

Doktori (Phd) értekezés tézisei

Funkcionális renormálási csoport módszer  
alkalmazása a kvantumelméletben

Gégény Flóra Enikő

Témavezető: Dr. Nagy Sándor



DEBRECENI EGYETEM  
Fizikai Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2024



## Bevezetés

A renormálási csoport (RG) módszer alapgondolata ahhoz köthető, hogy a makroszkopikus fizikai rendszerek tulajdonságait a mikroszkopikus alkotórészek viselkedéséből kiindulva érthetjük meg. A renormálási csoport módszer olyan problémák megoldásánál bizonyul hatékonynak, ahol sok hosszskálát kell figyelembe venni. Ilyen például a kritikus jelenségek köre, ahol az RG módszer segítségével szisztematikusan, lépésről lépésre haladva az atomi szintű fluktuációktól kezdve a nagyobb skálák felé az összes fluktuációt kiintegráljuk. Természetesen az RG módszer a modern fizika sok más területén is alkalmazható, többek között a kondenzált anyagok körében, az asztrofizikában, vagy a részecskefizikában, ahol skaláris, fermionikus és mértékelméletek esetén is hatékony módszernek bizonyul.

Eredetileg az RG módszert euklideszi téridőben fogalmazták meg, a statisztikus fizika elemeit felhasználva, azonban bizonyos modellek esetén, különösen a részecskefizikában, felmerül a kérdés, hogy ez megfelelő keretet biztosít-e? A kvantumtérelmélet valós időben, azaz Minkowski-téridőben van megadva, és ugyan a generáló funkcionálja nagyon hasonlít a statisztikus fizika partíciós függvényéhez, az euklideszi téridővel szemben a valós idejű számolások szolgálhatnak helyes eredménnyel a térelméleti modellekben. A renormálási csoport módszer valós idejű megfogalmazása fontos feladat, aminek megvalósítására többféle lehetséges út van a szakirodalomban.

Az RG módszer középpontjában az evolúciós egyenletek állnak, ezek adnak információt a modell viselkedéséről a különböző hosszskálákon, illetve a fázisstruktúráról és fixpontokról. A renormálási csoport egyenletek megfogalmazására több lehetőségünk van, ezek közül a Wegner-Houghton-egyenlet és a

Wetterich-egyenlet is népszerű választás. Az előbbi a blokkosított hatás evolúcióját írja le, míg utóbbi az effektív átlagos hatás fejlődését adja meg. Mindkét egyenletnek megvannak a maga előnyei és hátrányai, amelyeket a vizsgált modell fényében kell mérlegelni és eldönteni melyik használata az előnyösebb.

## Célkitűzések

A kutatásom legfőbb célja a funkcionális renormálási csoport módszer közvetlenül valós időben történő alkalmazása. Az egyik alap feladatomban tehát az volt, hogy a Wegner-Houghton- és Wetterich-egyenleteket Minkowski-téridőben fogalmazzam meg. Ezek alkalmazhatóságát két, jól ismert skaláris modell vizsgálatával teszteltem. A célom az volt, hogy a  $\phi^4$  elméletet és a sine-Gordon modellt közvetlenül valós időben tanulmányozzam a Wetterich-egyenlet segítségével, meghatározzam a fázis szerkezeteket és fixpontokat, és összevegyem az euklideszi téridőben kapott eredményekkel.

Szintén sokat vizsgált modell a konform redukált aszimptotikusan biztonságos (AB) gravitáció modellje, ahol először nem a valós idejű kezelés, hanem a modell megismerése volt a célom. Ehhez a konform redukált Einstein-Hilbert hatás nem-lokális tagot is tartalmazó esetét vizsgáltam a Wegner-Houghton-egyenlet keretén belül. Az anomális dimenziót a hatás potenciális és kinetikus tagjából is meghatározva, gömb- és hengersizmetrikus geometriában kerestem a Reuter-fixpont helyét és az azt jellemző exponenseket.

A konform redukált AB gravitáció Minkowski idejű vizsgálata fontos lépése a munkámnak. Itt az Einstein-Hilbert hatásba új csatolások bevezetésével a Lorentz-szimmetria esetleges sé-

rülésének vizsgálata volt az egyik célom, a deriválásban a tér és idő komponenseinek különválasztásával. A másik cél az új csatolásokkal felírt modell fixpontjainak és fázisszerkezetének feltérképezése volt.

## Tézispontok

1. Levezettem a Wetterich-egyenletet Minkowski-téridőben hengerszimmetrikus geometriát használva, és meghatároztam a  $\phi^4$  elmélet fixpontjait [T1]. Kiszámoltam a Wilson-Fisher fixpont helyét és a korrelációs hosszhoz tartozó kritikus exponens értékét. Analitikusan megmutattam két csatolásnál, hogy a Wegner-Houghton egyenlettel ellentétben, bizonyos hengeralkotó hossz esetén létezik a Wilson-Fisher fixpont. A csatolások és a fixpontok képzetesnek adódnak. A számolást elismételtem 3-dimenzióban konstans hullámfüggvény renormálás figyelembe vételével. A Wilson-Fisher fixpont itt is képzetes, ahogy a korrelációs hossz kritikus exponensének értéke és az anomális dimenzió is. Szintén Minkowski-téridőben vizsgáltam a 2-dimenziós sine-Gordon modell fázisszerkezetét [T1]. A modellben megmarad a Coleman pont, ezen túl megmutattam, hogy a szimmetriasértett fázis további két fázist tartalmaz. Az eredményemet a Callan-Symanzik-regulátorral kaptam, a Litim-regulátor összefüggő szimmetriasértett fázist mutat.
2. A konform redukált AB gravitációban meghatároztam a modell fázisszerkezetét abban az esetben, amikor a hatás nem-lokális tagot is tartalmaz [T2]. A Wegner-Houghton-egyenletből kiindulva levezettem az evolúciós egyenletet.

Az anomális dimenziót a hatás potenciális- és kinetikus tagjából is meghatároztam. A potenciálból származtatott anomális dimenziót a lokális hatásból számoltam, a kinetikus tagnál viszont a hatás nem-lokális tagja segítségével vizsgáltam az evolúciót. Mindkét esetet gömb- és hengersizmetrikus geometriai elrendezés esetén is számoltam. Meghatároztam a Reuter-fixpont helyét és a fixpontot jellemző exponensek értékét. Azt kaptam, hogy a Reuter-fixpont UV vonzó, továbbá a fixpont fókusz, azaz az exponensek egymás komplex konjugáltjai negatív valós résszel. A hengersizmetrikus esetben, amikor a kinetikus tagból számolom az anomális dimenziót ez alól kivétel, itt az exponensek negatívak.

3. Megmutattam, hogy a konform redukált AB gravitációs modellben a Reuter-fixpont csak közelítőleg fixpont, amennyiben a tér és idő irányban független hullámfüggvény renormálást vezetek be [T3]. A valós időben felírt Wetterich-egyenletből kiindulva, a Litim-regulátort használva, evolúciós egyenleteket vezettem le a csatolásokra. Numerikusan meghatároztam a csatolások futását, amely azt mutatta, hogy egy kritikus skálán túl az UV tartományban az idő irányú hullámfüggvény renormálás aszimptotikusan nullához tart. Az eredményeim szerint az elmélet Lorentz-szimmetriával rendelkezik a kritikus skáláig, azonban azon túl ez sérül. Tovább növelve a renormálási skálát, a szimmetriasértés megváltoztatja a Reuter-fixpont közelében lévő hagyományos skálatörvényeket, ahol minden csatolás konstansba fut. Ezzel szemben azt kaptam, hogy ugyan a kozmológiai állandó továbbra is konstans, de a Newton csatolás nullához tart,

amely szerint az UV felé egy új fixpont jelenik meg. Az így kapott új fixpont összeegyeztethető a Horava-féle gravitációs modell gravitációmentes UV fixpontjával. A modellben bevezettem egy új, a görbületet szorzó csatolást, amelyről megmutattam, hogy releváns módon skálázik az UV-ben, és a többi csatolástól függetlenül fejlődik.

# Tézispontokhoz kapcsolódó publikációk

- [T1] F. Gégény and S. Nagy, „Complex couplings in renormalization,” *Int. J. Mod. Phys. A* **37**, no.11n12, 2250061 (2022)
- [T2] F. Gégény and S. Nagy, „Renormalization of the conformally reduced gravity with bilocal potential,” *Int. J. Mod. Phys. A* **35**, no.22, 2050123 (2020)
- [T3] F. Gégény, S. Nagy and K. Sailer, „On the Lorentz symmetry in conformally reduced quantum gravity,” *Class. Quant. Grav.* **40**, no.4, 045004 (2023)



Nyilvántartási szám: DEENK/257/2024.PL  
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Gégény Flóra Enikő  
Doktori Iskola: Fizikai Tudományok Doktori Iskola  
MTMT azonosító: 10073878

## A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

### Idégen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

- Gégény, F., Sailer, K., Nagy, S.:** On the Lorentz symmetry in conformally reduced quantum gravity.  
*Class. Quantum Gravity.* 40 (4), 1-8, 2023. ISSN: 0264-9381.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/acafd1>  
IF: 3.5 (2022)
- Gégény, F., Nagy, S.:** Complex couplings in renormalization.  
*Int. J. Mod. Phys. A.* 37 (11-12), 1-24, 2022. ISSN: 0217-751X.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X22500610>  
IF: 1.6
- Gégény, F., Nagy, S.:** Renormalization of the conformally reduced gravity with bilocal potential.  
*Int. J. Mod. Phys. A.* 35 (22), 1-16, 2020. ISSN: 0217-751X.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X20501237>  
IF: 1.381

**A közl. folyóiratok összesített impakt faktora: 6,481**

**A közl. folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):  
6,481**

A DEENK a Jelölt által az IDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2024.05.14.





Short thesis for the degree of doctor of philosophy  
(PhD)

**Applications of the Functional Renormalization  
Group in Quantum Theory**

by **Flóra Enikő Gégény**

Supervisor: Dr. Sándor Nagy



UNIVERSITY OF DEBRECEN  
Doctoral School of Physics

Debrecen, 2024



# Introduction

The fundamental idea of the renormalization group (RG) method is that the properties of macroscopic physical systems can be understood from the behaviour of microscopic components. The renormalization group method proves to be effective for solving problems where many length scales have to be considered. An example is the field of critical phenomena, where the RG method is used to systematically integrate out all fluctuations, step by step, starting from atomic-level fluctuations to larger scales. Of course, the RG method can also be applied in many other areas of modern physics, including condensed matter, astrophysics, or particle physics, where it has proven to be an effective method for scalar, fermionic and gauge theories.

Originally, the RG method was formulated in Euclidean space-time, using elements of statistical physics, but for certain models, especially in particle physics, the question arises whether this provides an appropriate framework. Quantum field theory is specified in real time, i.e. Minkowski space-time, and although its generating functional is very similar to the partition function in statistical physics, real-time calculations can provide the correct results in field theoretic models, as opposed to using Euclidean space-time. The real-time formulation of the renormalization group method is an important task, and there are several possible ways to implement it in the literature.

At the heart of the RG method are the evolution equations, which provide information on the behaviour of the model at different length scales, as well as on the phase structure and fixed points. There are several options for formulating renormalization group equations, among which the Wegner-Houghton

equation and the Wetterich equation are popular choices. The former describes the evolution of the blocked action, while the latter gives the evolution of the effective action. Both equations have their own advantages and disadvantages, which should be weighed in the light of the model under consideration and decide which is more appropriate to use.

## Objectives

The main goal of my research is to apply the functional renormalization group method directly in real time. Thus, one of my basic tasks was to formulate the Wegner-Houghton and Wetterich equations in Minkowski space-time. I tested their applicability by examining two well-known scalar models. My objective was to study the  $\phi^4$  theory and the sine-Gordon model directly in real time using the Wetterich equation, to determine the phase structures and fixed points, and to compare them with results obtained in Euclidean spacetime.

Another much studied model is the conformal reduced asymptotically safe (AS) gravity model, where my first aim was not to treat the model in real time, but to learn about it. To do this, I studied the case of the conformally reduced Einstein-Hilbert action with a non-local term within the framework of the Wegner-Houghton equation. Determining the anomalous dimension from both the potential and kinetic terms of the action, I searched for the location of the Reuter fixed point and its exponents in spherically symmetric and cylindrically symmetric geometries.

The Minkowski time study of conformally reduced AS gravity is an important step in my work. One of my goals was

to investigate the possible violation of Lorentz symmetry by introducing new couplings into the Einstein-Hilbert action by separating the space and time components in the derivation. The other aim was to explore the fixed points and phase structure of the model obtained with the new couplings.

## Thesis points

1. I have derived the Wetterich equation in Minkowski space-time using cylindrically symmetric geometry, and determined the fixed points of the  $\phi^4$  theory [T1]. I calculated the location of the Wilson-Fisher fixed point and the value of the critical exponent associated with the correlation length. I have shown analytically for two couplings that, contrary to the Wegner-Houghton equation, the Wilson-Fisher fixed point exists for a certain cylinder length. The couplings and the fixed points are found to be complex. I repeated the calculation in 3-dimensions with constant wave function renormalization taken into account. The Wilson-Fisher fixed point here is also complex, as is the critical exponent of the correlation length and the anomalous dimension. Also in Minkowski space-time, I have investigated the phase structure of the 2-dimensional sine-Gordon model [T1]. The Coleman point is preserved in the model, furthermore, I showed that the symmetry-constrained phase contains two additional phases. My results are obtained with the Callan-Symanzik regulator, the Litim regulator shows a continuous symmetry broken phase.
2. In conformally reduced AS gravity, I have determined the

phase structure of the model in the case where the action includes a non-local term [T2]. I derived the evolution equation starting from the Wegner-Houghton equation. I also obtained the anomalous dimension from the potential and kinetic terms of the action. The anomalous dimension derived from the potential was calculated from the local term of the action, while in case of the kinetic term, I investigated the evolution using the non-local term of the action. Both cases were calculated for spherically and cylindrically symmetric geometries. I determined the location of the Reuter fixed point and the exponents characterizing the fixed point. I obtained that the Reuter fixed point is UV attractive and the fixed point is a focus, i.e. the exponents are complex conjugates of each other with negative real parts. The cylindrically symmetric case, where I compute the anomalous dimension from the kinetic term is an exception, here the exponents are negative.

3. I have shown that in the conformally reduced AS gravity model, the Reuter fixed point is an approximate fixed point if I introduce the renormalization of the wave function in the space and time directions independently [T3]. Starting from the real time Wetterich equation, I derived evolution equations for the couplings using the Litim regulator. I numerically determined the couplings' running, which showed that beyond a critical scale in the UV region, the wave function renormalization in the time direction asymptotically approaches zero. My results show that the theory has Lorentz symmetry up to the critical scale, but that is violated beyond it. Increasing

the renormalization scale further, the symmetry violation alters the conventional scale laws near the Reuter fixed point, where all couplings become constants. Conversely, I obtained that although the cosmological constant is still constant, the Newton coupling tends to zero, which implies that a new fixed point appears towards the UV. The new fixed point is compatible with the gravity-free UV fixed point of the Horava gravity model. I have introduced a new coupling in the model that multiplies the curvature, which I have shown to scale relevantly in the UV and evolve independently of the other couplings.

# Publications related to the thesis points

- [T1] F. Gégény and S. Nagy, “Complex couplings in renormalization,” *Int. J. Mod. Phys. A* **37**, no.11n12, 2250061 (2022)
- [T2] F. Gégény and S. Nagy, “Renormalization of the conformally reduced gravity with bilocal potential,” *Int. J. Mod. Phys. A* **35**, no.22, 2050123 (2020)
- [T3] F. Gégény, S. Nagy and K. Sailer, “On the Lorentz symmetry in conformally reduced quantum gravity,” *Class. Quant. Grav.* **40**, no.4, 045004 (2023)



Registry number: DEENK/257/2024.PL  
Subject: PhD Publication List

Candidate: Flóra Enikő Gégény  
Doctoral School: Doctoral School of Physics  
MTMT ID: 10073878

### List of publications related to the dissertation

#### Foreign language scientific articles in international journals (3)

1. **Gégény, F.**, Sailer, K., Nagy, S.: On the Lorentz symmetry in conformally reduced quantum gravity.  
*Class. Quantum Gravity*. 40 (4), 1-8, 2023. ISSN: 0264-9381.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/acafd1>  
IF: 3.5 (2022)
2. **Gégény, F.**, Nagy, S.: Complex couplings in renormalization.  
*Int. J. Mod. Phys. A*. 37 (11-12), 1-24, 2022. ISSN: 0217-751X.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X22500610>  
IF: 1.6
3. **Gégény, F.**, Nagy, S.: Renormalization of the conformally reduced gravity with bilocal potential.  
*Int. J. Mod. Phys. A*. 35 (22), 1-16, 2020. ISSN: 0217-751X.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X20501237>  
IF: 1.381

**Total IF of journals (all publications): 6,481**

**Total IF of journals (publications related to the dissertation): 6,481**

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

14 May, 2024



