



A high-order non-conforming finite element family

PhD thesis book

ÁGNES ÉVA BARAN

University of Debrecen

Faculty of Informatics

Debrecen, 2007

1 Introduction

In the present work we describe a high-order, stable finite element family. The dissertation consists of four chapters, where in Chapter 1 we give a short review of the basic notions and theorems about the finite element methods, while Chapters 2, 3 and 4 contain the results of the author.

Numerous numerical experiments show that the use of high-order finite elements is advantageous in solving flow problems, see e.g. [10], [11]. It is well known that the motion of an incompressible viscous fluid can be described by the Stokes equations. In the dissertation we consider triangular finite elements for the two-dimensional Stokes problem which is the following: find functions $\vec{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ and $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$-\vec{\Delta}\vec{u} + \text{grad } p = \vec{f}, \quad (1.1)$$

$$-\text{div } \vec{u} = 0, \quad (1.2)$$

$$\vec{u}|_{\Gamma} = \vec{u}_0, \quad (1.3)$$

where $\Gamma = \partial\Omega$ is the boundary of the domain, and $\vec{f}$ is a given external force field. Here $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$ is the velocity vector and p is the pressure.

For the finite element solution of the problem (1.1)–(1.3) we divide Ω into finitely many triangles and we approximate the solution of the problem with functions that are polynomials on each subdomain. In the case of the pressure it is common to use discontinuous approximations to ensure the elementwise mass conservation property.

In the case of a given finite element discretization it is always a question whether the discrete inf-sup condition implying the existence of a unique, stable solution is fulfilled.

In [12] Scott and Vogelius investigate the $\mathbb{P}_k/\mathbb{P}_{k-1}$ finite element pair (polynomials of order k for the velocity and $(k-1)$ for the pressure) where there is no continuity requirement for the discrete pressures. For $k \geq 4$ the element is inf-sup stable if the triangulation does not contain near-singular points. A vertex of the triangulation is called singular point if the edges meeting in this point lie on two straight lines.

An other problem caused by the singular points is that in the presence of these points the nullspace of the discrete gradient operator is larger than the nullspace of the gradient operator in the original problem (where it contains only constant functions). This means that while in the continuous case the pressure can be determined uniquely up to an additive constant, after

the finite element discretization of the problem we have a system of linear equations which has a higher dimensional nullspace.

To ensure the grid independent stability one may consider the non-conforming elements where the velocity is approximated trianglewise by polynomials of order k that are continuous on the common side of two adjacent triangles only in the k th-order Gauss-Legendre points. These points are the roots of the k th-order Legendre polynomial defined over the given side of the triangle. The pressure, similarly to the Scott-Vogelius elements, is approximated trianglewise by polynomials of order $k - 1$.

The cases $k = 1$, $k = 2$ and $k = 3$ are investigated by Crouzeix and Raviart [7], by Fortin and Soulie [9], and by Crouzeix and Falk [8], respectively.

In [7] the authors show that the continuity requirements in the Gauss-Legendre points ensure the optimal order of convergence.

The construction of the second-order element differs from the cases $k = 1, 3$. If $k = 1$ or $k = 3$ then for the degrees of freedom of the velocity part one can choose the $3k$ Gauss-Legendre points on the sides of the triangle and $\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ points distributed uniformly inside the triangle.

If $k = 2$ then there exists a second-order polynomial which disappears in all the six second-order Gauss-Legendre points on the sides. This polynomial is called a second-order non-conforming bubble function. In this case one gets the velocity part of the finite element by adding trianglewise the bubble function to the velocity space of the second-order Scott-Vogelius elements.

In the past few years several authors have dealt with the study of non-conforming finite elements.

In [6] the elements of order $k = 4$ and $k = 6$ are investigated. Similarly to the second-order case the authors define bubble functions of order k and the non-conforming elements are given by enriching the corresponding conforming velocity spaces with these bubbles.

In the present work we deal with the description of a non-conforming finite element family which generalizes the low-order ($k = 1, 2, 3$) cases.

2 Some finite element families

For even k the discrete velocity space of the non-conforming finite element family defined later in the dissertation (similarly to the case $k = 2$ considered by Fortin and Soulie) can be obtained as the enrichment of the velocity space of the appropriate Scott-Vogelius element. In this way we start with study

of the algebraic properties of the Scott-Vogelius elements.

In the case of the k th-order Scott-Vogelius element the discrete pressure (P_h) and the discrete velocity (V_h) spaces are the following

$$\begin{aligned} P_h(\Omega) &:= \{p \in L^2(\Omega) : p|_{\Delta} \in \mathbb{P}_{k-1}(\Delta), \Delta \in \mathcal{T}_h\}, \\ V_{h,k}(\Omega) &:= \{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^2 : \vec{v}|_{\Delta} \in (\mathbb{P}_k(\Delta))^2, \Delta \in \mathcal{T}_h\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

where $\mathcal{T}_h$ is a triangulation of the polygonal domain Ω and $\mathbb{P}_k(\Delta)$ denotes the space of polynomials of maximal order k defined over the triangle Δ .

Under a homogeneous boundary condition the discrete Stokes problem is the following: find $\vec{u}_h \in V_h$ and $p_h \in P_h$ such that

$$\begin{aligned} a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) + b(\vec{v}_h, p_h) &= (\vec{f}, \vec{v}_h)_0 \quad \forall \vec{v}_h \in V_h, \\ b(\vec{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in P_h \cap L_0^2(\Omega), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &:= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \\ b(\vec{v}, p) &:= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} dx. \end{aligned}$$

Scott and Vogelius [12] prove that in the case of $k \geq 4$ if the triangulation contains σ singular points then the nullspace of the discrete gradient operator, i.e. the space

$$N_{V_{h,k}(\Omega)} := \{p \in P_h : b(\vec{v}, p) = 0 \quad \forall \vec{v} \in V_h\}$$

is $\sigma + 1$ dimensional.

However, the authors give just the dimension of this space without describing the space itself.

Theorem 2.1.8 *If the triangulation of a polygonal domain Ω contains σ singular points then for $k \geq 4$ there exists a basis of $N_{V_{h,k}(\Omega)}$, which can be described as follows. Besides the constant function, to each singular point corresponds a function which is zero everywhere – except on the triangles around the given point.*

In the proof of the theorem we describe the elements of the basis corresponding to the four types of boundary singular points and to the inner singular points (see [2]). In the lemmas below $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ denotes the Jacobi polynomial of order k on the interval $[-1, 1]$ with parameters α, β and with leading coefficient 1.

Lemma 2.1.9 *Let S_1 be a boundary singular point of type I. (see Figure 2.1). Denote by Δ_1 the triangle which contains the point S_1 , and let S_2 and S_3 be the other two vertices of Δ_1 (then S_1S_2 and S_1S_3 lie on the boundary of Ω). Denote by $\lambda_3^{(1)}$ the barycentric coordinate on Δ_1 , which is equal to 1 in the point S_1 . Then the function*

$$q|_{\Delta_1} = P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), \quad q|_{\Omega \setminus \Delta_1} \equiv 0 \quad (2.2)$$

is an element of $N_{V_{h,k}}(\Omega)$.

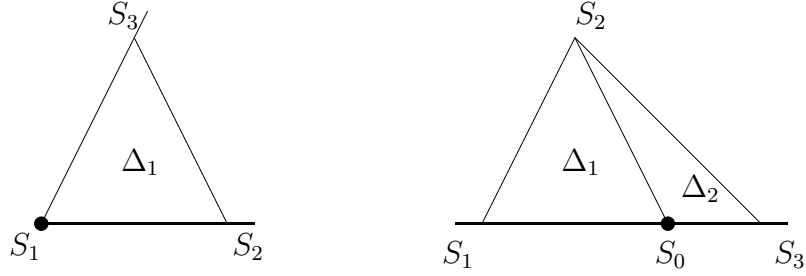


Figure 2.1: Boundary singular points of type I and II.

Lemma 2.1.10 *Let S_0 be a boundary singular point of type II and Δ_1, Δ_2 be the triangles containing the point S_0 . Denote by S_1, S_2 and S_2, S_3 the remaining vertices of Δ_1 and Δ_2 , respectively, where S_1S_3 lie on the boundary of Ω (see Figure 2.1). We may assume that the point S_0 is at the origin, i.e. $S_0 = (0, 0)$, and let $S_1 = (a_1, b_1)$, $S_3 = (a_3, b_3) = -t_0(a_1, b_1)$ with some $t_0 > 0$. If*

$$q|_{\Delta_1} = P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), \quad q|_{\Delta_2} = -\frac{1}{t_0} P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}), \quad q|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)} \equiv 0,$$

where $\lambda_2^{(1)}$ and $\lambda_1^{(2)}$ are those barycentric coordinates in Δ_1 resp. Δ_2 which are equal to 1 in the point S_0 , then $q \in N_{V_{h,k}}(\Omega)$.

Lemma 2.1.11 *Let S_0 be a boundary singular point of type III, and $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ be the triangles which contain the point S_0 . Denote by $S_i, i = 1, 2, 3, 4$, the remaining vertices of the triangles $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ (see Figure 2.2). Here S_0S_1 and S_0S_4 are parts of the boundary of Ω . Let $S_0 = (0, 0)$ and $S_i = (a_i, b_i), i = 1, 2, 3, 4$, where $(a_3, b_3) = -t_0(a_1, b_1)$ and $(a_4, b_4) = -t_1(a_2, b_2)$ with some $t_0, t_1 > 0$. Then the function*

$$\begin{aligned} q|_{\Delta_1} &= P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), & q|_{\Delta_2} &= -\frac{1}{t_0}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}), \\ q|_{\Delta_3} &= \frac{1}{t_0t_1}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(3)}), & q|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3)} &\equiv 0, \end{aligned}$$

where $\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}$ and $\lambda_3^{(3)}$ are the coordinates in Δ_1, Δ_2 and Δ_3 , respectively, which are equal to 1 in the point S_0 , is an element of $N_{V_{h,k}}(\Omega)$.

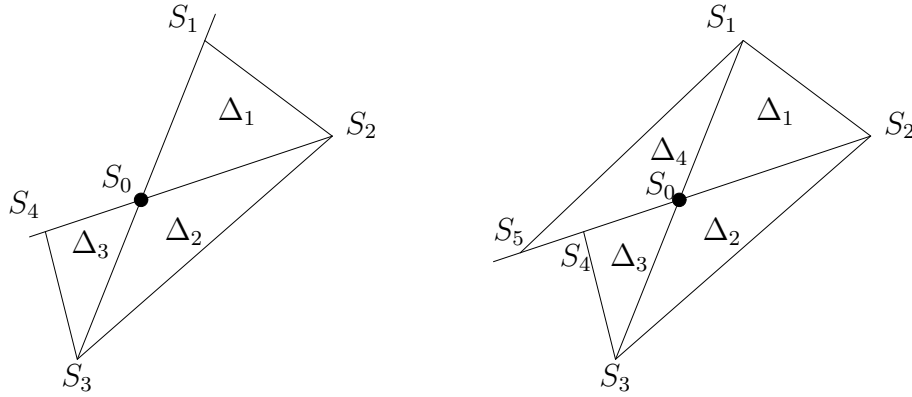


Figure 2.2: A boundary singular point of type III. and IV.

Lemma 2.1.12 *Let S_0 be a boundary singular point of type IV, and $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$, be the triangles which contain the point S_0 . Denote by $S_i, i = 1, \dots, 5$, the remaining vertices of the triangles $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$ (see Figure 2.2). Here $S_0S_4S_5$ is a part of the boundary of Ω . Let $S_0 = (0, 0)$ and $S_i = (a_i, b_i), i = 1, \dots, 5$, where $(a_3, b_3) = -t_0(a_1, b_1)$, $(a_4, b_4) = -t_1(a_2, b_2)$ and $(a_5, b_5) = -t_2(a_2, b_2)$ with some $t_0, t_1, t_2 > 0$. Then the function q defined*

as

$$\begin{aligned}
q|_{\Delta_1} &= P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), & q|_{\Delta_2} &= -\frac{1}{t_0}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}), \\
q|_{\Delta_3} &= \frac{1}{t_0 t_1}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(3)}), & q|_{\Delta_4} &= -\frac{1}{t_2}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(4)}), \\
q|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3)} &\equiv 0,
\end{aligned}$$

where $\lambda_3^{(i)}$, $i = 1, \dots, 4$, are the coordinates in Δ_i , $i = 1, \dots, 4$, which are equal to 1 in the point S_0 , is an element of $N_{V_{h,k}}(\Omega)$.

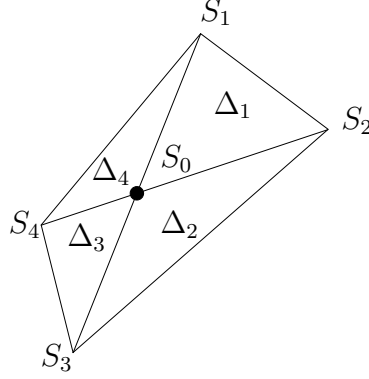


Figure 2.3: An inner singular point.

Lemma 2.1.13 *Let S_0 be an inner singular point, and Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, be the triangles around S_0 (see Figure 2.3). Let $S_0 = (0, 0)$ and $S_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, the remaining vertices of Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, where $(a_3, b_3) = -t_0(a_1, b_1)$, $(a_4, b_4) = -t_1(a_2, b_2)$ with some $t_0, t_1 > 0$. Then for the piecewise polynomial defined as*

$$\begin{aligned}
q|_{\Delta_1} &= P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), & q|_{\Delta_2} &= -\frac{1}{t_0}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}), \\
q|_{\Delta_3} &= \frac{1}{t_0 t_1}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(3)}), & q|_{\Delta_4} &= -\frac{1}{t_1}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(4)}), \\
q|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4)} &\equiv 0,
\end{aligned}$$

$q \in N_{V_{h,k}}(\Omega)$ holds. Here $\lambda_3^{(i)}$, $i = 1, \dots, 4$, are the barycentric coordinates in Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, which are equal to 1 in the point S_0 .

In the case of a given triangulation of Ω to every singular points corresponds a function in the following way. On the triangles around the singular point it is equal to a function described in the lemmas above and it is equal to zero in the remaining triangles. It can be proved that these functions are linearly independent.

In Examples 2.1.13–2.1.15 we show that in the cases $k < 4$ the dimension of the nullspace can be greater than $\sigma + 1$.

3 Gauss-Legendre elements

Similarly to the cases $k = 1$ (Crouzeix-Raviart), $k = 2$ (Fortin-Soulie) and $k = 3$ (Crouzeix-Falk) we define the Gauss-Legendre elements in the following way.

Definition 3.1.1 *The non-conforming k th-order Gauss-Legendre element on Ω is defined as*

$$P_h(\Omega) := \{p \in L^2(\Omega), \quad p|_{\Delta} \in \mathbb{P}_{k-1}(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} V_{h,k}^{nc}(\Omega) := & \{\vec{v} \in (L^2(\Omega))^2, \quad \vec{v}|_{\Delta} \in (\mathbb{P}_k(\Delta))^2, \quad \text{and } \vec{v} \text{ is continuous in all} \\ & k\text{th-order Gauss-Legendre points of all sides of } \Delta, \\ & \Delta \in \mathcal{T}_h, \quad \vec{v} = 0 \text{ in all } k\text{th-order Gauss-Legendre points} \\ & \text{on the triangle sides } E \subset \Gamma\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Let Δ be a fixed triangle with barycentric coordinates $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Consider the k th-order Gauss-Legendre points on the sides of Δ and the $\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ inner points of Δ with barycentric coordinates

$$\lambda_1 = \frac{j}{k}, \lambda_2 = \frac{\ell}{k}, \lambda_3 = \frac{m}{k}, \quad 1 \leq j, \ell, m \leq k-2, \quad j + \ell + m = k.$$

We want to find a polynomial from the space $\mathbb{P}_k(\Delta)$ which takes prescribed values in the points defined above.

Theorem 3.1.2 *(Stoyan and Baran [2]) The nullspace of the above interpolation problem is trivial for odd k and one-dimensional for even k .*

Based on the theorem above we can described a basis of $V_{h,k}^{nc}(\Omega)$ as follows.

Proposition 3.1.3 *For even k we can start from a standard Lagrangian basis in every Δ including its boundary. The resulting finite element velocities are continuous everywhere. Moreover, on each triangle there exists a nontrivial polynomial of order k such that on the sides of the corresponding triangle it is equal to a multiple of the k th-order Legendre polynomial defined on the given side. By adding this polynomial trianglewise to the Lagrangian basis we obtain trianglewise k -th order polynomials that are continuous on the common sides of two adjacent triangles in all the k th-order Gauss-Legendre points.*

Proposition 3.1.4 *For odd k , based on the above theorem, inside the triangles we can use a standard Lagrangian basis whereas on the triangle sides the Gauss-Legendre points can be taken as degrees of freedom.*

Definition 3.1.9 *Let $\Delta \in \mathcal{T}_h$ be a given triangle. Then the function*

$$B_{n,\Delta}^{(k)} := \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 P_k^{(0,0)}(1 - 2\lambda_i) - 1 \right\}$$

is called k th-order non-conforming bubble function.

On the sides of Δ (e.g. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = s$, $\lambda_3 = 1 - s$) we have

$$B_{n,\Delta}^{(k)} = \frac{1}{2} \left\{ P_k^{(0,0)}(1 - 2s) + P_k^{(0,0)}(2s - 1) \right\} = \begin{cases} L_k(s) & \text{for even } k, \\ 0 & \text{for odd } k, \end{cases}$$

where L_k denotes the Legendre polynomial of order k on the interval $[0, 1]$. Thus in the case of even k for the polynomial mentioned in Proposition 3.1.3 we can choose the function $B_{n,\Delta}^{(k)}$.

Remark 3.1.10 For even k one obtains the non-conforming velocity space $V_{h,k}^{nc}(\Omega)$ by adding trianglewise a k th order non-conforming bubble function to the conforming velocity space $V_{h,k}(\Omega)$ (defined by (2.1)):

$$V_{h,k}^{nc}(\Omega) = V_{h,k}(\Omega) + \left\{ \vec{v}, \vec{v}|_{\Delta} = \begin{pmatrix} \alpha_{\Delta} \\ \beta_{\Delta} \end{pmatrix} B_{n,\Delta}^{(k)}, \alpha_{\Delta}, \beta_{\Delta} \in \mathbb{R}, \Delta \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

In Examples 3.1.11–3.1.13 we show that in the case of $k = 2$ the function $B_{n,\Delta}^{(k)}$ is equal to the bubble used by Fortin and Soulie, while for $k = 4$ and

$k = 6$ it differs from the non-conforming bubbles defined in [6] only in a conforming bubble, which disappears on the whole boundary of Ω .

For odd values of k does not exist such a polynomial of order k that disappears on the boundary of a given triangle only in the k th-order Gauss-Legendre points.

For odd k in Theorem 3.1.6 and in Remarks 3.1.8 and 3.1.14 we described k linearly independent polynomials of order k defined over two adjacent triangles which behave similarly to the non-conforming bubble functions: they disappear in all the k th-order Gauss-Legendre points on the boundary of the quadrilateral formed by the two given triangles.

We show that for even k the non-conforming bubble function removes the algebraic singularity of the Scott-Vogelius elements.

Theorem 3.2.1 *For even values of k the space*

$$N_{V_{h,k}^{nc}}(\Omega) := \{q \in P_h(\Omega) : b(\vec{v}, q) = 0 \quad \forall \vec{v} \in V_{h,k}^{nc}(\Omega)\}.$$

is one-dimensional, it contains only the constant functions.

Using a modification of the macroelement technique of Stenberg [13] we also prove that for even k the Gauss-Legendre element is stable (see [1]).

We define finitely many macroelement classes satisfying

- (i) for each macroelement M from the classes the nullspace of the discrete gradient operator defined over M is one-dimensional, consisting of functions that are constant on M , i.e. $\dim N_M^{nc} = 1$, where

$$N_M^{nc} := \left\{ p \in P_M : \int_M p \operatorname{div} \vec{v} dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in V_{0,M}^{nc} \right\},$$

$$V_{0,M}^{nc} := \left\{ \vec{v} : \vec{v}|_\Delta \in (\mathbb{P}_k(\Delta))^2 \quad \forall \Delta \in M, \text{ and } \vec{v} \text{ is continuous in all } \right.$$

$$k\text{th-order Gauss-Legendre points of all sides of } \Delta, \Delta \subset M,$$

$$\left. \vec{v} = 0 \text{ in all } k\text{th-order Gauss-Leg. points of all edges on } \partial M \right\},$$

- (ii) for each h the triangles in $\mathcal{T}_h$ can be grouped to form macroelements such that for the so obtained macroelement partitioning each macroelement belongs to one of the macroelement classes.

Theorem 3.3.4 *If the above macroelement conditions are satisfied then for $k \geq 2$ the inf-sup condition holds for the finite element family defined in (3.1)–(3.2).*

Since in the case of even k the nullspace of the discrete gradient operator is one-dimensional for arbitrary polygonal domains Ω the only restriction in the choice of the macroelement classes is the macroelement condition (ii). The simplest possibility is to define only one class, such that each macroelement from this class consists of a single triangle.

Theorem 3.3.7 *For even values $k \geq 2$ the finite element (3.1)–(3.2) is stable.*

4 Numerical results

In this chapter we provide some numerical results connected to the non-conforming finite elements. Using Matlab computations for different values of k and for various triangulations in the case of Scott-Vogelius and Gauss-Legendre elements we compute the discrete inf-sup constants (see [3]). The obtained numerical result support the theoretical statements about the dimension of the nullspace of the discrete gradient operator. Further, using fourth-order Gauss-Legendre elements in the case of criss-cross triangulation of the unit square we solve a test equation described by Braess and Sarazin in [4].

References

Cited papers of the author

- [1] Á. Baran, G. Stoyan, Gauss-Legendre elements: a stable, higher order non-conforming finite element family, *Computing* **79**, 1–21 (2007).
- [2] G. Stoyan, Á. Baran, Crouzeix-Velte decompositions for higher-order finite elements, *Computers and Mathematics with Applications* **51**, 967–986 (2006).
- [3] G. Stoyan, G. Strauber, Á. Baran, Generalizations to discrete and analytical Crouzeix-Velte decompositions, *Numerical Linear Algebra with Applications* **11**, 565–590 (2004).

Cited works of other authors

- [4] D. Braess, R. Sarazin, An efficient smoother for the Stokes problem, *Applied Numerical Mathematics* **23**, 3–19 (1997).
- [5] F. Brezzi, R. S. Falk, Stability of higher-order Taylor-Hood methods, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **28**, 581–590 (1991).
- [6] Y. Cha, M. Lee, S. Lee, Stable nonconforming methods for the Stokes problem, *Applied Mathematics and Computation* **114**, 155–174 (2000).
- [7] M. Crouzeix, P. A. Raviart, Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, *RAIRO Analyse Numérique* **7**, 33–76 (1973).
- [8] M. Crouzeix, R. S. Falk, Nonconforming finite elements for the Stokes problem, *Mathematics of Computation* **186**, 437–456 (1989).

- [9] M. Fortin, M. Soulie, A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **19**, 505–520 (1983).
- [10] V. John, G. Matthies, Higher order finite element discretizations in a benchmark problem for incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **37**, 885–903, (2001).
- [11] M. Schäfer, S. Turek, The benchmark problem „Flow around a cylinder”. In: E. H. Hirschel, editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II* vol. **52** of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 547–566, (1996).
- [12] L.-R. Scott, M. Vogelius, Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials, *Modelisation Mathematique et Analyse Numerique* **19**, 111–143 (1985).
- [13] R. Stenberg, Analysis of mixed finite element methods for the Stokes problem: a unified approach, *Mathematics of Computation* **165**, 9–23 (1984).



Egy magas rendű nemkonform végeselem család

Doktori (PhD) értekezés tézisei

BARAN ÁGNES ÉVA

Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
Debrecen, 2007

1. Bevezetés

Jelen dolgozat témája egy magas rendű, stabil, nemkonform végeelem család leírása.

A dolgozat négy fejezetre tagolódik: az 1. fejezet tartalmazza azokat az alapfogalmakat és tételeket melyek a dolgozat további részeihez szükségesek, a 2., 3. és a 4. fejezetben találhatóak a szerző saját eredményei.

Számos példa mutatja, hogy a magas rendű véges elemek alkalmazása hasznos lehet áramlási feladatok megoldásánál [10], [11]. A viszkózus, összenyomhatatlan folyadékok áramlását a Stokes-egyenletek írják le, jelen dolgozatban a két-dimenziós Stokes feladat végeelem megoldásával kapcsolatban vizsgálunk háromszöges elemeket. A két-dimenziós Stokes feladat:

$$-\vec{\Delta}\vec{u} + \text{grad } p = \vec{f}, \quad (1.1)$$

$$-\text{div } \vec{u} = 0, \quad (1.2)$$

$$\vec{u}|_{\Gamma} = \vec{u}_0, \quad (1.3)$$

ahol Ω egy két-dimenziós tartomány melynek határa Lipschitz folytonos (Ω peremét jelöli Γ), $\vec{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ és $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a keresett sebesség, illetve nyomás, $\vec{f}$ pedig adott külső erő.

A (1.1)–(1.3) végeelem diszkretizációjához az Ω (poligonális) tartományt háromszögekre osztjuk, majd a keresett sebességet és nyomást háromszögenként adott fokszerű polinomokkal közelítjük. A nyomás függvény esetén gyakran nem folytonos approximációt használunk, így biztosítva az elemenkénti tömegmegmaradást.

Egy adott végeelem diszkretizáció kapcsán mindig felmerül az a kérdés, hogy az egyértelmű, stabil megoldás létezését biztosító inf-sup feltétel teljesül-e.

Scott és Vogelius [12] a $\mathbb{P}_k/\mathbb{P}_{k-1}$ végeelem párt vizsgálta (háromszögenként k -adrendű polinomok a sebesség, és $k-1$ -edrendű polinomok a nyomás közelítésére), ahol a diszkrét nyomás függvényekről nem feltételezzük, hogy folytonosak a háromszögek találkozásánál. $k \geq 4$ esetén az elem stabil, ha a triangularizáció nem tartalmaz úgynevezett közel szinguláris pontokat. A triangularizáció egy csúcsát akkor nevezzük szingulárisnak, ha az ott találkozó élek két egyenesen fekszenek.

Ha a h diszkretizációs paraméter csökkenésével a közel szinguláris pont tart a szinguláris helyzethez, akkor a stabilitás nem teljesül.

Egy másik, a szinguláris pontok által okozott probléma, hogy ezen pontok jelenléte esetén a diszkrét gradiens operátor nulltere nagyobb, mint az eredeti problémában a gradiens operátor nulltere, amely csak a konstans függvényeket tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy amíg folytonos esetben a nyomás egy additív konstanttól eltekintve egyértelműen meghatározható, addig a végelem diszkretizáció után kapott lineáris egyenletrendszernek többdimenziós nulltere van.

A rácstól független stabilitás kapcsán kerülnek előtérbe a nemkonform elemek: itt a sebességet approximáló háromszögenként definiált k -adrendű polinomok folytonosságát a szomszédos háromszögek közös oldalain csak bizonyos pontokban követeljük meg. Ezek a pontok a Gauss-Legendre pontok: az adott oldalon definiált k -adfokú Legendre polinomok zérushelyei. A nyomást, hasonlóan a Scott-Vogelius elemhez háromszögenként $k - 1$ -edfokú polinomokkal közelítjük.

A $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ esetet rendre Crouzeix és Raviart [7], Fortin és Soulie [9], ill. Crouzeix és Falk [8] vizsgálták.

Crouzeix és Raviart [7] belátták, hogy a Gauss-Legendre pontokban megkövetelt folytonosság biztosítja az optimális konvergenciarendet.

A másodrendű elem konstrukciója különbözik a $k = 1$, $k = 3$ esetektől. Ha $k = 1$, vagy $k = 3$, akkor a diszkrét sebességek egyértelműen leírhatóak, ha értékeiket előírjuk a háromszög peremén a Gauss-Legendre pontokban és a háromszög belsejében egyenletesen elosztott $\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ darab pontban. Ha $k = 2$, akkor létezik olyan, az adott háromszög fölött definiált másodrendű polinom, mely mind a hat Gauss-Legendre pontban eltűnik, ezt a polinomot másodrendű nemkonform buboréknak hívjuk. Ebben az esetben a diszkrét sebességi teret úgy kaphatjuk, hogy a másodrendű Scott-Vogelius elem sebességi terét háromszögenként a buborék függvénnyel bővítjük.

Az utóbbi években sokan foglalkoztak nemkonform elemek vizsgálatával.

Y. Cha, M. Lee és S. Lee [6] a $k = 4$, $k = 6$ eseteket vizsgálták. Itt, hasonlóan a $k = 2$ esethez a szerzők nemkonform sebességi teret úgy definiálták, hogy az alkalmas Scott-Vogelius sebességi teret egy k -adrendű buborék függvénnyel bővítették.

Jelen dolgozat célja olyan, tetszőleges rend esetén definiált nemkonform végelem család leírása, mely az alacsony rendű ($k = 1, 2, 3$) esetek általánosítása.

2. Néhány nevezetes véges elem család

A dolgozat későbbi részében definiált nemkonform végeselem család diszkrét sebességi tere páros k esetén az alkalmas Scott-Vogelius elem sebességi térének bővítése (hasonlóan a Fortin és Soulie által vizsgált $k = 2$ esethez), így előbb a Scott-Vogelius elemek algebrai vizsgálatával foglalkozunk.

A k -adrendű Scott-Vogelius elem esetén a diszkrét nyomás (P_h) és sebességi (V_h) terek:

$$\begin{aligned} P_h(\Omega) &:= \{p \in L^2(\Omega) : p|_{\Delta} \in \mathbb{P}_{k-1}(\Delta), \Delta \in \mathcal{T}_h\}, \\ V_h = V_{h,k}(\Omega) &:= \{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^2 : \vec{v}|_{\Delta} \in (\mathbb{P}_k(\Delta))^2, \Delta \in \mathcal{T}_h\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

ahol $\mathcal{T}_h$ az Ω poligonális tartomány egy triangularizációja, $\mathbb{P}_k(\Delta)$ a Δ háromszög fölött értelmezett legfeljebb k -adfokú polinomok tere.

Homogén peremfeltétel esetén a diszkrét Stokes feladat a következő: olyan $\vec{u}_h \in V_h$ és $p_h \in P_h$ függvényeket keresünk, melyekre

$$\begin{aligned} a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) + b(\vec{v}_h, p_h) &= (\vec{f}, \vec{v}_h)_0 \quad \forall \vec{v}_h \in V_h, \\ b(\vec{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in P_h \cap L_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

teljesül, ahol

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &:= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \\ b(\vec{v}, p) &:= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} dx. \end{aligned}$$

Scott és Vogelius [12] belátták, hogy ha $k \geq 4$ és a triangularizáció σ darab szinguláris pontot tartalmaz, akkor a diszkrét gradiens operátor nulltere, azaz a

$$N_{V_{h,k}(\Omega)} := \{p \in P_h : b(\vec{v}, p) = 0 \quad \forall \vec{v} \in V_h\}$$

halmaz $\sigma + 1$ dimenziós. Az általuk adott bizonyítás kombinatorikus, csak a nulltér dimenziójáról ad információt, a nulltér leírását nem tartalmazza.

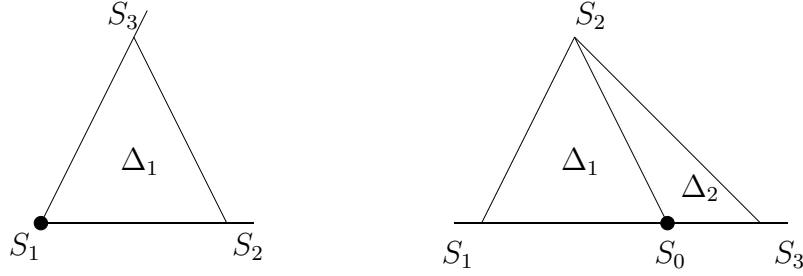
2.1.8 Tétel. *Ha egy Ω poligonális tartomány egy triangularizációja σ darab szinguláris pontot tartalmaz, akkor $k \geq 4$ esetén létezik az $N_{V_{h,k}(\Omega)}$ térnek egy olyan bázisa, amely a következő módon jellemezhető. A konstans függvény mellett σ darab olyan függvényt tartalmaz, melyek mindegyike megfeleltethető valamelyik szinguláris pontnak: csak a pontot tartalmazó háromszögekben vesz fel nullától különböző értékeket.*

A tétel bizonyítása során a külső szinguláris pont négy típusa, illetve a belső szinguláris pont esetén leírtuk a bázis hozzájuk rendelt elemét (lásd [2]). Az alábbi lemmákban $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ jelöli a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett (α, β) paraméterű, 1 főgyütthatójú Jacobi-polinomot.

2.1.9 Lemma. *Legyen S_1 egy I. típusú külső szinguláris pont (ld. a 2.1 ábrát). Jelölje Δ_1 az S_1 pontot tartalmazó háromszöget és legyen S_2, S_3 a Δ_1 másik két csúcsa. (Itt S_1S_2 és S_1S_3 a tartomány peremén fekszenek.) Jelölje $\lambda_3^{(1)}$ azt a baricentrikus koordinátát Δ_1 -ben, melynek értéke az S_1 pontban 1. Ekkor a*

$$q|_{\Delta_1} = P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), \quad q|_{\Omega \setminus \Delta_1} \equiv 0 \quad (2.2)$$

függvény eleme az $N_{V_{h,k}(\Omega)}$ halmaznak.



2.1. ábra. I. és II. típusú külső szinguláris pont

2.1.10 Lemma. *Legyen S_0 egy II. típusú szinguláris pont, Δ_1 és Δ_2 pedig az S_0 pontot tartalmazó háromszögek. Jelölje S_1, S_2 és S_2, S_3 a Δ_1 , ill. Δ_2 többi csúcsát, ahol az S_1S_3 szakasz az Ω peremén fekszik (ld. a 2.1 ábrát). Feltessük, hogy $S_0 = (0, 0)$ és legyen $S_1 = (a_1, b_1)$, $S_3 = (a_3, b_3) = -t_0(a_1, b_1)$ valamely $t_0 > 0$ esetén. Ha*

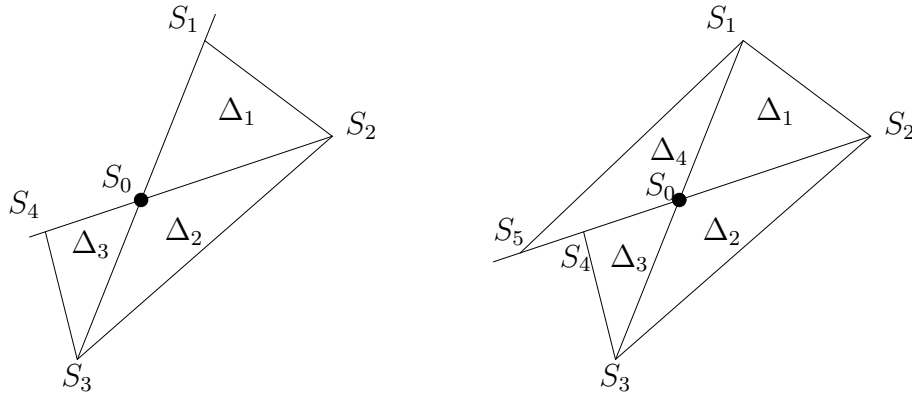
$$q|_{\Delta_1} = P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), \quad q|_{\Delta_2} = -\frac{1}{t_0} P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}), \quad q|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)} \equiv 0,$$

ahol $\lambda_2^{(1)}$ és $\lambda_1^{(2)}$ azok a baricentrikus koordináták Δ_1 -ben, ill. Δ_2 -ben, melyek értéke S_0 -ban 1, akkor $q \in N_{V_{h,k}(\Omega)}$.

2.1.11 Lemma. Legyen S_0 egy III. típusú szinguláris pont és $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ az S_0 -at tartalmazó háromszögek. Jelölje $S_i, i = 1, 2, 3, 4$, a $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ háromszögek többi csúcsát (lásd a 2.2 ábrát). Az S_0S_1 és S_0S_4 szakaszok az Ω peremén fekszenek. Legyen $S_0 = (0, 0)$ és $S_i = (a_i, b_i), i = 1, 2, 3, 4$, ahol $(a_3, b_3) = -t_0(a_1, b_1)$ és $(a_4, b_4) = -t_1(a_2, b_2)$ valamely $t_0, t_1 > 0$ esetén. Ekkor a

$$\begin{aligned} q|_{\Delta_1} &= P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), & q|_{\Delta_2} &= -\frac{1}{t_0}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}), \\ q|_{\Delta_3} &= \frac{1}{t_0t_1}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(3)}), & q|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3)} &\equiv 0, \end{aligned}$$

függvény eleme az $N_{V_{h,k}(\Omega)}$ halmaznak. Itt $\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}$ és $\lambda_3^{(3)}$ azok a baricentrikus koordináták Δ_1 -ben, Δ_2 -ben és Δ_3 -ban, melyek értéke az S_0 pontban 1.



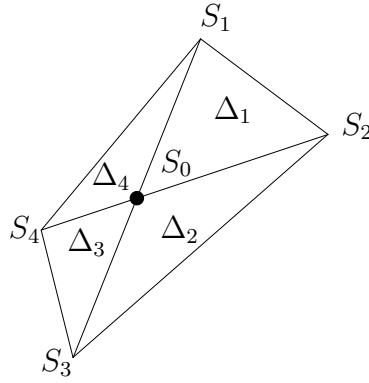
2.2. ábra. III. és IV. típusú külső szinguláris pont

2.1.12 Lemma. Legyen S_0 egy IV. típusú külső szinguláris pont és $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$, az S_0 -at tartalmazó háromszögek. Jelölje $S_i, i = 1, \dots, 5$, a $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$, többi csúcsát (lásd a 2.2 ábrát). Az $S_0S_4S_5$ szakasz az Ω peremén fekszik. Legyen $S_0 = (0, 0)$ és $S_i = (a_i, b_i), i = 1, \dots, 5$, ahol $(a_3, b_3) = -t_0(a_1, b_1)$, $(a_4, b_4) = -t_1(a_2, b_2)$ és $(a_5, b_5) = -t_2(a_2, b_2)$ valamely $t_0, t_1, t_2 >$

0 esetén. Ekkor a

$$\begin{aligned} q|_{\Delta_1} &= \mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), & q|_{\Delta_2} &= -\frac{1}{t_0}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}), \\ q|_{\Delta_3} &= \frac{1}{t_0 t_1}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(3)}), & q|_{\Delta_4} &= -\frac{1}{t_2}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(4)}), \\ q|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3)} &\equiv 0, \end{aligned}$$

függvény eleme az $N_{V_{h,k}(\Omega)}$ halmaznak. Itt $\lambda_3^{(i)}$, $i = 1, \dots, 4$, azok a baricentrikus koordináták Δ_i -ben, $i = 1, \dots, 4$, melyek értéke az S_0 -ban 1.



2.3. ábra. Egy belső szinguláris pont.

2.1.13 Lemma. Legyen S_0 egy belső szinguláris pont és Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, az S_0 körüli háromszögek (lásd a 2.3 ábrát). Legyen $S_0 = (0, 0)$ és $S_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, a Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, többi csúcsa, ahol $(a_3, b_3) = -t_0(a_1, b_1)$, $(a_4, b_4) = -t_1(a_2, b_2)$ valamely $t_0, t_1 > 0$ esetén. Ekkor a

$$\begin{aligned} q|_{\Delta_1} &= \mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), & q|_{\Delta_2} &= -\frac{1}{t_0}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}), \\ q|_{\Delta_3} &= \frac{1}{t_0 t_1}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(3)}), & q|_{\Delta_4} &= -\frac{1}{t_1}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(4)}), \\ q|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4)} &\equiv 0, \end{aligned}$$

függvény eleme $N_{V_{h,k}(\Omega)}$ -nak. Itt $\lambda_3^{(i)}$, $i = 1, \dots, 4$, azok a baricentrikus koordináták Δ_i -ben, $i = 1, 2, 3, 4$, melyek értéke az S_0 -ban 1.

Az Ω egy adott triangularizációja esetén minden szinguláris ponthoz hozzá lehet rendelni egy olyan függvényt, amely a szinguláris pont körüli háromszögekben a fenti lemmákban leírt alkalmas függvénnel egyenlő, a triangularizáció többi háromszögében pedig azonosan nulla. Be lehet látni, hogy az így kapott függvények lineárisan függetlenek.

A 2.1.13–2.1.15 Példákban megmutattuk, hogy $k < 4$ esetén a nulltér dimenziója nagyobb is lehet, mint $\sigma + 1$.

3. Gauss-Legendre elemek

A Crouzeix-Raviart ($k = 1$), Fortin-Soulie ($k = 2$) és Crouzeix-Falk ($k = 3$) elemekhez hasonlóan a Gauss-Legendre elemeket a következő módon definiáljuk:

3.1.1 Definíció. *Adott Ω tartomány és $\mathcal{T}_h$ triangularizáció esetén k -adrendű Gauss-Legendre elem*

$$P_h(\Omega) := \{p \in L_2(\Omega), \quad p|_{\Delta} \in \mathbb{P}_{k-1}(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.1)$$

$$V_{h,k}^{nc}(\Omega) := \left\{ \vec{v} \in (L_2(\Omega))^2, \quad \vec{v}|_{\Delta} \in (\mathbb{P}_k(\Delta))^2, \quad \text{és } \vec{v} \text{ folytonos két szomszédos} \right. \\ \left. \text{háromszög közös oldalán a } k\text{-adrendű Gauss-Legendre pontokban,} \right. \\ \left. \vec{v} = 0 \text{ a } \Gamma\text{-n fekvő oldalak } k\text{-adrendű Gauss-Legendre pontjaiban} \right\}. \quad (3.2)$$

Legyen Δ egy adott háromszög $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ baricentrikus koordinátákkal. Tekintsük a háromszög oldalain a $3k$ darab k -adrendű Gauss-Legendre pontot, a háromszög belsejében pedig a

$$\lambda_1 = \frac{j}{k}, \lambda_2 = \frac{\ell}{k}, \lambda_3 = \frac{m}{k}, \quad 1 \leq j, \ell, m \leq k-2, \quad j + \ell + m = k,$$

koordinátákkal leírt $\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ darab pontot. Olyan, a Δ háromszög felett definiált legfeljebb k -adfokú polinomot keresünk, ami a fent leírt $3k + \frac{(k-2)(k-1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ darab pontban megadott értékeket vesz fel.

3.1.2 Tétel. *(Stoyan, Baran [2]) A fenti interpolációs feladat nulltere triviális, ha k páratlan és 1-dimenziós, ha k páros.*

A fenti tétel alapján a $V_{h,k}^{nc}(\Omega)$ tér egy bázisát a következő módon írhatjuk le.

3.1.3 Állítás. *Páros k -ra tekintsük minden háromszög esetén (beleértve a háromszög peremét is) a standard Lagrange bázist. Csak ezt a bázist használva a diszkrét sebességek mindenhol folytonosak lesznek. Létezik olyan, az adott háromszög fölött definiált nem triviális k -adfokú polinom, amely a háromszög oldalain az ott értelmezett k -adfokú Legendre polinom konstansszorosa. Háromszögenként ezt a polinomot hozzáadva a Lagrange bázishoz olyan háromszögenként k -adfokú polinomokat kapunk, melyek a szomszédos háromszögek közös oldalain a k -adrendű Gauss-Legendre pontokban folytonosak.*

3.1.4 Állítás. *Páratlan k esetén a fenti tétel alapján a háromszögek belsőjében a standard Lagrange bázist használhatjuk, míg a háromszög peremén a Gauss-Legendre pontokat választhatjuk szabadsági fokoknak.*

3.1.9 Definíció. *Legyen $\Delta \in \mathcal{T}_h$ egy adott háromszög. Ekkor a*

$$B_{n,\Delta}^{(k)} := \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 P_k^{(0,0)}(1 - 2\lambda_i) - 1 \right\}$$

függvényt k -adrendű nemkonform buborék függvénynek hívjuk.

A Δ háromszög oldalain (pl. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = s$, $\lambda_3 = 1 - s$ esetén)

$$B_{n,\Delta}^{(k)} = \frac{1}{2} \left\{ P_k^{(0,0)}(1 - 2s) + P_k^{(0,0)}(2s - 1) \right\} = \begin{cases} L_k(s) & \text{páros } k\text{-ra,} \\ 0 & \text{páratlan } k\text{-ra} \end{cases}$$

teljesül, ahol L_k jelöli a $[0, 1]$ intervallumon definiált k -adfokú Legendre polinomot. Így páros k esetén a $B_{n,\Delta}^{(k)}$ függvényt választhatjuk annak a 3.1.3 Állításban említett polinomnak, mellyel az adott háromszögön kibővítjük a Lagrange bázist.

3.1.10 Megjegyzés. Páros k esetén a $V_{h,k}^{nc}(\Omega)$ nemkonform sebességi teret a következő módon kaphatjuk meg:

$$V_{h,k}^{nc}(\Omega) = V_{h,k}(\Omega) + \left\{ \vec{v}, \vec{v}|_{\Delta} = \begin{pmatrix} \alpha_{\Delta} \\ \beta_{\Delta} \end{pmatrix} B_{n,\Delta}^{(k)}, \alpha_{\Delta}, \beta_{\Delta} \in \mathbb{R}, \Delta \in \mathcal{T}_h \right\},$$

ahol $V_{h,k}(\Omega)$ a (2.1) által definiált konform sebességi tér.

A 3.1.11–3.1.13 Példákban megmutatjuk, hogy $k = 2$ esetén a $B_{n,\Delta}^{(k)}$ függvény megegyezik a Fortin és Soulie által használt buborék függvénnyel, míg $k = 4$ és $k = 6$ esetén a [6]-ban használt nemkonform buborék függvényektől csak egy konform (a háromszög teljes peremén eltűnő) „buborék”-tagban különbözik.

Ha k páratlan nem létezik olyan k -adfokú polinom, amely egy adott háromszög peremén csak a Gauss-Legendre pontokban tűnik el.

Páratlan k -ra 3.1.6 Tételben és 3.1.8, ill. 3.1.14 Megjegyzésben k darab olyan lineárisan független k -adfokú polinomot írtunk le, amelyek két adott szomszédos háromszög unióján úgy viselkednek, mint a nemkonform buborék függvények: értékük a két háromszög alkotta négyszög peremén az összes k -adrendű Gauss-Legendre pontban 0.

Beláttuk, hogy páros k esetén a nemkonform buborék függvény megszünteti a Scott-Vogelius elemeknél tapasztalt algebrai szingularitást:

3.2.1 Tétel. Páros k esetén a

$$N_{V_{h,k}^{nc}}(\Omega) := \{q \in P_h(\Omega) : b(\vec{v}, q) = 0 \quad \forall \vec{v} \in V_{h,k}^{nc}(\Omega)\}.$$

tér egy-dimenziós, csak konstans függvényeket tartalmaz.

Beláttuk, hogy páros k esetén a Gauss-Legendre elem stabil. Ehhez a Stenberg által konform esetre leírt makroelem módszert [13] módosítottuk nemkonform esetre (lásd [1]).

A módszer lényege, hogy véges sok olyan makroelem osztályt definiálunk, hogy

- (i) az osztályok mindegyikére teljesül, hogy az abba tartozó M makroelemek fölött a diszkrét gradiens operátor nulltere egy-dimenziós (csak a konstans függvényeket tartalmazza), azaz $\dim N_M^{nc} = 1$, ahol

$$N_M^{nc} := \left\{ p \in P_h : \int_M p \operatorname{div} \vec{v} dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in V_{0,M}^{nc} \right\},$$

$$V_{0,M}^{nc} := \left\{ \vec{v} : \vec{v}|_{\Delta} \in (\mathbb{P}_k(\Delta))^2 \quad \forall \Delta \in M, \text{ és } \vec{v} \text{ folytonos minden} \right.$$

k -adrendű Gauss-Legendre pontban két szomszédos háromszög közös oldalán, $\vec{v} = 0$ a k -adrendű Gauss-Leg. pontokban a ∂M -hez tartozó oldalakon $\left. \right\}$,

- (ii) tetszőleges h esetén a triangularizáció háromszögei összecsoportosíthatóak makroelemekké úgy, hogy a makroelemek mindegyike besorolható valamelyik osztályba.

3.3.4 Tétel. *Ha a fenti két makroelem feltétel teljesül, akkor $k \geq 2$ esetén a véges elem inf-sup stabil.*

Korábban beláttuk, hogy tetszőleges páros k -ra a diszkrét gradiens operátor nulltere egy-dimenziós a triangularizácótól és az Ω tartománytól függetlenül, ezért a stabilitási bizonyításban a makroelem osztályok definiálásánál csak az (ii) makroelem feltétel teljesülésére kell figyelniünk. A legegyszerűbb eset, ha csupán egyetlen osztályt definiálunk – az ebbe az osztályba tartozó makroelemek egyetlen háromszögből állnak – így az (ii) feltétel triviálisan teljesül.

3.3.7 Tétel. *Páros $k \geq 2$ esetén a (3.1)–(3.2) elem stabil.*

4. Numerikus eredmények

Ebben fejezetben a nemkonform véges elemekkel kapcsolatos numerikus eredményeket közlünk. Matlab programok segítségével a Scott-Vogelius és a Gauss-Legendre elemek esetén az egységnégyzet különböző triangularizációira kiszámítottuk a diszkrét inf-sup konstanst néhány k értékre (lásd [3]). A futási eredmények alátámasztják a diszkrét gradiens nullterének dimenziójára vonatkozó elméleti eredményeket is.

Szintén Matlab segítségével az egységnégyzet criss-cross triangularizációja esetén a negyedrendű Gauss-Legendre elemet használva megoldottunk egy Braess és Sarazin által [4] ismertetett tesztfeladatot.

Irodalomjegyzék

A szerzőnek a tézisekben idézett dolgozatai

- [1] Á. Baran, G. Stoyan, Gauss-Legendre elements: a stable, higher order non-conforming finite element family, *Computing* **79**, 1–21 (2007).
- [2] G. Stoyan, Á. Baran, Crouzeix-Velte decompositions for higher-order finite elements, *Computers and Mathematics with Applications* **51**, 967–986 (2006).
- [3] G. Stoyan, G. Strauber, Á. Baran, Generalizations to discrete and analytical Crouzeix-Velte decompositions, *Numerical Linear Algebra with Applications* **11**, 565–590 (2004).

Más szerzők idézett munkái

- [4] D. Braess, R. Sarazin, An efficient smoother for the Stokes problem, *Applied Numerical Mathematics* **23**, 3–19 (1997).
- [5] F. Brezzi, R. S. Falk, Stability of higher-order Taylor-Hood methods, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **28**, 581–590 (1991).
- [6] Y. Cha, M. Lee, S. Lee, Stable nonconforming methods for the Stokes problem, *Applied Mathematics and Computation* **114**, 155–174 (2000).
- [7] M. Crouzeix, P. A. Raviart, Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, *RAIRO Analyse Numérique* **7**, 33–76 (1973).
- [8] M. Crouzeix, R. S. Falk, Nonconforming finite elements for the Stokes problem, *Mathematics of Computation* **186**, 437–456 (1989).

- [9] M. Fortin, M. Soulie, A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **19**, 505–520 (1983).
- [10] V. John, G. Matthies, Higher order finite element discretizations in a benchmark problem for incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **37**, 885–903, (2001).
- [11] M. Schäfer, S. Turek, The benchmark problem „Flow around a cylinder”, In: E. H. Hirschel, editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II* vol. **52** of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 547–566, (1996).
- [12] L.-R. Scott, M. Vogelius, Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials, *Modelisation Mathematique et Analyse Numerique* **19**, 111–143 (1985).
- [13] R. Stenberg, Analysis of mixed finite element methods for the Stokes problem: a unified approach, *Mathematics of Computation* **165**, 9–23 (1984).