



EGY FELADAT – TÖBBFÉLE MEGOLDÁS
Tanítási ötletek az elemi geometria néhány
témaköréhez

doktori (PhD) értekezés

Dr. Darvasi Gyula

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2005.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok
Doktori Iskola matematika-didaktika programja keretében készítettem a
Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2005.

.....

Dr. Darvasi Gyula
főiskolai docens

Tanúsítom, hogy Dr. Darvasi Gyula doktorjelölt 2001-2003 között a fent
megnevezett Doktori Iskola matematika-didaktika programjának keretében
irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a
jelölt önálló alkotói tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az
értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2005.

.....

Dr. Kovács Zoltán
egyetemi docens

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék hálás köszönetet mondani mindazoknak, akik hozzájárultak értekezésem sikeres elkészítéséhez:

- Cofman Juditnak, aki csodálatos energiával látott hozzá az értekezés fő céljainak meghatározásához,
- Kovács Zoltánnak, aki témavezetőként végig figyelemmel kísérte munkámat, tanácsokat adott és mindenkor segített,
- Lajkó Károlynak, aki kezdettől fogva mellettem állt, s akihez minden kritikus pillanatban bizalommal fordulhattam,
- Czeglédy Istvánnak, aki intézetünk előző vezetőjeként sokszor látott el hasznos tanácsaival,
- Gát Györgynek, aki intézetünk jelenlegi vezetőjeként és a TTFK Tudományos Bizottság titkáráként is sokat segített,
- Toledo Rodolfonak, aki közvetlenül járult hozzá munkám sikeréhez,
- Lakatosné Sipos Erikának, aki a gépelés legnagyobb részét végezte,
- Budaházi Erikának, aki az értekezést végleges formába öntötte,
- minden munkatársamnak, akik áldozatos vállalásukkal közvetve lehetővé tették, hogy értekezésem összeállításához több időm legyen,
- feleségemnek és két gyermekemnek, akik mindvégig biztattak és személyes példamutatásukkal pozitív háttérrel adtak.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Háromszög-geometriai témák	3
1.0. Átdarabolási alapismeretek	
1.1 A pitagorasz-i tételcsoporthoz átdarabolásos bizonyításai	16
1.2. A Pitagorasz-tétel két nem közismert általánosítása	32
1.3. Derékszögű háromszög átdarabolása téglalappá	45
1.4. A háromszög szögfelezőinek hossza	58
1.5. Egy oldallal párhuzamos Euler-egyenes	83
2. Körgeometriai témák	94
2.0. Körgeometriai alapismeretek	
2.1 Pont körre vonatkozó hatványa	96
2.2. Pont inverze	101
2.3. Két kör hatványvonala	116
3. Módszertani elemzés	129
3.0. Az elemzés tárgya	
3.1. A felmérés alapjai	130
3.2. A felmérés elemzése	139
3.3. A vizsgált feladathoz alkalmazható tételek	141
Zárószó: Miért van szükség bizonyításra és többféle megoldásra?	144
Összefoglaló	148
Summary	152
Irodalomjegyzék	156
Függelék:	160
- Módszertani felmérés adatai	
- A szerző publikációs jegyzéke	165
9. sz. betétlap	172

BEVEZETÉS

Első kérdésként az vetődhet fel, hogy mi az elemi geometria, amelynek néhány témakörével ebben az értekezésben foglalkozni kívánunk. Bármennyire egyszerűnek tűnhet ez a kérdés, ám a válaszadás mégsem könnyű. Ugyanis az elemi geometria fogalmát minden tekintetben kielégítő módon meghatározni nemcsak nehéz, de szinte lehetetlen feladat. Ha elfogadjuk, hogy az elemi síkgeometria a háromszögek, sokszögek és körök tudománya, akkor mindenki ugyanazt fogja kérdezni: Mi lehet ebben még időszerű? Erre már könnyebb válaszolni. Jóllehet az elemi geometria sok problémája részben már évszázadok óta ismert, de mindig adódnak újabb felfedezések, hiszen az ismert geometriai konfigurációk más szemszögből történő vizsgálata révén el lehet jutni új eredményekhez. S az elemi geometrián kívül nincs a matematikának egy másik területe, ahol ilyen kevés segédeszközzel (pl. egybevágóság, hasonlóság) komoly és mesterkéletlen problémák eredményesen tárgyalhatók lennének.

Az elemi geometria iskolai szinten a matematika legjobb példaképe abban az értelemben, hogy az iskolai tananyag egyetlen más területén sincs a matematika annyira teljesen és tipikus módon realizálva, mint az elemi geometriában. Éppen ezért a geometriának a tanulókra gyakorolt pozitív hatásaként a geometria megértéséből következik a matematika többi területének a megértése is. Kétségtelen tény továbbá, hogy a geometriát mindig időszerűvé teszi az alakzatok szépsége. Ennek az aspektusnak ma is egyre nagyobb jelentősége van a komputergrafikában.

A matematika tanításának egyik legfontosabb feladata annak elérése, hogy a tanulók ne a kész ismereteket passzívan befogadó, hanem alkotó és rendszerező gondolkodású egyénekké váljanak. Ehhez kívántam hozzájárulni értekezésemmel, amelynek célja az elemi síkgeometria néhány témaköréhez kapcsolódva lehetőségeket bemutatni a tanulók probléma-megoldási és bizonyítási képességeinek effektív fejlesztésére. Ennek eléréséhez döntő jelentőségű, hogy egy adott probléma esetén a tanulók ne elégedjenek meg egyetlen megoldással, hanem törekedjenek újabb (egyszerűbb, rövidebb, racionálisabb, elegánsabb) megoldások keresésére. Ez a geometria tanítása során a tartalmi célok mellett fontos szerepet játszó folyamatok célok egyike.

Az értekezés úgy van elrendezve, hogy az elemi geometriai vizsgálódások és a hozzájuk kapcsolódó didaktikai fejtegetések többnyire egymásba összefonódva jelennek meg, s így megmarad az elemi geometria attraktivitása, de megmutatkozik a matematikára jellemző gondolkodási és munkamódok tanításának és tanulásának a jelentősége is.

A választott témakörök teljes leírásának igénye nélkül egy-egy releváns téma tanítására mutatunk be sokféle ötletet azzal a szándékkal, hogy az értekezés jól hasznosítható legyen az általános és középiskolai, sőt esetenként még a felsőfokú oktatásban is. Ez a hasznosítás azonban nem az itt leírt összes ötlet és megoldás feltétlen elfogadását és a tanítás során történő változatlan feldolgozását jelentheti, hanem sokkal inkább a tanítás tartalmi és folyamati céljainak megfelelő válogatást, miközben figyelembe kell venni a tanulók előismereteit, értelmi fejlettségét és munkamorálját is. Egy matematikai feladat vagy tétel esetén a tanítási órán többnyire csak néhány megoldásra jut idő, ám a minél több megoldás felfedezésére törekvést a tanulóknál nem is egy óra alatt kell elérni, hanem folyamatos tevékenykedtetéssel. Ugyanekkor azt sem szabad elfelejteni, hogy az egyszerre túl sok megoldás nem mindig segíti elő a tekintett probléma megértését, sőt éppenséggel gátolhatja azt, minthogy a tanulók figyelmét elvonja a bizonyításokhoz szükséges háttérismeretek befogadása.

Egy adott probléma feldolgozása viszont azt is magába foglalja, hogy a tanulókkal mintegy felfedező útra indulunk, ami általában nem egyenes, hanem sok-sok útelágazással és kerülő úttal van tele. Mindebből a tanuló megtapasztalhatja, hogy egyrészt ugyanazon felfedezéshez több út is vezethet, másrészt a kerülő utak sem teljesen haszontalanok, hiszen bejárásuk révén esetleg újabb felfedezések tehetők.

1. HÁROMSZÖG-GEOMETRIAI TÉMÁK

A háromszög-geometria az elemi síkgeometria része, amelynek tárgya a nemtriviális geometriai alakzatok közül a legegyszerűbb, vagyis a háromszög, ami jóllehet egyszerű alakzat, de mégis szinte csodálatra méltó, hogy mennyire kimeríthetetlen a tulajdonságokat illetően, hiszen matematikusok és laikusok évszázadok óta foglalkoznak a háromszöggel, de még mindig fedeznek fel újabb és sokszor egészen meglepő dolgokat.

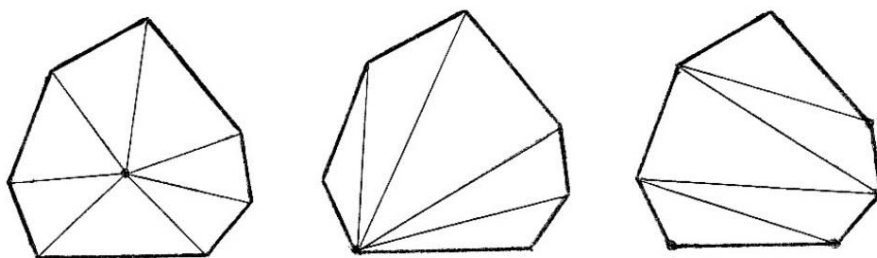
Az itt kiválasztott háromszög-geometriai témák nem kizárólag nevezetes pontokhoz vagy egyenesekhez kapcsolódnak, hanem a geometria más területeihez (pl. területszámításhoz) is. Ezen témák tárgyalása során mutatunk be olyan tanítási és tanulási ötleteket, amelyek a tanulók különféle szintű és tartalmú ismereteire épülnek.

1.0. Átdarabolási alapismeretek

Minthogy ezen témakör első három fejezetében az átdarabolások elméletére kívánunk építeni, ezért először is összefoglaljuk a hozzá kapcsolódó azon legfontosabb ismert tényeket ([6] 19-22. old., [33] 229-280. old., [46] 39-45. old.), amelyek a síkban kizárólag sokszögekre, a térben pedig poliéderekre vonatkoznak. Megjegyezzük, hogy a sokszög és poliéder elnevezést az egyszerűség céljából használjuk a sokszögtartomány illetve poliédertest helyett.

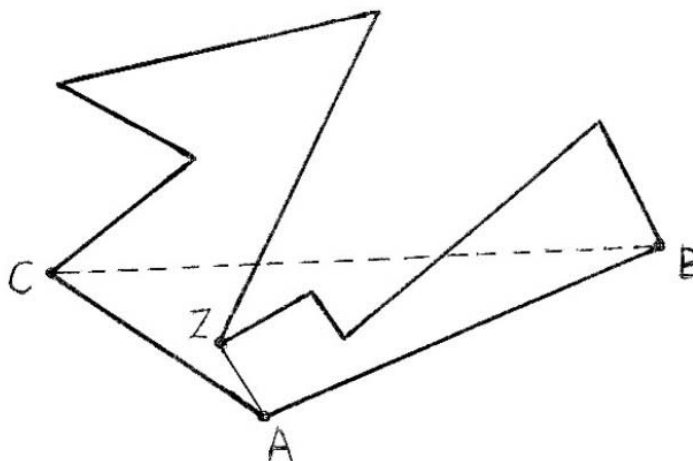
Ha egy P sokszög a véges számú $T_1, \dots, T_m$ háromszögek egyesítése úgy, hogy bármely $i, j \in \{1, \dots, m\}$ és $i \neq j$ esetén T_i és T_j nem rendelkezik közös belső ponttal, azaz $T_i \cap T_j$ vagy üres halmaz, vagy egy közös csúcs, vagy pedig egy közös oldal, akkor a $\{T_1, \dots, T_m\}$ halmazt P egyik triangulációjának nevezzük.

Máris felvetődik a kérdés, hogy tetszőleges sokszögre van-e értelme az előbbi definíciónak, vagyis bármely sokszög felbontható-e ily módon véges sok háromszögre. Erre az összetett kérdésre egyszerű a válasz: igen. Ha ugyanis P egy n -oldalú konvex sokszög, akkor az a belsejében lévő tetszőleges pontot a csúcsokkal összekötve n darab kívánt tulajdonságú háromszögre bomlik fel (1.0.1/a ábra). A részháromszögek száma még csökkenthető is, ha P -t az egyik csúcsból kiinduló átlókkal bontjuk fel háromszögekre: ekkor $n-2$ háromszög adódik (1.0.1/b ábra). Ugyanennyi részháromszöget kapunk, ha P valamelyik csúcsához hozzávesszük a két szomszédos csúcsot, az így kapott háromszöget P -ből levágjuk, s ezt az eljárást a mindenkor megmaradó sokszögre addig ismétljük, míg egyetlen háromszög nem marad (1.0.1/c ábra). Ez a mód magába foglalhatja az előzőt, ha a sokszögnek mindig ugyanazt a csúcsát választjuk ki.



1.0.1. ábra

Az eddigiek alapján megállapítható, hogy n -oldalú konvex sokszög esetén mindig létezik véges sok háromszögből álló trianguláció, ami úgy is megadható, hogy a részháromszögek csúcsai kizárólag az adott sokszög csúcsaiban vannak, s ekkor pontosan $n-2$ részháromszög keletkezik. Ha viszont P egy n -oldalú konkáv sokszög, akkor a konkáv szögek számának növekedtével az első két triangulációs mód létezése egyre kevésbé valószínű, viszont a harmadik - kis kiegészítéssel - ekkor is célra vezet. Eszerint az állítható, hogy tetszőleges sokszögre létezik trianguláció. Ezt az állítást a sokszög oldalainak számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Ehhez legyen P egy n -oldalú (konvex vagy akár konkáv) sokszög. $n=3$ -ra az állítás nyilvánvalóan igaz. $n \geq 4$ esetén tegyük fel, hogy az állítás teljesül az n -nél kevesebb oldalszámú minden sokszögre. Ezután válasszuk ki P -nek egy olyan A csúcsát, amelynél lévő belső szög konvex. Ilyen csúcs biztosan van, sőt legalább három is, minthogy P belső szögeinek összege $(n-2)\pi$. A kiválasztott csúcsához a két szomszédos B és C csúcsot hozzávéve egy ABC háromszöget kapunk (1.0.2. ábra), amelynek belseje P csúcsai közül legfeljebb $(n-3)$ -at tartalmazhat.



1.0.2. ábra

Ezen véges sok csúcspontból válasszuk ki az A -hoz legközelebb lévő, s ha ezt Z -vel jelöljük, akkor az $\overline{AZ}$ szakasz P -nek olyan átlója, amely teljesen P belsejében halad és ezáltal P -t a P_1 és P_2 részsokszögekre bontja úgy, hogy azok bármelyikének legfeljebb $n-1$ csúcsa van és $P_1 \cap P_2 = \overline{AZ}$ is teljesül. Így az indukciós feltevés miatt P_1 -nek és P_2 -nek is léteznek triangulációi, amelyek egyesítésével P -nek a kívánt triangulációja adódik.

Ha a P és Q sokszögekhez léteznek $\{P_1, \dots, P_m\}$ és $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ triangulációk úgy, hogy bármely $i \in \{1, \dots, m\}$ esetén $P_i \cong Q_i$, akkor azt mondjuk, hogy P és Q ezen triangulációkra nézve ekvivalens. A sokszögek halmazán így értelmezett triangulációk ekvivalenciája reflexív, szimmetrikus és tranzitív, vagyis ekvivalencia reláció.

Mindezek alapján a síkbeli P és Q sokszögeket akkor nevezzük egymásba átdarabolhatóknak, ha léteznek ekvivalens triangulációik.

Ezen értelmezés szerint az egymásba átdarabolható két sokszög bármelyike szétvágható véges számú háromszögre úgy, hogy azok mindegyikét pontosan egyszer felhasználva a másik sokszög egyrétűen és hézagmentesen lefedhető, vagyis ez a két sokszög tekinthető azonos számú és páronként egybevágó, de esetleg különböző módon összerakott megfelelő háromszögek unióinak. Az átdarabolhatóság fenti értelmezéséből az is következik, hogy az ekvivalens triangulációk létezése az átdarabolhatóság elegendő feltétele, de két sokszöget akkor is egymásba darabolhatónak tekinthetünk, ha a megfelelő egybevágó részek nem kizárólag háromszögek, hanem más sokszögek is lehetnek.

Az átdarabolás folyamatának lejegyzésére a $P \rightarrow P_1 + \dots + P_m \rightarrow Q_1 + \dots + Q_m \rightarrow Q$ jelölésmódot fogjuk használni.

Az egymásba átdarabolható sokszögek területe egyenlő: ugyanis a terület additivitása és egybevágósági transzformációkkal szembeni invarianciája alapján az előbbi jelölésekkel $t(P) =$

$$\sum_{i=1}^m t(P_i) = \sum_{i=1}^m t(Q_i) = t(Q) \text{ kapható. Ezen egyszerű tétel megfordításának a}$$

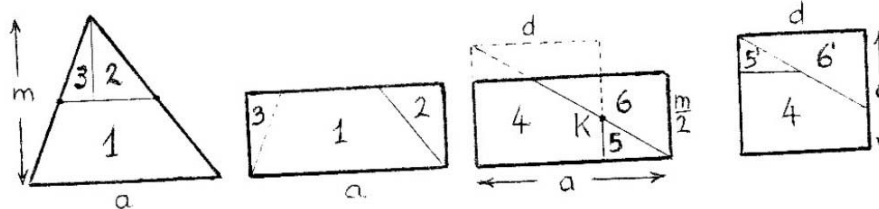
bizonyítása viszont jóval nagyobb kihívást jelent. Egyenlő területű sokszögek egymásba darabolására már az antik görög geometriában is voltak példák, de ezen a téren jelentős fejlődés csak a 19.sz. elejétől indult el, amikor kidolgozták az átdarabolások általános elméletét, és bebizonyították a sokszögek átdarabolásának alaptételét, mely szerint bármely két egyenlő területű sokszög átdarabolható egymásba. E tétel bizonyításának módja konstruktív, azaz kigondolunk egy olyan eljárást, amellyel bármely két egyenlő területű sokszög felbontható páronként egybevágó részsokszögekre, amelyek alkalmas átlóit berajzolva ekvivalens triangulációkhoz juthatunk. Jóllehet ez az eljárás inkább

elméleti mint gyakorlati, s általában a ténylegesen szükségesnél több részsokszög kell hozzá, de a minimális átdarabolásokra jelenleg nincs általános elmélet.

Az alaptételt Bolyai-Gerwien tételnek is nevezik, mivel elsőként (egymástól függetlenül) ők adtak rá bizonyítást. Itt a több megoldásra törekvés szellemében két bizonyítási módot ismertetünk.

Az egyik ([46] 39-41. old.) első lépéseként az egyenlő területű két sokszögnek előállítjuk egy-egy triangulációját, amelyek általában nem feltétlenül ekvivalensek. A kapott háromszögeket átdaraboljuk olyan téglalapokba, amelyek egyik oldala egy adott szakasz, az így előállt téglalapokat pedig mindkét sokszögre külön-külön egyetlen téglalappá illesztjük össze az egyenlő oldalak mentén. Mivel a két adott sokszög egyenlő területű volt, ezért ezen két téglalap területe is egyenlő, s egy-egy oldaluk azonos hosszúsága miatt egybevágók. Ennélfogva az átdarabolás tranzitív tulajdonsága alapján ez a bizonyítás készen van.

A fenti bizonyítás több olyan lépést tartalmaz, amelyek könnyebb megértése céljából külön magyarázatra és szemléltetésre van szükség. A két egyenlő területű sokszög egy-egy triangulációjának az előállítását a korábban leírtak alapján már az olvasó fantáziájára bízhatjuk, de még egyszer hangsúlyozzuk, hogy itt a triangulációk ekvivalenciája általában nem teljesíthető. Maradjunk tehát annyiban, hogy mindkét adott sokszöget sikerült felbontani véges sok háromszögre, amelyekre nem feltétlenül teljesül sem az azonos számúság, sem pedig a páronkénti egybevágóság. Ezután minden egyes háromszöget adott oldalhosszúságú téglalapba darabolunk át, ami kétféleképpen is elvégezhető. Az első módot az 1.0.3. ábra, a másodikat pedig az 1.0.4. ábra szemlélteti.



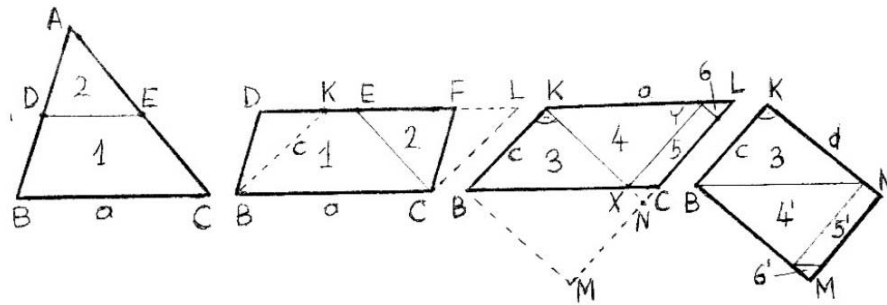
1.0.3. ábra

Az 1.0.3. ábrán a háromszög leghosszabb oldalát (ha van ilyen) a -val és a hozzá tartozó magasságot m -mel jelöljük. A másik két oldal felezőpontjait összekötő szakaszra az a -val szemközti csúcsból merőlegest állítva kapjuk az 1, 2 és 3 jelű részeket, melyek közül az 1-est rögzítve, a 2-est és 3-ast 180° -kal elforgatva jutunk az $a \times \frac{m}{2}$ típusú

téglalaphoz. Ezután egy adott c szakasszal az $\frac{am}{2} = cd$ feltételből a párhuzamos szelők tétele alapján külön ábrán megszerkesztjük a d szakaszt (ezt az olvasóra bízjuk), az $ax\frac{m}{2}$ típusú téglalapot az ábra szerint a 4, 5 és 6 jelű részekre bontjuk, majd a 4-es részt rögzítve, az 5-öst és 6-ost pedig alkalmasan eltolva kapjuk a kívánt $cx d$ típusú téglalapot. Az eltolást természetesen meg kell előznie a megfelelő háromszögek egybevágósága igazolásának, ami hasonló háromszögekre alapuló számolással (ismét az olvasóra bízjuk) az ASA esetre vezet az $5 \rightarrow 5'$ és $6 \rightarrow 6'$ megfeleltetésre is. Ne felejtjük el, hogy a 4, 5 és 6 jelű részek maguk is több részből állnak az előző átdarabolás miatt. Probléma jelentkezhet továbbá az $ax\frac{m}{2} \rightarrow cx d$ átdaraboláskor, ha az ábrán jelzett

K pont az $ax\frac{m}{2}$ típusú téglalapon kívülre esik. Ilyenkor vagy a c oldalt választjuk rövidebbre (ez csak egyszer tehető meg, mivel c előre adott), vagy pedig az a oldalt megfeleztve áttérünk az $\frac{a}{2}xm$ típusú téglalapra, s ha a K pont helyzete még ekkor sem lenne kedvező, akkor az előbbi felezést megismételve áttérünk az $\frac{a}{4}x2m$ típusúra, és így tovább. Ily módon az átdarabolás véges lépésben mindig elvégezhető.

Az 1.0.4. ábra szerint az ABC háromszöget először átdaraboljuk a $BCFD$ paralelogrammába, azt egy $c=BK$ szakasz rögzítése után a $BCLK$ paralelogrammába, majd ezt a paralelogrammát a $BMNK$ téglalapba.

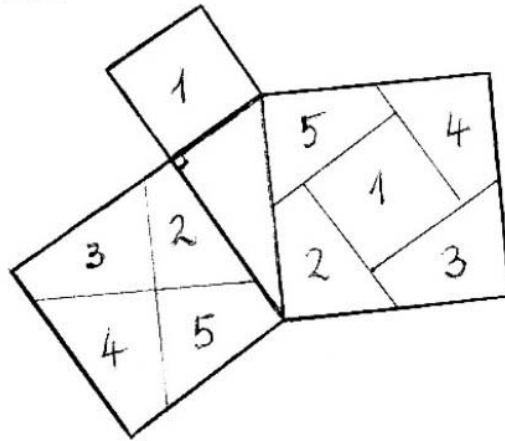


1.0.4. ábra

Ezek az átdarabolások első ránézésre talán egyszerűnek tűnhetnek, de bizonyos esetekben mégsem azok, ezért ajánlatos a részletesebb elemzésük. Egy háromszög ugyanakkora területű paralelogrammává háromféleképpen is átdarabolható, mindegyikhez 180° -os elforgatás kell, s

jóllehet ezek egyike sem okozhat nagy gondot, mégis előnyben részesítjük az 1.0.4. ábrán lévő változatot. Az első probléma a c szakasz megadásával kapcsolatos. Ha ugyanis $c < \frac{m}{2}$, akkor az ábrán jelölt K és L pont nem áll elő: át kell térni egy $2a$ oldalú és $\frac{m}{4}$ magasságú paralelogrammára. A kedvező $\frac{m}{2} \leq c \leq BF$ esetben K és L közül legalább az egyik a $\overline{DF}$ oldal valamely pontja, és a $BCFD \rightarrow BCLK$ átdaraboláshoz egy eltolás elegendő. Ha pedig $c > BF$, akkor K és L keletkezik ugyan, de nem kedvező helyen: át kell térni egy $\frac{a}{2}$ oldalú és m magasságú paralelogrammára. Az első és harmadik esetben előfordulhat, hogy az egyszeri áttérés nem elegendő, de véges sok lépés mindig célra vezet. Az 1.0.4. ábra befejezését jelentő $BCLK \rightarrow BMNK$ átdarabolásnál előnyös, ha M és N közül legalább az egyik a $\overline{CL}$ oldal valamely pontja, mivel ekkor egyetlen eltolás elegendő. Ábránkon nem ez a helyzet: M és N mindketten a $\overline{CL}$ szakasz külső pontjai. Ekkor a $BCLK$ paralelogrammában legyen K -nál tompaszög, a K -ban $\overline{BK}$ -ra merőleges messe $\overline{BC}$ -t az X pontban, az X -en át $\overline{BK}$ -val párhuzamos messe $\overline{KL}$ -t az Y pontban, és az Y -ban $\overline{BK}$ -ra merőleges messe $\overline{CL}$ -t a Z pontban, miként ez az ábránkon van, ahol így most három eltolás kell: $4 \rightarrow 4'$, $5 \rightarrow 5'$ és $6 \rightarrow 6'$. Ha viszont az Y -ban $\overline{BK}$ -ra merőleges a $\overline{CL}$ szakaszt nem metszi, akkor további eltolásokra is szükség van, de az alkalmazandó eltolások száma minden esetben véges, s így az átdarabolási folyamat mindig véget ér.

Az alaptétel bizonyításának másik módja ([33] 241-243. oldal) ugyanúgy kezdődik mint az első. A két egyenlő területű sokszöget háromszögekre bontjuk, a háromszögeket téglalapokká alakítjuk, de ezeket a téglalapokat most négyzetekké daraboljuk át, s a kapott négyzeteket mindkét sokszögre külön-külön a Pitagorasz-tétel segítségével



1.0.5. ábra

egyetlen „nagy” négyzetté. A kapott két nagy négyzet egyenlő területű, azaz egybevágó, s így az átdarabolás tranzitivitása miatt a bizonyítás ismét készen van.

Ebben a módban az átdarabolási folyamat első része követhető az 1.0.3. ábra alapján, jóllehet a téglalap négyzetté darabolásánál c most nem egy előre adott szakasz, hanem $d=c$ miatt a $c^2 = a \cdot \frac{m}{2}$ feltétel alapján

szerkeszthető. A kérdéses K pontra pedig $\frac{m}{2} < a \leq 2m$ esetén teljesül,

hogy az $a \times \frac{m}{2}$ típusú téglalapon nincs kívül. Ennélfogva $a > 2m$ esetén át

kell térni egy $\frac{a}{2} \times m$ típusú téglalapra, s szükség esetén ezt az áttérést újra

meg kell ismételni, de véges sok lépés itt is elegendő. Miután az egyik (mondjuk az n -oldalú) sokszögre már minden téglalapot négyzetté alakítottunk, hozzáfoghatunk a kapott $n-2$ számú négyzet egyetlen „nagy” négyzetté alakításához. Ehhez egy lehetséges szisztéma az, hogy az $n-2$ négyzet közül először kiválasztunk kettőt és azokat Pitagorasz-tételét felhasználva az 1.0.5. ábra alapján eltolásokkal átdaraboljuk egy négyzetté, majd ezt a kiválasztást és átdarabolást addig ismételjük, amíg az $n-2$ négyzet páros n -re mind el nem fogy, illetve páratlan n -re egy nem marad. Ha van maradék négyzet, akkor azt hozzávesszük az átdarabolásokkal kapott újabb négyzetekhez, s ezután az előbbi eljárást újra és újra megismételve véges lépésben eljutunk a kívánt egyik „nagy” négyzethez. Mindezt a másik sokszögre is végrehajtva kapjuk az előzővel egybevágó másik „nagy” négyzetet. Az eltolásokat természetesen igazolni

kell, ami elég hosszadalmas dolog, de erre itt nem térünk ki, mivel azokat az 1.1 fejezetben úgylis részletesen tárgyalni fogjuk.

Az átdarabolások térbeli tárgyalásakor a területnek térfogat, a háromszögnek tetraéder, a sokszögnek poliéder, a sokszögek triangulációjának pedig a poliéderek tetraéderekre bontása ([33] 249. oldal, [35] 212. oldal) feleltethető meg. Egy konkáv poliédert a lapsíkjaival elmeszve konvex poliédereket kapunk. Bármely konvex poliéder pedig gúlákra darabolható, ha azokat a gúákat tekintjük, amelyek közös csúcsa a konvex poliéder valamely csúcspontja, alaplapjai pedig a konvex poliédernek a kiszemelt csúcsát nem tartalmazó lapjai. S végül bármely gúla az alaplapjának egy triangulációját véve közös csúcsú és közös magasságú tetraéderekre bomlik fel.

Két poliédert akkor nevezünk egymásba darabolhatónak, ha az egyik felbontható véges sok tetraéderre úgy, hogy azokkal a másik hézagmentesen kitölthető. Az egymásba átdarabolható poliéderek térfogata nyilvánvalóan egyenlő, de ennek a megfordítása általában nem igaz. Léteznek egyenlő térfogatú poliéderek, amelyek nem darabolhatók át egymásba. Ezt Max Dehn [28, 29] mutatta meg, aki két poliéder egymásba darabolhatóságára a poliéderek lapszögeinek vizsgálatára alapuló következő szükséges feltételt adta:

Ha az egymásba átdarabolható P és Q poliéderek lapszögei $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ és $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, akkor léteznek olyan $p_1, p_2, \dots, p_m, q_1, q_2, \dots, q_n$ és k egész számok, amelyekre $\sum_{i=1}^m p_i \alpha_i - \sum_{j=1}^n q_j \beta_j = k\pi$, ahol

$$\sum_{i=1}^m p_i^2 > 0 \text{ és } \sum_{j=1}^n q_j^2 > 0.$$

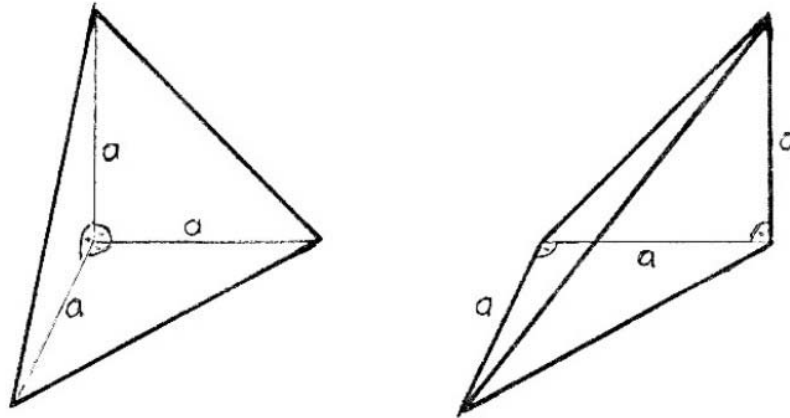
Ez a szükséges feltétel nem teljesül az egyenlő térfogatú kocka és szabályos tetraéder esetén. Ugyanis a kocka mindegyik lapszögének nagysága $\pi/2$, míg a szabályos tetraéder lapszögei egy olyan φ hegyes szöggel egyenlők, amelyre $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$. Ekkor viszont nem léteznek olyan

p, q és k egészek, hogy a $p \frac{\pi}{2} + q\varphi = k\pi$ összefüggés teljesülne ([33] 254.

oldal, [60] 307. oldal, [1] 51. oldal), s így ez a két poliéder nem darabolható át egymásba. A térbeli átdarabolási probléma abban is eltér a síkbelitől, hogy míg a síkban két egyenlő területű háromszög mindig átdarabolható egymásba, addig a térben léteznek egyenlő alapterületű és egyenlő magasságú - vagyis egyenlő térfogatú - tetraéderek (1.0.6. ábra), amelyek nem darabolhatók át egymásba ([51] 450. oldal, [1] 51-52. oldal).

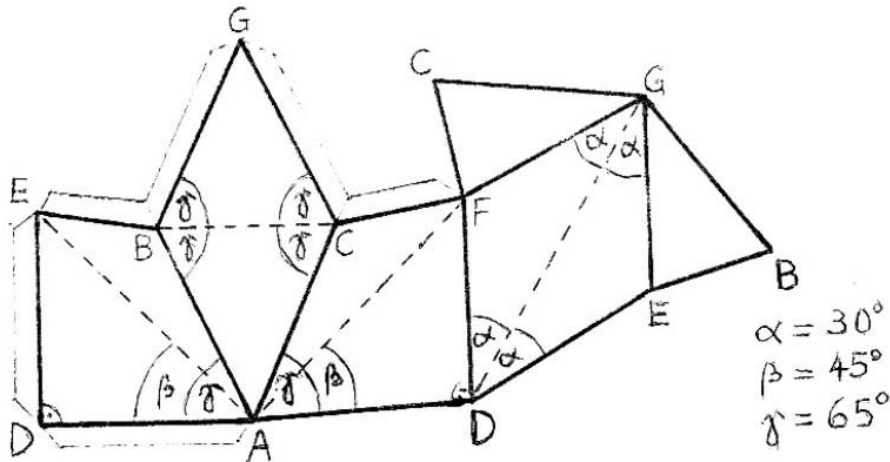
Ezt a térfogatszámításban igen érdekes és fontos tételt Max Dehn bizonyította be [28, 29].

További érdekes tény még, hogy a térben megadható olyan poliéder, amely nem bontható fel véges számú tetraéderre úgy, hogy azok csúcsai



1.0.6. ábra

csak a poliéder csúcsaival legyenek azonosak. Elsőként N.J. Lennes [47] konstruált ilyen poliédert (1.0.7. ábra), amelynek az a legfontosabb tulajdonsága, hogy bármely két olyan csúcsot tekintve, amelyek nem egy élnek a végpontjai, azok összekötő szakasza teljesen vagy részben a

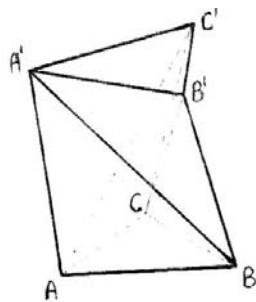


1.0.7. ábra

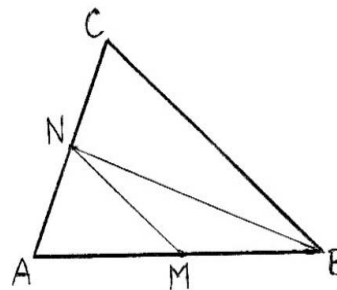
poliéderen kívül halad. Az eredeti Lennes-poliédernek hét csúcsa volt, de E. Schönhardt [64] adott egy egyszerűbbet, aminek már csak hat csúcsa van (1.0.8. ábra), és még azt is igazolta, hogy hatnál kevesebb csúccsal

nincs Lennes-poliéder. F. Bagemihl [3] pedig azt mutatta meg, hogy létezik olyan Lennes-poliéder, amely csúcsainak száma tetszőleges hatnál nem kisebb egész szám lehet.

A Schönhardt-poliéder származtatható egy ABC szabályos háromszög alapú egyenes hasázból azáltal, hogy az $A'B'C'$ fedőlapot a középpontja körül a saját síkjában 30° -kal elforgatjuk, miközben a határoló oldallapok mindegyike két háromszögre törik szét, s így az $\overline{AC'}$, $\overline{BA'}$ és $\overline{CB'}$ éleknél konkáv belső szögek keletkeznek (1.0.8. ábra). Ennek a poliédernek tetraéderekre bontásához feltétlenül választani kell az alapon lévő háromszöget és a fedőlap valamelyik csúcsát. Ámde egy ilyen tetraédert nem tartalmazza teljesen az adott Schönhardt-poliéder, így annak tetraéderekre bontása nem végezhető el további csúcsok hozzávétele nélkül.



1.0.8. ábra



1.0.9. ábra

A hiperbolikus síkon a sokszögek átdarabolhatóságára megtartjuk az euklideszi síkon adott értelmezést és az átdarabolhatóság alaptulajdonságait, viszont e téma további tárgyalása mégis lényeges eltéréseket tartalmaz. Ha ugyanis a hiperbolikus síkon területszámítást kívánunk értelmezni, akkor az első problémát az jelenti, hogy itt nincs négyzet, aminek a területét egységként választhatnánk. Sőt a hiperbolikus síkon fennálló távolságviszonyok miatt el kell vetnünk a háromszög területének az euklideszi síkon megismert számítási módját is. Aszerint ugyanis, ha az ABC háromszög $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ oldalának felezőpontjait M és N jelöli, (1.0.9. ábra), akkor egyrészt

$$t(ABC\Delta) = 4t(AMN\Delta),$$

másrészt

$$t(ABC\Delta) = AM \cdot d(C, \overrightarrow{AB}) \text{ és } t(AMN\Delta) = \frac{1}{2} AM \cdot d(N, \overrightarrow{AB})$$

alapján

$$d(C, \overrightarrow{AB}) = 2d(N, \overrightarrow{AB})$$

adódna, ami viszont $AN=NC$ miatt ellentmond a hiperbolikus síkon fennálló

$$d(C, \overrightarrow{AB}) > 2d(N, \overrightarrow{AB})$$

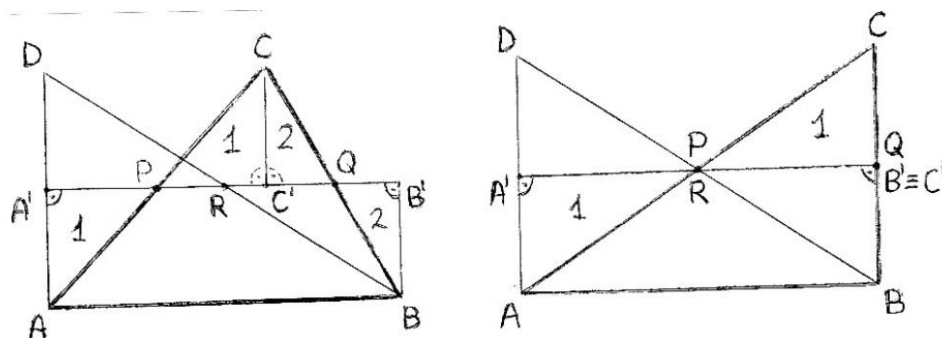
egyenlőtlenségnek ([41] 210. old.).

A hiperbolikus síkon a területszámítás leírásához szükségünk lesz egy új fogalomra és annak néhány alaptulajdonságára: ez az új fogalom a defektus ([46] 39-45. old., [51] 450-459. old., [32] 131-142. old.).

Egy T háromszög defektusán a $\delta(T) = \pi - \sigma(T)$ valós számot értjük, ahol $\sigma(T)$ jelenti a T háromszög belső szögeinek az összegét, amire a hiperbolikus síkon $\sigma(T) < \pi$ teljesül, s ennél fogva $\delta(T) > 0$. Egybevágó háromszögek defektusai nyilvánvalóan egyenlők. Ha egy T háromszög a $T_1, \dots, T_m$ háromszögekre bontható fel, akkor $\delta(T) = \delta(T_1) + \dots + \delta(T_m)$. Ha továbbá az ABC háromszög $\overline{BC}$ oldalának valamely X pontját kiválasztva bevezetjük a $BC=a$ és $BX=x$ jelöléseket, akkor az ABX háromszög defektusa x -nek a folytonos függvénye.

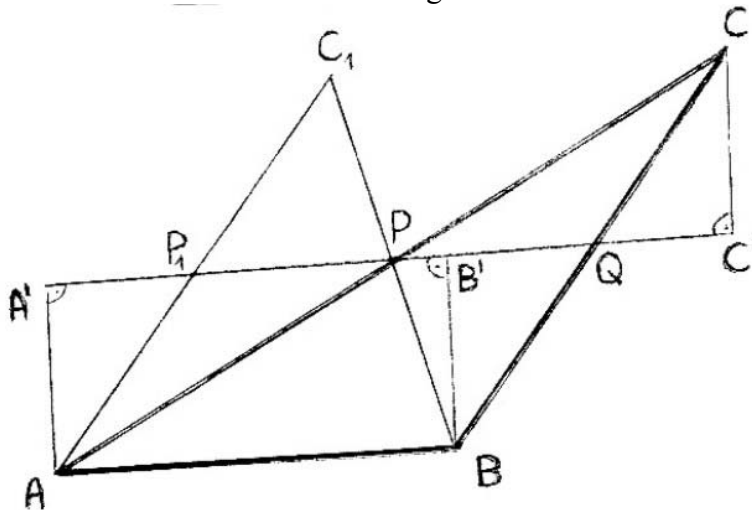
Egy sokszög valamely triangulációjának defektusát a részháromszögek defektusainak összegeként értelmezzük. Megmutatható, hogy ennek az összegnek az értéke független a trianguláció kiválasztásától, s ezáltal egy sokszög defektusa értelmezhető egy tetszőleges triangulációjának a defektusaként. Ebből következik, hogy ekvivalens triangulációkkal rendelkező két sokszögnek egyenlő a defektusa. Az eddigiek alapján megállapítható, hogy a hiperbolikus síkon bármely sokszög defektusa pozitív, egybevágó sokszögek defektusa egyenlő, továbbá a defektus additív és folytonos. Tehát a defektus rendelkezik a terület jellemző tulajdonságaival, s ennél fogva megállapodhatunk abban, hogy a hiperbolikus síkon egy sokszög területe alatt a sokszög defektusát értjük. Ezáltal az euklideszi síkon kimondott Bolyai-Gerwien tétel az abszolút geometriában is érvényes: Két sokszög akkor és csak akkor darabolható át egymásba, ha egyenlő a területük.

Minthogy két egyenlő területű sokszög egymásba darabolhatóságát háromszögekre bontással értelmeztük, ezért még be kell mutatnunk, hogy a hiperbolikus síkon két egyenlő területű, azaz egyenlő defektusú, háromszög miként darabolható át egymásba ([39] 134-137. old.). Ehhez elsőként vegyünk fel egy ABC háromszöget, amelyre legyen P az $\overline{AC}$ és Q a $\overline{BC}$ oldal felezőpontja, továbbá A', B' és C' az A, B és C pontokból a $\overrightarrow{PQ}$ egyenesre bocsátott merőlegesek talppontjai (1.0.10. ábra). Ekkor



1.0.10. ábra

nyilvánvalóan fennállnak az $AA'P\Delta \cong CC'P\Delta$ és $BB'Q\Delta \cong CC'Q\Delta$ egybevágóságok, amiből $AA' = CC' = BB'$ adódik, s így az $ABB'A'$ négyszög egy olyan Saccheri-négyszög, amelybe az ABC háromszög mindig átdarabolható. Ennek az állításnak az igaz volta $\overline{PQ} \subset \overline{A'B'}$ esetén az 1.0.10. ábráról leolvasható. Ha viszont $\overline{PQ} \subset \overline{A'B'}$ nem áll fenn (1.0.11. ábra), akkor a BCP háromszöget P -re tükrözve kapjuk a C_1AP háromszöget, ami az ABP háromszöggel együtt az ABC_1 háromszöget adja, amelybe az ABC háromszög a konstrukció miatt nyilvánvalóan átdarabolható. Jelölje P_1 az $\overline{AC_1}$ oldal felezőpontját. Ha most $\overline{P_1P} \subset \overline{A'B'}$ teljesül, akkor visszajutottunk az előző ábrán leírt esethez. Ha viszont $\overline{P_1P} \subset \overline{A'B'}$ mégsem teljesülne, akkor az előbbi tükrözést megismételjük a BC_1P_1 háromszögre, és így tovább: véges sok tükrözés után az 1.0.10. ábrán lévő elrendezés mindig elérhető.

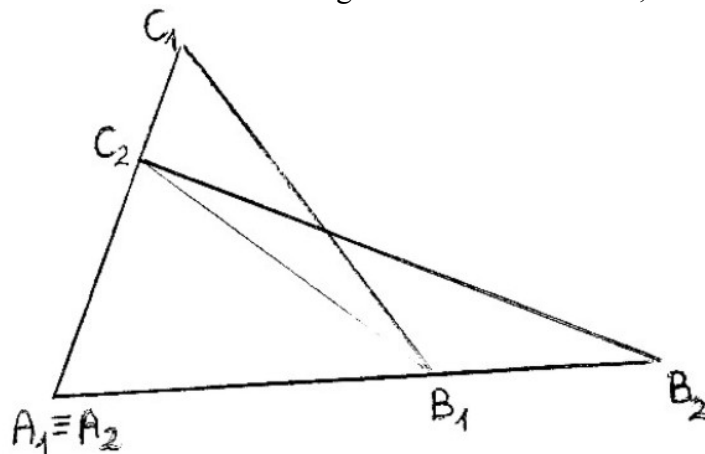


1.0.11. ábra

Ezután tekintsük azt az ABD háromszöget, amelyre D az A -nak $\overrightarrow{PQ}$ egyenesre vonatkozó tükörképe, s így a $\overline{BD}$ szakasz R felezőpontja rajta van a $\overrightarrow{PQ}$ egyenesen. Ennélfogva az ABD háromszög átdarabolható az $ABB'A'$ négyszögbe, s az átdarabolhatóság tranzitivitása miatt az ABC háromszögbe is. Ha tehát két egyenlő defektusú háromszögnek van egy pár egyenlő oldala, miként az ABC és ABD háromszögnek az $\overline{AB}$ oldal, akkor ez a két háromszög átdarabolható egymásba.

A fenti konstrukció szerint az ABC háromszög belső szögeinek összege egyenlő az $ABB'A'$ Saccheri-négyszög $\overline{AB}$ felső alapján lévő szögeinek az összegével, s ugyanez teljesül az ABD háromszögre is. Mivel pedig az $ABB'A'$ Saccheri-négyszög $\overline{AB}$ felső alapján lévő szögek egyenlők egymással, ezért megállapítható, hogy az ABD háromszög A -nál lévő szöge egyenlő az ABC háromszög belső szögei összegének a felével. Ennek alapján tetszőlegesen adott háromszöghöz szerkeszthető vele egyenlő defektusú olyan háromszög, amelynek egyik szöge egyenlő az adott háromszög belső szögei összegének a felével. Ez a tény használható fel az átdarabolás általános esetének alábbi leírásához. Ehhez legyen adott két egyenlő defektusú háromszög, amelyek belső szögeinek összege tehát egyenlő, de a háromszögek nem rendelkeznek egybevágó oldalpárral. Ekkor az előbbiek szerint mindkét háromszöghöz szerkeszthető egy-egy olyan háromszög, amely az eredetivel egymásba darabolható, s amelyek egy-egy szöge egyenlő az eredetileg adott szögösszeg felével. Legyen $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ ez az egyenlő defektusú két új háromszög, és A_1 illetve A_2 az a két csúcs, amelynél lévő szögek egyenlők egymással (1.0.12. ábra). Helyezzük egymásra ezt a két háromszöget úgy, hogy $A_1 \equiv A_2$, valamint $B_2 \in \overrightarrow{A_1B_1}$ és $C_2 \in \overrightarrow{A_1C_1}$ teljesüljön. Ha most $B_2 \equiv B_1$, akkor a C_2 és C_1 csúcsoknak is egybe kell esni, mert különben az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek valamelyike része lenne a másiknak, s így ellentmondásra jutnánk azzal a feltétellel, hogy ez a két háromszög egyenlő defektusú. Így tehát $B_2 \equiv B_1$ esetén $C_2 \equiv C_1$ is teljesül, azaz a két háromszög egybevágó. Ha viszont $B_2 \neq B_1$, és így $C_2 \neq C_1$, akkor a defektusok egyenlősége miatt az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszög egyike sem tartalmazhatja teljesen a másikat: vagyis B_2 és C_2 a $\overrightarrow{B_1C_1}$ egyenes különböző oldalain vannak. Ekkor rajzoljuk meg a $\overline{B_1C_2}$ szakaszt, és vegyük észre, hogy a $B_1C_1C_2$ és $B_2C_2B_1$ háromszögeket az $A_1B_1C_2$ háromszög az adott $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögekké egészíti ki, amelyek defektusai a feltétel szerint egyenlők egymással, s ebből adódóan a $B_1C_1C_2$ és $B_2C_2B_1$ háromszögek defektusa is egyenlő. Mivel pedig a $\overline{B_1C_2}$

szakasz mindkét háromszögnek közös oldala, ezért ez a



1.0.12. ábra

két háromszög átdarabolható egymásba. Ha továbbá mindkettőhöz hozzávesszük az $A_1B_1C_2$ háromszöget, akkor ugyanez elmondható az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögekről, s ennél fogva az eredetileg adott két egyenlő defektusú háromszögről is.

Az átdarabolások elmélete mindenki számára a vonzó és kihívást jelentő játékok szinte végtelen választékát kínálja, de ugyanakkor lényeges szerepet tölt be a terület és térfogat fogalmának szigorú értelemben vett kifejtésében, ami akár prematematikai szinten végzett tevékenységek formájában is elkezdődhet.

1.1. A pitagorasz-i tételcsoport átdarabolásos bizonyításai

A derékszögű háromszöggel kapcsolatos pitagorasz-i tételcsoport az alábbi három tételből áll.

Pitagorasz-tétel: Derékszögű háromszögben az átfogó fölé rajzolt négyzet területe egyenlő a két befogó fölé rajzolt négyzet területeinek összegével.

Befogótétel: Derékszögű háromszögben bármelyik befogó fölé rajzolt négyzet területe egyenlő egy olyan téglalapnak a területével, melynek egyik oldala az átfogó és másik oldala ennek a befogónak az átfogóra vonatkozó merőleges vetülete.

Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság fölé rajzolt négyzet területe egyenlő az átfogó azon két részéből – mint oldalakkal – megszerkesztett téglalap területével, amelyekre az átfogót a magasság talppontja osztja.

Mindhárom tételnek szándékosan nem az algebrai, hanem a területszámításos megfogalmazását adtuk meg, minthogy a továbbiakban ezekre a tételekre átdarabolásos és kiegészítéses bizonyításokat ismertetünk.

A sokszögek átdarabolásának alaptétele ([6, 41]) szerint bármely két egyenlő területű sokszög átdarabolható egymásba. Ezen alaptétel megfordítása is igaz: egymásba átdarabolható két sokszög ugyanakkora területű. A továbbiakban az alaptételt és annak megfordítását is elfogadjuk, sőt éppen ez utóbbit használjuk fel a pitagorasz-i tételcsoport fenti három tételének átdarabolásos bizonyításához. Tárgyalni kívánunk még kiegészítéses bizonyítási módokat is, amikor az összehasonlítható területű két alakzatot páronként egybevágó alakzatokkal egészítjük ki, s ha ennek során olyan két újabb alakzathoz jutunk, amelyek területeinek egyenlősége egyértelműen megállapítható, akkor a kiegészítő alakzatok páronkénti egybevágósága miatt az eredeti két alakzat is egyenlő területű. A kiegészítéses bizonyítási mód a folyamatát tekintve tér el az átdarabolásos bizonyítástól. Ugyanakkor mindkét bizonyítás először olyan konkrét fizikai cselekvéseként kerül realizálásra, amelyek a pitagorasz-i tételcsoport állításaira matematikai szemszögből egy formális bizonyítás konkretizálását jelentik. Ezt követi egy interiorizációs folyamat, amikor a feladat kijelölése után a tanulónak már nincs szüksége konkrét eszközökre, mivel képessé válik a cselekvés szellemi elvégzésére. Ezen konkrét és szellemi cselekvésekre épül az általánosítás, amely magába foglalja a cselekvések alapján megfogalmazható állítást is.

Elsőként foglalkozunk a *Pitagorasz-tétel* néhány ismertebb átdarabolásos bizonyításával [6, 33, 39, 48, 50], amelyek a további ilyen jellegű bizonyításoktól abban különböznek, hogy az egyszerű konstrukció miatt jobban felhasználhatók tanítási célokra.

Az $\overline{AB}$ átfogójú ABC derékszögű háromszögre $AC < BC$ esetén öt átdarabolásos bizonyítási módot mutatunk be, de a konstrukción túl csak az elsőre adunk részletes bizonyítást.

1. mód (1.1.1. és 1.1.2. ábra)

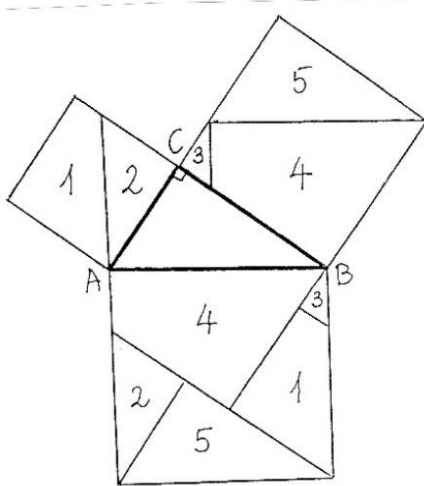
A rövidebb befogó fölé rajzolt négyzetet felbontatlanul megtartjuk, míg a hosszabb befogó fölé rajzolt négyzetet a középpontján át az átfogóval párhuzamosan, illetve arra merőlegesen húzott szakaszokkal négy részre bontjuk. Az így kapott öt résszel, amelyek egyike sem háromszög alakú, az átfogó fölé rajzolt négyzet középpontosan szimmetrikus elrendezésben kirakható. Az átdarabolhatósághoz azt kell igazolnunk, hogy a befogók fölé rajzolt négyzetek feldarabolásával kapott részekkel az átfogó fölé rajzolt négyzet egyrétűen és hézagmentesen lefedhető.

akkor e négyszögek képei, az átfogó fölé rajzolt négyzet oldalai mentén hézagmentesen illeszkednek egymáshoz, miközben közrefognak egy olyan négyszöget, melynek minden oldala egyenlő és minden szöge derékszög: vagyis egy négyzetet. Ennek oldala a $KMQD$ négyszög leghosszabb és legrövidebb oldalainak a különbsége: $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$, s ezért ez a

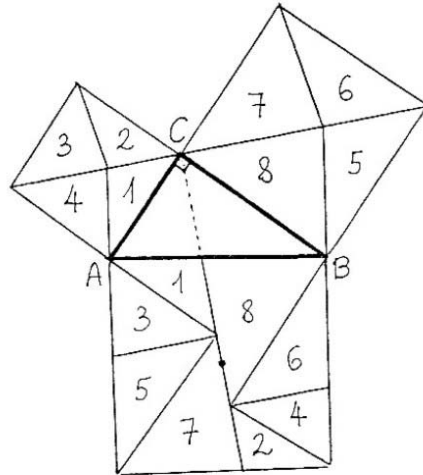
négyzet egybevágó az $\overline{AC}$ befogó fölé rajzolt négyzettel. Ezzel az átdarabolás bizonyítva van.

2. mód (1.1.3. ábra)

A befogók fölé rajzolt négyzeteket feldaraboló szakaszok az átfogóval párhuzamosan, illetve arra merőlegesen futnak, ami miatt a megfelelő részsokszögek egyállásúak. Ehhez az átdaraboláshoz öt részsokszög kell, amelyek közül három háromszög és kettő négyszög alakú. Ha egy-egy átlóval ezt a két négyszöget is háromszögekre bontjuk, akkor összesen hét részháromszög adódik. Megjegyezzük, hogy csak háromszögeket megengedő felbontás hétnél kevesebb háromszöggel nem lehetséges [33,48].



1.1.3. ábra



1.1.4. ábra

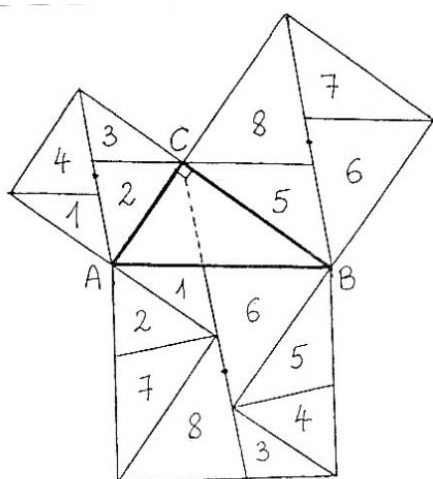
3. mód (1.1.4. ábra)

A befogók fölé rajzolt négyzetek C -ből induló átlói egy egyenesre illeszkednek, amit az $\overline{AB}$ átfogóra A -ban, illetve B -ben állított merőlegesek egy-egy pontban el metszenek, s ha ezeket a metszéspontokat összekötjük a két négyzet még kimaradt csúcsaival, akkor az így kapott részek mindegyike háromszög alakú. Az $ABC\angle$ felezője áthalad az átfogó fölé rajzolt négyzet középpontján, s ennél fogva felezi ezt a

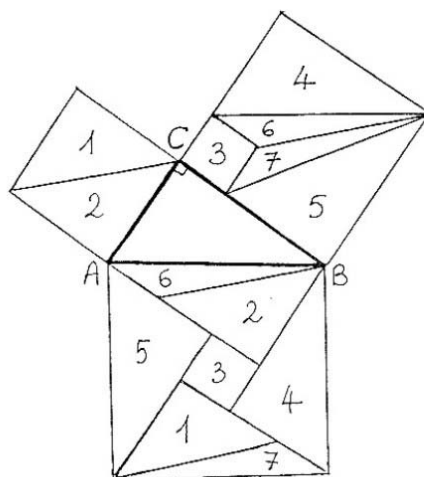
négyzetet. A befogók fölé rajzolt négyzetek feldarabolása tengelyesen, míg az átfogó fölé rajzolt négyzeté középpontosan szimmetrikus.

4. mód (1.1.5. ábra)

Ez a 3. mód egy változata, ahol a befogók fölé rajzolt négyzetek A , illetve B csúcsából induló átlóinak megrajzolása után az $\overline{AB}$ átfogóval párhuzamos szakaszokat húzunk. Itt is minden rész háromszög alakú, továbbá mindhárom négyzet feldarabolása középpontosan szimmetrikus.



1.1.5. ábra

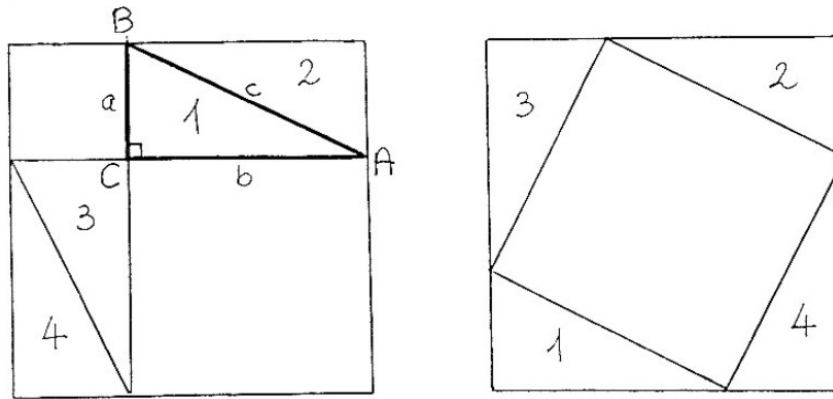


1.1.6. ábra

5. mód (1.1.6. ábra)

Az $\overline{AC}$ befogó fölé rajzolt négyzetet a C -ből kiinduló átlóval két háromszögre bontjuk. A $\overline{BC}$ befogó fölé rajzolt négyzet C -vel szemkötti csúcsát összekötjük a C -nél megrajzolt $BC-AC$ oldalú négyzet C -től különböző csúcsaival. Ezen átdarabolásnál egy rész négyzet, míg az összes többi háromszög alakú. A két befogó fölé rajzolt négyzet feldarabolása tengelyesen, az átfogó fölé rajzolt négyzeté pedig középpontosan szimmetrikus.

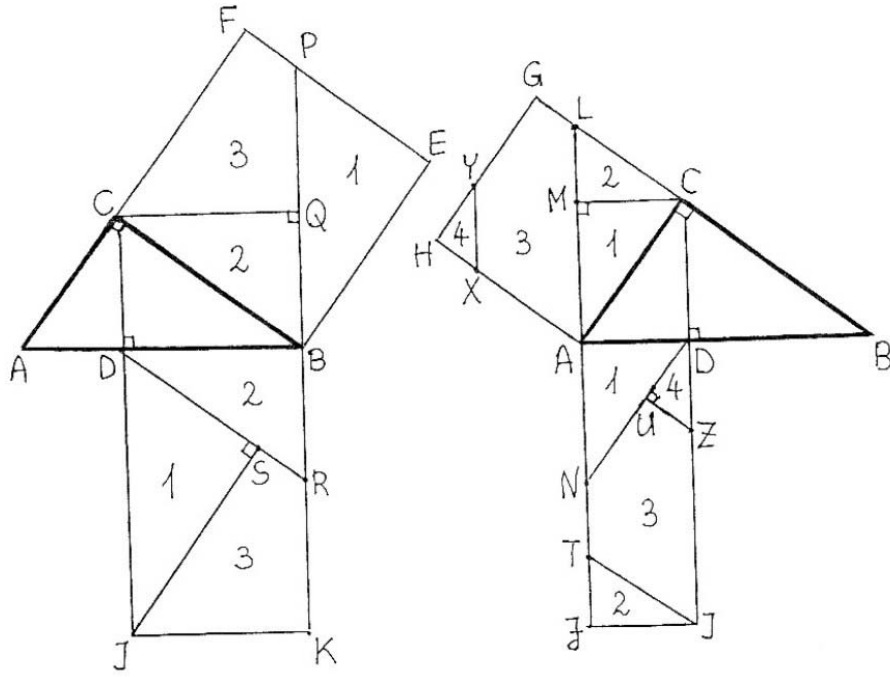
A *Pitagorasz-tétel* eddig bemutatott átdarabolásos bizonyításait kövesse most egy kiegészítéssel bizonyítás, ami tulajdonképpen a tétel legismertebb bizonyítási módja (1.1.7. ábra).



1.1.7. ábra

Ekkor a befogók fölé rajzolt négyzeteket és az átfogó fölé rajzolt négyzetet úgy egészítjük ki négy-négy az adott derékszögű háromszöggel egybevágó háromszöggel, hogy a kapott két négyzet egybevágó, s ennél fogva a kiegészített alakzatok területe is egyenlő. Ez a kiegészítés bizonyítási mód folyamatát tekintve nem azonos teljesen a középiskolában megismert bizonyítással, ahol az $a+b$ oldalú két négyzetből elvesszük a négy-négy egybevágó derékszögű háromszöget.

A befogótétel átdarabolásos bizonyításához [34] az $\overline{AB}$ átfogójú ABC derékszögű háromszögben legyen D az átfogóhoz tartozó magasság talppontja, $CD = m$, $BD = p$, és $AD = q$, továbbá $BEFC$ a $\overline{BC}$ és $ACGH$ az $\overline{AC}$ befogó fölé megrajzolt négyzet, valamint $BDIK$ a $\overline{BD}$ és $ADIJ$ az $\overline{AD}$ szakasz fölé $DI=AB$ feltétellel megszerkesztett téglalap (1.1.8. ábra).



1.1.8. ábra

Ekkor meg kell mutatni a $BEFC \rightarrow BDIK$ és $ACGH \rightarrow ADIJ$ átdarabolások kivitelezhetőségét. Ehhez tételezzük fel, hogy $BC \succ AC$, ami miatt $q \langle m \langle p$ is teljesül, s ennél fogva a fent kijelölt két átdarabolás már nem teljesen egyforma. Ha ugyanis a kívánt átdaraboláshoz a $BEFC$ és $ACGH$ négyzeteket az $\overline{AB}$ átfogóra merőleges határegyenesű olyan sávokkal szeleteljük fel, amelyek szélessége BD , illetve AD , akkor ehhez a szeleteléshez a $BEFC$ négyzetre $d(E, \overrightarrow{BK}) = m \langle p$ miatt egyetlen lépés, míg az $ACGH$ -ra $d(H, \overrightarrow{AJ}) = m \rangle q$ miatt több lépés is szükséges. Viszont ezen lépések száma is véges, minthogy $1 \langle k \in \mathbb{Z}$ és $kq \langle m \leq (k+1)q$ esetén $k+1$ számú ilyen sáv felvétele mindig elegendő. Az átdaraboláshoz mindkét négyzetben a C csúcsot tartalmazó részt az $\overline{AB}$ -vel C ponton át húzott g párhuzamossal két részre kell bontani: vagyis a $BEFC$ négyzet mindig három, míg az $ACGH$ négyzet mindig $k+2$ számú részre vágódik fel.

A $BEFC \rightarrow BDIK$ átdarabolás igazolásához legyen $P = \overline{EF} \cap \overrightarrow{BK}$ és $Q = g \cap \overline{BP}$, továbbá R a D ponton át $\overline{BC}$ -vel párhuzamos egyenes metszéspontja $\overline{BK}$ -val, valamint S az I pontból $\overline{DR}$ -re állított merőleges talppontja (1.1.8a ábra). Ekkor $PBE\Delta \cong ABC\Delta$ és a $BCDR$ négyszög

paralelogramma, továbbá $BQC\Delta \cong RBD\Delta$ és $BEP\Delta \cong ISD\Delta$ is teljesül, minthogy megfelelő szögek egyező állásúak, valamint $BC=RD$ és $BP=ID$. A $CQPF$ és $IKRS$ négyszögek megfelelő szögei szintén egyező állásúak, s így csak a megfelelő oldalak hosszait kell még összehasonlítani:

$$CQ = DB = IK,$$

$$QP = BP - BQ = BP - DC = KB - RB = KR,$$

$$PF = EF - EP = RD - SD = RS$$

és

$$FC = EB = SI.$$

Tehát az átdarabolás a következő módon végezhető el:

$$BEFC \rightarrow BEP + BQC + CQPF \rightarrow ISD + RBD + IKRS \rightarrow BDIK,$$

vagyis $a^2 = cp$ teljesül.

Az $ACGH \rightarrow ADIJ$ átdarabolást itt csak a $q \nmid m \nmid 2q$ esetre mutatjuk meg, a további esetek leírása bár egyre hosszadalmasabb, de mindig elvégezhető.

Legyen $L = \overline{CG} \cap \overline{AJ}$, $M = g \cap \overline{AL}$, N és T az $\overline{AJ}$ metszéspontja a D -n át $\overline{AC}$ -vel, illetve az I -n át $\overline{CG}$ -vel párhuzamos egyenessel, X és Y az $\overline{AH}$ és $\overline{GH}$ metszéspontja az $\overline{AJ}$ -től AD távolságban húzott párhuzamossal, $Z \in \overline{DI}$ és $DZ=XY$, valamint U a Z -ből $\overline{DN}$ -re merőleges talppontja. Megjegyezzük, hogy a kívánt Z pont $XY \nmid c$ miatt létezik (1.1.8.b ábra). Ekkor az $ACDN$ és $CLTI$ négyszögek paralelogrammák, továbbá $CAM\Delta \cong DNA\Delta$, $LCM\Delta \cong TIJ\Delta$ és $XYH\Delta \cong ZDU\Delta$ is fennáll, minthogy megfelelő szögek egyező állásúak, valamint $AC=ND$, $CL=IT$ és $DZ=YX$. Az $ALGYX$ és $IZUNT$ ötszögek megfelelő szögei szintén egyező állásúak, s ezért csak a megfelelő oldalak hosszait kell összehasonlítani. Ehhez felhasználhatjuk, hogy a konstrukció miatt $LAC\Delta$ és $XYH\Delta$ is hasonló az $ABC\Delta$ -höz, s ennél fogva az $ALGYX$ oldalaira

$$AL = \frac{bc}{a},$$

$$LG = GC - CL = b - \frac{b^2}{a} = \frac{(a-b)b}{a},$$

$$GY = GH - HY = b - \frac{(a-b)a}{a} = 2b - a,$$

$$YX = \frac{(m-q)c}{m} = \frac{(a-b)c}{a},$$

$$XA = CL = \frac{b^2}{a}$$

adódik, az *IZUNT* ötszög megfelelő oldalaira pedig

$$IZ = DI - DZ = c - \frac{(a-b)c}{a} = \frac{bc}{a},$$

$$ZU = XH = b - \frac{b^2}{a} = \frac{(a-b)b}{a},$$

$$UN = DN - DU = b - \frac{(a-b)a}{a} = 2b - a,$$

$$NT = AJ - (AN + TJ) = AJ - (AM + ML) = c - \frac{bc}{a} = \frac{(a-b)c}{a},$$

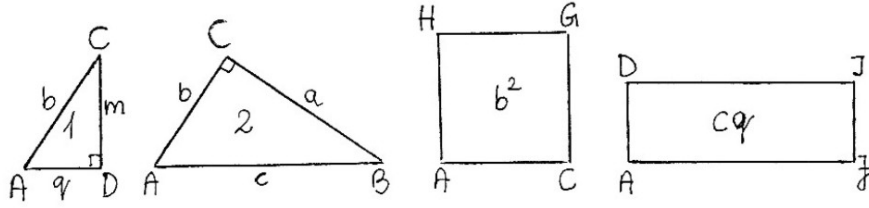
$$TI = CL = \frac{b^2}{a}.$$

Tehát az átdarabolás az alábbi módon végrehajtható:

$$ACGH \rightarrow ACM + CLM + ALGYX + XYH \rightarrow NDA + ITJ + IZUNT + ZDU \rightarrow ADIJ,$$

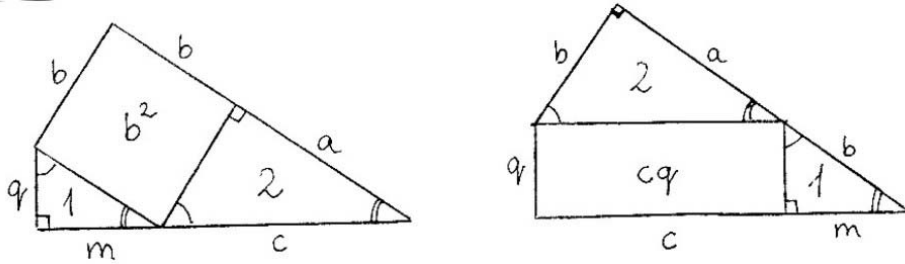
azaz $b^2 = cq$ igaz.

A befogótétel kiegészítései bizonyításához [34] a konkrét fizikai cselekvések szintjén szükségünk van egy eszközkészletre, ami $b^2 = cq$ esetén áll egy b oldalú *ACGH* négyzetből, egy c és q oldalú *ADIJ* téglalapból, továbbá 2-2 db az *ABC* és *ACD* háromszögekből (1.1.9. ábra).



1.1.9. ábra

Elsőként az $ACGH$ négyzetet, majd az $ADIJ$ téglalapot egészítjük ki az ABC és ACD háromszögekkel (1.1.10. ábra).



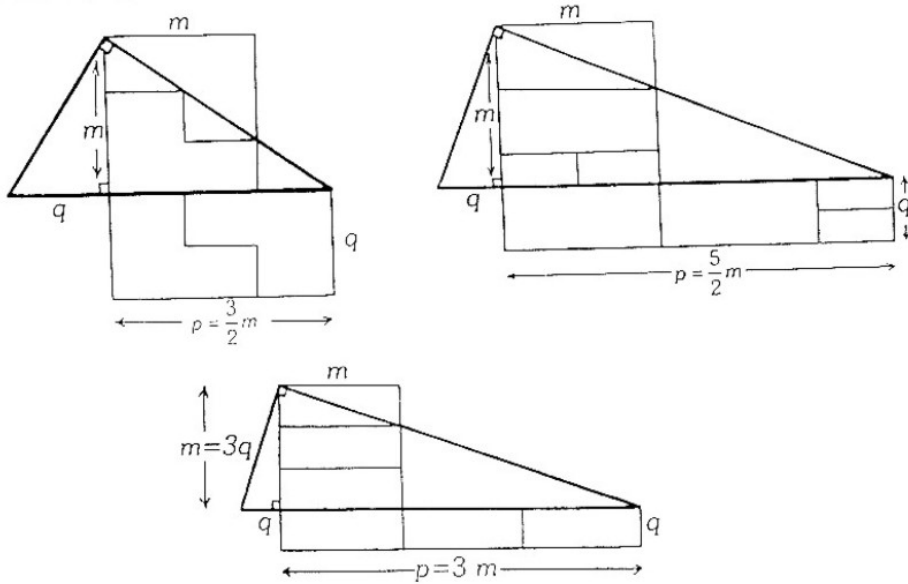
1.1.10. ábra

Minthogy az egy- és kétköríves szögek pótszögek, ezért a kiegészítéssel kapott mindkét alakzat egy-egy olyan négyszög, amelyek a megfelelő oldalak és szögek egyenlősége miatt egybevágók, s ezáltal $b^2 = cq$ igazolva van.

Az $a^2 = cp$ állítás kiegészítéses bizonyításához hasonló összetételű eszközökből álló készlettel és hasonló elrendezésekkel érhetünk célba, ezért erre külön nem térünk ki.

A *magasságtétel átdarabolásos bizonyítására* [34]-ben az $\frac{a}{b} \in \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\}$, valamint [16]-ban az $\frac{a}{b} \in \left\{ 3, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{5}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ arányokra találunk példákat, amelyek közül itt csak a racionális értékekre elvégezhető átdarabolásokat mutatjuk be (1.1.11. ábra), mivel leginkább azok alkalmasak a magasságtétel bevezetésére. További speciális arányokra elvégezhető átdarabolások keresése helyett a magasságtétel átdarabolásos bizonyításának általános leírásával a $q < m \leq p$ feltételt megtartva az alábbi két változatban foglalkozunk. Mindkettőben az ABC derékszögű háromszög $\overline{CD}$ magasságának megrajzolása után előbb

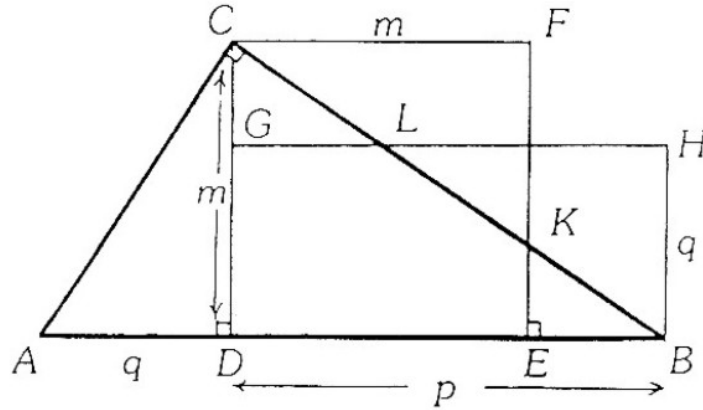
megszerkesztjük a $CDEF$ négyzetet, amelyre $m < p$ miatt E a $\overline{BD}$ szakasz belső pontja, majd megszerkesztjük a $BDGH$ téglalapot úgy, hogy az az 1. változatban a $\overline{BD}$ szakasz fölött, a 2.-ban pedig alatt legyen, továbbá mindkét esetben $DG=q$ teljesüljön. Ezután a $CDEF \rightarrow BDGH$ átdarabolás elvégezhetőségét kell igazolni.



1.1.11. ábra

1. változat

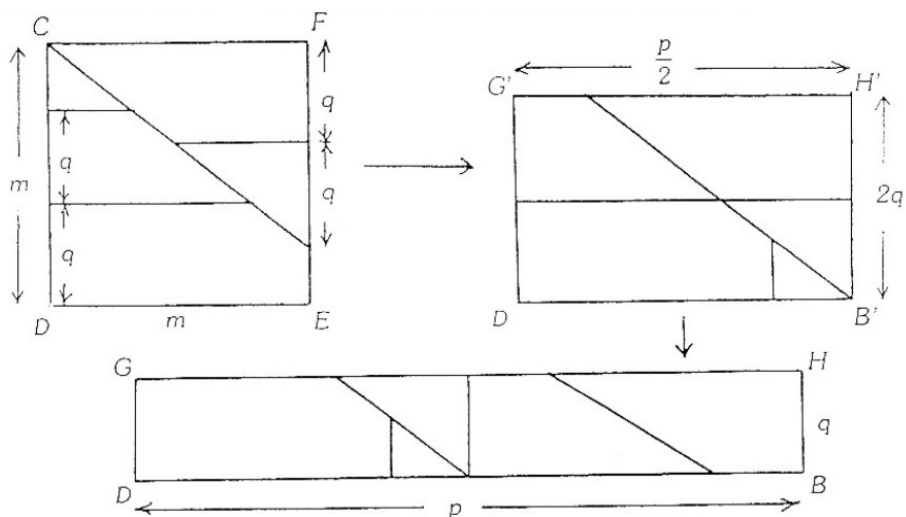
Ehhez a téglalap négyzetté történő átdarabolására [33]-ban leírt általános eljárás megfordítását használjuk fel. Az előbb adott konstrukció szerint $BE = p - m$, $G \in \overline{CD}$ és $CG = m - g$, továbbá a $K = \overline{BC} \cap \overline{EF}$ és $L = \overline{BC} \cap \overline{GH}$ jelöléseket bevezetve $BLH\Delta \cong ABC\Delta$ teljesül, minthogy egy-egy oldal és a rajtuk lévő megfelelő szögek egybevágók (1.1.12. ábra).



1.1.12. ábra

Ezért $GL = GH - HL = p - m = BE$, $\angle LGC = 90^\circ = \angle BEK$ és $\angle CLG = \beta = \angle KBE$, ami miatt $\triangle CLG \cong \triangle KBE$, s így $KE = CG = m - q$ és $KF = EF - KE = q$, azaz a megfelelő szögek egyező állása miatt $\triangle KCF \cong \triangle BLH$ adódik. Mindezek alapján a $CDEF \rightarrow BDGH$ átdarabolás elvégezhető, ha a K pont nincs a $BDGH$ téglalapon kívül, vagyis $KE = m - q \leq q = BH \Rightarrow m \leq 2q$, s ekkor $m < 2q$ esetén a kívánt átdarabolás az alábbi:

$CDEF \rightarrow KCF + CLG + DEKL \rightarrow BLH + KBE + DEKL \rightarrow BDGH$, továbbá $m = 2q$ esetén csak annyi a változás, hogy a K és L pontok egybeesnek. Ha viszont a K pont kívül van a $BDGH$ téglalapon, azaz $m > 2q$, akkor a fenti átdarabolás már nem végezhető el. Tulajdonképpen csak az a baj, hogy a $BDGH$ téglalap túl hosszú és nem elég magas. A megoldást az jelenti, hogy ekkor a $BDGH$ téglalapot helyettesítjük egy feleakkora hosszú és kétszeres magasságú $B'DG'H'$ téglalappal. Ha $K' = \overline{B'C} \cap \overline{EF}$, akkor $K'E = CG' = m - 2q \leq 2q$, azaz $2q < m \leq 4q$ esetén az átdarabolás elvégezhető: $CDEF \rightarrow B'DG'H' \rightarrow BDGH'$.

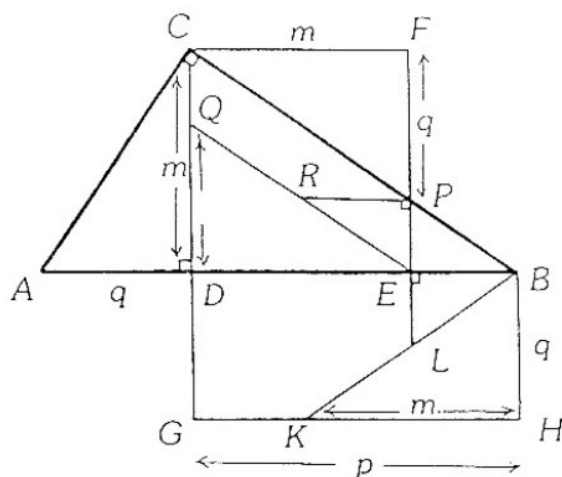


1.1.13. ábra

Ha pedig a K' pont kívül van a $B'DG'H'$ téglalapon, azaz $m > 4q$, akkor a $BDGH$ téglalapot egy harmadrésnyi hosszú és háromszoros magasságú $B'DG'H'$ téglalappal helyettesítjük, és így tovább. Ezen helyettesítések révén véges sok lépésben mindig visszajutunk az első esethez, s így a $CDEF \rightarrow BDGH$ átdarabolás is mindig elvégezhető.

2. változat

Ismét az adott konstrukciónak megfelelően legyen $P = \overline{BC} \cap \overline{EF}$, Q az E ponton át $\overline{BC}$ -vel párhuzamosan húzott egyenes és a $\overline{CD}$ szakasz metszéspontja, R a P ponton át $\overline{AB}$ -vel párhuzamos és az $\overline{EQ}$ egyenes metszéspontja, K a $\overline{GH}$ szakasz olyan belső pontja, amelyre $HK = DE = m$, valamint $L = \overline{EF} \cap \overline{BK}$ (1.1.14. ábra).



1.1.14. ábra

Ekkor $q < m < 2q$ esetén R az $\overline{EQ}$ és L a $\overline{BK}$ belső pontja, továbbá $QED\Delta \cong BKH\Delta$, $ERP\Delta \cong LBE\Delta$ és $CFPRQ \cong EDGKL$ miatt az átdarabolás háromrészesszel elvégezhető:

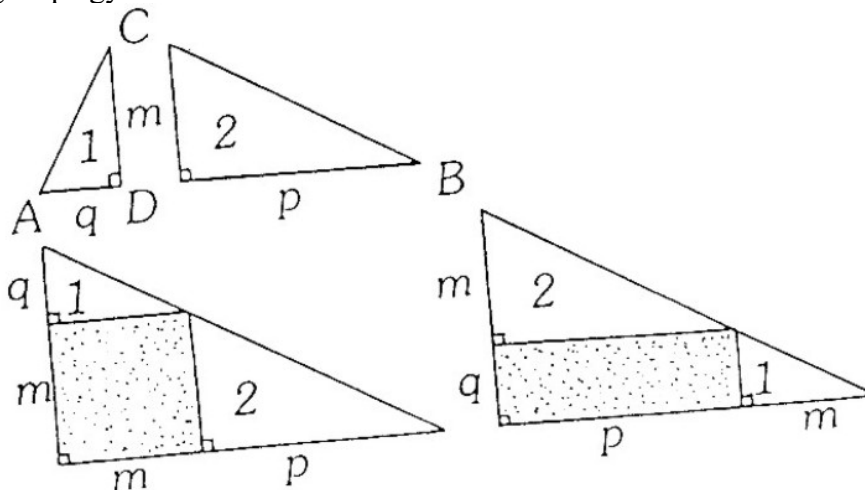
$CDEF \rightarrow QED + ERP + CFPRQ \rightarrow BKH + LBE + EDGKL \rightarrow BDGH$. $m = 2q$ esetén csak annyi az eltérés, hogy $R=Q$ és $K=L$ miatt az ötszögekből téglalapok lesznek. $m > 2q$ esetén pedig az $E-Q-R$ és $B-K-L$ elrendezések állnak fenn, s így az átdarabolás további esetekre bontandó, amelyek a $kq < m \leq (k+1)q$ feltétel szerint tagolhatók, ahol $1 < k \in \mathbb{Z}$, s így módon a $CDEF \rightarrow BDGH$ átdarabolás egyenlőség esetén $k+1$, míg egyenlőtlenség esetén $k+2$ számú résszel mindig elvégezhető.

Megjegyezzük, hogy a $q < m < 2q$ esetre az 1. és 2. változatban a $CDEF$ négyzet és a $BDGH$ téglalap kétféle feldarabolása középpontos, illetve tengelyes tükrözéssel átvihető egymásba.

A magasságtétel kiegészítéses bizonyítására három változatot ismertettünk. Közülük az első ([34], 37-38.old.) az, amely leginkább alkalmas tevékenységi formát kínál a magasságtétel felfedeztetésére. Ugyanis mind a kiegészítés, mind pedig az azt követő területösszehasonlítás viszonylag egyszerűen elvégezhető. A második ([34] 199-201.old.) változatnál a téglalappá történő kiegészítés már nem annyira kézenfekvő, jóllehet ugyanazon eszközkészlettel elvégezhető. A harmadik változatnál a területösszehasonlítást az teszi nehezebbé, hogy előbb még két háromszög egybevágóságát is külön igazolni kell.

1. változat

Az ABC derékszögű háromszöget a $\overline{CD}$ magasság mentén szétvágva kapjuk az ACD és a BCD részháromszögeket, amelyek egyrészt a $\overline{CD}$ magasság fölé szerkesztett négyzetet, másrészt az $\overline{AB}$ átfogó $\overline{AD}$ és $\overline{BD}$ részeiből szerkesztett téglalapot úgy egészítik ki, hogy két egybevágó derékszögű háromszög adódik (1.1.15.ábra). Ez az egybevágóság a megfelelő befogók hosszainak összehasonlításával könnyen ellenőrizhető. Az egybevágóság miatt a kiegészített négyzet és téglalap egyenlő területű.

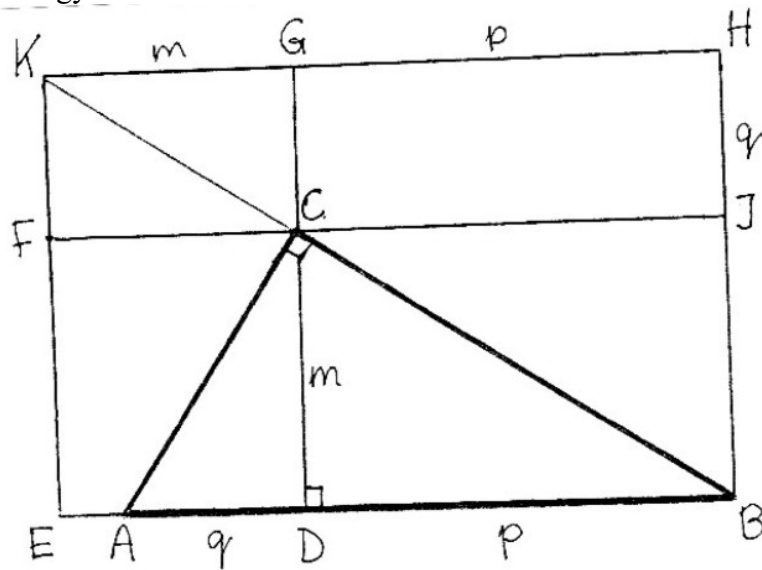


1.1.15. ábra

Ez a változat egy kirakós játékká is átrendezhető, ha összeállítjuk a következő készletet: 1 db ABC derékszögű háromszög, 3 db ACD -vel és 3 db BCD -vel egybevágó háromszög, valamint 1 db CD oldalú négyzet és 1 db $AD \times BD$ oldalú téglalap. A játék azzal kezdődik, hogy a tanuló megismerkedik az eszközökkel. Ennek során felfedezheti, hogy mely oldalak, illetve szögek egybevágók, majd az ACD és BCD háromszögekből összeállítja az ABC derékszögű háromszöget, továbbá annak magasságát összehasonlítja a négyzet oldalával, az átfogó két részét pedig a téglalap oldalaival. Ezt követheti a négyzet és a téglalap kiegészítése két-két háromszöggel úgy, hogy két egybevágó derékszögű háromszög álljon elő. A játék azzal a felfedezéssel ér véget, hogy a négyzet és a téglalap egyenlő területű, mivel a megfelelő kiegészítő részek területe is egyenlő volt.

2. változat

Az ABC derékszögű háromszögből kiindulva legyen $CDEF$ a $\overline{CD}$ magasság fölé $A \in \overline{DE}$ feltétellel szerkesztett négyzet, valamint $CGHI$ az $\overline{AB}$ átfogó $\overline{AD}$ és $\overline{BD}$ szeleteiből szerkesztett téglalap úgy, hogy $I \in \overline{BH}$ és $\overline{CI} \parallel \overline{AB}$ teljesüljön (1.1.16.ábra). Ekkor az $\overline{EF}$ és $\overline{GH}$ egyenesek K metszéspontja az ACD és KCF háromszögek egybevágósága miatt rajta van a $\overline{BC}$ egyenesen, s így a $BEKH$ négyszög egy téglalap, amit a $\overline{BK}$ átló az egyenlő területű BEK és BHK háromszögekre bont. Ha ezekből elvesszük a páronként egybevágó BCD és CBI , illetve KCF és CKG háromszögeket, akkor a visszamaradó $CDEF$ négyzet és $CGHI$ téglalap is egyenlő területű.



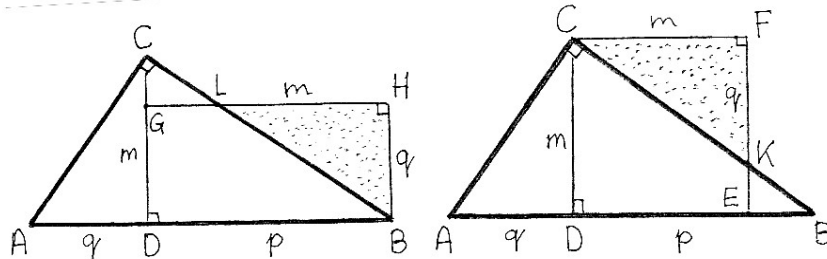
1.1.16.ábra

3. változat

Az ABC derékszögű háromszöget a $\overline{CD}$ magasság mentén szétvágva kapjuk az ACD és BCD részháromszögeket. Ha a BCD háromszöget rögzítjük, az ACD háromszöget pedig a $\overline{BC}$ befogó mellé helyezzük el kétféleképpen (1.1.17.ábra), akkor a keletkező $BDCFK$ és $BDCLH$ ötszögek területe nyilvánvalóan egyenlő. Legyen $E = \overline{BD} \cap \overline{FK}$ és $G = \overline{CD} \cap \overline{HL}$. Ekkor a $BDCFK$ ötszög felbontható a $CDEF$ négyzetre

és a KBE derékszögű háromszögre, a $BDCLH$ ötszög pedig a $BDGH$ téglalapra és a CLG derékszögű háromszögre úgy, hogy $BE = p - m = GL$ és $EK = m - q = CG$ teljesül. Mindezek alapján $KBE\Delta \cong CLG\Delta$, s ennél fogva

$$m^2 = t(CDEF) = t(BDEFK) - t(KBE) = t(BDCLH) - t(CLG) = t(BDGH) = pq.$$



1.1.17. ábra

Konkrét fizikai tevékenység esetén a fenti ábrán lévő két alakzatot külön-külön előállítjuk, majd a két ötszög területének összehasonlítása után ezen ötszögekből levágjuk a fölösleges részeket, amelyek egybevágóságáról szemlélet alapján meggyőződve kijelenthetjük, hogy a visszamaradó négyzet és téglalap is egyenlő területű. Megjegyezzük, hogy a fenti eljárásban az ACD és BCD háromszögek szerepe felcserélhető.

A *pitagorasz-i tételcsoport* eddigi tárgyalása során mindvégig feltételeztük, hogy az AB átfogójú ABC derékszögű háromszögre $BC \geq AC$ teljesül. Ezáltal az adott tárgyalásban egyfajta összhang alakult ki, ami megkönnyítheti a leírtak megértését és elsajátítását. Azt is látnunk kell azonban, hogy a $BC \geq AC$ feltétel ilyen használata az általánosság megsértése nélkül megtehető. Ugyanis $BC < AC$ esetén alkalmas átjelöléssel, míg $BC = AC$ esetén megfelelő specializálással mindig célba érhetünk.

1.2. A Pitagorasz-tétel két nem közismert általánosítása

A Pitagorasz-tételre ismert többféle általánosítás [6, 34, 36, 39, 48, 62, 63] közül tekintsük elsőként a Hoehn által [36]-ben leírtak az alábbi változatát:

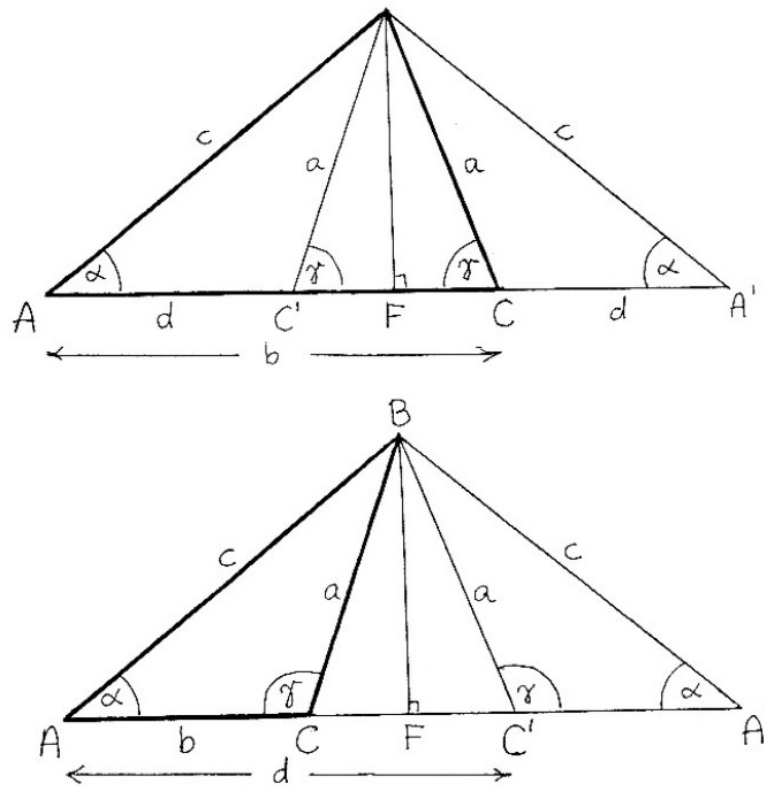
Ha az ABC háromszög C csúcsának a B csúcsból megrajzolt magasságvonalra vonatkozó tükörképét C' -vel, az A és C' pontok távolságát d -vel jelöljük, akkor $\gamma \geq 90^\circ$ esetén $c^2 = a^2 + bd$.

Hoehn ezt a Pitagorasz-tétel egy mellőzött általánosításának nevezi, és háromféleképpen bizonyítja: elsőként két koszinusz tétel, majd két Pitagorasz-tétel, s végül a Stewart-tétel segítségével.

Itt először is megmutatjuk, hogy ez az általánosítás nem csupán $\gamma \geq 90^\circ$, hanem $\gamma \geq \alpha \Leftrightarrow c \geq a$ esetén is érvényes. Ugyanis $\gamma = \alpha \Leftrightarrow c = a$ esetén $C' = A$ miatt $d = 0$, s így a $c^2 = a^2 + bd$ formula nyilvánvalóan igaz. Ha viszont $\gamma > \alpha \Leftrightarrow c > a$, akkor C' az $\overline{AC}$ szakasz belső pontja, s így $d = AC' = AC - CC'$ és $CC' = 2a \cos \gamma$ miatt a koszinusz tétel alapján

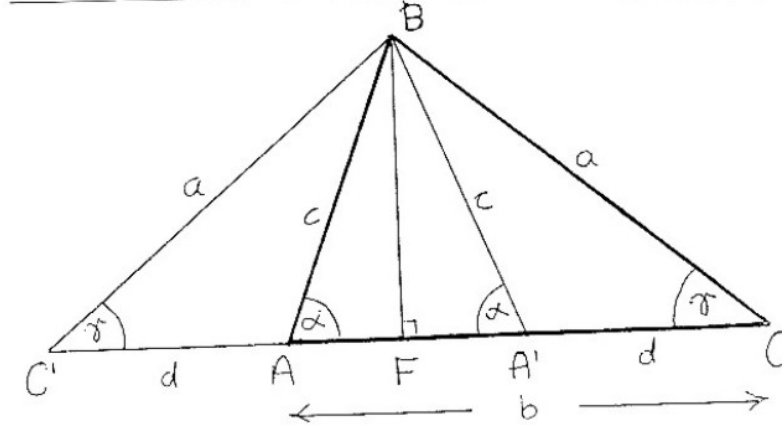
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b(b - 2a \cos \gamma) = a^2 + bd$$

adódik (1.2.1.ábra).



1.2.1. ábra

De mi a helyzet $\gamma < \alpha \Leftrightarrow c < a$ esetén? Ekkor a B csúcsból megrajzolt magasságvonalra vonatkozó tükrözés után A elválasztja C és C' pontokat (1.2.2. ábra), és a keletkező ABC' háromszögre $a > c$ miatt teljesül az $a^2 = c^2 + bd$ összefüggés, ahonnan $c^2 = a^2 - bd$ kapható.



1.2.2. ábra

A továbbiakban $\gamma > \alpha \Leftrightarrow c > a$ feltételt megtartva a $c^2 = a^2 + bd$ formulára egy olyan bizonyítást keresünk, amely függetlenné tehető a Pitagorasz-tételtől. Ehhez a Heron-képletből kiindulva meghatározzuk az ABC és ABA' háromszögek (1.2.1. ábra) területét, ahol A' az A tükörképe a $\overrightarrow{BF}$ magasságvonalra:

$$\begin{aligned} t(ABC\Delta) &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c)+a][(b+c)-a][a-(b-c)][a+(b-c)]} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} t(ABA'\Delta) &= \sqrt{\frac{2c+b+d}{2} \cdot \frac{b+d}{2} \cdot \frac{b+d}{2} \cdot \frac{2c-b-d}{2}} = \frac{1}{4} (b+d) \sqrt{[2c+(b+d)][2c-(b+d)]} = \\ &= \frac{1}{4} (b+d) \sqrt{4c^2 - (b+d)^2} \end{aligned}$$

Minthogy az ABC és ABA' háromszögekben közös a $\overline{BF}$ magasság, ezért

$$\left(\frac{b}{b+d}\right)^2 = \left(\frac{t(ABC\Delta)}{t(ABA'\Delta)}\right)^2 = \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{(b+d)^2[4c^2 - (b+d)^2]},$$

ahonnan $c^4 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2b^3d - b^2d^2 = 0$, s ezt szoroztá alakítva $(c^2 - a^2 - bd)(c^2 - a^2 + bd + 2b^2) = 0$, ahol $c > a$ miatt $c^2 - a^2 + bd + 2b^2 > 0$, s ennél fogva $c^2 - a^2 - bd = 0$, amiből a kívánt $c^2 = a^2 + bd$ formula kapható.

A $\gamma < \alpha \Leftrightarrow c < a$ esetre a fenti bizonyítás hasonló módon elvégezhető.

Ezáltal a $c^2 = a^2 + bd$ formula a Pitagorasz-tétel egy általánosításának tekinthető: ugyanis $\gamma = 90^\circ$ esetén $C' = C$ miatt $d = b$, s így $c^2 = a^2 + b^2$ adódik.

Vizsgáljuk most azt, hogy d milyen értékeket vehet fel. Láttuk már, hogy $\gamma = \alpha$ esetén $d = 0$. Ha pedig $\gamma > \alpha$, akkor $d = b - 2a \cos \gamma$ miatt $0^\circ < \gamma \leq 90^\circ$ esetén $0 < d \leq b$, valamint $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ esetén $c > a, c > b$, és $-1 < \cos \gamma < 0$ miatt $b < d < b + 2a < 3c$. Utóbbi esetben szigorúbb felső korlátot is kaphatunk, ha a C' pont előállítását megfigyelve észrevevessük, hogy c -t állandónak tartva az $\overline{AC'}$ szakasz hossza $\gamma \rightarrow 180^\circ$ és $C \rightarrow A$ esetén szigorúan monoton növekvő és határesetben $2c$ -vel lenne egyenlő, ami viszont nyilvánvalóan nem megengedett, s ennél fogva $b < d < 2c$. A szögek nagysága szempontjából érdekes megvizsgálni a $d = a$ és $d = c$ eseteket (1.2.1. ábra). Ha $d = a$, akkor az ABC háromszög hegyesszögű és C' az $\overline{AC}$ oldal belső pontja, továbbá az ABC' egyenlőszárú háromszögben a C' -nél lévő külső szögre $\gamma = BC'C\angle = ABC'\angle + BAC'\angle = 2\alpha$. Ha pedig $d = c > b > a$, akkor az ABC háromszög tompaszögű és C' az $\overline{AC}$ oldal külső pontja, továbbá $AB = AC'$ miatt a BCC' egyenlőszárú háromszögben $BCC'\angle = BC'C\angle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, s ennél fogva $\gamma = ACB\angle = 180^\circ - BCC'\angle = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

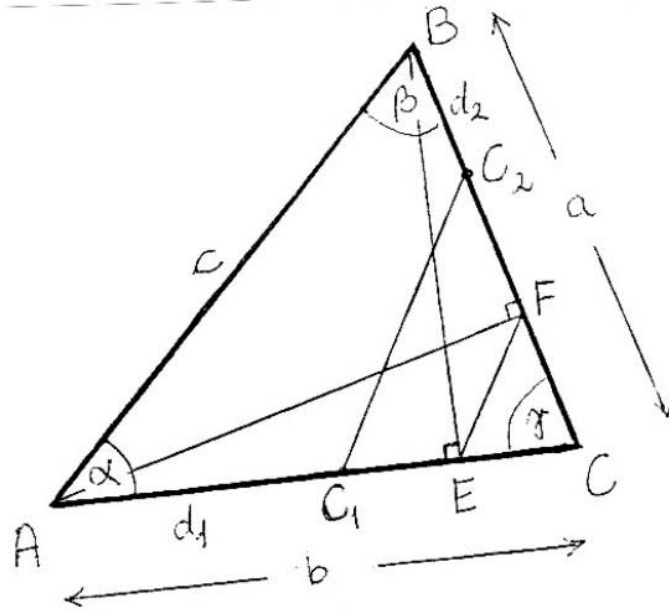
A kapott $c^2 = a^2 \pm bd$ formula egy alkalmazásaként oldjuk meg a következő feladatot.

Az ABC háromszögben legyen $c > a$ és $c > b$, továbbá jelölje C_1 , illetve C_2 a C csúcsnak a B -ből, illetve A -ból húzott magasságvonalra vonatkozó tükörképét. Mutassuk meg, hogy az AC_1C_2B négyszög húrnégyszög.

Tekintsük elsőként azt az esetet, amikor az ABC háromszög hegyesszögű, azaz $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ teljesül. Ekkor C_1 az $\overline{AC}$ és C_2 a $\overline{BC}$

szakasz belső pontja (1.2.3. ábra). Ennélfogva $d_1 = AC_1$ és $d_2 = BC_2$ jelöléssel az ABC háromszögre $c \angle a \Rightarrow c^2 = a^2 + bd_1$ és $c \angle b \Rightarrow c^2 = b^2 + ad_2$, ahonnan $a^2 + bd_1 = b^2 + ad_2$, amiből $a(a - d_2) = b(b - d_1)$ kapható, s így az A, B, C_1 és C_2 pontok ugyanazon körön helyezkednek el ([37] 1326. feladat). $\gamma = 90^\circ$ esetén a C_1 és C_2 pontok azonosak C -vel, s ezért a feladat állítása nyilvánvalóan igaz. Ha pedig az ABC háromszög tompaszögű, azaz $90^\circ \angle \gamma \angle 180^\circ$, akkor az A -ból, illetve B -ből meghúzott magasságvonal az ABC háromszögön kívül halad, vagyis C elválasztja az A és C_1 , illetve B és C_2 pontokat. Ennek ellenére az előbbi számítás változatlanul érvényes, s ezáltal a kitűzött feladatbeli állítás bizonyítása teljessé vált.

Ugyanerre a feladatra adható még egy másik megoldás is, amelyben az előbbi Pitagorasz-típusú formulák helyett azt az ismert tényt használjuk fel, hogy a magasságok talppontjait összekötő szakaszok által levágott háromszögek hasonlóak az eredetihez. Ha $0^\circ \angle \gamma \angle 90^\circ$ esetén E és F jelölik a B -ből húzott magasságok talppontjait (1.2.3. ábra), akkor

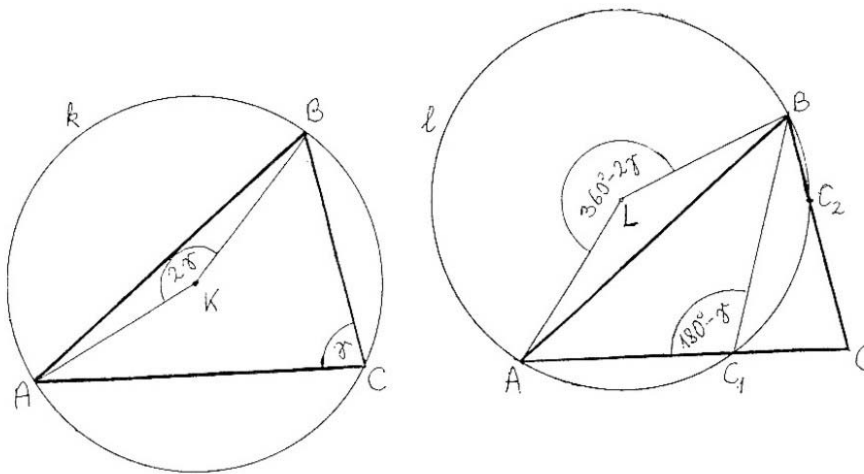


1.2.3. ábra

$EFC\Delta \sim BAC\Delta$ miatt $\angle CFE = \angle CAB = \alpha$ és $\angle CEF = \angle CBA = \beta$. Továbbá a C_1 és C_2 pontok előállítására miatt az $\overline{EF}$ szakasz a

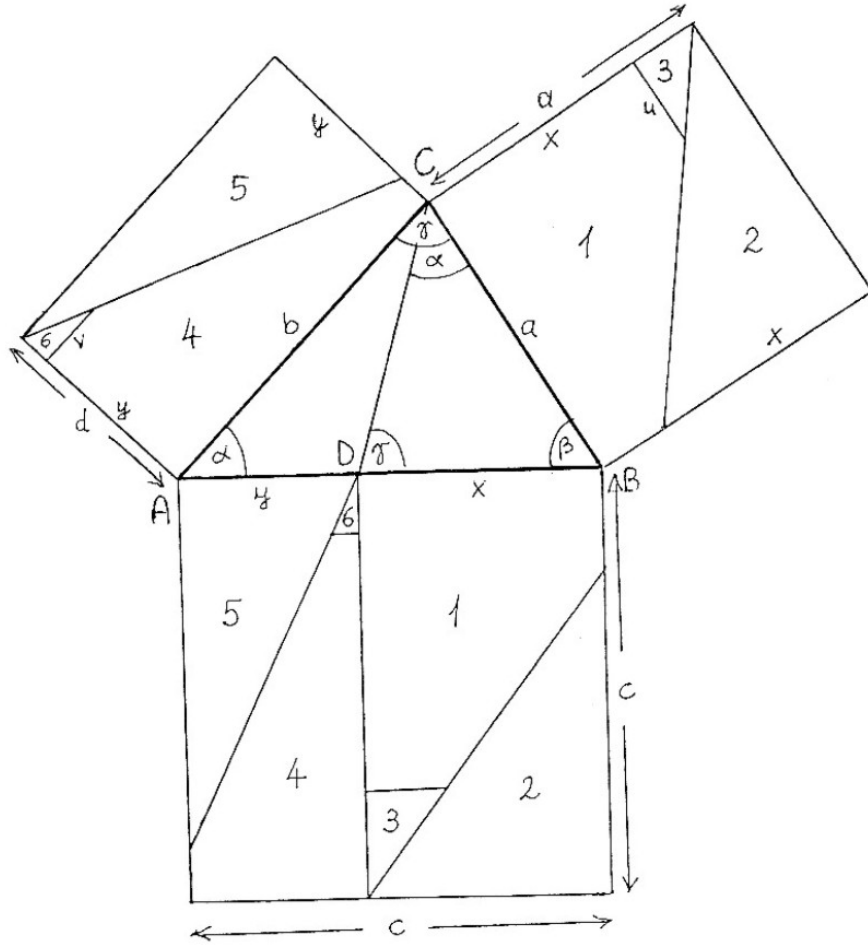
CC_1C_2 háromszögben a $\overline{C_1C_2}$ oldallal párhuzamos középvonal, s ennél fogva $C_1C_2C\angle = \alpha$ és $C_1C_2B\angle = 180^\circ - \alpha$ is teljesül, vagyis az AC_1C_2B négyszög húrnégyszög. A $\gamma = 90^\circ$ eset most is nyilvánvaló. Ha pedig $90^\circ \angle \gamma \angle 180^\circ$, akkor az előbbihez hasonló érveléssel megmutatható, hogy a $\overline{BC_1}$ szakasz az A és C_2 pontokból egyaránt α szög alatt látszik, amiből az következik, hogy az A, B, C_1 és C_2 pontok ugyanazon körre illeszkednek.

Az A, B, C_1 és C_2 pontokat tartalmazó körnek egy érdekes tulajdonsága, hogy az ABC háromszög körülírt körének az $\overline{AB}$ egyenesre vonatkozó tükörképe. Ez $\gamma = 90^\circ$ esetén a két kör egybeesése miatt nyilvánvalóan igaz, hiszen ekkor mindkét kör középpontja az $\overline{AB}$ oldal felezőpontja. $\gamma \neq 90^\circ$ esetén először azt mutatjuk meg, hogy ezen körök középpontjai az $\overline{AB}$ egyenes különböző oldalain vannak. Ha például $0^\circ \angle \gamma \angle 90^\circ$ (1.2.4. ábra), akkor $c \rangle a$ és $c \rangle b$ miatt egyrészt az ABC háromszög k körülírt körének K középpontja az ABC háromszög belsejében, azaz az $\overline{AB}$ egyenes C pontot tartalmazó oldalán van, másrészt az AC_1C_2B négyszög köré írt l kör egyúttal körülírt köre az ABC_1 háromszögnek, amely a $0^\circ \angle \gamma \angle 90^\circ$ feltétel miatt C_1 -nél tompaszögű, s ennél fogva az l kör L középpontja az ABC_1 háromszögön kívül van, mégpedig az $\overline{AB}$ egyenes C_1 -et nem tartalmazó oldalán, ami $c \rangle b$ miatt azonos a C -t nem tartalmazó oldallal. Ha viszont $90^\circ \angle \gamma \angle 180^\circ$, akkor K van kívül és L pedig belül az ABC háromszögön. Tehát $\gamma \neq 90^\circ$ esetén az $\overline{AB}$ egyenes mindig elválasztja K és L pontokat. Minthogy az $\overline{AB}$ szakasz közös húrja a k és l köröknek, ezért a K és L középpontok illeszkednek az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegesére. Ezután már csak azt kell igazolni, hogy az $\overline{AB}$ szakasz a K és L pontokból egyenlő szög alatt látható. Ehhez az azonos íven nyugvó középponti és kerületi szögek mértékei közötti összefüggést használjuk fel. Eszerint k körben a C -t nem tartalmazó $\widehat{AB}$ köríven nyugvó ALB középponti szög kétszerese az AC_1B kerületi szögnek. Ennél fogva az $\overline{AB}$ szakasz a K és L pontokból $0^\circ \angle \gamma \angle 90^\circ$ esetén 2γ , míg $90^\circ \angle \gamma \angle 180^\circ$ esetén $360^\circ - 2\gamma$ nagyságú, tehát ugyanakkora szög alatt látszik. Mindezek alapján L a K -nak $\overline{AB}$ egyenesre vonatkozó tükörképe, s így az l kör fenti tulajdonsága is igazolva van.



1.2.4.ábra

Mindezek után az $a < b < c$ feltételt megtartva átdarabolásos bizonyítást adunk a $c^2 = a^2 + bd$ Pitagorasz-típusú formulára, ahol $d = b - 2a \cos \gamma$. E célból a $\overline{BC}$ oldal fölé rajzolt négyzetet és az $\overline{AC}$ oldal fölé rajzolt b és d oldalú téglalapot daraboljuk fel az 1.2.5. ábrán látható módon, ahol $x = \frac{a^2}{c}$ és $y = \frac{bd}{c}$. Ez a feldarabolás $a < b < c$ esetén $x < a$ és $y < d$ miatt mindig lehetséges.



1.2.5. ábra

Az így kapott 1,2,3 és 4,5,6 jelű részekből $u = \frac{a(a-x)}{x} = c-a$ és

$v = \frac{b(d-y)}{y} = c-b$ miatt előállítható egy-egy téglalap, amelynek oldalai

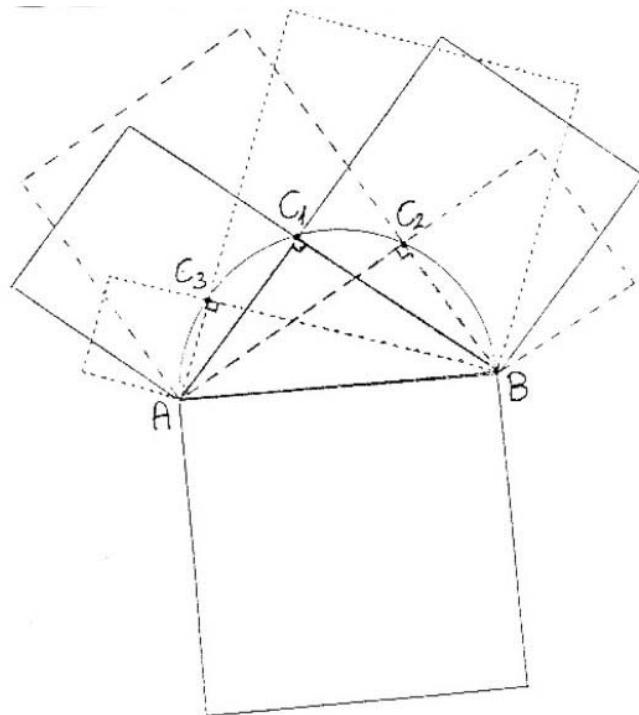
rendre c és x , illetve c és y hosszúságúak. Továbbá $x < a < c$ miatt az $\overline{AB}$ oldalnak van olyan D belső pontja, amelyre $BD = x$. Hogy ekkor milyen hosszú az $\overline{AD}$ szakasz, arra az alábbi számolás ad választ:

$$x + y = \frac{a^2}{c} + \frac{bd}{c} = \frac{a^2 + bd}{c} = \frac{a^2 + b(b - 2a \cos \gamma)}{c} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}{c} = \frac{c^2}{c} = c$$

Ennélfogva $AD = y$, s ezért az $\overline{AB}$ oldal fölé rajzolt négyzet lefedhető a fentebb említett c és x , illetve c és y oldalú téglalapokkal. Tehát a kívánt átdarabolás elvégezhető, s ezáltal a $c^2 = a^2 + bd$ formula igazolva van.

Megjegyezzük, hogy $\gamma = 90^\circ$ esetén D a C -ből húzott magasság talppontja, s ekkor a derékszögű háromszögre szokásos jelölésekkel $x = p \angle a$, $y = q \angle b$ és $d = b$ teljesül.

A Pitagorasz-tétel másik nem közismert általánosítása Schmitz [62, 63] azon ötletére alapozható, hogy a Thalész- és Pitagorasz-tétel összekapcsolása esetén az $\overline{AB}$ átfogójú ABC_i ($i=0,1,2,\dots$) derékszögű háromszögek C_i csúcsai az $\overline{AB}$ átmérőjű körre illeszkednek és ugyanekkor teljesül az $AC_i^2 + BC_i^2 = AB^2$ összefüggés is. Mindez geometriailag azt jelenti, hogy az ABC_i derékszögű háromszögek $\overline{AC_i}$ és $\overline{BC_i}$ befogói fölé rajzolt négyzetek területeinek összege a C_i csúcs minden lehetséges helyzetére egyenlő az $\overline{AB}$ átfogó fölé rajzolt négyzet (1.2.6. ábra) területével, ami az A és B pontok rögzítése után egy állandó érték.

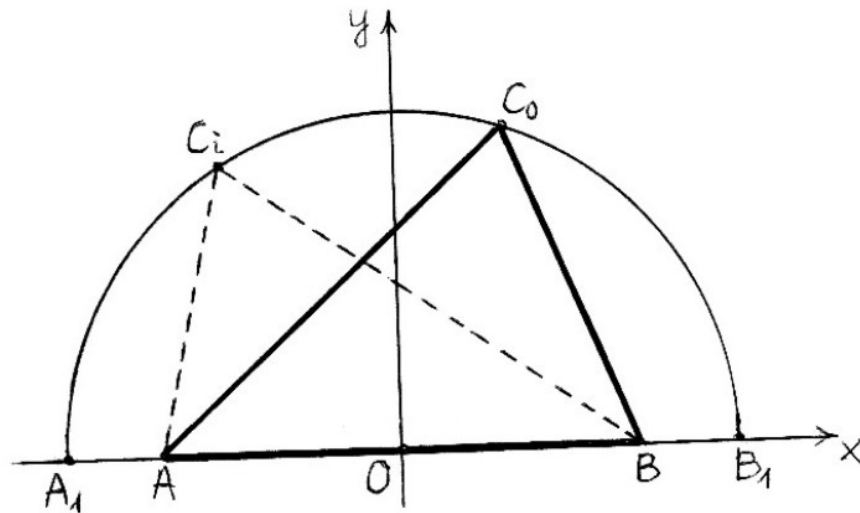


1.2.6. ábra

A fenti tényállásból kiindulva általánosítást keresünk a Pitagorasz-tételre. E célból válasszuk az ABC_i háromszöget úgy, hogy a C_i csúcsnál lévő szöge egyelőre ne legyen derékszög, és vizsgáljuk meg, hogy rögzített $\overline{AB}$ oldal és C_0 csúcs esetén a C_i csúcsok milyen alakzatot futnak be, ha azt kívánjuk, hogy az $\overline{AC_i}$ és $\overline{BC_i}$ oldalak fölé rajzolt négyzetek területeinek összege mindig $AC_0^2 + BC_0^2$ legyen, vagyis állandó maradjon. Ehhez a vizsgálathoz az ABC_0 háromszöget Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben helyezzük el úgy, hogy $c=AB$ jelöléssel az $A\left(-\frac{c}{2};0\right)$, $B\left(\frac{c}{2};0\right)$ és $C_0(x_0;y_0)$ megadási módot választjuk (1.2.7. ábra), a mozgó C_i pont koordinátáira pedig bevezetjük az $(x;y)$ jelölést. Ekkor az $AC_i^2 + BC_i^2 = AC_0^2 + BC_0^2$ feltétel

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x_0 + \frac{c}{2}\right)^2 + y_0^2 + \left(x_0 - \frac{c}{2}\right)^2 + y_0^2$$

alakba írható, ahonnan $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ kapható, és minthogy $C_0 \notin \overline{AB}$



1.2.7. ábra

miatt $x_0^2 + y_0^2 > 0$, ezért a C_i pontok egy olyan körvonalon vannak, amelynek középpontja az $\overline{AB}$ oldal O felezőpontja és sugara az ABC_0 háromszög C_0 csúcsához tartozó s_c súlyvonala, amelynek hossza a koszinusz-tételnek az ABC_0 és AOC_0 háromszögekre történő alkalmazásával ismert módon kifejezhető az $a=BC_0$, $b=C_0A$, $c=AB$

adatokkal: $s_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$, ahonnan $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cos \gamma$ miatt

$$s_c = \sqrt{\frac{c^2}{4} + ab \cos \gamma} \quad \text{adódik, s ennél fogva } 0^\circ < \gamma < 90^\circ \text{ esetén } s_c > \frac{c}{2},$$

míg $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ esetén $s_c < \frac{c}{2}$. Ha ezek után bevezetjük a

$k(O, s_c) \cap \overleftrightarrow{AB} = \{A_1, B_1\}$ jelölést, akkor egyrészt k nyilván az $\overline{A_1 B_1}$ szakasz Thalész-köre, másrészt az O pontra vonatkozó szimmetria miatt az $\overline{AA_1}$ és $\overline{BB_1}$ szakaszok hossza egyenlő. Jelöljük d -vel ezt a közös hosszat, amire tehát esetünkben

$$d = \left| s_c - \frac{c}{2} \right| = \begin{cases} s_c - \frac{c}{2}, & \text{ha } 0^\circ < \gamma < 90^\circ \\ \frac{c}{2} - s_c, & \text{ha } 90^\circ < \gamma < 180^\circ \end{cases}$$

érvényes.

Tekintsük elsőként a $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ esetet, amikor is

$$d = s_c - \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}} - \frac{c}{2} \quad (1),$$

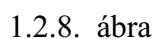
ahonnan

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}} = d + \frac{c}{2},$$

s ebből pedig

$$a^2 + b^2 = (c + d)^2 + d^2 \quad (2) \text{ kapható.}$$

Ezen összefüggés szerint az ABC_0 háromszög $\overline{AC_0}$ és $\overline{BC_0}$ oldalai fölé rajzolt négyzetek területeinek összege egy olyan négyzet területével egyenlő, amelynek oldala $AD = \sqrt{(c + d)^2 + d^2}$ hosszúságú (1.2.8. ábra). S minthogy $C_i \in k(O, s_c) \setminus \{A_1, B_1\}$ esetén

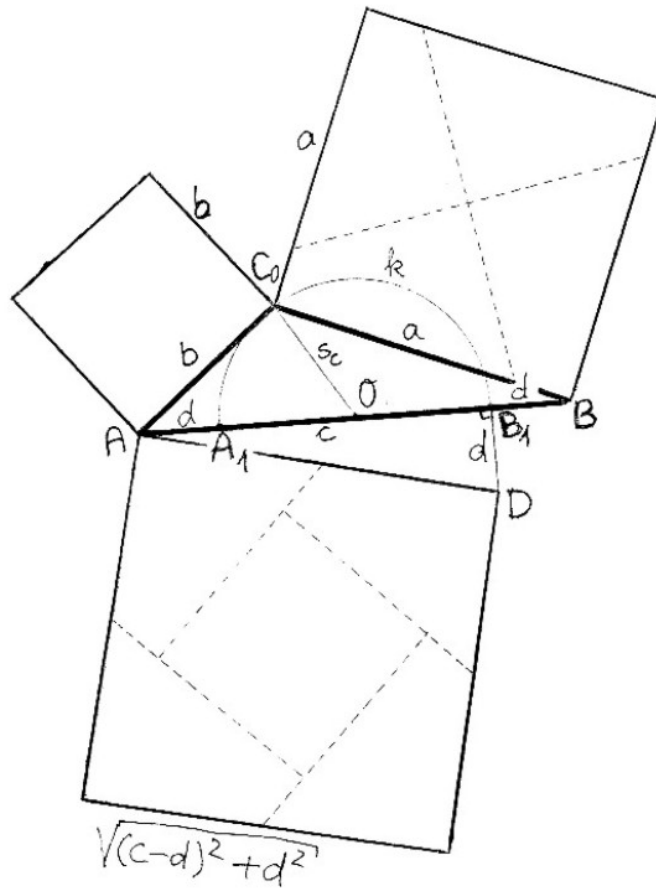


43

Másodjára maradt még a $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ eset, amikor $d = \frac{c}{2} - s_c$, s ekkor az előzővel analóg módon jutunk az

$$a^2 + b^2 = (c - d)^2 + d^2 \quad (3)$$

összefüggéshez, ami a (2)-vel hasonló geometriai tartalommal rendelkezik (1.2.9. ábra).



1.2.9. ábra

Mindezek alapján megállapítható, hogy $\gamma \neq 90^\circ$ esetén (2) és (3) alapján fennáll az

$$a^2 + b^2 = (c \pm d)^2 + d^2 \quad (4)$$

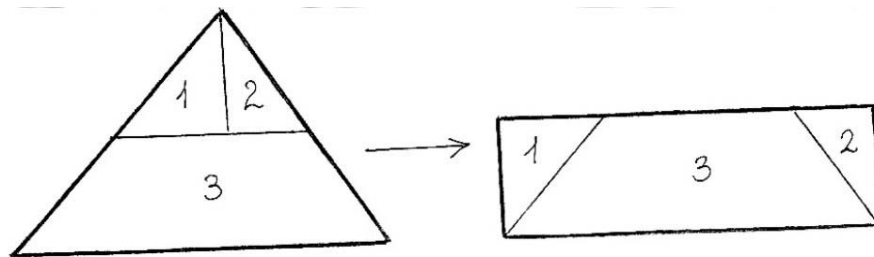
összefüggés, ami $\gamma = 90^\circ$ esetén $d = 0$ miatt a jól ismert Pitagorasz-tételre vezet, s ennél fogva (4) a Pitagorasz-tétel egy lehetséges általánosítása.

Ezzel az általánosítással kapcsolatban is felvetődhet az átdarabolás lehetőségének a kérdése, s ezért az alábbiakban megadjuk az 1.1.1. ábrán bemutatott Perigal-féle átdarabolási mód megfelelő változatát, ami az eredetivel teljesen egyező elrendezésre vezet, csak részben a konstrukció más.

Az $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ oldalak fölé rajzolt négyzetek közül $AC=BC$ esetén bármelyiket, $AC \neq BC$ esetén pedig a kisebbiket felbontatlanul megtartjuk, míg a nagyobbikat a középpontján áthaladó AD hosszúságú egymásra merőleges két szakasszal négy egybevágó részre osztjuk. Ezt a két szakaszt úgy kaphatunk meg, hogy a tekintett négyzet középpontjában $AD/2$ sugarú kört rajzolunk, ami például $AC < BC$ esetén (1) és $BC < AD < BC\sqrt{2}$ miatt e négyzet oldalait mindig nyolc különböző pontban metszi, amelyek közül egy körüljárást megtartva minden másodikat kiválasztjuk és az átellenes helyzetűeket összekötjük. Az így előálló négy egybevágó részhez a kisebbik négyzetet is hozzávéve öt részsokszögünk van, amelyekkel az $\overline{AD}$ szakasz fölé rajzolt négyzet egyrétűen és hézagmentesen lefedhető (1.2.8. és 1.2.9. ábra).

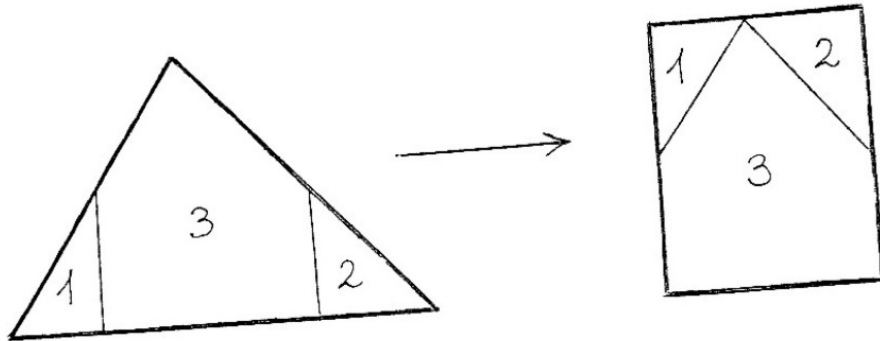
1.3. Derékszögű háromszög átdarabolása téglalappá

Bármely háromszög két közismert módon darabolható át ugyanakkora területű téglalappá. Mindkét átdarabolási módhoz elsőként kiválasztjuk a háromszög leghosszabb oldalát (vagyis azt az oldalt, amely nem rövidebb, mint bármely másik), majd megszerkesztjük a másik két oldal felezőpontjait. Ezután az egyik esetben ezen pontok összekötő szakaszára a leghosszabb oldallal szemközi csúcsból merőlegest állítva a háromszög három részre bomlik fel, amelyekből olyan téglalap állítható össze, melynek egyik oldala azonos a háromszög leghosszabb oldalával és másik oldala a leghosszabb oldalhoz tartozó magasság fele (1.3.1. ábra).



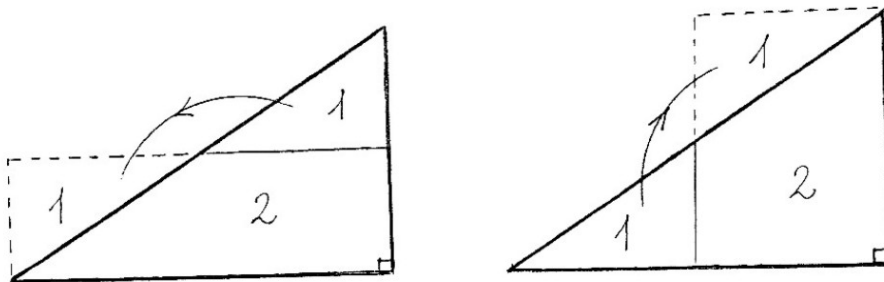
1.3.1. ábra

A másik esetben a két felezőpontból a leghosszabb oldalra merőlegeseket bocsátva a háromszög ismét három részre bomlik fel, amelyekből olyan téglalap állítható össze, melynek egyik oldala azonos a háromszög leghosszabb oldalának felével és a másik oldal a hozzá tartozó magasság (1.3.2. ábra).



1.3.2. ábra

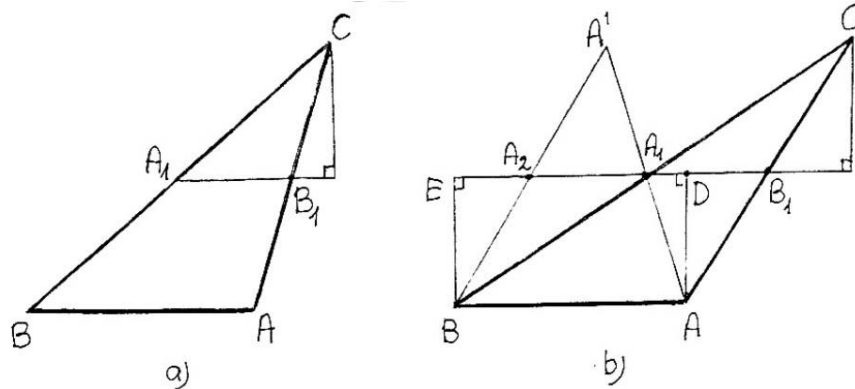
A leghosszabb oldal ilyen megkülönböztetése azért tartható előnyösnek, mert a rajta lévő mindkét belső szög hegyesszög, s ennél fogva a megrajzolt merőlegesek valóban belemetszenek az adott háromszögbe. Az ekkor keletkező részekből (az ábrákon lévő számozást követve) az átdarabolás közvetlenül elvégezhető. Az átdarabolás azonban akkor is lehetséges, ha nem felezett oldalnak nem a leghosszabb oldalt választjuk. Ha például a nem felezett oldal a háromszög azon oldala, amelyen lévő egyik belső szög derékszög, akkor a kívánt átdarabolás még egyszerűbben elvégezhető (1.3.3. ábra).



1.3.3. ábra

Ha viszont nem felezett oldalnak az adott háromszög olyan oldalát választjuk, amelyen lévő egyik belső szög tompaszög, akkor például az első típusú átdaraboláshoz megrajzolt merőleges a háromszögön kívül

halad (1.3.4a ábra), s így az átdarabolás közvetlenül el sem végezhető, csak több lépésből álló visszavezetéssel. Ennek leírásához az ABC háromszögben legyen $BAC \angle > 90^\circ$, továbbá jelölje D és E a $\overline{BC}$ és $\overline{AC}$ oldalak A_1 és B_1 felezőpontjait összekötő egyenesre A -ból, illetve B -ből állított merőlegesek talppontjait (1.3.4b ábra). Ekkor a $BAC \angle > 90^\circ$ feltétel miatt az A_1 és B_1 pontok közül legalább az egyik kívül van a $\overline{DE}$ szakaszon, s éppen ez jelenti a problémát. Ennek kiküszöbölése céljából legyen A' az A -nak A_1 -re vonatkozó tükörképe, és $A_2 = \overrightarrow{A_1B_1} \cap \overrightarrow{A'B}$, ahol $\overrightarrow{A_1B_2} \equiv \overrightarrow{A_1B_1} \parallel \overline{AB}$ miatt A_2 az $\overline{A'B}$ szakasz felezőpontja. Az itteni konstrukcióból következik, hogy az ABC háromszög átdarabolható az ABA' háromszögbe, mivel az ABA_1 háromszög közös és $ACA_{1\Delta} \cong A'BA_{1\Delta}$. Ha A_1 és A_2 közül egyik sincs kívül a $\overline{DE}$ szakaszon, akkor az ABA' háromszög közvetlenül átdarabolható az $ABDE$ téglalapba. Ellenkező esetben az előbbi konstrukciót ismételten alkalmazzuk az ABA' háromszögre, és így tovább. Ennek során $B_1A_1 = A_1A_2 = \dots = \frac{AB}{2} = \frac{DE}{2}$, s ezért az archimédeszi axióma miatt létezik olyan n természetes szám, amelyre $\overline{A_{n-1}A_n} \subset \overline{DE}$ teljesül, vagyis az eljárás véges lépésben célhoz vezet.



1.3.4.ábra

Ugyanezen eljárással kiküszöbölhető a második típusú átdarabolásnál a tompaszög esetén fellépő probléma.

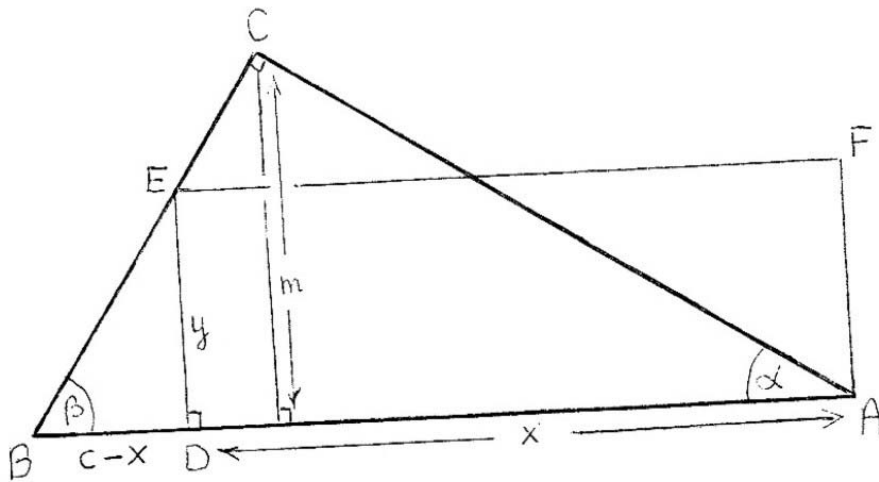
Egy háromszögnek téglalappá való átdarabolása sokkal nagyobb kihívást jelent, ha lehetőségünk van a keresett téglalap egyik oldalának másféle megadására, ami történhet véletlenszerűen, vagy valamilyen

speciális feltételhez kapcsolódva. A továbbiakban ezen utóbbi esetben a derékszögű háromszögre mutatunk be három lehetőséget.

1. változat

Az ABC derékszögű háromszög $\overline{AB}$ átfogójának valamely D belső pontjában az $\overline{AB}$ -re merőleges egyenes messe $\overline{BC}$ egyenest egy E pontban. Szerkesztendő olyan D pont, amelyre az $\overline{AD}$ és $\overline{DE}$ oldalú téglalap területe egyenlő az ABC háromszög területével.

Az ABC derékszögű háromszög oldalaira teljesüljön az $a \leq b < c$ feltétel, továbbá legyen F a keresett téglalap negyedik csúcsa, valamint $AD = x$ és $DE = y$ (1.3.5. ábra).



1.3.5. ábra

Ekkor $y = BD \cdot \tan \beta = (c - x) \cdot \frac{b}{a}$, s így az $xy = \frac{ab}{2}$ területi feltételből kapható a $2x^2 - 2cx + a^2 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek gyökeire $c^2 = a^2 + b^2$ miatt

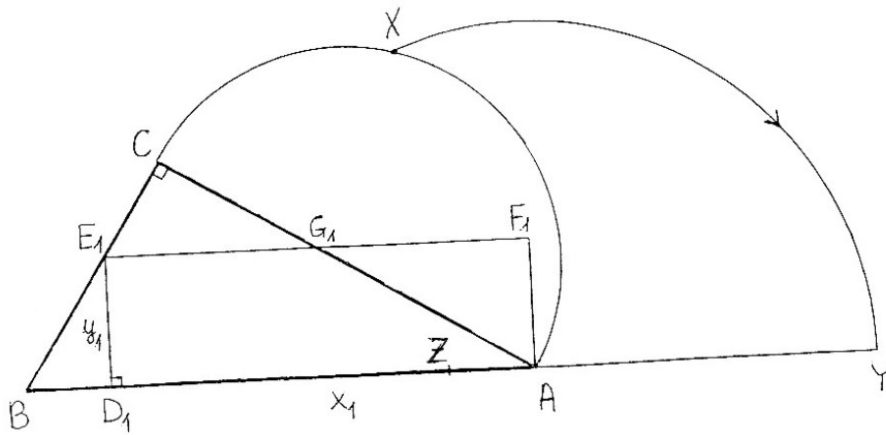
$$x_{1,2} = \frac{2c \pm \sqrt{4c^2 - 8a^2}}{4} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 2a^2}}{2} = \frac{c \pm \sqrt{b^2 - a^2}}{2} \text{ adódik. Eszerint}$$

$a = b$ esetén $x_1 = x_2 = \frac{c}{2}$, azaz D az $\overline{AB}$ átfogó felezőpontja, s így a

kívánt átdarabolás közismert. Ha viszont $a < b$, akkor $x_1 = \frac{c + \sqrt{b^2 - a^2}}{2} > \frac{c}{2}$

és $x_2 = \frac{c - \sqrt{b^2 - a^2}}{2} < \frac{c}{2}$, továbbá az $xy = t(ABC\Delta) = \frac{cm}{2}$ feltétel miatt $y_1 < m$ és $y_2 > m$. Ekkor az (x_1, y_1) megoldás párhoz tartozó D_1 pont az alábbi módon szerkeszthető meg (1.3.6. ábra):

1. Felvesszük az $\overline{AB}$ átfogójú ABC derékszögű háromszöget.
2. Az $\overline{AC}$ befogó fölé rajzolt félköríven olyan X pontot szerkesztünk, amelyre $CX = BC$.
3. Az X pontot A körül leforgatjuk az $\overrightarrow{AB}$ egyenesen lévő Y pontba úgy, hogy $B-A-Y$ teljesüljön.
4. A $\overline{BY}$ szakasz felezőpontja legyen Z .
5. Az $\overline{YA}$ vektorú eltolás során Z képe D_1 .



1.3.6. ábra

A D_1 pont megszerkesztése után előállítható az ABC derékszögű háromszöggel egyenlő területű $AD_1E_1F_1$ téglalap, amelynek $\overline{E_1F_1}$ oldala $y_1 < m$ miatt az $\overline{AC}$ befogót egy G_1 belső pontban metszi. A kívánt $ABC \rightarrow AD_1E_1F_1$ átdarabolást megkönnyíti az a tény, hogy az $AD_1E_1G_1$ trapéz közös, s így csupán a BE_1D_1 és E_1G_1C háromszögeket kell átdarabolni az AG_1F_1 háromszögbe. Ehhez a BE_1D_1 és E_1G_1C háromszögeket előbb olyan téglalapokba daraboljuk át, amelyek egy-egy oldala az AG_1F_1 háromszög $\overline{AG_1}$ oldalához tartozó magassága. Ezt a két téglalapot az egyenlő oldalak mentén egymáshoz illesztve egy olyan téglalapot kapunk, amely az 1.3.2. ábrán bemutatott átdarabolás

megfordításával átdarabolható az AG_1F_1 háromszögbe. Mindez eléggé hosszú folyamat, aminek részletes bemutatását éppen ezért mellőzzük.

Bár az (x_2, y_2) megoldás párhoz tartozó D_2 pont megszerkesztése csak a forgatás irányában tér el, a kívánt átdarabolás általános leírásával itt mégsem célszerű tovább foglalkozni, mivel az jóval bonyolultabbnak ígérkezik.

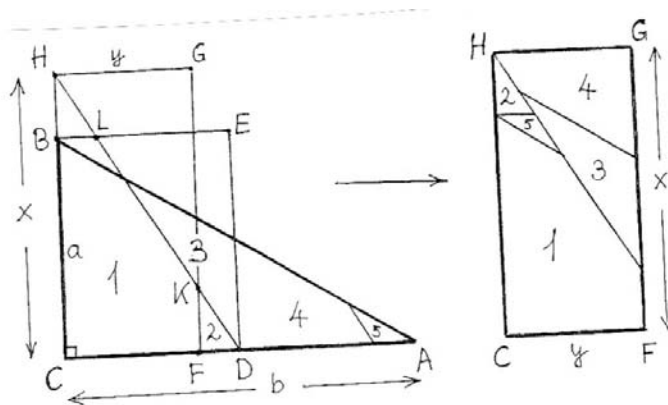
2. változat

Az $\overline{AB}$ átfogójú ABC derékszögű háromszöget most olyan téglalapba kívánjuk átdarabolni, amelynek egyik oldala a befogók számtani, mértani, harmonikus vagy négyzetes középértéke.

Minthogy a befogók egyenlősége esetén mindegyik középérték a befogóval egyenlő, s ezáltal a kívánt átdarabolás igen egyszerűen elvégezhető, ezért a továbbiakban megtartjuk az $a \angle b \angle c$ feltételt. Ha a keresett téglalap oldalait x és y jelöli, úgy hogy

$x \in \left\{ \frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}, \frac{2ab}{a+b}, \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right\}$, akkor a középértékek közös

tulajdonsága miatt $a \angle x \angle b$ és $y \angle \frac{b}{2}$ is teljesül. Ennélfogva mind a négy esetben az ABC derékszögű háromszöget előbb átalakítjuk a vele egyenlő területű $BCDE$ téglalappá, ahol D az $\overline{AC}$ befogó felezőpontja, majd ezt a téglalapot daraboljuk át a kívánt típusú $CFGH$ téglalapba, ahol F a $\overline{CD}$ szakasznak, H pedig a $\overline{CB}$ félegyenes $\overline{BC}$ szakaszán kívüli részének belső pontja (1.3.7. ábra).



1.3.7. ábra

Az $ABC \rightarrow BCDE \rightarrow CFGH$ átdarabolás tehát mindig ugyanazon ábrával reprezentálható, ahonnan $K = \overline{DH} \cap \overline{FG}$ és $L = \overline{DH} \cap \overline{BE}$ jelöléssel a $BCDE \rightarrow CFGH$ átdarabolásra az $FK \leq BC = a$ feltétel ([25] 242. oldal) adódik, amit az LHB és DKF háromszögek egybevágóságát felhasználva x minden értékére külön meg kell vizsgálnunk.

$$1. \text{ eset: } x = \frac{a+b}{2} \Rightarrow y = \frac{ab}{a+b} \text{ és } FK = \frac{b-a}{2} \leq a \Rightarrow a \angle b \leq 3a.$$

$$2. \text{ eset: } x = \sqrt{ab} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{ab}}{2} \text{ és } FK = \sqrt{ab} - a \leq a \Rightarrow a \angle b \leq 4a.$$

$$3. \text{ eset: } x = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow y = \frac{a+b}{4} \text{ és } FK = \frac{a(b-a)}{a+b} \leq a \Rightarrow a \angle b.$$

$$4. \text{ eset: } x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Rightarrow y = \frac{ab}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \quad \text{és}$$

$$FK = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - a \leq a \Rightarrow a \angle b \leq a\sqrt{7}.$$

Érdekes dolog, hogy a $BCDE \rightarrow CFGH$ közvetlen átdarabolás a 3. esetben korlátlanul, míg a többi esetben csak megfelelő korlátok között hajtható végre. A felső korlátok túllépése esetén a $BCDE$ téglalapot helyettesíteni kell egy ugyanakkora területű $B'CD'E'$ téglalappal, ahol D' a $\overline{CD}$ szakasz felezőpontja. Ezt a helyettesítést szükség esetén újra és újra meg kell ismételni.

3. változat

Az $\overline{AB}$ átfogójú ABC derékszögű háromszögre a szokásos jelöléseket megtartva teljesüljön az $a \leq b \angle c$ feltétel, továbbá az O középpontú és r sugarú beírt kör érintse az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ oldalakat a P , Q , R pontokban. Válasszuk ki az átfogót és próbáljuk meg felosztani azt két olyan szakaszra, amelyek egy ugyanakkora területű téglalapnak az oldalai lesznek. Ha ezen szakaszok hosszát x és $y = c - x$ jelöli, akkor az $xy = t(ABC\Delta)$ területi feltétel az $x^2 - cx + \frac{ab}{2} = 0$ másodfokú egyenletre vezet, amelynek gyökei

$$\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 2ab}}{2} = \frac{c \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}}{2} = \frac{c \pm \sqrt{(b-a)^2}}{2} = \frac{c \pm (b-a)}{2},$$

vagyis $x = \frac{c+b-a}{2} = s-a$ és $y = \frac{c-b+a}{2} = s-b$, ahol s az ABC

háromszög félkerülete. Ennek alapján azonnal észrevehető, hogy az a pont, amely az átfogót az x és y hosszúságú két szakaszra osztja, egyúttal a beírt kör és az átfogó érintési pontja. Elérkeztünk tehát a következő tételhez:

Ha P az ABC derékszögű háromszög beírt körének és az $\overline{AB}$ átfogónak az érintési pontja, akkor az $AP \cdot BP$ szorzat egyenlő az ABC háromszög területével.

Ez a tény a derékszögű háromszögnek az a különleges tulajdonsága, amellyel a továbbiakban foglalkozni akarunk [10, 11, 12, 20, 22]. A megadott helyeken különféle bizonyításai találhatók. Nagyon egyszerű a következő direkt bizonyítás:

$$\begin{aligned} AP \cdot BP &= (s-a)(s-b) = \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} = \frac{[c-(a-b)]}{2} \cdot \frac{[c+(a-b)]}{2} = \\ &= \frac{c^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{(a^2 + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)}{4} = \frac{ab}{2} = t(ABC\Delta). \end{aligned}$$

A továbbiakban erre a tételre alapozva néhány speciális átdarabolási módot fogunk bemutatni, amelyek során az ABC derékszögű háromszöget egy AP és BP oldalú téglalappá alakítjuk át.

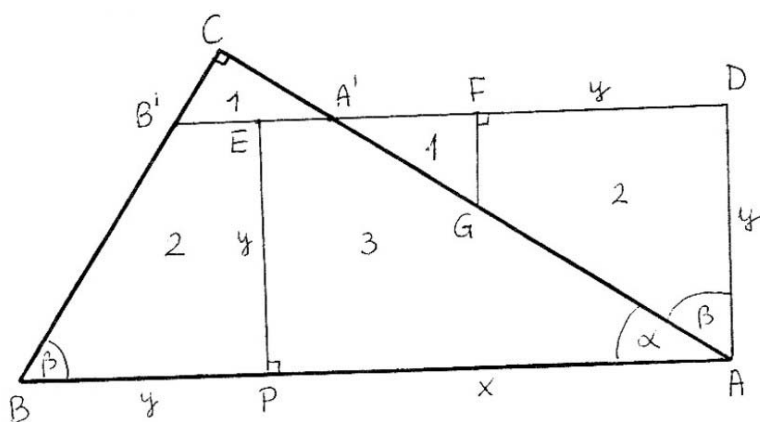
Ha $a = b$, akkor az ABC egyenlőszárú derékszögű háromszögre $AP = BP$, és az átdarabolás közismert, így nem térünk ki rá.

Ha $a < b$, akkor teljesülnek még az $y < \frac{c}{2} < x < c$, és $\frac{m}{2} < y < m < x$ egyenlőtlenségek is, amelyeket az átdarabolásokhoz felhasználunk. Három kívánt típusú átdarabolást fogunk bemutatni: az első kettőt direkt módon, míg a harmadikat kombinálva, ami azt jelenti, hogy a derékszögű háromszöget előbb az 1.3.1., 1.3.2. vagy 1.3.3. ábra szerint daraboljuk át egy téglalapba, majd ezt alakítjuk át a kívánt téglalappá.

1. átdarabolás

Megszerkesztjük azt az $APED$ téglalapot, amelyre $AD = BP$, s ekkor $m > y$ miatt a $\overline{DE}$ egyenes az $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ befogókat az A' és B' pontokban metszi (1.3.8. ábra). Így az ABC háromszög felbomlik az $A'B'C'$ háromszögre, valamint az $APEA'$ és $BPEB'$ trapézokra. Az $ABC \rightarrow APED$ átdarabolást megkönnyíti, hogy az $APEA'$ trapéz már részét képezi az $APED$ téglalapnak, továbbá a $BPEB'$ trapéz átrakható az

$ADFG$ trapézba, ahol F a $\overline{DE}$ szakasz olyan pontja, amelyre $DF = y$, G pedig az $\overline{AC}$ befogó olyan pontja, amelyre $AG = BB'$. Ekkor



1.3.8. ábra

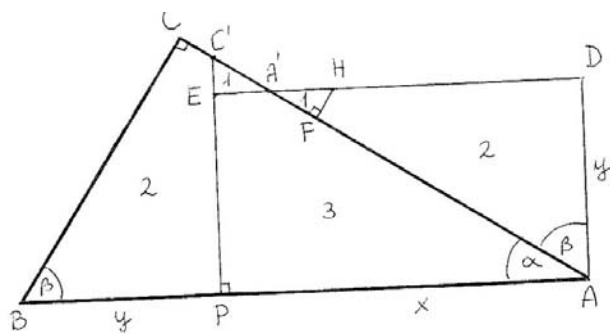
$$B'C = BC - BB' = a - \frac{y}{\sin \beta} = a - \frac{(s-b)c}{b} = \frac{s-b}{b} \left(\frac{2ab}{a-b+c} - c \right) = \frac{(s-b)(b-a)}{a}$$

$$\text{és } FG = AD - AG \cdot \cos \beta = (s-b) - \frac{(s-b)a}{b} = \frac{(s-b)(b-a)}{b}$$

miatt az ASA szerint $A'B'C \triangleq A'GF$, s így az átdarabolás három részre bontással elvégezhető:

$$ABC \rightarrow A'B'C + BPEB' + APEA' \rightarrow A'GF + ADFG + APEA' \rightarrow APED.$$

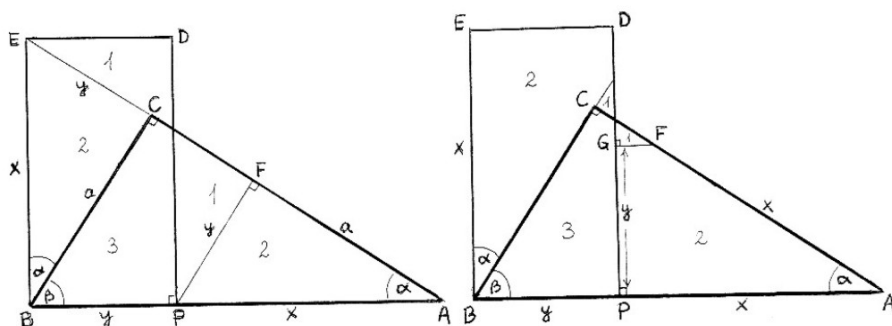
Erre az átdarabolásra egy másik változatot mutatunk be az 1.3.9. ábrán.



1.3.9. ábra

Mindkét változat bármely $\alpha \in (0^\circ, 45^\circ]$ esetén kivitelezhető átdarabolást ad, jóllehet az $\alpha = 45^\circ$ esetben az 1 jelű háromszögek eltűnnek és a 2 és 3 jelű trapézokból egybevágó háromszögek lesznek, s ezáltal az egyenlőszárú derékszögű háromszögre közismert alakzatot kapjuk.

További két változathoz jutunk, ha a keresett téglalapot a $\overline{BP}$ szakasz fölé szerkesztjük meg (1.3.10. ábra). Ekkor viszont az E pont $\overline{AC}$ egyeneshez viszonyított helyzete az α -tól függ. Viszonylag hosszú számolással kapjuk, hogy az $E \in \overline{AC}$ eset a $\sin^3 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$ egyenletre vezet, melynek a $(0^\circ, 45^\circ]$ intervallumban egyetlen valós gyöke van, s annak közelítő pontosságú értéke $32,9^\circ$.

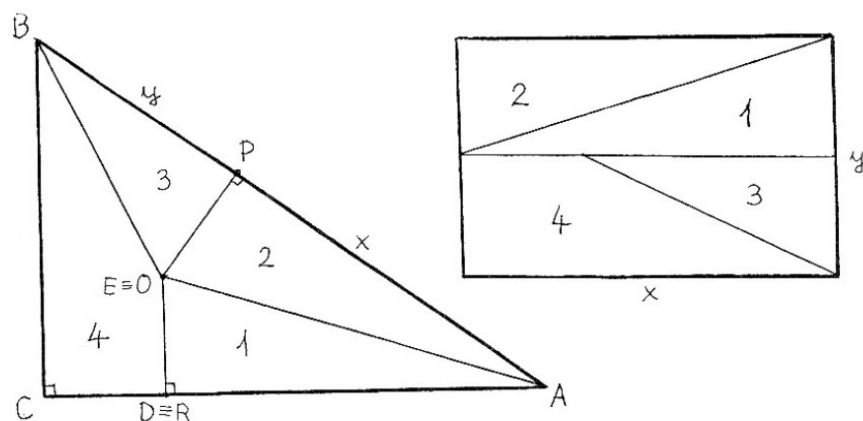


1.3.10. ábra

2. átdarabolás

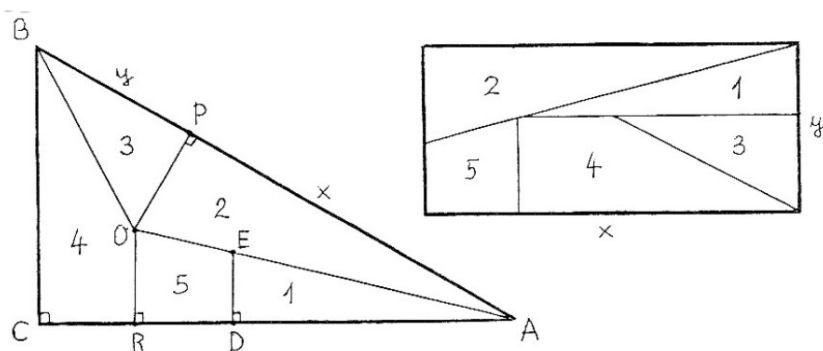
Az $a < b$ feltétel esetén az $\overline{AC}$ befogón van olyan D belső pont, amelyre $AD = BC = a$. Ha az $\overline{AC}$ -re ezen D ponton át merőlegest állítunk, akkor a $\angle COA = \frac{\alpha}{2} < 22,5^\circ$ miatt metszi az $\overline{AO}$ szögfelezőt egy olyan E pontban, amelyre az $A-E-O$, $E \equiv O$, vagy $A-O-E$ elrendezések állhatnak fenn.

Válasszuk elsőként a legegyszerűbbnek ígérkező $E \equiv O$ esetet, amikor $x = AP = AR = AD = a$ miatt $b + c = 3a$, és ebből rövid számolással $\sin \alpha = 0,6$ kapható, azaz α közelítő értéke $36,9^\circ$. Az átdarabolás négy résszel elvégezhető (1.3.11. ábra).



1.3.11. ábra

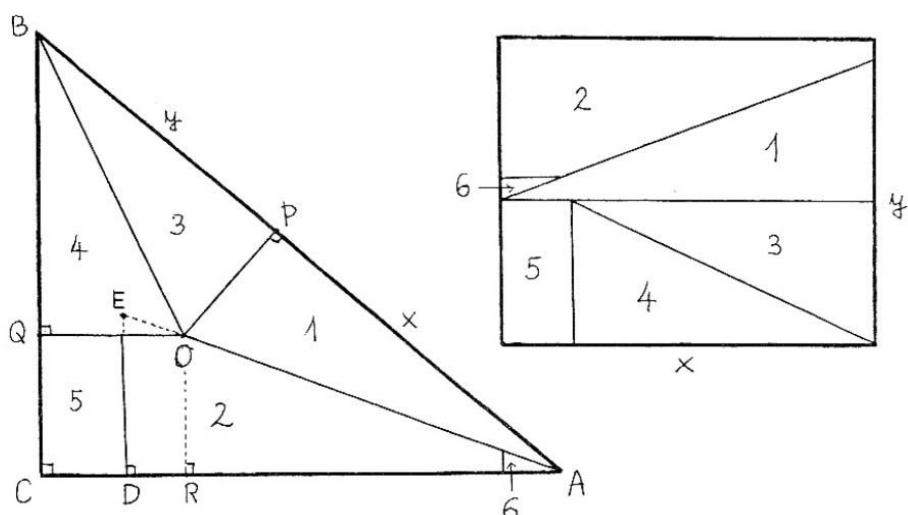
Az $A-E-O$ elrendezés esetén $x = AP = AR \setminus AD = a$ miatt $0 < \sin \alpha < 0,6$. Az átdarabolás öt résszel lehetséges (1.3.12. ábra).



1.3.12. ábra

Ha pedig az $A-O-E$ elrendezés áll fenn, akkor $x = AP = AR \setminus AD = a$ miatt $0,6 < \sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Az átdarabolás hat résszel megoldható (1.3.13. ábra).

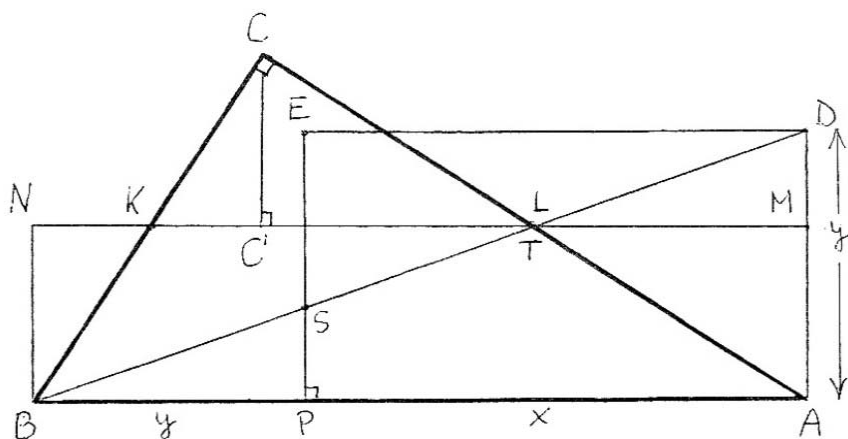
Megjegyezzük, hogy az $y = r \cdot \cot \frac{\beta}{2} = r \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$ összefüggés alapján $E \equiv O$ esetén $y = 2r$, $A-E-O$ esetén $y < 2r$, $A-O-E$ esetén pedig $y > 2r$ teljesül.



1.3.13. ábra

3. átdarabolás

Az $\overline{AB}$ átfogójú ABC derékszögű háromszöget előbb az 1.3.1. ábrának megfelelően az $ABHI$, majd azt az ugyanakkora területű $APED$ téglalapba akarjuk átdarabolni, ahol F az $\overline{AC}$ és G a $\overline{BC}$ oldal felezőpontja, I pedig az $\overline{AD}$ belső pontja (1.3.14.ábra).



1.3.14. ábra

Legyen $X = \overline{BD} \cap \overline{EP}$, $Y = \overline{BD} \cap \overline{HI}$ és C' a C -nek $\overline{HI}$ -re vonatkozó merőleges vetülete. Ekkor F , I és Y mindegyike $\frac{m}{2}$ távolságra van az $\overline{AB}$ egyenestől, továbbá az $ABHI \rightarrow APED$ átdarabolás szerint $BPX\Delta \cong YID\Delta$ ([33], 242. oldal), s emiatt $YI = BP = y$. Ha ugyanekkor még $FI = y$ is teljesül, akkor $F \equiv Y$ és az $ABC \rightarrow ABHI \rightarrow APED$ átdarabolás viszonylag egyszerű:

$$ABC \rightarrow ABGF + CFC' + CGC' \rightarrow ABGF + AFI + BGH \rightarrow ABHI \rightarrow APXYI + BPX + BHF \rightarrow APXYI + FID + XED \rightarrow APED.$$

$$\text{Az } F \equiv Y \text{ elrendezés pontosan } FI = y, \text{ azaz } \frac{b}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{c - b + a}{2}$$

esetén áll fenn, ahonnan hosszas számolással ismét az 1. átdarabolásnál megismert harmadfokú egyenlet adódik. $F \neq Y$ esetén az átdarabolás már bonyolultabb; erre nem térünk ki.

Ennek az átdarabolásnak másik két változatához juthatunk, ha az ABC háromszöget az 1.3.2. vagy 1.3.3. ábra szerint daraboljuk át téglalappá ([20], 8b és 8c ábrák).

Végezetül tételezzük fel, hogy a fenti átdarabolások alapját adó tételben leírt tulajdonság érvényes lenne egy tetszőleges ABC háromszögre, amelynek legnagyobb oldala $\overline{AB}$ és az azzal szemközti szöge γ . Ha az $\overline{AB}$ oldal valamely P belső pontja az $\overline{AB}$ egyenes és az ABC háromszög beírt körének az érintési pontja, azaz $AP = s - a$ és $BP = s - b$ úgy, hogy az $AP \cdot BP = t(ABC\Delta)$ területi feltétel teljesül, akkor

$$\begin{aligned} AP \cdot BP &= (s - a)(s - b) = \frac{1}{4}[c + (b - a)] \cdot [c - (b - a)] = \frac{1}{4}[c^2 - (b - a)^2] = \\ &= \frac{1}{4}[(a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma) - (b^2 - 2ab + a^2)] = \frac{ab(1 - \cos \gamma)}{2}, \end{aligned}$$

ahonnan $t(ABC\Delta) = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2}$ miatt $\sin \gamma + \cos \gamma = 1$, és ennél fogva

$\gamma = 90^\circ$, mivel $0^\circ < \gamma < 180^\circ$. Így tehát az ABC háromszög derékszögű, és kimondható a következő tétel:

Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha valamelyik oldalát a beírt kör érintési pontja úgy osztja két szakaszra, hogy azok hosszainak szorzata egyenlő a háromszög területével.

Ez a derékszögű háromszög egyik különleges tulajdonsága, ami még több más módon is igazolható [27]. Közülük bemutatunk egyet,

amely a Heron képletre alapul, s ahol x, y, z jelöli az A, B, C pontokból húzható érintőszakaszok hosszát, valamint T az ABC háromszög területét:

$$T = xy = \frac{(x+y+z)xyz}{(x+y+z)z} = \frac{T^2}{\frac{T \cdot z}{r}} = T \cdot \frac{r}{z}, \text{ ahonnan } z = r, \text{ s emiatt}$$

$$\gamma = 90^\circ.$$

Megjegyezzük még, hogy a befogókra is próbálkozhatunk hasonló jellegű felosztással, ami azonban a rövidebb befogóra egyáltalán nem, és a hosszabbik befogóra is csak $b \geq 2a$ esetén jár sikerrel.

A tárgyalta probléma többféleképpen általánosítható.

Ha például az érintési feltételt elhagyjuk, és az ABC nem-derékszögű háromszög $\overline{AB}$ leghosszabb oldalán egy olyan P pontot keresünk, amelyre az $AP \cdot BP = t(ABC\Delta)$ területi feltétel fennáll, akkor az

$$x = AP \text{ és } c - x = BP \text{ jelölésekkel az } x^2 - cx + \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2} = 0 \text{ egyenletet}$$

kapjuk, amelynek diszkriminánsa $c^2 - 2ab \cdot \sin \gamma \geq 0$. Ebből a koszinusz tétel alapján $a^2 + b^2 \geq 2ab(\sin \gamma + \cos \gamma)$, ahonnan $\gamma \neq 90^\circ$ miatt $\sin \gamma + \cos \gamma > 1$, és így $90^\circ < \gamma < 180^\circ$.

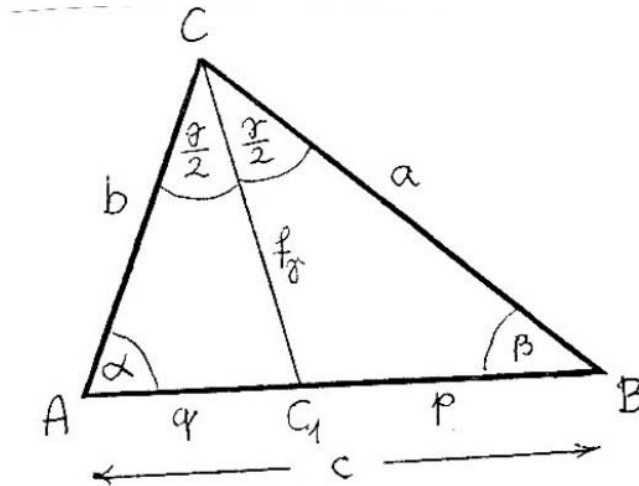
Ha viszont az érintési feltételt megtartjuk, akkor tetszőleges $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ esetén az ismert $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, $T = rs$ és $s - c = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ összefüggések alapján $T = (s-a)(s-b) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ teljesül, ahonnan $\gamma = 90^\circ$ esetén visszajutunk a téma elején megfogalmazott tételhez.

1.4. A háromszög szögfelezőinek hossza

A háromszög-geometria egyik alapvető ismerete a szögfelezőkre vonatkozó arányossági tétel, amely szerint bármely belső szögfelező a szöggel szemközti oldalt két olyan szakaszra bontja, amelyek aránya a szöveget közrefogó két oldal arányával egyenlő.

Ha az ABC háromszögben például a C csúcsnál lévő szög felezőjét és ennek az $\overline{AB}$ oldallal alkotott C_1 metszéspontját tekintjük (1.4.1. ábra), akkor ez a tétel az $AC_1 : BC_1 = AC : BC$, vagy másként $p : q = a : b$ alakban írható fel, továbbá

$$p = BC_1 = \frac{ac}{a+b}, q = AC_1 = \frac{bc}{a+b} \text{ és } pq = \frac{abc^2}{(a+b)^2}. \quad (1)$$



1.4.1. ábra

Ennek a tételnek a bizonyítása közismert, itt nem is ezzel kívánunk foglalkozni, hanem a $\overline{CC_1}$ szögfelező szakasz hosszának az ABC háromszög oldalai révén történő meghatározásával, vagyis az

$$f_\gamma = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b} \quad (2)$$

ismert összefüggés többféle bizonyítási módjainak bemutatásával, amelyek a felhasznált segédismeretek szerteágazó volta miatt különféle oktatási szituációkhoz kapcsolódhatnak.

Az f_α és f_β hosszaira hasonló szerkezetű összefüggések érvényesek, amelyek (2)-ből megfelelő átjelöléssel kaphatók, így azok külön bizonyítására itt nem térünk ki.

A szögfelezés miatt majdnem minden bizonyítás során felhasználjuk a félszögekkel kapcsolatos alábbi összefüggések valamelyikét:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}}, \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2 - (a-b)^2}{ab}} \quad (3)$$

és

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a+b}{2c} \sqrt{\frac{c^2 - (a-b)^2}{ab}}, \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a-b}{2c} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}}, \quad (4)$$

amelyek bizonyításának levezetését itt mellőzzük. (3) és (4) alapján megfelelő átjelöléssel a másik két szögre is kaphatók ilyen összefüggések.

Mindezek után rátérünk a (2) összefüggés különféle bizonyításainak ismertetésére, melyek során ún. „csoportok” keretében összegyűjtjük az egymáshoz kapcsolható bizonyításokat, miközben az ABC általános háromszögre mindig feltételezzük a $b < a < c$ egyenlőtlenség teljesülését, ami az általánosság megsértése nélkül megtehető. Megjegyezzük, hogy a bizonyításokat $B1, B2, \dots$ jelzéssel sorszámozzuk. A bizonyítások után bemutatjuk a szögfelező szakaszok hosszaira kapott formulák néhány alkalmazását is.

1. csoport

Elsőként olyan bizonyításokat mutatunk be, amelyek közvetlenül az 1.4.1. ábra alapján -annak bármilyen módosítása vagy kiegészítése nélkül- tárgyalhatók.

B1

A terület additív tulajdonsága alapján

$$t(ABC\Delta) = t(ACC_1\Delta) + t(BCC_1\Delta)$$

$$\frac{ab}{2} \sin \gamma = \frac{bf_\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{af_\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

ahonnan $\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ és $\sin \frac{\gamma}{2} \neq 0$ miatt $(a+b)f_\gamma = 2ab \cos \frac{\gamma}{2}$, s ebből (3) szerint

$$f_\gamma = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab}[(a+b)^2 - c^2]}{a+b}.$$

B2

Az ACC_1 háromszögre szinusztétel felírva $\frac{f_\gamma}{q} = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\gamma}{2}}$, ahonnan (1), (3)

és $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ miatt

$$\begin{aligned} f_\gamma &= \frac{bc}{a+b} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} \cdot 2 \sqrt{\frac{ab}{c^2 - (a-b)^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{[(a+b)+c][(a+b)-c]} = \\ &= \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}. \end{aligned}$$

B3

Az ACC_1 és BCC_1 háromszögekre egy-egy szinusz-tételt felírva:

$$\frac{q}{f_\gamma} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \alpha} \Rightarrow q = f_\gamma \cdot \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \alpha}$$

$$\frac{c-q}{f_\gamma} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \beta} \Rightarrow c-q = f_\gamma \cdot \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \beta},$$

és a megfelelő oldalakat összeadva

$$c = f_\gamma \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = f_\gamma \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \left(\frac{c}{a \cdot \sin \gamma} + \frac{c}{b \cdot \sin \gamma} \right) =$$

$$\frac{cf_\gamma \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \gamma} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{cf_\gamma}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{a+b}{ab},$$

ahonnan (3) miatt

$$f_\gamma = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

B4

Az ACC_1 háromszögre koszinusz-tételt felírva:

$$f_\gamma^2 = b^2 + q^2 - 2bq \cos \alpha,$$

ahonnan (1) és a $\cos \alpha$ -ra B2-ben megismert összefüggés miatt

$$f_\gamma^2 = b^2 + \left(\frac{bc}{a+b} \right)^2 - 2b \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b^2 + \left(\frac{bc}{a+b} \right)^2 - \frac{b(b^2 + c^2 - a^2)}{a+b} =$$

$$\frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2},$$

s ebből négyzetgyökvonással (2) kapható.

B5

Az ACC_1 és BCC_1 háromszögekben p és q oldalra koszinusz-tételt felírva:

$$p^2 = a^2 + f_\gamma^2 - 2af_\gamma \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$q^2 = b^2 + f_\gamma^2 - 2bf_\gamma \cos \frac{\gamma}{2},$$

amelyek megfelelő oldalait elosztva, a $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ arányt felhasználva, majd rendezve

$$(a^2 - b^2)f_\gamma^2 = 2ab(a - b)f_\gamma \cdot \cos \frac{\gamma}{2},$$

s ebből $a > b$ és (3) miatt (2) adódik.

B6

Az ACC_1 és BCC_1 háromszögekben b és a oldalra koszinusz-tételt felírva:

$$b^2 = f_\gamma^2 + q^2 - 2f_\gamma q \cos AC_1C\angle$$

$a^2 = f_\gamma^2 + p^2 - 2f_\gamma p \cos(180^\circ - AC_1C\angle) = f_\gamma^2 + p^2 + 2f_\gamma p \cos AC_1C\angle$,
ahonnan $\cos AC_1C\angle$ -t kiküszöbölve, majd rendezve

$$(p + q)f_\gamma^2 = p(b^2 - q^2) + q(a^2 - p^2),$$

s ebből (1)-et felhasználva, c -vel osztva, majd ismét rendezve és gyököt vonva (2) adódik.

B7

Az ABC háromszög $\overline{CC_1}$ transzverzális szakaszára Stewart-tételét felírva

$$AB \cdot CC_1^2 = AC_1 \cdot BC^2 + BC_1 \cdot AC^2 - AC_1 \cdot BC_1 \cdot AB,$$

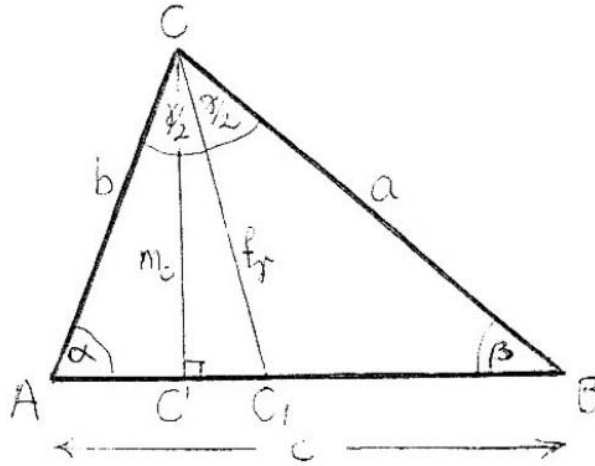
azaz

$$c \cdot f_\gamma^2 = q \cdot a^2 + p \cdot b^2 - pqc,$$

ahonnan (1)-et felhasználva, rendezve és gyököt vonva (2) kapható.

2. csoport

Az $\overline{AB}$ oldalhoz tartozó magasság C' talppontja $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ esetén $a > b$ miatt az $\overline{AC_1}$ szakasz belső pontja (1.4.2. ábra). Ekkor lehetőség kínálkozik a Pitagorasz-tétel többszöri felírására, továbbá a $\overline{CC'}$ magasság és a $C'CC_1\angle$ meghatározása után szög-függvény alkalmazására. A tárgyalás $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ esetén teljesen hasonló.



1.4.2. ábra

B8

A CC_1C' , ACC' és BCC' derékszögű háromszögre egy-egy Pitagorasz-tételt felírva:

$$f_\gamma^2 = m_c^2 + (C'C_1)^2$$

$$b^2 = m_c^2 + (AC_1 - C'C_1)^2$$

$$a^2 = m_c^2 + (BC_1 + C'C_1)^2,$$

ahonnan

$$f_\gamma^2 - b^2 = -(AC_1)^2 + 2 \cdot AC_1 \cdot C'C_1$$

$$f_\gamma^2 - a^2 = -(BC_1)^2 + 2 \cdot BC_1 \cdot C'C_1,$$

majd az első egyenletet p -vel, a másodikat q -val megszorozva és összeadva

$$(AC_1 + BC_1)f_\gamma^2 = BC_1 \cdot b^2 + AC_1 \cdot a^2 - AC_1 \cdot BC_1 (AC_1 + BC_1),$$

s ebből (1) és $AC_1 + BC_1 = c$ miatt rendezés után

$$f_\gamma^2 = ab \left[1 - \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \right], \text{ ahonnan négyzetgyökvonással (2) kapható.}$$

B9

A $\overline{CC'}$ magasság hosszára a Heron-képlet alapján

$$m_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c} = \frac{\sqrt{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}}{2c},$$

továbbá $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ esetén a $C'CC_1\angle$ -re a szögmérték additivitását felhasználva

$$C'CC_1\angle = ACC_1\angle - ACC'\angle = \frac{\gamma}{2} - (90^\circ - \alpha) = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

adódik. Ekkor a CC_1C' derékszögű háromszögből

$$f_\gamma = \frac{m_c}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}},$$

ahonnan (4) és az m_c -re kapott összefüggés miatt

$$f_\gamma = \frac{\sqrt{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}}{2c} \cdot \frac{2c}{a+b} \sqrt{\frac{ab}{c^2 - (a-b)^2}} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

3. csoport

Az 1.4.1. ábrát kiegészítjük egy C_1 kezdőpontú szakasszal, melynek végpontja a $\overline{BC}$ oldal valamely belső pontja úgy, hogy olyan különleges elrendezés álljon elő, ami kedvező lehetőséget teremt az f_γ hosszának meghatározásához. Mivel a kiegészítésként megrajzolt szakasz végpontja mindig változik, ezért minden esethez külön ábrát rajzolunk.

B10

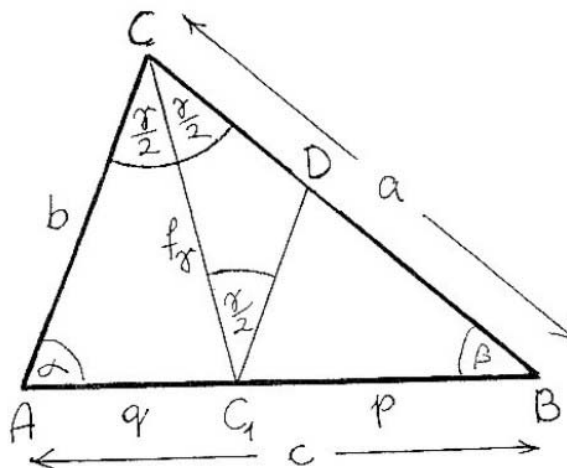
Az $\overline{AC}$ oldallal C_1 ponton át húzott párhuzamos a $\overline{BC}$ oldalt egy D belső pontban metszi úgy, hogy egyrészt $C_1BD\Delta \sim ABC\Delta$, másrészt $CC_1D\angle = ACC_1\angle = DCC_1\angle$ is teljesül, azaz a CC_1D háromszög egyenlőszárú (1.4.3.ábra). Ekkor a hasonló háromszögekből (1) miatt

$$\frac{BD}{BC_1} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{a - CD}{p} = \frac{a}{c} \Rightarrow CD = \frac{ab}{a+b},$$

valamint (3) miatt az egyenlőszárú háromszögből

$$f_\gamma = 2 \cdot CD \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}$$

adódik.



1.4.3. ábra

B11

Az $AC \angle BC$ feltétel miatt a $\overline{CC_1}$ szakaszra C_1 -ben állított merőleges a $\overline{BC}$ oldalt egy E pontban metszi úgy, hogy $BEC_1 \angle = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ teljesül (1.4.4. ábra). Ekkor a BC_1E általános háromszögre szinusztételt felírva

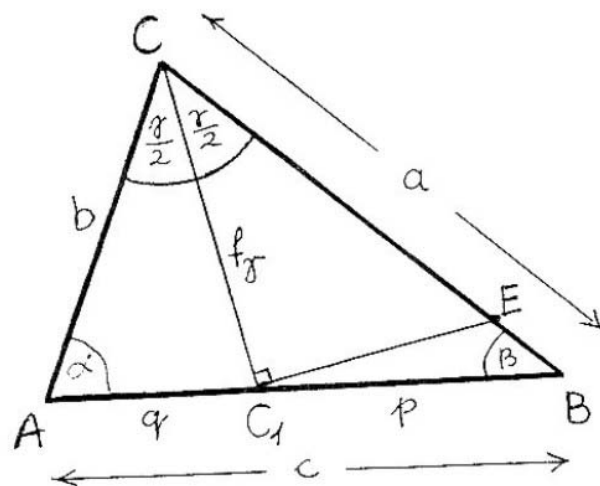
$$\frac{C_1E}{BC_1} = \frac{\sin \beta}{\sin \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{\sin \beta}{\cos \frac{\gamma}{2}} \Rightarrow C_1E = p \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \frac{\gamma}{2}},$$

s ennek alapján a CC_1E derékszögű háromszögből

$$f_\gamma = C_1E \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = p \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 2p \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \cos \frac{\gamma}{2},$$

ahonnan (1), (3) és a szinusztétel miatt

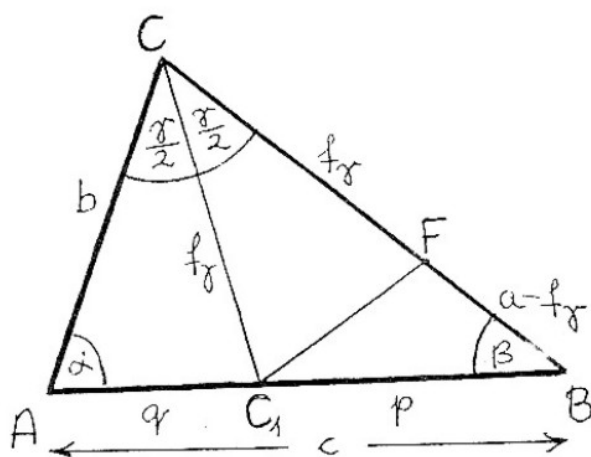
$$f_\gamma = \frac{2ac}{a+b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$



1.4.4. ábra

B12

Az $AC < BC$ feltétel miatt $CC_1 < BC$, s ezért a $\overline{BC}$ oldalnak van olyan F belső pontja, amelyre $CF = CC_1$ (1.4.5. ábra).



1.4.5. ábra

Minthogy ekkor a C_1FC egyenlőszárú háromszögben $CC_1F\angle = CFC_1\angle = 90^\circ - \frac{\gamma}{4}$, ezért $BFC_1\angle = 90^\circ + \frac{\gamma}{4}$, s így a BC_1F általános háromszögre szinusz-tételt felírva

$$\frac{C_1F}{BC_1} = \frac{\sin \beta}{\sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{4}\right)} = \frac{\sin \beta}{\cos \frac{\gamma}{4}} \Rightarrow C_1F = p \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \frac{\gamma}{4}}.$$

Ennélfogva a C_1FC egyenlőszárú háromszögből

$$f_\gamma = \frac{C_1F}{2 \cos\left(90^\circ - \frac{\gamma}{4}\right)} = \frac{p \cdot \sin \beta}{2 \sin \frac{\gamma}{4} \cos \frac{\gamma}{4}} = 2p \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \cos \frac{\gamma}{2},$$

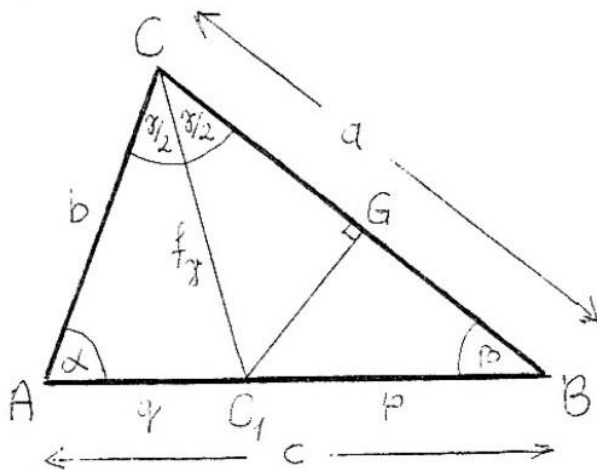
ahonnan (1), (3) és a szinusz-tétel miatt miként $B11$ -ben (2) adódik.

B13

Az $AC \angle BC$ feltétel miatt a C_1 -ből $\overline{BC}$ -re bocsátott merőleges G talppontja a $\overline{BC}$ belsejében van (1.4.6.ábra). Az így keletkezett BC_1G és CC_1G derékszögű háromszögből az (1) és (3) összefüggéseket felhasználva

$$BG = BC_1 \cdot \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2(a+b)} \quad \text{és}$$

$$CG = CC_1 \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{f_\gamma}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = a, \text{ s ebből (2) kapható.}$$



1.4.6. ábra

B14

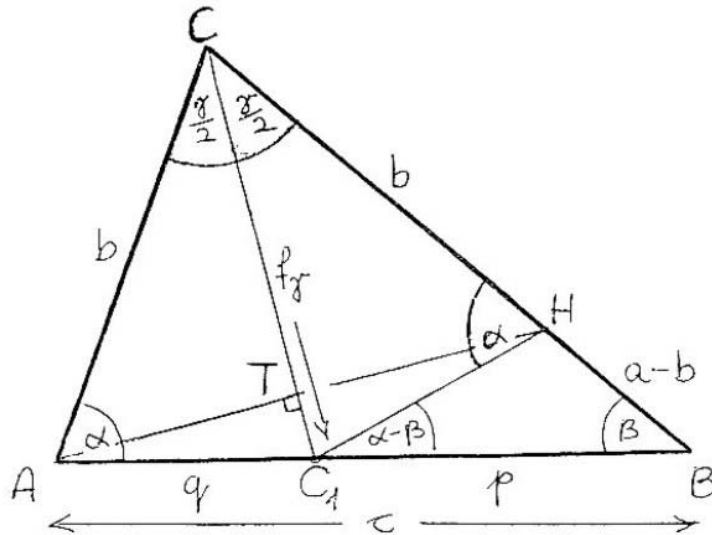
Az $AC \angle BC$ feltétel miatt a $\overline{BC}$ oldalon van olyan H belső pont, hogy $CH = b$ teljesül (1.4.7.ábra). Ekkor

$$\angle CHC_1 = \angle CAC_1 = \alpha, \angle BC_1H = \alpha - \beta \text{ és } \angle AHC_1 = \angle HAC_1 = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

továbbá $P = \overline{CC_1} \cap \overline{AH}$ jelöléssel

$$f_\gamma = CP + PC_1 = b \cos \frac{\gamma}{2} + q \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ ahonnan (1), (3) és (4) miatt}$$

$$\begin{aligned} f_\gamma &= \frac{b}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} + \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{a-b}{2c} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \\ &= \frac{b}{2(a+b)} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} \cdot [(a+b) + (a-b)] = \frac{\sqrt{ab}[(a+b)^2 - c^2]}{a+b}. \end{aligned}$$



1.4.7. ábra

B15

Ha A_o jelöli a $\overline{BC}$ oldal felezőpontját (1.4.8.ábra), akkor az $\overline{A_oC_1}$ szakasz egyrészt a BCC_1 háromszög egyik súlyvonala és ezért

$$(A_oC_1)^2 = \frac{1}{2}(f_\gamma^2 + p^2) - \frac{a^2}{4},$$

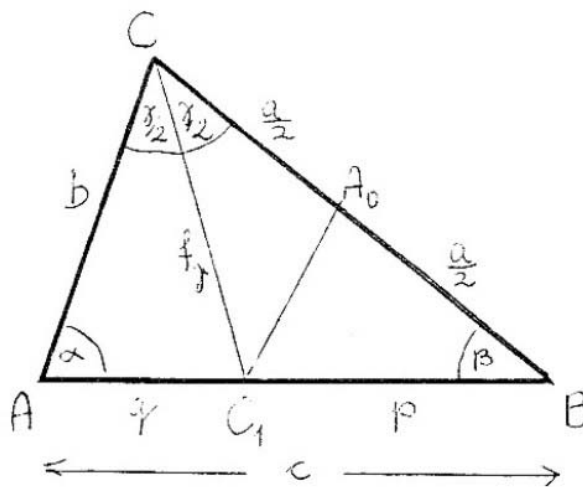
másrészt az A_0CC_1 háromszög egyik oldala, amelyre egy koszinusz-tételt felírva

$$(A_0C_1)^2 = f_\gamma^2 + \frac{a^2}{4} - af_\gamma \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

A fenti két egyenlet jobb oldalait összehasonlítva az

$$f_\gamma^2 - 2af_\gamma \cos \frac{\gamma}{2} + a^2 - p^2 = 0$$

másodfokú egyenlet kapható, amelyet az (1) és (3) összefüggések felhasználása után megoldva két valós gyök adódik: közülük az egyik ellentmondásra vezet, a másik pedig a (2)-ben megadott összefüggés.



1.4.8.ábra

4. csoport

A 1.4.1. ábrát kiegészítő elem most is csak egy (vagy több) szakasz, ami viszont már nem kizárólag az ABC háromszögön belül vehető fel. Segédismeretként felhasználjuk a párhuzamos szelők tételét, a szögfelezők metszéspontja által előálló szögfelező-szakaszok arányára vonatkozó tételt, valamint a súlyvonal hosszának az oldalak függvényében történő meghatározását.

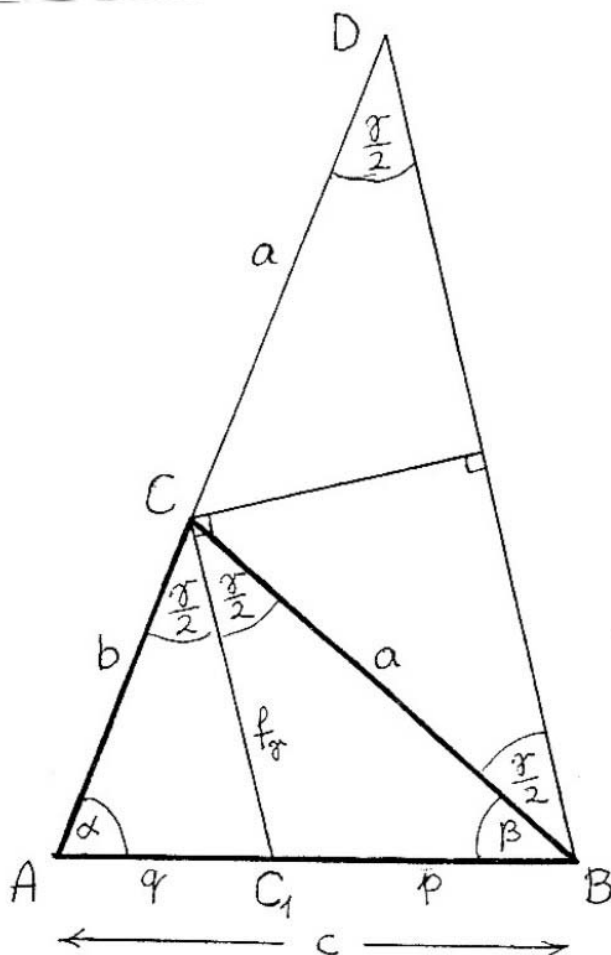
B16

Az $\overline{AC}$ oldal C -n túli meghosszabbításán vegyük fel azt a D pontot, amelyre $CD = BC$ (1.4.9.ábra). Az így kapott BCD egyenlőszárú

$$CBD\angle = CDB\angle = ACC_1\angle = \frac{\gamma}{2} \text{ és } BD = 2a \cdot \cos \frac{\gamma}{2}, \text{ másrészt } \frac{CC_1}{BD} = \frac{AC}{AD},$$

ahonnan (1) és (3) miatt

$$f_{\gamma} = \frac{AC \cdot BD}{AD} = \frac{ab}{a+b} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

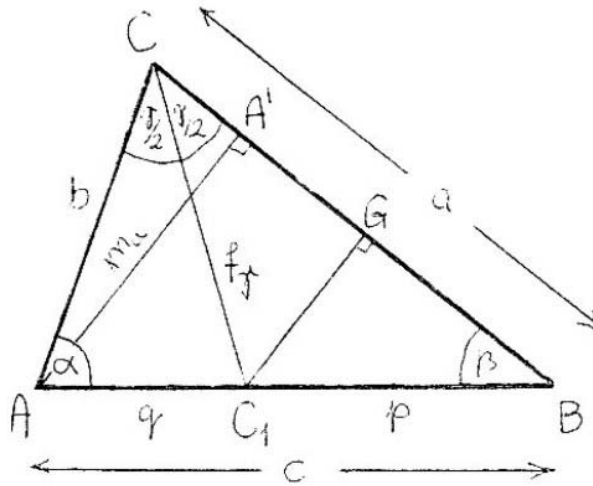


1.4.9.ábra

B17

Az $AC \angle BC$ feltétel miatt az A -ból és C_1 -ből $\overline{BD}$ -re állított merőlegesek A' és G talppontja a $\overline{BD}$ szakasz belsejébe esik (1.4.10.ábra). Ekkor az ACA' derékszögű háromszögből $m_a = b \sin \gamma$, továbbá $\overline{AA'} \parallel \overline{C_1G}$ miatt $\frac{C_1G}{m_a} = \frac{p}{c}$ és a CC_1G derékszögű háromszögből $f_\gamma = \frac{C_1G}{\sin \frac{\gamma}{2}}$ kapható, ahonnan (1) és (3) alapján

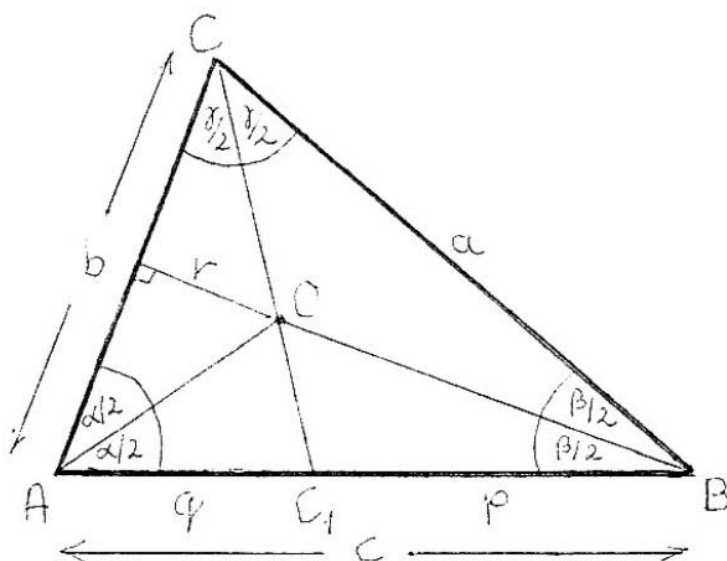
$$f_\gamma = \frac{bp \sin \gamma}{c \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b} = \frac{ab}{a+b} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}$$



1.4.10.ábra

B18

Felhasználjuk a következő ismert arányossági tételt: A háromszög bármely szögfelezőjét a szögfelezők metszéspontja úgy osztja, hogy a szög csúcsához közelebbi és távolabbi résznek az aránya egyenlő a szöget közrefogó két oldal összegének és a szöggel szemköztí oldalnak az arányával ([37]1258.feladat).



1.4.11. ábra

A fenti tétel alapján $\frac{CO}{O} = \frac{a+b}{c}$ (1.4.11.ábra), s így

$$f_\gamma = CO + OC_1 = CO + \frac{c}{a+b} CO = \frac{a+b+c}{a+b} \cdot CO,$$

ahol

$$CO = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{t(ABC\Delta)}{s \cdot \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{ab \sin \gamma}{(a+b+c) \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{2ab}{a+b+c} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}. \text{ Ennélfogva}$$

(3) miatt

$$f_\gamma = \frac{a+b+c}{a+b} \cdot \frac{2ab}{a+b+c} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

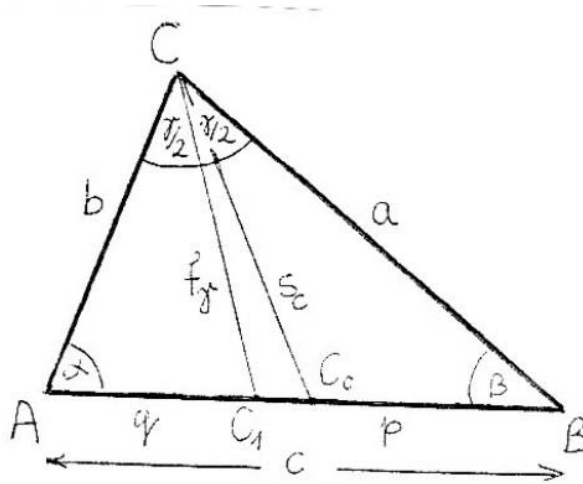
B19

Ha C_0 jelöli az $\overline{AB}$ oldal felezőpontját (1.4.12.ábra), akkor $a > b$ miatt az

$A - C_1 - C_0$ elrendezés áll fenn, s ezért $C_0 C_1 = AC_0 - AC_1 = \frac{c}{2} - q$ és

$CC_1C_0\angle = \alpha + \frac{\gamma}{2}$. Ekkor $\overline{CC_0}$ szakasz egyrészt az ABC háromszög egyik súlyvonala, és ezért $s_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$, másrészt a CC_0C_1 háromszög egyik oldala, amelyre koszinusz-tételt felírva

$$s_c^2 = f_\gamma^2 + \left(\frac{c}{2} - q\right)^2 - 2f_\gamma\left(\frac{c}{2} - q\right)\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right).$$



1.4.12. ábra

Az előbbi két egyenlet jobb oldalait összehasonlítva $\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$ miatt

$$\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = f_\gamma^2 + \left(\frac{c}{2} - q\right)^2 + 2f_\gamma\left(\frac{c}{2} - q\right)\sin\frac{\alpha - \beta}{2},$$

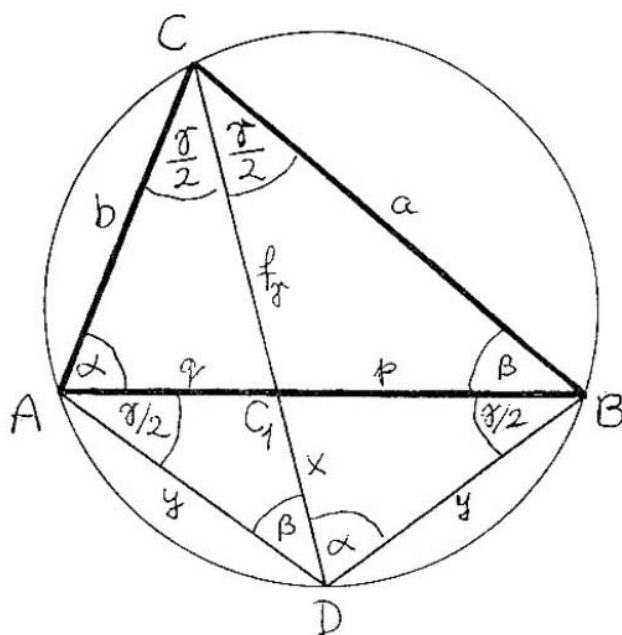
ahonnan az (1) és (4) összefüggéseket felhasználva és rendezve az

$$f_\gamma^2 + \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} \cdot f_\gamma - \frac{(a^2 + b^2)((a+b)^2 - c^2)}{2(a+b)^2} = 0$$

egyenlet kapható, melynek egyik gyöke ellentmondásra vezet, a másik gyöke pedig a (2)-ben megadott összefüggés.

5. csoport

Az ABC háromszögnek megrajzoljuk a körülírt körét, amelynek a C -t nem tartalmazó $\widehat{AB}$ ívét a $\overrightarrow{CC_1}$ szögfelező egy D -vel jelölt pontban felezi (1.4.13.ábra). Ekkor lehetőség nyílik az egybevágó köríveken nyugvó kerületi szögek egyenlőségének kihasználására, továbbá a keletkező $ACBD$ húrnégyszögre érvényes Ptolemaiosz-tétel alkalmazására.



1.4.13.ábra

B20

Az egybevágó köríveken nyugvó kerületi szögek egyenlősége miatt $BDC\angle = BAC\angle = \alpha$ és $ABD\angle = ACD\angle = \frac{\gamma}{2}$. Ennélfogva fennállnak az $ACC_1\Delta \sim DCB\Delta \sim DBC_1\Delta$ hasonlóságok, amelyek alapján egyrészt

$$\frac{AC}{CC_1} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{b}{f_\gamma} = \frac{f_\gamma + x}{a} \Rightarrow f_\gamma(f_\gamma + x) = ab,$$

másrészt

$$\frac{AC_1}{CC_1} = \frac{C_1D}{BC_1} \Rightarrow \frac{q}{f_\gamma} = \frac{x}{p} \Rightarrow xf_\gamma = pq,$$

ahonnan (1)-et felhasználva

$$f_\gamma^2 = ab - xf_\gamma = ab - pq = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2},$$

s ebből (2) adódik.

B21

Minthogy D felezi a C pontot nem tartalmazó $\widehat{AB}$ körívet, ezért az ABD háromszög egyenlőszárú, amelyben $\angle ABD = \angle BAD = \frac{\gamma}{2}$, és ennél fogva (3) miatt

$$BD = \frac{AB}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} = c \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}}.$$

Továbbá miként B20-ban itt is fennáll az $ACC_1\Delta \sim DCB\Delta$ hasonlóság, ahonnan $\frac{AC_1}{CC_1} = \frac{BD}{BC}$, s így (1) alapján

$$f_\gamma = CC_1 = \frac{AC_1 \cdot BC}{BD} = \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{a}{c} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

B22

Az $ACBD$ húrnégyszögre Ptolemaiosz-tételét alkalmazva $AB \cdot CD = AD \cdot BC + AC \cdot BD$, ahol $CD = f_\gamma + x$, továbbá BD a B21-ből már ismert. Ekkor a $BDC_1\Delta \sim CDB\Delta$ hasonlóság miatt

$$x = C_1D = \frac{BC_1 \cdot BD}{BC} = \frac{c^2}{a+b} \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}}, \text{ s ennek alapján } AD = BD$$

miatt a Ptolemaiosz-tétel átírható a $c(f_\gamma + x) = (a+b) \cdot BD$ alakra, ahonnan

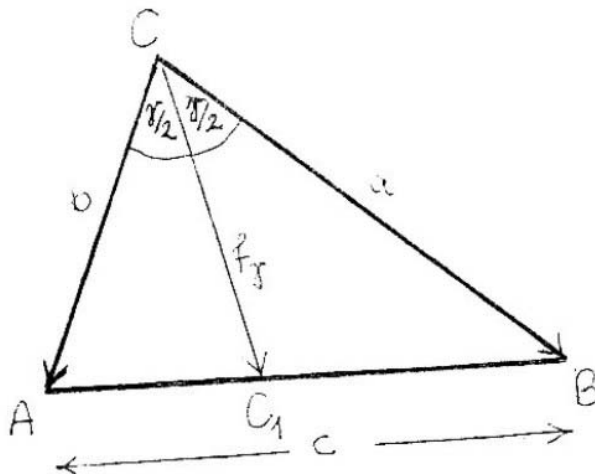
$$f_\gamma = \frac{a+b}{c} \cdot c \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}} - \frac{c^2}{a+b} \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}} = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}} \left[(a+b) - \frac{c^2}{a+b} \right] = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

6. csoport

Itt két egymástól teljesen független bizonyítási módot ismertetünk, amelyek az eddigi csoportokból éppen jellegük miatt maradhattak ki.

B23

Vektoralgebrai segédismeretként a skaláris szorzást és annak alapvető tulajdonságait használjuk fel, s ezáltal jutunk el az alábbi ismert bizonyítási módhoz (1.4.14. ábra).



1.4.14. ábra

Az ABC háromszög C csúcsát origónak választva $|\overrightarrow{CA}| = b$, $|\overrightarrow{CB}| = a$ és $|\overrightarrow{CC_1}| = f_\gamma$. Mivel a $\overrightarrow{CC_1}$ félegyenes az $\angle ACB$ felezője, azaz teljesül az

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{b}{a} \text{ arány, ezért } \overrightarrow{CC_1} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a+b} \quad ([56] \text{ 22. oldal, 9. feladat}),$$

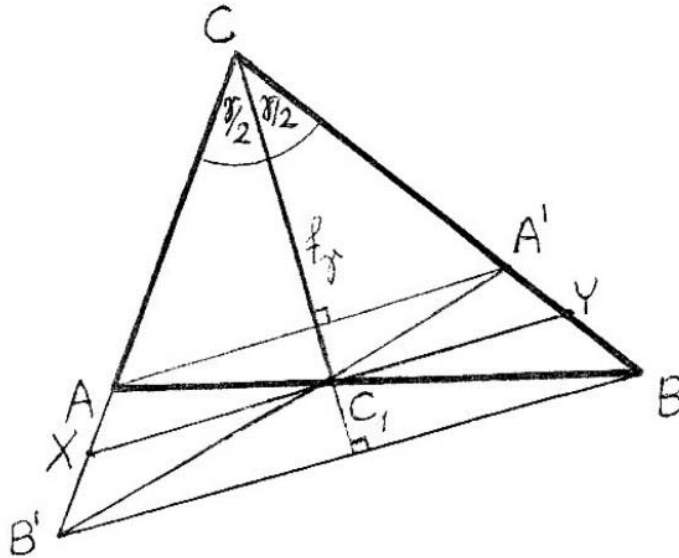
ahonnan mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a skaláris szorzás értelmezését és alapvető tulajdonságait, továbbá a koszinusz-tételből kapható $2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$ összefüggést felhasználva

$$f_\gamma^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2b^2 \cos \gamma}{(a+b)^2} = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2} \quad \text{adódik,} \quad \text{s ebből}$$

négyzetgyökvonással a (2) összefüggéshez jutunk.

Azt az ismert tényt használjuk fel, hogy a trapéz átlóinak metszéspontján át az alapokkal párhuzamosan húzott szakasz az alapok harmonikus középértéke [9, 18].

Az ABC háromszögre az $AC < BC$ feltételt megtartva jelölje A' az A és B' a B pontnak az $ACB\angle$ felezőjére vonatkozó tükörképét (1.4.15. ábra). Minthogy a tükörtengely merőlegesen felezi az $\overline{AA'}$ és $\overline{BB'}$ szakaszokat, így az $AA'BB'$ négyszög



1.4.15. ábra

egy olyan szimmetrikus trapéz, melynek az $\overline{AB}$ és $\overline{A'B'}$ átlói a tekintett szögfelező C_1 végpontjában metszik egymást. Ha ezen a ponton át párhuzamosot húzunk az alapokkal, akkor e párhuzamosból a szárak által közrefogott $\overline{XY}$ szakasz az $\overline{AA'}$ és $\overline{BB'}$ alapok harmonikus közepe ([37]

1244. feladat), azaz $XY = \frac{2 AA' \cdot BB'}{AA' + BB'}$, ahonnan $AA' = 2b \sin \frac{\gamma}{2}$ és

$BB' = 2a \sin \frac{\gamma}{2}$ helyettesítéssel $XY = \frac{4ab}{a+b} \sin \frac{\gamma}{2}$. S minthogy a

konstrukció miatt fennáll az $AA'C\Delta \sim BB'C\Delta \sim XYC\Delta$ hasonlóság, ezért az XYC egyenlőszárú háromszög CX oldala is harmonikus közepe az

$AC=b$ és $B'C=BC=a$ megfelelő oldalaknak, vagyis $CX = \frac{2ab}{a+b}$ teljesül.

Mindezek alapján a CXC_1 derékszögű háromszögből

$$f_\gamma = CC_1 = CX \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

A bizonyítások után következzen egy feladatrovat, amelynek keretében bemutatjuk a mostmár többszörösen megismert formula néhány alkalmazási lehetőségét.

1. feladat

Ha egy háromszög egyenlőszárú, akkor ebből a tényből elsődlegesen az egyenlő oldalakkal szemközti szögek egyenlőségére következtetünk, s ezen szögek felezőinek a hosszát csak jóval később hasonlítjuk össze. Ez az összehasonlítás végezhető egybevágó háromszögek, tengelyes szimmetria, avagy az éppen most bemutatott formulák segítségével. Mindegyik összehasonlítási mód eredménye nyilvánvalóan ugyanaz: az egyenlőszárú háromszög alapján fekvő két belső szögének felezője egyenlő hosszú. Ennek az egyszerű ténynek a megfordítása a Steiner-Lehmus-tétel, amelynek bizonyítására alkalmazzuk a szögfelezők hosszára megismert (2)-es összefüggést.

Steiner-Lehmus-tétel: Ha egy háromszög két belső szögfelezője egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlőszárú ([4] 233-234. oldal, [7] 27. oldal 7. feladat, [8] 33-36. oldal, [33] 69. oldal 2.1-16. feladat).

Bizonyítás: Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy $f_\alpha = f_\beta$, azaz $f_\alpha^2 = f_\beta^2$, s ekkor $a = b$ bizonyítandó. E célból tekintsük a következő arányt:

$$\frac{f_\alpha^2}{f_\beta^2} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a+b}{b+c} \right)^2 \cdot \frac{b+c-a}{a+c-b} = 1,$$

ahonnan

$$a(b+c)^2(a+c-b) = b(a+c)^2(b+c-a),$$

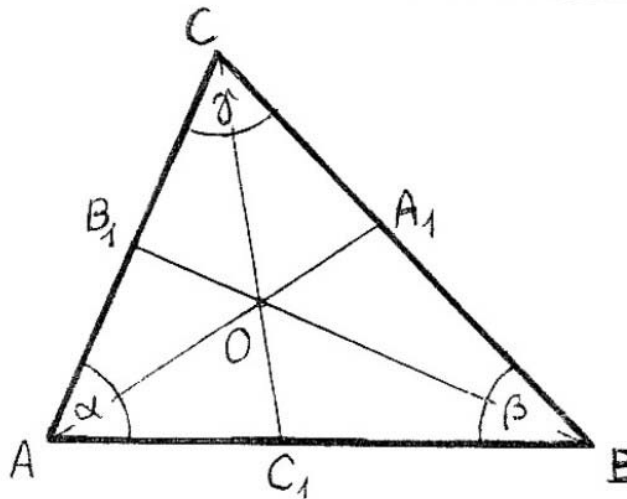
s ebből nem túl hosszú számolással az

$$(a-b)[(a+b)(ab+c^2) + 3abc + c^3] = 0$$

egyenlethez jutunk, ahol a szögletes zárójelben lévő kifejezés pozitív, vagyis így $a = b$ következik.

2. feladat

A (2)-es formula következő alkalmazása során a háromszög szögfelezőinek azon szakaszait hasonlítjuk össze, amelyekre a szögfelezőket a beírt kör középpontja osztja (1.4.16. ábra). Ezen szakaszokkal kapcsolatban ismert, hogy a csúcs melletti rész aránya a



1.4.16. ábra

másik részhez egyenlő a szöget közrefogó két oldal összegének és a szöggel szemközti oldalnak az arányával ([37] 1258. feladat). Ennek alapján, ha O jelöli az ABC háromszög beírt körének középpontját, akkor például a CC_1 szögfelezőre

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{BC + CA}{AB} = \frac{a + b}{c} > 1 \Rightarrow CO > OC_1$$

teljesül, továbbá (2) és a

$$CC_1 = CO + OC_1 = CO + \frac{c}{a + b} CO = \frac{a + b + c}{a + b} CO \quad \text{összefüggés miatt a}$$

$$\overline{CO} \quad \text{és} \quad \overline{OC_1} \quad \text{szakaszokra} \quad CO = \frac{\sqrt{ab[(a + b)^2 - c^2]}}{a + b + c} \quad \text{és}$$

$$OC_1 = \frac{c\sqrt{ab[(a + b)^2 - c^2]}}{(a + b)(a + b + c)} \quad \text{adódik. Az} \quad \overline{AA_1} \quad \text{és} \quad \overline{BB_1} \quad \text{szögfelezők}$$

megfelelő szakaszaira hasonló szerkezetű összefüggések érvényesek.

Foglalkozzunk most az ABC háromszög $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ szögfelezőiből kapott $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ és $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$, $\overline{OC_1}$ szakaszok hosszainak összehasonlításával.

$AB = BC = CA$ esetén nyilvánvalóan $AO = BO = CO$ és $OA_1 = OB_1 = OC_1$, továbbá $AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$. Viszont $AC = BC$ és $\angle ACB \neq 60^\circ$ esetén már csak $AO = BO$ és $OA_1 = OB_1$ teljesül, s ha pedig AC és BC tetszőleges és $\angle ACB = 60^\circ$, akkor az A_1CB_1O négyszög

$$\angle BOA_1 = \angle BOA + \angle ABO = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 60^\circ = \angle ACB$$

miatt húrnégyszög, s így az $\angle A_1CO$ és $\angle B_1CO$ kerületi szögek egyenlőségéből az $\overline{OA_1}$ és $\overline{OB_1}$ hűrok egybevágósága következik. Megállapítható tehát, hogy az $\overline{OA_1}$ és $\overline{OB_1}$ szakaszok egyenlősége két esetben állhat fenn: ha $\alpha = \beta$, vagy ha $\gamma = 60^\circ$ ([58]).

A továbbiakban tekintsük ezeknek az állításoknak a megfordításait.

1. eset: Ha az ABC háromszögben $OA_1 = OB_1$, akkor $\alpha = \beta$ vagy $\gamma = 60^\circ$.

Az állítás igazolásához hosszú számolással jutunk el:

$$OA_1 = \frac{a\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{(b+c)(a+b+c)} = \frac{b\sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]}}{(a+c)(a+b+c)} = OB_1$$

$$OA_1 = OB_1 \Rightarrow (OA_1)^2 - (OB_1)^2 = 0$$

$$\frac{a^2bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2(a+b+c)^2} - \frac{ab^2c[(a+c)^2 - b^2]}{(a+c)^2(a+b+c)^2} = 0$$

$$a(a+c)^2[(b+c)^2 - a^2] - b(b+c)^2[(a+c)^2 - b^2] = 0$$

$$a(a+c)^2(b+c)^2 - a^3(a+c)^2 - b(a+c)^2(b+c)^2 + b^3(b+c)^2 = 0$$

$$(a-b)[(a+c)^2(b+c)^2 - (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) - 2c(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) - c^2(a^2 + ab + b^2)] = 0$$

$$(a-b)(c^2 - a^2 - b^2 + ab)(a+b+c)^2 = 0,$$

ahol a harmadik tényező pozitív, s ezért vagy $a = b$, vagy pedig $c^2 = a^2 + b^2 - ab$, amiből a $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ koszinusztétellel

történő összehasonlítással $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, azaz $\gamma = 60^\circ$ adódik.

2. eset: $AO = BO \Rightarrow AC = BC$.

Ennek igazolásához az alábbi számolás vezet el:

$$AO = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{a+b+c} = \frac{\sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]}}{a+b+c} = BO$$

$$AO = BO \Rightarrow AO^2 = BO^2$$

$$bc[(b+c)^2 - a^2] = ac[(a+c)^2 - b^2]$$

$$b^3 + 2b^2c + bc^2 - a^2b = a^3 + 2a^2c + ac^2 - ab^2$$

$$(a^3 - b^3) + 2c(a^2 - b^2) + c^2(a - b) + ab(a - b) = 0$$

$$(a-b)(a+b+c)^2 = 0,$$

ahol a második tényező pozitív, s így $a = b$ következik.

3. eset: Ha $AO = OC_1$, akkor $90^\circ < \alpha < 120^\circ$.

Ismét egy hosszadalmas számítás révén érünk el a célhoz:

$$AO = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{a+b+c} = \frac{c\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{(a+b)(a+b+c)} = OC_1$$

$$AO = OC_1 \Rightarrow AO^2 = (OC_1)^2$$

$$(a+b)^2[a^2 - (b+c)^2] = ac[c^2 - (a+b)^2]$$

$$(a+b)^2[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc] = ac[c^2 - a^2 - b^2 - 2ab] \quad (*)$$

$$(a+b)^2(a^2 - b^2 - c^2) = 2bc(a+b)^2 - ac[(a^2 - b^2 - c^2) + 2b(a+b)]$$

$$(a^2 - b^2 - c^2)[(a+b)^2 + ac] = 2bc(a+b)[(a+b) - a] \quad 2b^2c(a+b)$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = \frac{2b^2c(a+b)}{ac + (a+b)^2} > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0 \Rightarrow \alpha > 90^\circ,$$

s ennél fogva $a > b$ és $a > c$. Továbbá (*)-ból másként átrendezve:

$$(a+b)^2(a^2 - b^2 - c^2 - bc) = bc(a+b)^2 - ac[(a^2 - b^2 - c^2 - bc) + b(2a + 2b + c)]$$

$$(a^2 - b^2 - c^2 - bc)[(a+b)^2 + ac] = bc(a+b)^2 - abc(2a + 2b + c)$$

$$= bc[(a+b)^2 - a(2a + 2b + c)]$$

$$= bc(a^2 + 2ab + b^2 - 2ab - 2a^2 - ac)$$

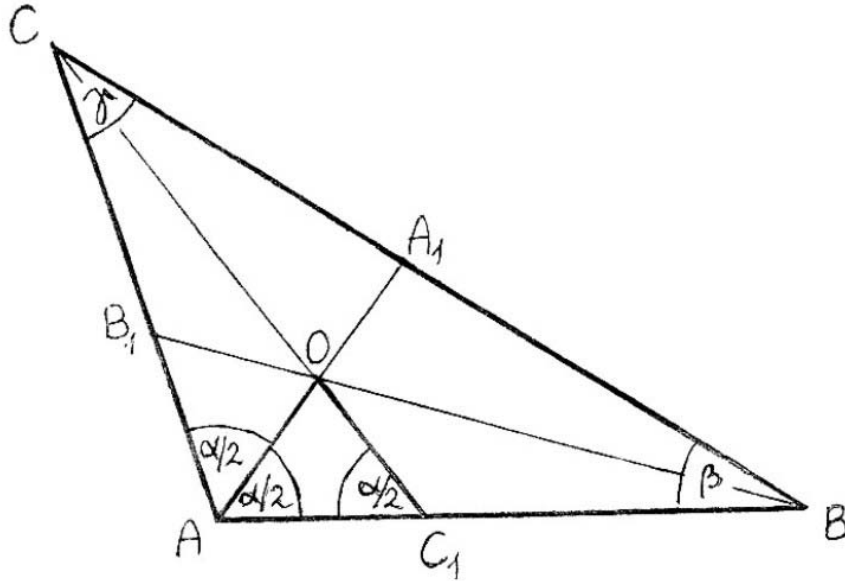
$$= bc(b^2 - a^2 - ac),$$

amelynek a jobb oldala $a > b$ miatt negatív, s ezért

$$1 + 2 \cos \alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = \frac{bc + b^2 + c^2 - a^2}{bc} > 0 \Rightarrow \cos \alpha > -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha < 120^\circ$$

Így tehát $AO = OC_1$ esetén $90^\circ < \alpha < 120^\circ$. Ugyanekkor még az is igaz, hogy α megadása révén β és γ is egyértelműen meghatározottá válik. Mindez könnyebben áttekinthető az 1.4.17. ábra alapján, ahol $AO = OC_1$

miatt $AC_1O\angle = C_1AO\angle = \frac{\alpha}{2}$, ami a



1.4.17. ábra

BCC_1 háromszög C_1 csúcsánál lévő külső szög, ezért $\frac{\alpha}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \alpha = 2\beta + \gamma$, amiből az $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ összefüggés alapján $\beta = 2(\alpha - 90^\circ)$ és $\gamma = 3(120^\circ - \alpha)$, s így ismét $90^\circ < \alpha < 120^\circ$ kapható.

3. feladat:

Mutassuk meg, hogy nem szerkeszthető háromszög a szögfelezők hosszainak ismeretében.

Erre a ismert feladatra olyan trigonometrikus megoldásokat találunk ([2] 224-225. oldal, [45] 688. oldal), amelyek közös alapgondolata az, hogy egy speciális egyenlőszárú háromszöget

választunk és erre igazoljuk a szerkesztés euklideszi értelemben vett kivitelezhetetlenségét.

Megoldás: A fent említett alapötletet átvéve legyen $f_\alpha = f_\beta = 1$ és

$f_\gamma = \frac{1}{4}$. Ez a választás lehetséges, minthogy ekkor $a = b$ miatt

$f_\gamma = \frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{2} > 0 \Rightarrow 2a = a + b > c$, s ennél fogva a c alapú egyenlőszárú

háromszög létezik. Euklideszi módon történő megszerkesztése mégis

lehetetlen, ugyanis az $f_\alpha = f_\beta = \frac{c\sqrt{a(2a+c)}}{a+c} = 1$ és $f_\gamma = \frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{2} = \frac{1}{4}$

feltételi egyenletekből a

$$\left. \begin{aligned} 2a^2c^2 + ac^3 &= a^2 + 2ac + c^2 \\ 4a^2 &= c^2 + \frac{1}{4} \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer kapható. Az első egyenletet 4-gyel megszorozva, majd ebbe a másodikat behelyettesítve hosszadalmas számolás vezet el a

$$3c^6 - \frac{29}{4}c^4 + \frac{7}{4}c^2 - \frac{1}{16} = 0$$

egyenlethez, amelyet 576-tal megszorozva a

$$(12c^2)^3 - 29(12c^2)^2 + 84(12c^2) - 36 = 0,$$

s ebből $x = 12c^2$ helyettesítésével az

$$x^3 - 29x^2 + 84x - 36 = 0$$

harmadfokú egyenletet kapjuk, amelynek a 36 egyik osztója sem gyöke. Ennél fogva ez az egyenlet irreducibilis a racionális számok teste fölött, vagyis x nem szerkeszthető meg euklideszi módon, s ezáltal c sem.

1.5. Egy oldallal párhuzamos Euler-egyenes

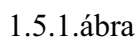
Annak a nevezetes háromszög-geometriai tételnek a felfedezése, miszerint „A háromszög magasságpontja, súlypontja és körülírt körének középpontja egy egyenesre illeszkedik” Euler nevéhez fűződik, aki ezt 1765-ben közölte a Szentpétervári Akadémia tudományos kiadványában. E tétel és annak valamilyen bizonyítása szinte minden elemi geometriával foglalkozó könyvben megtalálható. Minthogy itt a tétel állítását tényként fogadjuk el, s vizsgálatunk tárgyát az Euler-egyenesnek a háromszög egyik oldalához viszonyított kölcsönös helyzete képezi, ezért nem térünk ki különféle bizonyítások ismertetésére.

Ha egy háromszög magasságpontja, súlypontja és körülírt körének középpontja közül kettő egybeesik, akkor megmutatható, hogy mindhárom egybeesik és a háromszög szabályos, amelyre tehát nem létezik az Euler-egyenes. Viszont egy nem szabályos háromszögre ezek a nevezetes pontok különböznek, s így az Euler-egyeneset bármely kettő egyértelműen meghatározza. Ha egy háromszög egyenlőszárú, akkor az Euler-egyenes azonos az alap felezőmerőlegesével. Megfordítva: Ha egy háromszög Euler-egyenese merőleges a háromszög valamelyik oldalára, akkor az a háromszög egyenlőszárú és ez az oldal az alapja. Ha a háromszög derékszögű, akkor az Euler-egyenes azonos az átfogóhoz tartozó súlyvonal egyenesével, azaz illeszkedik a háromszög egyik csúcsára és felezi az azzal szemközti oldalt, csak általában nem merőleges rá. Ha viszont az Euler-egyenes átmegy a háromszög valamelyik csúcsán, akkor ez a háromszög vagy egyenlőszárú, vagy derékszögű, vagy egyszerre mindkettő. Ha a háromszög tompaszögű, akkor a leghosszabb oldal egyenese elválasztja a súlypontot és a körülírt kör középpontját, s ennél fogva az Euler-egyenes metszi ezt az oldalt.

Tételezzük fel, hogy az ABC háromszög g Euler-egyenese párhuzamos az $\overline{AB}$ oldallal. Ekkor az eddigiek alapján megállapítható, hogy az ABC háromszög csak olyan hegyesszögű háromszög lehet, amely nem egyenlőszárú. A $g \parallel \overline{AB}$ helyzetre vonatkozik az alábbi állítás.

Tétel: Ha az ABC háromszög Euler-egyenese párhuzamos az $\overline{AB}$ oldallal, akkor $\tan \alpha \cdot \tan \beta = 3$ ([8] 42. oldal, 4. feladat).

Bizonyítás: Jelölje M , S és K az ABC háromszög magasságpontját, súlypontját és körülírt körének középpontját, C_0 az $\overline{AB}$ oldal felezőpontját, C' a C -ből húzott magasság talppontját, valamint R a körülírt kör sugarát (1.5.1. ábra).



A C_0SS' és C_0CC' háromszögek hasonlóságából

$$\frac{SS'}{CC'} = \frac{C_o S}{CC_o} = \frac{1}{3} \Rightarrow SS' = \frac{CC'}{3},$$

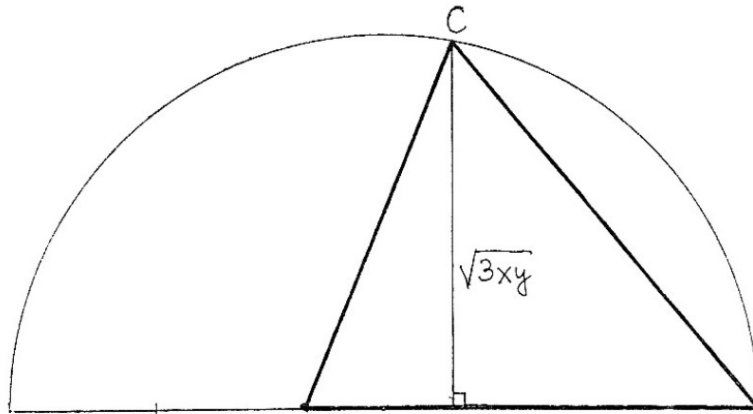
ahonnan $CC' = b \sin \alpha = 2R \sin \alpha \sin \beta$ miatt $SS' = \frac{2R}{3} \sin \alpha \sin \beta$ mindig teljesül.

Így tehát $C_o K = SS'$, amiből $g = \overrightarrow{KS} \parallel \overrightarrow{AB}$ következik.

Minthogy az ABC háromszögre megadott feltételek miatt M , S és K különböző pontok, ezért az is megtehető, hogy az M és S vagy az M és K pontoknak az $\overrightarrow{AB}$ egyenestől mért távolságát hasonlítjuk össze. Ehhez szükségünk van a $\overline{C'M}$ szakasz hosszára, ami az általános magasságtétel [16, 23, 34] szerint $C'M = \frac{AC' \cdot BC'}{CC'}$ alakú, ahonnan a CC' fenti meghatározásához hasonló módon

$$C'M = \frac{b \cos \alpha \cdot a \cos \beta}{b \sin \alpha} = 2R \cos \alpha \cos \beta = \frac{2R}{3} \sin \alpha \sin \beta.$$

Az előbbi tétel alapján adott $\overline{AB}$ szakasz esetén könnyen szerkeszthető olyan $C \notin \overline{AB}$ pont, amelyre az ABC háromszög Euler-egyenese párhuzamos az $\overline{AB}$ oldallal. Ehhez az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjától különböző C' belső pontja esetén szerkesszük meg a $3 \overline{AC'}$ és $\overline{C'B}$ szakaszok mértani közepét, ami egybevágó a $\overline{CC'}$ szakasszal, s ezáltal C pont már ismert: az $\overline{AB}$ -re C' -ben meghúzott merőlegesnek és a mértani közép szerkesztéséhez felhasznált Thalész-körnek valamelyik metszéspontja (1.5.2.ábra).

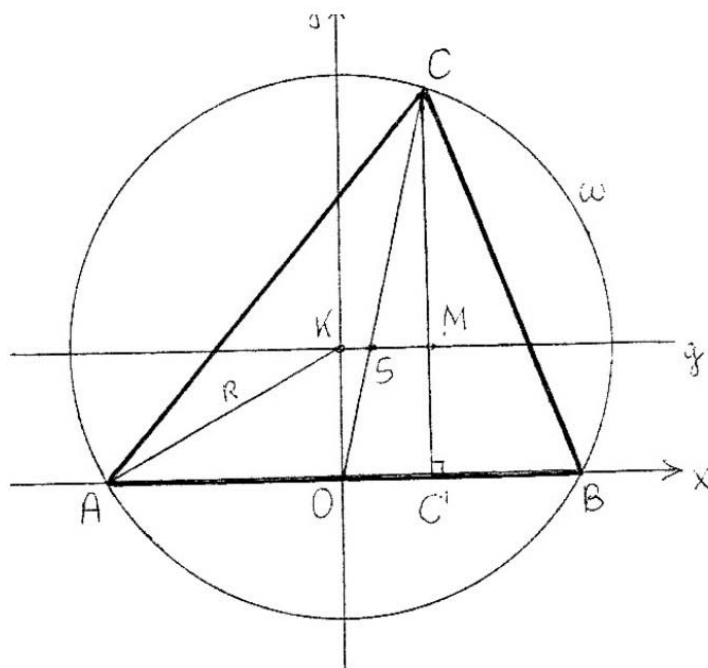


1.5.2.ábra

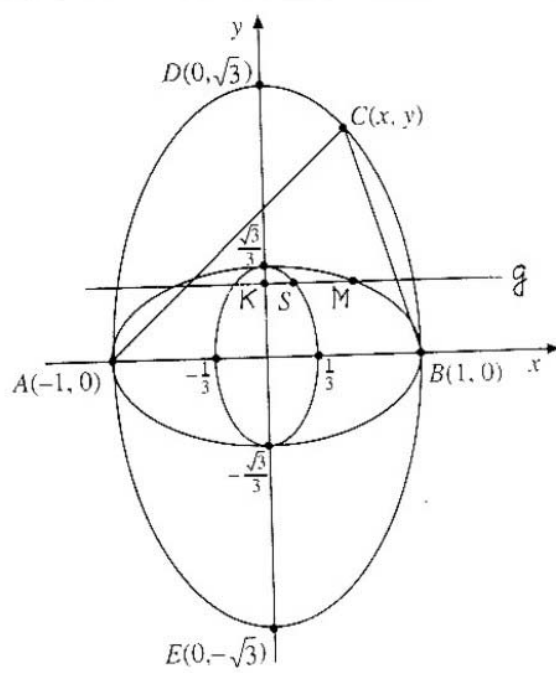
A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy a rögzített $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjától különböző bármely C' belső pontjához (az $\overline{AB}$ egyenesre vonatkozó szimmetriától eltekintve) egyértelműen szerkeszthető a kívánt tulajdonsággal rendelkező C pont. Már is van értelme a következő problémának: Mi lesz a C pontok halmaza, ha C' befutja az $\overline{AB}$ szakasz megengedett pontjait. Ezzel a problémával foglalkozna D. Diemente ([31] 428-431. oldal) és M. S. Klamkin ([40] 438, 440. oldal) analitikus geometriai eszközökkel arra jutott, hogy a keresett ponthalmaz az $\overline{AB}$ -re szimmetrikusan elhelyezkedő és a tengelypontjaitól megfosztott olyan ellipszis, amelynek centruma az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja, tengelyei pedig AB és $AB\sqrt{3}$ hosszúak.

Az alábbiakban ugyanerre a problémára bemutatunk egy szintén analitikus, de tárgyalásmódjában mégis eltérő leírást [17, 19, 21]. Ehhez válasszuk x -tengelynek a rögzített $\overline{AB}$ szakasz egyenesét, y -tengelynek az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegesét, s ezáltal az O origónak az $\overline{AB}$ felezőpontját. Legyen $A(-1,0)$, $B(1,0)$ és keressük azon $C(x,y)$ pontok halmazát, amelyekre az ABC háromszög g Euler-egyenesre párhuzamos az $\overline{AB}$ oldallal. Minthogy a $g \parallel \overline{AB}$ helyzethez az ABC háromszög csak hegyesszögű és nem-egyenlőszárú lehet, ezért az M , S és K pontok különbözők, s így az Euler-egyenes egyértelműen megadható például az $S\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$ és $K\left(0, \frac{y}{3}\right)$ pontokkal (1.5.3. ábra), miközben S és K helyzete, valamint az $\omega(K,R)$ körülírt kör sugara a mozgó C pont elhelyezkedésétől függően változik.

Ekkor bármely lehetséges C pontra az ABC háromszög $\omega(K,R)$ körülírt körének egyenlete $x^2 + \left(y - \frac{y}{3}\right)^2 = R^2$, ahonnan az $R^2 = 1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2$ összefüggést felhasználva $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$, vagyis C egy origó középpontú olyan ellipsziszre illeszkedik, amelynek féltengelyei 1 és $\sqrt{3}$ hosszúak, kivéve az A, B, D és E tengelypontokat (1.5.4. ábra).



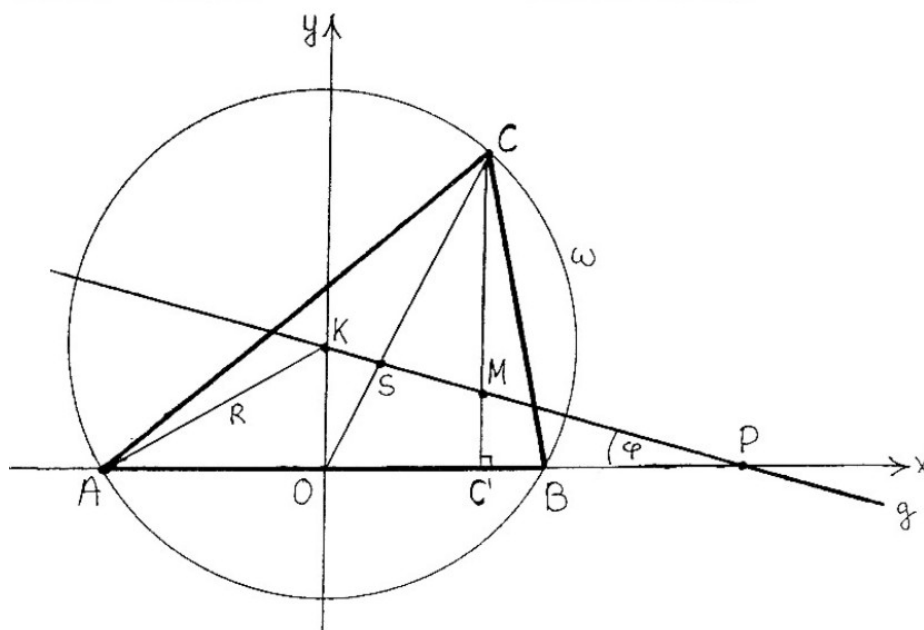
1.5.3.ábra



1.5.4.ábra

(3) M befutja az $x^2 + 3y^2 = 1$, S pedig a $9x^2 + 3y^2 = 1$ ellipszist, kivéve azok tengelypontjait.

A most megoldott probléma egy lehetséges általánosításaként [25] vizsgálni kívánjuk, hogy az ABC háromszög $\overline{AB}$ oldalát rögzítve milyen pontthalmaz eleme lehet a C csúcs, ha az ABC háromszög g Euler-egyenese az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenessel egy $\varphi \in (0^\circ, 90^\circ)$ szöget zár be.



1.5.5.ábra

Ehhez az előbbi analitikus leírásból megtarthatjuk az x - és y -tengely megválasztását, az $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(x,y)$ és $S\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$ megadási módot.

Viszont $g \nparallel \overrightarrow{AB}$ miatt a $K(0, k)$ pontra $k \neq \frac{y}{3}$. A g egyenest továbbra is az S és K pontokkal megadva legyen $P = g \cap \overrightarrow{AB}$, $P(0, p)$ és $\varphi = KPA\angle$

(1.5.5.ábra), miközben a tárgyalás könnyebbé tételéhez egyelőre feltételbe vehető, hogy C az első síknegyedben van, azaz $x > 0$, $y > 0$ és így $k > 0$, $p > 0$ is teljesül. Az ábra szerint egyrészt a PKO derékszögű háromszögből $k = p \tan \varphi$, másrészt $PKO\Delta \sim PSS'\Delta$ miatt fennáll a $k : \frac{y}{3} = p : \left(p - \frac{x}{3}\right)$

arány, s így $p = \frac{x \tan \varphi + y}{3 \tan \varphi}$. Ekkor bármely lehetséges C pontra az ABC

háromszög $\omega(K, R)$ körülírt körének egyenlete $x^2 + (y - k)^2 = R^2$,

ahonnan az $R^2 = 1 + k^2$ és $k = \frac{x \tan \varphi + y}{3}$ összefüggéseket felhasználva

$3x^2 + y^2 - 2xy \tan \varphi - 3 = 0$ adódik, ami egy másodrendű görbe egyenlete. Ennek a görbének az x - és y -tengelyre nem illeszkedő pontjait futhatja be a C csúcs. A görbe típusának megállapítása céljából írjuk fel a görbéhez tartozó

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\tan \varphi & 0 \\ -\tan \varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

mátrixot, amiből $|A_{33}| = 3 - \tan^2 \varphi$ és $|A| = -3|A_{33}|$ kapható. Ennélfogva a következő típusok fordulhatnak elő:

1.eset:

$0^\circ < \varphi < 60^\circ \Rightarrow |A_{33}| > 0$ és $|A| < 0$.

A másodrendű görbe ellipszis.

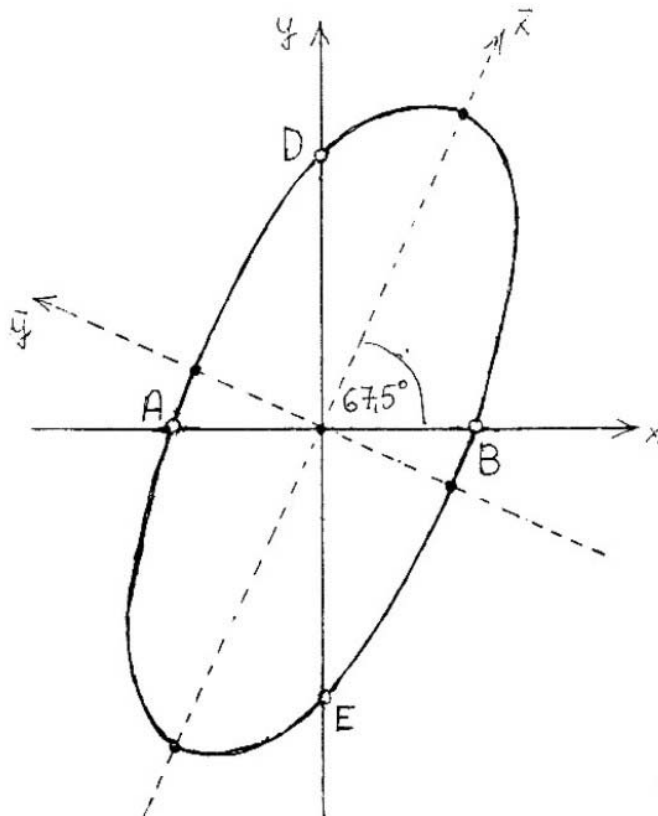
Példa:

$\varphi = 45^\circ \Rightarrow 3x^2 + y^2 - 2xy - 3 = 0$.

Elvégezve a főtengelytranszformációt: $(2 - \sqrt{2})\bar{x}^2 + (2 + \sqrt{2})\bar{y}^2 = 3$, ahonnan

$\frac{\bar{x}^2}{\frac{3(2+\sqrt{2})}{2}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{3(2-\sqrt{2})}{2}} = 1$, azaz a másodrendű görbe valós ellipszis

(1.5.6.ábra).



1.5.6.ábra

2.eset:

$$\varphi = 60^\circ \Rightarrow |A_{33}| = 0 \text{ és } |A| = 0.$$

A másodrendű görbe párhuzamos egyenespár.

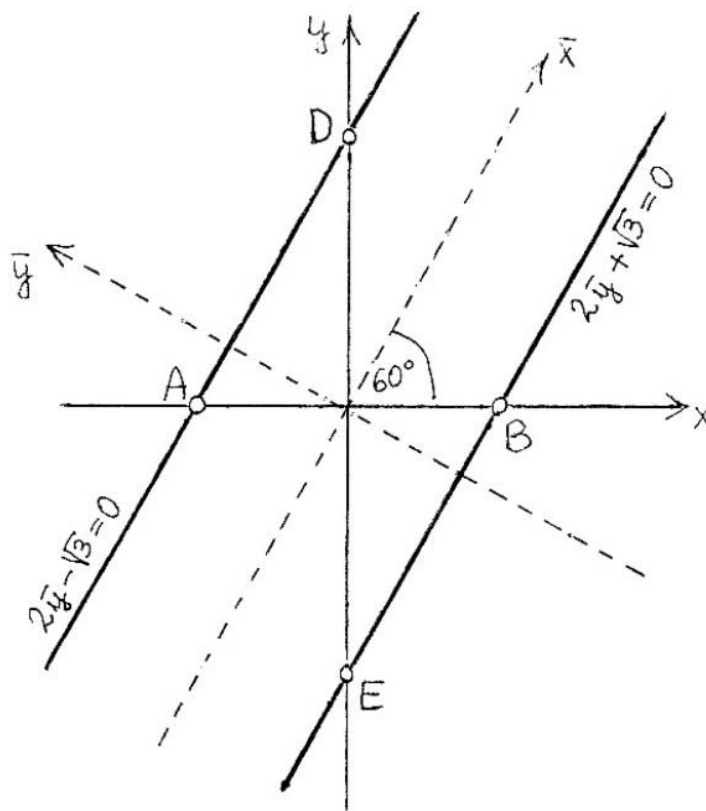
Példa:

$$\varphi = 60^\circ \Rightarrow 3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}xy - 3 = 0$$

Elvégezve a főtengetytranszformációt: $4\bar{y}^2 - 3 = 0$, ahonnan

$$(2\bar{y} - \sqrt{3})(2\bar{y} + \sqrt{3}) = 0,$$

azaz a másodrendű görbe valós párhuzamos egyenespár (1.5.7.ábra).



1.5.7.ábra

3.eset:

$$60^\circ < \varphi < 90^\circ \Rightarrow |A_{33}| < 0 \text{ és } |A| > 0.$$

A másodrendű görbe hiperbola.

Példa:

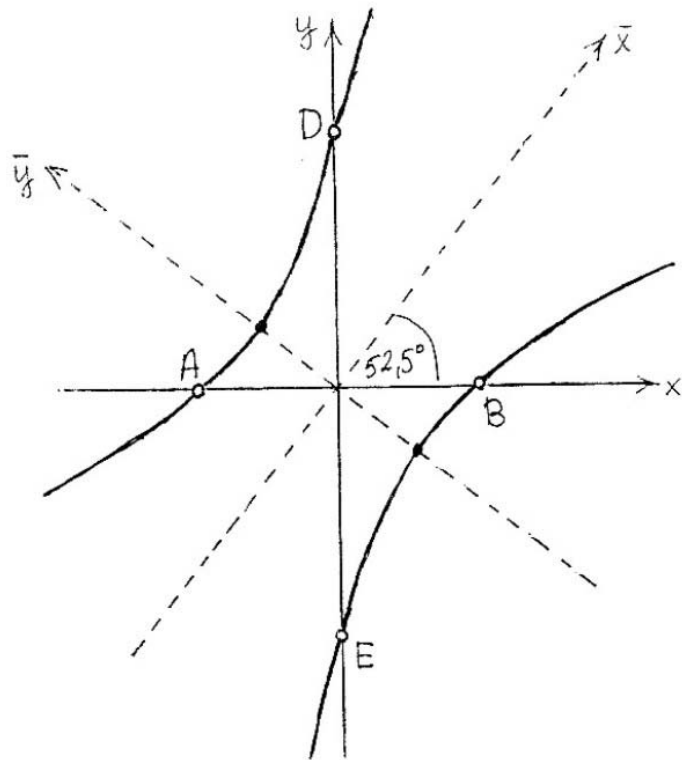
$$\varphi = 75^\circ \Rightarrow 3x^2 + y^2 - 2(2 + \sqrt{3})xy - 3 = 0,$$

ahonnan

$$\frac{\frac{-2}{y}}{3} - \frac{\frac{-2}{x}}{3} = 1, \text{ azaz a másodrendű görbe hiperbola.}$$

$$\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2}$$

(1.5.8. ábra)



1.5.8.ábra

2. KÖRGEOMETRIAI TÉMÁK

A körgeometria jelentős helyet foglal el az elemi síkgeometriában, mivel tulajdonképpen a kör az egyetlen olyan görbe, aminek tulajdonságai elemi eszközökkel részletesen leírhatók. Ezek közül sokat már az ókori görögök is ismertek, de vizsgálatuk terén mégis a XIX. század matematikusai (Möbius. Laguerre. Lie) szereztek nagy érdemeket, akik a sok speciális jellegű tételből igen gazdag tényanyagot állítottak össze, s ezáltal lerakták a körök geometriájának általános alapelveit.

A körök speciális tulajdonságaihoz kapcsolódva vektoralgebrára alapuló tárgyalást adunk a pont körre vonatkozó hatványára, valamint különféle módokat mutatunk be pont körre vonatkozó inverzének és két kör hatványvonalának a megszerkesztésére.

2.0. Körgeometriai alapismeretek

A körrel kapcsolatos egészen alapvető ismeretekre nem térünk ki, itt csupán az előbb már említett témák tárgyalásához szükséges további fogalmakat és tételeket soroljuk fel.

Pont körre vonatkozó hatványa

Az O középpontú r sugarú $k(O, r)$ kör síkjában lévő P pontnak a k körre vonatkozó $h_k(P)$ hatványa egy olyan valós szám, amit a $h_k(P) = OP^2 - r^2$ formulával értelmezünk. Ezen értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy $h_k(P)=0$ pontosan $P \in k$ esetén teljesül. Ha viszont $P \notin k$, akkor a pont körre vonatkozó hatványa a következő geometriai jelentéssel bír. Külső pont körre vonatkozó hatványa a pontból a körhöz húzott érintő szakasz hosszának négyzetével egyenlő, belső ponté pedig a rajta áthaladó azon húr fele négyzetének az ellentettjével, amely merőleges a pontot tartalmazó átmérőre. Ebből adódik az is, hogy a P középpontú $\sqrt{|h_k(P)|}$ sugarú kört a k kör $OP > r$ esetén merőlegesen, míg $0 < OP < r$ esetén az $\overline{OP}$ -re merőleges átmérő végpontjaiban metszi.

Adott $k(O, r)$ kör és $h \geq -r^2$ valós szám esetén azon pontok halmaza a k kör síkjában, amelyekre $h_k(P)=h$ állandó érték, egy O középpontú $\sqrt{r^2 + h}$ sugarú kör.

Hatványvonal és hatványpont

A $k_1(O_1, r_1)$ és $k_2(O_2, r_2)$ körök közös síkjában lévő azon P pontok h_{12} -vel jelölt halmazát, amelyre $h_{12} = \{P \mid h_1(P) = h_2(P)\}$ teljesül, a k_1 és k_2 körök hatványvonalának nevezzük. Euklideszi síkon két koncentrikus kör hatványvonala üres halmaz, két nem koncentrikus köré pedig egy

olyan egyenes, amely merőleges a körök középpontjait összekötő egyenesre. Mindezek alapján megállapítható, hogy

- két metsző kör hatványvonala a metszéspontok összekötő egyenesre,
- két érintő kör hatványvonala az érintési pontban meghúzható közös érintő,
- két egybevágó kör hatványvonala a középpontok összekötő szakaszának a felező merőlegese.

A hatványvonal azon része, amely mindkét körön kívül van, azon pontok halmaza, ahonnan mindkét körhöz egyenlő hosszú érintőszakaszok húzhatók, vagyis az adott kört merőlegesen metsző körök középpontjainak halmaza.

Két kör hatványvonala a fenti speciális esetekben tehát egyszerűen megrajzolható. A fentiektől különböző esetben pedig előbb megszerkeszthetünk egy olyan külső pontot, ahonnan mindkét körhöz egyenlő hosszú érintők húzhatók, s mivel ez a pont illeszkedik a keresett hatványvonalra, ezért ha ebből a pontból merőlegest állítunk a körök középpontjait összekötő egyenesre, akkor a két kör hatványvonalát kapjuk.

Ha az ugyanazon síkbeli három adott kör között nincsenek koncentrikusak, akkor a körök páronként vett hatványvonalai párhuzamosak vagy egy pontra illeszkednek aszerint, hogy a középpontok kollineárisak avagy nem. Utóbbi esetben a három hatványvonal közös pontját a három kör hatványpontjának nevezzük. Ez a pont egyidejűleg van kívül, belül, illetve rajta mindhárom körön. Ha kívül van a három körön, akkor ebből a pontból a körökhöz húzható érintő szakaszok egyenlő hosszúak, azaz egy olyan körnek a középpontja, amely az adott három kört merőlegesen metszi. A hatványpont segítségével újabb eljárás adható közös pont nélküli két nem koncentrikus kör hatványvonalának a megszerkesztésére: a két adott körhöz mindkettőt metsző harmadikat rajzolunk úgy, hogy a középpontok ne legyenek kollineárisak, s ezután a közös húrok egyeneseinek metszéspontjából merőlegest állítunk az adott körök középpontjait összekötő egyenesre.

Inverzió

Adott S euklideszi sík, $O \in S$ és $a^2 \in \mathbf{R}^+$ esetén az O pólusú a^2 hatványú $i(O, a^2)$ inverzió az S sík O -tól különböző valamely P pontjához az $\overrightarrow{OP}$ félegyenesnek azt az egyértelműen meghatározott P' belső pontját rendeli, amelyre $OP \cdot OP' = a^2$ teljesül.

Az $i(O, a^2)$ pozitív hatványú inverzió az alábbi alapvető tulajdonságokkal rendelkezik:

- négyzete identitás, vagyis az inverzió involutorikus,
- van egy pontonként fix alakzata: ez az $\omega(O, a)$ alapkör, ami az inverziót egyértelműen meghatározza, és további fix pontja nincs,

- O elhagyása után az alapkörön kívüli és belüli pontok halmazát felcseréli,
- az alapkört merőlegesen metsző egyenesek és körök invariánsak,
- irányításváltó és szögtartó.

Ennek alapján az $i(O, a^2)$ inverziót a tengelyes tükrözéssel analógiában az $\omega(O, a)$ körre vonatkozó tükrözésnek is nevezik.

Póluson át nem haladó egyenes képe póluson áthaladó olyan kör, melynek középpontja a pólus egyenesre vonatkozó tükörképének az inverze. Póluson áthaladó kör inverze póluson át nem haladó egyenes, amely párhuzamos ezen körnek a pólusbeli érintőjével. Ha egy adott kör nem halad át a póluson, akkor az inverze is póluson át nem haladó kör, amelynek középpontja a pólus adott körre vonatkozó inverzének az alapkörre vonatkozó inverze.

Az $\{A, B\} = \omega \cap \overrightarrow{OP}$ jelölést bevezetve megmutatható, hogy az A, B, P, P' pontok harmonikus pontnégyest alkotnak.

Az $i(O, a^2)$ inverzió és a ρ_O középpontos tükrözés szorzata az $i(O, -a^2)$ negatív hatványú inverzió, amelynek egyetlen fix pontja sincs, invariáns alakzata a póluson áthaladó minden egyenes, valamint az alapkör és minden olyan kör, amely az alapkört egy átmérő végpontjaiban metszi. Minden más egyenes és kör képére a pozitív hatványú inverziónál kimondott állítások érvényben maradnak.

Egy alapkörtől különböző kör pontosan akkor invariáns, ha a pólus rá vonatkozó hatványa egyenlő az inverzió hatványával.

Közös pólusú két inverzió szorzata középpontos hasonlóság, amelynek centruma a pólus és aránya a két inverzió hatványának hányadosa.

2.1. Pont körre vonatkozó hatványa – vektoralgebrailag

A pont körre vonatkozó hatványa az elemi körgeometria egyik legfontosabb alapfogalma. Bevezetése többnyire úgy történik, hogy egy háromszögek hasonlóságára épülő tétel alapján a kör síkjának tetszőleges pontjához hozzárendelünk egy állandó szorzatot, amit a pont körre vonatkozó hatványának nevezünk. Eközben az előbbi tételben szereplő szelőkire illeszkedő bizonyos szakaszoknak előjeles hosszakat tulajdonítunk, ami azonban újabb tanítási-tanulási problémák forrása lehet [2, 8]. Ha viszont ezt a fogalmat vektorok segítségével vezetjük be, akkor a hatvány előjele a skaláris szorzás belső tulajdonságaiból adódik. Ebben az értelemben szeretnénk a következő tételre öt különböző bizonyítást bemutatni.

Tétel: Az O középpontú r sugarú k kör síkjának legyen P egy tetszőleges pontja és g egy P -re illeszkedő olyan egyenes, amelyre $g \cap k = \{A, B\}$. Igazolandó, hogy $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = OP^2 - r^2$, azaz független a g szelő helyzetétől.

E tétel szerint a P pont $k(O, r)$ körre vonatkozó hatványa $OP^2 - r^2$. $O \in g$ esetén az állítás az alábbi számítással igazolható:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = OP^2 - r^2.$$

A továbbiakban mindegyik bizonyítást az $OP > r$, $O \notin g$ és $A \neq B$ esetre végezzük el, miközben ügyelnünk kell a skaláris szorzás tulajdonságainak következetes alkalmazására. A most kimaradó $OP \leq r$ és $O \in g$ eset bizonyítása hasonlóképpen írható le.

Állapodjunk meg itt abban, hogy ezen bizonyítások során az $\overline{AB}$ húr felezőpontját mindig F -fel jelöljük.

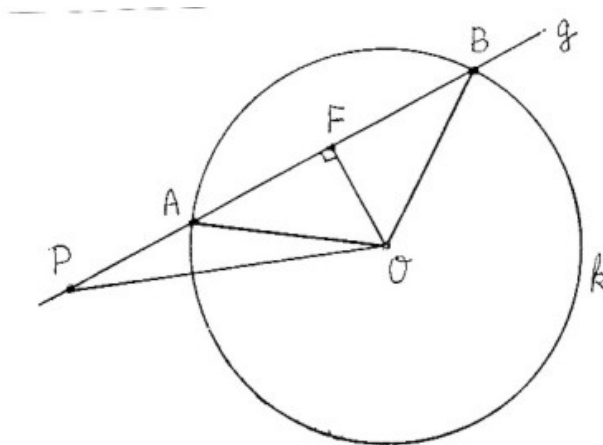
1. bizonyítás (2.1.1. ábra)

A $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorokat kéttagú összegekre bontjuk úgy, hogy egy nevezetes azonosság alkalmazható legyen:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FA}) \cdot (\overrightarrow{PF} - \overrightarrow{FA}) = \overrightarrow{PF}^2 - \overrightarrow{FA}^2,$$

majd az OPF és OAF derékszögű háromszögekre egy-egy Pitagorasz-tételt alkalmazva

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (OP^2 - OF^2) - (OA^2 - OF^2) = OP^2 - r^2.$$



2.1.1. ábra

2.bizonyítás (2.1.2. ábra, [43, 56])

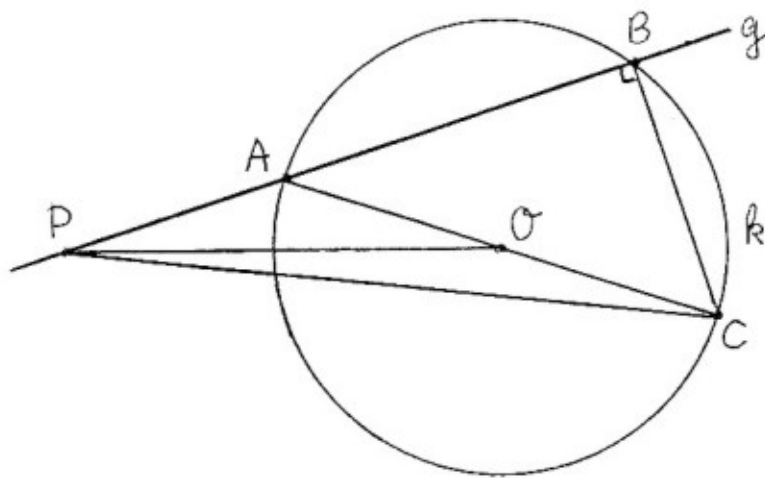
Legyen C a k körvonal A -val átellenes pontja, vagyis $\overline{AC}$ szakasz a k kör egy átmérője. Ekkor $\overline{BC}$ merőleges g egyenesre, s így a $\overline{PA}$ és $\overline{PB}$ vektorokra is.

Ha a $\overline{PA} \perp \overline{BC}$ tényállást akarjuk kihasználni, akkor $\overline{PA}$ -t változatlanul hagyjuk, míg $\overline{PB}$ -t úgy bontjuk fel, hogy e felbontásban szerepeljen $\overline{BC}$:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA} \cdot (\overline{PC} + \overline{CB}) = \overline{PA} \cdot (\overline{PC} - \overline{BC}) = \overline{PA} \cdot \overline{PC} - \overline{PA} \cdot \overline{BC},$$

ahol $\overline{PA} \perp \overline{BC}$ miatt $\overline{PA} \cdot \overline{BC} = 0$. Ezután az első tag két tényezőjét felbontjuk úgy, hogy ismét egy nevezetes azonosság legyen alkalmazható.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (\overline{PO} + \overline{OA}) \cdot (\overline{PO} + \overline{OC}) = (\overline{PO} + \overline{OA}) \cdot (\overline{PO} - \overline{OA}) = \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2 = OP^2 - r^2.$$



2.1.2. ábra

3.bizonyítás (2.1.3. ábra, [60] 92. oldal)

A közös kezdőpontú $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ vektorok egyenlő hosszúságúak, ezért összegük merőleges az $\overline{AB}$ húrra, s így a $\overline{PA}$ és $\overline{PB}$ vektorokra is.

Ha a $\overline{PA} \perp (\overline{OA} + \overline{OB})$ tényállítást akarjuk kihasználni, akkor $\overline{PA}$ -t változatlanul hagyjuk, míg $\overline{PB}$ -t felbontjuk úgy, hogy a felbontás után a teve-szabály révén kialakítható legyen az $\overline{OA} + \overline{OB}$ összeg:

$$\begin{aligned}\vec{PA} \cdot \vec{PB} &= \vec{PA} \cdot (\vec{OB} - \vec{OP}) = \vec{PA} \cdot \left[(\vec{OA} + \vec{OB}) - (\vec{OP} + \vec{OA}) \right] = \\ &= \vec{PA} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) - \vec{PA} \cdot (\vec{OP} + \vec{OA}),\end{aligned}$$

ahol $\vec{PA} \perp (\vec{OA} + \vec{OB})$ miatt az első tag zéró, míg a második tagban $-\vec{PA}$ helyett $\vec{AP}$ -t írva és azt felbontva, az előbbiekhöz hasonló módon érünk célhoz:

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{AP} \cdot (\vec{OP} + \vec{OA}) = (\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OP} + \vec{OA}) = \vec{OP}^2 - \vec{OA}^2 = OP^2 - r^2.$$

4. bizonyítás (2.1.3. ábra)

Ha φ jelöli az ABO egyenlőszárú háromszög szárai által bezárt szög felének a mértékét, akkor az AOF és POF derékszögű háromszögekből

$$OF = r \cdot \cos \varphi \text{ és } OF = OP \cdot \cos \angle POF.$$

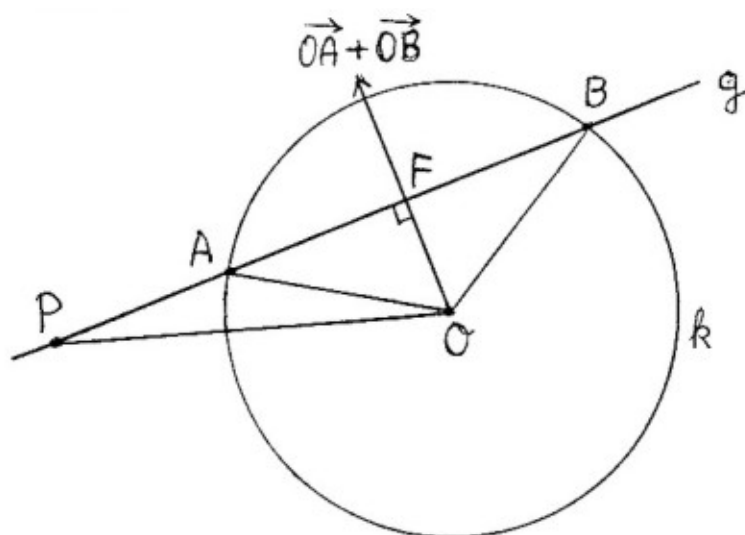
Minthogy $\|\vec{OA}\| = \|\vec{OB}\| = r$, ezért $(\vec{OA} + \vec{OB}) \perp \vec{AB}$ és

$$\|\vec{OA} + \vec{OB}\| = 2 \cdot OF. \text{ Ennélfogva}$$

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = (\vec{OA} - \vec{OP}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OP}) = \vec{OA} \cdot \vec{OB} - (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{OP} + \vec{OP}^2,$$

ahonnan a skaláris szorzás értelmezését, valamint a tételbeli feltételeket és a $\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$ azonosságot felhasználva

$$\begin{aligned}\vec{PA} \cdot \vec{PB} &= \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cdot \cos 2\varphi - \|\vec{OA} + \vec{OB}\| \cdot \|\vec{OP}\| \cdot \cos \angle POF + \|\vec{OP}\|^2 = \\ &= r^2 \cdot (2 \cos^2 \varphi - 1) - 2 \cdot OF \cdot OF + OP^2 = \\ &= 2r^2 \cos^2 \varphi - r^2 - 2r^2 \cos^2 \varphi + OP^2 = OP^2 - r^2.\end{aligned}$$

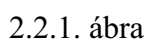


2.1.3. ábra

5.bizonyítás (2.1.4.ábra)

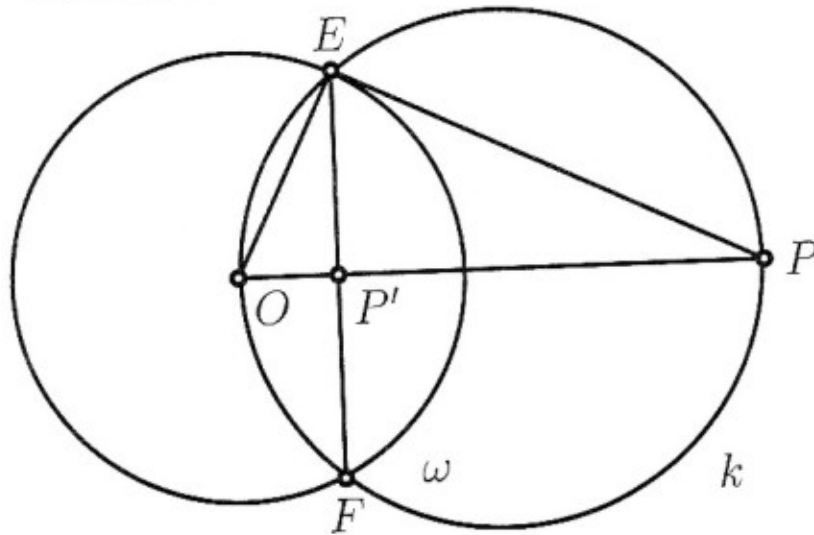
Ha bevezetjük az $\overrightarrow{OP} \cap k = \{C, D\}$ jelölést, akkor $\overrightarrow{OF} \perp g$,
valamint $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OC}$ és $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} = 2 \cdot \overrightarrow{OF}$ miatt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} + (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{PB} = \\ &= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD}) + \overrightarrow{PB} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OC}) + 2 \cdot \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{OF} = \\ &= \overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{OC}^2 = OP^2 - r^2. \end{aligned}$$



Továbbá $\overline{BD} \parallel \overline{CP}$ miatt $OP : OB = OC : OD$, ahonnan $OD = OP'$ és $OB = OC = a$ alapján $OP \cdot OP' = a^2$

Az $\overline{OP}$ szakasz fölé rajzolt k Thalész-kör messe az ω alapkört E és F pontokban, amelyek összekötő egyenese az $\overrightarrow{OP}$ félegyenest P' pontban metszi.



2.2.2. ábra

A k kör megrajzolásával kapott E és F pontok összekötő szakasza az ω körnek $\overline{OP}$ -re merőleges húrja, s ezért P' az $\overline{OP}$ félegyenesnek ω körön belüli pontja. Az OPE derékszögű háromszögből a befogótétel alapján $OP \cdot OP' = OE^2 = a^2$ következik.

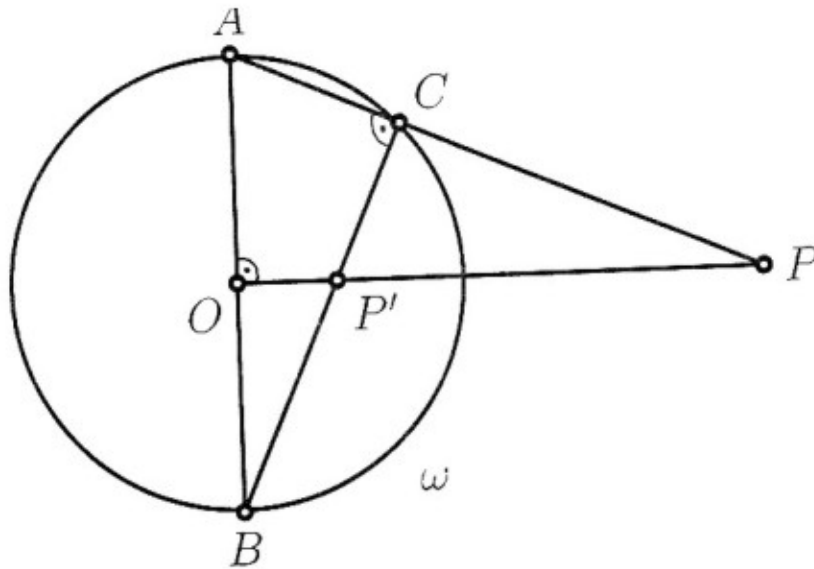
Minthogy a k Thalész-kör áthalad az O póluson, valamint E és F fixpontok, ezért k' azonos az $\overleftrightarrow{EF}$ egyenessel. Ennek alapján viszont a k kör az O és P pontokon áthaladó tetszőleges kör lehet. Ugyanis a $k \cap \omega = \{E, F\}$ jelöléseket megtartva az inverzió illeszkedéstartó tulajdonsága szerint $P' \in k' = \overleftrightarrow{EF}$ és $P' \in \overline{OP}$ miatt $P' = \overleftrightarrow{EF} \cap \overline{OP}$. Ekkor a befogótétel szerepét az OPE és OEP' háromszögek hasonlósága veszi át, amiből $OP \cdot OP' = a^2$ kapható.

3. szerkesztés (2.2.3. ábra)

Az $\overline{OP}$ félegyenesre O -ban állított merőleges messe az ω alapkört A és B pontokban. Legyen $\text{int } \overline{AP} \cap \omega = C$, és ekkor $\overline{BC} \cap \overline{OP} = P'$.

Minthogy A és C az $\overline{OP}$ egyenes azonos, viszont A és B az ellentétes oldalán van, ezért $\overline{BC}$ szakasz metszi az $\overline{OP}$ egyenest az $\overline{AB}$ egyenes C -t tartalmazó oldalán. Ez a P' metszéspont $O \in \overline{AB}$ és $C \in \text{int } \overline{AP}$ miatt az $\overline{OP}$ félegyenesen van, de csakis az ω körön belül

lehet, mivel $\overline{BC}$ szakasz az ω húrja. Ezután a PAO és $BP'O$ háromszögek hasonlósága miatt $OP \cdot OP' = a^2$ is igaz.



2.2.3. ábra

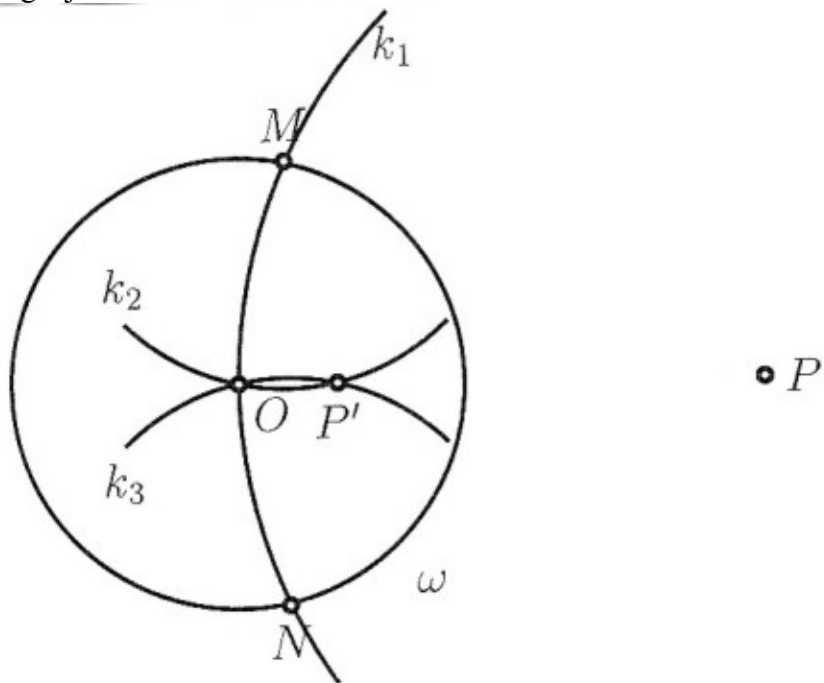
Észrevehető, hogy az ABC derékszögű háromszög $\overline{AB}$ oldalának felezőmerőlegese a P és P' inverz pontpárban metszi az $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ egyenest. Megmutatható, hogy ez az állítás tetszőleges háromszögre teljesül, s ezáltal a fenti szerkesztésben az $O \in \overline{AB}$ feltétel nem szükséges.

4. szerkesztés (2.2.4. ábra)

A $k_1(P, OP)$ kör az ω alapkört M és N pontokban metszi. A $k_2(M, a)$ és $k_3(N, a)$ körök áthaladnak az O ponton és metszik egymást még egy $P' \neq O$ pontban.

A szerkesztési előírás miatt az O, P és P' pontok illeszkednek az $\overline{MN}$ szakasz felezőmerőlegesére: tehát $P' \in \overline{OP}$ egyenes teljesül. $P' \in \overline{OP}$ félegyenes pedig azért áll fenn, mert a konstrukció szerint M és N a k_1 körhöz O -ban húzható érintőnek a P -t tartalmazó oldalán vannak. Az OPM és OMP' egyenlőszárú háromszögek $\overline{OM}$ és $\overline{OP'}$ alapjain az O -nál lévő szög közös, ezért a két háromszög hasonló, s emiatt $OP \cdot OP' = a^2$ is teljesül.

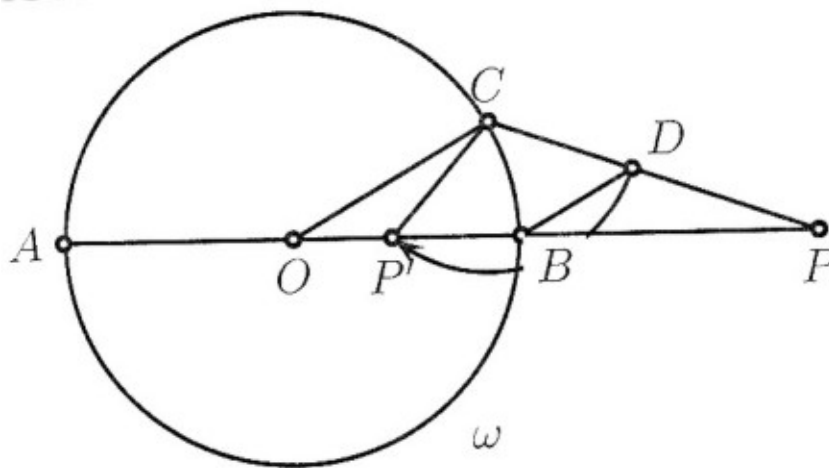
Minthogy $\overline{OP'}$ az OMP' és ONP' egyenlőszárú háromszögek közös alapja, ezért az $\overline{MN}$ egyenesre vonatkozó tükrözés során O képe P' . Ez a tény a kör középpontjának inverzére vonatkozó általános tételből is adódik. Ennélfogva az M és N pontok megszerkesztése után k_2 és k_3 körök megrajzolása elhagyható, amennyiben a vonalzó használatát is megengedjük.



2.2.4. ábra

5. szerkesztés (2.2.5. ábra)

Legyen $\overline{OP} \cap \omega = \{A, B\}$, $C \in \omega \setminus \{A, B\}$ és D a $\overline{CP}$ szakasz olyan pontja, amelyre $CD = CP'$. Ekkor $P \leftrightarrow P'$ miatt az OPC és OCP' háromszögek hasonlóak, amiből $\frac{OP}{OB} = \frac{OP}{OC} = \frac{CP}{CP'} = \frac{CP}{CD}$, ezért $\overline{BD} \parallel \overline{OC}$.



2.2.5. ábra

A szerkesztés kivitelezésekor az A és B pontok előállítását, valamint a C pont kijelölése után megrajzoljuk a $\overline{CP}$ szakaszt, amit a B ponton át $\overline{OC}$ -vel párhuzamosan húzott egyenes egy D belső pontban metsz. Ezt a D pontot C körül elforgatjuk az $\overline{OB}$ szakaszra: a kapott pont lesz P' .

6. szerkesztés (2.2.6. ábra)

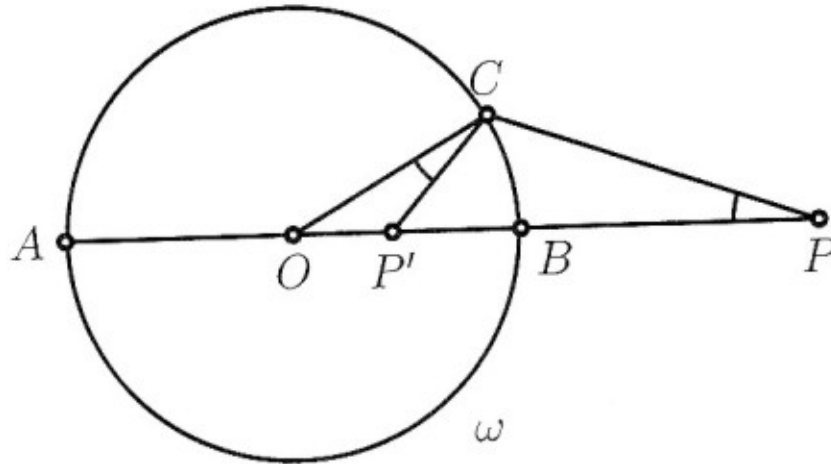
Ha $\overrightarrow{OP} \cap \omega = \{A, B\}$, akkor $P \leftrightarrow P'$ miatt a P pont ω körre vonatkozó hatványára.

$$PA \cdot PB = OP^2 - a^2 = OP^2 - OP \cdot OP' = OP(OP - OP') = OP \cdot PP',$$

amiből a $\overline{PP'}$ szakasz megszerkeszthető.

7. szerkesztés (2.2.7. ábra)

Legyen $\overrightarrow{OP} \cap \omega = \{A, B\}$ és $C \in \omega \setminus \{A, B\}$. Ekkor $P \leftrightarrow P'$ miatt az OPC és OCP' háromszögek hasonlóságából következik az $OPC\angle = OCP'\angle$ egyenlőség.



2.2.7. ábra

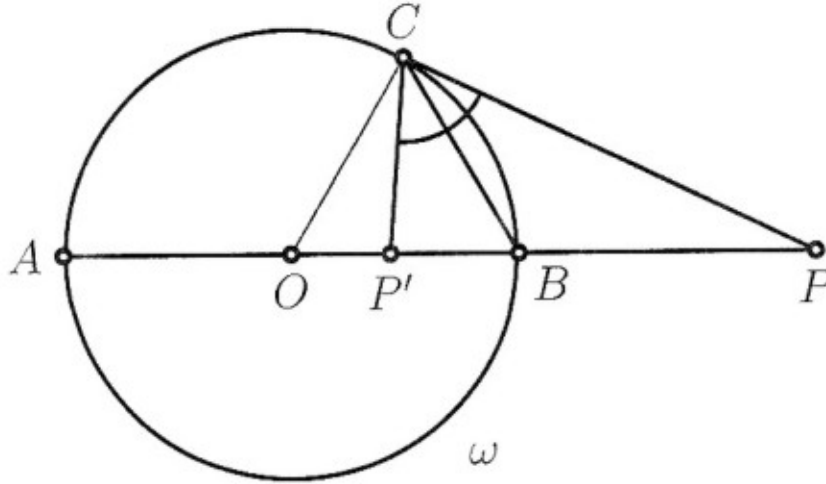
A C pont felvétele után csak az $OPC\angle$ -et kell átmásolni az $\overrightarrow{OC}$ egyenes A -t nem tartalmazó oldalára, s az így kapott szög $\overrightarrow{CO}$ -tól különböző szára az $\overrightarrow{OP}$ félegyenest a kívánt P' pontban metszi.

Ez a P' pont az $\overline{OB}$ szakasz belső pontja, minthogy $OCP'\angle = OPC\angle \angle OBC\angle = OCB\angle$. Továbbá az OPC és OCP' háromszögek hasonlóak, mivel az O -nál lévő szög közös és $OPC\angle = OCP'\angle$. E hasonlóságból pedig $OP \cdot OP' = a^2$ adódik.

8. szerkesztés (2.2.8. ábra)

Legyen $\overrightarrow{OP} \cap \omega = \{A, B\}$ és $C \in \omega \setminus \{A, B\}$. Ekkor $P \leftrightarrow P'$, $B' = B$ és $C' = C$ miatt

$\frac{P'B}{BP} = \frac{a^2}{OB \cdot OP}$ és $\frac{P'C}{CP} = \frac{a^2}{OC \cdot OP}$, azaz $\frac{P'B}{BP} = \frac{P'C}{CP}$, s ennél fogva $\overrightarrow{CB}$ félegyenest a PCP' $\angle$ felezője.



2.2.8. ábra

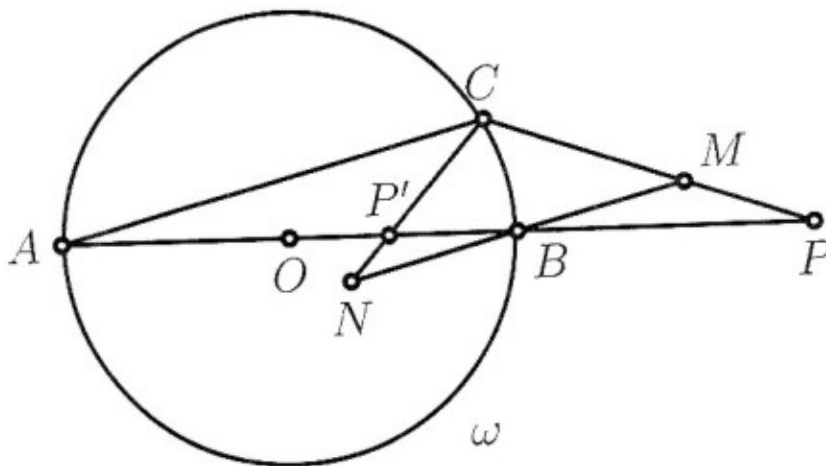
A C pont felvétele után a $\overrightarrow{CP}$ félegyenest tükrözzük $\overrightarrow{BC}$ egyenesre, s a tükrökép az $\overrightarrow{OP}$ félegyenest a P' pontban metszi. Ez a P' pont az $\overrightarrow{OB}$ szakasznak megint belső pontja, minthogy $P'CB\angle = PCB\angle$ ($OBC\angle = OCB\angle$). A $\overrightarrow{CB}$ szögfelezőre vonatkozó arányossági tétel szerint $\frac{P'B}{BP} = \frac{P'C}{PC}$, ahonnan a $\frac{P'B}{BP} = \frac{a - OP'}{OP - a}$ és $\frac{P'C}{PC} = \frac{a^2}{OC - OP}$ összefüggések alapján $OP \cdot OP' = a^2$.

9. szerkesztés (2.2.9. ábra)

Legyen $\overrightarrow{OP} \cap \omega = \{A, B\}$ és $C \in \omega \setminus \{A, B\}$. Ekkor $P \leftrightarrow P'$, $A' = A$ és $B' = B$ miatt

ahonnan

s ennél fogva P' az A, B, P pontokhoz tartozó harmonikus negyedik.

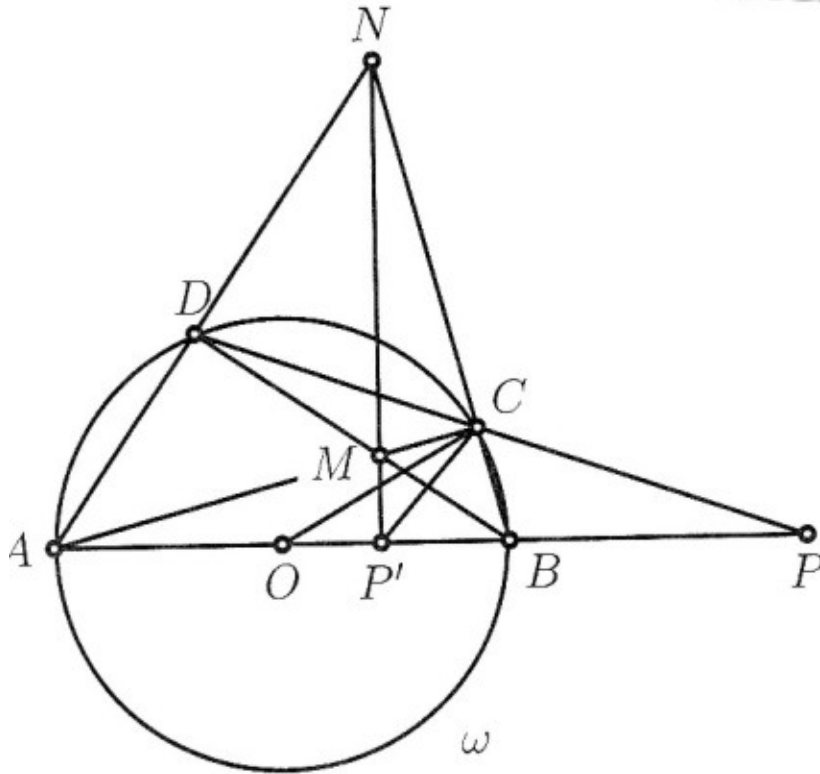


2.2.9. ábra

Az A , B és C pontok előállítását követően megrajzoljuk az $\overline{AC}$ és $\overline{CP}$ szakaszt, majd a B ponton át párhuzamost húzunk $\overline{AC}$ -vel, ami $\overline{CP}$ -t egy M belső pontban metszi. Ha az M pont B -re vonatkozó tükörképe N , akkor $\overline{CN}$ szakasz az $\overrightarrow{OP}$ félegyenest a P' pontban metszi. $\overline{MN} \parallel \overline{AC} \perp \overline{BC}$ miatt $\overrightarrow{CN}$ egybeesik $\overrightarrow{CM}$ -nek a $\overrightarrow{BC}$ egyenesre vonatkozó tükörképével, s ezért a 8.szerkesztés indoklásával azonos módon belátható, hogy P' az $\overline{OB}$ belső pontja. A konstrukció miatt teljesülnek az $ACP\Delta \sim BMP\Delta$ és $ACP'\Delta \sim BNP'\Delta$ hasonlóságok, s emiatt az $\frac{AC}{BM} = \frac{AP}{BP}$ és $\frac{AC}{AP'} = \frac{BN}{BP'}$ arányok is, ahonnan $|BM| = |BN|$ miatt $OP \cdot OP' = a^2$ következik.

10. szerkesztés (2.2.10. ábra)

Legyen $\overrightarrow{OP} \cap \omega = \{A, B\}, C \in \omega \setminus \{A, B\}$ és $\overrightarrow{PC} \cap \omega = \{C, D\}$.
Ekkor $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD} = M$ és $\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BC} = N$ esetén $\overrightarrow{MN} \cap \overrightarrow{OP} = P'$.



2.2.10. ábra

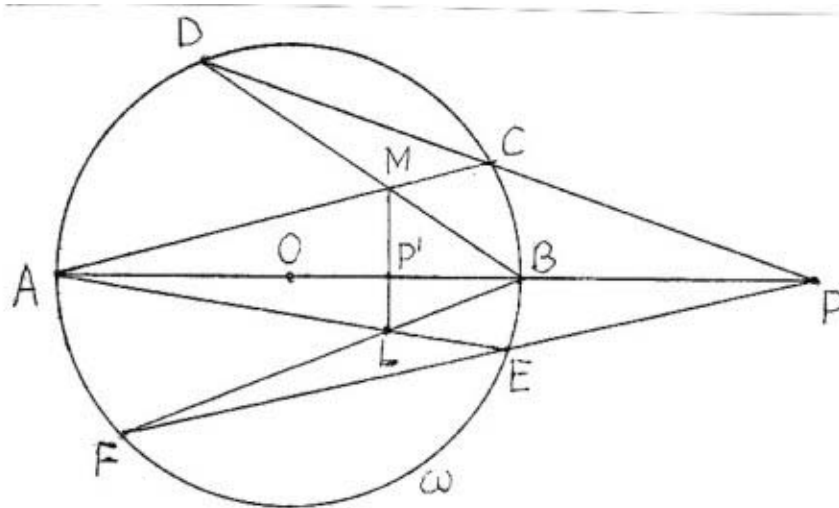
Az ABN háromszögben az $\overline{AC} \perp \overline{BN}$ és $\overline{BD} \perp \overline{AN}$ miatt M a magasságpont, s ezért P' az $\overline{AB}$ oldalhoz tartozó magasság talppontja, ami $AN \rangle BN$ miatt az $\overline{OB}$ belső pontja. Az $AN \rangle BN$ pedig azért igaz, mivel $d(C, \overline{AB}) < d(D, \overline{AB})$. Az $OP \cdot OP' = a^2$ összefüggés az OPC és $OP'P$ háromszögek hasonlóságából következik. Ugyanis e két háromszögben az O -nál lévő szög közös, továbbá a Thalész-tétel, a kerületi- és külsőszögekre, valamint a húrnégyszög szögeire vonatkozó tétel alapján

$$\begin{aligned} OCP' \angle &= ACP' \angle - ACO \angle = MCP' \angle - OAC \angle = MBP' \angle - BAC \angle = \\ &= BDC \angle + BPC \angle - BAC \angle = BDC \angle - BAC \angle + OPC \angle = OPC \angle. \end{aligned}$$

Ha a fenti hosszadalmas elemi geometriai indoklás helyett projektív geometriai utat választunk, akkor mindez azonnal adódik a pólus-poláris kapcsolatból ([7] 253. oldal., [8] 211. oldal).

11. szerkesztés (2.2.11. ábra)

Az előbbi egyélű vonalzos szerkesztés az A, B, C, D és M pontok előállítását után úgy is folytatható, hogy az ω körhöz P -ből egy újabb $\overleftrightarrow{EF}$ szelőt húzunk, majd az $L = \overline{AE} \cap \overline{BF}$ pontot megszerkesztve $\overline{ML} \cap \overline{OP} = P'$.

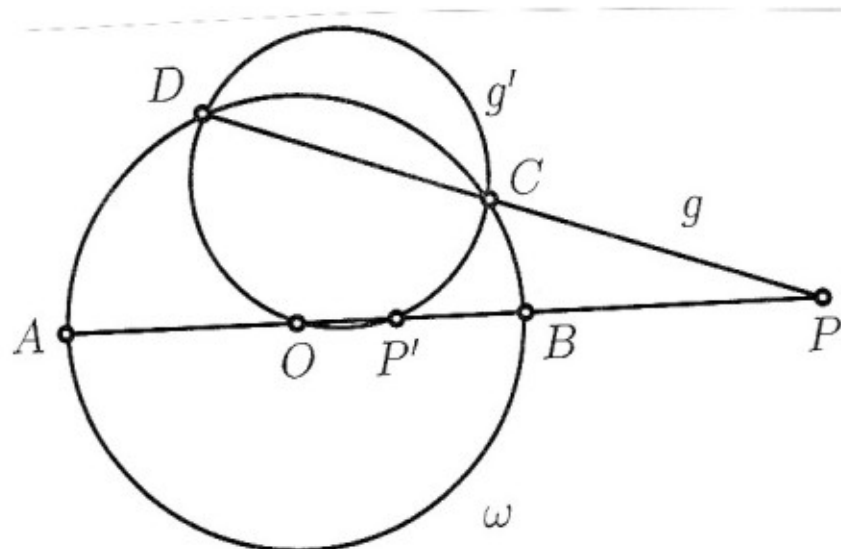


2.2.11. ábra

$\overline{ML} \perp \overline{OP}$ miatt a derékszögű vonalzó használatát is megengedve további változat adódik.

12. szerkesztés (2.2.12. ábra)

Legyen $\overline{OP} \cap \omega = \{A, B\}$, $C \in \omega \setminus \{A, B\}$, $g = \overline{CP}$ és $g \cap \omega = \{C, D\}$. Minthogy a P pontot tartalmazó g egyenes nem halad át az O centrumon, ezért g' az O, C, D pontokra illeszkedő olyan kör, amely az inverzió illeszkedéstartó tulajdonsága miatt tartalmazza P' pontot. Viszont az inverzió értelmezése szerint $P' \in \overline{OP}$ is teljesül, azaz $P' \in g' \cap \overline{OP}$.



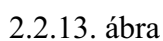
2.2.12. ábra

Az $\overrightarrow{OP}$ egyenes megrajzolása után meghúzzuk a P pontra illeszkedő g szelőt, ami az ω alapkört C és D pontokban metszi. A konstrukció előírásai szerint O, C és D három nem kollineáris pont, így az azokat tartalmazó g' kör egyértelműen megszerkeszthető, ami $d(C, \overline{AB}) \neq d(D, \overline{AB})$ miatt metszi az $\overrightarrow{OP}$ egyenest az O és P' különböző pontokban. Ez a P' pont az inverzió már említett tulajdonsága szerint a P pont ω körre vonatkozó inverze.

13. szerkesztés (2.2.13. ábra)

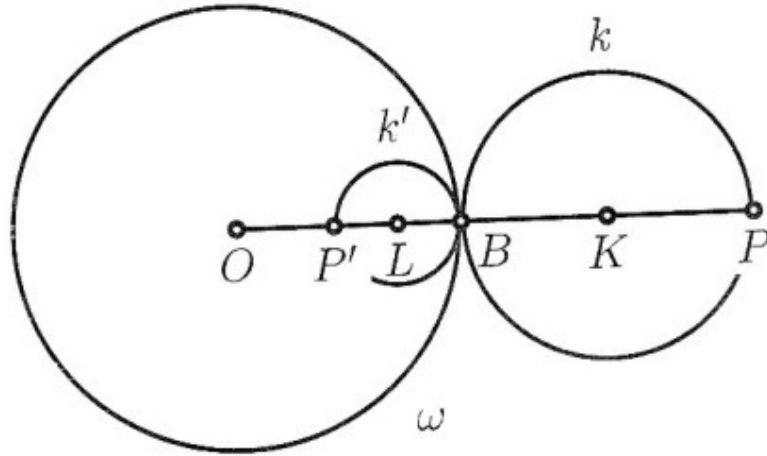
Legyen $\overrightarrow{OP} \cap \omega = \{A, B\}$, és használjuk fel az inverziónak azt a tulajdonságát, hogy $P \leftrightarrow P'$ miatt a P és P' pontokra illeszkedő tetszőleges k kör invariáns és merőlegesen metszi az ω alapkört, mondjuk C és D pontokban. Ekkor az illeszkedéstartás miatt $P' = \overrightarrow{OP} \cap k \setminus \{P\}$ teljesül.

Az ω alapkört merőlegesen metsző k invariáns kör K középpontja rajta van a $\overline{CP}$ szakasz felezőmerőlegesén és az $\overline{OC}$ sugárra C -ben állított merőlegesén. K ismeretében megrajzoljuk a k kört, ami az $\overrightarrow{OP}$ félegyenest az $\overline{OB}$ szakasz P' belső pontjában metszi.



14. szerkesztés (2.2.14. ábra)

114



2.2.14. ábra

A $\overline{BP'}$ szakasz a fenti arány alapján megszerkesztve $BP \setminus OP$ miatt az $\overline{OB}$ szakasznál rövidebb, s így P' az $\overline{OB}$ sugár belső pontja.

Ebből az ábrából kiindulva P' megszerkesztésére további lehetőségek kínálkoznak. Felhasználható, hogy a középpontos hasonlóságnál egy egyenes és képe párhuzamos. Így ha ezen hasonlóság során az $M \in k \setminus \{B, P\}$ és $N \in k' \setminus \{B, P\}$ egymásnak megfelelő pontok, továbbá K a k és $L \neq K'$ a k' kör középpontja, akkor a $\overline{PM}$ és $\overline{BN}$, illetve $\overline{KM}$ és $\overline{LN}$ egyenespárok párhuzamossága miatt a következő szerkesztési lépések vezetnek célhoz:

- vegyük fel az M pontot,
- rajzoljuk meg az $\overline{OM}$ egyenest,
- rajzoljuk meg az $\overline{PM}$ egyenest,
- húzzunk B ponton át párhuzamost $\overline{PM}$ -mel,
- ez a párhuzamos az $\overline{OM}$ egyenest N pontban metszi,
- húzzunk N ponton át párhuzamost $\overline{KM}$ -mel,
- ez a párhuzamos az $\overline{OP}$ félegyenest L pontban metszi,
- rajzoljuk meg az L középpontú LB sugarú k' kört,
- k' kör és $\overline{OP}$ félegyenes B -től különböző közös pontja P' .

Eljárhatunk persze ennél sokkal elegánsabban is, ha azt a tényt használjuk fel, hogy az O és B hasonlósági pontok harmonikusan osztják a

$\overline{KL}$ szakaszt. Ekkor az O , B és K pontokhoz kell megszerkeszteni az L harmonikus negyediket, ami a 9.szerkesztésnél láttak alapján már megoldható.

A fenti szerkesztések mindegyike elvégezhető az alapkörön belüli pont esetén is. Ehhez többnyire csak a szerkesztési lépések sorrendjét kell megfordítani. Kivételt képez azonban a csak körzővel elvégezhető 4.szerkesztés, ami $OP > \frac{a}{2}$ esetén változatlanul elvégezhető. Viszont

$OP = \frac{a}{2}$ esetén a P' pont az $\overline{OP}$ szakasz megkétszerezésével kapható,

míg $0 < OP < \frac{a}{2}$ esetén véges sok szakaszkétszerezést végrehajtva visszajutunk az első esetre.

Minthogy az $i(O, -a^2)$ inverzió mindig előállítható az $i(O, a^2)$ inverzió és az O centrumú tükrözés szorzataként, ezért a fenti szerkesztéseket felhasználva negatív hatványú inverzió esetén is tudunk képpontot szerkeszteni. Ugyanakkor negatív hatványra is léteznek önálló képpont szerkesztések, amelyekhez a magasságtétel felhasználásával, vagy pedig a 7. és 13. szerkesztési módok analóg alkalmazása révén juthatunk el.

A szerkesztésekhez szükséges ismeretek részletezésére itt nem térünk ki, hiszen elsődleges célunk a szerkesztések leírása volt. Az inverzió tulajdonságait részletesen tárgyalja a fentebb már említett két könyv [7, 8], de a téma szépsége miatt is vonzó lehet az inverzióhoz kapcsolódó gazdag forrásanyag [33, 38, 42, 44, 52, 53, 54, 61, 65, 66, 67].

2.3. Két kör hatványvonala

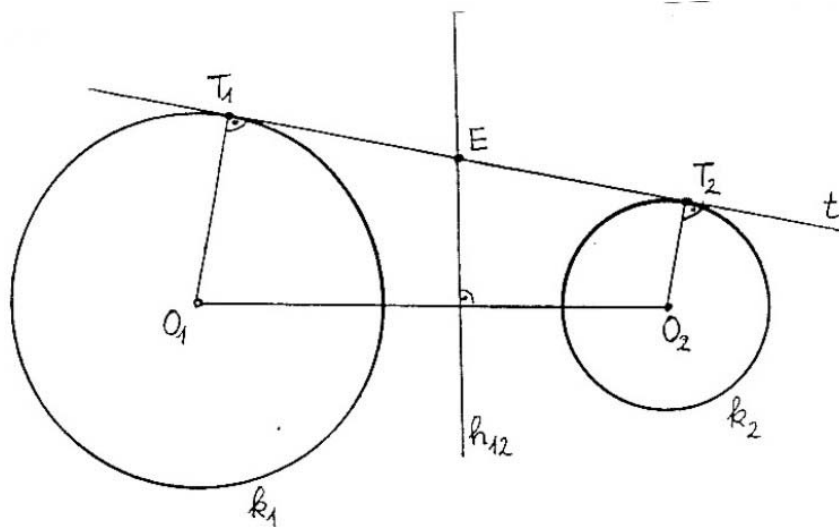
E fejezetben elsődleges célunk az, hogy közös pont nélküli két nem koncentrikus kör hatványvonalának előállítására különféle szerkesztési módokat mutassunk be, s ennél fogva a körgeometriai rész bevezetőjében már felsorolt alapismeretek részletes tárgyalására itt sem térünk ki [2, 7, 8, 33, 37].

A bevezető alapján egyszerűen megszerkeszthető két adott kör hatványvonala, ha már ismerjük annak valamely pontját, ahonnan a két kör középpontját összekötő egyenesre merőlegest állítva a keresett

hatványvonalat kapjuk. Ilyen pontnak választható két metsző kör bármelyik közös pontja, vagy két egymást érintő kör érintési pontja, vagy pedig két egybevágó kör középpontjait összekötő szakasznak a felezőpontja. Minthogy ezek az esetek így módon könnyen elintézhetők, ezért a továbbiakban csak olyan két nem koncentrikus körrel foglalkozunk, amelyek nem rendelkeznek közös ponttal és nem is egybevágók, sőt egyelőre még azt is feltételezzük a $k_1(O_1, r_1)$ és $k_2(O_2, r_2)$ körökről, hogy azokra az $O_1O_2 > r_1 + r_2$ és $r_1 > r_2$ feltételek is teljesülnek. Mindezek után következzenek a szerkesztési módok.

1. mód (2.3.1. ábra)

Legyen t a k_1 és k_2 körök egyik közös érintője, T_1 és T_2 az érintési pontok, valamint E a $\overline{T_1T_2}$ szakasz felezőpontja. Ekkor az $\overline{ET_1}$ és $\overline{ET_2}$ érintő szakaszok egyenlő hosszúak, azaz E -nek a k_1 és k_2 körökre vonatkozó hatványa egyenlő, s ennél fogva E rajta van a h_{12} hatványvonalon.



2.3.1. ábra

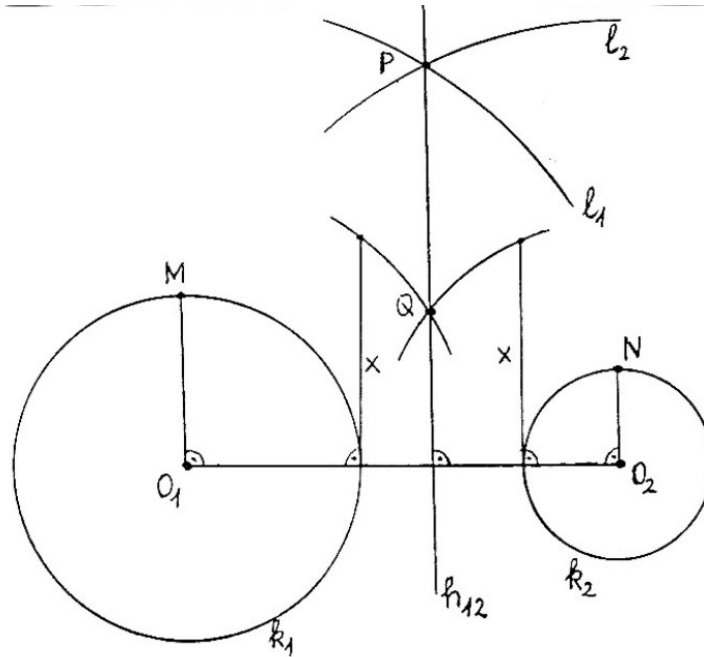
2. mód (2.3.2. ábra)

Legyenek $M \in k_1$ és $N \in k_2$ olyan pontok, amelyekre $\overrightarrow{O_1M} \perp \overrightarrow{O_1O_2}$ és $\overrightarrow{O_2N} \perp \overrightarrow{O_1O_2}$ teljesül, továbbá legyen P az $l_1(O_1, O_2M)$ és $l_2(O_2, O_1N)$

körök valamelyik metszéspontja. Ekkor P -nek a k_1 és k_2 körökre vonatkozó hatványa

$h_1(P) = O_2M^2 - r_1^2 = O_1O_2^2$ és $h_2(P) = O_1N^2 - r_2^2 = O_1O_2^2$, azaz $h_1(P) = h_2(P)$ miatt P rajta van a h_{12} hatványvonalon, ami egyúttal az l_1 és l_2 körök közös szelő egyenese.

Megjegyezhető, hogy $O_2M > r_1$ és $O_1N > r_2$ miatt P kívül van az adott k_1 és k_2 körökön, s ezért P -ből a körökhöz húzható érintőszakaszok hossza O_1O_2 -vel egyenlő. Ezen érintőszakaszok hossza másként is megválasztható: valamely $x > 0$ valós szám pontosan akkor megengedett, ha $\sqrt{r_1^2 + x^2} + \sqrt{r_2^2 + x^2} \geq O_1O_2$ teljesül.



2.3.2. ábra

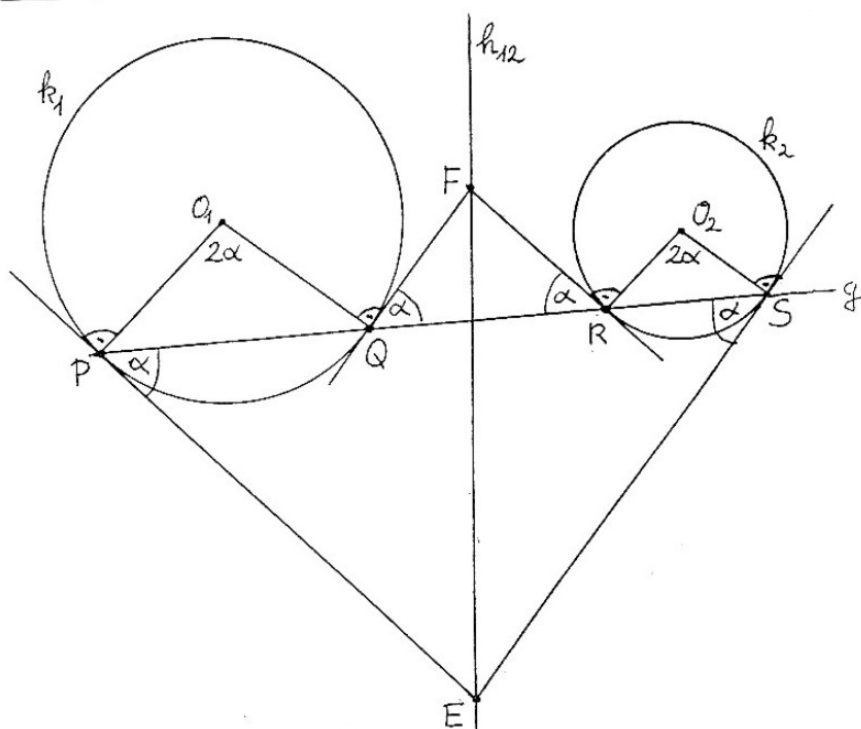
3. mód (2.3.3. ábra)

Legyen $g \neq \overleftrightarrow{O_1O_2}$ olyan egyenes, amelyre $g \cap (k_1 \cup k_2) = \{P, Q, R, S\}$ úgy, hogy a $P-Q-R-S$ elrendezés, valamint $\overline{O_1P} \parallel \overline{O_2R}$ is teljesüljön. Ha P -ben k_1 -hez és S -ben k_2 -hez érintőket húzunk, akkor azok egy E pontban metszik egymást, és a

keletkező EPS háromszög egyenlőszárú, melynek $\overline{PS}$ az alapja. Ekkor $EP = ES$ miatt E -nek k_1 és k_2 körökre vonatkozó hatványa egyenlő, azaz $E \in h_{12}$.

A Q és R pontban hasonló módon húzott érintők F metszéspontja szintén eleme h_{12} -nek.

A legnagyobb problémát g egyenes megszerkesztése jelentheti. Ehhez úgy kell felvenni például a $Q \in k_1$ pontot, hogy az $\overrightarrow{O_1Q}$ félegyenessel O_2 -ből párhuzamosan húzott azonos irányú félegyenés úgy messe k_2 kört az S pontban, hogy $\overrightarrow{QS}$ egyenes a k_1 és k_2 körök közös szelője legyen. Egyébként g áthalad a k_1 és k_2 körök O külső hasonlósági pontján, de ezt nem kell kihasználni.



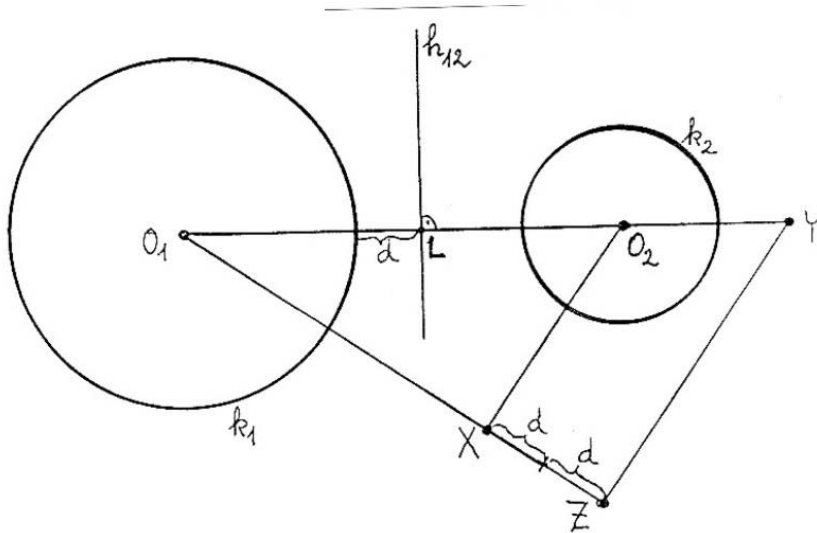
2.3.3. ábra

4. mód (2.3.4. ábra)

Jelölje L az $\overline{O_1O_2}$ és h_{12} egyenesek metszéspontját, c az $\overline{O_1O_2}$ szakasz hosszát, továbbá d az L és k_1 távolságát. Ekkor $O_1L = r_1 + d$ és $O_2L = c - (r_1 + d)$, valamint az $L \in h_{12}$ miatt fennálló

$O_1L^2 - r_1^2 = O_2L^2 - r_2^2$ egyenlőségből a $c : (c - r_1 + r_2) = (c - r_1 - r_2) : 2d$ arány kapható. Ebből megszerkeszthető a $2d$ hosszúságú szakasz, s ezáltal az $\overrightarrow{O_1O_2}$ egyenesen lévő L pont is.

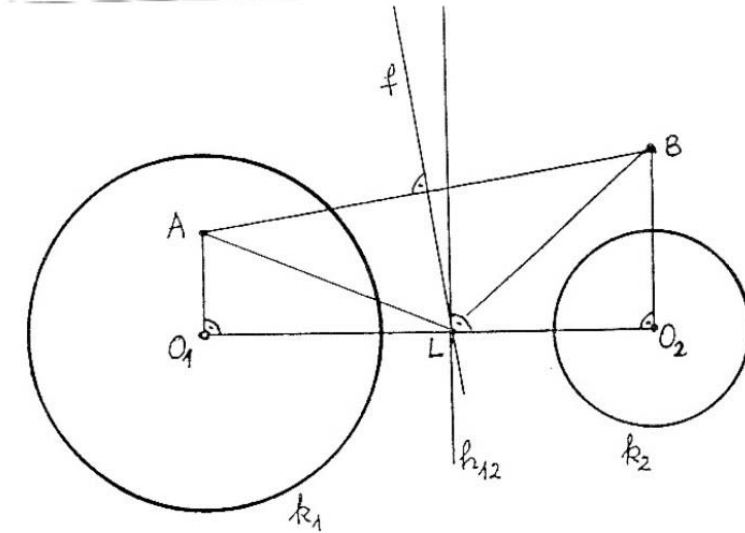
Az X pontra $O_1X = c - r_1 + r_2$, az Y pontra $O_2Y = c - r_1 - r_2$, továbbá $\overline{YZ} \parallel \overline{O_2X}$ és $XZ = 2d$.



2.3.4. ábra

5. mód (2.3.5. ábra)

Legyen A és B az $\overrightarrow{O_1O_2}$ egyenes ugyanazon oldalán lévő két pont úgy, hogy $\overrightarrow{O_1A} \perp \overrightarrow{O_1O_2}$, $\overrightarrow{O_2B} \perp \overrightarrow{O_1O_2}$, $O_1A = r_2$ és $O_2B = r_1$ teljesüljön. Ekkor az $\overline{AB}$ szakasz f felezőmerőlegese az $\overrightarrow{O_1O_2}$ egyenest egy $L \in h_{12}$ pontban metszi.



2.3.5. ábra

Ugyanis $L \in f$ miatt $AL=BL$, s ennél fogva az ALO_1 és BLO_2 derékszögű háromszögekből

$$AL^2 = AO_1^2 + O_1L^2 = r_1^2 + O_1L^2$$

$$BL^2 = BO_2^2 + O_2L^2 = r_2^2 + O_2L^2 ,$$

ahonnan $O_1L^2 - r_1^2 = O_2L^2 - r_2^2 \Rightarrow L \in h_{12}$.

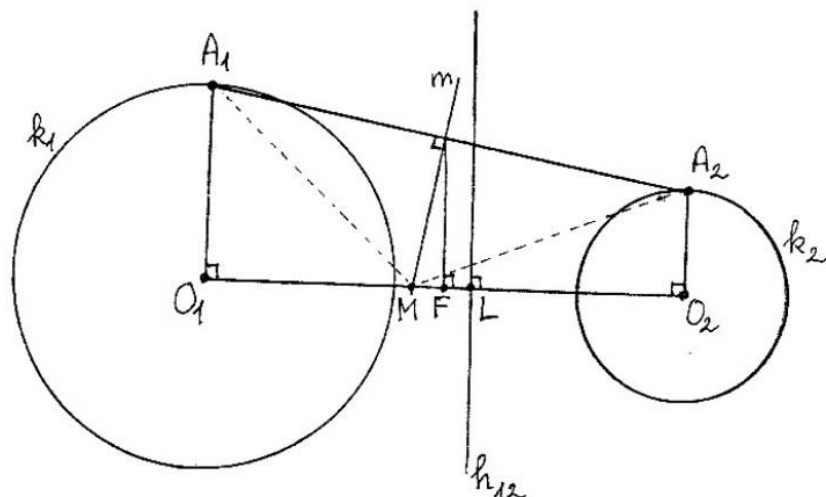
6. mód (2.3.6. ábra)

Legyenek $\overline{O_1A_1}$ és $\overline{O_2A_2}$ a k_1 és k_2 köröknek az $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ centrálisra merőleges és egyirányú sugarai. Az $\overline{A_1A_2}$ szakasz m felezőmerőlegese messe az centrális egyenest egy M pontban, s ennek az $\overline{O_1O_2}$ szakasz F felezőpontjára vonatkozó tükörképét jelölje L (KöMal F.2052-es feladata, 1977, 1.szám, 10. oldal). Ekkor egyrészt a tükrözés miatt $O_1L=O_2M$, másrészt $M \in m$ miatt $A_1M=A_2M$. Ezek alapján az A_1MO_1 és A_2MO_2 derékszögű háromszögekből

$$A_1M^2 = A_1O_1^2 + O_1M^2 = r_1^2 + O_2L^2$$

$$A_2M^2 = A_2O_2^2 + O_2M^2 = r_2^2 + O_1L^2 ,$$

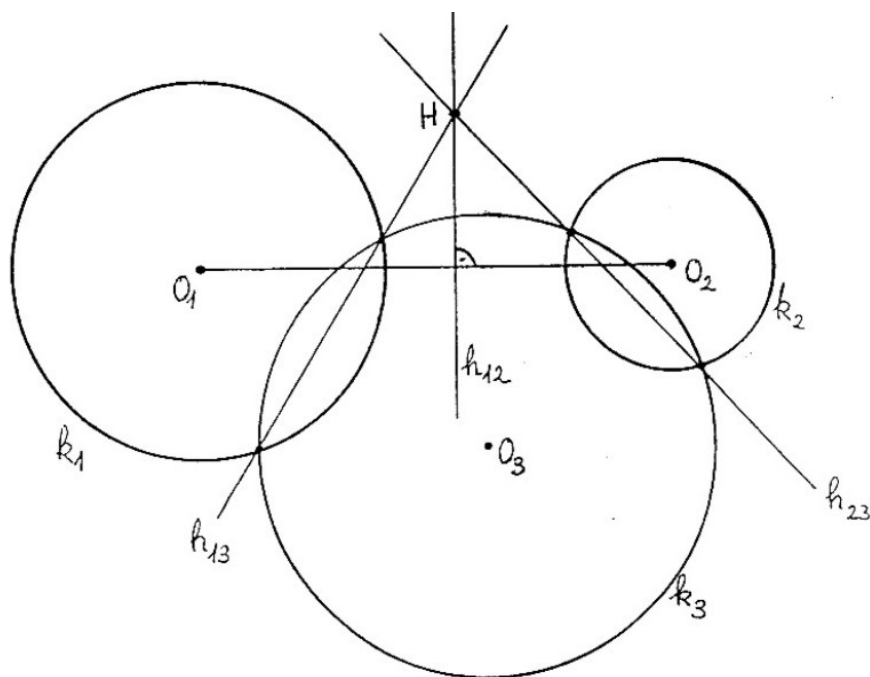
ahonnan $O_1L^2 - r_1^2 = O_2L^2 - r_2^2 \Rightarrow L \in h_{12}$.



2.3.6. ábra

7. mód (2.3.7. ábra)

Rajzoljunk meg egy $O_3 \notin \overleftrightarrow{O_1O_2}$ középpontú k_3 kört úgy, hogy az a k_1 kört a P, Q és a k_2 kört az R, S pontokban messe. Ekkor a $\overleftrightarrow{PQ}$ és $\overleftrightarrow{RS}$ hatványvonalak metszéspontja a k_1, k_2, k_3 körök H hatványpontja, s ezért $H \in h_{12}$.

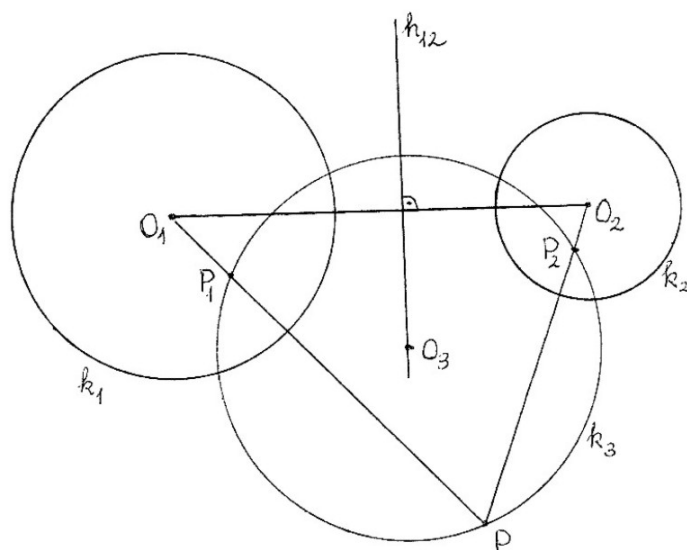


2.3.7. ábra

8. mód (2.3.8. ábra)

Legyen P a k_1 és k_2 körök síkjának egy olyan pontja, amely nem illeszkedik az $\overline{O_1O_2}$ egyenesre. A k_1 és k_2 körökre vonatkozó inverzió során jelölje P képét P_1 és P_2 . Ha $P \notin \overline{P_1P_2}$, akkor megrajzolható egy $k_3(P_1P_2)$ kör, amely k_1 és k_2 köröket merőlegesen metszi, s ennél fogva a k_3 kör O_3 középpontja rajta van a h_{12} hatványvonalon.

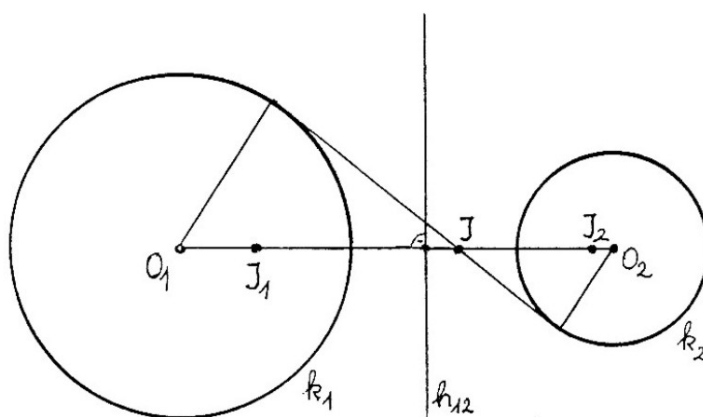
A k_3 kör megrajzolása könnyebb, ha olyan P pontot választunk, amelyre $P \in (k_1 \setminus \overline{O_1O_2})$. Ugyanis ekkor $P_1 \equiv P$ a k_1 és k_3 körök érintési pontja.



2.3.8. ábra

9. mód (2.3.9. ábra)

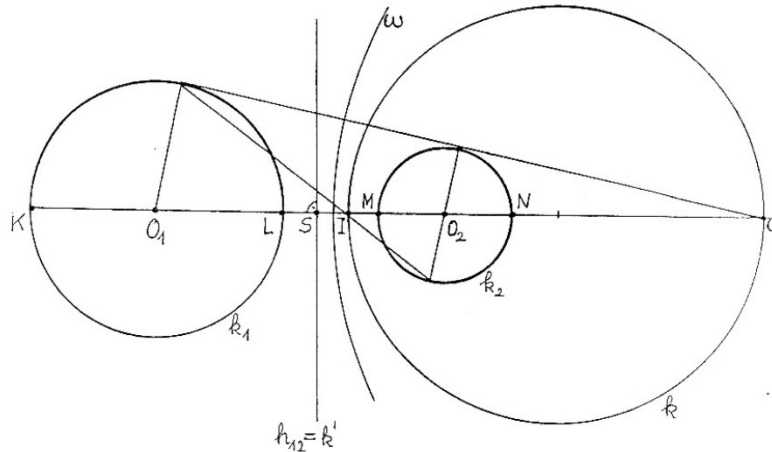
Jelölje a k_1 és k_2 körök belső hasonlósági pontját I , valamint I -nek a k_1 és k_2 körökre vonatkozó inverzét I_1 és I_2 . Ekkor az $\overline{I_1 I_2}$ szakasz felezőmerőlegese a keresett h_{12} hatványvonal. Hasonlóképpen választható az O külső hasonlósági pont, vagy az $\overline{OI}$ átmérőjű hasonlósági körvonal bármely pontja.



2.3.9 ábra

10. mód (2.3.10. ábra)

Jelölje I és O a k_1 és k_2 körök belső és külső hasonlósági pontját, továbbá legyen $\overrightarrow{O_1O_2} \cap (k_1 \cup k_2) = \{K, L, M, N\}$, ahol a $K-L-M-N$ elrendezés teljesül. Válasszuk az O centrumú $a^2 = OL \cdot OM$ hatványú inverziót, amelynek alapköre az $\omega(O, a)$ kör. Ekkor az $\overline{OI}$ átmérőjű k kör k' inverze azonos a k_1 és k_2 körök h_{12} hatványvonalával.

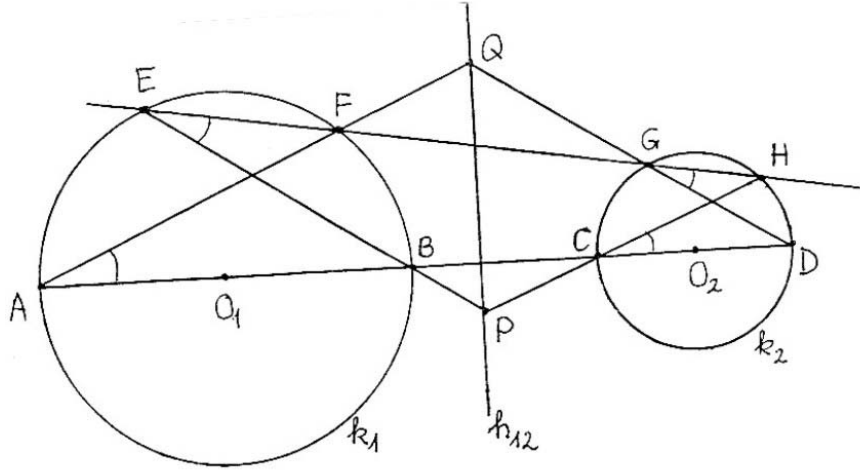


2.3.10. ábra

Az $\omega(O, a)$ kör könnyebben megszerkeszthető, ha felhasználjuk, hogy ω merőleges az $\overline{LM}$ és $\overline{KN}$ átmérőjű körökre.

11. mód (2.3.11. ábra)

Legyen $\overrightarrow{O_1O_2} \cap (k_1 \cup k_2) = \{A, B, C, D\}$ úgy, hogy az $A-O_1-B-C-O_2-D$ elrendezés álljon fenn. Ha $\overline{O_1F}$ és $\overline{O_2H}$ egyező állású sugarak, akkor egyrészt $AO_1F\Delta \sim CO_2H\Delta$, másrészt az $\overline{FH}$ egyenest a k_1 és k_2 körök közös szelőjének választva a másik metszéspontot jelölje E , illetve G . Ekkor $\angle BEF = \angle BAF = \angle DCH$ miatt a $BCHE$ négyszög húrnégyszög, amelynek körülírt körére vonatkozóan a $P = \overline{BE} \cap \overline{CH}$ pont hatványát kétféleképpen megadva $PB \cdot PE = PC \cdot PH$, amiből viszont $h_1(P) = h_2(P)$ következik, azaz $P \in h_{12}$.



2.3.11. ábra

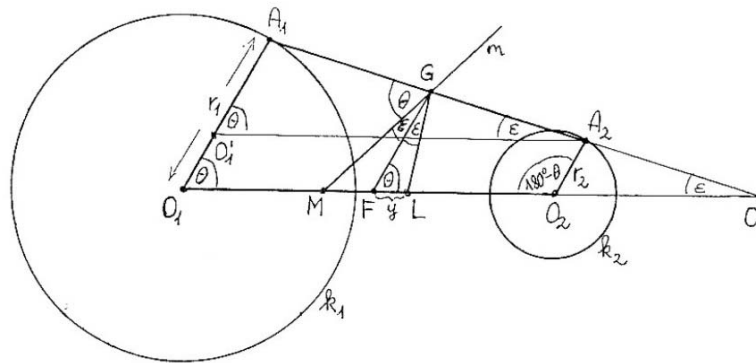
Ugyanilyen módon kapható, hogy az $AFGD$ négyszög is húrnégyszög, és így a $Q = \overrightarrow{AF} \cap \overrightarrow{DG}$ pont is rajta van a h_{12} hatványvonalon.

A hatványvonal szerkesztésére bemutatott fenti módok nem a szerkesztési lépéseket tartalmazzák, hanem egy-egy elemzést, amelynek alapján a hatványvonal valamely pontja (vagy pontjai) megszerkeszthető(k). Az adott elemzésből a szerkesztési lépések kiolvashatók.

Az első két szerkesztési mód korlátozott, míg a többi általános érvényességű. Az 1. mód nyilvánvalóan csak akkor alkalmazható, ha a k_1 és k_2 köröknek van két közös külső érintője, azaz ha $c > r_1 - r_2$ teljesül. A 2. mód megítélése már nem ilyen egyszerű, mivel az csak $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ esetén ad megoldást, viszont az l_1 és l_2 körök sugarai az adatok (r_1 , r_2 , c és x) függvényében változnak. Ugyanakkor az $x=c$ választás nem csupán a bemutatott $c > r_1 + r_2$ esetben célravezető, hanem még $c \geq r_1 - r_2$ esetén is, amikor $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ mindig teljesül. Ha ellenben $c < r_1 - r_2$, akkor valamely $x > 0$ valós szám csak $\sqrt{r_1^2 + x^2} - \sqrt{r_2^2 + x^2} \leq c$ esetén megengedett.

Végezetül foglalkozunk még az adott szerkesztési módok általánosításával, amire leginkább az 5. és 6. mód esetén kínálkozik lehetőség. Tekintsük elsőként a 6. szerkesztés alábbi általánosítását ([27]).

Legyen $\theta \in (0^\circ, 180^\circ)$ az $\overline{O_1A_1}$ és $\overline{O_2A_2}$ párhuzamos és egyirányú sugaraknak az $\overline{O_1O_2}$ egyenessel bezárt szöge, F az $\overline{O_1O_2}$ és G az $\overline{A_1A_2}$ szakasz felezőpontja. A G ponton áthaladó m egyenes messe $\overline{O_1O_2}$ -t egy M pontban úgy, hogy $A_1GM\angle = \theta$ teljesüljön. Továbbá m -nek az $\overline{FG}$ egyenesre vonatkozó tükörképe messe $\overline{O_1O_2}$ -t egy L pontban. Ekkor állítjuk, hogy $L \in h_{12}$ (2.3.12. ábra)



2.3.12. ábra

Ez az általánosítás lehetséges, mivel $\theta = O_2FG\angle < A_1GF\angle$ miatt M az $\overline{FO_1}$ és L pedig az $\overline{FO_2}$ félegyenes belső pontja. A szerkesztés során keletkező L pontra $L \in h_{12}$ pontosan $O_1L^2 - r_1^2 = O_2L^2 - r_2^2$ esetén teljesül, ahonnan $O_1L = O_1F + FL = \frac{c}{2} + y$ és $O_2L = O_2F - FL = \frac{c}{2} - y$

helyettesítéssel $y = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2c}$ kapható. Ha tehát sikerül megmutatni, hogy

ez az összefüggés jó, akkor készen is vagyunk a fenti általánosításban leírt szerkesztés helyességének igazolásával. Ehhez előbb előállítjuk az $O = \overline{O_1O_2} \cap \overline{A_1A_2}$ pontot, majd az FGM és OGM háromszögekre a külső szögre vonatkozó tételt felhasználva $GOM\angle = \theta - FMG\angle = \theta - (\theta - \varepsilon) = \varepsilon$. Ennélfogva, ha az A_2 ponton át

húzott párhuzamos és az $\overline{O_1A_1}$ sugár metszéspontját O_1' -vel jelöljük, akkor a kapott $A_1A_2O_1'$ háromszög hasonló az LGF háromszöghöz, minthogy két-két megfelelő szögük egybevágó. Ezen hasonlóság alapján fennáll az $O_1'A_2 : O_1'A_1 = FG : FL$ arány, ahonnan $O_1'A_2 = c$, $O_1'A_1 = r_1 - r_2$ és $FG = \frac{r_1 + r_2}{2}$ miatt $y = FL = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2c}$ kapható.

Az 5. szerkesztési mód általánosítása hasonlóképpen történhet, miközben kihasználható a két mód közötti szimmetria.

3. MÓDSZERTANI ELEMZÉS

3.0. Az elemzés tárgya

Az értekezés első részében tárgyalt „A háromszög szögfelezőinek hossza” című témakörhöz kapcsolódva az alábbiakban leírunk egy felmérést és annak részletes elemzését, amelyben vizsgálni kívánjuk a fenti témakörbeli probléma megértésének és megoldásának, valamint a közben felhasznált ismeretek alkalmazásának szintjeit.

Ezáltal a kitűzött feladatra adott megoldások értékelésével egyrészt feltérképezzük a kapcsolódó matematikai anyag oktatásának eredményességét, különös tekintettel a matematikai gondolkodás három fő területét képező megértésre, problémamegoldásra és az ismeretek alkalmazására, másrészt jobban megismerjük a matematika tanításában rejlő gondolkodásfejlesztő lehetőségeket, rámutatunk a tanulók gondolkodásában előforduló hiányosságokra, s mindezek ismeretében egyfajta cselekvési tervet is készíthetünk a hatékonyabb tanítás céljából.

A megértéshez elsődlegesen szükséges az, hogy a tanulók képesek legyenek bizonyos formális gondolkodási műveletek (analízis, szintézis, absztrahálás, konkretizálás, rendezés, rendszerezés, összefüggések feltárása, lényegkiemelés, ítéletalkotás) elvégzésére. Az analízis során valamit részekre bontunk, s az egyes részeket külön-külön elemezzük abból a célból, hogy a lényeges jegyek kiemelkedjenek és összefüggésükben mutakozzanak meg. Az ismeretszerzés analízissel kezdődő fázisának befejező része a szintézis, amikor az analízis révén kapott eredményeket ismét egységes egésszé rakjuk össze. Az absztrahálás során kiemeljük és általánosítjuk a leglényegesebb tulajdonságokat, s ezáltal elkülönítjük a lényegest a lényegtelenről. A konkretizálás során viszont az általánosból vonatkoztatunk egy meghatározott esetre, azaz problémamegoldást csak ismert helyzetben végzünk. Valamely új dolog csak úgy érthető meg, ha azt a már meglévő ismereteink bonyolult rendszerébe sikerül beépíteni: ehhez szükséges a rendezés és a rendszerezés, ami által új ismeretre teszünk szert, s ennek alapja az összefüggések feltárása, miközben lényegkiemelés révén megszabadulunk az új fogalomhoz nem tartozó ismérvektől. Az ítéletalkotás akkor jelentkezik a gondolkodásunkban, amikor már elegendő információval rendelkezünk ahhoz, hogy az adott ismeret belsővé váljon.

A megértés sokszor jóval nagyobb problémát jelent, mint valamely megtalált eljárásnak a végrehajtása. Megértés nélkül nincs problémamegoldás, s ennél fogva egy probléma megoldásához is

nagyrészt a megértésnél felsorolt gondolkodási műveletek szükségesek, továbbá a specializálás és általánosítás, az analógia és a bizonyítás. Egy adott feladatot többnyire általánosan is megvizsgálhatunk, amihez előbb összegezzük a feladatbeli objektumok lényeges tulajdonságait és az előforduló törvényszerűségeket, majd azokat megpróbáljuk átvinni más hasonló objektumokra is. Ez az ismeretszerzés egyik legfontosabb mozzanata.

Az analógiának közvetítő szerepe van a külső világ felismerése és bizonyos gondolkodási műveletek között. Az analógia két matematikai objektum között akkor lehetséges, ha azok egymásnak megfelelő részekre bonthatók és a részek közötti kapcsolatok megegyeznek. Az analógiát azzal a céllal használjuk, hogy hatásosan elősegítsük az ismeretszerzés folyamatában a felismerést, s ezáltal az ismeretek rögzítését. A tanulók számára az egyik legnehezebb probléma a bizonyítás. Ehhez a feltételek rendszeréből jól kell kiválasztani a szükséges, az elégséges, avagy a szükséges és elégséges feltételt, aminek megállapítása többszörösen összetett gondolkodási műveletrendszer meglétét feltételezi. A matematika tanításának egyik folyamati célja a megszerzett ismeretek gyakorlatban történő alkalmazása, aminek a több gondolkodási művelet meglétére épülő értelmes tanulás az előfeltétele.

3.1. A felmérés alapjai

Az általános háromszög szögfelezőjének hosszára vonatkozó ismert formulának a bizonyítása utolsó feladatként szerepelt a 2001. május 21-én délutánra kitűzött matematika írásbeli érettségi-felvételi feladatsorban.

Feladat: Egy háromszög oldalainak hossza a , b , c . Mutassa meg, hogy az

a és b oldalak által közbezárt szögfelező hossza:
$$\frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

Ez a feladat két okból is a nevezett feladatsor legnehezebb feladatának tartható: egyrészt nem egyszerűen számításos, hanem direkt bizonyításos jellegű, jóllehet némi könnyítést jelenthetett a bizonyítandó formula megadása, másrészt a háromszög szögfelezőjének hossza a középiskolai matematika anyagában eléggé mellőzött téma, bár éppen ezért a bizonyítás elvégzése nem válhatott reprodukív folyamattá. A fenti feladathoz kapcsolódva módszertani felmérést végeztem a Debreceni Egyetem Közgazdaságtudományi Karára jelentkezők hozzáférhető felvételi dolgozatai alapján. A felméréshez a fentebb már említett három

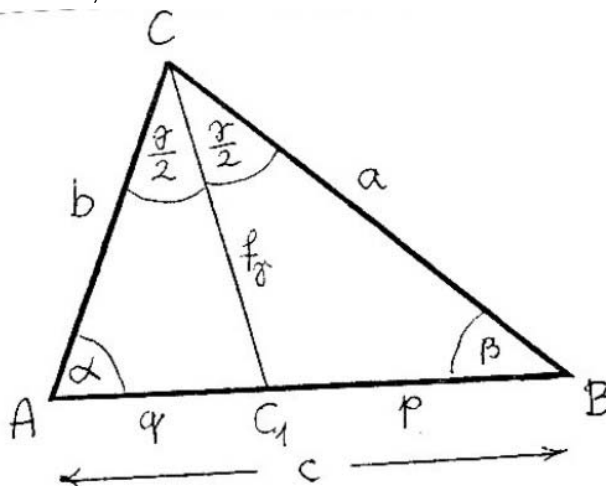
terület (problémamegértés, problémamegoldás, ismeretek alkalmazása) mérése céljából a következő itemsort állítottam össze:

1. Hozzákezd a feladathoz.
2. Van értékelhető a munkájában.
3. Készít ábrát.
4. Helyes ábrát készít.
5. Jelöléseket jól alkalmazza.
6. Az alapábrát kiegészíti.
7. Az adott kiegészítés felhasználható valamely megoldáshoz.
8. Az ábra általános háromszögre utal.
9. Ismeri a szögfelező fogalmát.
10. Ismeri a szögfelezőre vonatkozó arányossági tételt.
11. Minden más felhasznált fogalom vagy tétel ismerete helyes.
12. Minden más felhasznált tétel alkalmazása helyes.
13. A bizonyítás lépéseit indokolja.
14. Teljesen és hibátlanul megoldotta a feladatot.
15. Az adott megoldás általános.
16. A bizonyítandóból indul ki, de nem jut megoldásra.

Ezen itemsor konkrét működésére egy példaként tekintsük a központilag kiadott alábbi első megoldási változatot.

Megoldás:

Legyen a C -nél lévő szög γ , a szögfelező $\overline{AB}$ -vel közös pontja C_1 és a $\overline{CC_1}$ szakasz hossza f_γ .



Az ACC_I háromszög területe $\frac{bf_\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$, a BCC_I háromszögé $\frac{af_\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.

Ezek összege az ABC háromszög területével egyenlő

$$\frac{bf_\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{af_\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{ab}{2} \sin \gamma.$$

Mivel $\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$, ezért $\sin \frac{\gamma}{2}$ -vel osztva mindkét oldalt

($\sin \frac{\gamma}{2} \neq 0$):

$$(a+b)f_\gamma = 2ab \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Ebből $ab \neq 0$ miatt

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{a+b}{2ab} f_\gamma.$$

Írjuk fel az ABC háromszögre a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

amelyből

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Helyettesítsük ezt és a $\cos \frac{\gamma}{2}$ -re kapott kifejezést a $2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 1 + \cos \gamma$ egyenlőségbe:

$$2 \left(\frac{a+b}{2ab} f_\gamma \right)^2 = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ebből

$$\frac{(a+b)^2}{ab} f_\gamma^2 = 2ab + a^2 + b^2 - c^2,$$

azaz

$$f_\gamma^2 = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}.$$

Mivel f_γ pozitív, ezért

$$f_\gamma = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

E megoldásból az alábbi konkrét itemsor adódik:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0

A feladat megoldása után kövessük végig a megoldás fejlődésének menetét, azaz a megoldás felfedezése során kialakuló gondolatok láncolatát [57]. Felfedezni a megoldást annyit jelent, mint megtalálni az összefüggést a rendelkezésre álló adatok és az ismeretlen között. A megoldó a feladat első felvázolásakor még nagyon egyszerű képet alkot, osztatlan és összetett egészként látja a háromszöget és a kijelölt belső szög felezőjét, szinte minden további részlet nélkül, s csak annyit tud, hogy mi az ismeretlen valamint mik az adatok és a feltételek. A megoldó figyelmét kezdetben hol az egyik, hol a másik részlet vonja magára, de egy idő után ez a figyelem szelektálni kezd, vagyis nem törődik tovább a probléma szempontjából lényegtelen dolgokkal, viszont megragadja mindazt, aminek jelentősége van vagy lehet. A megoldó igen fontos tennivalója, hogy figyelmét az elérendő célra összpontosítsa, azt a megoldás közben soha ne veszítse szem elől, vagyis állandóan figyelje a végét. Erre a végcélra irányuló vágy az, ami megváltoztatja a megoldó egész gondolkodását, ezáltal a problémát sajátjának érzi, s a megoldás akarása a probléma lényeges részévé válik.

A problémamegoldó értelmi működése összetett, s amint előrejut, egyre több és több anyagot gyűjt össze. Elsőként azt nézi meg, hogy mivel rendelkezik: mi az ismeretlen és mik az adatok. Jelenlegi feladata éppen az, hogy kitöltse a közöttük meglévő űrt, vagyis bebizonyítsa a megadott összefüggést. Ehhez alaposan szemügyre veszi az ismeretlent: ez egy szakasz hossza, aminek meghatározására több ötlet is kínálkozhat. Talán ki kellene egészíteni úgy az ábrát, hogy ez a szakasz egy derékszögű háromszög valamelyik oldala legyen. Ilyen kiegészítés viszonylag egyszerűen adódik a felezett szög csúcsából kiinduló magasság berajzolása révén, ámde ezáltal két másik ismeretlen szakasz is belép. S mivel az újabb ismeretleneknek az adatokkal történő közvetlen meghatározása túl hosszadalmasnak látszik, így ez az irány mégsem a legcélszerűbb. A megoldó éppen ezért nem indul el ezen az úton, hanem másikkal próbálkozik. Egy ismeretlen szakasz meghatározásának további szokásos módja, hogy e szakaszt valamely oldalként tartalmazó hasonló háromszögeket keresünk, de általános háromszöget tekintve az alapábrán nem fedezhető fel két hasonló háromszög. Talán alkalmas kiegészítéssel adódna erre lehetőség, ám ha a megoldó nem akarja kiegészíteni az ábrát,

akkor vissza kell térnie az ismeretlen szakasz értelmezéséhez vagy annak valamely ismert tulajdonságához. Értelmezés szerint a szögfelező a felezett szöget két egyenlő részre osztja, s bár ezáltal első pillanatra megint két ismeretlen van: egy szög és a fele, de a megoldó mégis azt reméli, hogy ebben az irányban haladva közelebb juthat a célhoz. Most már csak a döntő gondolatra van szüksége, ami általában nem kívánságra jön, hanem többnyire spontán ötlik fel, és megváltoztathatja a megoldónak a feladatról való elképzelését. A megoldó tehát még egyszer megnézi az ismeretlent, s rádöbben arra, hogy ez a szögfelező szakasz az eredeti háromszöget két diszjunkt háromszögre vágja szét. Így az ismeretlen szakasz új jelentést kap: közös oldala lesz két olyan háromszögnek, melynek területe célszerűen kifejezhető két oldal és a közrefogott szög segítségével. A terület additivitása miatt pedig ezen két részháromszög területeinek összege egyenlő az eredeti háromszög területével, amit most szintén a két oldal és a közrefogott szög segítségével érdemes kifejezni. Ezáltal a megoldó összefüggést talált az ismeretlen és bizonyos adatok közt, bár ez még egyáltalán nem a végcél, mivel tartalmaz nem kívánt segédismeretlent, és ugyanakkor nincs benne mindegyik adat. Mégis ez lehet a döntő gondolat, aminek felötlése után a megoldó egyre több kapcsolatot lát meg. Innentől kezdve az előrehaladás üteme felgyorsul, sőt már a megoldás közelsége is élénken érezhető. A megoldó észreveszi a kétszeres szögek szinuszára vonatkozó azonosság alkalmazási lehetőségét, a koszinusz-tétel révén bevonja a megoldásba az eddig kimaradt harmadik oldalt, majd a félszögek koszinuszára vonatkozó azonosságot alkalmazva olyan összefüggéshez jut, amelyben már csak az ismeretlen és az adatok szerepelnek, s ebből az ismeretlen kifejezésével célba is ér: a bizonyítás kész.

Mint minden bizonyítás, ez is érvek és következtetések viszonylag nem túl hosszú lánc, de ha csak egyetlen láncszem is hiányozna, akkor megszakadna az érvek láncolata, s a bizonyítás nem állná ki a próbát. Az a tény pedig, hogy a megoldó az ismeretlen értelmezését használta fel és az alapábrát nem egészítette ki, azért volt szerencsésnek tartható, mert társult e folyamathoz egy döntő ötlet, aminek révén a cél elérhetővé vált. Egy másik megoldás kezdetén megtehető, hogy az ismeretlenek továbbra is az értelmezését használjuk fel, vagy pedig valamilyen lényeges tulajdonságát. Mindkét eset tovább kombinálható egy-egy alkalmas kiegészítéssel, ami többnyire újabb szakasz és csak nagyon ritkán körív. A megoldáshoz elvezető logikai összefüggések rendszere, s ezáltal a döntő gondolat is lényegesen eltérő lehet. Az így előálló különböző megoldások közül az tekinthető egyszerűbbnek, amihez kevesebb háttérismeretre van szükségünk, jóllehet mélyebb matematikai tételek birtokában rövidebb és elegánsabb megoldás is adható.

A Debreceni Egyetem Közgazdaságtudományi Karára 2001-ben jelentkezők felvételi dolgozataiból a fenti itemsort használva összeálló adathalmazt a függelék tartalmazza. Ennek alapján az itemsor az összes vizsgált (182 fő) valamint a felvett (113 fő) és a fel nem vett (69 fő) jelentkezők viszonylatában az 1. táblázatbeli eloszlást adta

Item	Összes jelentkező		Felvett jelentkezők		Fel nem vett jelentkezők	
	fő	%	fő	%	fő	%
1	145	79,7	94	83,2	51	73,9
2	141	77,5	91	80,5	50	72,5
3	144	79,1	93	82,3	51	73,9
4	134	73,6	87	76,9	47	68,1
5	125	68,7	82	72,6	43	62,3
6	98	53,8	62	54,9	36	52,2
7	74	40,7	50	44,2	24	34,8
8	142	78,0	92	81,4	50	72,5
9	140	76,9	90	79,6	50	72,5
10	76	41,8	51	45,1	25	36,2
11	82	45,1	58	51,3	24	34,8
12	64	35,2	46	40,7	18	26,1
13	11	6,0	10	8,8	1	0,9
14	6	3,3	5	4,4	1	0,9
15	139	76,4	89	78,8	50	72,5
16	28	15,4	1	0,9	0	0,0

1. táblázat

Ezt az itemsort elfogadva a probléma megértését és megoldását, valamint a tételek alkalmazását mérő itemek az alábbi módon listázhatók.

A megértést mérő itemek

- problémaérzékenység: 1, 2, 3, 4.
- analízis, szintézis: 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11.
- absztrahálás, konkretizálás: 9, 6, 8, 11, 12, 15.
- rendezés, rendszerezés: 3, 4, 5, 14.
- összefüggések feltárása: 5, 7, 10, 11, 12, 13.
- lényegkiemelés: 4, 5, 9, 10.
- ítéletalkotás: 9, 10, 13, 14, 16.

A problémamegoldást mérő itemek

- problémaérzékenység: 1, 2, 3, 4.
- analízis, szintézis: 1, 4, 5, 9, 10, 11.
- absztrahálás, konkretizálás: 7, 8, 9, 12, 13, 14.
- specializálás, általánosítás: 5, 8, 10, 15.
- rendezés, rendszerezés: 3, 4, 5, 14.
- analógia: 9, 10.
- összefüggések feltárása: 4, 5, 6, 7, 10, 13.
- lényegkiemelés: 4, 7, 9, 11, 14.
- bizonyítás: 4, 13, 14, 16.

Az alkalmazást mérő itemek

- specializálás, általánosítás: 4, 5, 8, 15.
- kiegészítés: 4, 6, 7, 11.
- ítéletalkotás: 9, 10, 11, 14.
- bizonyítás: 4, 13, 14, 16.
- transzferálás: 11, 12.
- kidolgozottság, tervezés: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15.

Az 1. táblázat alapján azonos bontásban (összesen vizsgált, felvett, fel nem vett jelentkezők) az adott probléma megértési, megoldási és alkalmazási szintjeire a 2., 3. és 4. táblázatbeli értékeket kaptuk, amelyek átlagait az 1. grafikon (A = fel nem vett, B = összes, C = felvett jelentkezők) szemlélteti.

Összesen vizsgált jelentkező 182 fő	Megértés		Problémamegoldás		Alkalmazás	
	pont	%	pont	%	pont	%
Problémaérzékenység	564	77	564	77		
Analízis-szintézis	944	65	702	64		
Absztrah.-konkretizálás	665	61	437	40		
Rendezés, rendszerezés	409	56	409	56		
Összefüggések feltárása	432	40	518	47		
Lényegkiemelés	481	53	436	48		
Ítéletalkotás	261	29			304	42
Specializálás,általánosítás			482	66	540	74
Analógia			216	59		
Bizonyítás			179	21	179	21
Kiegészítés					388	53
Transzferálás					146	40
Kidolgozottság, tervezés					651	45
Összesen	3756	54	3943	53	2208	45

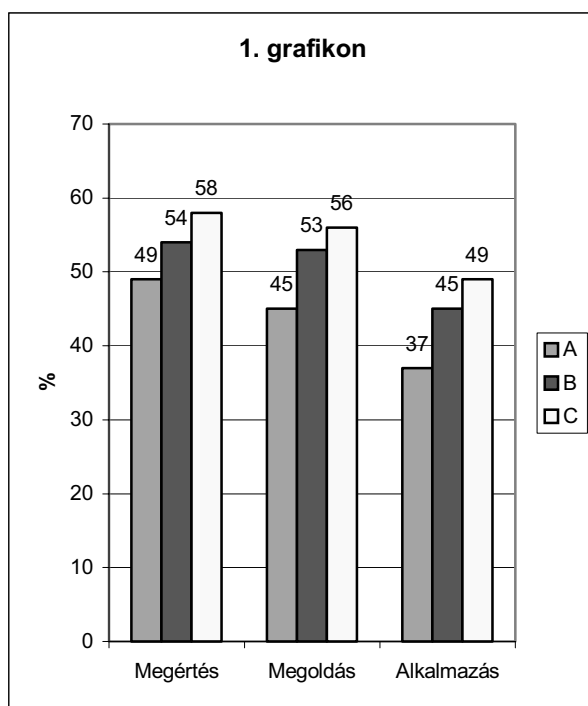
2. táblázat

Felvett jelentkezők 113 fő	Megértés		Problémamegoldás		Alkalmazás	
	pont	%	pont	%	pont	%
Problémaérzékenység	365	81	365	81		
Analízis-szintézis	617	68	462	68		
Absztrah.- konkretizálás	437	64	293	43		
Rendezés, rendszerezés	267	59	267	59		
Összefüggések feltárása	297	44	342	50		
Lényegkiemelés	315	56	290	51		
Ítéletalkotás	157	32			204	45
Specializálás, általánosítás			314	69	350	77
Analógia			141	62		
Bizonyítás			103	23	103	23
Kiegészítés					257	57
Transzferálás					104	46
Kidolgozottság,tervezés					431	48
Összesen	2455	58	2577	56	1449	49

3. táblázat

Fel nem vett jelentkezők 69 fő	Megértés		Problémamegoldás		Alkalmazás	
	pont	%	pont	%	pont	%
Problémaérzékenység	199	72	199	72		
Analízis-szintézis	327	59	240	57		
Absztrah.-konkretizálás	228	55	144	35		
Rendezés, rendszerezés	142	51	142	51		
Összefüggések feltárása	135	33	176	43		
Lényegkiemelés	166	48	147	42		
Ítéletalkotás	77	22			100	36
Specializálás,általánosítás			168	61	190	69
Analógia			75	22		
Bizonyítás			49	18	49	18
Kiegészítés					131	47
Transzferálás					42	12
Kidolgozottság,tervezés					220	40
Összesen	1274	49	1340	45	732	37

4. táblázat



3.2. A felmérés elemzése

Az összesen vizsgált, továbbá ezen belül a felvett és fel nem vett jelentkezők esetében kapott azonos irányú mérési eredmények között csupán néhány százalékos eltérést kaptunk, ami egyenletes és elég erős motiváltságra utal, s minden bizonnyal a nagy megmérettetést jelentő felvételi vizsgából is adódik.

A továbbiakban részletesen elemezzük a probléma megértésének, megoldásának, valamint a felhasznált tételek alkalmazásának szintjeit mérő azon eredményeket, amelyek a vizsgálatba bevont összes felvételiző esetén adódtak.

Megértés

Az összesen vizsgált jelentkezőknél mért 54 %-os átlag elfogadható. A probléma-érzékenység átlagosan 77 %, ami összefügg azzal, hogy a felvételizők 80 %-a hozzákezd a feladathoz, és 77 %-nak van is értékelhető munkájában. Ez azzal kezdődik, hogy 74 % helyes ábrát készít, 69 % a jelöléseket is helyesen alkalmazza. S bár a szögfelező fogalmát 77 % ismeri, de a szögfelezőre vonatkozó arányossági tételt, ami alapvető fontosságú lenne a megoldáshoz, már csak 42 %. Ennélfogva az sem meglepő, hogy a további összefüggések feltárása már 40 %-ra csökken. Ez a tény utalhat a felvételizők matematikai ismereteinek, avagy bizonyos gondolkodási műveleteknek a hiányosságára. A 65 %-os analízis- szintézis, a 61 %-os absztrahálás-konkretizálás és a 32 %-os ítéletalkotás mind arra utalnak, hogy a felvételizők többsége rendelkezik ugyan a probléma megértéséhez szükséges alapismeretekkel, de a többszörösen összetett gondolkodási műveletek elvégzésével már viszonylag kevesen tudnak megbirkózni.

Problémamegoldás

Ennek a gondolkodási területnek előfeltétele a megértés, viszont a problémamegoldás során a gondolkodási műveleteknek egy magasabb szintje jelentkezik, ahol a megértésnél szerzett információkat kell a feladat megoldásának szolgálatába állítani. Az elért százalékok azt jelentik, hogy a felvételizőknek a helyes megoldás irányába mutató lépései jók voltak, bár teljesen helyes megoldást csak 3 % adott. Ez nagymértékben összefügg a kitűzött feladattal, ami sajátos jellege miatt többszörösen nehéznek tartható. Először is bizonyítást tartalmazó feladatként a felvételizők számára eleve a legnehezebb, erre utal a bizonyításnál adódó 21 %. Másodszor ez a feladat tartalmilag az elemi geometria egy olyan részéhez kapcsolódik, amely a középiskolai matematikában kissé mellőzött, minthogy a háromszög belső szögfelezőjére vonatkozó

arányossági tételhez viszonylag kevés gyakorlási és alkalmazási lehetőség kínálkozik.

Az összetett gondolkodási műveleteknek a hiánya komolyan hátráltathatja az eredményes matematikai tevékenységet, különös tekintettel a bizonyítások igénylésére és véghezvitelére. Éppen ezért a matematika órákon egyrészt meg kell győzni a tanulókat arról, hogy az állításokat indokolni kell, másrészt arra kell törekednünk, hogy az állítások bizonyítását minél önállóbban végezzék.

Alkalmazás

Minden tantárgy oktatása során elsődleges célként fogadható el az, hogy a tanulóban alkalmazásra képes ismereteket kell kialakítanunk. Fokozottan érvényes ez a matematikára, amit általános segédtudományként tekinthetünk, s így nem önmagáért tanítjuk, hanem azért, hogy az itt szerzett ismeretek minden más tudományban felhasználhatók legyenek.

Az alkalmazás átlagosan 47 %-os, s ezen belül az ítéletalkotás 42 %-os, a bizonyítás 25 %-os, vagy a kidolgozottság és tervezés 45 %-os eredményei azt jelzik, hogy itt van a legtöbb tennivalónk. Hogy mi a teendő? El kell érnünk, hogy a matematika tanulásában az értelmes munka kapjon fő hangsúlyt, és nem a verbális ismeretszerzés.

A vizsgált feladatra adható sokféle megoldás arra utal, hogy az elvégzendő bizonyítás nem kizárólag egy bizonyos algoritmus értelem nélküli reprodukálását kívánja, hanem nyitott az ismereteit a legkülönbözőbb szituációkban is alkotó módon használni képes tanuló számára. Ugyanakkor el kell ismerni, hogy a feladat nehézségi szintje gátolhatta ennek az alkotó tevékenységnek a teljessé válását, ami abban nyilvánult meg, hogy bár 77 %-nak van értékelhető a munkájában, de csak 3 % tudott az ismereteit komplex módon alkalmazva átjutni az egymást követő részproblémákon. A többiek már az elkezdett bizonyítás első néhány lépése után elakadtak. A Pitagorasz-tételt alkalmazó 3 % nem juthatott teljesen célba, mivel csak egy vagy két alkalmas derékszögű háromszöget vett észre. Jól indult a szinusz- tételt valamilyen formában felíró 7 %, de azután nagy problémát okoz a félszögek vagy éppen a kétszeres szögek kezelése. Alig 3 % találja meg a félszögek koszinuszára a (középiskolai táblázatban is meglévő) megfelelő képletet, amiben újabb nehézséget jelent az, hogy mindezt a háromszög oldalaival kell kifejezni, ami egy koszinusz tétellel persze lehetséges lenne. A háromszög területének két oldal és a közbezárt szög segítségével történő meghatározását 6 %, a terület additivitását már csak 5 % alkalmazza. A nehezebbnek vélhető koszinusz-tételt jóval többen (42 %) használják, mivel alkalmas választással elkerülhetők a félszögek. Valamilyen más

tételt vagy képletet (pl. párhuzamos szelők tétele, Heron-képlet, a belső szögfelező hosszára vonatkozó ismert trigonometrikus összefüggés) csak 1-1 % használt fel. Az adott háromszög és az előírt belső szögfelező megrajzolásával adódó alapábra további kiegészítésével szinte egyáltalán nem próbálkoznak, ami persze nem tekinthető hibának, mivel a feladat csak az alapábrát használva is többféleképpen megoldható, sőt így még az is elkerülhető, hogy egy célszerűtlen kiegészítés révén biztos tévútra jussanak. Ámde ez mégsem fogadható el teljesen, minthogy a szögfelezőre vonatkozó arányossági tétel bizonyításához felhasznált kiegészítési mód a középiskolából ismert lehetne, s annak alapján akár a párhuzamos szelők tételével, akár hasonló háromszögekkel máris a cél közelébe lehet jutni.

Egyértelműen megállapítható tehát, hogy e feladat megoldása során a felvételizők számára a legnehezebb részproblémát a trigonometrikus összefüggések megfelelő alkalmazási képességének a hiánya jelenti, ami ismét oda vezet vissza, hogy nem tudják kezelni az összetett gondolkodási műveleteket.

3.3. A vizsgált feladathoz alkalmazható tételek

Az alábbiakban felsoroljuk a módszertani elemzésünk alapját képező felvételi feladat valamely megoldásához az 1.4. fejezetben általunk felhasznált tíz legfontosabb tételt, és egyúttal megvizsgáljuk, hogy azokat miként alkalmazták a felvételizők.

Minthogy a kitűzött feladat a háromszög egyik belső szögfelezője hosszának az oldalakkal történő meghatározását írta elő, ezért legtöbbször a felezett szöggel szemközti oldalon a szögfelező berajzolása révén keletkező két szakasz arányára vonatkozó tétel (T1), vagy az ennek alapján e két szakasz hosszaira adódó formulák alkalmazására volt lehetőség. Az adott háromszög és a kívánt szögfelező megrajzolása után előálló ún. alapábrán általános esetben nincs derékszögű háromszög, s ennél fogva a Pitagorasz-tétel (T2) csak a felezett szög csúcsából kiinduló magasság berajzolását követően alkalmazható. Ekkor viszont két újabb ismeretlen szakasz is keletkezik, ezért e tétel háromszori alkalmazására van szükség. A szögfelező szakasz az adott háromszöget két diszjunkt háromszögre osztja, s így lehetőség nyílik a terület additivitásának (T3) felhasználására, ennek során pedig a háromszög területének két oldal és a közbezárt szög segítségével történő meghatározására (T4). Az alapábra egy középiskolából ismert kiegészítése teszi lehetővé a párhuzamos szelők tételének (T5) felhasználását. A Heron-képlet (T6) segítségével a felezett szög csúcsából meghúzott magasság kifejezhető a háromszög oldalaival. A trigonometriából alkalmazható a szinusz-tétel (T7), a koszinusz-tétel

(T8), valamint a kétszeres szögek szinuszára (T9) és a félszögek koszinuszára (T10) vonatkozó összefüggés. (A felvételizők dolgozatai alapján e tételek alkalmazásával kapcsolatos adatokat a függelék tartalmazza.)

A fenti tételeken túl az általunk leírt bizonyítások során még igen sok alapvető fontosságú tételt használunk fel, amelyek többsége elemi geometriai jellegű, de van közöttük vektoralgebrai is. Ezek alkalmazásának részletes elemzésére már nem térünk ki.

Az alkalmazható tételek gazdag választéka egyrészt magában hordozza azt a lehetőséget, hogy ez a feladat nem csupán egyetlen tanítási szituációban jelenhet meg. Másrészt ez a választék arra is utal, hogy ennek a feladatnak a megoldásához több irányból közelítve is eljuthatunk, azaz valamelyik megoldás viszonylag könnyen hozzáférhető lehet az eltérő szintű és mennyiségű ismeretekkel rendelkező, ám logikusan gondolkodó felvételizők számára is. Hogy mégis melyik irány lenne a legcélszerűbb? Talán a felvételi dolgozat javításához kiadott központi útmutató háromféle megoldása közül az első. Ebben ugyanis T3, T4, T7 és T8 bevetésével megkapható a teljes megoldás, s ez a területszámítás révén igen szemléletesen indul el, bár a közben megjelenő trigonometrikus azonosságok váratlan nehézséget jelenthetnek. A központi második megoldási javaslat vektoralgebrai eszközökre épül, amihez ismerni kell a felezett szöggel szembeni oldalt a szöget közrefogó oldalak arányában osztó pont helyvektorának az előállítását, valamint a skaláris szorzás néhány alaptulajdonságát. Ez így igen elegáns és talán nem is túl sok, de a felvételizők mégis elkerülték ezt az irányt, s ez a tény arra utal, hogy a középiskolában szerzett vektoralgebrai alapok nem épültek be szervesen a könnyen mozgósítható ismeretek rendszerébe. A központi harmadik módhoz jóllehet csak a T1 és T8 tételeket kell használni, tehát szám szerint kevesebbet mint az elsőnél, de itt a szögfelezőre vonatkozó arányossági tétel elvontabb jellegű, a koszinusz-tételnek pedig kétszeri felírására van szükség.

Mindezek után felvethető a nagy kérdés: Mely tételeket alkalmazták legtöbbször a felvételizők, és a teljes megoldást adók melyik módra jöttek rá? Erre a válasz az 5. táblázat alapján adható meg. Eszerint legtöbbször (77 fő) a koszinusz-tétellel próbálkoztak, ez a tétel egy kivételével minden teljes megoldásban szerepel (1069, 1042, 1200, 1230, 1231), s ezen a tételen kívül kettőben (1042, 1230) csak a szögfelezőre vonatkozó arányossági tételre volt szükség. A szinusz-tétel alkalmazása közel hatszor kisebb gyakorisággal szerepel (13 fő), a Pitagorasz-tétel pedig ennek még a felét sem érte el (6 fő). Ezt a két tételt a teljes megoldást adó felvételizők egyike sem alkalmazta, ami valószínűleg azzal magyarázható, hogy egyszeri felhasználásuk nem elegendő. A terület additivitását 9 fő, a

háromszög területképletét 11 fő alkalmazta, ami közel egyforma gyakoriságot jelent, bár ez igen alacsonynak tartható, ha arra gondolunk, hogy ez a két tétel képezte az alapját a legcélszerűbbnek vélt központi első változatnak. Ezt a két tételt a teljes megoldást elérő 6 fő közül hárman (1069, 1081, 1231) alkalmazták, ami viszont jó arány, és alátámasztja a legcélszerűbb megoldásra vonatkozó hipotézisünket. A kétszeres szögek szinuszára (2 fő) és a félszögek koszinuszára (5 fő) vonatkozó azonosságokat talán nem merik, vagy nem is tudják a kellő pillanatban alkalmazni. Ez a 2+5 fő az összes felvételizőre vonatkoztatva nagyon kevés. Annak a ténynek pedig, hogy a teljes megoldásokat tekintve ez a kevés még tovább csökken 1+2 főre (1231 és 1081, 1200) már egyfajta üzenet jellege is van. A párhuzamos szelők tétele és a Heron-képlet egyaránt két-két dolgozatban fordul elő, de teljes megoldáshoz csak az utóbbi van felhasználva (1081).

<i>Tételek</i>	<i>T1</i>	<i>T2</i>	<i>T3</i>	<i>T4</i>	<i>T5</i>	<i>T6</i>	<i>T7</i>	<i>T8</i>	<i>T9</i>	<i>T10</i>
<i>Hány bizonyításban fordul elő ?</i>	12	1	1	2	1	1	6	5	6	15
<i>Hány felvételiző alkalmazza?</i>	76	6	9	11	2	2	13	77	2	5
<i>Hány teljes megoldás tartalmazza?</i>	4	0	3	3	0	1	0	5	1	2

5. táblázat

Befejezésül tegyünk még egy rövid összehasonlítást a felvett és a fel nem vett jelentkezők néhány számszerű adata között. A 113 felvett jelentkezőből 94 (83,2 %) hozzákezd a megoldáshoz, közülük 90 ismeri a szögfelező fogalmát, de a rá vonatkozó arányossági tételt csupán 51, és már csak 5 ad teljesen jó megoldást. Így az összesen szerezhető 1695 pontból 264-et (15,6 %) érnek el. Ugyanezen vizsgálódás a 69 fel nem vett jelentkező esetén hasonló, de még rosszabb eredményekre vezet. 51 (73,9 %) kezd hozzá a feladathoz, akik közül 50 ismeri a szögfelezőt, de csak 25 az arányossági tételt, és már csak 1 felvételiző ad teljesen jó megoldást. Az összesen szerezhető 1035-ből csupán 72 pontot (7 %) érnek el.

Mindezek alapján arra a megállapításra juthatunk, hogy a felvételizők többsége számára nagyobb problémát jelent valamely tétel alkalmazhatóságának a felismerése, mint az alkalmazás tényleges kivitelezése, s ez megint egyértelműen az összetett gondolkodási műveletek hiányosságára utal.

ZÁRÓSZÓ

Miért van szükség bizonyításra és többféle megoldásra?

Az elemi geometria részterületeihez kapcsolódó ismert feladatanyag kimeríthetetlen. Miért kell hát ugyanazon feladatra további megoldásokat bemutatni? Ennek több oka van. Egyrészt valamely feladat szerkezetének mélyebb elemzése során egy egész sor különlegesség fedezhető fel és indokolható meg, miközben olyan geometriai tulajdonságokról lehet szó, amelyeknek nem csupán intellektuális, de sajátos esztétikai vonzerejük is van. Másrészt az újabb (vagy általánosabb) megoldás keresése transzfer hatásként megjelenhet más tárgyakon belül, sőt még a tanuláson kívül a mindennapi életben is. A matematika tanításának folyamati céljai közé sorolható annak elérése, hogy a tanulók törekedjenek újabb megoldások keresésére. Ehhez a tanulókat rá kell vezetni arra, hogy a matematikai értelemben vett munka nem ér véget az első megoldás megtalálása után. A másik megoldás keresése képezi a mindenkori fejlődés alapját, miközben különösen fontos, hogy a tanulók ténylegesen vizsgálódjanak, saját megoldási útjaikat járhassák be, és maguk jöjjenek rá a bejárt út helyes vagy helytelen voltára. Ezt a tevékenységet úgy kell megszervezni, hogy a tanár vezető szerepét megtartva a tanulók kérdéseket is tehessenek fel a saját megfigyeléseikkel és sejtéseikkel kapcsolatban, ahelyett, hogy kizárólag csak fel nem tett kérdéseikre kapjanak válaszokat. Ha a tanuló kérdez, akkor felkeltettük a kíváncsiságát, s ezáltal már motiválva van a probléma megoldására. Ez a felfedeztető tanulás egyik alapelve, amely szerint a tanulás elsősorban a tanulók (és nem a tanárok) tevékenysége, s éppen ezért fejleszteni kell. Eközben nemcsak gondolkodási műveletek egyre hosszabb sorozatának önálló elvégzésére, hanem kellő motivációval további ismeretek megszerzésére is készíthetjük a tanulókat. A több megoldás keresése igényének kialakítása képessé teszi a tanulókat az alkotó és rendszerező gondolkodásra, amire a későbbi életük során nagy szükségük lesz.

A geometriai konfigurációkkal való többirányú foglalkozásnak az a célja, hogy a problémákat ne izoláltan lássuk, hanem összefüggő problémakitűzések olyan sorozatát fejlesszük ki, amelyek a tanuló számára érdekesnek tűnnek és kihívást jelentenek, további kérdéseket vetnek fel és új eredményekhez vezetnek. Az ilyen eljárás mód a kreativitás egyfajta tréningje is lehet, amikor heurisztikus stratégiákat kell kialakítani és tudatosítani, azaz sokkal több segítséget kell adni az eredmény önálló megtalálásához. Ugyanis a matematika tanítása során nem csupán enciklopédikus ismeretek közvetítéséről van szó, hanem egyfajta tudományos beállítódás kialakításáról is. Ehhez nem az eredmények közlése a fontos, hanem azok a megfontolások, amelyek

elvezetnek az eredményekhez. Pólya [50] azt írja erről, hogy amit a tanár az osztályában mond, az nem lényegtelen, de amit a tanulók gondolnak ki, az ezerszer fontosabb. Az ötleteknek a tanulók fejében kell megszületni, és a tanárnak eközben a bába szerepét kell játszani. Ez a szerep azt jelenti, hogy engedjük a tanulóknak önállóan felfedezni mindazt, amit csak lehet az adott körülmények között.

A tételeket természetesen nem elég felfedezni, hanem bizonyítani is kell, ami a tanulók számára nem magától értetődő dolog. A bizonyítás során az első lépésben érthetően és tisztán megfogalmazzuk a bizonyítás célját és az ahhoz rendelkezésre álló eszközöket, annak megakadályozása céljából, hogy a tanulók elveszenek a részletekben. Ugyanakkor a gyengébb tanulók számára kedvező, ha részcélokat is megadunk. Így ők sem veszítik el az áttekintést, és hozzá tudnak járulni a következő rész cél eléréséhez.

A geometriai tételekhez egy vagy több alakzat is kapcsolódik. Fontos, hogy a tanulók teljes mértékben értsék ezen alakzat keletkezését és annak a bizonyítás céljából végzett kiegészítéseit. Egy tételhez kapcsolódó alakzatnak további tulajdonságait is megvizsgálhatjuk, ami által a bizonyításban lévő érvelések elmélyíthetők, esetleg még általánosítási lehetőség is felfedezhető. Egy-egy alakzat vizsgálata során tartunk meg az alábbi célokat, melyek szerint a tanulók

- tapasztalják meg a geometriai alakzatban lévő szépséget,
- fedezzék fel és fogalmazzák meg a geometriai alakzat különleges tulajdonságait,
- lássák be a felfedezett tulajdonságok bizonyításának szükségességét,
- bizonyítsák a felfedezett tulajdonságokat,
- alkalmazzák a megszerzett ismereteiket.

A fenti célok közül külön kiemelendő a matematikai állítások bizonyítására való törekvés, vagyis a bizonyítási igény kialakítása. Ehhez a tanulókkal elsődlegesen azt kell megértetni, hogy sejtéseikre nem bízhatják magukat teljesen, azaz valamely állításnak egy bizonyos esetre való igazolásából nem következtethetnek annak általánosan igaz voltára. A tanulók többsége hajlamos arra, hogy egy adott matematikai probléma esetén mindig a lehető legegyszerűbb összefüggést sejtje meg, ami közvetlenül kettő vagy három példa alapján levezethető. A tanulóknak ez a magatartása az iskolai matematikával kapcsolatos első tapasztalataikból adódik. Ez a beállítódás rövid távon nem változtatható meg könnyedén. Meggyőzés nélkül még a tanárt is csak kelletlenül követik, ha az kétségbe vonja sejtésüket, ami csak valamely egyszerű esetre igaz. A tanulókat meg kell győzni, hogy az általános érvényességre vonatkozóan még a látszólag kézenfekvő összefüggéseket is meg kell vizsgálni, mert az egyedi példák

hamis eredményre vezethetnek. A meggyőzéshez viszont nem elegendő pusztán közölni ezt a tényt, hanem a tanulókat saját tevékenységük révén kell olyan intellektuális élményhez juttatni, ami pozitív jelleggel kiváltja ezt a kívánt meggyőződést. Ezzel megtettük az első lépést ahhoz, hogy a tanulók elfogadják a matematikai állítások általános bizonyításának szükségességét: a tanulóknak bizonyítási igényük lesz. A következő lépés ennek az igénynek a megtartása és fejlesztése, amihez be kell tartani a fokozatosság elvét, továbbá nehezebb bizonyítások esetén célszerű részcélokat megadni, hogy még a gyengébb tanulók se veszítsék el az áttekintést, és ne forduljanak el a bizonyítástól. A bizonyítás tartalmi céljai mellett fontos folyamati cél az, hogy a bizonyításhoz felhasznált érvelési módokat tovább vigyük és elmélyítsük, s ezáltal a logikus gondolkodást és a probléma megoldásának a képességét fejlesszük. Tudnunk kell ugyanakkor, hogy ami logikus, az a bizonyítási igény kialakításához pedagógiaileg lehet nem elegendő. Ha például egy tételt steril alakzaton tanítunk meg, akkor a közölt ismeretek halálosan unalmassá válhatnak, ami által szinte semmit sem tanítunk, s a bizonyítási igény felkeltése is elmarad. Ha viszont a tanuló rájön arra, miként lehet a tételt a valóságból előhozni, akkor azonnal érez valamit, hogy mi is a matematika. Ezért célszerű a témakörök bizonyos konfigurációkból kiinduló feltárása, ami által a matematika a keletkezés folyamatában tárgyalható. Ez használható normál iskolai oktatásban is, ahol az ilyen módszer kezdő lökéseket adhat az aktív együttműködéshez, ellentétben a kész eredmények puszta közlésével. Nagyon szegény módja a tanításnak az, amikor csak a végső eredményeket tanítjuk. Így csupán a felszín lesz adott, de elmarad az intellektuális értelemben vett valódi kaland, ami hozzájárul az oktatás élénkítéséhez, s ezáltal hatékonyabbá tételéhez. Mindez magába foglalhatja a geometria sokoldalú aspektusainak figyelembe vételét: „A geometria mint a térről szóló tudomány, mint gyakorlótér a problémamegoldáshoz, mint egy deduktív elmélet példája, mint a matematikai struktúrák lelőhelye, mint gyakorlati alkalmazás a hétköznapban, és mint kulturális érték.” A matematikának az iskolához kapcsolódó egyetlen másik részterülete sem mutat fel ilyen sávszélességet. Éppen ez támasztja alá a geometriának azt a szerepét, hogy az iskolában a matematika példaképeként szolgál.

Egy adott probléma megoldása esetén célszerű megvizsgálni, hogy létezik-e kevesebb elméleti apparátust igénylő megoldás, miközben óvatosan kell bánni a megoldás egyszerűségére vonatkozó felfogásunkkal. Ugyanis vannak tanulók, akikhez a vizuális (geometriai), míg másokhoz az elvontabb (algebrai) megoldás áll közelebb. Jóllehet mégis előfordulhat, hogy egy módszert bizonyos elméleti ismeretek alkalmazása és begyakorlása céljából előnyben részesítünk. Például egy geometriai

probléma megoldása során nagy szerepet kaphat a vizualitás abban az értelemben, hogy a tanulók a megrajzolt alakzat révén a teljes megoldást mint egészet egyszerre átláthatják. A vázolt szituációk tisztán geometriai szempontból való megértése fontos lehet a számítógépes grafika hatékony alkalmazásához is.

Valamely probléma megoldása során nem a konkrét végeredmény a legfontosabb, hanem maga a problémamegoldási folyamat és az ott alkalmazott stratégiák. Ugyanakkor a többféle megoldások ne képezzenek izolált ismereteket. Azokat össze kell hasonlítani az egyszerűség, elméleti igény, kreativitás szempontjából, és meg kell mutatni a különböző módszerek előnyeit, valamint más problémákkal kapcsolatos alkalmazási lehetőségeit.

Összefoglaló

Az értekezésben - alcímének megfelelően - tanítási ötleteket kívánunk adni az elemi geometria néhány témaköréhez, mégpedig azért, hogy a kiválasztott témakörök bizonyos problémáira többféle megoldást ismertetünk, jóllehet eközben nem kizárólag elemi geometriai, hanem trigonometriai, analitikus geometriai és vektoralgebrai eszközöket is használunk. A több megoldás bemutatásával az a legfőbb célunk, hogy a tanulót különféle gondolkodási műveletek elvégzésére, s ennek során újabb és magasabb szintű ismeretek megszerzésére készítsük. A másik megoldás utáni kutatás igényének kialakítása és továbbfejlesztése a matematika tanításának egyik legfontosabb feladata. Ezen cél és feladat együttes figyelembe vételével az euklideszi háromszög- és körgeometria területéről válogattunk néhány problémát, amelyek feldolgozása közben arra törekedtünk, hogy az összeállított anyag jól hasznosítható legyen a középfokú, sőt esetenként még a felsőfokú oktatásban is.

Az értekezés felépítéséből adódik, hogy szinte minden egyes témakör magába foglalja a már ismert tények felsorolását, vagy az azokra történő utalásokat, továbbá a választott probléma újszerű feldolgozását és több esetben új eredményeket is.

A háromszög-geometriai rész öt önálló témája közül az első három átdarabolással foglalkozó problémákat tartalmaz, s éppen ezért szükség volt a sokszögek (és poliéderek) átdarabolásával kapcsolatos alapismeretek előzetes összefoglalására, amiből számunkra a Bolyai-Gerwien-tétel és annak megfordítása a legfontosabb.

A pitagorasz-i tételcsoport három közismert tételt foglal magába: a Pitagorasz-tételt, a befogótételt és a magasságtételt. A Pitagorasz-tételre öt ismert átdarabolásos és egy szintén ismert kiegészítéses bizonyítást mutatunk be. Ezek a viszonylag egyszerű konstrukció miatt alkalmasak arra, hogy bevezetőként megismerjük az átdarabolások illetve kiegészítések révén történő bizonyítások folyamatát. A befogótétel átdarabolásos bizonyításának alapja a tekintett befogó fölé rajzolt négyzet felszeletelése, ami a nem kisebb befogó esetén három, a kisebb befogó esetén viszont legalább három részre vágáshoz vezet. Ez az utóbbi dolog nagyszámú részek esetén már kevésbé áttekinthető. Bemutatjuk még a befogótétel egy ismert kiegészítéses bizonyítását is, ami az átdarabolásosnál jóval egyszerűbben elvégezhető. A magasságtétel átdarabolásos bizonyítása csak a befogók speciális aránya esetében volt ismert. Értekezésünkben az általános esetre két átdarabolásos és három kiegészítéses bizonyítást adunk a teljesség igénye nélkül.

A Pitagorasz-tétel általánosításával foglalkozó fejezetben nem a jól ismert általánosítási módokat kívántuk felsorolni, hanem ehelyett két nem közismert elemi általánosítást tárgyalunk. Az első általánosításhoz az ABC háromszög C csúcsának a B csúcsból megrajzolt magasságvonalra vonatkozó tükörképét C' -vel, az A és C' pontok távolságát d -vel jelölve fennáll a $c^2 = a^2 \pm bd$ összefüggés, ahol $c \geq a$ esetén $+$, míg $c < a$ esetén $-$ áll. $\gamma = 90^\circ$ esetén $C' = C$ miatt $d = b$, s így visszajutunk a Pitagorasz-tételhez. Ez az állítás Hoehn által csak részleges, értekezésünkben viszont így teljes leírást kap, sőt a kapott formula egy alkalmazásán túl még egy átdarabolásos bizonyítást is megadjuk. Az egyáltalán nem ismert másik általánosításhoz az ABC háromszög s_c súlyvonala és a c oldal fele közötti eltérést d -vel jelölve az $a^2 + b^2 = (c \pm d)^2 + d^2$ összefüggés teljesül, ahol $+$ vagy $-$ áll aszerint, hogy γ hegyes- vagy tompaszög. $\gamma = 90^\circ$ esetén $s_c = c/2$ miatt d nyilvánvalóan nulla, s így visszajutunk a Pitagorasz-tételhez. Az általános állítást a súlyvonal hosszára ismert formula segítségével bizonyítjuk, majd geometriailag négyzetekkel interpretáljuk, s végül még a Perigal-féle átdarabolási módot is bemutatjuk.

A derékszögű háromszög téglalappá történő átdarabolásakor három olyan nem közismert módot mutatunk be, amikor a keresett téglalap egyik oldalát valamilyen speciális feltételhez kapcsolva adjuk meg. Az első változatban az ABC derékszögű háromszög $\overline{AB}$ átfogójának szerkesztendő olyan D belső pontja, amelyben az $\overline{AB}$ -re merőleges a $\overline{BC}$ egyenest egy E pontban metszi úgy, hogy $\overline{AD}$ és $\overline{DE}$ az ABC háromszöggel egyenlő területű keresett téglalap oldalai. A második változatban az ABC derékszögű háromszöget olyan téglalapba kívánjuk átdarabolni, amelynek egyik oldala a befogók számtani, mértani, harmonikus vagy négyzetes középértéke. A harmadik változatban pedig azt az ismert tényt használjuk fel, hogy ha P az ABC derékszögű háromszög beírt körének és az $\overline{AB}$ átfogónak az érintési pontja, akkor az $AP \cdot BP$ szorzat egyenlő az ABC háromszög területével. Ebből kiindulva három különböző átdarabolási módot írunk le. Megmutatjuk még, hogy az előbb megfogalmazott állítás megfordítása is igaz, vagyis az a derékszögű háromszögre jellemző speciális tulajdonság.

A háromszög belső szögfelezői hosszának az oldalakkal történő meghatározása utolsó feladata volt a 2001. május 21-én délutánra kitűzött közös írásbeli érettségi-felvételi feladatsornak. Ebben a feladatban egy ismert, de a tanulók számára ismeretlennek feltételezhető összefüggés bizonyítását kellett megadni, ami csak a középiskolai matematika anyag alapján is többféleképpen elvégezhető. Értekezésünkben az írásbeli dolgozat javítási útmutatójában közölt három megoldást is beleszámítva húsznál is több különböző bizonyítási módot mutatunk be azzal a kettős

céllal, hogy egyrészt minél jobban átfogjuk a felhasználható tételeket, másrészt ezt a témát minél több területen megjeleníthetővé tegyük. Ezt a célt szem előtt tartva a bizonyított összefüggés alkalmazására a teljesség igénye nélkül három lehetőséget kínálunk:

- bizonyítjuk a Steiner-Lehmus-tételt,
- megvizsgáljuk a háromszög szögfelezőin a beírt kör középpontja által létrehozott szakaszok egybevágóságának az eseteit,
- megmutatjuk, hogy a három szögfelező ismeretében nem szerkeszthető háromszög.

A háromszög Euler-egyenéséről ismert, hogy a háromszög egyik oldalával pontosan akkor párhuzamos, ha az ezen az oldalon lévő belső szögek tangenseinek szorzata hárommal egyenlő. Ehhez kapcsolódva Diemente és Klamkin is megmutatta, hogy az Euler-egyenest egy rögzített oldallal való párhuzamosságát feltételezve a háromszög harmadik csúcsa egy olyan ellipsziszre illeszkedik, melynek kistengelye az adott oldal. Ezt a problémát mi egy újabb ötlet alapján tárgyaljuk, majd a párhuzamosságról áttérünk az általános esetre, amikor az Euler-egyenest egy rögzített oldallal valamilyen 0° és 90° közötti adott szöget zár be. Erre a problémára analitikus geometriai eszközökkel azt a választ kapjuk, hogy a harmadik csúcs mindig egy másodrendű görbére illeszkedik, ami a szög nagyságától függően ellipszis, párhuzamos egyenespár vagy hiperbola.

A körgeometriai részben három egymáshoz szorosan kapcsolódó témát dolgozunk fel: a pont körre vonatkozó hatványát, továbbá a pont inverzének és két kör hatványvonalának a szerkesztését.

A pont körre vonatkozó hatványának bevezetése a legtöbb geometria könyvben hasonló háromszögekre alapul, amiből az előkészítő tételre eleve egyetlen bizonyítási lehetőség adódik. Éppen ezért választunk más utat az értekezésünkben: itt a tekintett fogalmat egy vektoralgebrai megfogalmazású tétel készíti elő, s erre a tételre ötféle bizonyítást adunk, amelyek közül három nem közismert.

A pont inverzének megszerkesztése megint egy olyan probléma, amire szintén többféle megoldás adható: értekezésünkben tizennégy módot ismertetünk. Ezek közül az első négy közismert, viszont a többi, amelyekhez az inverzióról mélyebb ismeretek szükségesek, csak alig vagy egyáltalán nem ismertek.

Minthogy két nem koncentrikus kör hatványvonala olyan egyenes, amely merőleges a két kör középpontjait összekötő egyenesre, ezért a két kör felvételét követően elegendő a keresett hatványvonal egy pontját ismerni. Közös ponttal rendelkező két kör esetén a közös pont nyilvánvalóan megfelelő, így erre az esetre itt nem térünk ki, de még a két egybevágó kör esetére sem, mivel ekkor a centrális szakasz felezőpontja rajta van a keresett hatványvonalon. A fennmaradó általános esetben ,

amikor a két diszjunkt kör nem koncentrikus és nem egybevágó, a két kör hatványvonalának megszerkesztésére tizenegy különböző módot ismertettünk, amihez a hatványvonal pontjainak a hatványvonal értelmezéséből következő tulajdonságain túl felhasználjuk az inverzió mélyebb tételei alapján adódó lehetőségeket, sőt az egyik módnak még egy általánosítását is bemutatjuk.

A módszertani elemzés alapjául a 2001. május 21-én délutánra kitűzött érettségi-felvételi feladatsor utolsó feladata szolgált, ami a háromszög egyik belső szögfelezője hosszának az oldalakkal történő meghatározását írta elő bizonyításos formában, s így ez az értekezés egyik előző fejezetéhez szorosan kapcsolódik. Az erre vonatkozó felmérésben vizsgáltam az adott probléma megértésének, megoldásának és az ehhez felhasználható, de csak a középiskolában tanult matematikai ismeretek alkalmazásának a szintjeit. A felméréshez szükséges adatbázist a Debreceni Egyetem Közgazdaságtudományi Karára jelentkezők hozzáférhető dolgozatai alapján állítottam össze. Ezen felméréshez kapcsolódva kitérek még a vizsgált feladat valamely megoldásához felhasználható tételekre, továbbá annak bemutatására, hogy ezek közül melyeket alkalmazták a jelentkezők. Végezetül az elemzés egy az egész értekezést átfogó kitekintéssel zárul, amelyben arra a nem könnyű kérdésre keressük a választ, hogy egyáltalán miért is van szükség többféle megoldásra.

Summary

ONE PROBLEM – MORE SOLUTIONS

Teaching Ideas of Certain Themes in Elementary Geometry

The main purpose of the present dissertation is to describe how to train students' mathematical thinking so that they want to search after more solutions of the same problem. Students have to realize that the work doesn't really end after they had found the first solution, but they have to look for simplified ones with less theoretical background, while they carry out certain thinking operations, and can attain additional knowledges.

We also have to get students not to accept their first conjecture without making a thorough examination of its universal validity, that is, they must understand the importance of proving their statements. Thus, the search either for more solutions or for new proofs enables students to become a person being not passively but creatively receptive. And this is one of the most important tasks of teaching mathematics.

According to the above aims, I have selected some problems from the following themes in elementary Euclidean geometry of triangles and circles.

Theme 1: The Pythagorean theorem group

The present purpose isn't to treat the whole literature connected with this theorem-group, but to describe some dissection proofs that offer excellent possibilities to discover any of these theorems in a very early playful form. The mathematical background is the converse of the fundamental theorem of polygonal dissections, that is, the Bolyai-Gerwien theorem, inclusive of the congruency proofs given in an exact manner. As to the Pythagorean theorem, I detail five known dissection proofs, as well as two neglected elementary generalizations that aren't common or usual in the mathematical literature. The first generalization is of the form $c^2 = a^2 \pm bd$ where a, b, c are the lengths of sides of an oblique triangle ABC and d is the distance between A and the image of C by the symmetry about the line of the altitude to side $\overline{AC}$. The second one is given by the formula $a^2 + b^2 = (c \pm d)^2 + d^2$ where d denotes something unlike before, namely the absolute value of the difference $m_c - \frac{c}{2}$.

For the theorem on the mean property of the altitude to the hypotenuse, as well as for the theorem on the two legs, we demonstrate some general dissection proofs containing also certain new ideas.

Theme 2: On dissections of a right triangle into a rectangle

After presenting the well-known dissections of a triangle into a rectangle of the same area, we detail a special dissection possibility based on the following theorem:

If P is the point of tangency of the inscribed circle and the hypotenuse $\overline{AB}$ of right triangle ABC , then the product $AP \cdot BP$ equals the area of triangle ABC .

This fact is a unique property of the right triangle we want to deal with. Its direct proof is very simple or even boring, but all the more challenging and interesting are the dissections we have presented here.

Theme 3: The length of the angle bisector of a triangle

The original problem is to prove the formula for the lengths of the interior angle bisectors of a triangle in terms of the sides. We present twenty-four different proofs by applying either similar triangles or trigonometric and vector calculations or even the Theorem of Stewart. And finally, we present also three applications of the proved formula. Of course, this great variety should not be taught in one lesson, but in several teaching situations.

Theme 4: On the position of the Euler line of a triangle

The first question, whether Euler's line is ever parallel to a side of a triangle, has been investigated algebraically. To this investigation we considered a non-isosceles triangle ABC with fixed vertices A and B , and searched for the locus of C when Euler's line is parallel to side $\overline{AB}$. The result is an ellipse centered at the midpoint of side $\overline{AB}$, with semiminor axis $\frac{AB}{2}$ and semimajor axis $\frac{AB\sqrt{3}}{2}$, except the endpoints of its axes.

The second question, on what condition intersects Euler's line a certain side under a given angle φ with $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, can be treated in a very similar way, but the result is more complex than before. Now the locus we sought after is an ellipse, a pair of parallel lines or a hyperbola, according as $0^\circ < \varphi < 60^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ or $60^\circ < \varphi < 90^\circ$.

Theme 5: The power of a point with regard to a circle

The power of a point with regard to a circle is generally based on the following theorem: „If a line is drawn from a fixed point P to intersect a

circle $k(O;r)$ at A and B , then the product $PA \cdot PB$ is constant.” Its proof can simply be treated using similar triangles. However, the constant result $PA \cdot PB = OP^2 - r^2$ involves the problem how to sign the left side of this equation if previously the length of a line segment was accepted to be non-negative. Well, if we do vectoralgebraic treatment, the sign derives from inner properties of the scalar product. That’s why we choose this way, and then present five proofs using vectors.

Theme 6: How to construct the inverse of a point?

Since the inversion in a circle is involutonic, and each point exterior to the circle of inversion is uniquely associated an interior point, it is enough to deal with the construction of the inverse of a point outside the circle of inversion. Then, for an interior point, we can mostly use the converse of the construction process used before. The beauty at the construction of the inverse of a point is involved in its great variety. It can be done using elementary or even deeper theorems, as well as using either compass or lineal alone. The presented fourteen ways don’t want to suggest that there is no more chance of finding another new one.

Theme 7: How to construct the radical axis of two circles?

Since the radical axis of two non-concentric circles is a certain line perpendicular to the line of centers, it is enough to know one of its points if we want to draw this line. Such a point can be constructed in many different ways. The two common ways are based either on the construction of the radical center of three circles, or on the construction of the intersection point of the radical axis and the line of centers of the two given circles. We present three ways for the construction of this intersection point, three ways for the construction of a proper point outside the two circles, from where tangents of equal length can be drawn, and again three ways using certain properties of the inversion in a circle.

Theme 8: Methodological investigation

The proof of the formula for the length of the interior angle bisector of a triangle was the 8th problem in a central entrance exam organized 2001 by the Faculty of Economic Science of the University of Debrecen. This problem formed the subject of our methodological investigation based on the available works written by the participants. The purpose of this investigation was to measure the level of understanding and solving the problem, as well as to measure also the level of adapting certain necessary mathematical theorems, furthermore to compare and analyse the given solutions.

Throughout these themes, we have sought after very new ideas that can be fitted in a certain solution of a given problem, as well as after the converse and the generalization of a selected theorem in elementary geometry. This is why one can make good use of the compiled teaching material not only in secondary but also in higher education.

Irodalomjegyzék

1. Aigner, M., Ziegler, G.M.: Das BUCH der Beweise
Springer Verlag, Berlin, 2002
2. Alexandroff, P.S.: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.
3. Bagemihl, F.: On indecomposable polyhedra
Am. Math. Monthly, 55(1948), 411-413.
4. Baptist, P.: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie
B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992.
5. Baptist, P.: Pythagoras und kein Ende?
Klett Schulbuchverlag, Leipzig, 1998.
6. Bereznai, Gy.: Pitagorasz tétele
Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
7. Coxeter, H.S.M.: A geometriák alapjai
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
8. Coxeter, H.S.M., Greitzer, S.L.: Az újra felfedezett geometria
Gondolat Kiadó, Budapest, 1977.
9. Darvasi, Gy.: A középérték-egyenlőtlenségek egy geometriai leírása
A Matematika Tanítása, 1975, 54-57.
10. Darvasi, Gy.: A dissection property of right triangles
Octagon Math. Magazine, April 1996, 71-74.
11. Darvasi, Gy.: A property of right triangles revisited
Mathematics Teacher, May 1996, 442.
12. Darvasi, Gy.: Derékszögű háromszög speciális átdarabolása
téglalappá
A Matematika Tanítása, 1997, 10-14.
13. Darvasi, Gy.: A háromszög szögfelezőinek hosszáról
A Matematika Tanítása, 2001, 6-9.
14. Darvasi, Gy.: How to construct the radical axis of two circles?
Octagon Math. Magazine, 2001, Vol. 9, No. 1, 431-437.
15. Darvasi, Gy.: More notes on a neglected Pythagorean-like formula
Math. Gazette 85(Nov. 2001), 483-486.
16. Darvasi, Gy.: Összefoglaló a magasságtételről
A Matematika Tanítása, 2002, 7-17.
17. Darvasi, Gy.: Triangles with Euler line parallel to a side
Mathematics Teacher, May 2002, 367.
18. Darvasi, Gy.: From the weighted mean to the mean-inequalities
Math. Gazette, July 2002, 290-292.
19. Darvasi, Gy.: Vier besondere Dreiecke mit seitenparalleler
Eulergeraden Praxis der Math. in der Schule, 2002, 167-168.

20. Darvasi, Gy.: Derékszögű háromszög átdarabolása téglalappá
Nyíregyházi Főiskola TTFK
Természettudományi Közl., 2002, 37-48.
21. Darvasi, Gy.: Triangles whose Euler line is parallel to a side
Math. Spectrum 35(2002/2003), No. 1, 18.
22. Darvasi, Gy.: A unique property of right-angled triangles
Math. Gazette, March 2003, 51-59.
23. Darvasi, Gy.: Über den verallgemeinerten Höhensatz
Praxis der Math. in der Schule, 2004, 24-25.
24. Darvasi, Gy.: Generalizing a construction of the radical axis
Octagon Math. Magazine, April 2004, 243-247.
25. Darvasi, Gy.: Triangles with Euler lines in special positions
Octagon Math. Magazine, April 2004, 275-283.
26. Darvasi, Gy.: A Pitagorasz-tétel egy nem közismert általánosítása
A Matematika Tanítása, 2004, 5. szám, 25-27.
27. Darvasi, Gy.: Converse of a property of right triangles
Math. Gazette, March 2005, 72-76.
28. Dehn, M.: Über raumgleiche Polyeder
Nachrichten von der Königl. Ges. der Wiss., 1900, 345-354.
29. Dehn, M.: Über den Rauminhalt
Mathematische Annalen, 1902, 465-478.
30. Di Domenico, A.S.: A property of right triangles
Mathematics Teacher, January 1995, 77.
31. Diemente, D.: Can Euler's line be parallel to a side of a triangle?
Mathematics Teacher, 93(2000), 428-431.
32. Efimow, N.W.: Höhere Geometrie
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
33. Eves, H.: A survey of geometry
Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.
34. Fraedrich, A.M.: Die Satzgruppe des Pythagoras
B.I. Wiss. Verlag, Mannheim, 1995.
35. Hajós, Gy.: Bevezetés a geometriába
Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.
36. Hoehn, L.: A neglected Pythagorean-like formula
Math. Gazette, March 2000, 71-73.
37. Horvay, K., Reiman, I.: Geometriai feladatok gyűjteménye , I. kötet
Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
38. Johnson, R.A.: Advanced Euclidean geometry
Dover Publications, Inc., New York, 1960.
39. Katona, J.: Variációk egy témára
A Matematika Tanítása, 1996, 9-13.
40. Klamkin, M.S.: On Euler's line

- Mathematics Teacher, Sept. 2001, 438, 440.
41. Klotzek, B.: Euklidische und nichteuklidische Elementargeometrien
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2001.
 42. Kostowskij, A.N.: Geometriai szerkesztések egy körzővel (orosz)
Nauka Kiadó, Moszkva, 1989.
 43. Kratz, J., Schweiger, K., Wörle, K.: Geometrie 10. Schuljahr
Bayerischer Schulbuchverlag, München, 1990.
 44. Kratz, J.: Die Kreisspiegelung
Didaktik der Mathematik, 1994, 161-186.
 45. Krötenheerdt, O.: Zur Theorie der Dreieckskonstruktionen
Wiss. Zeitschrift der Universität Halle, XV '66, M, H. 4, 688.
 46. Laczkovich, M.: Sejtés és bizonyítás
TypoTEX, Budapest, 1998, 39-45.
 47. Lennes, N.J.: Theorems on the simple finite polygon and polyhedron
American J., 1911, 37-62.
 48. Lietzmann, W.: Der pythagoreische Lehrsatz
Teubner Verlag, Leipzig, 1917.
 49. Linzmaier, M., Pickert, G., Rung, J.: Gleichheit von
Winkelhalbierendenabschnitten,
Praxis der Math. in der Schule, 2003, 236-237.
 50. Loomis, E. S.: The Pythagorean proposition
NCTM, Washington, D.C., 1968.
 51. Martin, G.E.: The foundations of geometry and the non-euclidean
plane
Springer Verlag, New York, 1986.
 52. Meschkowski, H.: Nichteuklidische Geometrie
Vieweg Verlag, Braunschweig, 1961.
 53. Moise, E.E.: Elementary geometry from an advanced standpoint
Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1963.
 54. Pedoe, D.: Circles
Pergamon Press, London, 1957.
 55. Pelle, B.: Geometria
Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
 56. Pogáts, F.: Vektorgeometria
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.
 57. Pólya, Gy.: A problémamegoldás iskolája
Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
 58. Praszolov, V.V.: Síkgeometriai feladatok (orosz)
Nauka Kiadó, Moszkva, 1986.
 59. Reiman, I.: Elemei geometriai példatár
Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.
 60. Reiman, I.: Geometria és határterületei

- Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.
61. Schmidt, H.: Die Inversion und ihre Anwendungen
Oldenburg Verlag, München, 1950.
 62. Schmitz, M.: Der Satz des Pythagoras als Ausgangspunkt für ein
weiteres Problem,
Praxis der Math. in der Schule, 2004, 37-39.
 63. Schmitz, M.: Eine mögliche Verallgemeinerung des Satzes des
Pythagoras
Praxis der Math. in der Schule, 2004, 173-177.
 64. Schönhardt, E.: Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in
Tetraeder
Math. Annalen, 1928, 309-312.
 65. Smart, J.R.: Modern geometries
Pacific Grove, California, Brooks/Cole, 1988.
 66. Zeitler, H.: Hyperbolische Geometrie
Oldenburg Verlag, München, 1950.
 67. Zeitler, H.: Kreisgeometrie
Didaktik der Mathematik, 1973, 288-308.

F ü g g e l é k

A felmérésben vizsgált felvett jelentkezők adatai

	I t e m e k															T é t e l e k															
1167	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3p	
1217	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	2p	
1115	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p	
1229	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	11p		
1059	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	5p		
1048	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	7p		
1101	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2p		
1211	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0p		
1127	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p	
1218	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2p		
1104	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2p		
1139	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2p		
1065	0																												0p		
1041	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p	
1001	0																												0p		
1003	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0p		
1261	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2p		
1080	0																												0p		
1085	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0p		
1087	0																												0p		
1047	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p		
1029	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p		
1005	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p		
1099	0																												0p		
1086	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	4p			
1174	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p		
1231	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	15p			
1236	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p		
1288	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p		
1097	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p		
1168	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0p		
1094	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4p			
1091	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	13p			
1169	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4p			
1180	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0p			
1135	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0p			
1093	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2p			
1266	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p		
1177	0																												0p		
1181	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	12p			
1130	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p		

161

1025	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	6p
1150	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0p
1260	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	12p
1073	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2p
1256	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2p
1157	0																								0p	
1153	0																								0p	
1276	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	3p
1219	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2p
1198	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1171	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1098	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2p
1108	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4p
1151	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0p
1248	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4p
1203	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1136	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1118	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1030	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1008	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2p
1090	0																								0p	
1072	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2p
1110	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	5p
1092	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1095	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2p
1007	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0p

A felmérésben vizsgált fel nem vett jelentkezők adatai

	I t e m e k															Tételek											
1011	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p	
1289	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2p
1068	0																									0p	
1002	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1082	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1281	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1043	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2p
1137	0																									0p	
1282	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1084	0																									0p	
1225	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0p
1102	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2p
1018	0																									0p	
1251	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1021	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0p
1222	0																									0p	

1023	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	2p
1138	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0	1 1 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1089	1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1145	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 1 0 1	7p
1062	0		0p
1056	1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 1 1 0 0	2p
1238	0		0p
1269	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0	1 1 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1192	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	2p
1274	1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	0p
1107	1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1255	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1173	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 1 0 0	2p
1268	1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1188	1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1227	1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1119	1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1257	0		0p
1277	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1	1 0 0 0 0 0 0 1 0 0	2p
1182	1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	2p
1040	0		0p
1028	0		0p
1052	0		0p
1267	1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1194	1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 1 0 0	4p
1163	1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1	1 0 0 0 0 0 0 1 0 0	0p
1275	0		0p
1234	0		0p
1247	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 1 0 0	0p
1123	1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0	0 0 1 1 0 0 0 0 0 0	4p
1144	1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1252	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 1 0 0	2p
1166	0		0p
1237	1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1074	1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1126	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1221	0		0p
1191	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1105	1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0	1 1 0 0 0 0 0 0 0 0	3p
1013	1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1290	0		0p
1200	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0	1 0 0 0 0 0 0 1 0 1	15p
1117	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	2p
1206	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 1 0 0	2p
1212	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1210	1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p

1279	1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	7p
1055	1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0	2p
1235	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
1004	1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0	0 0 1 1 0 0 0 1 0 0	6p
1254	0		0p
1228	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0p
418	0		0p

Dr. Darvasi Gyula publikációs jegyzéke

Megjelent dolgozatok

1. A középérték-egyenlőtlenségek egy geometriai leírása
A Matematika Tanítása, 1975, 2. szám, 54-57.
2. Szabályos sokszögek előállítása szöges táblán
Acta Academiae Nyíregyháziensis, 1977, Tom 7, 9-13.
3. Primzahl 1979 und 9 Primzahlen
Praxis der Mathematik, 1979, Heft 12, 353.
4. Számláncok
Acta Academiae Nyíregyháziensis, 1980, Tom 8/G, 9-23.
5. Egy versenyfeladat és a Hesse-féle alak
A Matematika Tanítása, 1983, 6. szám, 175-177.
6. Boring chains
Mathematics Teaching, June 1986, 31.
7. Déjà vu
Mathematics Teaching, Sept. 1986, 46.
8. Egy színdominójáték: a quadromino
A Matematika Tanítása, 1986, 5. szám, 136-142.
9. Grüsse zum Neuen Jahr
Praxis der Mathematik, 1987, Heft 2, 74.
10. Über Perioden und Polygone einer Klasse rekursiver Folgen
Praxis der Mathematik, 1987, Heft 4, 237-241.
11. Rekurzív sorozatok néhány osztályának periódusairól
Doktori értekezés, 1987, Debrecen, KLTE.
12. A cikkcakk szorzástól az euklideszi algoritmusig
A Matematika Tanítása, 1988, 2. szám, 42-44.
13. A Fibonacci sorozat eloszlásának számítógépes vizsgálata modulo 5c
esetén

- Acta Academiae Nyíregyháziensis, 1988, Tom 11L/C, 31-35.
14. Pfeile aus Trimino-Hexamant-Sternen
Praxis der Mathematik, 1989, Heft 2, 79.
 15. Computerunterstützte Behandlung der Verteilung von Resten der
Fibonacci-Folge mod $5c$
Praxis der Mathematik, 1989, Heft 4, 242-244.
 16. Zur Verteilung der Reste der Fibonacci-Folge modulo $5c$
Elemente der Mathematik, 1995, Heft 2, 76-80.
 17. On almost uniform distribution of the Fibonacci sequence $u(3,1)$
Octagon Mathematical Magazine, 1995, Vol. 3, No. 1, 36-38.
 18. Egy másik színdominójáték: a trimino
Matematika Tanítása, 1995, 3. szám, 3-11.
 19. More on the distribution of the Fibonacci numbers modulo $5c$
Octagon Mathematical Magazine, 1995, Vol. 3, No. 2, 49-55.
 20. Eine andere einheitliche geometrische Methode zur Bestimmung der
Potenz-summenformeln
Praxis der Mathematik, 1996, Heft 2, 81-82.
 21. On repetitions in frequency blocks of the generalized Fibonacci
sequence $u(3,1)$ with $u_0=u_1=1$
Fibonacci Quarterly, 1996, Vol. 34, 176-180.
 22. On repetitions in frequency blocks of the generalized Fibonacci
sequence $u(3,1)$ with $u_0=1, u_1=5$
Octagon Mathematical Magazine, 1996, Vol. 4, No. 1, 27-33.
 23. A dissection property of right triangles
Octagon Mathematical Magazine, 1996, Vol. 4, No. 1, 71-74.
 24. Néhány nem közismert oszthatósági szabály
A Matematika Tanítása, 1996, 1. szám, 3-8.
 25. Eine Verallgemeinerung der Konstruktion Berlin
Praxis der Mathematik, 1996, Heft 5, 239.

26. Lösung der Aufgabe 1096
Elemente der Mathematik, 1996, Heft 2, 79.
27. Zwei Reflexionen: 2. Lösung von P 1012
Praxis der Mathematik, 1996, Heft 4, 187-188.
28. A property of right triangles revisited
Mathematics Teacher, 1996, Vol. 89, No. 5, 442.
29. Flächeninhalt des geraden Dreiblatts in Berlin
Praxis der Mathematik, 1997, Heft 1, 28-29.
30. Rauminhalt des geraden Dreiblatts in Berlin
Praxis der Mathematik, 1997, Heft 6, 279.
31. Derékszögű háromszög speciális átdarabolása téglalappá
A Matematika Tanítása, 1997, 1. szám, 10-14.
32. On the distribution of a certain family of Fibonacci type sequences
Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis,
1998, Tomus 14, 41-47.
33. GLaD revisited again
Octagon Mathematical Magazine, 1998, Vol. 6, No. 1, 71-73.
Mathematics Teacher, 1998, Vol. 91, No. 6, 515-516.
34. Problem 26, February 1997
Mathematics Teacher, 1998, Vol. 91, No. 7, 622-623.
35. Pitagorasz-tételének bizonyítása két lépésben.
Matlap (Kolozsvár), 1998, 8.szám, 291-292.
36. Über Bildpunktkonstruktionen zur Inversion
Beiträge zum Mathematikunterricht, 1998, 160-163.
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 1999,
Heft 6, 336-341.
37. A constructionful study on a TIMSS Japanese mathematics lesson
Octagon Mathematical Magazine, 2000, Vol. 8, No. 1, 140-150.
38. Using the geometric mean
Mathematics Teacher, 2000, Vol. 91, No. 6, 523-524.

39. Az általános talpponti háromszög területe
A Matematika Tanítása, 2000, 5. szám, 8-9.
40. Egy TIMSS japán matematikafeladat
A Matematika Tanítása, 2000, 5. szám, 10-12.
41. Japanese entrance exam problem
Mathematics Teacher, 2001, Vol. 94, No. 2, 105.
42. On repetitions in frequency blocks of a generalized Fibonacci sequence Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 2001, Vol. 17. No.1, 25-30.
43. More on the distribution of the Fibonacci numbers modulo 5c
Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 2001, Vol.17. No.1, 19-24.
44. Obtaining reciprocal lengths
Mathematics Teacher, 2001. Vol. 94, No.3, 232.
Octagon Mathematical Magazine, 2001, Vol.9, No.1, 493-494.
45. Calendar problem 23, November 1999
Mathematics Teacher, 2001. Vol. 94, No.4, 287, 298.
46. Síkbeli egyszerű négyszög súlypontjai
MatLap (Kolozsvár), 2001. 6. szám, 208-212.
47. A háromszög szögfelezőinek hosszáról
A Matematika Tanítása, 2001. szept., 6-9.
48. Az általános talpponti háromszög körülírt és beírt körének sugara
A Matematika Tanítása, 2001. szept., 9-10.
49. Dissection proof
Mathematics Teacher, 2001.Vol.94, No.7, 546, 548
50. More notes on a neglected Pythagorean-like formula
Mathematical Gazette, November 2001, 483-486.
Octagon Mathematical Magazine, 2001, Vol.9, No.1, 440-442.
51. Extending a TIMSS Japanese lesson without trigonometry

- Octagon Mathematical Magazine, 2001, Vol.9, No.1, 478-481.
Mathematical Gazette, March 2002, 88-92. („Some constructions for dividing a trapezium into parts of given area” címen).
52. How to construct the radical axis of two circles?
Octagon Mathematical Magazine, 2001, Vol.9, No.1, 431-437.
53. The area of a quadrilateral – another formula
Octagon Mathematical Magazine, 2001, Vol.9, No.1, 483-485.
54. The area of a quadrilateral – three dissection proofs
Octagon Mathematical Magazine, 2001, Vol.9, No.1, 488-490.
55. Összefoglaló a magasságtételről
A Matematika Tanítása, 2002. 1, 7-17.
MatLap (Kolozsvár), 2002. október, 282-291.
(„A derékszögű háromszögre vonatkozó magasságtétellel kapcsolatos kérdések” címen)
56. A Pitagorasz-tétel megfordítása.
MatLap (Kolozsvár), 2002. március, 94-97.
57. Triangles with Euler line parallel to a side
Mathematics Teacher, May 2002, 367.
Mathematical Spectrum, 2002/2003, Vol.35, No.1, 18.
58. From the weighted mean to the mean-inequalities
Mathematical Gazette, July 2002, 290-292.
59. Vier besondere Dreiecke mit seitenparalleler Eulergeraden
Praxis der Mathematik in der Schule, 2002, Heft 4, 167-168.
60. Die Reifeprüfung in Ungarn
Praxis der Mathematik in der Schule, 2002, Heft 5, 230-233.
61. Derékszögű háromszög átdarabolása téglalappá.
Nyíregyházi Főiskola TTFK
Természettudományi Közlemények, 2002, 2. szám, 37-48.
62. Converse of a property of right triangles
Mathematics Teacher, 2002. Vol. 95, No.6, 42.

63. Glad redux variant
Mathematics Teacher, 2002. Vol.95, No. 9, 660.
64. Diameter of the incircle of a triangle
Mathematics Teacher, 2003, Vol. 96, No.1, 71-72.
65. A unique property of right-angled triangles
Mathematical Gazette, March 2003, 51-59.
66. Egy feladat – két változatban
Nyíregyházi Főiskola TTFK,
Természettudományi közlemények, 2003. 3. szám, 41-48.
67. Über den verallgemeinerten Höhensatz
Praxis der Mathematik in der Schule, Februar 2004, Heft 1, 24-25.
68. Generalizing a Construction of the Radical Axis
Octogon Math. Magazine, April 2004. Vol. 12, No.1, 243-247.
69. Triangles with Euler Lines in Special Positions
Octogon Math. Magazine, April 2004. Vol. 12, No.1, 275-283.
70. Feedback 87.47
Math. Gazette, July 2004. Vol.88, No. 512, 318-319.
71. A Pitagorasz-tétel egy nem közismert általánosítása
A Matematika Tanítása, 2004. 5. szám, 25-27.
72. Converse of a property of right triangles
Mathematical Gazette, March 2005, 72-76.
73. Highlighting the regular polygon
Mathematics Teacher, March 2005, 453.

Közlésre elfogadott dolgozatok

1. Über die Potenz eines Punktes - vektoriell
Praxis der Mathematik in der Schule
2. Addenda to note 85.63-in three steps
Mathematical Gazette, Nov. 2005.
3. A new generalization of the Pythagorean theorem
Mathematical Gazette, March 2007.

Előadások

1. Síkbeli egybevágósági transzformációk leírása tengelyes tükrözésekkel
Középiskolai tanári továbbképzés, 1975, Nyíregyháza.
2. Distribution of Fibonacci numbers mod 5c
Conference on Fibonacci numbers and their applications, 1986, Eger.
3. Fibonacci-számok eloszlása modulo 5c
MTA Szabolcs-Szatmár-Bereg megyei Tudományos Testületének tudományos közgyűlése, 1993, Nyíregyháza.
4. Fibonacci sorozatok egy családjának majdnem egyenletes eloszlásáról
MTA Szabolcs-Szatmár-Bereg megyei Tudományos Testületének tudományos közgyűlése, 1994, Nyíregyháza.
5. Über Bildpunktkonstruktionen zur Inversion
32. Tagung für Didaktik der Mathematik, 1998, München.
6. Két kör hatványvonalának szerkesztése inverzióval
MTA Sz-Sz-B megyei TT Tud. közgy., 1999, Nyíregyháza
7. Speciális helyzetű Euler-egyenes
A Magyar Tudomány Napja, 2003. nov.11.
8. A Pitagorsz-tétel egy nem közismert általánosítása
A Magyar Tudomány Napja, 2004. nov.9.

EGY FELADAT – TÖBBFÉLE MEGOLDÁS
Tanítási ötletek az elemi geometria néhány témaköréhez

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a Matematika tudományágban

Írta: Dr. Darvasi Gyula okleveles középiskolai tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori
iskolája
(matematika didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Kovács Zoltán egyetemi docens

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Páles Zsolt	egyetemi tanár
tagok:	Dr. Ambrus András	egyetemi docens
	Dr. Pethő Attila	egyetemi tanár

A doktori szigorlat időpontja: 2003. február 5.

Az értekezés bírálói:

Dr.	
Dr.	
Dr.	

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	
tagok:	Dr.	
	Dr.	
	Dr.	
	Dr.	

Az értekezés védésének időpontja: 200...