_2} p_{i,n} \right)$$

A (272)-es egyenlet jobb oldalának számlálóját megadja a kiszolgálókhoz kapcsolódó hívások számát azáltal, hogy levonja a blokkolt hívásokat és az elhagyókat. Ez a számláló ugyanakkor felírható a call center által szolgáltatott hívások arányaként ( $\mu_D$ ) is. Az  $\alpha_R$  a következőképpen adódik:

$$\alpha_R = \frac{\mu_D}{\lambda_0} = \frac{\mu \sum_{i=1}^K \min(i, C) \sum_{n=0}^{K_2} p_{i,n}}{\lambda_0}. \quad (273)$$

Amikor a call center nem tudott különbséget tenni az újonnan érkező és az újrapróbálkozó hívások között, akkor a szolgáltatási szint meghatározása az  $\alpha_R = \mu_D/\lambda_0$  képlet

alapján történt, ami megadta a kiszolgált hívások mértékét. Azonban egy vevő perspektívájából a megfelelőbb szolgáltatási szint mértéke az lett volna, ha a szolgáltatási szint azt fejezné ki, amit az ügyfelek tapasztaltak. Képletben kifejezve:  $\alpha'_R = \mu_D/\lambda$ . Ez egy szolgáltatási szint az olyan call centerek számára, amelyeknek nincs technikai lehetőségük arra, hogy megkülönböztessék az először próbálkozó és az újrapróbálkozó hívókat egymástól, azok számára sajnos nem lesz közvetlenül mérhető.

## 9. fejezet

# QBD közelítések általános türelmi eloszlással

Most egy olyan többkiszolgálós sorbanállási modellt fogunk tekinteni, ahol az ügyfelek végtelenül türelmesek, így nem fogják elhagyni a rendszert azelőtt, hogy kiszolgálják őket.

Tegyük fel, hogy a kiszolgálók száma  $c$ . Legyen a rendszer kapacitása  $N (\geq c)$ , melyről feltesszük, hogy véges. A hívások  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek, és FCFS (First-Come First-Served) elv szerint, vagyis érkezési sorrendben kerülnek kiszolgálásra. Ha egy beérkező hívás azt tapasztalja, hogy a rendszernek nincs szabad kapacitása, akkor az a hívás blokkolódik és elvesz. Azonban ha az érkezés pillanatában van szabad kiszolgáló, akkor az ügyfél azonnal kiszolgálásra kerül. Máskülönben addig vár, míg egy kiszolgáló elérhetővé nem válik. A kiszolgálási időközök pedig exponenciális eloszlásúak  $\mu$  paraméterrel. Minden olyan esetben, amikor egy ügyfél távozik a rendszerből a kiszolgáló  $\xi$  paraméterű exponenciális ideig üresjáratban fog tartózkodni, ami független a kiszolgálási időtől és minden egyéb paramétertől. Miután letelt az üresjárat idő, a kiszolgáló újra elérhetővé válik, és amennyiben a várakozási sor nem üres, azonnal megkezdődhet egy ügyfél kiszolgálása. Ha a sor üres, akkor a szerver mindaddig elérhető marad, míg egy újabb hívó nem telefonál.

Vizsgáljuk meg a modell működését stacionárius esetben. Ekkor tekintsünk három különböző állapotot, amelyben egy kiszolgáló tartózkodhat. Ezek: (1) foglalt, (2) üresjáratban és (3) elérhető. Egy állapotot a következő módon jelölünk:  $(n, i, j)$ , ahol  $n$  a sorhossz,  $i$  az üresjáratban tartózkodó kiszolgálók száma és  $j$  a foglalt kiszolgálók száma. Nyilván a kimaradt kiszolgálók elérhetők. Legyen  $a \vee b \equiv \max(a, b)$ . A lehetséges állapot-

átmenetek a következők:

- $(0, i, j)$ -ből  $(0, i, j + 1)$ -be  $\lambda$  intenzitással,  $0 \leq i < c$  és  $0 \leq j < c - i$ ;
- $(0, i, j)$ -ből  $(0, i + 1, j - 1)$ -be  $j\mu$  intenzitással,  $0 \leq i < c$  és  $0 < j < c - i$ ;
- $(0, i, j)$ -ből  $(0, i - 1, j)$ -be  $i\xi$  intenzitással,  $0 < i \leq c$  és  $0 \leq j \leq c - i$ ;
- $(n, i, c - i)$ -ből  $(n + 1, i, c - i)$ -be  $\lambda$  intenzitással,  $0 \leq n \leq N$  és  $[0 \vee (c + n - N + 1)] \leq i \leq c$ ;
- $(n, i, c - i)$ -ből  $(n, i + 1, c - i - 1)$ -be  $(c - i)\mu$  intenzitással,  $0 \leq n \leq N$  és  $[0 \vee (c + n - N - 1)] \leq i < c$ ;
- $(n, i, c - i)$ -ből  $(n - 1, i - 1, c - i + 1)$ -be  $i\xi$  intenzitással,  $0 < n \leq N$  és  $[0 \vee (c + n - N)] < i \leq c$ ;

Jelölje  $N_q(t)$  a sor hosszát,  $I_v(t)$  a üresjáratú állapotban lévő és  $I_b(t)$  a foglalt kiszolgálók számát. Ekkor definiálhatjuk a  $p(i, j)$  stacionárius valószínűséget az alábbi módon:

$$p(i, j) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} Pr[N_q(t) = 0, I_v(t) = i, I_b(t) = j] \quad (274)$$

ahol  $0 \leq i < c$  és  $0 \leq j < c - i$ . Ekkor a  $\pi(n, i)$  stacionárius valószínűség:

$$\pi(n, i) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} Pr[N_q(t) = n, I_v(t) = i, I_b(t) = c - i] \quad (275)$$

$0 \leq n \leq N$ ,  $[0 \vee (c + n - N)] \leq i \leq c$ . Legyen  $p(n) = (p(0, n), p(1, n - 1), \dots, p(n, 0))$ , ahol  $0 \leq n < c$  és  $\pi(n) = (\pi(n, 0 \vee (c + n - N)), \dots, \pi(n, c))$ , ahol  $0 \leq n \leq N$ . Ekkor a  $\pi$  stacionárius valószínűségi vektor a következő módon definiálható:

$$\pi \triangleq (p(0), \dots, p(c - 1), \pi(0), \dots, \pi(N)) \quad (276)$$

melyet a  $\pi Q = \mathbf{0}$  egyenlet rendszer és a  $\pi \mathbf{1}^T = 1$  normalizáló feltétel megoldásával [11] kapunk meg, ahol  $\mathbf{0}$  egy nullákat tartalmazó sorvektor,  $\mathbf{1}^T$  az egyeseket tartalmazó oszlopvektor és  $Q$  az infinitezimális generátormátrix, melynek blokk-tridiagonális alakja a következő:

$$Q = \begin{pmatrix} A_{0,0} & B_{0,0} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ D_{0,1} & A_{0,1} & B_{0,1} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & D_{0,2} & A_{0,2} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_{0,c-2} & & \\ & & D_{0,c-1} & A_{0,c-1} & B_{0,c-1} & & \\ & & & D_{0,c} & A_0 & B_0 & \ddots & \vdots \\ & & & & D_1 & A_1 & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & B_{N-1} \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & D_N & A_N \end{pmatrix} \quad (277),$$

ahol  $N \geq 1$ .

Vizsgáljuk meg a  $Q$ -beli mátrixokat. Az első esetben minden mátrixnak két alsó indexe van. Amikor  $i$  kiszolgáló üresjárti és  $j$  foglalt állapotban van  $0 \leq i < c$  és  $0 \leq j < c - i$ , akkor az érkező ügyfelek kiszolgálása azonnal megkezdődik. Ebből adódik, hogy :

$$B_{0,0} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{0,1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \dots, B_{0,c-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad (278)$$

ahol  $B_{0,k-1}$  egy  $k \times (k+1)$ -s mátrix, ahol  $1 \leq k \leq c$ . A kiszolgálás után a kiszolgáló átmegy üresjáratba, majd ha a várakozási sor üres, akkor újra elérhetővé válik. Mivel az üresjáratban való tartózkodási idő exponenciális eloszlású  $\xi$  paraméterrel, ezért

$$D_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}, \quad D_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & 0 \\ 0 & 2\xi \end{pmatrix}, \dots, D_{0,c} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \xi & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2\xi & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c\xi \end{pmatrix}, \quad (279)$$

ahol  $D_{0,k}$  egy  $(k+1) \times k$ -s mátrix, ahol  $1 \leq k \leq c$ . Mivel a kiszolgálási időközök exponenciális eloszlásúak  $\mu$  paraméterrel, ezért  $A_{0,k}$  minden  $0 \leq k \leq c-1$  esetén egy  $(k+1) \times (k+1)$ -s négyzetes mátrix, ahol  $A_{0,0} = (-\lambda)$  és

$$A_{0,1} = \begin{pmatrix} * & \mu \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad A_{0,2} = \begin{pmatrix} * & 2\mu & 0 \\ 0 & * & \mu \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \dots, \quad A_{0,c-1} = \begin{pmatrix} * & (c-1)\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\mu & 0 \\ \vdots & & \ddots & * & \mu \\ 0 & \dots & \dots & 0 & * \end{pmatrix}, \quad (280)$$

ahol az átlóban lévő elemeket csillagokkal jelöltük. Értéküket úgy határozzuk meg, hogy a  $Q$  mátrix soraiban lévő elemek összege nulla legyen.

Most nézzük meg azt az esetet, amikor egyetlen kiszolgáló sem elérhető. Annak érdekében, hogy a mátrixok egyszerűsödjenek, tekintsünk egy olyan végtelen kapacitású sorbanállási modellt, amely minden időpillanatban megegyezik az eredeti véges kapacitású modellel. Ekkor meg lehet mutatni, hogy a mátrix sorozatok  $\{B_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{A_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{D_n\}_{n=1}^\infty$  mindegyike  $(c+1) \times (c+1)$ -es mátrixokból áll a végtelen kapacitású modell esetén. Ezen felül ezek a mátrixok homogének és  $n$ -től függetlenek. Jelölje  $(X)_{i,j}$  az  $X$  mátrix  $(i, j)$ -edik elemét, ahol a sor és az oszlop indexek nem 1-től hanem 0 -től kezdődnek. Ekkor az  $A_n$ ,  $B_n$  és  $D_n$  mátrixok a következő formában adhatók meg:

$$(B_n)_{i,j} = \lambda \delta_{i,j}, \quad (281)$$

$$(A_n)_{i,j} = (c-i)\mu \delta_{i,j-1} - [(c-i)\mu + i\xi] \delta_{i,j} - \lambda \delta_{i,j}, \quad (282)$$

$n \geq 0$  esetén, és

$$(D_n)_{i,j} = i\xi \delta_{i,j+1}, \quad (283)$$

$n \geq 0$ , ahol  $\delta_{i,j}$  a Kronecker delta, vagyis

$$\delta_{i,j} \triangleq \begin{cases} 1 & , \text{ ha } i = j \\ 0 & , \text{ ha } i \neq j. \end{cases} \quad (284)$$

Ezeket a mátrixokat könnyen át tudjuk alakítani azokra a mátrixokra, amelyeket az eredeti véges kapacitású modell esetén kaptunk.

Most vizsgáljuk meg a rendszer jellemzőket stacionárius állapotban. Jelölje  $p_B$  annak valószínűségét, hogy egy érkező hívás blokkolódik és elvész, mert nincs szabad kapacitás a rendszerben. Legyen  $EW_q$  az átlagos várakozási idő a sorban és  $W_q^c(0)$  a várakozási idő valószínűsége egy sorban álló ügyfél esetén. Ekkor  $1 - p_B$  megadja annak valószínűségét, hogy az érkezés pillanatában az ügyfél talált egy szabad kiszolgálót, vagy talált egy üres

helyet a sorban. Képletekkel:

$$1 - p_B = \sum_{n=0}^{c-1} p(n) \mathbf{1}^T + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=[0 \vee (c+n-N+1)]}^c \pi(n, k). \quad (285)$$

A teljes érkezési intenzitás és a Little formula használatával azt kapjuk, hogy  $\Lambda = \sum_{n=0}^{c-1} p(n) B_{0,n} \mathbf{1}^T + \sum_{n=0}^{N-1} \pi(n) B_n \mathbf{1}^T$

$$EW_q = \frac{1}{\Lambda} \sum_{n=0}^N n \pi(n) \mathbf{1}^T. \quad (286)$$

Továbbá meg tudjuk határozni  $1 - W_q^c(0)$ -t: azon ügyfelek érkezési intenzitásának, akiket azonnal kiszolgálnak, és a teljes érkezési intenzitás hányadosaként.

$$1 - W_q^c(0) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{n=0}^{c-1} p(n) \mathbf{1}^T. \quad (287)$$

## 9.1. QBD approximáció

### Módszer

Ezzel a módszerrel egy fázis-típusú valószínűségi változó használatával közelítjük az ügyfelek türelmi idejét. A (folytonos idejű) fázis-típusú valószínűségi változó egy olyan  $\{0, 1, \dots, m\}$  állapotterrel rendelkező Markov lánc 0 abszorbeáló állapotába való átmeneti idejeként adható meg, melynek adott az  $(\alpha_0, \alpha)$  kezdőállapot-valószínűség vektora és az infinitezimális generátormátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^T & T \end{pmatrix}, \quad (288)$$

ahol  $\alpha$  egy  $m$  hosszú sorvektor,  $T$  az egy  $m \times m$ -es mátrix,  $\mathbf{t}^T$  egy  $m$  hosszú oszlopvektor és  $\mathbf{0}$  egy nullákból álló sorvektor. A közöttük lévő kapcsolat:  $T \mathbf{1}^T + \mathbf{t}^T = \mathbf{0}^T$ , továbbá  $\alpha_0 + \alpha \mathbf{1}^T = 1$ . A későbbiekre vonatkozóan azt feltételezzük, hogy a türelmi idő eloszlás függvénye nagy valószínűséggel nem veszi fel a nullát, és mivel  $\alpha_0 = 0$ , a kiszolgálás azonnal megtörténik, ha az érkező ügyfél talál szabad kiszolgálót. Ahhoz, hogy teljesítsük egy Markov lánc infinitezimális generátormátrixának feltételeit, ahhoz  $T$  diagonális elemeinek negatívnak, a nemdiagonális elemeknek nemnegatívnak és  $\mathbf{t}^T$  elemeinek szintén nemnegatív értékűeknek kell lenniük. Jelölje  $(T)_{i,j}$  a  $T$  mátrix  $(i,j)$  elemét, és  $t_i$  pedig a

$\mathbf{t}^T$  i-edik elemét. Ekkor

$$(T)_{i,i} < 0, T_{i,j} \geq 0, t_i \geq 0, \quad (289)$$

ahol

$$1 \leq i \neq j \leq m.$$

Megfogalmazhatunk egy szint-függő véges QBD [12] (kvázi-születési-halálozási= quasi-birth-death) folyamatot azért, hogy minden várakozó ügyfél fázis változóit nyomonkövetjük. Tegyük fel, hogy egyetlen kiszolgáló sem érhető el, vagyis mindegyik vagy foglalt vagy üresjáratú állapotban van. A sorbanállási modell állapotát  $(n, i, \{i_1, i_2, \dots, i_n\})$  alakban írhatjuk fel, ahol  $i$  kiszolgáló üresjáratú állapotban van (ily módon a maradék  $c-i$  kiszolgáló foglalt),  $i_k$  a sorban lévő  $k$ -adik ügyfélnek a fázis típusú változója,  $1 \leq k \leq n$  és  $n > 0$  a sor hosszát adja meg. A  $k$ -adik ügyfél alatt azt a hívót értjük, aki a sor elejétől tekintve a  $k$ -adik pozícióban tartózkodik. Végül jelölje  $(0, i)$  a modell azon állapotát, amikor  $i$  szerver üresjáratú, a maradék  $c-i$  foglalt állapotban van, de a sor hossza nulla.

Helyettesítsük a  $\{B_n\}_{n=0}^{N-1}$ ,  $\{A_n\}_{n=0}^N$  és  $\{D_n\}_{n=1}^N$  mátrixokat a  $\{\tilde{B}_n\}_{n=0}^{N-1}$ ,  $\{\tilde{A}_n\}_{n=0}^N$  és  $\{\tilde{D}_n\}_{n=1}^N$  mátrixokkal a lentebb leírt módon. Egy olyan érkező ügyfél, akinek várakozni kell a kiszolgálásra, egy fázis-típusú valószínűségi változóval írható le, amely az  $i$ -edik periódusban kezdődik és  $\alpha_i$  valószínűséggel rendelkezik, ahol  $1 \leq i \leq m$ , és  $\tilde{B}_n$  minden  $n \geq 0$  esetén a következőképpen van megadva:

$$\tilde{B}_n = B_n \overbrace{\otimes I_m \otimes I_m \dots \otimes I_m}^n \otimes \alpha, \quad (290)$$

ahol  $I_k$  egy  $k \times k$ -s egységmátrix és  $\otimes$  pedig a Kronecker-szorzás operátorát jelöli.  $\tilde{D}_n$ -re vonatkozóan két lehetőséget tekintünk. Az első annak az ügyfélnek az esetét jelöli, aki a türelmetlenség következtében távozik a sorból. Legyen  $U_n$  a következő módon adva

$$U_n \triangleq \sum_{i=1}^n \overbrace{I_m \otimes I_m \dots I_m}^{i-1} \otimes t^T \underbrace{\otimes I_m \otimes I_m \dots \otimes I_m}_{n-i}, \quad (291)$$

ahol,  $n > 0$ . A másik az azon ügyfelek esetét jelenti, akik egy üresjáratú állapot vége miatt távoznak a sorból. Mivel a kiszolgálási elve FCFS, ezért az első távozó ügyfél a sorból azonnal kiszolgálásra kerül, még ha a sor nem is üres. Ha a sor üres, akkor az üresjáratú állapotban lévő kiszolgálók egyike előidéz egy átmenetet az üresjárat végén, de

a sor továbbra is üres marad. Ezután  $\tilde{D}_n$  a következőképpen van megadva:

$$\tilde{D}_n = D_n \otimes 1^T \overbrace{\otimes I_m \otimes I_m \dots \otimes I_m}^{n-1} + E_n \otimes U_n, \quad (292)$$

ahol  $E_n = I_{c+1}$ , ahol  $1 \leq n \leq N - c$  és  $E_n = [\mathbf{0}^T I_{N-n+1}]$ , ahol  $N - c < n \leq N$ .  $\tilde{A}_n$  olyan átmeneti intenzitásokból áll, amelyek nem veszik figyelembe az ügyfelek érkezését vagy távozását, amíg nincs  $n$  várakozó ügyfél a sorban. Ezek az átmeneti változások írják le a fázis-típusú türelmi idő eloszlásának változóiban és a foglalt vagy üresjáratú állapotban lévő kiszolgálók számában bekövekező változásokat. Legyen  $T_n$ ,  $n > 0$

$$T_n \triangleq \overbrace{T \oplus T \oplus \dots \oplus T}^{n-1}, \quad (293)$$

ahol  $\oplus$  jelöli a Kronecker-féle összegző operátort. És legyen  $\tilde{A}_n$ ,  $n \geq 0$

$$\tilde{A}_n = \begin{cases} A_n & , n = 0 \\ A_n \oplus T_n & , 0 < n \leq N. \end{cases} \quad (294)$$

Miközben a fázis-típusú eloszlás arra használható, hogy egy általános típusú eloszlást közelítsünk vele és a Markov tulajdonságoknak köszönhetően könnyen is kezelhető, azonban egyetlen fázis-típusú változó nem elegendő ahhoz, hogy megadjuk az általános eloszlás pontos közelítését. Következésképpen a  $T$  mátrix  $m$  méretének nagyobb egyenlőnek kell lenni mint kettő. Ezért igen nehéz lehet megoldani egy nagy kapacitású call center sorbanállási modelljét, mivel a kezelendő mátrixok mérete exponenciálisan nő, az  $N$  értékének növekedésével.

## 10. fejezet

# Erlang kalkulátorok

Dolgozatom utolsó fejezetében a tárgyalt modellekhez kapcsolódó, Ger Koole és Marco Bijvank illetve Auke Pot és Ger Koole által fejlesztett Erlang kalkulátorokról szeretnék említést tenni, melyek az alábbi weboldalakon elérhetők:

- <http://www.math.vu.nl/obp/callcenters/>
- <http://www.few.vu.nl/~koole/ccmath/>

### Erlang C kalkulátor

A kalkulátor matematikai hátterét az Erlang C modell képezi, melynek általában két fontos rendszer jellemzőjét szoktuk vizsgálni: az egyik az átlagos várakozási idő, a másik a kiszolgálás szintje. A kalkulátor lehetővé teszi számunkra ezen rendszer jellemzők becslését, de lehetőség van a modell paramétereinek a becslésére is. Például a szükséges kiszolgálók számát meg lehet határozni, ha megadunk egy kívánt kiszolgálási szintet (legyen ez 98%), továbbá azt, hogy legfeljebb mennyi ideig várakozzon a hívó, a kiszolgálási időt, valamint azt, hogy hány hívás érkezik egységnyi idő alatt.

A modellnek több hátránya is van. Ezek közül a legfontosabbak:

- nem veszi figyelembe az elhagyásokat.
- abban az esetben, ha túl kevés kiszolgálónk van, akkor a modell végtelen hosszú várakozási időt eredményez.
- a vonalak számát végtelennek feltételezi.

A kalkulátor segítségével jól lehet szemléltetni ezt a végtelen várakozási időt.

Field	Value	Unit
Arrivals	200.00	per minute
Service time	0.92	minutes
Number of agents	60	(integer required)
Average waiting time	infinity	seconds
Service level	0.00	% waits less than infinity seconds

### Erlang B kalkulátor

Az Erlang B kalkulátor hátterét az Erlang-féle veszteséges rendszer adja, ahol az igényvesztés valószínűségét az Erlang B formula segítségével számítják ki. Bemutatására tekintünk a következő egyszerű példát: Egy 30 csatornás telefonközpontba átlagosan 20 másodpercenként érkeznek hívások Poisson-eloszlás szerint. A kiszolgálási idő exponenciális, 10 perc átlaggal. A kérdés az, hogy az érkező hívások hány százaléka vész el?

Field	Value	Unit
Arrival rate	3.00	per minute
Service time	10.00	minutes
Number of agents	30	
Blocked	13.25	%
Occupancy	86.75	%

A válasz: az érkező hívások 13.25%-a fog elveszni.

### Erlang X kalkulátor

A hátterét képző modell az Erlang C modellel ellentétben, már figyelembe veszi az elhagyásokat és a visszatéréseket (újrAhívásokat), és a vonalak számát is végesnek tekinti.

Ezáltal közelebb áll a call centerek valós világához, mint az Erlang C modell. A kalkulátor segítségével lehetőségünk van megbecsülni az előbbieken túl a hívók átlagos türelmi idejét, vagy akár azt, hogy a hívások hány százaléka vész el, vagy hány százalék hagyja el a várakozási sort.

Megtalálhatjuk ezen az oldalon az Erlang C kalkulátor egy olyan változatát, ahol a hívások kifelé és befelé egyaránt irányulnak (Erlang C calculator with call blending). Továbbá lehetőségünk van egyéb érdekes kalkulátorok illetve szimulátorok megismerésére is, de ezekre már nem térnék ki.

# 11. fejezet

## Összefoglalás

Dolgozatom bevezető részében adtam egy kis betekintést a call centerek történetébe. Mi jelentette az alapproblémát, amit meg kellett oldani, és mit találtak ki a megoldására. Majd rávilágítottam arra a tényre, hogy a call centerek egyre nagyobb teret nyerve megtalálhatók életünk számos területén.

Mindezek után összegyűjtöttem és bemutattam néhány sorbanállási modellt, melyek segítségével a call centerek modellezhetők. Mindig olyan call centereket vizsgáltam, ahol csak befelé irányuló forgalom van. Elsőként az Erlang C modellt tárgyaltam, ami a legegyszerűbb modell. Végtelen hosszúságú várakozási sorokat, valamint végtelenül türelmes ügyfeleket tételez fel. Ebből adódóan beszéltem a fontosabb hátrányairól, mely szerint nem veszi figyelembe a türelmetlen ügyfelek távozását a sorból. Ezután haladtam a valós call centereket egyre inkább megközelítő modellek felé, így tárgyaltam az Erlang A modellt, mely már figyelembe veszi elhagyást. Következett ennek egy általánosabb esete az  $M/M/n+G$  modell, majd  $M/M/C+M$  modell elhagyás és újrapróbálkozás figyelembe vételével és az  $M/M/C/K+M$  modell. Igyekeztem összegezni az adott modell tulajdonságait, rendszer jellemzőit, esetlegesen azt, hogy milyen módon tudjuk megbecsülni a modell paramétereit, illetve hogy milyen kapcsolatban áll más modellekkel. Továbbá említést tettem olyan kalkulátorokról, amelyek háttérben az általam is tárgyalt modellek valamelyike áll. Ezek az Erlang kalkulátorok lehetőséget adnak nekünk arra, hogy bizonyos paramétereket vagy rendszer jellemzőket gyorsan és hatékonyan kiszámoljunk, továbbá szimuláljunk velük.

Remélem dolgozatommal a téma iránt érdeklődők számára sikerült egy kis betekintést nyújtanom a call centerek világába. Láthatjuk, hogy ezek az egyszerűnek számító modellek is elég nehéz matematikai számításokat igényelnek. Mivel manapság már nem is call, hanem contact centerekről beszélünk, így ha végigtekintünk a dolgozaton (ami a valós telefonközpontoknak is csak egy leegyszerűsített mását vizsgálta), akkor el tudjuk képzelni, hogy milyen nehéz és bonyolult matematikai modellek, számítások használatára van szükség egy contact center modellezéséhez.

# Irodalomjegyzék

- [1] **Whitt, W.**, (1992). Understanding the efficiency of multi-server service systems. *Management Science* Vol. 38, No. 5, 708-723.
- [2] **Palm C.** (1957) Research on telephone traffic carried by full availability groups. *Tele*, vol.1, 107 pp. (English translation of results first published in 1946 in Swedish in the same journal, which was then entitled *Tekniska Meddelanden fran Kungl. Telegrafstyrelsen.*)
- [3] **Baccelli F. and Hebuterne G.** (1981) *On queues with impatient customers.* In: F.J.Kylstra (Ed.), *Performance '81.* North-Holland Publishing Company, 159-179.
- [4] **Brandt A. and Brandt M.** (1999) On the  $M(n)/M(n)/s$  queue with impatient calls. *Performance Evaluation*, 35, 1-18.
- [5] **Brandt A. and Brandt M.** (2002) Asymptotic results and a Markovian approximation for the  $M(n)/M(n)/s + GI$  system. *Queueing Systems: Theory and Applications (QUESTA)*, 41, 73-94.
- [6] **Gnedenko B.W. and Kovalenko I.N.** (1968) *Introduction to Queueing Theory*, Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations.
- [7] **Iglehart D.L.** (1965) Limit diffusion approximations for the many-server queue and the repairman problem. *Journal of Applied Probability*, 2, 429-441.
- [8] **Halfin S. and Whitt W.** (1981) Heavy-traffic limits for queues with many exponential servers. *Operations Research*, 29, 567-588.
- [9] **Jagerman D.L.** (1974) Some properties of the Erlang loss function. *Bell Systems Technical Journal*, 53, 525-551.

- [10] **Garnett O., Mandelbaum A. and Reiman M.** (2002) Designing a telephone call-center with impatient customers. *Manufacturing and Service Operations Management* 4, 208-227.
- [11] **Latouche G, Ramaswami V.** *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics; 1999.
- [12] **Pla V, Casares-Giner V, Matinez J.** *On a multiserver finite buffer queue with impatient customers*. Proceedings of ITC specialist seminar, Antwerp; 2004.
- [13] **Koole G., Mandelbaum, A.** (2002) Queueing Models of Call Centers: An Introduction. *Annals of Operations Research* 113, 41-59.
- [14] **Garnett O., Mandelbaum A., Reiman M.** Designing a Call Center with Impatient Customers; 2002.
- [15] **Sergey Zeltyn** Call centers with impatient customers: exact analysis and many-server asymptotics of the M/M/n+G queue; 2004.
- [16] **M. Salah Aguir, Fikri Karaesmeny, O. Zeynep Aksin and Fabrice Chauvet** The impact of retrials on call center performance; 2004.
- [17] **M. Salah Aguir, O. Zeynep Aksin, Fikri Karaesmen, Yves Dallery** On the interaction between retrials and sizing of call centers; 2007.
- [18] **Sergey Zeltyn, Avishai Mandelbaum** Call Centers with Impatient Customers: Many-Server Asymptotics of the M/M/n+G Queue; 2005.
- [19] **Ken'ichi Kawanishi** QBD approximations of a call center queueing model with general patience distribution; 2007.
- [20] **Sztrik János** *Bevezetés a sorbanállási elméletbe és alkalmazásaiba*; 2004.
- [21] <http://www.palgrave-journals.com/jors/journal/v58/n2/full/2602240a.html>
- [22] <http://www.modemido.hu/99febr/cimlap.htm>