Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

AXIOMATIKAI VIZSGÁLATOK

AXIOMATIC INVESTIGATIONS

Csabay Károly

Témavezető: Dr. Daragó József

DEBRECENI EGYETEM
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2012

Bevezetés

Tizenhét éven át tanítottam a felsőoktatásban, sőt, amikor erre még lehetőség volt, képesítés nélkül két évet középiskolában is. A tizenhétből tizenkét év során formális nyelvek elmélete és automataelmélet tárgyakból tartottam gyakorlatot elméleti nyelvész hallgatóknak. Öt évig pedig *Szarvason* óvodapedagógus- illetve tanítószakos hallgatókat oktattam a szaknak megfelelő matematikai tárgyakra. Most befejezett PhD-hallgatói kutatómunkám során ezenkívül egy féléven át tartottam nyolcadik osztályos általános iskolásoknak „különleges” matematikaórákat egy tehetséggondozó program keretében. (Ennek a kutatásnak a tapasztalatairól részletesen beszámoltam.[*])

Minden területen az volt a jellemző — és ezt különösen a felsőoktatásban szerzett tapasztalatok vonatkozásában szeretném hangsúlyozni —, hogy a hallgatóság nem volt matematikai irányultságú, alapvetően a humaniórák művelőinek tartották magukat, illetve azzá kívántak válni. Figyelembe véve ezt a körülményt, azt a megoldást alkalmaztam, hogy a lehető legszigorúbb és legmélyebb fogalmi megalapozottságra kell törekedni. Különösen igaz ez azoknak a tanítószakos fiataloknak az esetében, akik munkájuk során a 6–10-éves kisgyerekek gondolkodásában éppen e fogalmak megalapozását fogják majd elvégezni.

Kutatómunkám során — több kísérlet átgondolása és lehetőségek felmérése után — három területet választot-

---

[*] Egy tehetséggondozó program tapasztalatai / Csabay Károly == Új Pedagógiai Szemle (megjelenés alatt)

tam, amelyeken keresztül a szigorú fogalmi megalapozás lehetőségét igyekszem bemutatni. E három terület a következő:

- A közrefogás / elválasztás / folytonosság fogalomköre — ezzel kapcsolatosan naiv nyelvhasználati reflexek is rögzülnek már a beszédtanulás során, s e pontatlanságok nem küszöbölődnek ki automatikusan; szisztematikus átgondolásra van szükség.
- A prímek / felbonthatatlanok fogalma — ez a terület megjelenik már az általános iskolában is, és a középiskolai oktatásban jelentős szerepet kap. Rendkívül mély és megoldatlan problémái miatt ugyanakkor a legmagasabb szintű matematikaoktatásban is folyamatosan jelen van.
- Halmazelméleti fogalmaink — bár már korábban is találkozunk ezzel a diszciplínával és szóhasználatát alkalmazzuk is — csak a felsőoktatásban válnak megalapozottá. A ciklikus halmazokkal kapcsolatos problémakör nehézségeit jól megvilágítják azok a kutatási tapasztalatok, amelyekről programfejlesztők számolhatnának be például a Novell fejlesztése során: az egymásba ágyazott felhasználói csoportok engedélyezése milyen elméleti nehézségek felmerüléséhez vezetett a szoftverfejlesztésben.

A területek kiválasztása, illetve az eredmények tárgyalása során azt az elvet tartottam szem előtt, hogy *a matematikadidaktika szerepe nem ér véget az általános- és a középiskolai oktatásban*. Matematikadidaktikai megfontolásokat szabad és kell is tenni a felsőfokú matematikai képzésben is. Az itt bemutatandó eszközök e célt is jól szolgálhatják.

A kutatási eszközök bemutatása

A közrefogás / elválasztás fogalomkör területén végzett axiomatikai vizsgálatok során felállítottam egy **axiómarendszert**, amely így ebben a formában *tőlem származik*, és támaszkodik *Eukleidész* axiómáira valamint *Pash* és *Veblen* hasonló kutatási területen alkalmazott összeállítására. Az axiómarendszer a következő képzeteket fogalmazza meg:

- A határpontok és a belső pontok elkülönülnek.
- A közrefogás szimmetrikus reláció.
- Bármely szakasz folytatható.
- A közrefogott pont nem léphet ki a közrefogó pontok közül.

Az elvégzett oktatási kísérlet illetve az axiómarendszerrel végiggondolt megfontolások azt mutatják, hogy ez az axiómarendszer csakugyan jól ragad meg valóságosnak érzett viszonyokat és szemléletes. Igen jól kezelhető véges modelleket ad, amelyek kitűnő oktatási segédletnek bizonyulhatnak. A szóbanforgó véges modellek generálására, elemszámuk és reláció-elemszámuk leszámlálására különböző programozási nyelveken *segédprogramokat* írtam. Az elemszámokból álló, így keletkező *sorozatok* igen mély összefüggéseket is mutatnak, és további tudományos kutatás tárgyai is lehetnek.

A prímfogalom megalapozása érdekében a szokásos *gyűrűkörnyezettől elszakadva* a lehető legegyszerűbb algebrai struktúrákat (*grupoidok*) vettem igénybe a vizsgálathoz. A kísérleti oktatás valamint a további didaktikai megfontolások is azt támasztják alá, hogy a **félcsoport-**

környezet a legalkalmasabb a fogalom vizsgálatához (az asszociativitás nem túl erős követelmény, és megkíméli a tanárt az elburjánzó zárójelhasználattól, amely elvonná a figyelmet a lényegtől). Bevezettem egy eddig nem használt **terminológiát** (*bontás*), amellyel — feltételezésem szerint — elő lehet segíteni az oszthatóságtól való elvonatkoztatást. Ugyanebben a tárgyban bevezettem ismét egy tőlem származó **axiómarendszert** (*HT-rendszer*), amellyel prímek generálására (felkutatására) tettem kísérletet.
Félcsoportok, gyűrűk és HT-rendszerek generálására és vizsgálatára *programokat* fejlesztettem, valamint didaktikailag jól használható *HTML-felületeket* alakítottam ki.

Végül a halmazelméleti fogalmak megalapozásával foglalkozó kutatási területen a következő didaktikai lépéseket alkalmaztam:

- Olyan közismert fogalmak, mint a közösségi portálok felhasználásával bemutattam a *Russell-paradoxonnak* nevezett problémát.
- Az elemkénti tartalmazásnak, mint relációnak *Descartes*-féle koordinátarendszer celláiban történő bemutatására kialakítottam a **bekorongozásnak** elnevezett eljárást.
- A *Zermelo–Fraenkel-axiómarendszer* egyes axiómáinak lépésenkénti bevezetésével megfogalmaztam a követelményeknek megfelelő „bekorongozási” feladatot.
- A feladatnak eleget tevő véges modellek *elemszámát* vizsgáltam.
- Rámutattam a ciklikus halmaz jelenlétének lehetőségére, illetve arra, hogy a Russell-féle paradoxon-

ban említett halmaz létrehozására miért nem nyílik lehetőség — ezzel mintegy feloldva a probléma axiómajellegét.

A most említett modellek generálására — ugyanúgy, ahogy az előzőekben — különböző programozási nyelveken *programokat* írtam.

Kutatási eredmények

- Az **elválasztási rendszer** fogalmának bevezetése, axiómarendszerének (nyílt és zárt változatban való) fölállítása, a változatok tanulmányozása.
- **Véges modellek** (részbeni) feltérképezése, ábrázolásuk, elemszámokkal kapcsolatos vizsgálatok.
- **Eljárások bemutatása elválasztási rendszerek generálására** — ideértve az elválasztási rendszerekből származtatott további elválasztási rendszereket is —, annak **bizonyítása**, hogy a származtatási eljárások elválasztási rendszert adnak.
- Néhány további, az elválasztási rendszerekkel kapcsolatos **tétel** felállítása és **bizonyítása**.
- A **folytonosság** *Dedekind*- illetve *Cantor*-féle megközelítésének didaktikai szempontból is jól felhasználható **interpretálása** elválasztási rendszerekben.
- Annak megmutatása, hogy a *Dedekind*- és a *Cantor*-féle tulajdonság **független** egymástól.
- A **szomszédosság**, az **intervallum**, az **egyenes** fogalmának interpretálása ebben az axiomatikai környezetben.
- Definíciós lehetőségek megadása a **nyílt halmazok** fogalmának megragadására, az **erős** és

gyenge nyíltság definiálása, kezdeményezés az értelmezés topológiai következményeinek vizsgálatára.

- A **bontás**, mint didaktikailag új terminológia bevezetése.
- A **bonthatósági** és **asszociáltsági** relációk definiálása, tulajdonságaik elemzése általában vett *grupoidokon* illetve *félcsoportokon*.
- A **prím** és a **felbonthatatlan** definiálása, a definíciók közötti **formai összhang** megteremtése.
- A **prímek felbonthatatlanságának** illetve a **felbonthatatlanok prímtulajdonságának** mély és alapos vizsgálata.
- A „kommutatív félcsoportban a prímek felbonthatatlanok" **tétel kimondása és bizonyítása**.
- **Példa** bemutatása olyan egységelemes félcsoportra, amelyben **felbontható prímek** találhatók.
- A **legnagyobb közös bontó** és a **legkisebb közös bontott** fogalmának bevezetése, az általuk kialakuló **hálószerkezet** felvázolása.
- A **HT-rendszernek** nevezett algebrai struktúra definiálása, axiómái függetlenségének bizonyítása, további tanulmányozása, néhány kisebb **tétel** kimondása és bizonyítása.
- Prímek generálására vonatkozó **tétel** kimondása és bizonyítása HT-rendszerben.
- Az **ikerprím** újradefiniálása a fogalomnak a természetes számokénál tágabb értelmezhetősége érdekében. Az új értelmezés bemutatása a *Gauss-prímek* körében.

- A *Russell-paradoxon* elemzése során magának a paradoxonnak a **didaktikai értelmezése**, a **ciklikus halmaz** fogalmi rögzítése.
- Halmazelméleti alapfogalmak vizsgálata céljából a **bekorongozásnak** elnevezett eljárás bevezetése, didaktikai erejének bemutatása.
- A *Zermelo–Fraenkel*-féle axiómarendszer három axiómájának lépésenkénti **bevezetése a modellbe**, a bevezetésnek a modellre gyakorolt hatásának vizsgálata, a modellek **elemszámára** vonatkozó megfontolások megtétele.

- Kitekintés és javaslat **önálló kutatási témák** továbbvitelére mindhárom területen.

Introduction

I taught seventeen years in higher education, even when this was still possible, without qualification two years in high school as well. In these seventeen years I gave theoretical linguist students practice of formal language theory and automata theory for twelve years. For five years I taught in Szarvas kindergarten teacher and teacher-students in corresponding mathematical courses. While completing my PhD research I also gave a half year in an eighth-year elementary school as member of a "special" math program for gifted children. (Experiences of this research will be publicized in detail. See footnote on page 3.)

On each area was typical — and I emphasize it particularly having regard to experiences gained in higher education — that the audience were not math-oriented, they mainly advocate themselves as of cultivators in the humanities, at least they wanted to become. Considering this fact, the applied solution was that the possible deepest and strictest conceptual strength should be encouraged. This is especially true for those pupil-teachers who will work among 6 to 10-year-old children laying the foundations of these concepts in their thinking.

During my research — after thinking about several attempts and explore ways — I chose three areas through which I am trying to present the possibility of the strictest conceptual foundation. These three areas are:

- The concepts of embrace, separation, and continuity — related which there are fixed naïve language using reflexes also at the early language learning, and these inaccuracies are not eliminated automatically; we need a systematic consideration.

- The concepts of primes and irreducibles — this area there appears even in elementary school and it gains a significant rule in high school. Because of their extraordinarily deep and unresolved problems they have a permanent attendance also in university teaching.
- Our theoretical concepts about set theory — although we meet them earlier and we use their nomenclature — become fixed only in the higher education. The heaviness of the concepts of cyclic sets are illuminated by the research experiences about which the Novell program developers could report: what a number of theoretical difficulties there appeared when they allowed nested groups of users.

At the selection of areas, and discussion of the results I kept in mind the principle that the role of mathematical didactic methods does not end in the elementary and secondary education. Mathematical didactic considerations may and should be done also in the upper level of mathematical training. The tools presented here can serve this purpose well.

Presentation of research tools

When investigating the concepts of embrace and separation I set up a system of axioms, so that originates from me in this form, and relies on the axioms of *Euclid*, *Pash*, *Veblen* and other compilations used on similar areas of research. The axiom system can formulate the following ideas:

- The border points and internal points separate.
- The embrace is a symmetric relation.
- Any section can be continued.
- The embraced point is not allowed to leave the position of between the embracing points.

The educational experiments carried out and the considerations thought about the axiom system show that this axiom system catches just as well realistic conditions, and it is clear. It gives very easy to use finite models and they could prove to be an excellent teaching aid. Aiming to generate finite models at issue, to count their order and their relation-order I have written several utilities on different programming languages. The numerical analysis of the resulting series shows some very deep correlations, and it can be also target of other scientific researches.

In order to substantiate the concept of primes I detached from the usual ring environment and I used as simple algebraic structures as groupoids for the investigation. The experimental teaching as well as further considerations bear out that the semigroup is the most suitable environment for testing the concept (the associative property is not a very strong requirement and saves the teacher from the proliferating use of parentheses which could distract the attention from the matter). I introduced an unprecedented level of terminology (*splitting*), which — I assume — can facilitate the abstraction of the authority of division. In the same object I introduced an axiom system once again from me (called *HT-system*), by which I have attempted to generate (to develop) primes.

I developed and used programs for generating and testing semi groups, rings and HT-systems, and I created didactically well-formed HTML interfaces.

Finally, on the research area establishing set-theoretic concepts, the following didactic steps were used:

- Using as well-known concepts such as social networking, I presented the problem called *Russell's* paradox.
- To show the relation of element containing in the cells of a Cartesian coordinate system, I have developed the procedure named "coining".
- With the step by step introduction of some axioms of the *Zermelo-Fraenkel* axiom system I formulated the requirements of the "coining" task.
- I studied the number of finite models obeying the task.
- I pointed out the possibility of the presence of cyclic sets, as well as the lack of possibility to create a set that is in *Russell's* paradox — having quasi dissolved the axiomatic nature of the problem.

To generate the above-mentioned models — as well as the above — I have written programs in different programming languages.

Research results

- The introduction of the concept of separation system, building an axiom system (open and closed versions), the study of variations.
- (Partial) mapping of finite models, pattern analysis, element number related studies.

- Presentation of procedures generating separation systems — including when the separation system is derived from earlier separation systems — having proven that the derivation procedures provide separation system.
- Having set up and proven some additional theorems related to the separation systems.
- Setting up an interpretation — useful also from the didactic point of view — of the continuity, so in *Dedekind's* as in *Cantor's* approach in separation systems.
- Pointing out that the *Dedekind's* and *Cantor's* properties are independent.
- Interpretation of the concept of the adjacency, of the interval, of the line in context of this axiomatical environment.
- Giving options to define the concept of open sets, the definition of strong and weak openness, initiative to test the topological interpretation of the consequences.

- Introducing the concept of *splitting* as a didactically new terminology.
- The definition of splitablity and associate relations, analysis of their properties taken on usual groupoids and semi groups.
- The definition of prime as well as of irreducible; creating between the both definitions a formal concordance.
- A deep and thorough investigation of the irreducibility of primes as well as the prime properties of irreducibles.

- Having expressed and proven the theorem as: "primes in commutative semi groups are irreducible".
- Demonstrating an example of a semi group equipped with a unit in which it is possible to find reducible primes.
- Introducing the concepts of the greatest common splitter so as of the least common split; outlining the lattice construct established by them.
- Definition of the algebraic structure called HT-system; having proven the independency of its axioms; further investigations on it; having set up and proven some smaller theorems.
- Expressing and proving the theorem about generating primes in HT-systems.
- Redefinition of twin primes aiming to expand the competency of the definition onto areas wider than the natural numbers. An illustration of the new concept in the field of the *Gauss*-primes.

- Accompanying the *Russell's* paradox giving an absolute concept of paradox at all; conceptual fixing the idea of cyclic sets.
- Aiming to the investigation of basic concepts of the set theory, having introduced a procedure, called "coining"; and, having shown its didactic power.
- A step by step introduction of three axioms of the *Zermelo-Fraenkel* axiom system; investigating the impact of the introduction onto the model; expressing considerations about element order of the several models.

- Outlook and proposals are taken for forwarding independent research projects in all the three areas.

PUBLIKACIOK
PUBLICATIONS
(Csabay Károly)

Referált folyóiratok
Refereed journals

1. Combinatorics teaching experiment / Károly Csabay and József Daragó == Teaching Mathematics and Computer Science, 9/1 (2011), 27–44. p. MathEduc Database ME 2012a.00622

2. How long is the diagonal of a square? (An investigation of a paradox) / Csabay Károly — Daragó József == New Trends in Humanities and Science in the Eastern European Region / ed. Stanisław Lipiński. — Moscow : Academy of Professional Development and Re-Training of Educators, 2010., 59–78. p.

3. Középértékek / Csabay Károly — Daragó József == Polygon, 2008. december, 91–97. p. — In Hungarian MathEduc Database ME 2010b.00504

4. Egy félcsoport bemutatása / Csabay Károly — Daragó József == Polygon, 2013. január, 122–127. p. — In Hungarian

Konferencia-előadások
Conference presentations

1. „HT-rendszer” — egy új lehetőség az építőkövekre bontás bemutatására / Csabay Károly. — 2010. január 23-an elhangzott MIDK-konferencia-előadás. — In Hungarian

2. A prímfogalom általánosításából adódó didaktikai lehetőségek / Csabay Károly. — 2009. október 10-én, doktorandusznapon elhangzott konferencia-előadás. — In Hungarian

3. Egy gimnáziumi csoporttal lefolytatott kísérlet eredményei — Egy sorozatfajta elemzése / Csabay Károly.— MIDK2009-konferencia-előadás. — In Hungarian

4. Axiomatikai vizsgálatok / Csabay Károly. — 2006. november 8-án, a Magyar Tudomány Napja alkalmából elhangzott konferencia-előadás. — In Hungarian

Nemreferált források
Other sources

1. Egy tehetséggondozó program tapasztalatai / Csabay Károly == Új Pedagógiai Szemle. — Megjelenés alatt. — In press. — In Hungarian

2. Verschiedene Mittel / Csabay Károly — Daragó József == Közös út : Tanulmánykötet. — Ungvár, PoliPrint, 2006., 166–173. p. — In German

3. An Idea on Feature Geometries / Csabay Károly == Research Institute of Linguistics, MTA, Computational Linguistics Project; Document No. 11.; Budapest, 1990.