

Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

**New results related to factorials,
arithmetic progressions
and perfect powers**

by Ágoston Papp

Supervisor: Dr. Lajos Hajdu



UNIVERSITY OF DEBRECEN
Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
Debrecen, 2024.

1 Introduction

This dissertation contains new results in Diophantine number theory in three topics. The first part is about factorials and densities of certain subsets connected to the classical problem of representing factorials as sums of squares. The second part concerns the problem of common values of products of consecutive terms of arithmetic progressions and various polynomials. The third part deals with the number of powers in a fixed number of consecutive terms of arithmetic progressions. In what follows, we briefly outline the problems considered and the new results obtained. A detailed introduction to the topics, including a thorough survey of the corresponding literature, and the precise formulation of our results, together with their embedding in the literature, is given in the corresponding sections.

The first topic we consider is related to arithmetic properties of factorials. On the one hand, we are interested in the densities of sets of n such that the exponents of given primes in the prime factorization of $n!$ hold certain congruence properties. On the other hand, given M , we investigate the behavior of the M -free parts of factorials. In fact we study the combination of these two properties. Here the following problem of Erdős and Graham [25] can be considered to be the starting point. Is it true that for any finite set $\{p_1, \dots, p_k\}$ of primes there exist infinitely many n , such that the exponents of the p_i ($i = 1, \dots, k$) in $n!$ are all even? The topic has a huge literature: this and related questions have been studied among others by Berend, Kolesnik, Luca, Stănică and many more (see e.g. [4, 5, 52, 53]). Another question, considered by Deshouillers and Luca [21] concerns the representability of factorials by sums of three squares. To attack this question, one has to make a further step: beside understanding the behavior of the exponent of 2 in $n!$, it is also necessary to describe the behavior of the odd part of $n!$. Our new results (published in [40]) yield a general step into this direction: we are able to describe the simultaneous behavior of the

exponents of p in $n!$ and the p -free part of $n!$. We give several related theorems, among others, we are able to sharpen the corresponding result of Deshouillers and Luca [21]. To prove our theorems we need to combine various ideas of algebraic and combinatorial nature.

The second problem we discuss is about the common values of polynomials and products of consecutive terms of arithmetic progressions. Here the starting point is a classical result due to Fermat and Euler, showing that the product of four consecutive terms of an arithmetic progression (apart from trivial cases) cannot be a square. The most important theorem in the field is that of Erdős and Selfridge [27], saying that the product of consecutive positive integers is never a perfect power. This result has been generalized into many directions by several authors, including but not restricted to Shorey, Tijdeman, Saradha, Győry, Bennett, Hajdu, Pintér, Tengely, Siksek (see e.g. [2, 35, 36, 60, 61, 62, 64, 67]). The three most important directions are: omit a few terms from the block of consecutive integers; instead of consecutive integers consider consecutive terms of an arithmetic progression; instead of a perfect power y^ℓ on the right hand side take a polynomial $g(y) \in \mathbb{Z}[y]$. We give new results (published in [42] and [44]) which concern a common generalization of these directions, and extend many related papers from the literature. More precisely, we provide various finiteness results for the integer solutions x, y of equations of the form

$$\prod_{a \in A} (x - c - ad) = g(y),$$

where $g(y) \in \mathbb{Z}[y]$, c, d are rationals and $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ for some positive integer n . That is, the product on the left hand side is taken over some terms of an arithmetic progression. In the special case where g is a shifted power, that is of the form $g(y) = ay^\ell + b$, our results are based upon Baker's method and are effective. In case of general g , we use a classical theorem of Bilu and Tichy [8] and our results are ineffective. To make these powerful tools work, we need to use and

combine many ideas. Among others, we discover a deep link between the Prouhet-Terry-Escott problem and indecomposability of polynomials, which play a very important role in the proofs of our ineffective results. Finally, we mention that we also have somewhat related results in our paper [41] concerning equations of the shape $A!B! = C!$. However, we do not include these results here.

The third field we consider concerns upper bounds for the number $P_\ell(N)$ of ℓ -th powers among N consecutive terms of an arithmetic progression. Here the starting point is a conjecture of Erdős, predicting that $P_2(N) = o(N)$. This conjecture has been proved by Szemerédi [66]. A much stronger conjecture is due to Rudin, saying that $P_2(N) = O(\sqrt{N})$. This conjecture is still open, in spite of several related papers and deep results of Bombieri, Granville, Pintz, Zannier and others (see e.g. [10, 11]). Recently, Hajdu and Tengely [46] extended the research from $\ell = 2$ to the general case, and proved that for any ℓ there is a 'best' arithmetic progression, containing the most ℓ -th powers asymptotically. Our new results from [43] are twofold: on the one hand, we show that these 'best' arithmetic progressions contain only 'slightly more' ℓ -th powers than the 'average', and on the other hand we give a sharp upper bound for the number of powers (with not fixed exponents) among the first N terms of arithmetic progressions. In our proofs we combine various tools, including a classical result of Wigert [70] concerning the number of divisors of positive integers.

2 Asymptotic density properties of the Sequence $(n!)$

2.1 Introduction

To formalize the questions and results we study in this section consider the following generalized problem, which contains all the related problems studied earlier in the literature.

Problem 2.1. Let p_1, \dots, p_t be distinct primes, m_1, \dots, m_t be integers greater than 1, and r_1, \dots, r_t be given integers. Set

$$A = A(p_1, \dots, p_t; m_1, \dots, m_t; r_1, \dots, r_t) = \\ \{n : \nu_{p_i}(n!) \equiv r_i \pmod{m_i} \ (i = 1, \dots, t)\},$$

where for q being a prime, $\nu_q(k)$ stands for the exponent of q in the prime factorization of the positive integer k . Is it true that for any choice of the parameters p_i, m_i, r_i ($i = 1, \dots, t$) the set A is non-empty (or even infinite)? Does the set A have a density? Is A relatively dense? (That is, is there an absolute constant c such that the differences of the consecutive elements of A are bounded by c ?)

A large part of the above problem is already solved. In the special case where p_1, \dots, p_t are the first t primes, $m_1 = \dots = m_t = 2$ and $r_1 = \dots = r_t = 0$ (i.e. the original question of Erdős and Graham [25]), Problem 2.1 was answered to the affirmative by Berend [4]. More precisely, Berend showed that in this case A is infinite, and further, it is relatively dense. Berend also provided the same result in the case where $m_1 = \dots = m_t$ is arbitrary (still only for p_1, \dots, p_t being the first t primes and $r_1 = \dots = r_t = 0$). Later on, Chen and Zhu [18] formulated Problem 2.1 in the case $m_i = 2$ with $r_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, t$). (In fact they asked only about the relative density of A , but not about

its density.) Among other results they proved that (in their settings) either A is empty, or it is infinite and even relatively dense. Sander [59] proved that if $t = 1$, then A is infinite, further, it has a density of $1/2$. He also proved that for $t = 2$, A is always infinite. Chen [17] could solve the problem of Chen and Zhu [18] completely, i.e. he proved the relative density of A in Problem 2.1 with $m_i = 2$ and arbitrary $r_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, t$). Problem 2.1 with arbitrary moduli m_i ($i = 1, \dots, t$) was first considered by Luca and Stănică [53] (see their Conjecture 2; in fact they did not ask about relative density). They could prove that under the assumption $p_i \nmid m_i$ ($i = 1, \dots, t$) the density of A exists and it is equal to $1/m_1 \cdots m_t$. Finally, Berend and Kolesnik [5] proved that Conjecture 2 in [52] is true. That is, they showed that the density of A in Problem 2.1 always exists, and equals to $1/m_1 \cdots m_t$.

We shall also be interested in the behavior of the 'remaining' part of $n!$ (obtained after removing some primes).

Problem 2.2. Let $m > 1$ be a positive integer and take an integer r coprime to m . Set $M = \prod_{p|m} p$ and for any positive integer k , write $k^{(M)}$ for the M -free part of k , that is, set $k^{(M)} := k / \prod_{p|M} p^{\nu_p(k)}$. Put

$$B = B(m; r) = \{n : (n!)^{(M)} \equiv r \pmod{m}\}.$$

Is it true that for any choice of the integers m, r , the set B is non-empty (or even infinite)? Does the set B have a density? Is B relatively dense?

Later we shall see that this problem (in combination with Problem 2.1) has an application concerning the set of those integers n for which $n!$ is representable as a sum of three squares. At this point we mention a related, classical question: what is the distribution of the numbers $1!, 2!, \dots, (p-1)!$ modulo p , where p is a prime? (see F11 in [34]) Answering a question of Erdős, Rokowska and Schinzel [57] showed that if $2!, \dots, (p-1)!$ are all distinct modulo p , then the missing residue

is $-((p-1)/2)!$, and $p \equiv 5 \pmod{8}$ must hold; however, there is no such p with $5 < p \leq 1000$. According to a standard conjecture (see F11 of [34] again), approximately p/e modulo p residue classes are not represented by $n!$, as p tends to infinity. This problem has a huge literature; see e.g. the papers [32, 47] and the references given there. For other related questions, we also refer to the paper [52].

As a combination of Problems 2.1 and 2.2, we also consider

Problem 2.3. Let p_1, \dots, p_t be distinct primes, and let m_1, \dots, m_t and r_1, \dots, r_t be integers with $m_i \geq 2$ ($i = 1, \dots, t$). Further, let $m > 1$ be a positive integer and r be an integer with $\gcd(m, r) = 1$. Put $M = \prod_{p|m} p$. Let

$$C = C(p_1, \dots, p_t; m_1, \dots, m_t; r_1, \dots, r_t; m; r) =$$

$$\{n : \nu_{p_i}(n!) \equiv r_i \pmod{m_i} \ (i = 1, \dots, t) \text{ and } (n!)^{(M)} \equiv r \pmod{m}\}.$$

Is it true that for any choice of the parameters $p_1, \dots, p_t, m_1, \dots, m_t, r_1, \dots, r_t, m, r$ the set C is non-empty (or even infinite)? Does the set C have a density? Is C relatively dense?

We think that in case of all the problems, the answers to all the questions are affirmative. In particular, we conjecture that for any choices of the parameters, both sets B and C have densities, and these are given by $1/\varphi(m)$ and $1/m_1 \cdots m_t \varphi(m)$, respectively. (As we mentioned before, the fact that the density of A exists and equals $1/m_1 \cdots m_t$, was proved by Berend and Kolesnik [5].) This would mean that the properties required in the definitions of the sets A and B , are independent. Later on, we shall give some support for this conjecture.

In case of Problems 2.2 and 2.3 we know about only very restricted results, which are related to the problem of representing factorials as sums of squares. This we shall explain a little later. In the case of three squares we arrive at Problem 2.3 with $t = 1, p_1 = 2, r_1 = 0, m = 8$ and

$r = 7$. In this particular case, Deshouillers and Luca [21] proved that the set of values of n satisfying (1) has a density of $7/8$. They also provided an asymptotic formula, saying that the number of n with (1) up to N is $(7/8)N + \mathcal{O}(N^{2/3})$. We mention that for the set of positive integers themselves, the corresponding qualitative results are long known. As one can easily check (and it must also be long known, though unfortunately we could not find any related reference), the density of the set of positive integers with even exponents of 2 in their prime factorization, is $2/3$. Further, the density of the set of positive integers having odd part congruent to 7 modulo 8, is clearly $1/4$. So it is not surprising that the set of positive integers *not* representable as the sum of three squares, is $1/6$. The latter statement was proved by Landau [49]. (See Wagstaff [68] for a similar result concerning the Schnirelmann density of the same set.)

The above problems are strongly related to the question of representing factorials as sum of squares. It is long known that the equation

$$n! = x^2$$

has no solutions in non-negative integers n, x for $n > 1$. This fact follows e.g. from Bertrand's postulate. Thus the question naturally arises: is it still possible to find infinitely many values of $n!$, such that the exponents of all $p \in P$ is even, where P is a given finite set of primes? In the case where P consists of the first t primes for some t , this question was posed by Erdős and Graham [25]. The question, and its various extensions have attracted a lot of attention. As it was noted by Erdős and Obláth [26], the equation

$$n! = x^2 + y^2$$

has no solutions in non-negative integers n, x, y for $n > 6$. (We have $6! = 720 = 12^2 + 24^2$.) This follows from the fact that for $n \geq 7$ there exists a prime p of the form $4k + 3$ between $n/2$ and n (see [15] and [22]). On the other hand, by a classical result of Lagrange we know

that the Diophantine equation

$$n! = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

is solvable for every n , in non-negative integers x, y, z, w . Consider now the remaining case

$$n! = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

in non-negative integers n, x, y, z . By a classical result of Gauss, it is known that an integer is *not* representable as the sum of three squares if and only if it is of the form $2^{2a}(8b + 7)$ with non-negative integers a, b . This provides a direct link to Problem 2.3.

As we saw, the question of representing $n!$ as the sum of at most two squares is treated by the knowledge concerning primes in the block of the first n positive integers. The much more general problem of describing the size of the largest prime factor in a block of consecutive integers has been investigated by many authors. For related results, we refer to the excellent, recent survey paper of Shorey and Tijdeman [64], and the references therein.

In this section we prove several new results concerning the most general question formulated, namely Problem 2.3. We take up the problem where the moduli are any powers of some prime p . We prove that for all choices of the other parameters, the conjecture formulated above is true; that is, in all cases C has the suspected density. We also prove that C is relatively dense, with an explicit bound for the gaps of the consecutive elements of C . In the particular case $p = 2$ and $m_1 = 2$, $m = 8$ we also prove that asymptotically, the error term is $\mathcal{O}(N^{1/2} \log^2 N)$ up to N , thus improving the result of Deshouillers and Luca [21]. In this special case we give a sharp upper bound for the gaps between the consecutive elements of C , as well.

2.2 New results

To formulate our general results, we need some notation. Let p be a prime and a, b be positive integers. Throughout this section we shall always assume that p, a, b are fixed. Put

$$I_1 = \{0, 1, \dots, p^a - 1\}, \quad I_2 = \{i : 1 \leq i \leq p^b, p \nmid i\} \quad \text{and} \quad I = I_1 \times I_2.$$

Observe that $|I| = (p-1)p^{a+b-1}$. To simplify the reference to these sets, by writing $\alpha \in I_1$ and $\beta \in I_2$ for arbitrary integers α and β with $p \nmid \beta$, we shall always mean the elements $\alpha' \in I_1$ and $\beta' \in I_2$, for which $\alpha' \equiv \alpha \pmod{p^a}$ and $\beta' \equiv \beta \pmod{p^b}$, respectively.

For $(\alpha, \beta) \in I$ put

$$H^{(\alpha, \beta)} = \{n : \nu_p(n!) \equiv \alpha \pmod{p^a}, (n!)^{(p)} \equiv \beta \pmod{p^b}\}.$$

Finally, we shall use the conventions

$$\nu_p(0) = 0 \quad \text{and} \quad 0^{(p)} = 1.$$

Our first two theorems solve the question of density and relative density in Problem 2.3 for $t = 1$ with $m_1 = p^a$ and $m = p^b$, where a, b are arbitrary positive integers, $p_1 = p$ is an arbitrary prime, and r_1 and r are arbitrary integers. The following statement shows that the pairs $(\nu_p(n!) \pmod{p^a}, (n!)^{(p)} \pmod{p^b})$ are uniformly distributed among the possible pairs.

Theorem 2.1 (Á. Papp, L. Hajdu [40]). *For all $(\alpha, \beta) \in I$, the set $H^{(\alpha, \beta)}$ has a density of $1/(p-1)p^{a+b-1}$.*

In case of relative density, we can even give an explicit upper bound for the differences between the consecutive terms of $H^{(\alpha, \beta)}$.

Theorem 2.2 (Á. Papp, L. Hajdu [40]). *For all $(\alpha, \beta) \in I$, the set $H^{(\alpha, \beta)}$ is relatively dense. Further, if we write $H_1^{(\alpha, \beta)} < H_2^{(\alpha, \beta)} < H_3^{(\alpha, \beta)} < \dots$ for the elements of $H^{(\alpha, \beta)}$, then we have*

$$H_{i+1}^{(\alpha, \beta)} - H_i^{(\alpha, \beta)} \leq 2p^{\max(a, b) + b(p-1)p^{a+2b-2} - b + 1}$$

for all $i \geq 1$.

As a simple consequence of the above theorems we obtain the following.

Corollary 2.1. *For any $\alpha \in I_1$ and $\beta \in I_2$, the sets*

$$\{n : \nu_p(n!) \equiv \alpha \pmod{p^a}\} \quad \text{and} \quad \{n : (n!)^{(p)} \equiv \beta \pmod{p^b}\}$$

are relatively dense and are of densities $1/p^a$ and $1/(p-1)p^{b-1}$, respectively.

Note that the fact that the density of the first set is $1/p^a$, follows from the earlier mentioned results of Berend and Kolesnik [5].

Now we give alike, but more precise statements in the special case of $p = 2$, $a = 1$ and $b = 3$. This case is of particular interest, since it describes the density of the set of values of n for which $n!$ is expressible as a sum of three squares.

The next theorem improves and extends an earlier mentioned result of Deshouillers and Luca [21]. In that paper only the case $(\alpha, \beta) = (0, 7)$ has been investigated (though it seems to be clear that the methods applied in [21] are capable to handle all the other choices of (α, β)). Our result significantly improves the error term $\mathcal{O}(x^{2/3})$ in [21], too.

Theorem 2.3 (Á. Papp, L. Hajdu [40]). *Let $p = 2$, $a = 1$, $b = 3$ and $(\alpha, \beta) \in I$. Then for all $x > 0$ we have*

$$|H^{(\alpha, \beta)} \cap [0, x]| = (1/8)x + \mathcal{O}(x^{1/2} \log^2 x).$$

Our final theorem gives the precise value for the maximal gap length in the sets $H^{(\alpha,\beta)}$ in this special case.

Theorem 2.4 (Á. Papp, L. Hajdu [40]). *Let $p = 2$, $a = 1$, $b = 3$ and $(\alpha, \beta) \in I$. Then the set $H^{(\alpha,\beta)}$ is relatively dense, and if we write $H_1^{(\alpha,\beta)} < H_2^{(\alpha,\beta)} < H_3^{(\alpha,\beta)} < \dots$ for the elements of $H^{(\alpha,\beta)}$, then we have $H_{i+1}^{(\alpha,\beta)} - H_i^{(\alpha,\beta)} \leq 42$ for all $i \geq 1$. Further, the upper bound 42 is sharp for all $(\alpha, \beta) \in I$.*

Remark 2.1. Clearly, for the special choices $p = 2$, $a = 1$ and $b \leq 3$ Corollary 2.1 also follows from Theorems 2.3 and 2.4.

3 Results related to indecomposability of polynomials and Diophantine equations

In this section we study questions related to Diophantine equations of the shape

$$(x - a_1) \cdots (x - a_t) = g(y)$$

where the set $\{a_1, \dots, a_t\}$ has certain properties. In the first subsection we study the case where we have products of consecutive terms of arithmetic progressions, with one term missing. Then, in the second subsection, we give a further generalization, with many missing terms from the progression in the left hand side.

3.1 Shifted power values of products of terms from an arithmetic progression

3.1.1 Introduction

A classical result of Erdős and Selfridge [27] says that the product of consecutive positive integers is never a perfect power, that is, the equation

$$x(x+1) \cdots (x+n-1) = y^\ell \tag{2}$$

has no solutions in positive integers x, n, y, ℓ with $n \geq 2$ and $\ell \geq 2$. This result and also equation (2) has been generalized into various directions.

The first extension of the problem we mention is when on the left hand side of (2), we omit a term from the product, that is, we consider the equation

$$x(x+1) \cdots (x+j-1)(x+j+1) \cdots (x+n-1) = y^\ell$$

in positive integers x, n, y, ℓ with $n \geq 2$ and $\ell \geq 2$, where $0 \leq j \leq n-1$. Confirming a conjecture of Erdős and Selfridge, Saradha and Shorey [60, 61] proved that the only solutions of the above equation are given by

$$\frac{4!}{3} = 2^3, \quad \frac{6!}{5} = 12^2, \quad \frac{10!}{7} = 720^2.$$

The second direction of extensions we mention (which probably attracted the most attention) is when instead of products of consecutive integers one takes products of terms of an arithmetic progression. More precisely, one considers the equation

$$x(x+d) \cdots (x+(n-1)d) = y^\ell$$

in positive integers x, d, n, y, ℓ with $n \geq 2$, $\ell \geq 2$ with $\gcd(x, d) = 1$. Under certain (mild, necessary) conditions Darmon and Granville [19] proved that for fixed n and ℓ , this equation has only finitely many solutions in x, d, y . (See also Győry, Hajdu and Saradha [37] for a further generalization.) Recently, Bennett and Siksek [2] proved that if n is large enough, then this equation has only finitely many solutions in x, d, y, ℓ . On the other hand, for small values of n , namely for $3 < n < 35$, a result of Győry, Hajdu and Pintér [36] in accordance with a conjecture of Erdős says that (under certain trivial necessary restrictions) this equation has no solutions at all. We also mention that combining the two directions mentioned above, Saradha and Shorey [62] provided results for equations of the above shape, with one term of the progression missing from the product on the left hand side.

The third direction of extensions we refer to is when in (2) in place of y^ℓ on the right hand side we take an arbitrary polynomial, that is, we consider the equation

$$x(x+1) \cdots (x+n-1) = g(y)$$

in integers x, n, y , $n > 0$ where $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$. Here we recall a result of Kulkarny and Sury [48] who could completely describe when this

equation can have infinitely many solutions in x, y , for n fixed. Further, in the particular case where $g(y)$ is of the shape $ay^\ell + b$, Yuan [71] could give effective upper bounds for x, y , while Bilu, Kulkarny and Sury [7] could prove an ineffective finiteness theorem for x, n, y, ℓ . With some extra conditions on $g(y) = ay^\ell$ Levin (see Section 5 in [50]) proved somewhat more general theorems. We also mention that if $g(y) = \binom{y}{\ell}$ then all solutions are completely described by results of Erdős [23] and Győry [35].

In this subsection we consider common generalizations of these results. Namely, we consider the equation

$$x(x+d)\cdots(x+(j-1)d)(x+(j+1)d)\cdots(x+(n-1)d) = g(y) \quad (3)$$

in integers x, d, n, y with $d \neq 0$, $n \geq 3$ and $0 \leq j \leq n-1$, where $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$. Note that the choice $j = 0$ (or $j = n-1$) gives back the classical case, where we have a full product on the left hand side. We shall prove finiteness result concerning equation (3). In the particular case where $g(y)$ is of the form $g(y) = ay^\ell + b$, we are able to provide effective upper bounds for the solutions x, y , as well. Note that the polynomials appearing on the left hand side, up to some special (completely described) cases are indecomposable, we do not prove it here. We mention that there are many results in the literature which are related in the sense that they concern equal values or polynomial values of terms of families of combinatorial polynomials. We cannot survey the extremely huge literature, we only refer to the papers [1, 6, 13, 38, 39, 45, 65] and the references there.

The main tools we use is Baker's method (through results of Schinzel and Tijdeman [63] and Brindza [12]). However, to make it work we need to combine several arguments of combinatorial nature, as well.

3.1.2 New results

For the smooth formulation of our main result, we introduce the following notations. Let n, j, d be integers with $d \neq 0$, $n \geq 3$ and $0 \leq j \leq n - 1$, and put

$$f_{n,j}(x) = x(x+d) \cdots (x+(j-1)d)(x+(j+1)d) \cdots (x+(n-1)d).$$

Note that in the following theorem also the exponent ℓ is a variable, so in fact this theorem concerns families of polynomials $g(y)$.

Theorem 3.1 (Á. Papp, L. Hajdu [42]). *Let $n \geq 8$, $0 \leq j \leq n - 1$ and let $a, b \in \mathbb{Q}$ with $a \neq 0$. Then for all solutions of the equation*

$$f_{n,j}(x) = ay^\ell + b \tag{4}$$

in integers x, y, ℓ with $\ell \geq 2$ we have $\max(|x|, |y|, \ell) < C_0$, where C_0 is an effectively computable constant depending only on n, a, b . Here we use the convention that for $|y| \leq 1$ we have $\ell = 2, 3$.

Remark 3.1. One can easily check that we have

$$f_{7,3}(x) = (x^3 + 9dx^2 + 20d^2x + 6d^3)^2 - 36d^6. \tag{5}$$

This shows that (4) with $n = 7$, $j = 3$ and $a = 1$, $b = -36d^6$, $\ell = 2$ has infinitely many integer solutions x, y . Thus the assumption $n \geq 8$ in Theorem 3.1 is necessary.

3.2 The Prouhet-Tarry-Escott problem, arithmetic progressions, indecomposability of polynomials and Diophantine equations

3.2.1 Introduction

The Prouhet-Tarry-Escott problem, shortly PTE, asks to describe disjoint pairs A and B of sets of integers such that their first k power sum

symmetric polynomials are equal (cf. [55]). For example, if

$$A = \{2, 3, 7\} \quad \text{and} \quad B = \{1, 5, 6\}$$

then we can take $k = 2$, since we have

$$2 + 3 + 7 = 1 + 5 + 6 \quad \text{and} \quad 2^2 + 3^2 + 7^2 = 1^2 + 5^2 + 6^2. \quad (6)$$

In this subsection we connect the PTE problem, and the question for which polynomials $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ the equation $f(x) = g(y)$ has infinitely many solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ if the zeros of f are simple and form (almost) an arithmetical progression. Both problems have attracted a lot of attention. Already at this point we mention that the latter question (through a deep result of Bilu and Tichy [8]) is closely related to decomposability of polynomials. A polynomial $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ is decomposable if we can write $f(x) = h_1(h_2(x))$ with $h_1, h_2 \in \mathbb{Q}[x]$, in a nontrivial way. (Later we shall give the precise notion.) For example,

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5)(x - 6)(x - 7)$$

is decomposable, since as one can readily check we have $f(x) = h_1(h_2(x))$ with

$$h_1(x) = (x - 2 \cdot 3 \cdot 7)(x - 1 \cdot 5 \cdot 6), \quad h_2(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 7) + 2 \cdot 3 \cdot 7. \quad (7)$$

The similarity of (6) and (7) is not a coincidence; in this subsection we show the general connections between these properties. In subsection 3.2.2 we form the theorems which describe the connection between these properties. The proofs of our theorems are given in separate subsections.

There is an extensive literature on binomial coefficients which are equal or differ by a small or fixed constant (see e.g. [31, 65, 69] and the references there). In the latter paper the authors study the related Diophantine equation

$$\binom{f_1(x)}{k} + \binom{x}{2} = \binom{f_2(x)}{2},$$

in polynomials $f_1, f_2 \in \mathbb{Q}[x]$ with $\deg f_1 = 2$, $\deg f_2 = k$. Benne de Weger remarked that this equation leads to the following problem (private communication).

Problem 3.1. Let $k \geq 1$. Describe the values of k for which it is possible to partition the set $\{1, \dots, 2k + 1\}$ into a singleton A_0 and two sets A_1 and A_2 with $k = |A_1| = |A_2|$, such that the symmetric polynomials $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ of the elements of A_1 and of A_2 coincide.

This is the PTE-problem for $n = 2k + 1$. De Weger added that he had solutions for $k = 1, 2, 3$ and had proved that there are none for $4 \leq k \leq 14$. A solution for $k = 3$ is $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{1, 5, 6\}$. Indeed we have

$$2 + 3 + 7 = 1 + 5 + 6,$$

and, by (7),

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 &= \frac{(2 + 3 + 7)^2 - (2^2 + 3^2 + 7^2)}{2} = \\ &= \frac{(1 + 5 + 6)^2 - (1^2 + 5^2 + 6^2)}{2} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 6. \end{aligned}$$

In this subsection we study the following more general problem.

Problem 3.2. Let r be a fixed non-negative integer. Describe those positive integers n for which the set $\{1, \dots, n\}$ can be partitioned into sets A_0, A_1, \dots, A_t with $t \geq 2$, $|A_0| = r$ and

$$k := |A_1| = \dots = |A_t| \geq 2$$

such that all the symmetric polynomials $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ of the elements of the A_i ($i = 1, \dots, t$) coincide.

The problem asks: is it possible to omit a ‘few’ elements from the set $\{1, \dots, n\}$ such that the remaining set can be splitted into t subsets

which have pairwise the PTE-property? Observe that Problem 3.1 is the special case $r = 1$, $t = 2$.

In Theorem 3.2 we show that if r is small enough with respect to n , then only $k = 2$ is possible and A_1, A_2, \dots, A_t are symmetric. We call a set $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}$ with $a_1 < \dots < a_k$ symmetric if the sums $a_i + a_{k+1-i}$ ($i = 1, \dots, k$) are all equal. It is obvious that such a symmetry implies a PTE-structure.

Next we establish a new link between PTE-problems and the indecomposability of certain polynomials. We recall some standard notions. Let K be a field and $f \in K[x]$. Then f is called decomposable (or composite) over K if there exist $h_1, h_2 \in K[x]$ such that

$$f(x) = h_1(h_2(x)) \quad (h_1, h_2 \in K[x], \deg h_1 > 1, \deg h_2 > 1).$$

Otherwise f is called indecomposable. If $f(x) = h_1(h_2(x))$ and $\lambda(x) \in K[x]$ is a linear polynomial, then $f(x) = h_3(h_4(x))$ with $h_3(x) = h_1(\lambda^{-1}(x))$ and $h_4(x) = \lambda(h_2(x))$ is another decomposition of $f(x)$. In the sequel we do not distinguish between such equivalent decompositions. Further, we consider the polynomials $f(x), f(\lambda(x))$, as well as the polynomials $f(x), \lambda(f(x))$ to be equivalent. There is a vast literature on (in)decomposability of polynomials (see e.g. [6, 8, 9, 20, 29, 30, 56] and the references there). In Theorem 3.3 we show that the studied variant of the PTE problem is equivalent to asking for the indecomposability of certain polynomials.

Using this connection, we show in Corollary 3.1 for given integers $n > r \geq 0$ with r small enough with respect to n that if for $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ with $|A| = n - r$ the polynomial

$$f_{A,c,d}(x) := \prod_{a \in A} (x - c - ad), \quad c, d \in \mathbb{Q}, \quad d \neq 0 \quad (8)$$

is decomposable over \mathbb{Q} as $h_1(h_2(x))$, then h_1 and h_2 can be given explicitly. Note that the polynomial $f_{A,c,d}(x)$ represents the product with

terms of an arithmetic progression of length n with r terms missing. For example, if

$f_A(x) := f_{A,0,1}(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)$ is decomposable as $h_1(h_2(x))$, then, apart from equivalence,

$$h_2(x) = x^2 - 10x, \quad h_1(x) = (x+9)(x+16)(x+21)(x+24).$$

Next, using the above results, we establish a finiteness theorem for the number of times that a polynomial $f_{A,c,d}$ of the form (8) assumes a value which is also assumed by a given polynomial P with rational coefficients. In Theorem 3.4 we provide a finiteness result for the number of values of $f_{A,c,d}$ also taken by another polynomial $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$. This result, similarly to the above mentioned ones, is ineffective.

Finally, we consider shifted power values (i.e. values of the shape $ay^\ell + b$) of $f_{A,c,d}$. Related problems have been investigated by many authors, the literature has been surveyed in the previous subsection. In particular, we shall generalize our Theorem 3.1. Note however, that in the proof of our more general result, Theorem 3.1 will play a useful role.

In the equation

$$f_{A,c,d}(x) = ay^\ell + b$$

we give an effective upper bound for the exponent ℓ and for the integer values x, y for which this equation holds, in Theorem 3.5. This result implies for example that for every integer $n \geq 24$ and rational numbers a, b with $a \neq 0$ there exists an effectively computable number C_2 such that the equation $f_A(x) = ay^\ell + b$ with $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $|A| = n - 2$ implies $\max(|x|, |y|, \ell) < C_2$.

Our results make a step forward towards the solution of the problem how much one can ‘mutilate’ an arithmetic progression such that the corresponding product of terms still can take only finitely many values of a given polynomial, or shifted power values.

3.2.2 New results

In connection with Problem 3.2 we prove the following result.

Theorem 3.2 (Á. Papp, L. Hajdu, R. Tijdeman [44]). *Let n, r be non-negative integers with*

$$n > 2r^{3/2} + 5r + 8. \quad (9)$$

Then every decomposition of $\{1, \dots, n\}$ as in Problem 3.2 has the following structure. Putting $A := \{1, \dots, n\} \setminus A_0$ with $r = |A_0|$, we have $k = 2$, and all classes $A_i = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, t$) are symmetric with respect to

$$\bar{a} := \frac{1}{n-r} \sum_{a \in A} a \quad (10)$$

that is,

$$a_1^{(i)} + a_2^{(i)} = 2\bar{a} \quad (i = 1, \dots, t).$$

Remark 3.2. Theorem 3.2 yields a complete answer to Problem 3.2 for every $n > 2r^{3/2} + 5r + 8$. On the other hand, for any r and n with $n - r$ even, if $A = \{1, \dots, n\} \setminus A_0$ is symmetric with respect to \bar{a} (i.e. $a \in A$ implies that $2\bar{a} - a \in A$), then we have a partition as in Problem 3.2 with $k = 2$.

Remark 3.3. The following extension of Theorem 3.2 is also valid. Let b_1, \dots, b_n be a non-constant arithmetic progression in \mathbb{Q} . Put $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ and suppose that B_0, B_1, \dots, B_t is a partition of B such that $r := |B_0|$, $k := |B_1| = \dots = |B_t|$, $n > 2r^{3/2} + 5r + 8$ and for all $i = 1, \dots, t$ the symmetric polynomials $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ of the elements of B_i ($i = 1, \dots, t$) are the same. Then $k = 2$ and writing $B_i = \{b_1^{(i)}, b_2^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, t$) we have

$$b_1^{(i)} + b_2^{(i)} = b_1^{(j)} + b_2^{(j)} \quad (1 \leq i, j \leq t).$$

Indeed, writing $b_s = c + da_s$ with $a_s \in A \setminus A_0$ and $c, d \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$, it can be easily seen by induction on n that c can be taken to be zero. Then clearly, we may take $d = 1$, and the claim follows.

The next result establishes a link between partitions as in Problem 3.2 and decomposability of certain polynomials.

Theorem 3.3 (Á. Papp, L. Hajdu, R. Tijdeman [44]). *Let n be a positive integer and r a non-negative integer. Then there exists a partition A_0, A_1, \dots, A_t of $\{1, \dots, n\}$ as in Problem 3.2 if and only if there exists an $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ with $|A| = n - r$ such that the polynomial*

$$f_A(x) = \prod_{a \in A} (x - a) \quad (11)$$

is decomposable over \mathbb{Q} . In particular, if A_0, A_1, \dots, A_t is a partition of the required type, then $f_A(x) = h_1(h_2(x))$ with $A = \{1, \dots, n\} \setminus A_0$ and

$$h_2(x) = \prod_{a \in A_1} (x - a) - \prod_{a \in A_1} (-a)$$

and

$$h_1(x) = \left(x + \prod_{a \in A_1} (-a) \right) \cdots \left(x + \prod_{a \in A_t} (-a) \right).$$

Remark 3.4. From the proof of the theorem it will be clear that in fact h_2 is independent of which A_i we use in its definition.

As a simple consequence of Theorems 3.2 and 3.3 we obtain the following statement.

Corollary 3.1 (Á. Papp, L. Hajdu, R. Tijdeman [44]). *Let $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ with $|A| = n - r$ where n and r are integers with $r \geq 0$ and $n > 2r^{3/2} + 5r + 8$. Further, let $c, d \in \mathbb{Q}$ with $d \neq 0$. Then the polynomial*

$$f_{A,c,d}(x) = \prod_{a \in A} (x - c - ad) \quad (12)$$

is decomposable over \mathbb{Q} if and only if $n - r$ is even and A is symmetric with respect to

$$\bar{a} := \frac{1}{n - r} \sum_{a \in A} a,$$

when (up to equivalence) the only decomposition of $f_{A,c,d}(x)$ is given by $f_{A,c,d}(x) = \varphi^*\left(\left(\frac{x-c}{d} - \bar{a}\right)^2\right)$ with

$$\varphi^*(x) = d^{n-r} h_1(x - \bar{a}^2). \quad (13)$$

Here h_1 is the polynomial defined in Theorem 3.3 corresponding to the partition A_1, \dots, A_t of A with $|A_1| = |A_2| = \dots = |A_t| = 2$.

Next we apply our results to the equation $f_{A,c,d}(x) = P(y)$ where P is a given polynomial. The first theorem of this type is general, but ineffective: it only guarantees the finiteness of the number of integral solutions.

Theorem 3.4 (Á. Papp, L. Hajdu, R. Tijdeman [44]). *Let $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ with $|A| = n - r$ for integers $r \geq 0$ and $n > 2r^{3/2} + 5r + 8$ and let $c, d \in \mathbb{Q}$ with $d \neq 0$. Let $f_{A,c,d}(x)$ be as in (12) and let $P(y) \in \mathbb{Q}[y]$ with $\deg P \geq 2$. Then the equation*

$$f_{A,c,d}(x) = P(y) \quad (14)$$

has only finitely many integer solutions x, y , unless we are in one of the following cases:

- (i) $P(y) = f_{A,c,d}(T(y))$, where T is an arbitrary non-constant polynomial with rational coefficients,
- (ii) $P(y) = \varphi^*(Q(y))$, where φ^* is given by (13) and Q is a non-constant polynomial with rational coefficients having at most two roots of odd multiplicities.

Remark 3.5. In cases (i) and (ii) one can easily give examples where equation (14) has infinitely many integer solutions x, y .

If the right hand side of (14) is of the shape $ay^\ell + b$ where ℓ is also unknown, then we can give an effective result.

Theorem 3.5 (Á. Papp, L. Hajdu, R. Tijdeman [44]). *Let $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ with $|A| = n - r$ with integers $r \geq 0$ and $n > 2r^{3/2} + 5r + 8$ and let $c, d \in \mathbb{Q}$ with $d \neq 0$. Let $f_{A,c,d}(x)$ be given by (12) and let $a, b \in \mathbb{Q}$ with $a \neq 0$. Then all solutions of the equation*

$$f_{A,c,d}(x) = ay^\ell + b \tag{15}$$

in integers x, y, ℓ with $\ell \geq 2$ satisfy $\max(|x|, |y|, \ell) < C_3$ for some effectively computable constant C_3 depending only on a, b, c, d, n . Here we use the convention that for $|y| \leq 1$ we have $\ell \leq 3$.

4 Uniform bounds for the number of powers in arithmetic progressions

4.1 Introduction

In this section we consider the problem of determining the number of powers among the first N terms of an arithmetic progression.

Let a, b, ℓ be integers with $a > 0$ and let $\ell \geq 2$. Write $P_{a,b;N}(\ell)$ for the number of ℓ -th powers among the first N terms of the arithmetic progression $ax + b$ ($x \geq 0$). Denote by $P_N(\ell)$ the maximum of these values taken over all arithmetic progressions $ax + b$. (Note that this maximum obviously exists.) The case of squares (i.e. $\ell = 2$) has been studied by many authors. Erdős [24] conjectured and Szemerédi [66] proved that $P_N(2) = o(N)$. Later, by deep tools (such as e.g. elliptic and higher genus curves, Faltings' theorem, the distribution of primes etc.) Bombieri, Granville and Pintz [10] proved $P_N(2) < O(N^{2/3+o(1)})$, which subsequently was improved to $P_N(2) < O(N^{3/5+o(1)})$ by Bombieri and Zannier [11]. See also Granville [33] for related results and remarks. A strong conjecture of Rudin (see [58], end of paragraph 4.6) predicts that $P_N(2) = O(\sqrt{N})$, or in an even more precise form, that

$$P_N(2) = P_{24,1;N}(2) = \sqrt{\frac{8}{3}N} + O(1) \quad (N \geq 6) \quad (16)$$

should hold.

In case $\ell \geq 3$ there is hardly anything known. The authors of [10] noted (without proof) that their methods probably make it possible to prove $P_N(3) \ll N^{3/5+\varepsilon}$ and $P_N(\ell) \ll N^{1/2+\varepsilon}$ ($\ell \geq 4$).

In this section we give sharp bounds for the number of ℓ -th powers and arbitrary (mixed) powers among the first N terms of an arithmetic progression, for N large enough.

The origin of this result is a paper by Hajdu and Tengely [46]. They showed that (up to equivalence) for any $\ell \geq 2$ there is a unique arithmetic progression $ax + b$ which contains the most ℓ -th powers asymptotically, that is, which maximizes the expression

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{x : ax + b \text{ is an } \ell\text{-th power, } 0 \leq x < N\}|}{\sqrt[\ell]{N}}.$$

(In fact, for $\ell = 4$ there are two such progressions.) They could describe these arithmetic progressions $a_\ell x + b_\ell$ explicitly. Based upon their results, they extended Rudin's conjecture (16) for any $\ell \geq 2$ (by replacing $24x + 1$ by $a_\ell x + b_\ell$ and changing the right hand side accordingly), and proved that for $\ell = 3, 4$ for certain small values of N . Note that this asymptotic ('global') version of the problem is simpler than the original 'local' one, namely when we concentrate on a finite part of the progressions. The reason is that the asymptotic approach brings in an 'averaging' effect, which roughly speaking makes it possible to concentrate on a complete (finite) period of a progression $ax + b$ modulo a .

In this section we prove that for any positive ε there is an ℓ_0 depending only on ε such that for $\ell > \ell_0$ the number of ℓ -th powers among the first N terms of any integral arithmetic progression is below $(1 + \varepsilon)\sqrt[\ell]{N}$, provided that N is large enough in terms of ε, ℓ and the parameters of the progression. The important feature of ℓ_0 is that it is uniform in the sense that it depends only on ε , it is independent of the progression. This result is sharp in the sense that for infinitely many ℓ , one can find a constant $c_1 = c_1(\ell) > 1$ and an arithmetic progression having more than $c_1\sqrt[\ell]{N}$ ℓ -th powers among its first N terms, for all N large enough. We also give a sharp upper bound for the number of powers (with not fixed exponents) among the first N terms of arithmetic progressions. In our proofs we combine a classical result of Wigert [70] concerning the number of divisors of positive integers, the above mentioned result of Hajdu and Tengely [46] concerning arithmetic progressions containing the most ℓ -th powers asymptotically, and a new assertion answering a

question of Hajdu and Tengely from [46].

We also give an upper bound for the number of powers in arithmetic progressions. For this, let $P_{a,b;N}(\ast)$ denote the number of (arbitrary) powers among the first N terms of the arithmetic progression $ax + b$ ($x \geq 0$). It will turn out that – as one would predict – here the number of squares is the decisive factor.

4.2 New results

Now we give our main results. We use the notation from the introduction.

Theorem 4.1 (Á. Papp, L. Hajdu [43]). *For every $\varepsilon > 0$ there is an ℓ_0 depending only on ε such that for any $\ell > \ell_0$ we have $P_{a,b;N}(\ell) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt[\ell]{N}$, whenever $N > N_0$. Here $N_0 = N_0(\varepsilon, \ell, a, b)$ depends on ε, ℓ, a, b .*

Remark 4.1. The above theorem is sharp in the sense that $1 + \varepsilon$ cannot be replaced by 1, and $\ell > \ell_0$ is also necessary. Indeed, Theorem 1 of [46] (see also the Remarks after it) implies that for infinitely many exponents $\ell \geq 2$ there exists a $\delta_\ell > 0$ and an arithmetic progression $a_\ell x + b_\ell$ with $P_{a_\ell, b_\ell; N}(\ell) > (1 + \delta_\ell)\sqrt[\ell]{N}$ for all $N > N_0$. Here $N_0 = N_0(\ell)$ depends only on ℓ .

It is clear that if an arithmetic progression $ax + b$ contains an ℓ -th power then it contains infinitely many, and we have

$$P_{a,b;N}(\ell) > \frac{1}{2a}\sqrt[\ell]{N}$$

for $N > N_0$, where N_0 depends on a, b .

We also mention that on our way to prove Theorem 4.1, we answer a question of Hajdu and Tengely [46].

Now we give the theorem concerning the case of mixed powers.

Theorem 4.2 (Á. Papp, L. Hajdu [43]). *Let $ax + b$ ($x \geq 0$) be an arithmetic progression. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists an N_0 such that*

$$P_{a,b;N}(\ast) < \left(\sqrt{\frac{8}{3}} + \varepsilon \right) \sqrt{N} \quad (17)$$

for any $N > N_0$. Here $N_0 = N_0(\varepsilon, a, b)$ depends only on ε, a, b .

Remark 4.2. One can easily check (see also e.g. Theorem 1 of [46]) that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_{24,1;N}(2)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

This shows that the above result is sharp.

Further, it is also easy to see that if $\gcd(a, b) = 1$ then there exist infinitely many exponents ℓ such that $ax + b$ contains ℓ -th powers. Note that here the condition $\gcd(a, b) = 1$ cannot be dropped: for example, the arithmetic progression $4x + 2$ ($x \geq 0$) contains no powers at all.

References

- [1] A. Bázsó, A. Bérczes, L. Hajdu, F. Luca, *Polynomial values of sums of products of consecutive integers*, *Monat. Math.* **187** (2018), 21–34.
- [2] M. Bennett, S. Siksek, *A conjecture of Erdős, supersingular primes and short character sums*, *Annals of Mathematics* **191** (2020), 355–392
- [3] A. Bérczes, B. Brindza, L. Hajdu, *On the power values of polynomials*, *Publ. Math. Debrecen* **53** (1998), 375–381.
- [4] D. Berend, *On the parity of exponents in the factorization of $n!$* , *J. Number Theory* **64** (1997), 13–19.
- [5] D. Berend and G. Kolesnik, *Regularity of patterns in the factorization of $n!$* , *J. Number Theory* **124** (2007), 181–192.
- [6] F. Beukers, T. N. Shorey and R. Tijdeman, *Irreducibility of polynomials and arithmetic progressions with equal product of terms*, in: *Number Theory in Progress (Proc. Internat. Conf. in Number Theory in Honor of A. Schinzel, Zakopane, 1997)*, K. Győry, H. Iwaniec and J. Urbanowicz (eds.), de Gruyter, 1999, pp. 11–26.
- [7] Yu. Bilu, M. Kulkarni, B. Sury, *The Diophantine equation $x(x+1)\dots(x+(m-1))+r=y^n$* , *Acta Arith.* **113** (2004), 303–308.
- [8] Yu. Bilu, R. Tichy, *The Diophantine equation $f(x)=g(y)$* , *Acta Arith.* **95** (2000), 261–288.
- [9] R. Blankertz, *A polynomial time algorithm for computing all minimal decompositions of a polynomial*, *ACM Comm. Computer Algebra* 48:1, Issue 187 (2014), 13–23.

- [10] E. Bombieri, A. Granville and J. Pintz, *Squares in arithmetic progressions*, Duke Math. J. **66** (1992), 369–385.
- [11] E. Bombieri and U. Zannier, *A note on squares in arithmetic progressions. II*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei **13** (2002), 69–75.
- [12] B. Brindza, *On S -integral solutions of the equation $y^m = f(x)$* , Acta Math. Hungar. **44** (1984), 133–139.
- [13] B. Brindza, Yu. Bilu, P. Kirschenhofer, Á. Pintér, R. Tichy, *Diophantine equations and Bernoulli polynomials*. With an appendix by A. Schinzel. Compositio Math. **131** (2002), 173–188.
- [14] W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265.
- [15] R. Breusch, *Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulates, das zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen*, Math. Zeitschrift **34** (1932), 505–526.
- [16] U. Cerucci, F. Vaccarino, *Vector Linear Recurrence Sequences in Commutative Rings*, Applications of Fibonacci Numbers, 1996, pp. 63–72.
- [17] Y.-G. Chen, *On the parity of exponents in the standard factorization of $n!$* , J. Number Theory **100** (2003), 326–331.
- [18] Y.-G. Chen and Y.-C. Zhu, *On the prime power factorization of $n!$* , J. Number Theory **82** (2000), 1–11.
- [19] H. Darmon, A. Granville, *On the equations $z^m = F(x, y)$ and $Ax^p + By^q = Cz^r$* , Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 513–543.
- [20] H. Davenport, D.J. Lewis, A. Schinzel, *Equations of the form $f(x) = g(y)$* , Quart. J. Oxford Ser. **12** (1961), 304–312.

- [21] J.-M. Deshouillers, F. Luca, *How often is $n!$ a sum of three squares?*, The Legacy of Alladi Ramakrishnan in the Mathematical Science (2010), pp. 243–251.
- [22] P. Erdős, *Über die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen*, Math. Zeitschrift **39** (1935), 473–491.
- [23] P. Erdős, *On a Diophantine equation*, J. London Math. Soc. **26** (1951), 176–178.
- [24] P. Erdős, *Quelques problèmes de théorie des nombres*, Monographies de L’Enseignement Mathématique **6** (1963), pp. 81–135.
- [25] P. Erdős and R. L. Graham, *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory*, L’Enseignement Mathématique, Imprimerie Kundig, Geneva, 1980.
- [26] P. Erdős and R. Obláth, *Über diophantische Gleichungen der Form $n! = x^p \pm y^p$ und $n! \pm m! = x^p$* , Acta Litt. Sci. Szeged **8** (1937), 241–255.
- [27] P. Erdős, J. L. Selfridge, *The product of consecutive integers is never a power*, Ill. J. Math. **19** (1975), 292–301.
- [28] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward, *Recurrence sequences*, Third Edition, American Mathematical Society (2015), pp. 318.
- [29] M. Fried, *On a theorem of Ritt and related Diophantine problems*, J. Reine Angew. Math. **264** (1973), 40–55.
- [30] M. Fried, *Variables separated polynomials, the genus 0 problem and moduli spaces*, Number Theory in Progress, vol. 1, Walter de Gruyter, Berlin, pp. 169–228 (1999).
- [31] H. R. Gallegos-Ruiz, N. Katsipis, Sz. Tengely, M. Ulas, *On the Diophantine equation $\binom{n}{k} = \binom{m}{l} + d$* , J. Number Theory **208** (2020), 418–440.

- [32] M. Z. Garaev, F. Luca and I. Shparlinski, *Character sums and congruences with $n!$* , Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 5089–5102.
- [33] A. Granville, *Squares in Arithmetic Progressions and Infinitely Many Primes*, Amer. Math. Monthly **124** (2017), 951–954.
- [34] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Third Edition, Springer (2004).
- [35] K. Györy, *On the Diophantine equation $\binom{n}{k} = x^l$* , Acta Arith. **80** (1997), 289–295.
- [36] K. Györy, L. Hajdu, Á. Pintér, *Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression*, Compositio Math. **145** (2009), 845–864.
- [37] K. Györy, L. Hajdu, N. Saradha, *On the Diophantine equation $n(n+d)\cdots(n+(k-1)d) = by^l$* , Canad. Math. Bull. **47** (2004), 373–388. Correction: *ibid.* **48** (2005), 636.
- [38] K. Györy, T. Kovács, Gy. Péter, Á. Pintér, *Equal values of standard counting polynomials*, Publ. Math. Debrecen **84** (2014), 259–277.
- [39] L. Hajdu, S. Laishram, Sz. Tengely, *Power values of sums of products of consecutive integers*, Acta Arith. **172** (2016), 333–349.
- [40] L. Hajdu, Á. Papp, *On asymptotic density properties of the sequence $(n!)_{n=0}^{\infty}$* , Acta Arith. **184** (2018), 317–340.
- [41] L. Hajdu, Á. Papp, T. Szakács, *On the equation $A!B! = C!$* , J. Number Theory **187** (2018), 160–165.
- [42] L. Hajdu, Á. Papp, *Polynomial values of products of terms from an arithmetic progression*, Monatshefte für Mathematik **193** (3) (2020), 637–655.

- [43] L. Hajdu, Á. Papp, *Uniform bounds for the number of powers in arithmetic progressions*, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. **116** (2022), 169.
- [44] L. Hajdu, Á. Papp, R. Tijdeman, *The Prouhet-Tarry-Escott Problem, Indecomposability of Polynomials and Diophantine Equations*, The Ramanujan J. **58** (2022), 1075–1093.
- [45] L. Hajdu, Á. Pintér, Sz. Tengely, N. Varga, *Equal values of figurate numbers*, J. Number Theory, **137** (2014), 130–141.
- [46] L. Hajdu and Sz. Tengely, *Powers in arithmetic progressions*, The Ramanujan J. **55** (2021), 965–986.
- [47] O. Klurman and M. Munsch, *Distribution of factorials modulo p* , J. Th. Nomb. Bordeaux **29** (2017), 169–177.
- [48] M. Kulkarni, B. Sury, *On the Diophantine equation $x(x+1)(x+2)\cdots(x+(m-1))=g(y)$* , Indag. Math. **14** (2003), 35–44.
- [49] E. Landau, *Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate*, Arch. Math. Phys. **13** (1908), 304–312.
- [50] A. Levin, *Variations on the theme of Runge: effective determination of integral points on certain varieties*, J. Th. Nomb. Bordeaux **20** (2008) no 2, 385–417.
- [51] R. Lidl, G. Mullen, G. Turnwald, *Dickson polynomials*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Longman Scientific & Technical, Harlow **65** (1993).
- [52] F. Luca and P. Stănică, *Products of factorials modulo p* , Colloq. Math. **96** (2003), 191–205.
- [53] F. Luca and P. Stănică, *On the prime power factorization of $n!$* , J. Number Theory **102** (2003), 298–305.

- [54] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory, I. Classical Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007).
- [55] S. Raghavendran, V. Varayanan, *The Prouhet Tarry Escott problem: A review*, MDPI, Mathematics **7** (2019), 227.
- [56] J. F. Ritt, *Prime and composite polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), 51–66.
- [57] B. Rokowska and A. Schinzel, *Sur un problème de M. Erdős*, Elem. Mat. **15** (1960), 84–85.
- [58] W. Rudin, *Trigonometric series with gaps*, J. Math. Mech. **9** (1960), 203–227.
- [59] J. W. Sander, *On the Parity of Exponents in the Prime Factorization of Factorials*, J. Number Theory **90** (2001), 316–328.
- [60] N. Saradha, T. N. Shorey, *Almost perfect powers in arithmetic progression*, Acta Arith. **99** (2001), 363–388.
- [61] N. Saradha, T. N. Shorey, *Almost squares and factorizations in consecutive integers*, Compositio Math. **138** (2003), 113–124.
- [62] N. Saradha, T. N. Shorey, *On the equation $n(n+d) \cdots (n+(i_0-1)d)(n+(i_0+1)d) \cdots (n+(k-1)d) = y^l$ with $0 < i_0 < k-1$* , Acta Arith. **129** (2007), 1–21.
- [63] A. Schinzel, R. Tijdeman, *On the equation $y^m = P(x)$* , Acta Arith. **31** (1976), 199–204.
- [64] T. Shorey and R. Tijdeman, *Arithmetic Properties of Blocks of Consecutive Integers*, in: From Arithmetic to Zeta-Functions, Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz (J. Sander, J. Steuding, R. Steuding, eds) (2017), pp. 455–471.

- [65] T. Stoll, R. F. Tichy, *The Diophantine equation $\alpha\binom{x}{m} + \beta\binom{y}{n} = \gamma$* , Publ. Math. Debrecen **64** (2004), 155–165.
- [66] E. Szemerédi, *The number of squares in an arithmetic progression*, Stud. Sci. Math. Hungar. **9** (1974), 417.
- [67] R. Tijdeman, *Applications of the Gel'fond-Baker method to rational number theory*, Topics in Number Theory, Proceedings of the Conference at Debrecen 1974, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **13**, pp. 399–416, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [68] S. S. Wagstaff, *The Schnirelmann density of the sums of three squares*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 1–7.
- [69] B. de Weger, *Equal Binomial Coefficients: Some Elementary Considerations*, J. Number Theory **63** (1997), 373–386.
- [70] S. Wigert, *Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier*, Ark. Mat. **3** (1906/7), 1–9.
- [71] P.-Z. Yuan, *On a special diophantine equation $a\binom{x}{m} = by^r + c$* , Publ. Math. Debrecen **44** (1994), 137–143.

5 Publications of Ágoston Papp

1. L. Hajdu, Á. Papp, *On asymptotic density properties of the sequence $(n!)_{n=0}^{\infty}$* , Acta Arith, **184** (2018), 317–340.
2. L. Hajdu, Á. Papp, T. Szakács, *On the equation $A!B! = C!$* , J. Number Theory **187** (2018), 160–165.
3. L. Hajdu, Á. Papp, *Polynomial values of products of terms from an arithmetic progression*, Monatshefte für Mathematik **193** (3) (2020), 637–655.
4. L. Hajdu, Á. Papp, R. Tijdeman, *The Prouhet-Tarry-Escott Problem, Indecomposability of Polynomials and Diophantine Equations*, The Ramanujan J. **58** (2022), 1075–1093.
5. L. Hajdu, Á. Papp, *Uniform bounds for the number of powers in arithmetic progressions*, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. **116**, 169 (2022)

6 Conference talks of Ágoston Papp

1. 24th Central European Number Theory Conference, *On Asymptotic Density Properties of the Sequence $(n!)_{n=0}^{\infty}$* (2019)
2. Number Theory Conference In honour of Professors Kálmán Györy, János Pintz and András Sárközy, *Uniform Bounds for the Number of Powers in Arithmetic Progressions* (2022)



Registry number: DEENK/39/2024.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Ágoston Papp

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10076876

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (4)

1. Hajdu, L., **Papp, Á.**, Tijdeman, R.: The Prouhet-Tarry-Escott problem, indecomposability of polynomials and Diophantine equations.
Ramanujan J. 58 (4), 1075-1093, 2022. ISSN: 1382-4090.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11139-022-00555-7>
IF: 0.7
2. Hajdu, L., **Papp, Á.**: Uniform bounds for the number of powers in arithmetic progressions.
Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 116 (4), 1-7, 2022. ISSN: 1578-7303.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s13398-022-01313-6>
IF: 2.9
3. Hajdu, L., **Papp, Á.**: Polynomial values of products of terms from an arithmetic progression.
Monatsh. Math. 193 (3), 637-655, 2020. ISSN: 0026-9255.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00605-020-01422-7>
IF: 0.808
4. Hajdu, L., **Papp, Á.**: On asymptotic density properties of the sequence $(n!)$.
Acta Arith. 184 (4), 317-340, 2018. ISSN: 0065-1036.
DOI: <http://dx.doi.org/10.4064/aa170410-21-8>
IF: 0.416





List of other publications

Foreign language scientific articles in international journals (1)

5. Hajdu, L., **Papp, Á.**, Szakács, T.: On the equation $A!B! = C!$
J. Number Theory. 187, 160-165, 2018. ISSN: 0022-314X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2017.10.020>
IF: 0.684

Other journal articles (1)

6. Hajdu, L., **Papp, Á.**: Correction to: Polynomial values of products of terms from an arithmetic progression.
Monatsh. Math. 195 (2), 377-377, 2021. ISSN: 0026-9255.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00605-021-01544-6>

Total IF of journals (all publications): 5,508

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 4,824

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

07 February, 2024



Doktori (PhD) értekezés tézisei

Új eredmények faktoriálisokról, számtani sorozatokról és teljes hatványokról

Papp Ágoston

Témavezető: Dr. Hajdu Lajos



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2024.

1. Bevezetés

A disszertáció három témakörben tartalmaz új eredményeket a di-
ofantikus számelméletben. Az első rész faktoriálisokról és bizonyos
részhalmazok sűrűségeiről szól, amelyek a faktoriálisok három négyzet
összegeként való előállításának klasszikus problémájához kapcsolódnak.
A második rész számtani sorozatok és bizonyos polinomok egymás
utáni tagjai szorzatainak közös értékeinek problémájával foglalkozik.
A harmadik rész számtani sorozatok adott számú egymást követő tag-
jaiban szereplő hatványok számát tárgyalja. A következőkben rövi-
den ismertetjük a vizsgált problémákat és a kapott új eredményeket.
A témák részletes bemutatását, beleértve a vonatkozó irodalom ala-
pos áttekintését, valamint eredményeink pontos megfogalmazását és
az irodalomba való beágyazását, a megfelelő részekben adjuk meg.

Az első vizsgált témakör faktoriálisok aritmetikai tulajdonságai. Egy-
résről azon n -ek halmazának sűrűségét vizsgáljuk, melyekre adott
prímek kitevői $n!$ -ban bizonyos kongruenciákat teljesítenek. Másfelől
adott M esetén vizsgáljuk faktoriálisok M -mentes részének a visel-
kedését. Valójában a két irány ötvözésével foglalkozunk. A kiinduló
probléma Erdős és Graham [25] nevéhez fűződik. Igaz-e, hogy prímek
bármely véges $\{p_1, \dots, p_k\}$ halmazára végtelen sok olyan n létezik, me-
lyekre a p_i ($i = 1, \dots, k$) kitevője $n!$ -ban páros? A témának nagy
irodalma van, többek között Berend, Kolesnik, Luca, Schinzel ta-
nulmányozták (lásd [4, 5, 52, 53]). Egy másik, Deshouillers és Lu-
ca [21] által vizsgált kérdés faktoriálisok három négyzetszámként való
előállításával foglalkozik. A probléma vizsgálatához nem csak a 2 ki-
tevőjét, de a páratlan rész viselkedését is ismerni kell $n!$ -ban. Új
eredményeink (lásd [40]) általánosak, $n!$ -ban egy p prím kitevőjének
és a p -mentes résznek az együttes viselkedését írják le. Több tételt
is bizonyítunk, többek között Deshouillers és Luca [21] eredményének
becslését is élesítjük. A bizonyításhoz kombinatorikai és algebrai mód-
szereket is használunk.

A második probléma, amelyet tárgyalunk, polinomok és számtani sorozatok egymást követő tagjai szorzatainak közös értékeivel foglalkozik. Itt a kiindulópont Fermat és Euler egy klasszikus eredménye, mely szerint egy számtani sorozat négy egymást követő tagjának szorzata (a triviális esetektől eltekintve) nem lehet négyzet. A terület legfontosabb tétele Erdős és Selfridge eredménye [27], amely szerint egymást követő pozitív egész számok szorzata sosem teljes hatvány. Ezt az eredményt több szerző számos irányba általánosította, többek között, de nem kizárólagosan Shorey, Tijdeman, Saradha, Győry, Bennett, Hajdu, Pintér, Tengely és Siksek (lásd [2, 35, 36, 60, 61, 62, 64, 67]). A három legfontosabb irány a következő: hagyjunk el néhány tényezőt a szorzatból; az egymást követő egész számok helyett tekintsük egy számtani sorozat egymást követő tagjait; a jobb oldalon y^ℓ helyett vegyünk egy $g(y) \in \mathbb{Z}[y]$ polinomot. Olyan új eredményeket mutatunk be (lásd [42] és [44]), melyek ezen irányok közös általánosításai, és számos kapcsolódó eredményt általánosítanak. Különböző végességi eredményeket adunk a

$$\prod_{a \in A} (x - c - ad) = g(y)$$

egyenlet x, y egész megoldásaira, ahol $g(y) \in \mathbb{Z}[y]$, c, d racionális számok és valamilyen n egészre $A \subseteq \{1, \dots, n\}$. Azaz a bal oldali szorzat egy számtani sorozat tagjaiból áll. Abban a speciális esetben, amikor g eltolt hatvány, azaz $g(y) = ay^\ell + b$, eredményünk a Baker-módszeren alapul és effektív. Általános g esetén Bilu és Tichy [8] klasszikus tételét használjuk, és a tételek ineffektívek. Ezen erős eszközök használatához számos ötletet kombinálunk. Többek között bemutatunk egy újonnan felfedezett kapcsolatot a Prouhet-Tarry-Escott probléma és polinomok dekomponálhatósága között, ami kulcsszerepet játszik az érvelésünkben. Végül megemlítjük, hogy egy részben kapcsolódó publikációnk [41] az $A!B! = C!$ egyenlettel foglalkozik, bár az eredményeket a disszertációban nem mutatjuk be.

A harmadik vizsgált terület számtani sorozatok első N tagjában elő-

forduló ℓ -edik hatványok $P_\ell(N)$ számával foglalkozik. A kiindulópont Erdős egy sejtése, melyet Szemerédi [66] bizonyított: $P_2(N) = o(N)$. Rudin egy jóval erősebb sejtése, hogy $P_2(N) = O(\sqrt{N})$. Ez a sejtés még nyitott, de többen is publikáltak már mély eredményeket a kérdésben, többek között Bombieri, Granville, Pintz, Zannier és mások (lásd [10, 11]). Nemrégiben Hajdu és Tengely [46] kiterjesztették a vizsgálatot $\ell = 2$ -ről az általános esetre, és megmutatták, hogy minden ℓ esetén van egy „legjobb” számtani sorozat, ami aszimptotikusan a legtöbb ℓ -edik hatványt tartalmazza. A mi új eredményeink [43] kétirányúak. Egyrészt megmutatjuk, hogy a „legjobb” sorozat csak „kicsit több” ℓ -edik hatványt tartalmaz, mint az „átlag”. Másrészt éles felső korlátot adunk a (nem rögzített kitevőjű) hatványok számára számtani sorozatok első N tagjában. Bizonyításainkban több módszert is használunk, köztük Wigert [70] egy osztók számára vonatkozó klasszikus eredményét.

2. Az $(n!)$ sorozat aszimptotikus sűrűségéről

2.1. Bevezetés

A következő jelölések és problémák segítenek az eredmények kimondásában és az irodalom bemutatásában is.

2.1. Probléma. Legyenek p_1, \dots, p_t különböző prímek, $m_1, \dots, m_t > 1$ egészek és r_1, \dots, r_t egészek. Legyen

$$A = A(p_1, \dots, p_t; m_1, \dots, m_t; r_1, \dots, r_t) = \\ \{n : \nu_{p_i}(n!) \equiv r_i \pmod{m_i} \ (i = 1, \dots, t)\},$$

ahol egy q prím esetén $\nu_q(k)$ a q kitevőjét jelöli a k egész prímfaktorizációjában. Igaz-e, hogy a p_i, m_i, r_i ($i = 1, \dots, t$) paraméterek tetszőleges megválasztása esetén az A nem üres (vagy akár végtelen)? Van sűrűsége az A halmaznak? Relatív sűrű? (Azaz van-e egy abszolút c konstans, hogy az A -beli egymást követő elemek távolsága legfeljebb c ?)

A fenti probléma jelentős része már megoldott. Abban az esetben, amikor p_1, \dots, p_t az első t prím, $m_1 = \dots = m_t = 2$ és $r_1 = \dots = r_t = 0$ (azaz Erdős és Graham [25] eredeti problémája), a 2.1 Problémára Berend [4] adott pozitív választ. Pontosabban Berend megmutatta, hogy ekkor A végtelen és relatív sűrű. Berend azt is igazolta, hogy ugyanez igaz, ha $m_1 = \dots = m_t$ tetszőleges (de p_1, \dots, p_t továbbra is az első t prím és $r_1 = \dots = r_t = 0$). Később Chen és Zhu [18] megfogalmazta a 2.1 Problémát $m_i = 2$ és $r_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, t$) mellett. (Valójában csak A relatív sűrűségére vonatkozóan, a sűrűségére nem.) Más eredmények mellett azt is megmutatták, hogy ekkor A vagy üres, vagy végtelen és relatív sűrű. Sander [59] igazolta, hogy ha $t = 1$,

akkor A végtelen és sűrűsége $1/2$. Szintén belátta, hogy $t = 2$ esetén A mindig végtelen. Chen [17] teljesen meg tudta oldani a Chen és Zhu [18] által felvetett problémát, azaz bizonyította, hogy A relatív sűrű, ha $m_i = 2$ és $r_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, t$) tetszőleges. A 2.1 Problémát tetszőleges m_i ($i = 1, \dots, t$) modulusokkal először Luca és Stănică [53] vizsgálták (lásd Conjecture 2; bár a relatív sűrűséggel nem foglalkoztak). Belátták, hogy ha $p_i \nmid m_i$ ($i = 1, \dots, t$), akkor A sűrű, és sűrűsége $1/m_1 \cdots m_t$. Végül Berend és Kolesnik [5] igazolták Conjecture 2-t [52]-ben. Azaz megmutatták, hogy a 2.1 Probléma A halmaza mindig sűrű, és sűrűsége $1/m_1 \cdots m_t$.

Szintén érdekes lehet $n!$ néhány prím elhagyása után „megmaradt” részének a vizsgálata.

2.2. Probléma. Legyen $m > 1$ pozitív egész és r egy m -hez relatív prím egész. Legyen $M = \prod_{p|m} p$, és egy k pozitív egész esetén jelölje $k^{(M)}$ a k egész M -mentes részét, azaz $k^{(M)} := k / \prod_{p|M} p^{\nu_p(k)}$. Legyen

$$B = B(m; r) = \{n : (n!)^{(M)} \equiv r \pmod{m}\}.$$

Igaz-e, hogy az m, r egészek tetszőleges (érvényes) megválasztása mellett a B halmaz nem üres, vagy akár végtelen? Van-e sűrűsége B -nek? Relatív sűrű-e?

Később látni fogjuk, hogy ennek a problémának (kombinálva a 2.1 Problémával) van alkalmazása azon n -ek halmazának vizsgálatában, melyekre $n!$ előáll három négyzetszám összegeként. Ezen a ponton csak megemlítünk egy klasszikus kérdést: mi az $1!, 2!, \dots, (p-1)!$ számok modulo p eloszlása, ahol p prím (lásd [34] F11)? Erdős egy kérdésére válaszolva Rokowska és Schinzel [57] megmutatták, hogy ha $2!, \dots, (p-1)!$ mind különböző modulo p , akkor a hiányzó maradék $-((p-1)/2)!$ és $p \equiv 5 \pmod{8}$; mindazonáltal nincs ilyen $5 < p \leq 1000$ prím. Egy általános sejtés szerint (lásd [34] F11) nagyjából p/e modulo p maradékosztály nincs reprezentálva $n!$ által ahogy $p \rightarrow \infty$. Ennek

a témakörnek gazdag irodalma van, lásd [32, 47] és az ottani hivatkozásokat. Más, hasonló kérdések is találhatóak [52]-ben.

A 2.1 és 2.2 Problémák kombinációjaként vizsgáljuk az alábbi.

2.3. Probléma. Legyenek p_1, \dots, p_t különböző prímek, m_1, \dots, m_t és r_1, \dots, r_t egészek, melyekre $m_i \geq 2$ ($i = 1, \dots, t$). Legyen továbbá $m > 1$ egész, r egész és $\text{luko}(m, r) = 1$. Legyen $M = \prod_{p|m} p$ és legyen

$$C = C(p_1, \dots, p_t; m_1, \dots, m_t; r_1, \dots, r_t; m; r) =$$

$$\{n : \nu_{p_i}(n!) \equiv r_i \pmod{m_i} \ (i = 1, \dots, t) \text{ és } (n!)^{(M)} \equiv r \pmod{m}\}.$$

Igaz-e, hogy a $p_1, \dots, p_t, m_1, \dots, m_t, r_1, \dots, r_t, m, r$ paraméterek tetszőleges (érvényes) megválasztása mellett a C halmaz nem üres, vagy akár végtelen? Van-e sűrűsége C -nek? Relatív sűrű-e?

Szerintünk a válasz minden esetben igenlő. Pontosabban, azt sejtjük, hogy a B és C halmazoknak van sűrűségük és ezek $1/\varphi(m)$ illetve $1/m_1 \cdots m_t \varphi(m)$. (Ahogy már említettük, A -nak van sűrűsége, mégpedig $1/m_1 \cdots m_t$, ahogy Berend és Kolesnik [5] bebizonyították.) Ez azt jelentené, hogy az A és B halmazok ezen tulajdonságai függetlenek.

A 2.2 és 2.3 Problémák esetében csak kevés eredmény ismert, azok is faktoriálisok három négyzetszám összegeként való reprezentációjával kapcsolatosak. Ekkor a 2.3 Probléma $t = 1, p_1 = 2, r_1 = 0, m = 8$ és $r = 7$ esetében vagyunk. Deshouillers és Luca [21] bebizonyították, hogy azon n -ek sűrűsége, melyekre $n!$ előáll három négyzetszám összegeként $7/8$, sőt, megmutatták, hogy ezen n -ek száma N -ig $(7/8)N + \mathcal{O}(N^{2/3})$. Megemlítjük, hogy a pozitív egészek halmazára a kapcsolódó eredmény már régóta ismert. Könnyen ellenőrizhető (így bizonyára régóta tudott, de sajnos nem találtunk hivatkozást hozzá), hogy azon egészek halmazának sűrűsége, melyek prímfaktorizációjában a 2 kivevője páros, $2/3$. Továbbá, azon egészek halmazának $1/4$ a sűrűsége,

melyek páratlan része 7-tel kongruens modulo 8. Nem meglepő tehát, hogy azon egészek halmazának sűrűsége, melyek *nem* állnak elő három négyzetszám összegeként éppen $1/6$. Ezt Landau [49] bizonyította. (Wagstaff [68] ugyanezen halmaz Schnirelmann sűrűségét vizsgálta.)

A fent említett problémák erősen kapcsolódnak faktoriálisok három négyzetszámként való reprezentációjához. Régóta ismert, hogy az

$$n! = x^2$$

egyenletnek nincs n, x nem negatív egész megoldása $n > 1$ esetén. Ez következik például a Bertrand posztulátumból. Adódik a kérdés: létezik-e végtelen sok $n!$, melyben a $p \in P$ prímek kitevői párosak prímek egy P véges halmazára? Abban az esetben, amikor P az első t prímszám Erdős és Graham [25] vetette fel a problémát. Sok figyelmet vonzott ez a kérdés. Erdős és Obláth [26] mutatta meg, hogy az

$$n! = x^2 + y^2$$

egyenletnek nincs n, x, y nem negatív megoldása, ha $n > 6$. (Azonban $6! = 720 = 12^2 + 24^2$.) Ez következik például abból, hogy $n \geq 7$ esetén létezik legalább egy $4k + 3$ alakú p prím $n/2$ és n között (lásd [15] és [22]). Másfelől Lagrange egy klasszikus eredménye szerint az

$$n! = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

egyenlet minden n esetén megoldható x, y, z, w nem negatív egészekkel. Tekintsük most a fennmaradó

$$n! = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

egyenletet n, x, y, z nem negatív egészek mellett. Gauss egy klasszikus eredménye szerint egy egész pontosan akkor *nem* áll elő három négyzetszám összegeként, ha $2^{2a}(8b + 7)$ alakú valamely a, b nem negatív egészekkel. Ez közvetlen kapcsolat a 2.3 Problémához.

Ahogy láttuk, $n!$ legfeljebb két négyzetszámként való előállításának kérdését az első n egész közötti prímelek kérdéseként kezelték. Az egymásutáni egészekből álló blokkok legnagyobb prímfaktorának kérdését szintén sokat vizsgálták. Kapcsolódó eredmények találhatóak Shorey és Tijdeman [64] cikkében és az ott szereplő hivatkozásokban.

Ebben a fejezetben a legáltalánosabb megfogalmazott témával, azaz a 2.3 Problémával kapcsolatos új eredményeket mutatunk be, a modulusok egy adott p prím hatványai lesznek. Megmutatjuk, hogy a paraméterek tetszőleges megválasztása esetén a C halmaznak létezik sűrűsége, és ez a sejthető érték. Szintén bebizonyítjuk, hogy C relatív sűrű egy explicit korlát mellett. A $p = 2$, $m_1 = 2$, $m = 8$ esetben azt is megmutatjuk, hogy N -ig a hibatag aszimptotikusan $\mathcal{O}(N^{1/2} \log^2 N)$, azaz Deshouillers és Luca [21] eredményét tovább javítjuk. Ebben a speciális esetben is adunk korlátot C szomszédos elemeinek távolságára.

2.2. Új eredmények

Az eredmények megfogalmazásához bevezetünk néhány jelölést. Legyen p prím és a, b pozitív egészek. Ebben a fejezetben feltesszük, hogy p, a, b rögzítettek. Legyenek

$$I_1 = \{0, 1, \dots, p^a - 1\}, \quad I_2 = \{i : 1 \leq i \leq p^b, p \nmid i\} \quad \text{és} \quad I = I_1 \times I_2.$$

Ekkor $|I| = (p - 1)p^{a+b-1}$. A könnyebb hivatkozás kedvéért az $\alpha \in I_1$ és $\beta \in I_2$ elemek rendre olyan tetszőleges $\alpha, \beta, p \nmid \beta$ egészeket jelölnek, melyekre $\alpha' \in I_1, \beta' \in I_2$, valamint $\alpha' \equiv \alpha \pmod{p^a}$ és $\beta' \equiv \beta \pmod{p^b}$.

Legyen $(\alpha, \beta) \in I$ esetén

$$H^{(\alpha, \beta)} = \{n : \nu_p(n!) \equiv \alpha \pmod{p^a}, (n!)^{(p)} \equiv \beta \pmod{p^b}\}.$$

Végül használjuk a következő konvenciókat:

$$\nu_p(0) = 0, \quad 0^{(p)} = 1.$$

Az első két tételünk a 2.3 Probléma $t = 1$, $m_1 = p^a$ és $m = p^b$ esetét oldja meg, ahol a, b tetszőleges egészek, $p_1 = p$ tetszőleges prím, r_1 és r tetszőleges egészek. A következő tétel megmutatja, hogy a $(\nu_p(n!) \pmod{p^a}, (n!)^{(p)} \pmod{p^b})$ párok egyenlően oszlanak el a lehetséges párok között.

2.1. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu [40]). *Minden $(\alpha, \beta) \in I$ esetén a $H^{(\alpha, \beta)}$ halmaz sűrűsége $1/(p-1)p^{a+b-1}$.*

A relatív sűrűség esetén explicit felső korlátot adunk a $H^{(\alpha, \beta)}$ -beli szomszédos elemek távolságára.

2.2. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu [40]). *Minden $(\alpha, \beta) \in I$ esetén a $H^{(\alpha, \beta)}$ halmaz relatív sűrű. Továbbá, ha $H_1^{(\alpha, \beta)} < H_2^{(\alpha, \beta)} < H_3^{(\alpha, \beta)} < \dots$ a $H^{(\alpha, \beta)}$ halmaz elemei, akkor*

$$H_{i+1}^{(\alpha, \beta)} - H_i^{(\alpha, \beta)} \leq 2p^{\max(a, b) + b(p-1)p^{a+2b-2} - b + 1}$$

minden $i \geq 1$ esetén.

A fenti két tétel egyszerű következménye az alábbi.

2.1. Következmény. *Minden $\alpha \in I_1$ és $\beta \in I_2$ esetén az*

$$\{n : \nu_p(n!) \equiv \alpha \pmod{p^a}\} \quad \text{és} \quad \{n : (n!)^{(p)} \equiv \beta \pmod{p^b}\}$$

halmazok relatív sűrűk, és sűrűségük rendre $1/p^a$ és $1/(p-1)p^{b-1}$.

Megjegyezzük, hogy az első halmaz $1/p^a$ sűrűsége következik Berend és Kolesnik [5] korábban említett eredményéből is.

Most hasonló, de precízebb eredményeket adunk a $p = 2$, $a = 1$ és $b = 3$ speciális esetben. Ez az eset azért érdekes, mert ez írja le azon n -ek halmazát, melyekre $n!$ előáll három négyzetszám összegeként.

A következő tétel javítja, és kiterjeszti Deshouillers és Luca [21] eredményét. Cikkükben ők csak az $(\alpha, \beta) = (0, 7)$ esetet vizsgálták (bár úgy tűnik, hogy a [21]-ben használt módszerek más (α, β) esetén is használhatók). Eredményünk jelentősen javítja a [21]-ben adott $\mathcal{O}(x^{2/3})$ hibatagot.

2.3. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu [40]). *Legyenek $p = 2$, $a = 1$, $b = 3$ és $(\alpha, \beta) \in I$. Ekkor minden $x > 0$ esetén*

$$|H^{(\alpha, \beta)} \cap [0, x]| = (1/8)x + \mathcal{O}(x^{1/2} \log^2 x).$$

Utolsó fejezetbeli tételünk pontos értéket ad a $H^{(\alpha, \beta)}$ -beli szomszédos elemek maximális távolságára.

2.4. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu [40]). *Legyenek $p = 2$, $a = 1$, $b = 3$ és $(\alpha, \beta) \in I$. Ekkor a $H^{(\alpha, \beta)}$ halmaz relatív sűrű. Továbbá, ha $H_1^{(\alpha, \beta)} < H_2^{(\alpha, \beta)} < H_3^{(\alpha, \beta)} < \dots$ a $H^{(\alpha, \beta)}$ halmaz elemei, akkor $H_{i+1}^{(\alpha, \beta)} - H_i^{(\alpha, \beta)} \leq 42$ minden $i \geq 1$ esetén. A 42 felső korlát minden $(\alpha, \beta) \in I$ esetén éles.*

2.1. Megjegyzés. Világos, hogy a $p = 2$, $a = 1$ és $b \leq 3$ esetén a 2.1 Következmény a 2.3 és 2.4 Tételekből is adódik.

3. Polinomok dekomponálhatóságával és diofantikus egyenletekkel kapcsolatos eredmények

Ebben a fejezetben

$$(x - a_1) \cdots (x - a_t) = g(y)$$

alakú diofantikus egyenletekkel foglalkozunk az $\{a_1, \dots, a_t\}$ halmazra fennálló különböző feltételek mellett. Az első alfejezetben azt az esetet vizsgáljuk, amikor a bal oldalon számtani sorozatok egymást követő tagjainak szorzatai vannak, de egy tag hiányzik. Ezután a második alfejezetben egy további általánosítást adunk, amikor a bal oldalon több hiányzó tag is van.

3.1. Számtani sorozatok tagjai szorzatának eltolt hatványértékei

3.1.1. Bevezetés

Erdős és Selfridge [27] egy klasszikus eredménye szerint egymást követő egészek szorzata sosem teljes hatvány, azaz az

$$x(x + 1) \cdots (x + n - 1) = y^\ell \tag{2}$$

egyenletnek nincs megoldása x, n, y, ℓ pozitív egészek mellett ($n \geq 2$ és $\ell \geq 2$). Ezt az eredményt és a (2) egyenletet is sokan sok irányban általánosították.

A probléma első kiterjesztése az, amikor a (2) egyenlet bal oldalán egy tényezőt elhagyunk a szorzatból, azaz az

$$x(x + 1) \cdots (x + j - 1)(x + j + 1) \cdots (x + n - 1) = y^\ell$$

egyenletet vizsgáljuk x, n, y, ℓ pozitív egészek mellett ($n \geq 2, \ell \geq 2$ és $0 \leq j \leq n - 1$). Erdős és Selfridge egy sejtését igazolva Saradha és Shorey [60, 61] megmutatta, hogy a fenti egyenletnek három megoldása van:

$$\frac{4!}{3} = 2^3, \quad \frac{6!}{5} = 12^2, \quad \frac{10!}{7} = 720^2.$$

Az általánosítások közül másodikként azt említjük, amikor szomszédos egészek helyett számtani sorozatok egymást követő tagjai szerepelnek a bal oldalon. A legtöbb figyelmet talán ez az irány kapta, az

$$x(x + d) \cdots (x + (n - 1)d) = y^\ell$$

egyenlet x, d, n, y, ℓ pozitív egészekben ($n \geq 2, \ell \geq 2$ és $\text{lko}(x, d) = 1$). Néhány (enyhe, de szükséges) feltétel mellett Darmon és Granville [19] bebizonyították, hogy rögzített n és ℓ esetén az egyenletnek csak véges sok x, d, y megoldása van. (További általánosításokért lásd Győry, Hajdu és Saradha [37] munkáját.) Bennett és Siksek [2] igazolták, hogy ha n elég nagy, akkor az egyenletnek véges sok x, d, y, ℓ megoldása van. Másfelől, kicsi n -ekre, $3 < n < 35$ esetén Győry, Hajdu és Pintér [36] bizonyították, hogy – Erdős egy sejtésének megfelelően, néhány triviális, szükséges megszorítással – az egyenletnek nincs megoldása. Szintén megemlítjük, hogy a két irány kombinálásával Saradha és Shorey [62] bizonyítottak eredményeket abban az esetben, ha a bal oldalon számtani sorozat egymást követő tagjainak szorzata áll, de egy tényező hiányzik.

A (2) egyenlet harmadik általánosítása az, amikor a jobb oldalon y^ℓ helyett egy tetszőleges polinomot nézünk, azaz

$$x(x + 1) \cdots (x + n - 1) = g(y),$$

ahol x, n, y egészek, $n > 0$ és $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$. Kiemeljük Kulkarny és Sury [48] eredményét, akik teljesen leírták, hogy rögzített n esetén mikor lehet végtelen sok x, y megoldása az egyenletnek. Továbbá, abban a speciális esetben, amikor $g(y) = ay^\ell + b$, Yuan [71] effektív

felső korlátot adott x, y -ra, míg Bilu, Kulkarny és Sury [7] ineffektív végességi eredményt bizonyított x, n, y, ℓ -re. Néhány további feltétel mellett $g(y) = ay^\ell$ -re Levin ([50] 5. Fejezet) valamivel általánosabb tételeket igazolt. Szintén megemlítjük, hogy a $g(y) = \binom{y}{\ell}$ esetben Erdős [23] és Győry [35] nyomán minden megoldás ismert.

Ebben a fejezetben a fenti eredmények közös általánosítását vizsgáljuk. Tekintsük az

$$x(x+d) \cdots (x+(j-1)d)(x+(j+1)d) \cdots (x+(n-1)d) = g(y) \quad (3)$$

egyenletet x, d, n, y egészekben ($d \neq 0$, $n \geq 3$ és $0 \leq j \leq n-1$), ahol $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$. A $j = 0$ (vagy $j = n-1$) esetek a klasszikus esetet adják vissza. Végességi eredményt adunk a (3) egyenlet megoldásaira. Abban az esetben, amikor $g(y) = ay^\ell + b$, effektív végességi korlátot adunk x, y -ra. Megjegyezzük, hogy a bal oldalon szereplő polinomok néhány speciális, teljesen leírt esetet kivéve nem dekomponálhatóak. Számos eredmény ismert, melyekben kombinatorikus polinomok polinomértékeit vizsgálják, de az irodalom gazdagsága miatt csupán felsorolunk néhány hivatkozást [1, 6, 13, 38, 39, 45, 65].

Fő eszközünk Schinzel és Tijdeman [63], valamint Brindza [12] eredményeit felhasználva a Baker-módszer, de az alkalmazásukhoz kombinatorikai módszereket is használunk.

3.1.2. Új eredmények

Az eredmények megfogalmazásához bevezetünk néhány jelölést. Legyenek n, j, d egészek, melyekre $d \neq 0$, $n \geq 3$ és $0 \leq j \leq n-1$, valamint legyen

$$f_{n,j}(x) = x(x+d) \cdots (x+(j-1)d)(x+(j+1)d) \cdots (x+(n-1)d).$$

Kiemeljük, hogy a következő tételben ℓ is változó, tehát valójában a

$g(y)$ polinomcsaládról szól az állítás.

3.1. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu [42]). *Legyenek $n \geq 8$, $0 \leq j \leq n - 1$ és legyenek $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Ekkor az*

$$f_{n,j}(x) = ay^\ell + b \quad (4)$$

egyenlet minden egész x, y, ℓ ($\ell \geq 2$) megoldására $\max(|x|, |y|, \ell) < C_0$, ahol C_0 egy effektíven kiszámolható, csak n, a, b -től függő konstans. Az $\ell = 2, 3$ esetekben az $|y| \leq 1$ konvenciót használjuk.

3.1. Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$f_{7,3}(x) = (x^3 + 9dx^2 + 20d^2x + 6d^3)^2 - 36d^6. \quad (5)$$

Ezek szerint (4) az $n = 7$, $j = 3$, $a = 1$, $b = -36d^6$, $\ell = 2$ választással végtelen sok x, y egész megoldással rendelkezik. Ez mutatja, hogy az $n \geq 8$ feltétel a 3.1 Tételben szükséges.

3.2. A Prouhet-Tarry-Escott problémakör, számtani sorozatok, polinomok dekomponálhatósága és diofantikus egyenletek

3.2.1. Bevezetés

A Prouhet-Tarry-Escott problémakör – röviden PTE – felvetése, hogy adjuk meg egészek olyan A, B diszjunkt halmazait, melyekben szereplő egészek első k szimmetrikus polinomjainak összege megegyezik (lásd [55]). Például

$$A = \{2, 3, 7\} \quad \text{és} \quad B = \{1, 5, 6\}$$

esetén ha $k = 2$, akkor

$$2 + 3 + 7 = 1 + 5 + 6 \quad \text{és} \quad 2^2 + 3^2 + 7^2 = 1^2 + 5^2 + 6^2. \quad (6)$$

Ebben az alfejezetben összekapcsoljuk a PTE problémát és azt a kérdést, hogy mely $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomok esetén van az $f(x) = g(y)$ egyenletnek végtelen sok $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása, ha f gyökei egyszeresek és (majdnem) számtani sorozatot alkotnak. Mindkét problémát sokan vizsgálták. Kiemeljük, hogy a második (Bilu és Tichy [8] egy mély eredménye nyomán) szoros kapcsolatban van polinomok dekomponálhatóságával. Az $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom dekomponálható, ha felírható nemtriviálisan $f(x) = h_1(h_2(x))$ alakban, ahol $h_1, h_2 \in \mathbb{Q}[x]$. (Később ezt precízen definiáljuk.) Például

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)(x-7)$$

dekomponálható, hisz felírható $f(x) = h_1(h_2(x))$ alakban, ahol

$$h_1(x) = (x-2 \cdot 3 \cdot 7)(x-1 \cdot 5 \cdot 6), \quad h_2(x) = (x-2)(x-3)(x-7) + 2 \cdot 3 \cdot 7. \quad (7)$$

A (6) és (7) egyenletek hasonlósága nem véletlen, a következőkben kifejtjük a kapcsolatot ezek között.

Hatalmas irodalma van azon binomiális együtthatóknak, melyek egyenlők, vagy csak egy rögzített, kis konstansban térnek el (lásd például [31, 65, 69] és az ottani hivatkozásokat). Az utóbbi publikációban a szerzők az

$$\binom{f_1(x)}{k} + \binom{x}{2} = \binom{f_2(x)}{2},$$

diofantikus egyenletet vizsgálták, ahol $f_1, f_2 \in \mathbb{Q}[x]$ és $\deg f_1 = 2$, $\deg f_2 = k$. Benne de Weger (személyes beszélgetés során) megmutatta, hogy ez az egyenlet a következő problémához vezet.

3.1. Probléma. Legyen $k \geq 1$. Írjuk le azon k értékeket, melyekre az $\{1, \dots, 2k+1\}$ halmaz felosztható egy egyelemű A_0 halmazra és két A_1, A_2 halmazra, melyekre $k = |A_1| = |A_2|$ úgy, hogy a $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ polinomok az A_1, A_2 halmazok elemeire egyenlők.

Ez a PTE-probléma $n = 2k + 1$ -re. De Weger megmutatta, hogy $k = 1, 2, 3$ meg van a megoldása, és bebizonyította, hogy nincs megoldás

$4 \leq k \leq 14$ -re. Egy megoldás $k = 3$ -ra $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{1, 5, 6\}$.
Ekkor

$$2 + 3 + 7 = 1 + 5 + 6,$$

és (7) miatt

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 &= \frac{(2 + 3 + 7)^2 - (2^2 + 3^2 + 7^2)}{2} = \\ &= \frac{(1 + 5 + 6)^2 - (1^2 + 5^2 + 6^2)}{2} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 6. \end{aligned}$$

Ebben az alfejezetben az alábbi, általánosabb problémát tárgyaljuk.

3.2. Probléma. Legyen r egy rögzített, nem negatív egész. Írjuk le azokat az n pozitív egészeket, melyekre az $\{1, \dots, n\}$ halmaz particionálható A_0, A_1, \dots, A_t halmazokra, ahol $t \geq 2$, $|A_0| = r$ és

$$k := |A_1| = \dots = |A_t| \geq 2$$

úgy, hogy a $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ szimmetrikus polinomok az A_i ($i = 1, \dots, t$) halmazok elemeire egyenlőek.

Azaz el lehet-e hagyni „néhány” elemet az $\{1, \dots, n\}$ halmazból, hogy a maradék elemek feloszthatóak t részhalmazra, melyekre páronként teljesül a PTE-tulajdonság? Világos, hogy a 3.1 Probléma az $r = 1$, $t = 2$ speciális eset.

A 3.2 Tételben megmutatjuk, hogy ha r elég kicsi n -hez képest, akkor csak $k = 2$ lehetséges, és az A_1, A_2, \dots, A_t halmazok szimmetrikusak. Egy $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}$, $a_1 < \dots < a_k$ halmazt szimmetrikusnak nevezünk, ha az $a_i + a_{k+1-i}$ ($i = 1, \dots, k$) összegek mind egyenlők. Világos, hogy ez a szimmetria egyben a PTE-tulajdonságot is biztosítja.

Most bemutatjuk a kapcsolatot a PTE-probléma és a dekomponálhatóság között. Ehhez bevezetünk néhány jelölést. Legyen K test és

$f \in K[x]$. Ekkor f dekomponálható K felett, ha léteznek $h_1, h_2 \in K[x]$ polinomok, melyekre

$$f(x) = h_1(h_2(x)) \quad (h_1, h_2 \in K[x], \deg h_1 > 1, \deg h_2 > 1).$$

Különbén f nem dekomponálható. Ha $f(x) = h_1(h_2(x))$ és $\lambda(x) \in K[x]$ lineáris polinom, akkor $f(x) = h_3(h_4(x))$, ahol $h_3(x) = h_1(\lambda^{-1}(x))$ és $h_4(x) = \lambda(h_2(x))$ egy másik dekompozíciója $f(x)$ -nek. A továbbiakban nem teszünk különbséget az ilyen, ekvivalens dekompozíciók között. Továbbá, az $f(x), f(\lambda(x))$, illetve az $f(x), \lambda(f(x))$ polinomat ekvivalenseknek nevezzük. Hatalmas irodalma van a polinomok dekomponálhatóságának (lásd például [6, 8, 9, 20, 29, 30, 56] és az ottani hivatkozásokat). A 3.3 Tételben megmutatjuk, hogy a PTE probléma ezen változata ekvivalens bizonyos polinomok dekomponálhatóságának kérdésével.

Ezt felhasználva a 3.1 Következményben megmutatjuk, hogy adott $n > r \geq 0$ egészek mellett, ahol r elég kicsi n -hez képest, hogy ha $A \subseteq \{1, \dots, n\}$, $|A| = n - r$ esetén az

$$f_{A,c,d}(x) := \prod_{a \in A} (x - c - ad), \quad c, d \in \mathbb{Q}, \quad d \neq 0 \quad (8)$$

polinom dekomponálható \mathbb{Q} felett mint $h_1(h_2(x))$, akkor h_1 és h_2 egyértelműen megadható. Az $f_{A,c,d}(x)$ polinom nem más, mint egy számtani sorozat n egymást követő tagjából r tag elhagyásával maradt tagok szorzata. Például ha

$$f_A(x) := f_{A,0,1}(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)$$

dekomponálható mint $h_1(h_2(x))$, akkor, ekvivalencia erejéig

$$h_2(x) = x^2 - 10x, \quad h_1(x) = (x+9)(x+16)(x+21)(x+24).$$

Ezután a fenti eredmények felhasználásával végességi tételt adunk arra, hogy egy (8) alakú $f_{A,c,d}$ polinom hányszor vehet fel olyan értéket,

amelyet egy adott $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom is felvesz. A 3.4 Tételben végességi eredményt adunk $f_{A,c,d}$ azon értékeinek számára, amelyeket egy másik $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom is felvesz. Ez az eredmény a fentiekhez hasonlóan ineffektív.

Végül vizsgáljuk az $f_{A,c,d}$ eltolt hatványértékeit (azaz az $ay^\ell + b$ alakú értékeket). Kapcsolódó problémákat számos szerző vizsgált már, az irodalmat az előző alfejezetben áttekintettük. A 3.1 Tételünket fogjuk általánosítani, megjegyezzük azonban, hogy általánosabb eredményünk bizonyításában a 3.1 Tétel fontos szerepet játszik.

A 3.5 Tételben az

$$f_{A,c,d}(x) = ay^\ell + b$$

egyenletben effektív felső korlátot adunk az ℓ, x, y értékekre. Ez az eredmény azt (is) jelenti, hogy az $n \geq 24$ egészekre és a, b racionális számokra ($a \neq 0$) létezik egy effektíven kiszámolható C_2 konstans, melyre az $f_A(x) = ay^\ell + b$ egyenletre, ahol $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $|A| = n - 2$ fennáll, hogy $(|x|, |y|, \ell) < C_2$.

Eredményeink előrelépést jelentenek annak a problémának a megoldása felé, hogy mennyire lehet „ritkítani” egy számtani sorozatot úgy, hogy a megmaradó tagok szorzata még mindig csak véges sokszor lehet egy adott polinom, vagy egy eltolt hatvány értéke.

3.2.2. Új eredmények

A 3.2 Problémához kapcsolóan az alábbi tételt bizonyítjuk.

3.2. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu, R. Tijdeman [44]). *Legyenek n, r nem negatív egészek, melyekre*

$$n > 2r^{3/2} + 5r + 8. \tag{9}$$

Ekkor $\{1, \dots, n\}$ minden 3.2 Problémában leírt dekompozíciójának az alábbi szerkezete van. $A := \{1, \dots, n\} \setminus A_0$, $r = |A_0|$, továbbá $k = 2$ és

minden $A_i = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, t$) osztály szimmetrikus az

$$\bar{a} := \frac{1}{n-r} \sum_{a \in A} a \quad (10)$$

értékre, azaz

$$a_1^{(i)} + a_2^{(i)} = 2\bar{a} \quad (i = 1, \dots, t).$$

3.2. Megjegyzés. A 3.2 Tétel teljes választ ad a 3.2 Problémára $n > 2r^{3/2} + 5r + 8$ esetén. Másrésztől, minden r , n -re, amikre $n-r$ páros, ha $A = \{1, \dots, n\} \setminus A_0$ szimmetrikus \bar{a} -ra (azaz ha $a \in A$ akkor $2\bar{a} - a \in A$), akkor van a 3.2 Problémában leírt partíció $k = 2$ -re.

3.3. Megjegyzés. A 3.2 Tétel következő kiterjesztése is igaz. Legyen b_1, \dots, b_n egy nem konstans racionális számtani sorozat. Legyen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ és tegyük fel, hogy B_0, B_1, \dots, B_t olyan particionálása B -nek, melyre $r := |B_0|$, $k := |B_1| = \dots = |B_t|$, $n > 2r^{3/2} + 5r + 8$ és minden $i = 1, \dots, t$ esetén a B_i ($i = 1, \dots, t$) halmazok elemeinek $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ szimmetrikus polinomjai egyenlőek. Ekkor $k = 2$ és $B_i = \{b_1^{(i)}, b_2^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, t$) jelölések mellett

$$b_1^{(i)} + b_2^{(i)} = b_1^{(j)} + b_2^{(j)} \quad (1 \leq i, j \leq t).$$

Valójában $b_s = c + da_s$ helyettesítéssel, ahol $a_s \in A \setminus A_0$ és $c, d \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$, könnyen belátható n szerinti teljes indukcióval, hogy c választható 0-nak. Ekkor $d = 1$ választással az állítás adódik.

A következő eredmény megadja a kapcsolatot a 3.2 Problémában leírt partíciók és bizonyos polinomok dekomponálhatósága között.

3.3. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu, R. Tijdeman [44]). *Legyen n pozitív egész és r nem negatív egész. Ekkor pontosan akkor létezik az $\{1, \dots, n\}$ halmaznak a 3.2 Problémában leírt A_0, A_1, \dots, A_t partíciója, ha létezik egy $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ részhalmaz, melyre $|A| = n - r$ és az*

$$f_A(x) = \prod_{a \in A} (x - a) \quad (11)$$

polinom dekomponálható \mathbb{Q} felett. Továbbá, ha A_0, A_1, \dots, A_t a kívánt partíció, akkor $f_A(x) = h_1(h_2(x))$ és $A = \{1, \dots, n\} \setminus A_0$, valamint

$$h_2(x) = \prod_{a \in A_1} (x - a) - \prod_{a \in A_1} (-a)$$

és

$$h_1(x) = \left(x + \prod_{a \in A_1} (-a) \right) \cdots \left(x + \prod_{a \in A_t} (-a) \right).$$

3.4. Megjegyzés. A tétel bizonyításából világos lesz, hogy h_2 független attól, melyik A_i halmazzal definiáljuk.

A 3.2 és 3.3 Tételek egyszerű következményeként megfogalmazzuk a következő állítást.

3.1. Következmény (Á. Papp, L. Hajdu, R. Tijdeman [44]). *Legyen $A \subseteq \{1, \dots, n\}$, $|A| = n - r$ ahol n és r egészek, melyekre $r \geq 0$ és $n > 2r^{3/2} + 5r + 8$. Legyenek továbbá $c, d \in \mathbb{Q}$ és $d \neq 0$. Akkor az*

$$f_{A,c,d}(x) = \prod_{a \in A} (x - c - ad) \tag{12}$$

polinom pontosan akkor dekomponálható \mathbb{Q} felett, ha $n - r$ páros és A szimmetrikus az

$$\bar{a} := \frac{1}{n - r} \sum_{a \in A} a$$

értékre, és ekkor $f_{A,c,d}(x)$ (ekvivalencia erejéig) egyetlen dekompozíciója $f_{A,c,d}(x) = \varphi^*\left(\left(\frac{x-c}{d} - \bar{a}\right)^2\right)$, ahol

$$\varphi^*(x) = d^{n-r} h_1(x - \bar{a}^2). \tag{13}$$

Itt h_1 az A halmaz A_1, \dots, A_t ($|A_1| = |A_2| = \dots = |A_t| = 2$) partícionálására a 3.3 Tételben definiált polinom.

A következőben alkalmazzuk eredményeinket az $f_{A,c,d}(x) = P(y)$ egyenletre, ahol P egy adott polinom. Az első ilyen típusú eredmény általános, de ineffektív: az egész megoldások számának a végességét garantálja.

3.4. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu, R. Tijdeman [44]). *Legyen $A \subseteq \{1, \dots, n\}$, ahol $|A| = n - r$ az $r \geq 0$ és $n > 2r^{3/2} + 5r + 8$ egészekre, és legyenek $c, d \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$. Legyen $f_{A,c,d}(x)$ olyan, mint (12)-ben és legyen $P(y) \in \mathbb{Q}[y]$ melyre $\deg P \geq 2$. Ekkor az*

$$f_{A,c,d}(x) = P(y) \quad (14)$$

egyenletnek véges sok x, y egész megoldása van, amennyiben nem az alábbi esetek egyikében vagyunk:

- (i) $P(y) = f_{A,c,d}(T(y))$, ahol T egy tetszőleges nem konstans, racionális együtthetős polinom,
- (ii) $P(y) = \varphi^*(Q(y))$, ahol φ^* az, mint (13)-ban és Q egy nem konstans, racionális együtthetős polinom, aminek legfeljebb két páratlan multiplicitású gyöke van.

3.5. Megjegyzés. Az (i) és (ii) esetekben könnyen adható olyan példa, melyben a (14) egyenletnek végtelen sok x, y egész megoldása van.

Ha a (14) egyenlet jobb oldala $ay^\ell + b$ alakú, ahol ℓ is ismeretlen, akkor az alábbi, effektív eredmény igaz.

3.5. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu, R. Tijdeman [44]). *Legyen $A \subseteq \{1, \dots, n\}$, ahol $|A| = n - r$ az $r \geq 0$ és $n > 2r^{3/2} + 5r + 8$ egészekre, és legyenek $c, d \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$. Legyen továbbá $f_{A,c,d}(x)$ olyan, mint (12)-ben és legyenek $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Ekkor az*

$$f_{A,c,d}(x) = ay^\ell + b \quad (15)$$

egyenlet minden x, y, ℓ , $\ell \geq 2$ egész megoldására $\max(|x|, |y|, \ell) < C_3$ valamely effektíven kiszámolható, csak a, b, c, d, n -től függő C_3 konstansra. Az $|y| \leq 1$ esetben az $\ell \leq 3$ konvenciót használjuk.

4. Korlátok teljes hatványok számára számtani sorozatokban

4.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben egy számtani sorozat első N tagja között található hatványok meghatározásának problémájával foglalkozunk.

Legyenek a, b, ℓ egészek, $a > 0, \ell \geq 2$. Jelöljük az $ax+b$ ($x \geq 0$) számtani sorozat első N tagja között az ℓ -edik hatványok számát $P_{a,b;N}(\ell)$ -l-el, továbbá $P_N(\ell)$ -l-el ezek maximumát az összes számtani sorozat között. (Ez a maximum nyilvánvalóan létezik.) A négyzet esetet ($\ell = 2$) sokan vizsgálták már. Erdős sejtését [24], miszerint $P_N(2) = o(N)$ Szemerédi igazolta [66]. Később, mély eszközöket használva (elliptikus és magasabb rendű görbék, Faltings tétel, prímszámok eloszlása) Bombieri, Granville és Pintz belátták [10], hogy $P_N(2) < O(N^{2/3+o(1)})$, amit Bombieri and Zannier $P_N(2) < O(N^{3/5+o(1)})$ -re javított [11]. Lásd még Granville [33] cikkét hasonló eredményekért. Rudin egy erős sejtése szerint (lásd [58], a 4.6 bekezdés végén) $P_N(2) = O(\sqrt{N})$, avagy, még erősebb formában

$$P_N(2) = P_{24,1;N}(2) = \sqrt{\frac{8}{3}N} + O(1) \quad (N \geq 6). \quad (16)$$

Az $\ell \geq 3$ esetben nem sok eredmény ismert. [10] szerzői (bizonyítás nélkül) megjegyezték, hogy módszereikkel valószínűleg bizonyítható, hogy $P_N(3) \ll N^{3/5+\varepsilon}$, továbbá hogy $P_N(\ell) \ll N^{1/2+\varepsilon}$ ($\ell \geq 4$).

Ebben a fejezetben éles, bizonyos értelemben általános korlátot adunk az ℓ -edik, illetve tetszőleges (vegyes) hatványok számára egy számtani sorozat első N tagja között.

Az eredmények kiindulópontja Hajdu és Tengely egy cikke [46]. Meg-

mutatták, hogy (ekvivalencia erejéig) minden ℓ -re egyértelműen létezik egy $ax + b$ számtani sorozat, mely aszimptotikusan a legtöbb ℓ -edik hatványt tartalmazza, azaz melyre a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{x : ax + b \text{ egy } \ell\text{-edik hatvány, } 0 \leq x < N\}|}{\sqrt[\ell]{N}}.$$

határérték maximális. (Az $\ell = 4$ esetben két ilyen sorozat van.) A "legjobb" $a_\ell x + b_\ell$ sorozatot egyértelműen meg tudták adni. Eredményükkel kiterjesztették Rudin sejtését (16) tetszőleges $\ell > 2$ mellett ($24x + 1$ helyett $a_\ell x + b_\ell$ -lel és a jobb oldal értelemszerű megváltoztatásával), és ezt bizonyították $\ell = 3, 4$ esetén néhány kisebb N -re. Megjegyezzük, hogy a probléma ezen aszimptotikus ("globális") változata egyszerűbb, mint az eredeti "lokális" változat, amikor a sorozat véges részét nézzük. Ennek az oka, hogy az aszimptotikus megközelítés előhozza az "átlag"-hatást, ami megengedi, hogy az $ax + b$ számtani sorozatot modulo a vizsgálhassuk egy teljes (véges) periódusban.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy minden pozitív ε -ra létezik egy csak tőle függő ℓ_0 , hogy minden $\ell > \ell_0$ esetén az ℓ -edik hatványok száma bármely (egész) számtani sorozat első N tagjában legfeljebb $(1 + \varepsilon)\sqrt[\ell]{N}$, ha N elég nagy ε, ℓ , és a sorozat függvényében. Ez az eredmény éles abban az értelemben, hogy végtelen sok ℓ -re található olyan $c_1 = c_1(\ell) > 1$ konstans és hozzá egy számtani sorozat, melyben elég nagy N -re több, mint $c_1\sqrt[\ell]{N}$ ℓ -edik hatvány van. Szintén éles korlátot adunk tetszőleges (nem rögzített kitevőjű) hatványok számára egy számtani sorozat első N tagja között. Bizonyításunkban Wigert egy osztók számáról szóló klasszikus tételét [70], Hajdu és Tengely egy kapcsolódó aszimptotikus eredményét [46], és egy olyan új becslést használunk, amelyik Hajdu és Tengely egy [46]-beli kérdésére vonatkozik.

Szintén felső korlátot adunk tetszőleges teljes hatványok számára számtani sorozatokban. Jelölje $P_{a,b;N}(\ast)$ a (tetszőleges) hatványok számát egy $ax + b$ ($x \geq 0$) számtani sorozat első N tagja között. Megmutatjuk,

hogy – ahogy várni lehet –, a négyzetek száma a döntő.

4.2. Új eredmények

A bevezető jelöléseivel most bemutatjuk az új eredményeket.

4.1. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu [43]). *Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy csak tőle függő ℓ_0 , mely mellett minden $\ell > \ell_0$ esetén $P_{a,b;N}(\ell) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt[\ell]{N}$, ha $N > N_0$. Itt $N_0 = N_0(\varepsilon, \ell, a, b)$ csak ε, ℓ, a, b -től függ.*

4.1. Megjegyzés. A tétel éles abban az értelemben, hogy $1 + \varepsilon$ nem helyettesíthető 1-gyel, és az $\ell > \ell_0$ feltevés is szükséges. Valójában [46] Theorem 1 (és az utána lévő Megjegyzések) miatt végtelen sok $\ell \geq 2$ esetén létezik egy $\delta_\ell > 0$ és egy $a_\ell x + b_\ell$ számtani sorozat, melyre $P_{a_\ell, b_\ell; N}(\ell) > (1 + \delta_\ell)\sqrt[\ell]{N}$ minden $N > N_0$ esetén. Itt $N_0 = N_0(\ell)$ csak ℓ -től függ.

Világos, hogy ha egy $ax + b$ sorozat tartalmaz ℓ -edik hatványt, akkor végtelen sokat tartalmaz és minden $N > N_0$ esetén

$$P_{a,b;N}(\ell) > \frac{1}{2a}\sqrt[\ell]{N},$$

ahol N_0 csak a, b -től függ.

Megemlítjük, hogy a 4.1 Tétel bizonyításával megválaszoljuk Hajdu és Tengely [46] egy kérdését.

Következzék a vegyes hatványokról szóló tétel.

4.2. Tétel (Á. Papp, L. Hajdu [43]). *Legyen $ax + b$ ($x \geq 0$) egy számtani sorozat. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy N_0 , melyre minden $N > N_0$ esetén*

$$P_{a,b;N}(\ast) < \left(\sqrt{\frac{8}{3}} + \varepsilon \right) \sqrt{N} \tag{17}$$

Teljesül. Itt $N_0 = N_0(\varepsilon, a, b)$ csak ε, a, b -től függ.

4.2. Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető (lásd [46]-ban Theorem 1-et), hogy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_{24,1;N}(2)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Ez mutatja, hogy a fenti eredmény éles.

Szintén könnyen látható, hogy $\text{lnko}(a, b) = 1$ esetén végtelen sok ℓ kitevő létezik, melyre $ax+b$ tartalmaz ℓ -edik hatványokat. A $\text{lnko}(a, b) = 1$ feltétel itt nem elhagyható, például a $4x+2$ ($x \geq 0$) számtani sorozat nem tartalmaz teljes hatványt.

Hivatkozások

- [1] A. Bazsó, A. Bérczes, L. Hajdu, F. Luca, *Polynomial values of sums of products of consecutive integers*, *Monat. Math.* **187** (2018), 21–34.
- [2] M. Bennett, S. Siksek, *A conjecture of Erdős, supersingular primes and short character sums*, *Annals of Mathematics* **191** (2020), 355–392
- [3] A. Bérczes, B. Brindza, L. Hajdu, *On the power values of polynomials*, *Publ. Math. Debrecen* **53** (1998), 375–381.
- [4] D. Berend, *On the parity of exponents in the factorization of $n!$* , *J. Number Theory* **64** (1997), 13–19.
- [5] D. Berend and G. Kolesnik, *Regularity of patterns in the factorization of $n!$* , *J. Number Theory* **124** (2007), 181–192.
- [6] F. Beukers, T. N. Shorey and R. Tijdeman, *Irreducibility of polynomials and arithmetic progressions with equal product of terms*, in: *Number Theory in Progress (Proc. Internat. Conf. in Number Theory in Honor of A. Schinzel, Zakopane, 1997)*, K. Györy, H. Iwaniec and J. Urbanowicz (eds.), de Gruyter, 1999, pp. 11–26.
- [7] Yu. Bilu, M. Kulkarni, B. Sury, *The Diophantine equation $x(x + 1) \dots (x + (m - 1)) + r = y^n$* , *Acta Arith.* **113** (2004), 303–308.
- [8] Yu. Bilu, R. Tichy, *The Diophantine equation $f(x) = g(y)$* , *Acta Arith.* **95** (2000), 261–288.
- [9] R. Blankertz, *A polynomial time algorithm for computing all minimal decompositions of a polynomial*, *ACM Comm. Computer Algebra* 48:1, Issue 187 (2014), 13–23.

- [10] E. Bombieri, A. Granville and J. Pintz, *Squares in arithmetic progressions*, Duke Math. J. **66** (1992), 369–385.
- [11] E. Bombieri and U. Zannier, *A note on squares in arithmetic progressions. II*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei **13** (2002), 69–75.
- [12] B. Brindza, *On S -integral solutions of the equation $y^m = f(x)$* , Acta Math. Hungar. **44** (1984), 133–139.
- [13] B. Brindza, Yu. Bilu, P. Kirschenhofer, Á. Pintér, R. Tichy, *Diophantine equations and Bernoulli polynomials*. With an appendix by A. Schinzel. Compositio Math. **131** (2002), 173–188.
- [14] W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265.
- [15] R. Breusch, *Zur Verallgemeinerung des Bertrandischen Postulates, das zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen*, Math. Zeitschrift **34** (1932), 505–526.
- [16] U. Cerucci, F. Vaccarino, *Vector Linear Recurrence Sequences in Commutative Rings*, Applications of Fibonacci Numbers, 1996, pp. 63–72.
- [17] Y.-G. Chen, *On the parity of exponents in the standard factorization of $n!$* , J. Number Theory **100** (2003), 326–331.
- [18] Y.-G. Chen and Y.-C. Zhu, *On the prime power factorization of $n!$* , J. Number Theory **82** (2000), 1–11.
- [19] H. Darmon, A. Granville, *On the equations $z^m = F(x, y)$ and $Ax^p + By^q = Cz^r$* , Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 513–543.
- [20] H. Davenport, D.J. Lewis, A. Schinzel, *Equations of the form $f(x) = g(y)$* , Quart. J. Oxford Ser. **12** (1961), 304–312.

- [21] J.-M. Deshouillers, F. Luca, *How often is $n!$ a sum of three squares?*, The Legacy of Alladi Ramakrishnan in the Mathematical Science (2010), pp. 243–251.
- [22] P. Erdős, *Über die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen*, Math. Zeitschrift **39** (1935), 473–491.
- [23] P. Erdős, *On a Diophantine equation*, J. London Math. Soc. **26** (1951), 176–178.
- [24] P. Erdős, *Quelques problèmes de théorie des nombres*, Monographies de L’Enseignement Mathématique **6** (1963), pp. 81–135.
- [25] P. Erdős and R. L. Graham, *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory*, L’Enseignement Mathématique, Imprimerie Kundig, Geneva, 1980.
- [26] P. Erdős and R. Obláth, *Über diophantische Gleichungen der Form $n! = x^p \pm y^p$ und $n! \pm m! = x^p$* , Acta Litt. Sci. Szeged **8** (1937), 241–255.
- [27] P. Erdős, J. L. Selfridge, *The product of consecutive integers is never a power*, Ill. J. Math. **19** (1975), 292–301.
- [28] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward, *Recurrence sequences*, Third Edition, American Mathematical Society (2015), pp. 318.
- [29] M. Fried, *On a theorem of Ritt and related Diophantine problems*, J. Reine Angew. Math. **264** (1973), 40–55.
- [30] M. Fried, *Variables separated polynomials, the genus 0 problem and moduli spaces*, Number Theory in Progress, vol. 1, Walter de Gruyter, Berlin, pp. 169–228 (1999).
- [31] H. R. Gallegos-Ruiz, N. Katsipis, Sz. Tengely, M. Ulas, *On the Diophantine equation $\binom{n}{k} = \binom{m}{l} + d$* , J. Number Theory **208** (2020), 418–440.

- [32] M. Z. Garaev, F. Luca and I. Shparlinski, *Character sums and congruences with $n!$* , Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 5089–5102.
- [33] A. Granville, *Squares in Arithmetic Progressions and Infinitely Many Primes*, Amer. Math. Monthly **124** (2017), 951–954.
- [34] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Third Edition, Springer (2004).
- [35] K. Györy, *On the Diophantine equation $\binom{n}{k} = x^l$* , Acta Arith. **80** (1997), 289–295.
- [36] K. Györy, L. Hajdu, Á. Pintér, *Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression*, Compositio Math. **145** (2009), 845–864.
- [37] K. Györy, L. Hajdu, N. Saradha, *On the Diophantine equation $n(n+d)\cdots(n+(k-1)d) = by^l$* , Canad. Math. Bull. **47** (2004), 373–388. Correction: *ibid.* **48** (2005), 636.
- [38] K. Györy, T. Kovács, Gy. Péter, Á. Pintér, *Equal values of standard counting polynomials*, Publ. Math. Debrecen **84** (2014), 259–277.
- [39] L. Hajdu, S. Laishram, Sz. Tengely, *Power values of sums of products of consecutive integers*, Acta Arith. **172** (2016), 333–349.
- [40] L. Hajdu, Á. Papp, *On asymptotic density properties of the sequence $(n!)_{n=0}^{\infty}$* , Acta Arith. **184** (2018), 317–340.
- [41] L. Hajdu, Á. Papp, T. Szakács, *On the equation $A!B! = C!$* , J. Number Theory **187** (2018), 160–165.
- [42] L. Hajdu, Á. Papp, *Polynomial values of products of terms from an arithmetic progression*, Monatshefte für Mathematik **193** (3) (2020), 637–655.

- [43] L. Hajdu, Á. Papp, *Uniform bounds for the number of powers in arithmetic progressions*, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. **116** (2022), 169.
- [44] L. Hajdu, Á. Papp, R. Tijdeman, *The Prouhet-Tarry-Escott Problem, Indecomposability of Polynomials and Diophantine Equations*, The Ramanujan J. **58** (2022), 1075–1093.
- [45] L. Hajdu, Á. Pintér, Sz. Tengely, N. Varga, *Equal values of figurate numbers*, J. Number Theory, **137** (2014), 130–141.
- [46] L. Hajdu and Sz. Tengely, *Powers in arithmetic progressions*, The Ramanujan J. **55** (2021), 965–986.
- [47] O. Klurman and M. Munsch, *Distribution of factorials modulo p* , J. Th. Nomb. Bordeaux **29** (2017), 169–177.
- [48] M. Kulkarni, B. Sury, *On the Diophantine equation $x(x+1)(x+2)\cdots(x+(m-1))=g(y)$* , Indag. Math. **14** (2003), 35–44.
- [49] E. Landau, *Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate*, Arch. Math. Phys. **13** (1908), 304–312.
- [50] A. Levin, *Variations on the theme of Runge: effective determination of integral points on certain varieties*, J. Th. Nomb. Bordeaux **20** (2008) no 2, 385–417.
- [51] R. Lidl, G. Mullen, G. Turnwald, *Dickson polynomials*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Longman Scientific & Technical, Harlow **65** (1993).
- [52] F. Luca and P. Stănică, *Products of factorials modulo p* , Colloq. Math. **96** (2003), 191–205.
- [53] F. Luca and P. Stănică, *On the prime power factorization of $n!$* , J. Number Theory **102** (2003), 298–305.

- [54] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory, I. Classical Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007).
- [55] S. Raghavendran, V. Varayanan, *The Prouhet Tarry Escott problem: A review*, MDPI, Mathematics **7** (2019), 227.
- [56] J. F. Ritt, *Prime and composite polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), 51–66.
- [57] B. Rokowska and A. Schinzel, *Sur un problème de M. Erdős*, Elem. Mat. **15** (1960), 84–85.
- [58] W. Rudin, *Trigonometric series with gaps*, J. Math. Mech. **9** (1960), 203–227.
- [59] J. W. Sander, *On the Parity of Exponents in the Prime Factorization of Factorials*, J. Number Theory **90** (2001), 316–328.
- [60] N. Saradha, T. N. Shorey, *Almost perfect powers in arithmetic progression*, Acta Arith. **99** (2001), 363–388.
- [61] N. Saradha, T. N. Shorey, *Almost squares and factorizations in consecutive integers*, Compositio Math. **138** (2003), 113–124.
- [62] N. Saradha, T. N. Shorey, *On the equation $n(n+d)\cdots(n+(i_0-1)d)(n+(i_0+1)d)\cdots(n+(k-1)d) = y^l$ with $0 < i_0 < k-1$* , Acta Arith. **129** (2007), 1–21.
- [63] A. Schinzel, R. Tijdeman, *On the equation $y^m = P(x)$* , Acta Arith. **31** (1976), 199–204.
- [64] T. Shorey and R. Tijdeman, *Arithmetic Properties of Blocks of Consecutive Integers*, in: From Arithmetic to Zeta-Functions, Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz (J. Sander, J. Steuding, R. Steuding, eds) (2017), pp. 455–471.

- [65] T. Stoll, R. F. Tichy, *The Diophantine equation $\alpha\binom{x}{m} + \beta\binom{y}{n} = \gamma$* , Publ. Math. Debrecen **64** (2004), 155–165.
- [66] E. Szemerédi, *The number of squares in an arithmetic progression*, Stud. Sci. Math. Hungar. **9** (1974), 417.
- [67] R. Tijdeman, *Applications of the Gel'fond-Baker method to rational number theory*, Topics in Number Theory, Proceedings of the Conference at Debrecen 1974, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **13**, pp. 399–416, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [68] S. S. Wagstaff, *The Schnirelmann density of the sums of three squares*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 1–7.
- [69] B. de Weger, *Equal Binomial Coefficients: Some Elementary Considerations*, J. Number Theory **63** (1997), 373–386.
- [70] S. Wigert, *Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier*, Ark. Mat. **3** (1906/7), 1–9.
- [71] P.-Z. Yuan, *On a special diophantine equation $a\binom{x}{m} = by^r + c$* , Publ. Math. Debrecen **44** (1994), 137–143.

5. Papp Ágoston publikációi

1. L. Hajdu, Á. Papp, *On asymptotic density properties of the sequence $(n!)_{n=0}^{\infty}$* , Acta Arith, **184** (2018), 317–340.
2. L. Hajdu, Á. Papp, T. Szakács, *On the equation $A!B! = C!$* , J. Number Theory **187** (2018), 160–165.
3. L. Hajdu, Á. Papp, *Polynomial values of products of terms from an arithmetic progression*, Monatshefte für Mathematik **193** (3) (2020), 637–655.
4. L. Hajdu, Á. Papp, R. Tijdeman, *The Prouhet-Tarry-Escott Problem, Indecomposability of Polynomials and Diophantine Equations*, The Ramanujan J. **58** (2022), 1075–1093.
5. L. Hajdu, Á. Papp, *Uniform bounds for the number of powers in arithmetic progressions*, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. **116**, 169 (2022)

6. Papp Ágoston konferencia eladásai

1. 24th Central European Number Theory Conference, *On Asymptotic Density Properties of the Sequence $(n!)_{n=0}^{\infty}$* (2019)
2. Number Theory Conference In honour of Professors Kálmán Győry, János Pintz and András Sárközy, *Uniform Bounds for the Number of Powers in Arithmetic Progressions* (2022)



Nyilvántartási szám: DEENK/39/2024.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Papp Ágoston

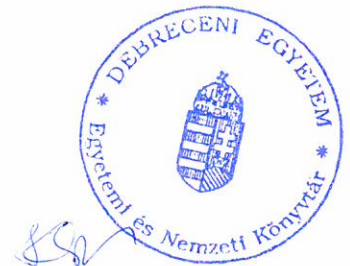
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10076876

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (4)

1. Hajdu, L., **Papp, Á.**, Tijdeman, R.: The Prouhet-Tarry-Escott problem, indecomposability of polynomials and Diophantine equations.
Ramanujan J. 58 (4), 1075-1093, 2022. ISSN: 1382-4090.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11139-022-00555-7>
IF: 0.7
2. Hajdu, L., **Papp, Á.**: Uniform bounds for the number of powers in arithmetic progressions.
Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 116 (4), 1-7, 2022. ISSN: 1578-7303.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s13398-022-01313-6>
IF: 2.9
3. Hajdu, L., **Papp, Á.**: Polynomial values of products of terms from an arithmetic progression.
Monatsh. Math. 193 (3), 637-655, 2020. ISSN: 0026-9255.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00605-020-01422-7>
IF: 0.808
4. Hajdu, L., **Papp, Á.**: On asymptotic density properties of the sequence $(n!)$.
Acta Arith. 184 (4), 317-340, 2018. ISSN: 0065-1036.
DOI: <http://dx.doi.org/10.4064/aa170410-21-8>
IF: 0.416





További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

5. Hajdu, L., **Papp, Á.**, Szakács, T.: On the equation $A!B! = C!$
J. Number Theory. 187, 160-165, 2018. ISSN: 0022-314X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2017.10.020>
IF: 0.684

Egyéb folyóiratközlemények (1)

6. Hajdu, L., **Papp, Á.**: Correction to: Polynomial values of products of terms from an arithmetic progression.
Monatsh. Math. 195 (2), 377-377, 2021. ISSN: 0026-9255.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00605-021-01544-6>

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 5,508

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):
4,824**

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2024.02.07.

