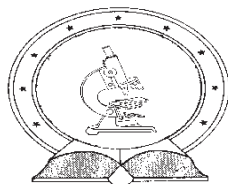


DE TTK



1949

A FÜGGVÉNYFOGALOM KIALAKÍTÁSÁNAK VIZSGÁLATA

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: **Szanyi Gyöngyi**

Témavezető: **Herendiné Dr. Kónya Eszter**

Debreceni Egyetem

Természettudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2017.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából. Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2017.

.....

Szanyi Gyöngyi

Tanúsítom, hogy Szanyi Gyöngyi doktorjelölt 2013- 2017 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2017.

.....

Herendiné Dr. Kónya Eszter

A FÜGGVÉNYFOGALOM KIALAKÍTÁSÁNAK VIZSGÁLATA

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Szanyi Gyöngyi okleveles matematika és informatika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája
(Didaktika programja) keretében

Témavezető: Herendiné Dr. Kónya Eszter

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr.	
tagok:	Dr.	
	Dr.	

A doktori szigorlat időpontja: 20... .

Az értekezés bírálói:

Dr.	
Dr.	
Dr.	

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	
tagok:	Dr.	
	Dr.	
	Dr.	
	Dr.	

Az értekezés védésének időpontja: 20... .

KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

Kimondhatatlan hálával és köszönettel tartozom témavezetőmnek, Herendiné Dr. Kónya Eszternek, aki megismertetett a matematika didaktikai kutatások módszereivel, munkám elkészítését hasznos tanácsokkal, önzetlenül, lelkiismeretesen segítette.

Köszönöm egykori általános és középiskolai matematika tanáromnak, Szanyi Erika tanárnőnek, hogy odaadó, példaértékű pedagógiai munkájával megszerettette velem a matematikát és a tanári pályát.

Köszönet illeti a Nagydobronyi Középiskola és a Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma és Általános Iskolája Arany János téri feladatellátási hely vezetését és tanárait, hogy lehetővé tették a felmérések elvégzését.

Külön köszönöm a Nagydobronyi Középiskola 6.a osztályos tanulóinak, hogy aktívan bekapcsolódtak a foglalkozásokba segítve ezzel a munkám elkészítését. Nagyon sokat tanultam tőlük.

Köszönöm Dr. Kovács Zoltán egyetemi docensnek az észrevételeit, építő megjegyzéseit, melyeket az előzetes vita során kifejtett, és amelyek hozzájárultak a dolgozat végső formába öntéséhez.

Nagy hálával tartozom drága szüleimnek, Szanyi Sándornak és Szanyi Jolánnak, akiknek szeretete, támogatása, biztatása erőt és segítséget adott nekem. Ugyancsak köszönettel bátyámnak, Szanyi Sándornak és családjának támogatásukért.

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	1
1. Elméleti háttér	4
1.1. A fogalmak tanítása	4
1.1.1. A fogalom	4
1.1.2. A fogalmak definiálása	4
1.1.3. Reprezentációk	6
1.1.4. Fogalmak mentális képe, fogalomképzet és a fogalom definíciója.....	8
1.2. A függvény fogalmának matematika didaktikai elemzése	10
1.2.1. A függvényfogalom történeti áttekintése	10
1.2.2. A függvényfogalom alkotórészei	12
1.2.3. A függvény megértése és különböző reprezentációi	14
1.2.4. A függvényfogalom kialakításának didaktikai vonatkozásai	17
1.3. Összegzés, következtetések	21
2. A függvényfogalom kialakítása Ukrajnában és Magyarországon a kerettantervek és tankönyvek tükrében	22
2.1. Az 5-6. osztályos kerettantervek általános vizsgálata	22
2.2. Az 5-6. osztályos kerettantervek és tankönyvcsaládok elemzése a függvényfogalom előkészítésének tükrében	24
3. Elsőéves egyetemi hallgatók függvényfogalomról kialakult képzetei	30
3.1. A felmérés körülményei	30
3.2. A felmérés feladatainak bemutatása	30
3.3. A felmérés tapasztalatainak bemutatása	32
3.4. Következtetések.....	35
4. A függvényfogalom kialakulásának vizsgálata	36
4.1. Kutatási kérdések és hipotézisek	37
4.2. Szabálykövető és szabályfelismerő képességek vizsgálata a függvényfogalom előkészítési szakaszában (6. osztályban).....	37
4.2.1. A felmérés körülményei	39
4.2.2. A felmérés feladatainak és tapasztalatainak bemutatása	39
4.2.3. Következtetések.....	44
4.3. A függvényfogalom bevezetésének hatása a szabálykövető és szabályfelismerő képességekre	45
4.3.1. A felmérés körülményei	45
4.3.2. A felmérés feladatainak és tapasztalatainak bemutatása	45
4.3.3. Következtetések	55
4.4. Általános iskola 8. osztályos tanulóinak fogalomképzetei a függvényről.....	56
4.4.1. A felmérés körülményei	56
4.4.2. A felmérés feladatainak és tapasztalatainak bemutatása	57
4.5. Összegzés.....	69
5. A függvényfogalom előkészítését célzó fejlesztő program	72

5.1. Kutatási kérdések és hipotézisek	72
5.2. A kutatás felépítése és módszerei	73
5.3. Tájékozódó felmérés.....	76
5.3.1. A felmérés feladatainak és tapasztalatainak bemutatása	76
5.3.2. A felmérés eredményeinek összegzése	78
5.4. A fejlesztő program első részének bemutatása.....	79
5.4.1. Elempárok alkotása manuális tevékenységekkel.....	79
5.4.2. Együttváltozó mennyiségek fogalmának bevezetése függvénygép alkalmazásával	83
5.4.3. Kifejezések helyettesítési értékeinek meghatározása	86
5.4.4. Szöveges feladatokban rejtőző együttváltozó mennyiségek felismerése, reprezentálása táblázattal, képlettel.....	89
5.4.5. Szituációk és azok általános megoldását leíró algebrai kifejezések összekapcsolása.....	93
5.4.6. Az utóteszt elemzése	96
5.5. A fejlesztő program második részének bemutatása.....	100
5.5.1. Grafikonok bevezetése. Adatok leolvasása a grafikonról	101
5.5.2. Szituációhoz előre elkészített táblázat alapján grafikon szerkesztése, grafikon alapján táblázat kitöltése.....	103
5.5.3. Szituációk eljátszása az együttváltozó mennyiségek táblázatos és grafikus ábrázolásának előkészítéséhez	106
5.5.4. Valós életből vett szituációk különböző reprezentálása (diszkrét eset)	109
5.5.5. Valós életből vett szituációk különböző reprezentálása (folytonos eset)	112
5.5.6. Az utóteszt elemzése	114
5.6. A fejlesztő program hatékonyságának vizsgálata	116
5.7. A fejlesztő program összegzése.....	119
Konklúziók, további kutatási lehetőségek	121
Irodalomjegyzék	125
Összefoglaló.....	128
Summary	134
Mellékletek	
A szabálykövető és szabályfelismerő képességek vizsgálatának feladatlapja (6. osztály)	1
A szabálykövető és szabályfelismerő képességek vizsgálatának feladatlapja (7. osztály)	3
A függvény fogalmáról kialakult tanulói képzetek vizsgálatának feladatlapja (8. osztály)	6
Tájékozódó felmérés (fejlesztő program, 6. osztály)	11
A fejlesztő program 6. foglalkozásának feladatlapja	13
Utóteszt (a fejlesztő program első részének végén).....	14
Utóteszt (a fejlesztő program második részének végén).....	17

BEVEZETÉS

A függvény a matematika, ezen belül főként a matematikai analízis egyik alapvető fogalma. Ismerete, megértése és alkalmazása nem csak a matematika, hanem a természettudományok, műszaki és közgazdasági tudományok számos területének művelése szempontjából alapvető fontosságú. Emiatt is lényeges, hogy a tanulóknál az iskolai matematika tanulás során olyan fogalomképzet alakuljon ki a függvényről, melyre a későbbiekben építhető a felsőfokú képzés tananyaga.

Matematikatanítás során többször szembesültünk azzal a problémával, hogy az általános vagy a középiskola befejezése előtt álló, sőt, egyetemet kezdett tanulók „elveszettek” a függvények világában. Vajon mi okozza ezt? Gyanú tárgyát képezte, hogy mindennek háttérében a tanulási folyamat azon szakasza áll, amikor a függvény fogalma bevezetésre kerül. A fogalom kialakításának mélyebb didaktikai vonatkozásaiban történő kutatások rávilágítottak arra, hogy bár vannak olyan matematikai fogalmak, melyek iskolai bevezetésénél támaszkodhatunk a tanulók előzetes, spontán is fejlődő előismereteire, a függvény fogalma esetében a szituáció összetettebb. Nachlieli & Tabach (2012) szerint ez esetben nincs olyan informális bázis, melyre az új matematikai témakör felépíthető. A gyerekek a hétköznapi életben spontán fejlődésük során nem használják a függvény szót, nem alakul ki a fogalomról előzetes elképzelésük, ellentétben például a negatív szám, sebesség fogalmakkal. Ennélfogva a fogalom bevezetéséhez alapos előkészítő munka szükségeltetik, és kézenfekvő, hogy ez a fogalom bevezetését megelőző években megkezdődjön.

Vizsgálva az Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma által megerősített matematika tanterveket és magyar nyelvre lefordított tankönyveket, kiderült, hogy ez az előkészítő munka csekély szerepet kap mind a tankönyvekben, mind a tantervben. A tankönyv a függvény fogalmának definiálására hirtelen tér át, nem számol azzal, hogy a definícióban szereplő, a tanulók számára új fogalmakkal közölt információk hirtelen feldolgozása sok tanulónak nem könnyű. A magyarországi tankönyvek és tantervek viszont hangsúlyt fektetnek a fogalom előkészítésére, mely célzottabban, elemei iskolától kezdődően történik.

A függvényfogalom didaktikai elemzésével képet kapunk arról, hogy melyek a fogalom alkotórészei (változók, kapcsolatok, szabályok), amelyeket az egész fogalomalkotási folyamatban szem előtt tartva elérhető a különböző problémák megoldásához hasznosítható fogalomképzet kialakítása.

Az elemzéseket figyelembe véve kutatásunk több részből állt. Induktív úton, leíró esettanulmány segítségével vizsgáltuk a magyarországi középiskolát befejező, elsőéves egyetemei hallgatók egy csoportjának függvényről kialakult képzetét (kutatás 1. része). Ezzel egyidőben egy longitudinális mérésorozatot kezdtünk, melynek segítségével egy-egy ukrainai és magyarországi iskola tanulói csoportjaiban a függvényfogalom kialakítását vizsgáltuk 3 éven keresztül 6., 7. és 8. osztályokban összehasonlító pedagógiai kutatás keretében (kutatás 2. része). Az így szerzett tapasztalatok figyelembe vételével kutatásunkat a függvényfogalom előkészítését célzó fejlesztő programmal folytattuk, melyet egy ukrainai magyar tannyelvű iskola 6. osztályában valósítottunk meg akciókísérlettel. A tervezett tanítást a matematika tanórák keretén belül végeztük, szem előtt tartva, hogy a fejlesztő program

anyagát úgy illesszük be az aktuális tanítási folyamatba, hogy a tanmenetet ne kelljen módosítani (kutatás 3. része).

A dolgozatban a következő kérdésekre keressük a választ:

- K1.1. Milyen fogalomképzet alakult ki a függvényről a magyarországi középiskolát befejező tanulók egy választott csoportjánál?*
- K2.1. Milyen szinten birtokolják a szabálykövető és szabályfelismerő képességeket 6. osztály végén az ukrán és magyar közoktatásban tanuló vizsgált diákok?*
- K2.2. Fejlődnek-e célzott fejlesztés nélkül is az ukrainai osztály tanulóinak szabálykövető és szabályfelismerő képességei?*
- K2.3. Hatással van-e a függvényfogalom formális bevezetése, különböző reprezentációinak megismerése a szabálykövető és szabályfelismerő képességek fejlődésére az ukrainai csoportban?*
- K2.4. Milyen fogalomképzet alakul ki a függvényről 8. osztály végére a vizsgált ukrainai és magyarországi tanulóknál az eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett?*
- K3.1. Hozzájárul-e a függvényfogalom alkotórészeinek jobb megismeréséhez a függvényfogalom különböző forrásainak (függvénygép, valós életből vett folyamat) az ukrainai 6. osztályos matematika tananyag egyes témaköreibe történő beépítése?*
- K3.2. Hogyan segítik az együttváltozó mennyiségek fogalmának alakítását a függvény forrásai és a különböző reprezentációi (táblázat, verbális, képlet, grafikon)?*
- K3.3. Fejleszthetők-e a függvény alkotórészeinek és különböző reprezentációinak 6. osztályban történő megismertetésével a 6. osztályos ukrainai tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességei?*

A dolgozat szerkezeti felépítése a következő:

Az **1. fejezet** a szakirodalom tanulmányozásán keresztül kutatásunk elméleti háttérét, matematika didaktikai vonatkozásait, a témához kapcsolódó jelentősebb kutatási eredményeket mutatja be. A fogalmak tanításának módszertani elemzéséből kiindulva jutunk el a függvényfogalom alkotórészeinek tárgyalásán keresztül a kialakításukat segítő, kutatásokkal alátámasztott módszertani javaslatokig.

A **2. fejezetben** a kutatásunkban résztvevő ukrainai és magyarországi iskolákban 5-6. osztályban használt matematika tantervek és tankönyvek elemzésével foglalkozunk a függvényfogalom kialakítása szempontjából.

A **3. fejezetben** elsőéves egyetemi hallgatók egy választott csoportjának függvényről kialakult képzetének vizsgálatával szerzett tapasztalatainkat mutatjuk be.

A **4. fejezetben** egy ukrainai magyar tannyelvű és egy magyarországi iskola egy-egy tanulói csoportjában 3 éven keresztül végzett, a függvényfogalom kialakulását vizsgáló felmérések eredményeit mutatjuk be. Először (6. osztályban) a tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességeinek szintjére voltunk kíváncsiak a függvényfogalom bevezetése előtt (2014). A felmérés során szerzett tapasztalatok figyelembe vételével ezt 7. osztályban (2015), a függvényfogalom bevezetése után, egy újabb felmérés követte a fogalomnak a fentebb említett képességekre gyakorolt hatásának vizsgálata céljából. Végül a tanulók

függvényfogalomról alkotott képzeiteinek feltérképezését céloztuk meg 8. osztály végén (2016).

Az **5. fejezet** a függvényfogalom előkészítését célzó fejlesztő programot mutatja be a tájékozódó felméréssel kezdődően, a megvalósított 11 foglalkozás során szerzett tapasztalatok részletes tárgyalásán át, a fejlesztő program eredményességét vizsgáló utótesztek és késleltetett teszt eredményeivel bezárólag.

A dolgozat zárásaként összefoglaljuk tapasztalatainkat, eredményeinket, összehasonlítva azokat a kiindulási hipotéziseinkkel, majd vázolunk néhány további kutatási lehetőséget.

1. ELMÉLETI HÁTTÉR

1.1. A FOGALMAK TANÍTÁSA

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy mit értünk fogalmon, milyen fázisai vannak egy fogalom elsajátításának. Kitérünk a fogalmak reprezentációs síkjaira, valamint ismertetjük a fogalom és annak az egyén elméjében kialakult képzelete közötti lehetséges kapcsolatokat.

1.1.1. A fogalom

Bár a „fogalom” kifejezést gyakran használjuk, meghatározása nem egyszerű „feladat”. A Pedagógiai Lexikon (1976) szerint:

„A fogalom dolgok, tulajdonságok, viszonyok stb. gondolati tükröződése, minden ésszerű gondolkodás egyik alapeleme: egy szónak megfelelő jelentéstartalom, amelyben az objektív valóság tárgyainak és jelenségeinek lényeges, általános jegyei, tulajdonságai és kapcsolatai kapnak kifejezést.” (idézi Ambrus, 2004, 57. old.)

Ez a definíció egybeesik Pietsch (1983) és Skemp (2005) fogalomról írt definíciójával.

Pietsch (1983) szerint egy fogalom egy halmaz, melyre teljesül:

„1. Magába foglalja azokat és csak azokat a tárgyakat, jelenségeket, viszonyokat, melyek jól meghatározott tulajdonságban megegyeznek.

2. Társadalmi fejlődés során a gyakorlati, illetve tudományos jelentőségük miatt külön nevet kaptak.” (idézi Ambrus, 2004, 57. old.)

Skemp szerint a fogalom egy eszme, a fogalom megjelölésére használt név pedig hangok egy csoportja vagy egy jel a papíron, mely kapcsolatban van ezzel az eszmével. Ez a kapcsolat létrejöhet a fogalom megalkotásának folyamatában vagy az után. „Ahhoz, hogy egy fogalmat megalkossunk, szükségünk van sok olyan tapasztalatra, melyekben van valami közös” (Skemp, 2005, 28. old.). Ha ugyanazt a nevet halljuk különféle tapasztalatokkal kapcsolatban, akkor az ember elméjében összegyűjti ezeket a tapasztalatokat, melynek alapján majd elvégzi az absztrakciót. Skemp arra is felhívja a figyelmet, hogy ha a fogalmat több olyan példával illusztráljuk, melyekben egy objektum erősen feltűnik a többi között, akkor az egyén erre az objektumra a későbbiekben jobban vissza tud emlékezni, és ezen feltűnő objektumokban lévő hasonlóságok alapján nagyobb valószínűséggel jut el a fogalomhoz.

A megfelelő példák és ellenpéldák bármely matematikai fogalom kialakítási folyamatában nagyon fontos szerepet játszanak. Amint azt a későbbiekben látni fogjuk, a dolgozatban elemzett függvényfogalom kialakítási folyamatába beépülő példák és ellenpéldák nagy hatással vannak az egyén fogalomról kialakult képzetének „milyenségére”.

1.1.2. Fogalmak definiálása

A fogalomalkotás folyamatában a nyelv segítségével tudjuk elkülöníteni a fogalommal kapcsolatos példákat és ellenpéldákat. Viszont csak a nyelvre támaszkodva, felgyorsítani a fogalomalkotás folyamatát oly módon, hogy a fogalmat csak szavakkal adjuk meg (Skemp,

2005, 31. old.), nem célravezető. Ennek okát abban találjuk, hogy egy *fogalom definiálása* „a fogalom tartalmának a kifejtését jelenti, melynek során a fogalom lényeges, megkülönböztető tulajdonságait soroljuk fel” (Ambrus, 2004, 61. old.), és a definíció ismerete nem egyenértékű a fogalom megértésével. Ha egy fogalmat csak definícióval ismertettünk meg, azaz csak a nyelv segítségével, akkor az idővel elfelejtődik (Vinner, 1983). Tehát a matematikai fogalomalkotásban a definícióknak meghatározott helyük van, melyet Skemp (2005, 42. old.) fogalomalkotásra vonatkozó két alapelve is alátámaszt:

„1. Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.

2. Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnie arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal.”

Skemp kitér arra is, hogy a tanulók életkori sajátosságának megfelelően tisztázni kell a definícióban szereplő elemek jelentését és jelentőségét, valamint tudatosítani kell a szavak köznapi jelentésével való kapcsolatot. Mindez elérhetővé tehető olyan példák bemutatásával, melyek rendelkeznek a fogalmat alkotó közös tulajdonságokkal. Ezek a példák jelennek meg az absztrahálási folyamatban is. Varga Tamás szerint „absztrahálni csak konkrétumokból lehet és ahhoz, hogy valaki jól tudjon absztrahálni, sokféle konkrétummal kell megismerkednie... Kísérletünk alapelve: dolgokkal való műveletekből jutni el a jelekkel való műveletekig” (Varga, 1966, 86-87. old.). Ezen gondolatok egybecsengnek Szendrei Julianna megállapításával, miszerint „a kéz és a tevékenység bevonása a gondolkodásba nem alacsony szintű gondolkodást jelent, hanem éppen az adott témakörben az absztrahálás lehetőségéhez való alkalmazkodás. az eszközök használata éppen az absztrahálás folyamatának egyfokozatos megvalósítását teszi lehetővé” (Szendrei, 2005, 319. old.).

A dolgozatban bemutatásra kerülő fejlesztő program megtervezésénél figyelembe véve ezen gondolatokat, törekedtünk arra, hogy a program céljának eléréséhez olyan tevékenységeket vonjunk be, melyek kiindulópontját képezhetik az absztrahálás folyamatának, majd a későbbiekben segítségül szolgálhatnak a fogalom elsajátításában.

Vollrath (1984) szerint egy tanuló akkor sajátított el egy fogalmat, ha a következő ellenőrizhető képességekkel rendelkezik (idézi Ambrus, 2004, 66. old.):

- A fogalom egy definícióját képes megadni.
- El tudja dönteni, hogy egy adott objektum egy bizonyos fogalomhoz tartozik-e (fogalomazonosítás).
- Tud példákat felsorolni (konstruálni) az adott fogalomra (fogalomrealizálás).
- Ismeri a fogalom tulajdonságait.
- Képes a fogalmat és annak tulajdonságait adott szituációk leírására, illetve az adott problémák megoldására felhasználni.
- El tudja helyezni az adott fogalmat fogalmak hierarchikus rendszerébe.

Ideális esetben, ha a tanuló végig halad a fogalom elsajátításának ezen fázisain, a kognitív (tudati) tanulással összefüggő követelményeknek is eleget tesz. Ezek Benjamin Bloom ún. kognitív taxonómiájában (tanítási célok kategorizálása és szintek szerinti rendezése) jelennek meg (Székely, 2004, 33. old.), mely a következő gondolkodási szinteket fektette le:

- Ismeret szintje: fogalmak, törvények, szabályok, elméletek rendszerek, felismerése, felidézése. Jellemző a tudásnak erre a szintjére, hogy gondolkodás szempontjából a legegyszerűbb tevékenységet jelenti, a már elhangzott információk felidézését.
- Megértés szintje: egyszerűbb és bonyolultabb összefüggések interpretálása, átkódolása, transzformálás saját szavakra.
- Alkalmazás szintje: problémamegoldás.
- Magasabb rendű műveltek szintje: analízis (elemző gondolkodás), szintézis (egyéni produktum létrehozása), értékelés.

Pietsch, német matematikadidaktikus szerint a fogalom elsajátításának fentebb tárgyalt „lépcsőfokainak” végigjárását a fogalomnak megfelelő bevezetési mód, illetve a fogalom megerősítése tudja biztosítani (idézi Ambrus, 2004, 66. old.):

1. Fogalmak bevezetése, mely három féle módon lehetséges:

- induktív út: absztrakció révén jutni el az általánosításhoz konkrét példák összehasonlításával, majd tulajdonságok kiemelésével.
- deduktív út: az általánostól jutunk el a konkrétéhoz.
- konstruktív út: bizonyos feltételek mellett a fogalom egy konkrét reprezentálásának megalkotása, majd az eljárás általánosítása.

2. Fogalmak megerősítése

- különböző definiálási lehetőségekkel.
- különböző definíciók ekvivalenciájának megmutatásával.
- definíciók következményeinek levonásával a fogalom további tulajdonságainak kiemelése.
- fogalom rendszerbe illesztésével.
- fogalomazonosítással (szituációk felülvizsgálata oly módon, hogy azok reprezentációi-e egy adott fogalomnak; döntés melletti érvelés definíció segítségével).
- fogalomrealizálással (egy adott fogalomra példák és ellenpéldák adása).

A különböző matematikai fogalmak különböző bevezetési módot kívánhatnak. Annak eldöntése, hogy egyes fogalmak esetében melyik mód célravezető, körültekintő és alapos tájékozódást igényel. A tanítási gyakorlatban legtöbbször a deduktív út dominál, annak ellenére, hogy bizonyos fogalmak bevezetése hatékonyabb, célratörőbb lenne induktív vagy konstruktív úton.

A fogalom bevezetése, illetve megerősítése során a fogalmakkal való gondolkodáshoz, illetve kommunikálásukhoz szükséges, hogy valamilyen módon reprezentáljuk e fogalmakat (Ambrus, 2004).

1.1.3. Reprezentációk

Duval (1999) a *reprezentáció* kifejezést használja, amikor valamely mentális entitásra utalunk: olyan mentális kép, ami az egyén elméjében egy-egy fogalom értelmezése során

létrejön. Ebben a kontextusban a *mentális* reprezentációt úgy tekinti, mint ellenkezőjét azon jeleknek, melyek kizárólag csak „materiális” vagy „külső” jelek.

Bruner (1966) a külvilágból érkező információk kódolásának, reprezentálásának vizsgálata során háromféle síkon helyezte el a gondolkodási folyamatokat:

1. Materiális (enaktív) sík: bizonyos objektumok, események megértése, megismerése az azokkal végzett tárgyi cselekvések segítségével megy végbe.
2. Ikonikus: az ismeretszerzés szemléletes képek, illetve elképzelt szituációk segítségével történik.
3. Szimbolikus: az ismeretszerzés elvont szimbólumok és eszmék, lényegében a nyelv alapján zajlik le.

E három reprezentációs sík az oktatási folyamat minden fázisában szerepet kap. Az alsóbb osztályokban az enaktív és az ikonikus sík dominál, de emellett a nyelvnek (beszédnek) mint szimbolikus síknak is nagyon fontos szerepe van.

Az enaktív és az ikonikus reprezentációs síkok nagy fontossággal bírnak az egész tanulási folyamatban. A matematika tanításában nagyon fontos, hogy sokféle, változatos tárgyi tevékenységgel alapozzuk meg az ikonikus és a szimbolikus síkra való áttérést. Dienes Zoltán szavai is erősítik ezt a megállapítást. Véleménye szerint, ha valakinek nehéz a matematika annak oka abban rejthet, hogy a matematikai fogalmakat nem tudja valamilyen tevékenységhez, tárgyhoz, tapasztalathoz kapcsolni (Czeglédy, 2011). Ha a fogalmakat olyan tevékenységekhez tudjuk kötni, melyek elvégzésével azok személyes élménnyé válnak, akkor ezek a tevékenységek az *epizodikus emlékezet*ben tárolódnak. Ez az emlékezet egyedi formája, a múltra való visszaemlékezéssel ún. „mentális időutazás” történik, melynek során életünk olyan epizódjai idéződnek fel, ahol mindenképpen van személyes kapcsolat az egyén és a megtörtént esemény között. Így az epizodikus emlékezet olyan emlékek „tárháza”, amelyek az ismeretek elsajátításának kontextusát (személyes aspektusait) is megőrzik, s az emlékek előhívása során egy-egy egyedi emlék, a múlt egyszeri, megkülönböztetett darabjának előkeresése történik (Csépe, Györy, Ragó, 2007). Ily módon a matematikai fogalmakat érdemes úgy előkészítenünk és alakítanunk, hogy minél több olyan tevékenységet építsünk a folyamatba, melyek személyes élménnyé formálva az epizodikus emlékezetben tárolódnak. A megfelelő előkészítés hiányában a szimbólumokkal leírt formulák értelmezése elmaradhat, s így a tanulók ezeket nem vagy csak nehezen tudják majd új helyzetekben alkalmazni.

Azt is meg kell jegyeznünk, hogy a materiális, ikonikus, szimbolikus síkok a tanulási folyamatokban nem mindig alkotnak hierarchikus rendszert. Bár jellemzően a megismerés kezdetén inkább az enaktív, majd az ikonikus reprezentáció dominál, előfordulhat, hogy egy adott szituációban az egyik vagy a másik mód tűnik egyszerűbbnek vagy célszerűbbnek (Freudenthal, 1983, idézi Herendiné Kónya, 2007, 50. old.). Érdemes tehát megismerésüket követően párhuzamosan is használni őket, figyelve az egyikről a másikra történő átjárás lehetőségére, hisz az egyik reprezentációs síkról a másikra való áttérés növeli a problémamegoldás hatékonyságát is (Ambrus, 2004; Duval, 2002).

Mindezek tükrében a fejlesztő program során figyelmet fordítottunk arra, hogy a tanulók többféle tárgyi tevékenységgel szerezzenek tapasztalatokat a függvényfogalom alkotórészeiről.

1.1.4. Fogalmak mentális képe, fogalomképzet és a fogalom definíciója

Mindazokat az asszociációkat, melyekre az egyén egy fogalom neve hallatán gondol Vinner a *fogalom mentális képe*nek nevezi (1983). A mentális kép magába foglalja a fogalom bármilyen vizuális reprezentációját (speciális függvény grafikonja; ' $y = f(x)$ ' (mint kép) stb.). E mögött meghúzódhat a fogalom tulajdonságainak egy halmaza is (például az egyén a függvény szó hallatán gondolhat arra is, hogy az mindig megadható képlettel).

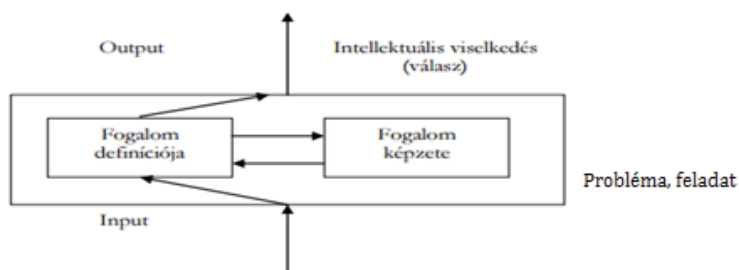
A fogalomképzetről sok tanulmányban olvashatunk (Vinner, 1983; Vinner és Hershkowitz, 1980). Vinner és Dreyfus (1989) szerint a tanulók sok esetben nem a fogalom definíciója alapján döntenek el, hogy egy matematikai objektum példája vagy ellenpéldája a fogalomnak. Legtöbbször a fogalomról kialakult képzetre alapozva hozzák meg a döntést. A *fogalomképzet* (*concept image*) minden olyan mentális kép halmaza, melyekre az egyén elméjében asszociál a fogalom neve hallatán az őket jellemző tulajdonságokkal együtt. Tehát fogalomképzetnek nevezzük a fogalom nevéhez kapcsolt teljes kognitív struktúrát, mely tartalmazza a vizuális reprezentációkat (képek, diagramok, grafikonok), mentális képeket (belső kapcsolatok), konkrét tapasztalatokat, példákat, élményeket, tulajdonságokat, eljárásokat. Ennélfogva ezt a képzetet a fogalom példáival és ellenpéldáival szerzett tapasztalatok is eredményezhetik. A képek, konkrét példák, konkrét tapasztalatok tehát jelentős szerepet játszanak a hatékony fogalomképzet kialakításában (Ambrus, 2003).

Fogalom definíciója (*concept definition*) alatt Vinner (1983) egy verbális definíciót ért, amely pontosan magyarázza a fogalmat. A fogalom megértéséhez nem csak a fogalom definíciójára van szükség, hanem az arról kialakult fogalomképzetre is. Azt is kiemeli, hogy ha a fogalom csak magával a definícióval lett bevezetve, akkor inaktív marad, és lassan elfelejtődik. Gondolatban majdnem mindig a fogalomképzet idéződik fel. A fogalomdefiníciókat vagy megtanítják az egyénnek, vagy azokat saját maga konstruálja mástól nyert fogalommagyarázat alapján. Az ily módon létrejött fogalomdefiníciók leírásai a fogalomképzeteknek.

A fogalomképzet és fogalomdefiníció kapcsolata

Attól függően, hogy egy problémamegoldás során a tanulóknál hogyan aktivizálódik a fogalomról kialakult képzet és a fogalomdefiníció, ezek kapcsolata a következő lehet (Vinner, 1983, idézi Ambrus, 2003):

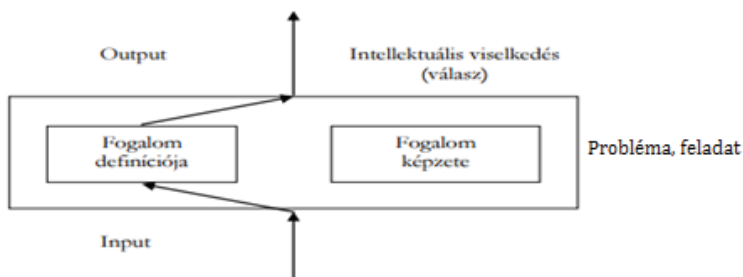
1. A tanuló tudja a fogalom meghatározását, amely kölcsönös kapcsolatban van az arról kialakult képzetével is (1.1. ábra).



1.1. ábra

A tanuló a problémamegoldás során tapasztalataira, a különböző mentális képekre is támaszkodik. Például meg tudja adni a függvény egy definícióját és a problémamegoldás során megjelenő fogalomképzet azzal összhangban van (természetesen a nem megfelelő fogalomképzet hatással van a fogalomdefiníció megfogalmazására is).

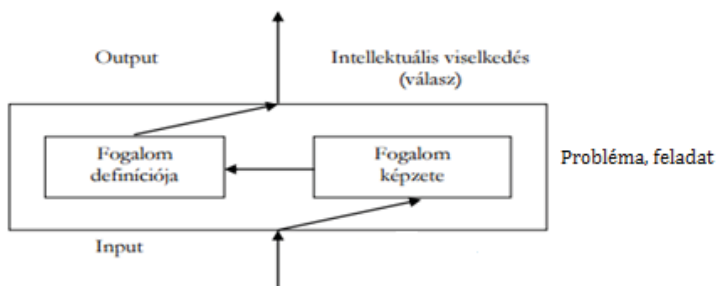
2. A tanuló a feladatot egyedül a fogalomdefinícióra támaszkodva oldja meg (1.2. ábra).



1.2. ábra

Például annak eldöntésére, hogy a különböző hozzárendelések közül melyik függvény a tanuló minden esetben csak a formális definíciót használja fel.

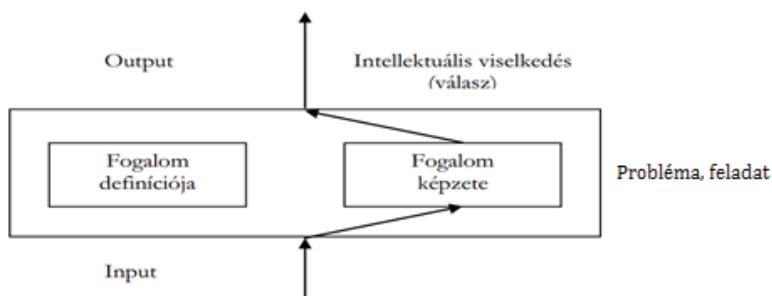
3. A tanuló a feladatmegoldás során a fogalomképzetre épít, de figyelembe veszi a fogalom definícióját is (1.3. ábra).



1.3. ábra

Például azt, hogy a különböző hozzárendelések közül melyik függvény a tanuló egyes esetekben a fogalomdefinícióra, míg máskor a fogalomképzetre hagyatkozva dönti el.

4. A tanuló egyedül a fogalomképzetre hagyatkozik.



1.4. ábra

A gondolkodási folyamatokat ebben az esetben a fogalomképzet irányítja. Például egy görbét a tanuló annak alapján tekint egy függvény grafikonjának, hogy az egy ismert függvény grafikonja-e vagy sem. Ez esetben egy hibás fogalomképzet, hibás problémamegoldáshoz is vezethet.

A későbbi fejezetekben látni fogjuk, hogy a függvényszerű kapcsolatok különböző reprezentációi hogyan hozzák felszínre a tanulók függvényről kialakult képzeit és hogyan hatnak ezek a képzetek annak eldöntésére, hogy a megadott hozzárendelések közül melyik függvény.

1.2. A FÜGGVÉNY FOGALMÁNAK MATEMATIKA DIDAKTIKAI ELEMZÉSE

A függvény fogalmát didaktikai szempontból elemezzük, utalva az előző fejezetben bemutatott általános megközelítésekre. Célunk a függvényfogalom történeti, didaktikai elemzésével egy olyan lehetséges tananyag megtervezése, mely a függvényfogalom előkészítését szolgálja.

A matematika didaktikai elemzésekkel a következő kérdésekre keressük a választ:

1. *Melyek a fogalom azon alkotóelemei, melyekre hangsúlyt kell fektetni annak kialakítási folyamatában?*
2. *Milyen kapcsolatban állnak ezek az elemek egymással?*

1.2.1. A függvényfogalom történeti áttekintése

A vizsgáltunk központi fogalmának történeti elemzésével célunk azon vonások kiemelése, melyek a fogalom megértésének nehézségeit, esetleg kritikus részeit jelenthetik. Továbbá a történeti áttekintés eszközként szolgálhat a matematikai gondolkodás fejlődésének

megértéséhez, és épít a történeti és az egyéni fejlődésben megmutatkozó párhuzamokra (Herendiné Kónya, 2007).

A 17. században az algebrában és geometriában bekövetkezett fejlődés nagy hatással volt a függvény jelenlegi definíciójának megszületésére. Kleiner (1989) a függvényfogalom fejlődésének figyelemmel követése során három mentális képet használ a fogalom történeti fejlődésének leírásához:

- geometriai (görbe formájában jelenik meg)
- algebrai (képlet formájában jelenik meg)
- logikai (egy „input-output gép” mentális képeként jelenik meg).

Az algebrai és a geometriai kép összeolvadásában a kulcsszerepet játszott a *változók* és az azok közötti kapcsolat kifejezésére szolgáló *formulák* bevezetése.

Végül is Descartes nagy matematikai tette volt a függvény első definíciója. Csodálatos lényeglátással a függvényt megfeleltetesként definiálta, bár ő még csak az algebrai műveletekkel meghatározott függvényekkel foglalkozott. Descartes, és vele egy időben, ugyanolyan érdemekkel, Fermat megteremtette a változó mennyiségek matematikáját (Sain, 1986).

A függvényfogalom további alakítása Leibniz nevéhez kötődik. Ő 1692-ben bevezette a „függvény” (latin „functio” – végrehajtás, eljárás) szót, görbékhez kapcsolódó mértani objektumok jelölésére (például a görbe meredeksége). Ekkor vezette be a paraméter, az állandó, a változó és más kifejezéseket (Sain, 1986). A 18. században először Bernoulli és Euler munkájában jelenik meg explicit módon és kap központi szerepet a függvény fogalma. A függvényt mint analitikus kifejezést definiálják, mely változók és állandók közötti kapcsolatot leíró képlet (Kleiner, 1989). Ez a definíció tehát megkövetelte a függvény képlettel történő előállíthatóságát, ami később a Fourier-sorok felfedezésével már szűknek bizonyult.

Fourier munkássága egy másik fontos állomás volt a függvénydefiníció változásában. 1822-ben publikált munkája a függvény analitikus (algebrai) kifejezését legalább egyenrangúvá emelte annak geometriai reprezentációjával (görbe).

Dirichlet 1837-ben megadta a függvény egy újabb definícióját: *„Ha az y változó úgy kapcsolódott az x változóhoz, hogy x valamely számértékéhez bármilyen törvény hozzárendeli y -nak egy értékét, akkor az y a független x változó függvényének nevezzük.”* (Sierpinska, 1992, 46. old., Sain, 1986, 700. old.).

A Dirichlet-féle általános függvénydefinícióhoz eljutott Bolyai Farkas is, aki az 1832-ben megjelent Tentamenben két értelemben is megadta a függvény definícióját. Szűkebb értelemben: *„...akármely változó (avvagy változók) akármely állandóval (avvagy állandókkal) akármely (akár az idben, akár az űrben tett) munkálattal (avvagy munkálatokkal) köttessenek össze...mondhatthatik függvénynek.”* Tágabb értelemben *„a függvény bármilyen operáció, amely az időben és térben elképzelhető.”* (Szénássy, 1975, 120. old.).

Bourbaki 1939-ben megfogalmazott függvénydefiníciója már kiterjedt a halmazokra is:

„Legyenek E és F két különböző vagy nem különböző halmazok. Az E halmaz egy változó eleme és az F halmaz egy változó eleme közötti relációt funkcionális relációnak hívjuk, ha minden $x \in E$ elemhez létezik egyetlen $y \in F$, mely relációban áll az x elemmel. Az így

megadott operációt függvénynek nevezzük.... az y a függvény értéke adott x elem mellett és a függvény meghatározott az adott funkcionális relációval. Az ekvivalens funkcionális reláció ugyanazt a függvényt határozza meg.” (Kleiner, 1989, 299. old.)

A modern függvénydefiníciót Vinner és Dreyfus (1989) tanulmányukban Dirichlet-Bourbaki definíciónak hívja, mely domináns jelleggel bír a matematikában a függvényfogalom tanításánál:

„A függvény két halmaz közötti olyan megfeleltetés, mely az egyik halmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendel a másik halmazból.” (357. old.)

A felsőoktatásban a függvény azon definícióját használják, mely azt speciális relációként írja le. Azaz *„Legyenek A és B halmazok. Egy $f \subset A \times B$ relációt függvénynek nevezünk, ha $a \in D_f$, afb és afb^* mindig maga után vonja, hogy $b^* = b$.”* (Páles, 2013, 7. old.)

A függvényfogalom ezen történeti fejlődéséből megállapíthatjuk, hogy a változó mennyiségek közötti kapcsolatok jellege egyre általánosabbá vált, és a definíciók eltekintettek a kapcsolatok kizárólag formulával történő leírásától. A függvény mind a matematika, mind a matematika oktatás egyik központi fogalma jelenleg is. Az iskolai gyakorlatban általában követjük a történeti fejlődést és a fogalom előkészítéséhez, alakításához a „szűkebb” értelemben vett függvényt használjuk, azaz a szabályokkal megadható függvények kerülnek tárgyalásra.

1.2.2. A függvényfogalom alkotórészei

A történeti fejlődés során megjelenő definíciók rámutatnak a fogalom három alkotórészére:

- (1) változók, melyek közül egyik függ a másiktól,
- (2) kapcsolat,
- (3) szabály, ami meghatározza a kapcsolatot.

A *változó* a matematikában egy adott halmaz meghatározatlan eleme, azok az elemek pedig amelyek helyett a változó állhat, annak értékei (Skemp, 2005). Malle (1986) a változó három aspektusát különítette el:

- (a) objektum – a változó egy ismeretlen szám
(például: Egy csapból a medencébe másodpercenként 2 liter víz folyik. Hány másodperc múlva lesz a medencében 14 liter víz?);
- (b) helyettesítési – a változó üres helyeket jelent, melyekbe számokat helyettesíthetünk
(például: Adott az $y = 2x + 3$ függvény. Helyettesítsünk az x helyére egész számokat -2-től 2-ig és határozzuk meg az y értékét);
- (c) kalkulus – a változó jelentés nélküli szimbólum, mellyel bizonyos szabályok szerint műveletek végezhetők
(például: Oldjuk meg az $5a + 2 = a - 1$ egyenletet).

Mielőtt a tanulókkal megismertetjük a függvény fogalmát, tapasztalatot kell szerezniük a változóról oly módon, hogy különbséget tudjanak tenni az adott és az ismeretlen mennyiségek között. Amikor bevezetésre kerül a függvény fogalma ez a megkülönböztetés már az állandó és a változó mennyiségekre vonatkozik (Sierpinska, 1992).

Sierpinska (1992) a függvényfogalom megértési feltételének tekinti a következő világok ismeretét, melyek a fogalom alkotórészeinek ismeretét is magában hordozzák:

1. változás vagy változó objektumok világa;
2. kapcsolatok vagy folyamatok világa;
3. szabályok, minták, törvények világa (30. old).

A fogalom kialakítását egy olyan folyamatként célszerű építeni, melynek során a tanulók végighaladnak ezen világok alapos tanulmányozásán.

Változás vagy változó objektumok világa

Dirichlet vagy Bourbaki függvénydefiníciójában a két változó (pl. x és y) reprezentálja a változó objektumokat. Sierpinska (1992) szerint a fogalom tanítása során hangsúlyt kell fektetni arra, hogy a tanulók meg tudják figyelni a változást, azt, hogy mi változik és hogyan. Fontosnak tartja a változások tárgyának érzékelését és verbalizálását. Továbbá hangsúlyozza azt is, hogy a tanulóknak *meg kell találniuk a szabályszerűségeket a változásokban*; érzékelniük kell a változásokat és azok közötti kapcsolatot. Kezdetben az egyes elempárokon (pl. (x, y)) belüli, majd az elempárok közötti változás megfigyelése, végül a közöttük lévő kapcsolat megtalálása történik.

Kapcsolatok, folyamatok világa

Sierpinska (1992) javaslatokat tett arra, hogy a függvényt valós életből vett szituációkban megfigyelhető kapcsolatok modelljeként, vagy egy rendszer másiban történő transzformálásának eszközeként célszerű bevezetni. A legtöbb definícióban f jelöli az egyik objektum másikba való transzformálásának folyamatát. A kapcsolatok sokféleképpen írhatók le, például táblázattal, szavakkal, grafikonnal, nyíldiagrammal, algebrai kifejezésekkel (ezekről bővebben az 1.2.3.1. alfejezetben szólnunk).

Van de Walle (2004) szerint (idézi Kwari, 2007) a függvény együttváltozó mennyiségek közötti kapcsolatként és/vagy megfeleltetés szabályaként alakítható ki.

Figyelembe véve Szendrei Julianna (2005) megállapítását a manipulatív tevékenységek oktatási folyamatba való bevonásának szükségességéről (lásd a dolgozat 1.1.2. alfejezete), a függvényfogalom mint *együttváltozó mennyiségek* közötti kapcsolat, manipulatív tevékenységekkel is alakítható, melyek segíthetik a tanulókat egyrészt az együttváltozó mennyiségek és azok közötti kapcsolat felismerésében, másrészt a független és függő változók közötti különbségtételben (pl. alsó osztályokban logikai készlet használata).

Szabályok világa, melyek meghatározzák a kapcsolatot

A függvény egyik alkotóeleme, a szabály, széles körben használatos a fogalom kialakítási folyamatában. A szabály definiálja a kapcsolatot, azt, hogy hogyan függ az egyik változó (függő) a másik változótól (független). Minthogy a szabály meghatározza a kapcsolatot, ezért a fogalom ezen két alkotóeleme között nagyon kis különbség van. Előfordul, hogy sikerül

kapcsolatot találunk a változók között, de nem, vagy csak nehezen tudjuk explicit módon, verbálisan vagy képlettel megadható szabállyal definiálni azt. Bár a függvény definíciója eltekint a kapcsolatok kizárólag szabállyal történő leírásától, a világ kevésbé szabályos történéseit mégis olyan függvényekkel próbáljuk modellezni, melyek esetében az együtváltozó mennyiségek közötti kapcsolatok megadhatók explicit szabállyal (verbálisan vagy képlet formájában) (Herendiné Kónya, 2013). Ennélfogva a szabály mint a függvényfogalom alkotóeleme fontos szerepet játszik a fogalom kialakítási folyamatában. A szabály felismerése ezen folyamat egyik kezdeti „lépésének” mondható (Kwari, 2007). Ily módon megállapíthatjuk, hogy a függvény fentebb tárgyalt alkotóelemeihez kapcsolható képességek közül a szabályfelismerő és szabálykövető képességek fontos szerepet játszanak a fogalomalkotási folyamatban, a függvényszerű kapcsolatok felismerésében és azok különböző módon történő leírásában. Az említett képességek tanulói birtoklása a változások tárgyának érzékelésében, a változás „milyenségének” megfigyelésében, felismerésében is jelentőséggel bír.

Sierpinska (1992) a függvényfogalom tanítására a következő pedagógiai javaslatokat tette:

- a tanulók magyarázatokat tudjanak adni az egyes elempárok közötti változásokra, találjanak törvényszerűségeket a változások között;
- a tanulók érzékeljék a változásokat és az azok közötti kapcsolatot, úgy mint valamilyen felmerülő problémát, mely „tudományos magyarázatra méltó”;
- a tanulókat a függvények tanulására valós életből vett problémákon keresztül érdemes vezetni;
- a függvények tanításában fontos, hogy a tanulók érzékeljék és verbalizálják a változás tárgyát; képesek legyenek elmondani ne csak azt, hogy hogy ment végbe a változás, de azt is, hogy mi változott;
- a különböző matematikai kontextusok segítségével relevánssá tehető az értéktáblázatok konstruálása, majd az elempárokkal a függvény grafikonjának megalkotása, s így a függvényfogalom mélyebb fogalmi szintre kerül.
- a függvénydefiníció bevezetésének egészen addig nincs értelme, míg a tanulók nem rendelkeznek egy megfelelő matematikai kultúrával, azaz míg nem találják meg a definíció helyét a matematikában (lásd Skemp két alapelvét, a dolgozat 5. old.).

Ezek alapján úgy véljük, hogy a függvényfogalom alakításának első lépése annak elérése, hogy a tanulók sokféle kontextusban felismerjék, elemezzék és le tudják írni a változásokat.

A fentebb leírtak alapján, a függvényfogalom kialakítási folyamatában fontos a változás érzékelése, a változók közötti kapcsolat felismerése. A változás „milyenségét” pedig a változók közötti kapcsolatot leíró szabály tudja meghatározni.

1.2.3. A függvény megértése és különböző reprezentációi

Even (1998) szerint ugyanazon fogalom azonosításának és különböző formákban történő reprezentálásának a képessége, valamint a rugalmas átjárási képesség egyik reprezentációból

a másikba alapvető szerepet játszik a matematika tanulásában, mivel lehetővé teszi a tanulóknak a fogalom mély megértését (idézi Elia, 2007, 538. old.).

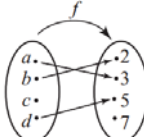
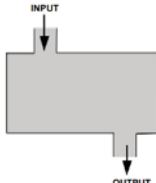
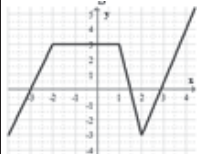
Ennélfogva a függvény különböző reprezentációs formáinak is fontos szerepe van a fogalom megértésében. Mindegyik reprezentáció információt kínál a fogalom sajátos aspektusairól anélkül, hogy képes lenne teljesen leírni azt (Duval, 2002).

Reprezentációk és megértés

A függvényfogalom fő jellemzői közül kiemelhető annak különböző módon történő reprezentálhatósága. Akkoc és Tall (2002) az alábbi reprezentációs módokat tárgyalja:

- a függvény verbális (szöveges) reprezentációja szaknyelven és hétköznapi nyelven
- nyíldiagram (két halmaz és az elemeik között lévő kapcsolatot szemléltető nyilak)
- függvénybox („input-output” kapcsolat szemléltetése)
- számpárok halmaza (rendezett elempárok halmaza)
- értéktáblázat
- grafikon
- képlet (algebrai kifejezés)

Az 1.1. táblázatban példákkal illusztráltuk az egyes reprezentációs módokat.

nyíldiagram	függvénybox (függvénygép)	számpárok halmaza	grafikon	érték- táblázat	képlet								
		$f = \{(1,2), (2,3)\}$		<table border="1" data-bbox="955 967 1059 1085"><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table>	x	y	1	2	-1	0	3	4	$f(x) = 2x$
x	y												
1	2												
-1	0												
3	4												

1.1. Táblázat: A függvény különböző reprezentációs módjai

A fogalom megértésének tehát egyik fontos aspektusa a többféle reprezentációs mód alkalmazásának képessége és a szükséges jellemzők átemelése egyik módból a másikba (Lin és Cooney, 2001, idézi Areti, Paraskevi, Andreas, 2015, 440. old.). Sierpinska (1992) szerint a tanulókkal meg kell ismertetni a függvény reprezentációs formáinak széles spektrumát, annak különböző módon való kifejezhetőségét (leképezés, transzformáció) annak érdekében, hogy elkerüljük azt, hogy a tanulók ezek közül bármelyiket önmagában a függvényvel azonosítsák. A megismertetéssel együtt arra is törekednünk kell, hogy a tanulók a különböző reprezentációk között mozogva meglássák az azok között lévő kapcsolatot. Ha a fogalom kialakítása során ez nem valósul meg, akkor ezek a reprezentációk egymástól izoláltan épülnek be ismereteikbe (Thompson, 1994).

A különböző reprezentációk alkalmazásának és összekapcsolásának képessége szoros kapcsolatban van a tanulók különböző mentális képeinek kiépülésével is (Akkoc és Tall,

2002), mely az ideális fogalomképzet kialakulásának egyik „állomása”. Azaz fogalomképzetük gazdagsága (vagy hiánya) szorosan kapcsolódik a reprezentációk tanulói alkalmazásához. Ahhoz, hogy a tanulók alkalmazni tudják a különböző reprezentációs módokat, meg kell érteniük a fogalom főbb vonásait (Areti, Paraskevi, Andreas, 2015).

A függvényfogalom megértésének szakaszai

Dubinsky és Harel (1992, 85. old.) a függvényfogalom megértésének négy különböző szakaszáról tesz említést:

- *előfüggvény*
Ebben a szakaszban a tanulók függvényfogalmáról kialakult képze „homályos” és függvényhez kapcsolódó problémák megoldására alkalmatlan. A fogalomnak csak „csírái” jelennek meg (például a tanuló szerint a függvény egy matematikai fogalom, ami leír valamit).
- *cselekvés*
Az objektumok egy megismételhető mentális és fizikai manipulációja. A függvény egy ilyen felfogása olyan képességet von maga után, mely a számokat algebrai kifejezésekbe építi és kiszámítja azok értékeit.
A tanulók a függvényt olyan „valamiként” képzelik el, mely megadja egy kifejezés értékét a változó egy bizonyos értéke mellett.
- *folymat*
A függvény folymatként való interpretációja magába foglalja a mennyiségek egy dinamikus transzformációját. Az egyén képes úgy gondolkodni a transzformációról, mint egy befejezett tevékenységről, mely valamilyen objektumból indul ki, valamit csinál ezzel az objektummal és a tevékenység eredményeként előáll egy új objektum. Egy folymatszerű elképzelés segítségével a tanuló képes kombinálni azt más folymatokkal vagy visszafordítani azt (például: összetett vagy inverz függvény).
A fogalom megértésének ezen szakaszában a tanulók függvényről kialakult fogalomképze „input-transzformáció-output” képet mutathat.
- *objektum*
A függvény tekinthető objektumként, mely egy folymat segítségével jött létre. Ha egy objektumból haladunk egy folymat felé, akkor csak ahhoz a folymathoz lehet visszatérni, ami eredetileg az objektumot eredményezte. Az objektumon lehetséges olyan cselekvéseket végrehajtani, mely átalakítja azt.

A két utolsó szakaszban a függvényfogalom egymással kapcsolatban lévő aspektusainak megismerése is megtörténik, melyeket Doorman (2012) a következőképpen ír le:

- *A függvény mint egy „input-output” hozzárendelés*
A függvény egy bemenő-kimenő hozzárendelés, mely segít megszervezni és végrehajtani a számítási folymatokat. Ez a kezdetben homályos és operatív fogalom fokozatosan kap több „árnyalatot”: hogyan függ az output érték az input értéktől; hogyan határozza meg az input az output értéket.

Általános iskola alsó osztályaiban a függvénynek főleg ez a műveleti vonása kerül előtérbe és azt „input-output gép”-nek tekintik, mely a betáplált („input”) értékeket a kidobott („output”) értékekbe viszi át egy bizonyos törvényszerűség alapján.

- *A függvény mint az együttváltozók dinamikus folyamata*

A fogalom ezen aspektusa arra vonatkozik, hogy míg a független változó „végigfut” az alaphalmazon, addig a függő változó is végigfut a képhalmazon. A függő változó együtt változik a függetlennel. Majd felmerül a kérdés, hogy ez az együttes dinamikai folyamat hogyan és miért megy végbe. Az együttváltozó mennyiségek tanulmányozására a reprezentációs módok közül hasznos a táblázat és a grafikon, melyek segíthetnek a mennyiségek közötti kapcsolat megtalálásában is.

- *A függvény mint matematikai objektum*

Egy függvény mint matematikai objektum reprezentálható nyíldiagrammal, táblázattal, grafikonnal, képlettel és verbálisan. Ezek ugyanazon objektumnak a különböző aspektusát hangsúlyozzák. A folyamat-objektum kettőség és az „input-output” hozzárendelés kiemelik a függvény műveleti karakterét: az input dolgot folyamat segítségével átalakítja egy output dologgá (létrehozva ezzel egy objektumot). A matematikai objektum nézet pedig annak strukturális karakterét: olyan „dolog”, mely magasabb rendű folyamatokba (például differenciálásba) építhető.

Ezek a szakaszok rámutatnak a függvényfogalom kialakításának lépcsőfokaira. A két utolsó szakasz (folyamat-objektum) véleményünk szerint a fogalom megértésének szorosan egymásba „fonódó” szakaszai. Végighaladva ezeken a lépcsőfokon a változók, kapcsolatok, szabályok alkotórészek, a fogalom aspektusaival annak különböző reprezentációinak megismerése is megtörténik. A szerzők kiemelik a procedurális munka fontosságát a matematikai fogalmak, így a függvényfogalom tanulásában. Ugyanakkor rávilágítanak arra is, hogy sem egy teljesen konceptuális megközelítés, sem egy kizárólagos procedurális nem segít a tanulóknak megtanulni a fogalmat. Ehelyett célravezetőbb a kettő közötti kölcsönhatás előmozdítása. Így a fogalom tanulási folyamatának részévé válik az elemi „procept” (process+concept) megismerése is (Stankov, 2008), mely egy matematikai objektumból (függvény), az azt előállító eljárásból („input-transzformáció-output”) és egy, akár az eljárást, akár az objektumot reprezentáló szimbólumból áll (a függvény képlet reprezentációja).

1.2.4. A függvényfogalom kialakításának didaktikai vonatkozásai

Egy matematikai fogalom iskolai bevezetését legtöbbször hosszú előkészítő munka előzi meg. Vannak olyan fogalmak, amelyek esetében támaszkodhatunk a tanulók előzetes, a hétköznapi életből vett teljesen spontán fejlődő előismereteire. Ilyenkor speciális példák segítségével absztraháljuk a szükséges fogalmat (Skemp, 2005). A függvény fogalma esetében a helyzet összetettebb. Ebben az esetben szükségesünk van egy olyan bázisra, amelyre építhető az új matematikai tananyag. A függvényfogalom kialakulása tehát hosszú folyamat. Míg a halmazok elemei közötti kapcsolat vizsgálatától eljutunk a definíció megadásáig, hosszú utat

kell megtennünk. Ezt támasztja alá Nachlieli és Tabach (2012) kutatása is. Véleményük szerint a függvény bevezetését alapos munka kell hogy megelőzze szimbolikus kifejezések, grafikonok és táblázatok tárgyalásának bevonásával. Ezekkel együtt az együttlévő mennyiségeket tartalmazó valós életből vett szituációk megbeszélését is biztosítani kell. Kézenfekvő ezért, hogy az előkészítő munka spirális módon, a fogalom bevezetését megelőző években megkezdődjön.

Sierpinska tanulmányában lefektetni, hogy a függvényfogalom kulcsa a változó mennyiségek közötti kapcsolat (Sierpinska, 1988, 572. old.). Minthogy a szabály mint a függvényfogalom egyik alkotóeleme, meghatározza a mennyiségek közötti kapcsolatot, a szabálykövető és szabályfelismerő képességek tanulói birtoklása meghatározó szerepet játszik a fogalom előkészítési szakaszában a függvényszerű kapcsolatok felismerésében. Warren, Miller, Cooper (2013) 5 éves gyerekek függvényszerű gondolkodásának klinikai interjú segítségével végzett vizsgálata alapján a szabálykövető és szabályfelismerő képességek már egészen kicsi kortól fejleszthetők. A gyerekek képesek megfogalmazni a mennyiségek közötti kapcsolatot már 1. osztályos koruktól.

Bár a való életben sokszor olyan problémákkal találkozunk, melyekben megjelenő együttlévő mennyiségek közötti kapcsolatot nem lehet egyértelműen szabállyal megadni, az iskolában általában a szabályokkal megadható függvények kerülnek tárgyalásra. Ennek egyik oka az, hogy ezek főként képességfejlesztést (absztrahálást-konkretizálást, összefüggések megtalálása) szolgálnak (Herendiné Kónya, 2013). A történeti áttekintésnél láthattuk, hogy az egy „szűkebb” értelmezésből fejlődött ki a ma használatos függvényfogalom, ezért úgy véljük, hogy az iskolai gyakorlatban is a „szűkebb” megközelítéstől célszerű eljutnunk a „tágabb” fogalomig (lásd például a Dirichlet-Bourbaki függvénydefiníciót, dolgozat 12. old.).

Mindezek alátámasztják, hogy a szabályfelismerő és szabálykövető képességek tanulói birtoklása, a felismert szabály különböző módon való kifejezése (szavakkal, képlettel) szükséges, hogy részét képezze a függvényfogalom előkészítési szakaszának. Ezzel együtt szükségét látjuk annak, hogy a tanulók képesek legyenek:

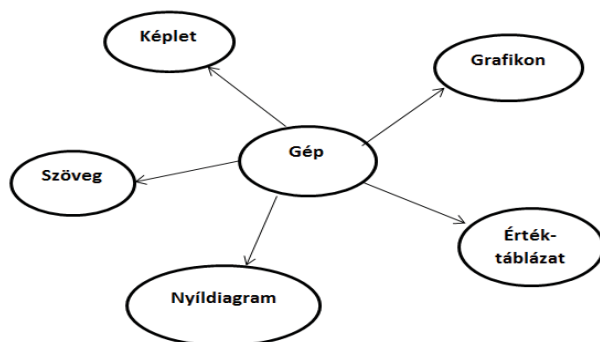
- együttlévő mennyiségek közötti kapcsolat felismerésére, ha ezek a kapcsolatok különbözőképpen vannak reprezentálva;
- a felismert kapcsolatok különböző módon (pl. szavakkal, képlettel) való kifejezésére;
- azon szabály követésére, mely alapján az elemek egymáshoz lettek rendelve.

A továbbiakban áttekintjük a fogalom azon forrásait, melyek alkalmazhatók a fenti képességek fejlesztésére, így a függvényfogalom előkészítésére is. A fogalom induktív úton, annak különböző forrásaival történő bevezetése során szerzett tapasztalatok segíthetik a tanulók fogalomkialakulását.

Függvénygép

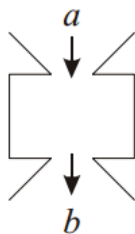
Thompson (1994) úgy véli, hogy a függvényfogalom megfelelő kezdeti kialakításának központjában nem annak különböző reprezentációs formái kell, hogy szerepeljenek, hanem olyan tartalmas kontextusok, melyek „megtestesítik” a függvényfogalmat (24. old.).

Tall, McGowen és DeMarois (2000) *kognitív „gyökereken”* (cognitive root) olyan objektumot, jelenséget, eljárást ért, melyet a tanuló könnyen érthetőnek talál, és alapját képezi az adott fogalomra épülő elméletnek. Azaz, a kognitív „gyökér” (továbbiakban a fogalom forrása) az alapvető ismeretek tartalmak kognitív egysége a tanulási folyamat elején. A függvényfogalom egyik ilyen forrása a *függvénygép* (gépjáték, szabályjáték, függvénybox), mely tárgyasítja a fogalom megértési szakaszait (folyamat, objektum), és a fogalom olyan reprezentációja, melyből kiindulva elérhető a függvény többi reprezentációja is (táblázat, grafikon, képlet, verbális) (1.5. ábra). Ezek a szokásos reprezentációk az együttlváltozó mennyiségek közötti kapcsolat reprezentációs módjaiként is tekinthetők (Tall, McGowe & DeMarois, 2000).



1.5. ábra

A függvénygép tehát a függvényfogalom egy olyan forrása (1.6. ábra), mely a fogalom bevezetésénél segítségül szolgálhat az alkotórészeinek (változók, kapcsolatok, szabályok) megismerésében (lásd a dolgozat 1.2.2. fejezete)



1.6. ábra

Mindezekkel együtt ez az eszköz segíthet a

- a függvény definíciójában szereplő halmazok (értelmezési tartomány, képhalmaz) közötti különbségtételben,
- a független és függő változók fogalmainak megértésében,
- az együttlváltozó mennyiségek tárgyasításában,
- a függvényfogalom alkotórészeinek (változók, kapcsolatok, szabályok) megismerésében.

Az alsóbb osztályokban használt gépmodellel gyakran arra törekszünk, hogy a gyerekek megtalálják a gép működési szabályát, mely alapján a bemenő objektumból megkaptuk a kimenő objektumot, majd azt megadják képlettel. Mindezek mellett azt is hangsúlyoznunk kell, hogy ez a tevékenység a későbbiekben olyan képzethez vezethet, hogy minden függvény megadható képlettel. Emiatt szükséges, hogy a függvénygépet olyan mindennapos példák illusztrálására is használjuk, melyek a függvényt képlet helyett folyamatként adják meg (például a levél feladási költsége a tömegétől függően).

Valós életből vett folyamatok modellezése függvénnyel

Davindeko (1997) a függvényfogalom kialakítására valós életből vett szituációkat használt. A valós életből vett szöveges feladatok biztosítják, hogy a tanulók mindennapi életben szerzett tapasztalataikat aktivizálva beleéljék magukat az adott szituációba és a megoldáshoz felhasználják az így szerzett tapasztalataikat, ismereteiket (Kelemen, 2010). Van de Walle (2004) (idézi, Kwari, 2007) a függvényfogalom kialakítását szintén valós életből vett kontextusokkal és azok különböző reprezentációival kezdte. Úgy véljük, ezek segíthetnek a függvényt valós élet modelljeként használni.

„A szöveges feladatok valamely verbális leírásai a problémaszituációknak, mely egy vagy több kérdés megválaszolását kéri, a válasz a számadatokkal matematikai műveletek alkalmazásával megadható... valamint a szöveges feladatok megoldása során a válaszadónak meg kell adni azon mennyiségek közötti kapcsolatot, melyek a kontextusban rejtőznek” (Verschaffel, 2000, idézi Chassapis, 2010, 210. old.).

Ennek alapján elmondható, hogy a valós életből vett szöveges feladatok is tartalmazhatják a függvény alkotóelemeit (változók, kapcsolatok, szabályok). Abban az esetben, ha a szabály szöveges feladatokban rejtőzik, a verbális leírás fázis fontos a mennyiségek közötti kapcsolat felismerése során, mielőtt a kapcsolatot meghatározó szabályt algebrai kifejezéssel is leírnánk. Ezt támasztja alá Varga Tamás azon megállapítása, hogy a „formulához az út a törvényszerűségnek szavakban való megfogalmazásán át vezet” (Varga, 1969). Az együtváltozó mennyiségek táblázatos reprezentációja segíthet abban, hogy a mennyiségekre, mint változókra tekintsünk, majd ezek segítségével a feladat megoldását verbálisan és általánosítva algebrai kifejezéssel is megadjuk. A tanulók a táblázatba rendezett, szöveges feladatokban rejtőző együtváltozó mennyiségek közötti kapcsolatot felismerve eljuthatnak a képlettel való általánosításig (Rivera, 2013).

Mindezek mellett azt is ki kell emelnünk, hogy a szöveges feladatok kitűzésénél figyelembe kell venni az esetleges nyelvi nehézségeket is. Sokszor a tankönyvekben kitűzött feladatok nyelvi megfogalmazásból adódó bonyolultsága, összetettsége is okozhatja a sikertelen feladatmegoldást és így negatív hatással is lehet a függvény fogalmának elmélyítésére. A szöveges feladatoknál fontos az ismert és ismeretlen mennyiségek közötti kapcsolat kifejezési módja, a feladat megoldásához szükséges műveletekre utaló kulcsszavak használatának mértéke, és az információk közlésének sorrendje.

1.3. ÖSSZEGZÉS, KÖVETKEZTETÉSEK

Vannak fogalmak, melyek kialakításához elegendő a mindennapi életben szerzett tapasztalatok. Az előző fejezetekben azonban láthattuk, hogy a függvényfogalom kialakításához szükségesek olyan források, melyekre a fogalom bevezetésénél támaszkodhatunk. Annak ellenére, hogy ezen matematikai fogalommal - anélkül, hogy akár tudnánk róla – az élet nagyon sok területén találkozunk, a kialakításához, megértéséhez vezető út hosszú és körütekintő munkát igényel.

A függvényfogalom didaktikai elemzésével az alkotórészek és az azok közötti kapcsolat feltárását céloztuk meg (1., 2. *kutatói kérdés*, 10. old.). Mindezeket szem előtt tartva érhető el, hogy úgy alakítsuk ki a fogalmat, hogy az a problémamegoldás során is jól hasznosítható legyen. Ideális esetben a fogalom megértésének megfelelő szakaszain áthaladva a tanuló fogalomképzete összhangban lesz a fogalom definíciójával.

Igyekeztünk megtalálni a függvényfogalom előkészítését segítő forrásokat, kapcsolatba hozva őket a fogalom megértésének egyik kritériumával, a különböző reprezentációk használatának képességével.

A szakirodalmak analízisével a következő megállapítások tehetők a függvényfogalom kialakítására:

- A függvényfogalom esetében nem támaszkodhatunk kizárólagosan csak a tanulók hétköznapi életben spontán fejlődő előismereteire.
- A függvényfogalom kialakítása spirális módon történik, a fogalom definíciójának megadása előtt kell, hogy megkezdődjön.
- Az előkészítési szakasz fókuszába a fogalom egyes alkotórészeinek (változók, kapcsolatok, szabályok) megismerését kell helyezni.
- Az alkotórészek megismerését elérhetjük a fogalom különböző forrásainak fogalomalkotási folyamatban történő bevonásával.
- A fogalom kialakítását az együttlévő mennyiségek fogalmának tárgyiasítása mellett végezzük, a fogalom alkotórészeinek összekapcsolásával.
- Az együttlévő mennyiségek közötti kapcsolat felismerésében a függvény különböző reprezentációi nyújthatnak segítséget (verbális, táblázat, képlet, nyíldiagram, grafikon).
- Mindezekkel együtt a mennyiségek közötti felismert kapcsolatot leíró szabályhoz, mint a függvény egyik alkotórészéhez kapcsolható szabálykövető és szabályfelismerő képességek fejlesztését is szem előtt kell tartanunk.
- Fejlesztünk kell a különböző reprezentációk közötti átjárás képességét is.

A későbbiekben bemutatásra kerülő felmérésekkel ezen elméleti következtetéseket ellenőriztük, megerősítettük, a fejlesztő programban használt tevékenységek megtervezésénél pedig ezeket a következtetéseket vettük figyelembe.

2. A FÜGGVÉNYFOGALOM KIALAKÍTÁSA UKRAJNÁBAN ÉS MAGYARORSZÁGON A KERETTANTERVEK ÉS TANKÖNYVEK TÜKRÉBEN

Ukrajnai és magyarországi 5-6. osztályos matematika kerettantervek és tankönyvek általános, majd a függvényfogalom kialakítása szempontjából végzett elemzésével arra törekedünk, hogy megtaláljuk milyen hasonlóságok, esetleg különbségek mutatkoznak a fogalom előkészítési szakaszában az előírt kerettantervi követelményekben, illetve azok mennyire vannak összhangban a tankönyvi leckékkel és az azokban kitűzött feladatokkal.

Ukrajnában és Magyarországon az elemi-, általános- és középiskolai oktatás eltérő szakaszokban valósul meg. Az 2.1. táblázat az ukrajnai és magyarországi közoktatás leggyakoribb iskolatípusainak szakaszolását mutatja be. Mint látható, ezekben az általános iskola Ukrajnában 5 éves, viszont a középiskola mindössze 2 év. Ennek ellenére a két országban használt matematika kerettanterveknek megfelelően mindkét országban a középiskola végére (11. év vagy 12. év) kisebb eltéréssel, de ugyanazok a tananyagok kerülnek tanításra. Ugyanakkor, amint azt a későbbiekben látni fogjuk, a függvényfogalom kialakításának folyamatában már különbségek mutatkoznak.

Évfolyam	Ukrajna	Magyarország
1	Elemi iskola (6-7 éves kortól)	Általános iskola alsó tagozat (6-7 éves kortól)
2		
3		
4		
5	Általános iskola	Általános iskola felső tagozat
6		
7		
8		
9	Középiskola	Középiskola
10		
11		
12		

2.1. Táblázat: Az ukrajnai és magyarországi közoktatás leggyakoribb iskolatípusainak szakaszolása

2.1. AZ 5-6. OSZTÁLYOS KERETTANTERVEK ÁLTALÁNOS VIZSGÁLATA

Ukrajnában a matematika és más tantárgyak tartalmát Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma által elfogadott ún. *Tanítási program* írja le. A program az egyes évfolyamokon tanítandó ismereteket és az azokhoz kapcsolódó, a tanulók felkészültségi szintjeinek minősítésére szolgáló követelményeket határozza meg. Ehhez a dokumentumhoz a Magyarországon használatos matematika kerettanterv hasonlít leginkább, melynek a 2012-ben

hatályba lépett változata az a fejlesztési feladatokon keresztül írja le az ismeret, képesség és készség jellegű követelményeket. Megemlítendő, hogy Ukrajnában a 7-9. osztályokban az addigi *Matematika* tantárgy két külön tantárgyra tagolódik: *Algebra* és *Mértan* tárgyakra.

A 2.2. táblázatban az általános iskola 5-6. osztályára vonatkozó, 2012-ben kiadott ukrainai és magyarországi *Matematika* kerettantervekben lefektetett, hasonlóságot mutató követelményeket vizsgáljuk. Ukrajnában a 2012 óta felmenő rendszerben a korábban kiadott matematika programban csak kisebb módosítások történtek. Mivel a későbbiekben bemutatásra kerülő fejlesztő programban résztvevő tanulóknál a tanmenet alapja a 2012-es program volt, így a dolgozatban ezt elemezzük részletesen.

Ukrajnai tanítási program ¹ követelményei	Magyarországi kerettanterv ² követelményei
Gazdagítani és elmélyíteni a tanulók tudását: - számokról és azokkal végzett műveletekről - szám-és betűkifejezésekről - mértékegységekről - egyenletekről és számegyenlőtlenségekről.	- Tudni a tanult mértékegységeket átváltani. - Készség szinten számolni egész számokkal, a racionális számokkal való műveletek végzésében való gyakorlottság.
- Fogalmi aparátus, - számítási algoritmusok, - ábrázolási képességek kialakítása.	- A megértett és megtanult fogalmak és eljárások felhasználása, szerves beépülése a modellekbe. - Matematikai szaknyelv és jelölésrendszer használatának, alkalmazásának fejlesztése.
- Sík-és térszemlélet fejlesztése. - Különböző síkbeli és térbeli alakzatok felismerése.	- Tájékozódás fejlesztése síkban és térben. - Egyszerű síkbeli és térbeli alakzatok felismerése.
- Logikus gondolkodás fejlesztése. - Szöveges feladatok megoldása. - Matematikai modellek alkalmazása.	- Egyszerű szöveges feladatok néhány megoldási stratégiájának elsajátítása. - A probléma megoldását elősegítő modellek alkotása.
Kialakítani a tanulóknál az adatok - táblázatba rendezésének - grafikonon történő megadásának - különböző diagramon való szemléltetésének képességét; Tudni következtetéseket levonni ezek elemzésével.	Megfelelő szemléltető ábrákat, diagramokat, grafikonokat készíteni a problémamegoldás során, - ezeket értelmezni, elemezni és felhasználni; - halmazokat jellemezni; - szabályszerűségeket észrevenni; - általánosító sejtéseket, állításokat megfogalmazni.
Érvelés, cáfolás fejlesztése.	Az érvelés, a cáfolás, a vitakészség, a helyes kommunikáció fejlesztése.

2.2. Táblázat: Ukrajnai és magyarországi kerettantervek követelményei

¹ М. І. Бурда, Ю. І. Мальований, Є. П. Нелін, Д. А. Номіровський, А. В. Паньков, Н. А. Тарасенкова, М. В. Чермерис, М. С. Яків, *Математика. Навчальна програма для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів*.

² *Matematika kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára*. A kerettantervek kiadásának és jóváhagyásának rendjéről szóló 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 2. melléklete.

A táblázatba azokat a jellegzetességeket közöltük, melyek esetében hasonlóságokat találtunk a két ország 5-6. osztályos kerettanterveiben előírt fejlesztésekben. Ezek a jellegzetességek globálisak, azaz a 6. osztály végére elsajátítandó tananyagokhoz kapcsolódó fejlesztési követelmények, de jól kapcsolhatók kutatásunk központi fogalmának, a függvénynek az előkészítéséhez is.

Bár a későbbiekben bemutatásra kerülő felméréssorozatunkban résztvevő ukrainai (hasonlóan a magyarországi) tanulók tanmenetét a 2012 előtt kiadott matematika kerettanterv határozta meg³, annak részletes elemzésétől most eltekintünk, mivel a kutatásunk központi fogalmának a kialakítása szempontjából az abban lefektetett követelmények nem térnek el a 2012-es kerettantervben közöltektől.

A következő alfejezetben a két ország tanterveit és tankönyveit a függvényfogalom kialakítása szempontjából elemezve kiderül, hogy a fogalom kialakítására fókuszálva már lényeges különbségek is mutatkoznak.

2.2. AZ 5-6. OSZTÁLYOS KERETTANTERVEK ÉS TANKÖNYVCSALÁDOK ELEMZÉSE A FÜGGVÉNYFOGALOM ELŐKÉSZÍTÉSÉNEK TÜKRÉBEN

Ahhoz, hogy képet kapjunk a függvényfogalom előkészítéséről az általános iskola 5-6. osztályában megvizsgáltuk a fogalom kialakítását segítő témaköröket és azok tartalmi jellegét a már említett tantervekben és a következő tankönyvekben:

- Бевз Г.П., Бевз В.Г., Математика 6. кл.: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. - К.:Генеза, 2006.
- Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С., Математика: Підручник для 5-го класу - Х.:Гімназія, 2005.
- Hajdu Sándor, Matematika (alapszint, 5.-6. osztály), Műszaki Tankönyvkiadó, 2001, 2002.

Vizsgálatunk azért esett ezekre a tankönyvekre, mert a későbbiekben bemutatásra kerülő felméréssorozatunkban résztvevő iskolák tanulóinál ezen tankönyveket használják a tanítási gyakorlatban. A választott ukrainai iskola magyar tannyelvű, az iskola tankönyvellátása olyan tankönyvekre korlátozódik, amelyek magyar nyelvű fordítást kaptak. Csakúgy, mint Magyarországon, Ukrajnában is többféle matematika tankönyv jelenik meg, de az ukrainai magyar tannyelvű iskola tanulói azokból tudnak tanulni, melyeket anyanyelvükre lefordítottak. Emiatt a tanárok is legfőképp ezen tankönyvek használatát részesítik előnyben és a tanítás szervezésénél ezen tankönyvekre támaszkodnak, mert az Ungvári Járási Állami Adminisztráció Oktatásügyi Osztálya előírja, hogy a tanmenet készítésénél a tanításhoz használt tankönyvet is figyelembe kell venni és annak címét a tanmenetben is fel kell tüntetni.

³ *Навчальні програмі для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-9 класи.- К.: "Перун", 2005.*

A választott magyarországi iskola által használt matematika tankönyvet sok más iskola is régóta használja. Ugyan nem követelmény, hogy a tanmenetet a tankönyvnek megfelelően kell elkészíteni, mégis a gyakorlat azt mutatja, hogy a felső tagozat szaktanárai követik a tankönyvi felépítést és használják azok feladatanyagát.

Az ukrán és a magyar közoktatásban a függvényt, mint matematikai fogalmat egyaránt az általános iskola 7. osztályában definiálják. Alsóbb osztályokban csak előkészítik a tanulókat különböző tananyagokkal a fogalom bevezetéséhez. A fentebb említett 5-6. osztályos matematika kerettanterveket és tankönyveket vizsgálva a függvényfogalom kialakítását segítő témakörök és azok tartalmi jellege szempontjából szembevető különbségek mutatkoznak a szabálykövető és szabályfelismerő képesség fejlesztésére előírt követelményekben (a vizsgálatainkban résztvevő ukrainai tanulók alsó osztályban használt tankönyveiből és az Oktatási Minisztérium által előírt tantervből pedig mondhatjuk azt, hogy hiányzott). Az egyértelmű mennyiségek közötti kapcsolatot definiáló szabály felismerése, mint a függvényfogalom alkotórésze, a fogalom kialakításának egyik kezdeti lépéseként használható, hiszen a függvény akkor adott, ha ismerjük a két halmazt és az elemek közötti egyértelmű megfeleltetést, ami alapján a halmazok elemeit összekapcsoltuk (Czeglédy, 1994). Ennek ellenére a vizsgált ukrainai tanterv fejlesztési követelményei eltekintenek a szabályfelismerő- és követő képességek fejlesztésétől. A fogalom forrását jelentő függvénygép (gépjáték) sem jelenik meg, és a függvény másik alkotóelemének, a kapcsolatoknak a felismerésére sem helyeződik hangsúly.

A magyarországi kerettantervben már alsó tagozaton⁴ is hangsúlyt fektetnek arra, hogy a gyerekek minél több függvényszerű hozzárendelésről tapasztalatot szerezzenek: képesek legyenek felismerni két halmaz elemei közötti kapcsolatot (összefüggés-felismerő képesség fejlesztése) és azt különböző módon való kifejezni: „Egyszerűbb összefüggések, szabályszerűségek felismerése. Szabályjátékok alkotása. Változó helyzetek megfigyelése, a változás jelölése nyíllal. Számok táblázatba rendezése” (kerettanterv 7-8. old.). Ezen fogalomelőkészítő munkák a vizsgált ukrainai kerettantervben és tankönyvekben hiányosak, ezért feltételezhetjük azt, hogy a tanárok sem térnek ki az említett képességek fejlesztésére.

A 2.3. táblázatban összefoglaltuk azon tankönyvi tananyagokat, amelyek segítséget nyújthatnak a függvényfogalom előkészítésénél (az egyforma megnevezés végett az ukrainai tanítási programban használt, a „tanulók felkészültségi szintjének minősítésére szolgáló követelmények” fejléc helyett a „Fejlesztési követelmények a tantervben” megnevezést használjuk mindkét ország esetében).

A táblázatból is kiolvasható, hogy az egyes ukrainai tananyagokhoz kapcsolódó fejlesztési követelmények között nem szerepel a szabálykövető és szabályfelismerő képesség fejlesztése, és csupán érintik a függvény egyik alkotóelemének, a változónak az ismeretét. Ezzel ellentétben a magyar tanterv jóval több olyan tananyagot ír elő, melyek az említett képességek fejlesztésével együtt a függvényfogalom alkotórészeinek (változók, kapcsolatok, szabályok) mélyebb megismerését is megcélözzák (ezeket a táblázatban kiemeltük), valamint a tantervben a „függvény” szó explicite is megjelenik.

⁴ Matematika kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára. A kerettantervek kiadásának és jóváhagyásának rendjéről szóló 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 1. melléklete.

Ukrajnai tankönyv és tanítási program		Magyarországi tankönyv és kerettanterv	
Tananyag	Fejlesztési követelmények a tantervben	Tananyag	Fejlesztési követelmények a tantervben
<i>Szám- és Betűkifejezések (5. oszt)</i>	A szám- és betűkifejezések felismerése, példákkal történő illusztrálása; a szám- és betűkifejezések értékeinek meghatározása	<i>Összeg, különbség, szorzat, hányados változásai. (5. oszt)</i>	Fegyelmezetttség, következetesség, szabálykövető magatartás fejlesztése. Algoritmikus gondolkodás fejlesztése.
<i>Egyenes arányosság (6. oszt)</i>	Arányos mennyiségek illusztrálása példákkal, az egyenes arányosság fogalmának definiálása, az aránypár ismeretlen tagjának megtalálása, a mennyiségek közötti arány meghatározása	<i>Arányos következtetések (5.oszt) Függvények, egyenes és fordított arányosság (6.oszt)</i>	A következtetési képesség fejlesztése. <i>Annak megfigyeltetése, hogy az egyik mennyiség változása milyen változást eredményez a hozzá tartozó mennyiségnél (együttváltozó mennyiségek).</i> Arányérzék fejlesztése, a valóságos viszonyok becslése települések térképe alapján.
<i>Diagramok (6.oszt)</i>	Oszlop-és kördiagramok elemzése és szerkesztése	<i>Egyszerű diagramok, értelmezése, táblázatok olvasása, készítése (5-6.oszt)</i>	Elemzőképesség fejlesztése a napi sajtóban, különböző kiadványokban található grafikonok, táblázatok felhasználásával
<i>Derékszögű koordináta-rendszer (6.oszt)</i>	Megtalálja a pont koordinátáját a koordináta síkon és ábrázolja az adott koordinátájú pontot.	<i>Derékszögű koordináta-rendszer (5-6.oszt)</i>	Megadott pont koordinátáinak leolvasása, illetve koordináták segítségével pont ábrázolása a Descartes-féle koordináta-rendszerben.
<i>Grafikonok (6.oszt)</i>	<i>Mennyiségek közötti összefüggéseket</i> grafikonnal ábrázolja és elemzi ezeket a grafikonokat, valamint képes adatok leolvasására a grafikonról.	<i>Összefüggések, grafikonok, sorozatok Grafikonok, táblázatok (5-6.oszt)</i>	Összefüggések felismerése. Együttváltozó mennyiségek összetartozó adatpárjainak jegyzése: <i>tapasztalati függvények, sorozatok alkotása. A helyes függvény szemlélet megalapozása.</i> Megfigyelőképesség összefüggések felismerésének képessége, rendszerező-képesség fejlesztése. <i>Szabálykövetés, szabályfelismerés képességének fejlesztése.</i>

2.3. Táblázat: A függvényfogalom előkészítését szolgáló témák az ukrajnai és magyarországi kerettantervekben és tankönyvekben

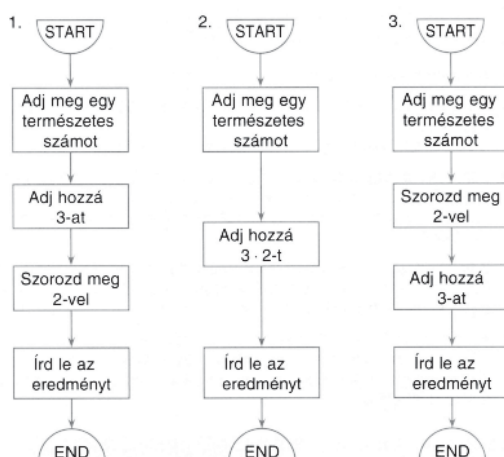
A továbbiakban néhány példán keresztül a teljesség igénye nélkül azt mutatjuk be, hogy hogyan valósulnak meg a tantervi előírások az egyes tankönyvekben.

A vizsgált magyarországi 5. osztályos tankönyv a *Természetes számok* c. témakörnél eleget tesz a tanterv *Összeg, különbség, szorzat, hányados változásai* tananyagához kapcsolódó fejlesztési követelményeknek és olyan feladatot tűz ki (59. old.), mely fejleszti a szabálykövető képességet, valamint az elempárok táblázatba rendezésével is foglalkozik (2.1. ábra).

1.90. Minden folyamatábrához másold le a táblázatot, és töltsd ki a folyamatábra segítségével!

x	1	2	5	6				

A számítás szabályát írd be a táblázat vastagon bekeretezett részébe!



2.1. ábra

Ezen témakörön belül a tankönyv különböző, életből vett példák segítségével vezeti be a tanulókat a változók, kapcsolatok világába, az összetartozó mennyiségek közötti kapcsolatot pedig különböző módon reprezentálja (táblázattal, grafikonnal). Több példával fejleszti a szabályfelismerő képességet táblázatban megadott mennyiségekkel. A *Sorozatok* leckén belül folytatódik a szabályfelismerő és -követő képességek fejlesztése: „Mi lehet a sorozat szabálya? 4;12;36..... Folytassuk a sorozatot felismert szabály alapján 3-3 taggal!” (76. old.)

Az ukrainai 5. osztályos tankönyvben hasonló feladatokkal nem találkozunk. A tankönyv a *Szám- és Betűkifejezések* c. témánál csak az algebrai formában adott kifejezések értékeinek meghatározásával, illetve a verbális formában adott kifejezések algebrai módon történő megadásával foglalkozik. Például: „Határozd meg az $y=4x-7$ képlettel megadott kifejezés értékét, ha a) $x=26$; b) $x=15$ ” (70. old.)

Analóg példát találunk a magyarországi tankönyvben is, de az tovább fűzi a feladatot oly módon, hogy a szabálykövető magatartás fejlesztésével az összetartozó mennyiségek

táblázatba rendezését és az inverz szabály alkalmazását is kéri. Ezzel együtt a változók, kapcsolatok világával való ismerkedést is megcélozza (2.2. ábra).

1.128. Mindegyik szabályhoz másold le a táblázatot, és fejezd be a kitöltését az adott szabály alapján!

- a) $y = x + 8$; b) $y = 5 \cdot x$;
c) $y = 3 \cdot x + 4$; d) $y = x \cdot x + 6$.

x	1	2	5	3	
y		10			70

1.129. Keresd a táblázathoz minél több szabályt!
Minden felismert szabályhoz másold le a táblázatot, és töltsd ki a szabály alapján!

x	0	1	2	6	
y			12		

2.2. ábra

A 6. osztály esetében az *Egyenes arányosság* c. tananyagnál az előzőekhez hasonló szituációkkal találkozunk a vizsgált tankönyvekben. Az „indulás” hasonló, gyakorlati példa segítségével jut el mindkét tankönyv az összetartozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésétől azok táblázatba rendezéséig. Bár még nincs szó a függvényről, de a magyarországi tankönyv (2.3. ábra) az összetartozó mennyiségek különböző reprezentációjára is hangsúlyt fektet: a kapcsolat táblázattal, grafikonnal, képlettel is megjelenik. Az ukrainai tankönyv az összetartozó mennyiségek közötti kapcsolatot meghatározó szabály képlettel történő megadására nem tér ki (2.4. ábra). Ehelyett az egyenes arányosság definíciójának következményeként leírja képlettel az egyenesen arányos mennyiségek közötti kapcsolatot ($y=kx$, ahol k -valamely szám), de erre a későbbiekben már nem tér vissza.

1. Egy facsavar ára 4 Ft. Hány forintba kerül 0, 1, 2, ... facsavar?

Határozzuk meg a költség és a csavarok árának arányát.

Ábrázoljuk grafikonon az összetartozó értékpárokat.

Jelölje n a csavarok számát, k a költséget.

A csavarok számának változásával **arányosan** változik a költség is.

0 csavar ára $4 \cdot 0$ (Ft)

1 csavar ára $4 \cdot 1$ (Ft)

2 csavar ára $4 \cdot 2$ (Ft)

...

n csavar ára $4 \cdot n$ (Ft)

n (db)	0	1	2	3	4	5	6
k (Ft)	0	4	8	12	16	20	24
$k : n$	–	4	4	4	4	4	4

Az összefüggés szabálya: $n \mapsto 4 \cdot n$;

másképp írva $k = 4 \cdot n$

2.3. ábra

21.§

Arányos mennyiségek

1 kg alma ára 3 hrvnya. Mennyibe kerül 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 6 kg alma? A feleletet táblázatba foglalhatjuk.

Az alma tömege (kg)	1	2	3	4	5	6
Ár (hr.)	3	6	9	12	15	18

A feladatban két mennyiség szerepel: a tömeg és az ár. Vegyük a tömeg két értékét: 3 kg és 5 kg. A megfelelő árak 9 hrvnya és 15 hrvnya. Ezekkel az adatokkal a következő aránypárt írhatjuk fel: $3 : 5 = 9 : 15$ vagy $3 : 9 = 5 : 15$. Az ilyen mennyiségeket *arányos mennyiségeknek* nevezzük. Az áru ára és tömege arányos mennyiség. Minél több almát veszünk, annál többet kell fizetni.

2.4. ábra

Mindkét tankönyv és tantervek tartalmaz olyan témaköröket, melyek kapcsolódnak az általunk vizsgált függvényfogalom kialakításához. Viszont, amint az az elemzésből is kitűnik, a vizsgált ukrain tankönyvben és tantervben ennek a fogalomnak a kialakulását, alkotórészeinek megismerését segítő témakörök száma kevesebb, a fogalom bevezetéséhez szükséges képességek fejlesztése nem elég hangsúlyos.

3. ELSŐÉVES EGYETEMI HALLGATÓK FÜGGVÉNYFOGALOMRÓL KIALAKULT KÉPZETEI

A dolgozat 2. fejezetében láthattuk, hogy a magyarországi kerettanterv és tankönyvek hangsúlyt fektetnek a függvényfogalom előkészítésére, már elemi iskola 1. osztályától. Ennek ellenére az oktatási tapasztalatok, amelyeket a szakirodalomban fellelhető jelentősebb kutatási eredmények is erősítettek, azt mutatták, hogy az egyetemet kezdett hallgatók függvényről kialakult képzetek nem felelnek meg a kerettantervi követelményeknek. Mindezek ismeretében ebben a fejezetben induktív kutatáson belül, leíró esettanulmánnyal vizsgáljuk a magyarországi középiskolát befejező, egyetem első évét kezdő hallgatók függvényről kialakult képzetét.

A kutatási kérdés és a hozzá kapcsolódó hipotézis a következő:

K1.1. Milyen fogalomképzet alakult ki a függvényről a magyarországi középiskolát befejező tanulók egy választott csoportjánál?

H1.1. A középiskolát befejező tanulói csoport függvényfogalomról kialakult képzetek nem felelnek meg a kerettantervi követelményeknek.

A hipotézisek igazolásához vagy elvetéséhez készség- és tudásszintmérő tesztet használtunk, melyek értékelését kvantitatívan végezzük, a tanulók munkájának kvalitatív elemzésével.

3.1. A felmérés körülményei

Az elsőéves villamosmérnök hallgatók esetében a Matematika 1 tárgy⁵ tematikájának jelentős része a függvény fogalmához kapcsolódik. Ezért még mielőtt a függvények bevezetése megtörtént volna az említett tárgy előadásán, megvizsgáltuk a hallgatók elképzeléseit a függvény fogalmáról. Felmérésünkben a Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Kar 34 elsőéves villamosmérnök hallgatója vett részt, 2014 októberében, gyakorlati óra keretében. A kérdésekre írásban kellett válaszolni, és 25 perc állt rendelkezésre. A hallgatók előbb külön feladatlapon az 1. kérdést kapták kézhez, majd ezt követően egy másikon a 2-4. kérdéseket.

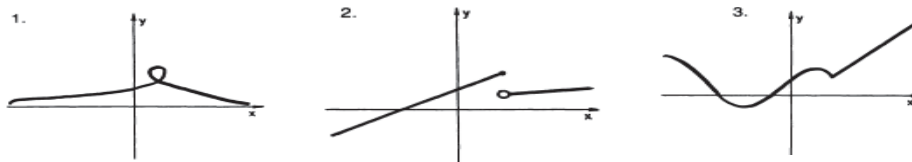
Vizsgálatainkat Vinner és Dreyfus (1989) kutatásai alapján végeztük. Ők két izraeli főiskola első éves, különböző szakirányon tanuló hallgatóinál és néhány középiskolai, nem matematika szakos tanárnál vizsgálták a függvény fogalmáról alkotott képet és a fogalomra adott definíciót.

3.2. A felmérés feladatainak bemutatása

A függvényről kialakult fogalomképzet (concept image) vizsgálatára Vinner és Dreyfus a következő kérdéseket tűzték ki:

⁵A tárgy tematikája részletesen megtalálható a <http://fizika.ttk.unideb.hu/ip/index/tantargyak/t/95> oldalon.

1. Létezik-e olyan függvény, melynek grafikonja:



2. Létezik-e olyan függvény, mely minden nullától különböző számhoz annak a négyzetét rendeli, a nullához pedig az 1-et?

3. Létezik-e olyan függvény, melynek minden értéke egyenlő egymással? Ha igen, akkor add meg szimbólumokkal és ábrázold!

4. Véleményed szerint mi a függvény?

A kutatásban résztvevők válaszait elemezve a szerzők különböző aspektusokat különítettek el. Azon aspektusok, melyekre támaszkodva a hallgatók döntést hoztak arról, hogy egy konkrét hozzárendelés függvény e vagy sem, a következők voltak:

- *Egyértelműség*—Ha a hozzárendelési szabály az alaphalmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendel, akkor ez függvény. Ha nem, akkor nem függvény.
- *Folytonosság*—Ha a grafikon megszakad, a megfeleltetés nem folytonos az alaphalmaz egy pontjában.
- *Felosztott alaphalmaz*—Az alaphalmaznak két részhalmaza van, melyek mindegyikéhez különböző hozzárendelési szabály tartozik. Ennek következtében a grafikon jellege megváltozik.
- *Rendkívüli pont*—Van egy pont, melyre az általános hozzárendelési szabály nem érvényes.

A hallgatói függvénydefiníciók vizsgálatát megcélzó 4. kérdésre, „Véleményed szerint mi a függvény?”, érkezett válaszokat a következő 6 kategóriába sorolták:

1. *Megfeleltetés*—A függvény két halmaz közötti olyan megfeleltetés, mely az egyik halmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendel a másik halmazból (Dirichlet-Bourbaki definíció).
2. *Függőségi viszony*—A függvény két változó közötti függés (y függ az x -től).
3. *Szabály*—A függvény egy szabály. A szabálynál várhatóan van bizonyos rendszeresség, míg a megfeleltetés „tetszőleges” is lehet.
4. *Művelet*—A függvény egy művelet.
5. *Képlet*—A függvény egy képlet, algebrai kifejezés vagy egy egyenlet.
6. *Reprezentáció*—A függvényt azonosítják egy grafikus vagy szimbolikus reprezentációjával.

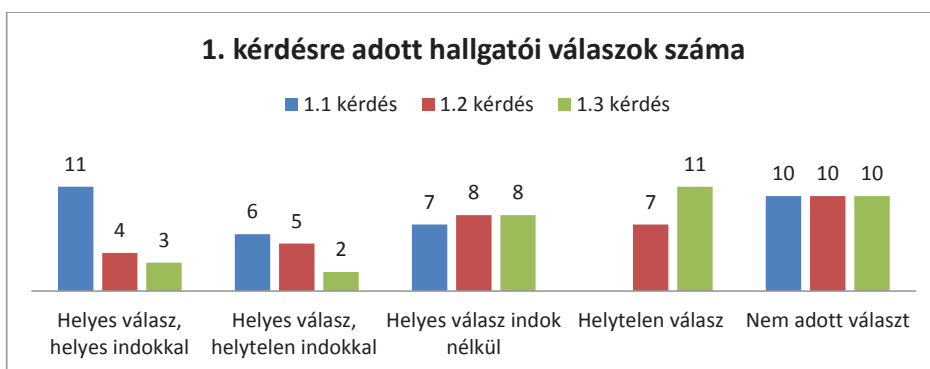
Felhasználva ezen kutatási módszereket és eredményeket hasonló felmérés keretén belül vizsgáljuk a villamosmérnök képzésbe bekerülő hallgatók függvényről kialakult képzetét és arra adott definícióit. Annyi kiegészítést tettünk, hogy az 1. kérdéseknél indoklást, a 3. kérdésnél pedig a függvény szimbolikus és grafikus reprezentációját is kértük a hallgatóktól.

3.3. A felmérés tapasztalatainak bemutatása

Az 1.-3. kérdésekre *Igen*-nel vagy *Nem*-mel kellett válaszolni indokolva azt. A kérdések elemzésénél kissé eltérünk a már említett tanulmányban leírtaktól, ahol első körben a helyes válaszok száma, majd az indoklásban a fentebb leírt aspektusok felhasználásának száma szerint történt az elemzés. A hallgatói válaszokat az 3.1. ábrán látható szempontok szerint vizsgáljuk. A felmérésben szereplő hallgatókat H1,..., H34 módon jelöljük.

1. kérdés

Az 1.1. kérdésre érkezett a legtöbb helyes válasz helyes indokkal (11). Ezek az indokok többsége a fentebb leírt aspektusok közül az elsőhöz („egyértelműség”) tartoztak. A H3-as hallgató válasza például: „*Nem, mert egy értékhez két másikat rendel*”. Azon hallgatók, akik helyes választ adtak ugyan, de az indokuk helytelen volt, a következőképpen érveltek válaszuk mellett: „*Szerintem nem, mert én még ilyet nem láttam*” (H30), „*Nem, mert egy függvény nem tud tenni ilyen nagy ellentétes monotonitást*” (H32). A számadatok igazolják, hogy a válaszadó hallgató közül senki sem adott erre a kérdésre helytelen választ.



3.1. ábra

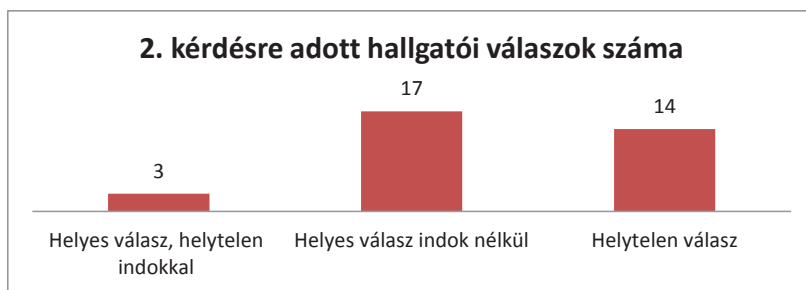
Az 1.2 kérdés esetében a 4 helyes választ helyes indokkal adó hallgató közül 2 magyarázatában a „folytonosság” aspektus jelent meg: „*Függvény, szakadása van*” (H3) (a hallgató az 1.1 és 1.3. kérdéseknél a definíciót is felhasználta indoklásul, így vélhetően azt próbálta közölni válaszával, hogy attól függetlenül függvény, hogy nem folytonos). A helyes választ helytelen indokkal adó hallgatók például a következőkkel érveltek: „*Igen, az $y=kx+b$ egyenes egyenlete*” (H33), „*Igen, mert ilyet már láttam*” (H30). A helytelen válaszok arra engednek következtetni, hogy valószínűleg a szakadási pont megléte okozhatott zavart a *Nem*-mel válaszoló hallgatókban: „*Nem, mert egy függvény egy értéket vagy felvesz, vagy nem, nem lehet, hogy fel is veszi meg nem is*” (H27), „*Ilyen szakadás nem lehet egy függvényben*” (H24). Az 1.3. kérdésre érkezett a legkevesebb helyes indokkal megadott helyes válasz. Ezen kategóriába sorolható 3 hallgató közül 2 magyarázatában a Vinner és Dreyfus kutatásában is megjelenő „felosztott alaphalmaz” aspektus kapott szerepet: „ *x_0 -ig egy polinomfüggvény, utána lineáris függvény*” (H9). Az alaphalmaz különböző részhalmazaihoz tartozó hozzárendelési szabályok szerint megrajzolt függvénygrafikon okozhatott problémát azon

hallgatóknál, akik úgy gondolták, hogy a megadott grafikon nem reprezentálhat függvényt: „nem létezik, mivel nincs olyan egyenlet, melynek grafikonon lerajzolt képlete előbb görbül aztán lineárisra változik” (H5). A H30-as hallgató ennél a kérdésnél is azon csoportba sorolható, akinek érvelése a már látott függvénygrafikonokra összpontosult („Igen, mert ilyet már láttam”).

Vinner és Dreyfus kutatásának résztvevői hasonló válaszokat reprezentáltak. Az 1.2. kérdés esetében például szintén a szakadási pont megléte miatt nem tekintették függvénygrafikonnak az adottat, vagy úgy vélték, hogy „egy függvénynek nem lehet két hozzárendelési szabálya” (363. old.).

2. kérdés

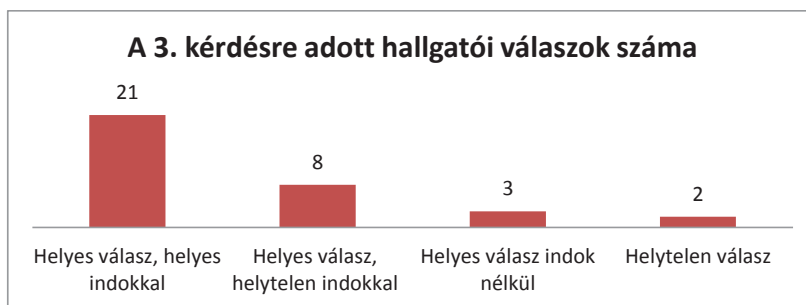
A 2. kérdés esetében 17 hallgató gondolta úgy, hogy létezik olyan függvény, mely „minden nullától különböző számhoz annak a négyzetét rendeli, a nullához pedig az 1-et”, de nem indokolták válaszukat. 14 hallgató válasza a Nem volt. 3 hallgató adott helyes választ, de helytelen indokkal és helyes választ helyes indokkal egyetlen hallgató sem (3.2. ábra). A 3 említett hallgató a következő választ adta: „Létezik. Az $y=x^2+1$ függvény” (H7). Hasonló érvelések az említett tanulmányban az erre a kérdésre adott helyes, de helytelenül indokolt válaszok között is megtalálható volt. Azon hallgatók, akik a kérdésre nemleges választ adtak, a következőképpen érveltek válaszuk mellett: „Nem, mert $f(x)=x^2$ függvényénél 0-hoz 0-t rendel, az $f(x)=x^2+1$ függvényénél pedig 0-hoz 1-et rendel, de a további értékei nem négyzet, hanem négyzet+1”(H5). Ha figyelembe vesszük a fentebb leírt aspektusokat, akkor ezen hallgatók a „rendkívüli pont” megléte miatt nem tekintették függvénynek ezt a verbálisan reprezentált hozzárendelést.



3.2. ábra

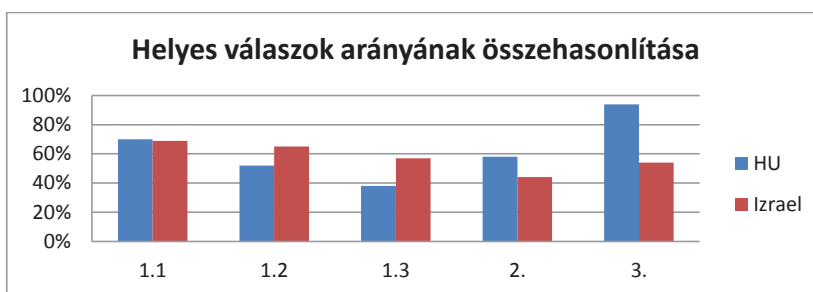
3. kérdés

A 3. kérdésre 21 hallgató adott helyes választ helyes indokkal, azaz felismerték a verbálisan reprezentált konstans-függvényt („ $y=2$; $f(x)=0$ ”). 3-an helyes választ adtak ugyan, de nem indokolták azt, és csak 2 hallgató adott nemleges választ. 8-an helyesen válaszoltak, de rossz indokkal (3.3. ábra). Az ő esetükben az érvelés „Létezik, az $y=x$ függvény” volt. Ezek a válaszok ugyancsak jellegzetes helytelen válaszai voltak a korábbi tanulmánynak is.



3.3. ábra

A 3.4. ábra az izraeli tanulmány 1.-3. kérdéseire adott helyes válaszok arányát hasonlítja össze a mi felmérésünkben résztvevők helyes válaszainak arányával.

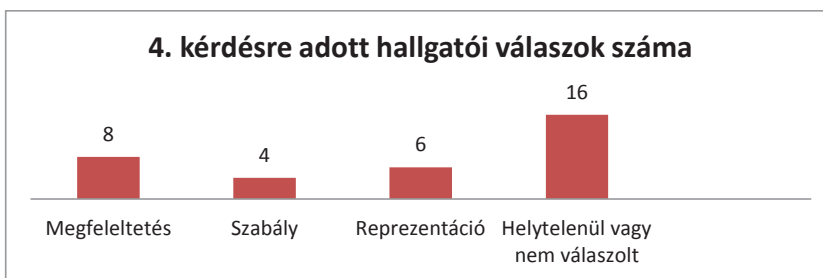


3.4. ábra

Láthatólag az egyes kérdésekre érkezett helyes válaszok arányában csak kis eltérések mutatkoznak. Noha jól tudjuk, hogy vizsgálatunk kis hallgatói csoportra terjedt ki, míg a másik kutatás nagyobb hallgatói létszámmal dolgozott, a bemutatott hallgatói válaszok közötti hasonlóságok, esetenként egyezések jól mutatják, hogy 28 év távlatából és egy egészen más oktatási rendszerben tanult diákoknál is jelentkeznek azok a függvényfogalommal kapcsolatban felmerülő problémák, melyek a róla kialakult képzetek „milyenségéből” adódnak.

4. kérdés

A függvény definíciójára adott helyes hallgatói válaszok besorolhatók voltak Vinner és Dreyfus által megadott kategóriákba. A 34 hallgatóból 8 hallgató (24%) a függvényt mint megfeleltetést (pl. „Egy hozzárendelés, mely adott x értékhez egy y értéket rendel”), 6 hallgató (17%) mint reprezentációt definiálta (pl. „A függvény minden x tengelybeli koordinátához matematikai műveletekkel hozzárendel egy y tengelybeli koordinátát”), 4 hallgató (12%) szerint pedig a függvény egy szabály (például: „Egy hozzárendelési szabály, mely valamely x értékhez egy y értéket rendel”). 16 hallgató (47%) helytelenül vagy egyáltalán nem válaszolt (3.5. ábra).



3.5. ábra

Az izraeli hallgatók körében végzett felmérésben is hasonló arányban véleményezték a résztvevők a függvényt megfeleltetésként (26%), szabályként (10%) és reprezentációként (8%). Bár az izraeli hallgatók definícióit a szerzők több kategóriába sorolták, eltekintve a definíciók helyességétől, mi jelen felmérésben csak azon definíciókat vettük figyelembe, melyekben a Dirichlet-Bourbaki definíció „nyomait” véltük felfedezni.

3.4. Következtetések

A felmérés eredményei arra engednek következtetni, hogy a vizsgált hallgatók többsége abban az esetben tekintett egy görbét valamely függvény grafikonjának, ha hasonlóságot vélt felfedezni az általa jól ismert függvénygörbékkel. A függvény definíciójával történő elemzést csak abban az esetben használták döntésük meghozatalához, ha a különböző módon reprezentált megfeleltetést nem tudták valamilyen ismert függvényhez kötni. Ennélfogva elmondható, hogy csakúgy, mint az izraeli hallgatók esetében, felmérésünk résztvevőinek függvényről kialakult képzei nem felelnek meg a kerettantervi követelményeknek, ami igazolja a H1.1.-t. Képzetükben ismert, egy-egy hozzárendelési szabállyal definiálható függvények „élnek”, a fogalom tartalmi jelentése sok esetben elveszett.

Egyetértünk a felhasznált kutatás konklúziójával, miszerint a fogalmat nem lehet elsajátítani egy lépésben, hanem hosszú folyamat vezet el idáig. Az általunk vizsgált hallgatók esetében jól látszik, hogy ez a folyamat valamely szakaszban „megtört”. Mindez indokoltá tette számunkra a függvényfogalom általános iskolai kialakításának mélyebb, alaposabb vizsgálatát. Minthogy egy kis létszámú hallgatói csoportot vizsgáltunk, nem volt célunk az eredmények általánosítása. A tapasztalatok azonban olyan további kutatás megtervezését segítették, mely megpróbálta beazonosítani, hogy melyik az a korosztály, amelynél hasonló fogalomképzettel rendelkeznek a tanulók. Ehhez általános iskolai csoportokat kísértünk figyelemmel 3 éven keresztül.

4. A FÜGGVÉNYFOGALOM KIALAKULÁSÁNAK VIZSGÁLATA

Az ukrainai és magyarországi kerettantervek és tankönyvek elemzése alapján a függvényfogalom alakítására annak bevezetését megelőző években az ukrainai kerettanterv és tankönyvek kevesebb hangsúlyt fektetnek, mint a magyarországi tanterv és tankönyvek.

Ebben a fejezetben különböző korosztályokban vizsgáljuk a két ország egy-egy választott csoportjában a függvényfogalom kialakulását összehasonlító pedagógiai kutatás keretében. A hipotézisek igazolásához vagy elvetéséhez a 2. fejezetben közölt dokumentumelemzést és készség szintmérő teszteket használunk (feltáró módszer). Az értékelést a tankönyvek és tantervek esetében analitikus eljárással, a tesztekre vonatkozóan pedig kvantitatívan, a tanulók munkájának kvalitatív elemzésével végezzük (feldolgozó módszer).

Vizsgálatainkat az ukrainai magyar tannyelvű Nagydobronyi Középiskola⁶ (elemi, általános és középfokú oktatási intézmény) és a magyarországi Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma és Általános Iskolája Arany János téri feladatellátási hely⁷ egy-egy tanulói csoportjában (egyik sem matematika tagozatos csoport) végeztük. A függvényfogalom kialakítását a választott csoportokban 3 éven keresztül (6., 7., és 8. évfolyamok tanéveinek végén) történő longitudinális mérésorozat segítségével vizsgáltuk. Első körben (6. osztályban, 2014) a tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességeinek szintjére voltunk kíváncsiak a függvényfogalom bevezetése előtt. A tapasztalatok figyelembe vételével ezt 7. osztályban (2015) egy újabb felmérés követte a fogalom bevezetésének a fentebb említett képességekre gyakorolt hatásának vizsgálata céljából. Végül ugyanezen tanulók függvényfogalomról alkotott képzeiteinek megismerését céloztuk meg 8. osztály végén (2016). Az iskolák kiválasztásánál törekedtünk arra, hogy olyan, nem speciális matematika tagozatos osztályokat válasszunk mindkét országból, akik egyformán heti 4 órában tanulják a matematikát. Mindkét országban az adott Oktatási Minisztérium által megerősített tankönyveket használják, az ukrainai magyar tannyelvű oktatásban ezen tankönyvek magyar nyelvű változatait (a vizsgált csoportok által használt 6. osztályos tankönyvek elemzését lásd a dolgozat 2. fejezetében).

⁶ Az iskola Kárpátalja legnagyobb magyarlakta településén, Nagydobronyban található. Az itt tanuló gyerek jórészt falubeliek, bár vannak közöttük olyanok is, akiket a környező falvakból járatnak ide szüleik. Az iskola járási megítélése jó, diákjai a különböző versenyeken eredményesen szerepelnek. Évfolyamonként legalább két párhuzamos osztály van, melyek nem tagozatosak. Az iskoláról bővebb információk a <http://www.veldobronzos.com/> oldalon található.

⁷ Nagyvárosi általános iskola, jó megítélésű. 6. osztály után a tanulók kb. 10%-a gimnáziumban folytatja tovább tanulmányait. Évfolyamonként több párhuzamos osztály van. 2015. augusztus 1. előtt az iskola neve: Debreceni Egyetem Arany János Gyakorló Általános Iskolája.

4.1. KUTATÁSI KÉRDÉSEK ÉS HIPOTÉZISEK

A fentebb vázolt vizsgálatokkal ebben a fejezetben az alábbi kérdésekre keressük a választ:

- K2.1. Milyen szinten birtokolják a szabálykövető és szabályfelismerő képességeket 6. osztály végén az ukrán és magyar közoktatásban tanuló vizsgált diákok?*
- K2.2. Fejlődnek-e célzott fejlesztés nélkül is az ukrainai osztály tanulóinak szabálykövető és szabályfelismerő képességei?*
- K2.3. Hatással van-e a függvényfogalom formális bevezetése, különböző reprezentációinak megismerése a szabálykövető és szabályfelismerő képességek fejlődésére az ukrainai csoportban?*
- K2.4. Milyen fogalomképzet alakul ki a függvényről 8. osztály végére a vizsgált ukrainai és magyarországi tanulóknál az eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett?*

Az ezekhez kapcsolódó hipotézisek a következők:

- H2.1. A vizsgált 6. osztályos ukrainai tanulók alacsonyabb szinten birtokolják a szabályfelismerő és szabálykövető képességeket, mint a vizsgált 6. osztályos magyarországi tanulók.
- H2.2. Az ukrainai tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességei fejlődnek a vizsgált időszakban.
- H2.3. A függvény fogalmának bevezetése hatással van a szabályfelismerő és szabálykövető képességek fejlődésére.
- H2.4. Eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett a vizsgált magyarországi tanulóknál 8. osztály végére „ideálisabb” fogalomképzet alakul ki a függvényről (azaz a képzet kölcsönös kapcsolatban van annak definíciójával), mint a vizsgált ukrainai tanulóknál.

4.2. SZABÁLYKÖVETŐ ÉS SZABÁLYFELISMERŐ KÉPESSÉGEK VIZSGÁLATA A FÜGGVÉNYFOGALOM ELŐKÉSZÍTÉSI SZAKASZÁBAN (6. OSZTÁLYBAN)

A korábbi fejezetekben láthattuk, hogy a függvény fogalmának kialakításához a különböző alkotórészek (változók, kapcsolatok, szabályok) megismerése járul hozzá (lásd a dolgozat 1.2.2. fejezete). Bár sokszor sikerül megtalálni az együttváltozó mennyiségek közötti kapcsolatot, az azt definiáló szabály leírása verbálisan vagy formulával már nem egyszerű. A függvény történeti áttekintése jól mutatja, hogy a vizsgált fogalmunk egy „szűkebb” értelmezéséből fejlődött a ma használatos függvényfogalommá, így a kialakítást az iskolában is jól körülhatárolt, szabályokkal leírható kapcsolatok vizsgálatából indulva célszerű kezdenünk, fokozatosan haladva a „tágabb” fogalom felé.

Mindezeket figyelembe véve úgy véljük, hogy a szabályok alkotórészhez kapcsolható szabályfelismerő és szabálykövető képességek tanulói birtoklása, többek között, meghatározó

szerepet játszik a fogalom előkészítési szakaszában a függvényszerű kapcsolatok felismerésében. Ennek ellenére, amint az ukrainai kerettanterv és tankönyvek elemzése mutatta (lásd a dolgozat 2. fejezete), az említett képességek fejlesztése ott kevésbé hangsúlyos, mint a magyarországi tantervekben és tankönyvekben.

Annak érdekében, hogy a K2.1. kérdésre választ kapjunk, meghatároztunk egy szintrendszert. A képességek tanulói birtoklásához szükséges gondolkodási műveletek és tevékenységformák szintekbe sorolásához és a szintek jelöléséhez felhasználtuk a van Hiele szinteket (Herendiné Kónya, 2003), összekapcsolva Isodának (1996) a nyelv szemszögéből felépített függvényszintjeivel.

Isoda munkájában a geometriai gondolkodás fejlődésének a van Hiele-féle szintjeit (globális felismerés, elemzés, informális dedukció, formális dedukció, formális logika), és a szintek tulajdonságai közül az egyiket, az „objektum és módszer” tulajdonságot vette alapul. Eszerint minden szintnek megvan a saját objektuma (téma) és saját módszere, tanulási útja (Szanyi, 2015). Minden szint módszere egyben a következő szint objektuma. A 4.1. táblázatban a felépített öt szint közül az első három szint közötti párhuzamot mutatjuk be (Isoda, 1996).

	van Hiele szintek	Függvényszintek a nyelv szemszögéből
1	<i>Globális felismerés szintje</i> A tanulók képesek felismerni az alakzatokat, de nem képesek elkülöníteni egymástól azok alkotóelmeit.	<i>Mindennapi nyelv szintje</i> A tanulók felismerik a függő változóban bekövetkező változást, de ezt csak, homályosan, mindennapi nyelven köti a független változóhoz.
2	<i>Elemzés szintje</i> A tanulók felismerik az alakzatokat felhasználva azok tulajdonságait.	<i>Aritmetika nyelvének szintje</i> A tanulók leírják a kapcsolatok szabályát felhasználva a táblázatokat. Értéktáblázatot készítenek aritmetikai művelettel. Fel tudják használni a képletet vagy a grafikont, hogy a szabályt vagy a kapcsolatot reprezentálják, de nem tudnak áttérni egyikről a másik reprezentációra.
3	<i>Informális dedukció szintje</i> A tanuló felismeri az alakzatok tulajdonságait következtetések felhasználásával.	<i>Algebra és geometria nyelvének szintje</i> A tanulók leírják a függvényt felhasználva annak reprezentációit (képlet, grafikon, táblázat). A függvényfogalom biztos ismeretében át tudnak térni egyik reprezentációról a másikra.

4.1. Táblázat: A van Hiele szintek és függvényszintek közötti párhuzam

Felhasználva a van Hiele szinteket és Isoda által kidolgozott függvényszinteket, a szabálykövető és szabályfelismerő képességek birtoklásához szükséges gondolkodási műveleteket és tevékenységformákat szintekbe soroltuk. A szintek megnevezésénél felhasználtuk a fentebb tárgyalt szintek neveit. Tehát az általunk lefektetett szintek, melyeket

a 6. évfolyamos tanulók függvényfogalom kialakulásának mélyebb megértésére dolgoztunk ki a következők:

1. szint (globális felismerés): A tanuló az elempárok között felismer valamilyen szabályt és követi a felismert szabályt (*mindennapi élet nyelve*).

2. szint (elemzés): A tanuló a felismert szabályt meg tudja fogalmazni (érvelni tud az elempárok között felismert kapcsolat mellett), az egyszerű képlettel vagy szavakkal megadott szabályt követi (*mindennapi élet és az aritmetika nyelve*).

3. szint (informális dedukció): Ezen a szinten létrejön az egyszerű szabályalkotás és képlettel történő leírásának összhangja (*aritmetika nyelve*).

4.2.1. A felmérés körülményei

A vizsgálatban, melyre 2014 áprilisában került sor, 6. osztályos (12-13 éves) tanulók vettek részt: 26 magyar tannyelvű iskolában tanuló ukrainai (továbbiakban UA) és 23 magyarországi (továbbiakban HU) közoktatásban tanuló diák. A felmérés idejére már mindkét csoport megismerkedett a természetes számokkal és a törtekkel (közönséges és tizedes törtekkel egyaránt), elsajátította az azokkal végzett műveleteket, megismerkedett az arányos mennyiségekkel, az egyenes arányosság fogalmával is.

Az írásbeli teszt, melynek megírására 30 perc állt a tanulók rendelkezésére, 5 feladatot tartalmazott. Ezek középpontjában az elempárok közötti kapcsolat felismerése, a felismert kapcsolatot meghatározó szabály követése és formulával vagy szavakkal történő kifejezése állt. Igaz, hogy néhány összetartozó elempár nem határoz meg egyértelműen egy függvényt, akár többféle szabály is fennállhat közöttük, de a felmérésben csupán arra helyeztük a hangsúlyt, hogy egy-egy alkalmas szabályt találjanak a tanulók. A feladatok kiválasztásánál támaszkodtunk a tankönyvekben fellelhető feladatokra, de azokat a felmérés céljainak megfelelően helyenként módosítottuk.

A következőkben részletesen szólnunk a felmérés feladatairól és elemezzük az egyes feladatokra érkezett tanulói válaszokat. A feladatok feltételeinél zárójelben lévő számok az egyes tevékenységeknek a szabályfelismerő és szabálykövető szintekbe történő besorolását jelölik. Továbbá a HU tanulókat a tanáruk által adott sorszámot felhasználva például H10-zel jelöljük, az UA tanulókat pedig U1,..., U26 módon.

4.2.2. A felmérés feladatainak és tapasztalatainak bemutatása

1. és 2. feladat (Török, 2012)

1. Keress egy szabályt a táblázat oszlopainak első és második sorai között! Töltsd ki a táblázatot a talált szabály alapján (1. szint)! Jegyezd le szavakkal a felismert szabályt (2. szint)!

pék	tér	ló	bál	görög		
kép	rét	ól			derék	savas

2. Keress egy szabályt az egymás alatt lévő számokra és töltsd ki a táblázat hiányzó helyeit a talált szabály alapján (1. szint)! Jegyezd le szavakkal a felismert szabályt (2. szint)!

40	80	12	60	44	100	160				
10	20	3					1	13	31	95

Az 1. és 2. feladat egyaránt az összetartozó elemek közötti kapcsolatok felismerésére, alkalmazására és annak szóbeli megfogalmazására irányult. A felismert szabály alkalmazását a táblázat üresen maradt celláinak kitöltése jelenti. Noha mindkét feladat jó megoldása egyazon szintű (1. szint és 2. szint) gondolkodási műveleteket és tevékenységformákat feltételez, mégis a közöttük lévő különbséget abban találjuk, hogy míg az első feladatban az összetartozó elemek szavak, addig a második feladatban számok. Minthogy kapcsolatok nemcsak számok között lehetnek, szükséges más típusú elempárok (nem számok) közötti kapcsolat felismerésével is foglalkozni.

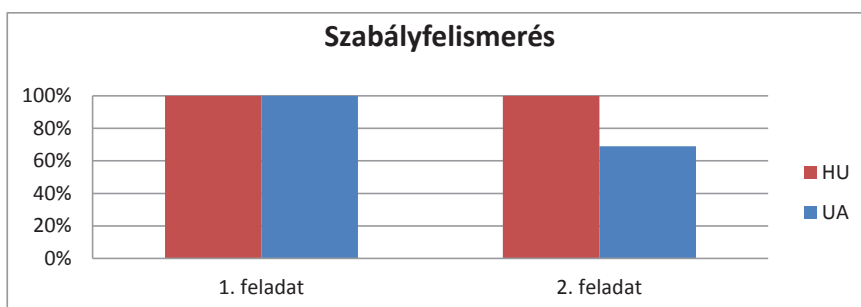
Az 1. szintnek megfelelő rész

Az 1. feladat esetében mind a vizsgált 26 UA tanuló és a 23 HU tanuló teljesítette az 1. szint kritériumát, azaz abban az esetben, ha az összetartozó elemek szavak, a tanulók képesek kapcsolatot felismerni közöttük.

A 2. feladatban az 1. szint kritériumainak megfelelő részt az UA tanulók közül 18, a HU tanulók közül pedig mind a 23 fő teljesítette. A 8 UA tanulónál a következő hibák jelentkeztek:

- A táblázat második sorában lévő 4 üres négyzetet kitöltötték egy felismert szabály szerint, de az első sorban már egy másik szabályt alkalmazva töltötték ki az üres négyzeteket, vagyis nem alkalmazták az általuk felismert szabály inverzét. Például az U15-ös tanuló elempárjai: (60,15), (44,11), (100,25), (160,40), (0,25;1), (3,025;13), (7,07;31), (23,07;95)). A táblázatnak ezt a részét külön értelmezték, mintha a benne szereplő elempárookra más szabályt kellene keresniük (például. az U28-as tanuló elempárjai (60,15), (44,10), (100,25), (160, 40), (4,1), (32,13), (144,31), (144,31)). A függvény fogalmának szempontjából ezek a hibák az alaphalmaz és a képhalmaz felismerésénél és azok megkülönböztetésénél felmerülő problémákra engedhetnek következtetni.
- A tanulók az egyes oszlopokban lévő elemekre más-más szabályt keresve töltötték ki a táblázatot (U16-os tanuló elempárjai (60,30), (100,1)). Ez valószínűleg annak az oka, hogy nem voltak hozzászokva az összetartozó mennyiségek táblázatos formában való szemléltetéséhez.

A 4.1. ábra az 1. és a 2. feladatban az 1. szint kritériumainak megfelelő részben nyújtott tanulói teljesítményeket hasonlítja össze.



4.1. ábra

A 2. szintnek megfelelő rész

18 UA és 20 HU tanuló a 2. szint eléréséhez lefektetett követelményeket az 1. feladat esetében teljesítette, azaz az elempárok között felismert kapcsolat mellett szavakkal is érvelt (a fogalmazási pontatlanságokat nem vettük figyelembe, ha az érvelés koherens volt a kitöltött táblázattal). A 3 HU tanuló kihagyta a feladatnak ezt a részét, a 8 UA tanuló pedig olyan szabályt fogalmazott meg, melynek követését nem támasztotta alá a kitöltött táblázat („*A szám fordítottja, reciproka*”- U22). Azok a tanulók, akik lejegyezték az általuk felismert szabályt, hasonló gondolatmenetet prezentáltak, mint az alábbiak:

„*Visszafelé kell olvasni a szavakat.*” (U6, H9, H6)

„*Ha felcseréljük az első és utolsó betűt, akkor kapunk egy másik értelmes szót.*” (U7)

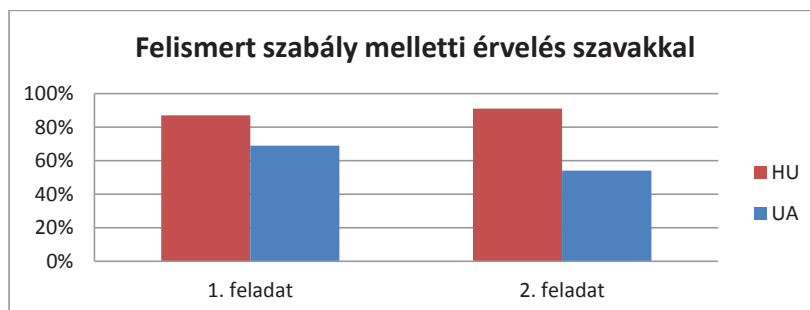
A 2. feladat esetében 14 UA és 21 HU tanuló teljesítette a 2.szint kritériumait, azaz szavakkal is érveltek az általuk felismert szabály mellett. Például:

„*Ha az alsó sorban lévő számokat megszorozzuk 4-el, akkor megkapjuk a felső sorban lévőket. Vagy a felső sorban a számokat el kell osztani 4-gyel.*” (U7)

„*Az alsó számok a felsők $\frac{1}{4}$ -ed részei.*” (H22)

Mindkét csoportban voltak, akik kihagyták a feladatnak ezt a részét vagy a saját gondolat leírásában jelentkeztek nehézségek, vagy fogalmi zavart véltünk felfedezni a válaszbán. Például: „*Mindenhol 4 jöjjön ki*” (U26); „*A felső számjegyeket elosztjuk 4-el és az alsó számjegyeket megszorozzuk 4-el*” (H14)

Az 1. és 2. feladat 2. szinthez tartozó részei megoldottságát a 4.2. ábra szemlélteti.



4.2. ábra

A 4.1. és 4.2. ábrán látható eredmények arra engednek következtetni, hogy abban az esetben, ha az összetartozó mennyiségek szavak, a közöttük lévő kapcsolat felismerése és az azt definiáló szabály szavakkal történő megadása könnyebbnek bizonyul.

3. feladat

Keress összefüggést az egyes oszlopok x és y értékei között és ez alapján pótolod a táblázat hiányzó elemeit (1. szint)! Írd le a felismert összefüggést szavakkal (2. szint) és kifejezéssel (3. szint)!

x	1	10	7	0	9	20	38
y	5	23	17				

$y =$ _____

A 3. feladat célja az elemek közötti összefüggés felismerése, kifejezéssel és szavakkal történő megadása, alkalmazása. Az 1. szint eléréséhez szükséges valamilyen kapcsolatot felismerni az összetartozó elemek között (x és y), de ellentétben az első két feladattal a táblázat kiegészül egy oszloppal (1. oszlop), mely segítségül szolgál a felismert kapcsolat verbális lejegyzéséhez (2. szint) és formulával történő megadásához (3. szint). A másik különbség, hogy ebben a feladatban adott „input” (x) segítségével kell megtalálni az „output”-ot (y) a felismert szabály szerint, míg az előző kettőben a „output” ismeretében a felismert szabály szerint meg kellett megtalálni az „input”-ot is.

Az 1. szintnek megfelelő rész

A 26 UA tanuló közül csak 2 (U19, U20), míg a 23 HU tanuló közül 17 érte el ebben az esetben az 1. szintet, azaz ismert fel kapcsolatot az elempárok között. A többiek semmilyen próbálkozást nem mutattak a feladat megoldására. Ennek okát abban találjuk, hogy a 2. feladathoz képest ez a feladat már nem egy-, hanem kétlépéses szabály felismerésére irányult, azaz összetettebb volt.

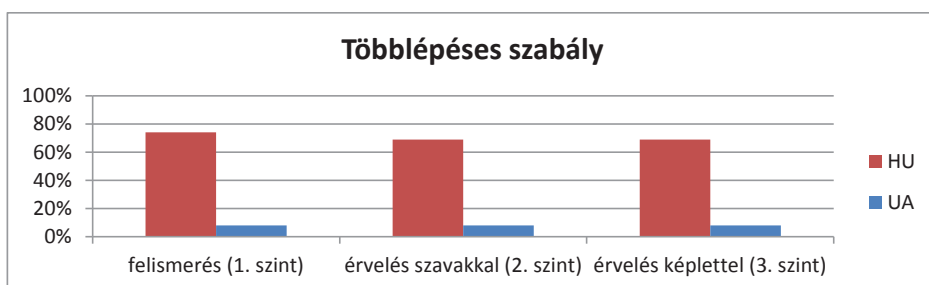
A 2. szintnek megfelelő rész

2 UA és 16 HU tanuló teljesítette a 2. szint kritériumát, azaz érvelt szavakkal az általa felismert szabály mellett. A leírt szabályt tükrözte a kitöltött táblázat is.

A 3. szintnek megfelelő rész

Ugyanaz a 2 UA és 16 HU tanuló érte el ezt a szintet, azaz fogalmazta meg aritmetika nyelvén is az elempárok között felismert szabályt (4.3. ábra). További 1 HU tanuló (H2) kitöltött táblázatában helyes gondolatmenetet reprezentált, az általa felismert szabály aritmetika nyelvén történő megfogalmazása már problémát okozott.

Mindezen eredményeket figyelembe véve úgy véljük, hogy a számok közötti kapcsolat felismerése abban az esetben, ha ez a kapcsolat egy lépéses szabállyal definiálható, célzott fejlesztés nélkül is fejlődik a matematikai ismeretek tanulása révén, ellentétben a kétlépéses szabállyal definiálható kapcsolatokkal.



4.3. ábra

4. feladat

Töltsd ki a táblázatot a következő szabály szerint: $y=2x+3$. Fogalmazd meg szavakkal az adott hozzárendelési szabályt! (2. szint)

x	-3	4	44	48	-20	0
y						

A 4. feladat egy formulával megadott szabály értelmezésére és követésére irányult (a feladatlapon a táblázat függőlegesen szerepelt, lásd Mellékletek, 1. old.)

A 2. szintnek megfelelő rész

12 UA és 21 HU tanuló oldotta meg helyesen ezt a feladatot. A vizsgált UA tanulóknak ez a feladat annak ellenére is nehézséget okozott, hogy a megadott szabály betűkifejezések néven ismert lehetett az 5. osztályos matematika tananyagból. Ekkor hasonló betűkifejezés értékét kellett meghatározniuk a tanulóknak a változó bizonyos értékei mellett, de ezen értékek nem voltak táblázatba foglalva. Feltehetően ez az új helyzet is okozott zavart több tanulóban. 2 HU tanuló közül az egyik diák a $(-3,-3)$ számpárt megadta, de tovább nem folytatta gondolatmenetét, a másik tanuló pedig semmilyen próbálkozást nem mutatott.

5. feladat⁸

Egy csapból egy tartályba másodpercenként 2 liter víz folyik. Mennyi víz van a tartályban

a) 1 s, c) 5 s, e) 16 s, (2. szint)

b) 2 s, d) 10 s, f) x s (3. szint)

múlva, ha a csap megnyitásakor a tartály üres volt? Szemléltesd a mennyiségek közötti kapcsolatot táblázattal!

Az 5. feladatban a szabály szavak formájában, kontextusban rejtőzött. A tanuló az összetartozó mennyiségek között felismeri a kapcsolatot, az azt definiáló szabályt követi, ha az a)-e) kérdésekre helyes választ ad (2. szint) és a 3. szintre lép, ha általánosítani tudja a feladatot, azaz leírja formulával a mennyiségek közötti kapcsolatot.

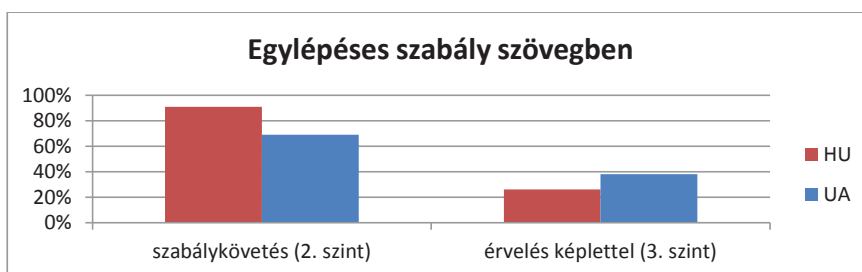
⁸ A feladat a Hajdu Sándor, Matematika 7. osztály, 1998 c. tankönyv 3.15. feladatának (128. old.) módosított változata.

A 2. szintnek megfelelő rész

Ennél az Egyenes arányosság c. témához kötődő feladatnál 17 UA tanuló teljesítette a 2. szint kritériumát, azaz a feladat a)-e) kérdéseire helyes választ adott. 21 HU tanuló azonban elérte ezt a szintet.

A 3. szintnek megfelelő rész

10 UA és 6 HU tanuló teljesítette a szint kritériumát (4.4. ábra): eljutott az *f)* kérdés megválaszolásához, azaz képes volt általánosítani a tartályban lévő vízmennyiség kiszámításának szabályát, ha az eltelt idő ismeretlen, valamint a mennyiségek közötti kapcsolatot táblázattal is szemléltette.



4.4. ábra

A tanulók számának megoszlása a vizsgált szinteken

A meghatározott szintek szerinti besorolást figyelembe véve rögzítettük a helyes tanulói válaszok arányát.

Feladatok sorszáma	1. szint		2. szint		3. szint	
	A tanulók aránya		A tanulók aránya		A tanulók aránya	
	UA	HU	UA	HU	UA	HU
1.	100%	100%	69%	87%		
2.	69%	100%	54%	91%		
3.	8%	74%	8%	69%	8%	69%
4.			46%	91%		
5.			69%	91%	38%	26%

4.2. Táblázat: A feladatok szintek szerinti megoldottsága a tanulók körében

4.2.3. Következtetések

Az eredmények alapján elmondható, hogy a megfelelő fejlesztési követelmények hiányában a vizsgált UA tanulók alacsonyabb szinten birtokolják a szabályfelismerő és szabálykövető képességeket (H2.1. igazolódott). Mindezek mellett azt is kiemelendő, hogy annak ellenére, hogy az ukrainai tanterv kevesebb hangsúlyt fektet ezen képességek fejlesztésére, a tanulók értelmi fejlődésük ezen szakaszában (konkrét műveletek szakaszából a formális műveltek szakaszába való áttérés) (Ambrus, 2004) célzott fejlesztés nélkül is képesek az összetartozó mennyiségek közötti, egylépéses szabállyal definiálható kapcsolatot felismerni és azt követni,

felhasználva az elsajátított matematikai ismereteiket. Viszont a kétlépéses szabállyal leírható kapcsolatok felismerése, valamint a felismert egylépéses szabály melletti érvelés szavakkal vagy képlettel a vizsgált UA tanulók többségének már nehézséget jelentett.

Az eredmények olyan további kutatási lehetőség felé irányítottak, mely a vizsgált képességek évről-évre történő spontán fejlődésének kérdését vetették fel. Így olyan felmérést terveztünk ugyanezen tanulói csoportokban, mely e kérdés megválaszolását célozta meg. A következő alfejezetben részletesen beszélünk a felmérés eredményeiről.

4.3. A FÜGGVÉNYFOGALOM BEVEZETÉSÉNEK HATÁSA A SZABÁLYKÖVETŐ ÉS SZABÁLYFELISMERŐ KÉPESSÉGEKRE

Minthogy a *képességet* az egyének pszichikus tulajdonságának tekintik, ami valamilyen tevékenység gyakorlása révén fejlődik ki, és a tevékenység végzésében nyilvánul meg (Csapó, 1997), így jelen alfejezetben K2.2. és K2.3. kérdések megválaszolását céloztuk meg.

4.3.1. A felmérés körülményei

Több tanulmány is hangsúlyozza, hogy a függvényfogalom megértésének fontos aspektusa a különböző reprezentációk alkalmazásának képessége (lásd dolgozat 1.2.3. alfejezete).

Ennek megfelelően a felmérés feladatainak összeállításánál törekedtünk arra, hogy a feladatok az összetartozó elemek között felismert vagy értelmezett függvényszerű kapcsolatok szavakkal, képlettel, táblázattal és grafikonnal történő reprezentálására épüljenek úgy, hogy egyik feladatban sem jelenik meg a „függvény” szó (lásd Mellékletek, 3. old.). Annak érdekében, hogy a fejlődést mérhessük, a feladatok között voltak olyanok is, melyek az előző évi felmérésben is szerepeltek.

A vizsgálatra a 2014-2015-ös tanév tavaszi félévének áprilisában került sor. Az írásbeli felmérésen 24 UA és 20 HU, 7. osztályos (13-14 éves) tanuló vett részt (mindkét csoportban volt 1-1 tanuló, aki a tanév kezdetétől volt tagja a csoportnak). A feladatok megoldására 40 perc állt rendelkezésre.

A 6. osztályos felmérésben nem, de jelen felmérésben már szereplő UA tanulók jelöléséhez az előző évi kódolást folytattuk (U27,...). Minthogy a 6. osztályos felmérés során a HU tanulói csoport minden diákja kapott kódot a tanáruktól, így jelen felmérésben is ugyanazon kóddal szerepeltek (H1,..., H28), az új tanuló pedig a H29-es kóddal.

4.3.2. A felmérés feladatainak és tapasztalatainak bemutatása

1. feladat

Az 1. feladat egyszerű, egylépéses szabály felismerésére, követésére irányult, valamint arra, hogy a tanulók képesek-e a felismert szabályt, mely meghatározza az összetartozó értékek között lévő kapcsolatot, különböző módon reprezentálni (szavakkal, képlettel, grafikonnal). Ugyanilyen szabállyal definiált, táblázattal reprezentált kapcsolat szerepelt az előző évi felmérés 2. feladatában is, ahol a felismert szabály mellett csak szavakkal kellett érvelni.

Keress összefüggést az egyes oszlopok x és y értékei között és ez alapján töltsd ki a táblázatot!

x	16	12	4	-8	20	4	0		
y	4	3	1					6	-3

Jegyezd le a felismert szabályt: a) szavakkal; b) képlettel. Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat!

A vizsgált 24 UA tanuló közül 18 ismert fel kapcsolatot a táblázattal megadott összetartozó elemek között, és ez alapján helyesen töltötte ki a táblázatot (szabályfelismerő és –követő képességek 1. szint). A többi 6 tanulóknál a leggyakoribb hiba az volt, hogy más-más szabályt alkalmaztak az egyes oszlopokban. Ez valószínűleg azzal magyarázható, hogy egy bizonyos hozzárendelési szabállyal egymáshoz rendelt mennyiségek táblázatos formában való megadása vagy értelmezése még a függvény fogalmának bevezetését követően is problémát okoz ezen tanulóknak, hisz az említett 6 tanuló közül 5-en az előző évi felmérésben is ugyanilyen hibát követtek el a táblázat kitöltése során. Mindezek a hiányosságok annak ellenére mutatkoztak, hogy az összetartozó elemek táblázattal történő megadását a tanórákon alkalmazták a függvény fogalmának bevezetése során.

A felismert szabály mellett szavakkal csak 10 tanuló érvelt (2. szint), de közülük 9-en képlettel is megadták a felismert szabályt. Például:

„Ha az x értékeit elosztjuk 4-el, akkor megkapjuk a megfelelő y értékeit”(U7)

„Az y értéke annyi, mint $x:4$ ”(U23); „ $4y=x$ ”(U15); „ $y=x:4$ ”(U19).

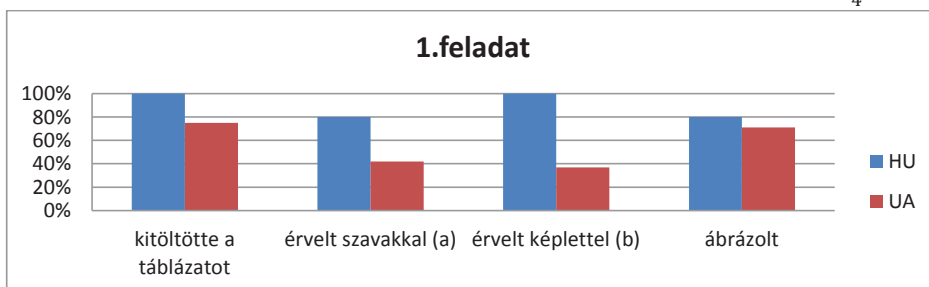
A többi 14 tanuló esetében a leírt szabály nem tükrözte a kitöltött táblázatot (például: „mindegyik x -et és y -t meg kell szorozni 4-gyel”- U3), vagy ezt a részt kihagyták.

Az ábrán (4.5. ábra) látható eredmények azt mutatják, hogy az, aki felismert egy megfelelő szabályt az elempárok között és azt helyesen követte (kitöltötte a táblázatot), az összetartozó mennyiségeket koordináta-rendszerben is helyesen szemléltette.

A 4.5. ábrán jól látható, hogy a vizsgált 20 HU tanuló mindegyikének az 1. feladatban sikerült felismerni valamilyen szabályt. Követve a szabályt helyesen töltötték ki a táblázatot és a felismert szabály mellett képlettel is helyesen érveltek. A szabály szavakkal történő lejegyzése és koordináta-rendszerben való ábrázolása 4 tanuló esetében vagy hiányzott, vagy pontatlansága miatt nem tükrözte a tanuló gondolatmenetét a kitöltött táblázat vagy a leírt képlet szempontjából (például: „az x tengely 4-szerese az y tengelynek”-H19).

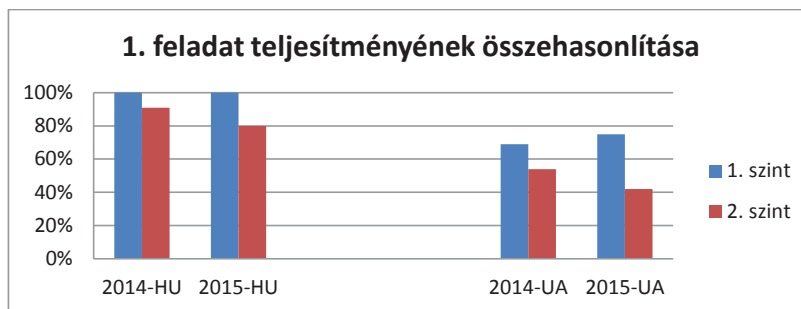
Néhány helyes tanulói megoldás:

„Az y x -nek a negyedrésze, vagy x az y -nak a négyszerese”(H29); „ $x=4y$ ”; „ $y=\frac{x}{4}$ ”(H17)



4.5. ábra

Ha az eredményeket a szabályfelismerő és -követő képességek szintjeit alapul véve összehasonlítjuk a korábbi felmérés 2. feladatának eredményeivel (lásd a dolgozat 4.3. alfejezete), a táblázattal reprezentált, egy lépéses szabállyal definiálható kapcsolat felismerésében (1. szint) kisebb fejlődés tapasztalható az UA tanulóknál, de a szavakkal történő érvelésben (2. szint) kisebb visszaesés (4.6. ábra).



4.6. ábra

2. feladat

Keress összefüggést az egyes oszlopok x és y értékei között és ez alapján pótdold a táblázat hiányzó elemeit!

x	1	10	7	0	9	20	38
y	5	23	17				

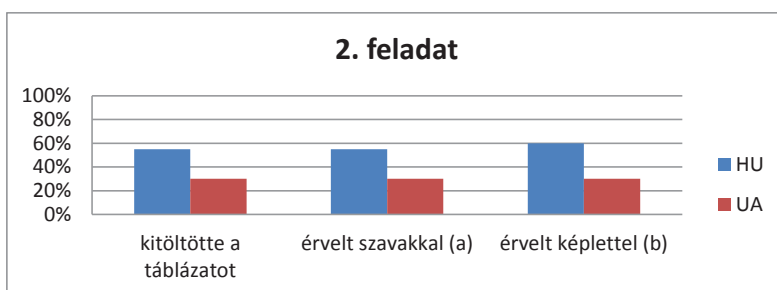
$y =$ _____

Írd le a felismert összefüggést: a) szavakkal; b) képlettel.

A 2. feladat az előző évi felmérésben is szerepelt (lásd Mellékletek, 3. feladat, 1. old.). Ellentétben az előző feladattal, itt a tanulóknak egy többlépéses hozzárendelési szabályt kellett felismerniük és különböző módon reprezentálniuk.

A 2. feladatot mindössze 7 UA tanuló oldotta meg helyesen a vizsgált 24-ből. Amint a 4.7. ábra is mutatja, ők az elempárok között felismert szabály alapján a táblázatot kitöltötték (1. szint), azt szavakkal (2. szint) és képlettel (3. szint) is megadták. Ez arra enged következtetni, hogy annak, aki az egy lépéses szabályfelismerés képességét birtokolja, kétlépéses szabályfelismerés terén még mindig gondjai akadnak.

A 20 HU tanuló közül 11-en az összetartozó elemek között felismertek valamilyen szabályt (1. szint), amit szavakkal (2. szint) és képlettel (3. szint) is lejegyeztek (4.7. ábra). A leírt szabályt tükrözte a kitöltött táblázat is. Egy tanuló (H15) nem töltötte ki a táblázatot, de a feladat a) és b) kérdésére is helyes választ adott, tehát helyes gondolatmenetet reprezentált. A számadatok arra engednek következtetni, hogy a vizsgált tanulók között, csakúgy, mint az ukrainai tanulók esetében, vannak diákok, akiknek ugyancsak nehézséget jelent a kétlépéses szabályfelismerés és követés. De amennyiben felismerik a szabályt, azt le tudják írni különböző módon mindkét csoportban.



4.7. ábra

A 2. feladat megoldottsági mutatójának változása

Ugyanezen feladat megoldottsági mutatója néhány százalékos növekedést mutat az UA tanulók körében az előző évi felméréshez képest: 8%-ról 30%-ra nőtt azon tanulók aránya, akik felismertek egy alkalmas szabályt az elempárok között. Köztük vannak azok a tanulók, akik 6. osztályban is helyesen oldották meg ezt a feladatot.

A HU tanulóknál viszont kisebb visszaesést tapasztalhatunk: míg 6.osztályban a vizsgált 23 tanuló közül 17 (74%) tanuló ismert fel kapcsolatot az elempárok között, addig most 11 (55%) a vizsgált 20 tanulóból. Azon tanulók eredményeit vizsgálva, akik a korábbi felmérésben is részt vettek kiderült, hogy 8 tanuló az előző felmérés során is felismerte a szabályt, 3 tanuló korábban igen, most viszont nem, és csak 1 tanuló volt, aki bár az előző évben nem, most felismerte a szabályt.

3. feladat

Töltsd ki a táblázatot a következő szabály szerint: $y = \frac{x}{3} - 7$.

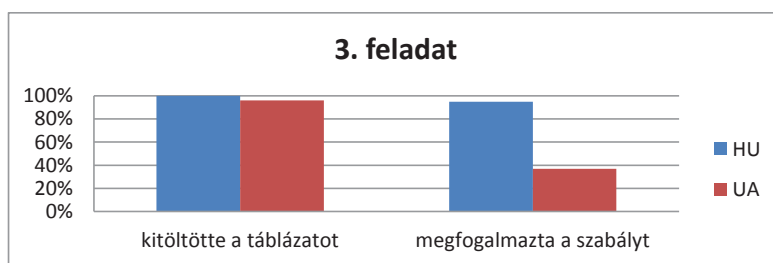
x	9	0	42	63	15	3
y						

Fogalmazd meg szavakkal ezt a hozzárendelési szabályt!

A 3. feladat egy előre megadott szabály értelmezésére és követésére irányult (a feladat más szabály mellett az előző évi felmérésben is szerepelt) (2. szint).

Ez a feladat láthatólag (4.8. ábra) sikeres volt. A vizsgált 24 UA tanulóból 23-an a táblázatot helyesen töltötték ki, mely azt feltételezi, hogy a megadott szabályt helyesen értelmezték. Viszont, ahogy az előző feladatok esetében, úgy itt is a szabály megfogalmazásával akadtak problémák, mivel mindössze 9 tanuló jegyezte le szavakkal. Az előző évi felmérés 4. feladatához képest a szabály megfogalmazásában kisebb visszaesést tapasztalhatunk: míg 2014-ben 26 UA tanulóból 12 fogalmazta meg a szabályt szavakkal, addig jelen felmérésben a 24 tanulóból mindössze 9. Közülük 1 tanuló (U24) 2014-ben nem, 2015-ben viszont igen.

A HU tanulók közül senkinek nem okozott problémát a megadott szabály értelmezése és ennek alapján a táblázat helyes kitöltése, és mindössze 1 tanuló volt, aki a megadott hozzárendelési szabály lejegyzése helyett a számításának eljárását írta le („közös nevezőre hozzuk és megkapjuk a végeredményt”-H14).



4.8. ábra

4. feladat

Egy csapból egy tartályba másodpercenként 2 liter víz folyik. Mennyi víz van a tartályban

- a) 1 s, c) 5 s, e) 16 s,
 b) 2 s, d) 10 s, f) x s

múlva, ha a csap megnyitásakor a tartály üres volt? Szemléltesd a mennyiségek közötti kapcsolatot I) táblázattal; II) képlettel.

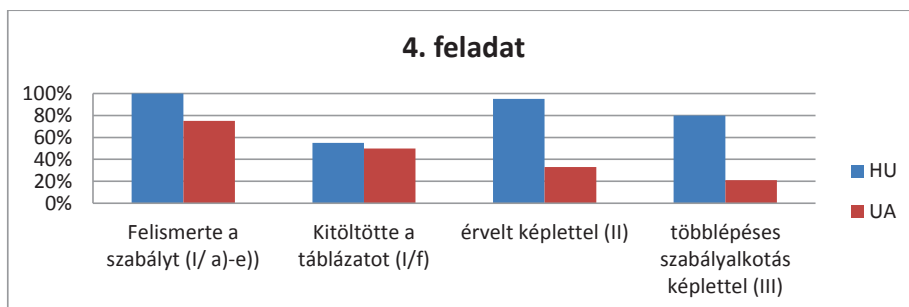
III) Írd le a mennyiségek közötti kapcsolatot képlettel abban az esetben, ha a csap megnyitásakor a tartályban 3 l víz volt!

A 4. feladat I.) és II.) része a 2014-es felmérés egyik feladata volt: a szabály szavak formájában, kontextusban rejtőzött. A feladat II) részének helyes megoldása arra utal, hogy a tanuló általánosítani tudja a feladatot, azaz leírja formulával a mennyiségek közötti kapcsolatot (3. szint). A feladat III) kérdése a többlépéses szabályalkotás és formulával történő leírása közötti harmónia vizsgálatára irányult, ha az összetartozó mennyiségek szöveges kontextus formájában vannak megadva és nem táblázatban (lásd a 2. feladat).

Mindössze 8 UA tanuló adott teljes választ a 4. feladat I.) és II.) kérdésére: felismerte a szavak formájában rejtőző szabályt a kontextusban, melyet felhasználva helyesen töltötte ki a táblázatot, képes volt általánosítani a tartályban lévő vízmennyiség kiszámításának szabályát (3. szint). 12 tanuló az összetartozó mennyiségeket szemléltette táblázattal, de már képlet formájában nem adta meg. 18 tanuló a konkrét adatokkal probléma nélkül számolt (2. szint), de az f) kérdésre már nem, vagy helytelen választ adott. A feladat III.) kérdésére (3. szint) csak 5 tanuló válaszolt helyesen, azaz írta le például az „ $y=2x+3$ ” típusú szabályt. Köztük voltak azok, akik a 2. feladatban (táblázatban rejtőzve) is felismerték ugyanezt a szabályt és le is jegyezték képlettel. Tehát a tanulók többségének a többlépéses szabályalkotás abban az esetben, ha az szöveges kontextusba vannak ágyazva, szintén nehézséget jelentett.

A mennyiségek közötti kapcsolat táblázattal történő szemléltetését az 4. feladat a)-e) részéig a 20 HU diák mindegyike helyesen végezte el. Tehát hasonlóan a feladat ezen részére válaszadó UA diákokhoz, konkrét adatok ismeretében képes volt az összetartozó elemek közötti szabályfelismerésre (2. szint). De abban az esetben, ha az eltelt idő ismeretlen már nem válaszolt vagy helytelen választ adott közülük 9 tanuló. A feladat általános esetben történő megoldását, a felismert szabály alapján a táblázat kitöltését (4/I), 11 HU tanuló reprezentálta helyesen (4.9. ábra). Viszont amikor a mennyiségek közötti kapcsolatot (a felismert szabályt) képlettel kellett szemléltetni (4/II. kérdés) 19 tanuló válasza bizonyult

helyesnek. A két különböző, mégis tartalmilag ugyanazon kérdés, f) és a II.) megválaszolása közötti magas megoldottsági különbségek arra engednek következtetni, hogy a képletben megjelenő, az eltelt időt jelölő változó különböző jelölésének (x vagy más betű) értelmezésével akadtak problémái a tanulóknak, azaz a függvény fogalmának szempontjából a független és függő változó tartalmi jelentésével még nincsen minden tanuló tisztában.



4.9. ábra

A 4. feladat megoldottsági mutatójának változása

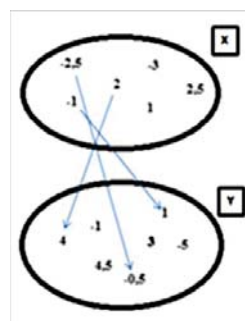
Az előző évi felméréshez képest ugyanezen feladat 2. szintnek megfelelő részében tapasztalt megoldottsági mutató néhány százalékos növekedést mutat az UA tanulók körében: 69%-ról 75%-ra nőtt azon tanulók aránya, akik felismertek egy alkalmas szabályt az elempárok között (4/a-e)). A 3. szintet elért tanulók arányában is mutatkozott némi fejlődés: 2014-ben a tanulók 38%-a általánosította a feladatot (f) kérdés), most 50% ezen tanulók aránya (4/f).

Bár a feladat f) kérdésére, melyre érkezett tanulói válaszokat elemeztük a korábbi felmérésben, alacsony számban adtak helyes választ a HU tanulók, de a felismert szabály mellett képlettel most 95% érvelt helyesen, ellentétben a 2014-es felméréssel, amikor mindössze 26% volt azon tanulók aránya, akik általánosították a feladat megoldását.

5. feladat

A következő ábrán két halmaz néhány összetartozó elempárját nyilakkal jelöltük.

a) Fogalmazd meg a hozzárendelési szabályt! b) Rajzold be a hiányzó nyilakat!

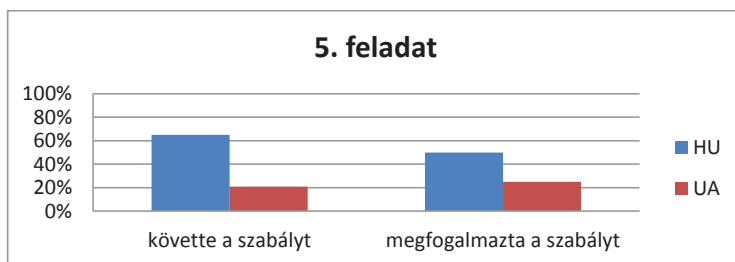


Az 5. feladatban az összetartozó elemek nem táblázatban, hanem nyíldiagrammal vannak ábrázolva. A tanulóknak fel kellett ismerniük a szabályt, ami alapján az X halmaz elemeihez hozzárendelték az Y halmaz elemeit és követni azt (1. szint), valamint a felismert szabály mellett szavakkal kellett érvelniük (2. szint).

Ahogy az ábrán is látható (4.10. ábra) a 24 UA tanulóból csak 6 tanuló ismerte fel azt a szabályt, ami alapján az X halmaz elemeihez hozzárendeltük az Y halmaz elemeit és 5-en fogalmazták meg ezt a hozzárendelési szabályt. Az alacsony mutató annak is köszönhető többek között, hogy a függvény nyíldiagrammal való szemléltetése nem volt olyan „népszerű”

a vizsgált csoportban. Így a tanulók is kevésbé látják át és tudják értelmezni az összetartozó mennyiségek ilyen jellegű ábrázolását. A tanulók többsége próbálkozott a megoldással, de figyelmen kívül hagyta a kezdeti összetartozó elemeket, más szabály alapján rendelték az X halmaz fennmaradó elemeihez az Y halmazból elemeket (például: az ellentett előjelű számokat kötötték össze).

Sikeresebbnek mondható ez a feladat a HU diákok körében, bár ott is alacsonyak a megoldottsági mutatók. 13 tanuló ismert fel egy alkalmas szabályt, és közülük 10-en és meg is fogalmazták azt. Tehát összességében elmondható, hogy mindkét ország vizsgált tanulójánál az összetartozó elemek közötti kapcsolat felismerése abban az esetben, ha nyíldiagrammal szemléltetjük nehézséget jelentett.

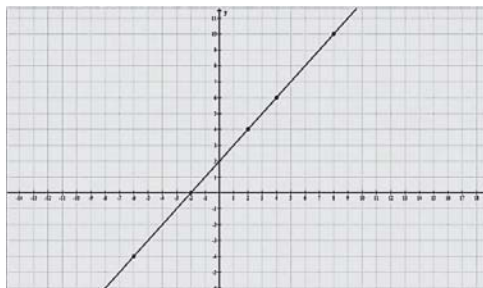


4.10. ábra

6. feladat

A következő grafikon két halmaz összetartozó elempárjait szemlélteti.

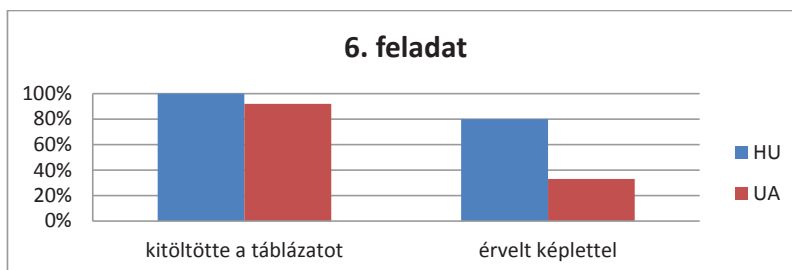
- Írd be a táblázatba az ábrán pontokkal jelölt összetartozó elempárokat és még két tetszőlegesen választott számpárt!
- Írd le képlettel az elempárok között felismert szabályt.



A feladatban az elemek közötti kapcsolatot meghatározó szabály grafikonnal volt megadva. A feladat azt vizsgálta, hogy a tanuló át tud-e térni egyik reprezentációs módról a másikra (grafikonról táblázatra) és le tudja-e olvasni egy pont koordinátáit (a feladat a) kérdése). A feladat b) kérdése a leolvasott elempárok között felismert szabály formulával történő megadására irányult (a hozzárendelési szabály közvetlen leolvasását a grafikonról egyik vizsgált ország tananyaga sem írta elő 7. osztály előtt).

Az elempárok grafikonról táblázatba történő rendezését minden tanuló elvégezte. Az mindenképpen kiemelendő, hogy a két tetszőlegesen választott számpárt a tanulók többsége nem a grafikonról olvasta le. Erre abból következtethetünk, hogy a tanulók a táblázatba olyan számpárt írtak, melyek nem szerepeltek a grafikonon. 8 UA és 16 HU tanuló írta le az elemek között felismert szabályt képlettel is (4.11. ábra). Tehát a vizsgált UA tanulók, ha a szabály képlettel van megadva, azt értelmezni tudják. Viszont, mint a korábbi feladatok eredményei is

mutatják (például az 1., 2., feladatok) a felismert szabály képlettel való megadásával a tanulóknak már problémái akadtak.



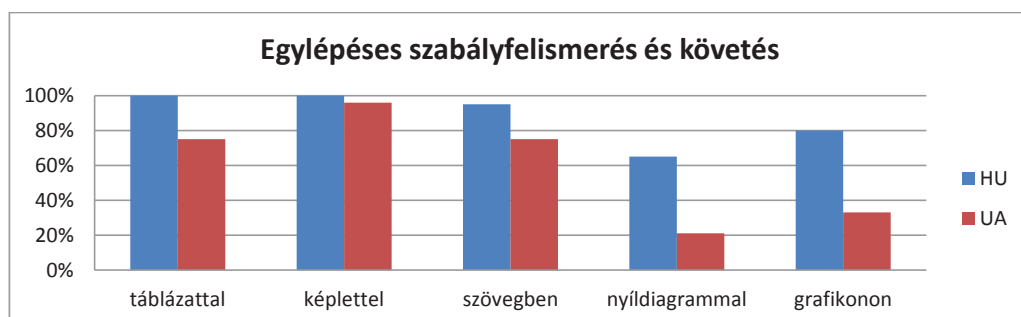
4.11. ábra

Egy-és többlépéses szabályfelismerés különböző kontextusokban

A 4.12. ábra elemzi az egylépéses szabályfelismerésre és követésre kitűzött feladatok azon részeinek tanulói megoldottságát, melyekből kiderült, hogy a tanulók felismerik-e, illetve követik-e az általuk felismert szabályt, ha az összetartozó elemek különböző formában vannak reprezentálva (táblázatban, képlettel, szövegben, nyíldiagrammal, grafikonon) (1. szint). Tehát az ábra az egylépéses szabályfelismerésre és követésre kitűzött feladatok helyes eredményeit mutatja, nem foglalkozik (kivéve a 6. feladat) a felismert szabály melletti érvelés eredményességével (szavakkal, képlettel).

Így a következő feladatok eredményei kerültek a diagramra:

1. feladat (táblázat kitöltése felismert szabály szerint); 3. feladat (táblázat kitöltése megadott szabály szerint); 4./a)-e) kérdés (szöveges kontextusba ágyazott szabály felismerése és követése); 5./b) kérdés (nyíldiagrammal megadott szabály felismerése és követése a hiányzó nyilak berajzolásával); 6./b) kérdés (hozzárendelési szabály leolvasása grafikonról), mivel ez bizonyítja azt, hogy a tanuló felismerte a hozzárendelési szabályt (bár az 1.szint kritériumán már túl mutat).

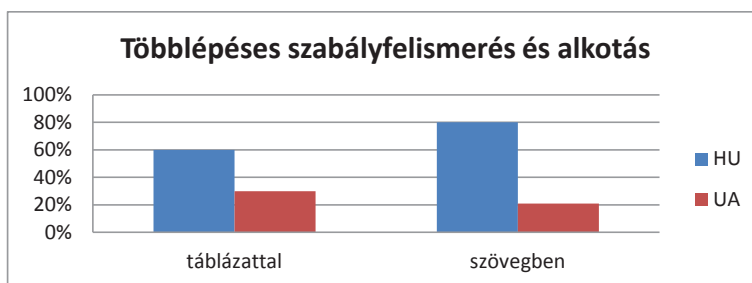


4.12. ábra

Látható, hogy mindkét ország vizsgált tanulóinál a nyíldiagrammal adott elempárok közötti kapcsolat felismerése okozta a legnagyobb problémát. Mindez annak ellenére is jelentkezett a HU gyerekeknél, hogy itt a tanítási gyakorlatba jobban beépült az elempárok ezen reprezentációs módja, mint az UA tanulóknál. Ennek okát Vinner (1992) kutatási

eredményeivel tudjuk magyarázni, ami úgy tűnik, hogy 24 év távlatából is aktuális. Ő megállapította, hogy az iskolában tanult függvényeket a tanulók gyakran annak vagy a grafikus, vagy szimbolikus reprezentációjával azonosítják.

A többlépéses szabályfelismerésre és annak képlettel (3. szint) való megadására kitűzött feladatok (2. és 4/III.) tanulói megoldottságát a 4.13. ábra szemlélteti. Látható, hogy a többlépéses szabályt a vizsgált UA tanulóknak sokkal nehezebb felismerni és képlettel is leírni a különböző kontextusokban. Összehasonlítva az egy lépéses szabályfelismerésnél és követésnél kapott eredményekkel, mindkét csoportnál gyengébb a teljesítmény a többlépéses szabályfelismerés terén.



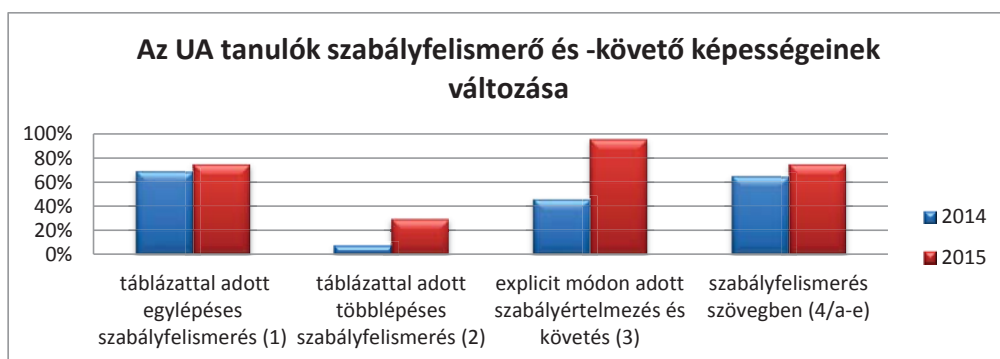
4.13. ábra

Fejlődnek-e a vizsgált ukrajnai tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességei?

A 2014-es felmérésben a tanulók említett képességeit vizsgálva kiderült, hogy a felmérésben résztvevő UA tanulók képesek szabályt felismerni az elemek között (1. szint), de a felismert egy- vagy többlépéses szabály melletti érvelés szavakkal (2. szint) és/vagy képlettel (3. szint) már nehézséget jelent a vizsgált tanulók többségének.

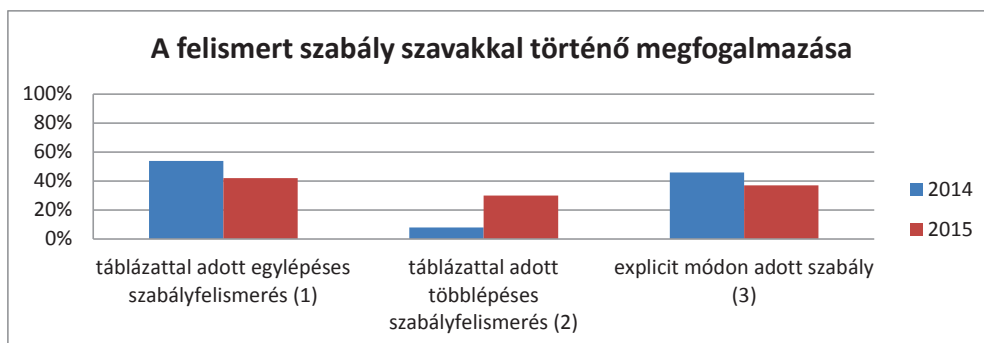
A következő ábrák az előző évi és a jelen felmérésben szereplő ugyanazon (2. feladat és a 4. feladat I. és II. kérdései) vagy csak adatokban eltérő, de típusában megegyező feladatok (1./a és 3. feladat) megoldottsági mutatóit hasonlítja össze a vizsgált UA tanulók körében.

A 4.14. ábra a különböző kontextusba ágyazott szabály felismerésének, követésének sikerességét mutatja 2014-ben és 2015-ben, ahol a jelmagyarázatnál zárójelben a jelen felmérésben is szereplő feladatok sorszámait vannak feltüntetve. Látható, hogy minden területen, de főleg a többlépéses szabályfelismerés és az explicit módon adott szabály értelmezése és követése terén tapasztalható nagyobb fejlődés egy év elteltével a vizsgált UA tanulóknál.



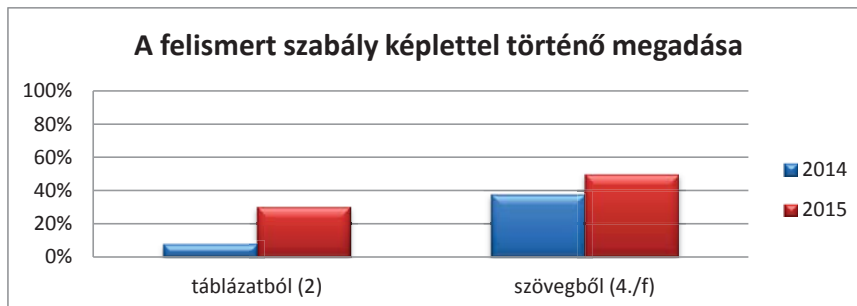
4.14. ábra

Mint ahogy a 4.15. ábra mutatja, a felismert szabály melletti verbális érvelésben (2. szint) nem mutatkozik fejlődés, mondhatni stagnálnak vagy kicsit romlanak az értékek. Ez arra enged következtetni, hogy az UA tanulóknak saját gondolataik szavakkal történő kifejezése, lejegyzése nehézségekbe ütközött. Sok tanuló csakúgy mint a 2014-es felmérésben, most is egyszerűen kihagyta ennek a kérdésnek a megválaszolását, nem is próbálkozott azzal.



4.15. ábra

A felismert szabály képlettel történő megadásában (3. szint) jelentkeztek kisebb változások (4.16. ábra). Az ábra is mutatja, hogy az, aki többlépéses szabályt képes felismerni, annak a képlettel történő megadás sem okoz problémát.



4.16. ábra

4.3.3. Következtetések

Figyelembe véve a felmérésben kapott eredményeket egy év elteltével a tanulóknál a következő változások, illetve hiányosságok tapasztalhatók:

- Fejlődött a különböző módon reprezentált (táblázat, szöveg, grafikon) egylépéses szabályfelismerő és –követő képesség (1. szint).
- Fejlődés tapasztalható az explicit módon adott szabály értelmezésében és követésében (2. szint).

Tehát annak ellenére, hogy a függvényfogalom kialakítási folyamatában a vizsgált UA tanulóknál kevesebb hangsúly volt a vizsgált képességek fejlesztésén 7. osztály előtt, a fogalom bevezetése után a kitűzött feladatok megoldási mutatói megközelítették, néhány esetben el is érték a HU tanulók eredményeit, akik tanulási/tanítási folyamatába előzőleg jobban beépült az említett képességek fejlesztése.

- A felismert szabály szavakkal (2. szint) és/vagy képlettel (3. szint) történő megadása változatlanul problémát jelent több UA tanuló számára.

Ez azt jelenti, hogy nemcsak gondolataik szavakkal való lejegyzése ütközik nehézségekbe, hanem a szimbólumhasználat területén is megmaradtak egyes UA tanulóknál a problémák. A többlépéses szabályfelismerés, követés és alkotás esetében is mutatkozott fejlődés, bár nem nagy arányban.

- Mindkét ország vizsgált tanulóinál az összetartozó elemek közötti kapcsolat felismerése leginkább akkor okozott problémát, ha azok nyíldiagrammal voltak szemléltetve.

Az ilyen formában megadott függvény felismerése még azon középiskolásoknak is nehézséget jelent, akik korrekt függvény definíciót tudnak adni (Elia, 2007). Norman (1992) ezt a problémát azzal magyarázza, hogy a hagyományos matematikatanítás gyakran csak a függvény grafikonnal történő reprezentálására helyezi a hangsúlyt, a nyíldiagram kevés alkalommal kerül alkalmazásra.

Ezt a megállapítást támasztják alá a függvény reprezentációi közötti áttérésnél tapasztaltak: mind az UA, mind a HU tanulók a legsikeresebben a táblázatos reprezentációról a grafikusra és fordítva tértek át. A táblázattal, grafikonnal megadott függvényt verbálisan vagy képlet formájában reprezentálni már több UA tanulónak nehézséget jelentett.

A felmérés tapasztalatai alapján elmondható, hogy célzott fejlesztés nélkül is fejlődtek a felmérésorozatunkban résztvevő UA tanulók szabályfelismerő és –követő képességei egy év alatt (*H2.2* igazolódott); a függvényfogalom formális bevezetése hatással volt a szabályfelismerő és szabálykövető képességek fejlődésre (*H2.3.* igazolódott). De csakúgy mint 6. osztályban, jelen felmérésben is a magyarországi tanulók jobban teljesítettek. Azaz még mindig mutatkoztak különbségek a két tanulói csoport vizsgált képességeinek szintjében.

A 6. és 7. osztályos vizsgálatok eredményei alapján elmondható, hogy a célzott előkészítő munka erősítette a HU tanulók helyes függvénysémájának alakulását, a spontán fejlődés mellett. A 7. osztályban bevezetésre kerülő függvény fogalmát a HU tanulók esetében erősebb alapokra lehetett építeni. A következő alfejezetben annak járunk utána, hogy az eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett milyen fogalomképzettel rendelkeznek a két vizsgált csoport tanulói 8. osztály végére, a fogalom bevezetése után 1 évvel.

4.4. ÁLTALÁNOS ISKOLA 8. OSZTÁLYOS TANULÓINAK FOGALOMKÉPZETEI A FÜGGVÉNYRŐL

A függvény fogalmának kialakítása hosszú folyamat, és bevezetését körültekintő munka szükséges, hogy megelőzze. Ez a munka, ahogyan a dolgozat 2. fejezetében láthattuk, a vizsgált magyarországi tantervben és tankönyvekben hangsúlyosabban megjelenik, mint az ukrainai tantervben és tankönyvekben. Ennek a helyes függvénysémára (a fogalom alkotórészeinek megismerésére, hozzájuk kapcsolható képességek fejlődésére) gyakorolt pozitív hatását a 4.2. és 4.3. alfejezetekben kimutattuk.

A fogalom bevezetését követően a kialakítási folyamat egyik fontos célja olyan fogalomképzet kialakulása, mely összhangban van annak definíciójával. A tanulóban különböző fogalomképzet alakulhat ki. Ezen fogalomképzetek kialakulására hatással vannak a fogalom alakítása során szerzett tapasztalatok, vizuális reprezentációk, élmények, konkrét példák. A hatékony fogalomképzet nagy jelentőséggel bír a problémamegoldásnál, hisz a tanulók legtöbbször nem feltétlenül a fogalom egy definíciójára alapozva hoznak döntést arról, hogy egy adott matematikai objektum példája vagy ellenpéldája az adott fogalomnak. Leggyakrabban a fogalomképzetre támaszkodva valósul meg a döntéshozatal. Ezek alapján ebben az alfejezetben a K2.4. kérdésre keressük a választ. Külön kitérünk arra is, hogy milyen kapcsolat van a tanulók által adott függvénydefiníciók és a fogalomról kialakult képzeteik között.

4.4.1. A felmérés körülményei

A vizsgálatokra 2016 májusának végén és júniusának elején került sor, miután a függvényekhez kapcsolódó témakör tárgyalása és számonkérése megtörtént mindkét ország tanulóinál. A résztvevő 22 UA tanulónál a számonkérésre 2016 januárjában, míg a 19 HU tanulónál közvetlenül a felmérést megelőző napon került sor. Az előző évi felméréshez képest a csoport összetétele nem változott, új tanuló egyik csoportba sem érkezett.

A felméréshez egy 6 feladatból álló feladatlapot készítettünk (lásd Mellékletek, 6. old.). A feladatok megoldására 40 perc állt a tanulók rendelkezésére. Az 1. feladat megválaszolása a 2-6. feladatok megoldása előtt történt, egy külön feladatlapon. Miután a tanulók választ adtak az 1. feladatra, a válaszlapokat összeszedtük, és ezt követően kapták kézhez a 2-6. feladatokat tartalmazó feladatlapot.

Az egyes feladatokra adott tanulói válaszokat a következő szempontok alapján elemezzük:

1. a feladatokra adott helyes/helytelen válaszok száma szerint; a válaszok minősítésénél figyelembe vettük a mellettük szóló érvelést is;
2. az egyes feladatokra érkezett válaszok alapján a fogalomdefiníció és képzet kapcsolata szerint (az 1.1.4. alfejezetben leírtak alapján);
3. a korábbi években végzett felmérések teljesítményéhez viszonyított esetleges fejlődés szerint.

4.4.2. A felmérés feladatainak és tapasztalatainak bemutatása

A egyes feladatokat röviden mutatjuk be. A teljes feladatlap a Mellékletek 6. oldalán látható.

1. feladat

a) Mit nevezünk függvénynek? b) Adj rá egy példát!

Az 1. feladat a tanulók sajátos fogalomdefiníciójának (1/a), valamint a fogalom neve hallatán elméjükben megjelenő mentális képnek (1/b) a megismerésére irányult.

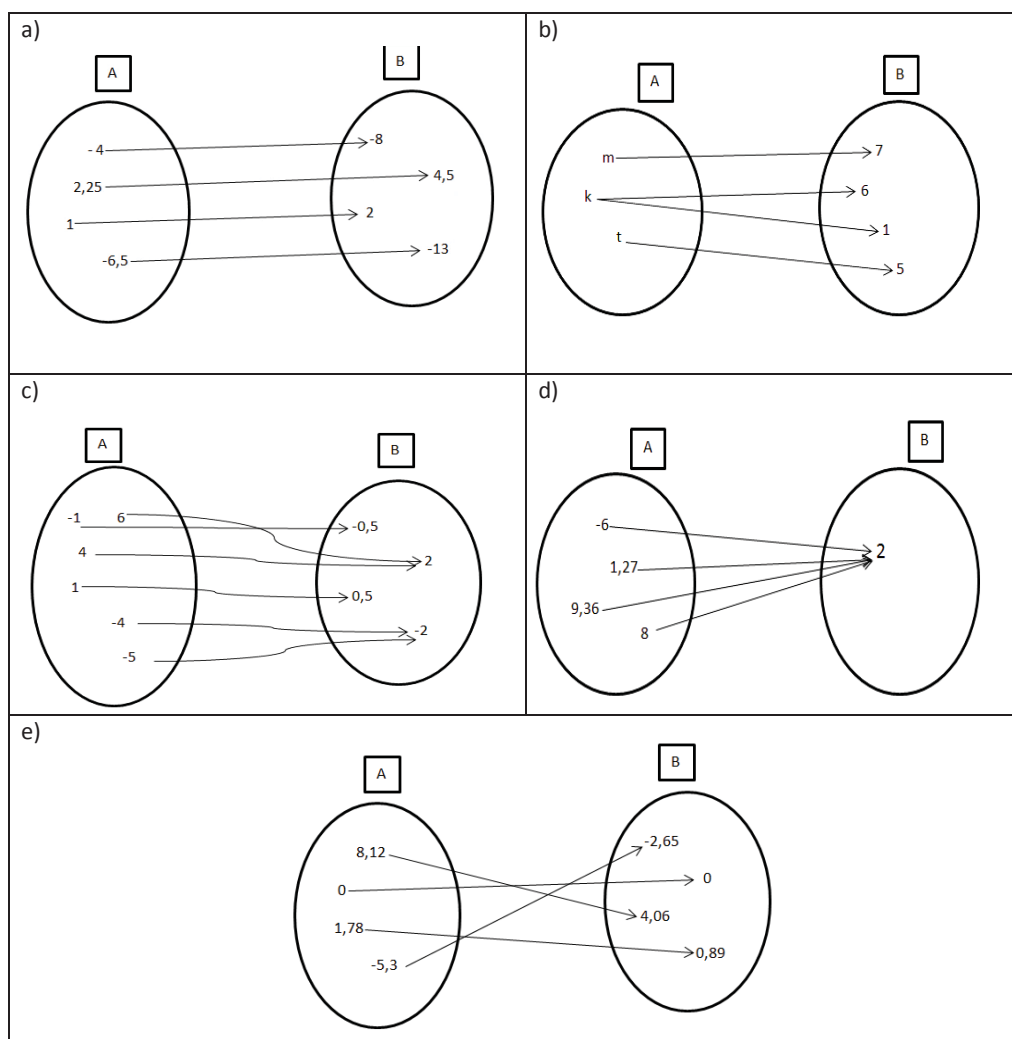
A felmérésben résztvevő 22 UA tanuló közül 9 adott helyes függvénydefiníciót. Közülük 4 tanuló definíciója megegyezett a tankönyvben megfogalmazottal (például: „*ha a független változóhoz valamilyen szabály szerint egyetlen érték tartozik, akkor ezt a megfeleltetést egyértelműnek tekintjük és függvénynek nevezzük*”-U20). A többiek saját szavakkal helyes definíciót adtak, de a többi feladat megoldásánál kitűnt, hogy a bennük kialakult fogalomképzet nincs kapcsolatban a fogalomdefiníciójukkal, amiből arra következtethetünk, hogy bár ismerték a függvény fogalmát, nem értették meg azt. 13 tanuló definíciójában csupán fogalmi „csírák” jelentek meg („*Két halmaz közötti kapcsolat, amikor az egyik halmazhoz csak egy érték tartozik, a másik halmazhoz pedig bármely érték*”-U5; „*A függvény az egy grafikon*”-U18). Ezen tanulók definíciója alapján arra következtethetünk, hogy ők a függvényfogalom „előfüggvény” és „cselekvés” megértési szakaszában (lásd a dolgozat 16. old.) vannak. 6 tanuló grafikon rajzolásával adott választ a feladat b) kérdésére. 4-en csak egy koordináta-rendszert rajzoltak, a többiek egy ismert függvény képletét írták le (például: „ $y=x-2$ ”-U2).

A vizsgált 19 HU tanuló mindegyike helyes definíciót adott, közülük 17-en mondhatni teljesen egyformát („*Egyértelmű hozzárendelés, megfeleltetés, reláció. Az A halmaz (alaphalmaz) elemeihez hozzárendeljük a B halmaz pontosan egy elemét*”). Ez természetesem a számonkérés időbeli közelségével is magyarázható. A b) kérdésre különböző lineáris vagy másodfokú függvény képletének megadásával válaszoltak.

2. feladat

A 2. feladat a tanulók függvény fogalmáról kialakult képzetének vizsgálatára fekteti a hangsúlyt. A válaszok elemzése előtt kiemelendő, hogy az ukrainai tanulók a függvény nyíldiagramos reprezentációjával a tanáruk elmondása alapján, egy-két tankönyvi feladat erejéig foglalkoztak, a kapcsolatok ily módon történő reprezentálása nem volt része a fogalom kialakítási folyamatának. Mindezzel ellentétben a vizsgált magyarországi tanulók számára ez a reprezentálási mód nem volt ismeretlen.

Az alábbi ábrák az A és a B halmaz elemei közötti kapcsolatot szemléltetik. A nyilak azt jelzik, hogy az A halmaz elemeihez milyen elemeket rendeltünk a B halmazból. Melyik hozzárendelés függvény az alábbiak közül? Válaszodat indokold!



4.17. ábra

A feladat megoldottsági mutatóit a vizsgált tanulói csoportokban a 4.18. és a 4.19. ábra szemlélteti. A „Helytelenül vagy nem indokolt helyes válasz” kategóriába azokat a válaszokat soroltuk, amelyek esetében valamilyen „előfüggvény” képet véltünk felfedezni az indoklásban (például: „az értékek pont megfelelők”-U11, „nem felel meg a szabálynak”-U18, „nem úgy néz ki, mint az általam ismertek”-H16, „számhoz számot, betűhöz csak betűt lehet hozzárendelni”-H7).

Azon tanulók, akik a feladat kérdéseire helyes választ adtak és azokat definícióval indokolták, az 1. feladatra is helyes választ adtak, azaz megadták a függvény definícióját is.

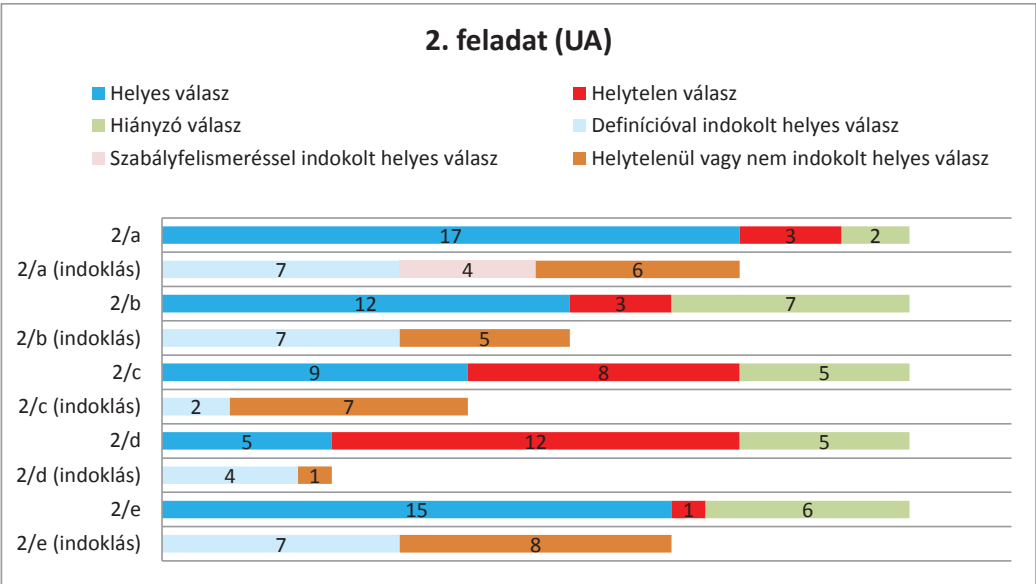
Amint azt a 4.18. és 4.19. ábrák is mutatják, az **a)** feladat esetében, mely kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést reprezentált, mindkét csoport tanulói közül többen indokolták válaszukat definícióval. Minthogy e két halmaz közötti kapcsolat egy lépéses szabállyal is leírható, ezt egyes tanulók felhasználták az indoklásban. A helyes választ adó UA tanulók közül az U9-es tanulónak, a korábban megadott helyes definíciója mellett, már itt megmutatkozott, hogy ehhez milyen fogalomképzet társul: „*Függvény, mert minél nagyobb x értékeket adunk meg, annál nagyobb y értékeket kapunk. Tehát a függvény növekvő*”. Ő tehát függvény monotonitásához köti annak létezését.

A **b), c)** és **d)** kérdésre érkezett „Helytelen válasz” vagy „Helytelenül vagy nem indokolt helyes válasz” kategóriákba tartozó HU és UA tanulói válaszok, a leggyakrabban előforduló indokok alapján, a következő 3 területen meglévő hiányosságokra utalnak:

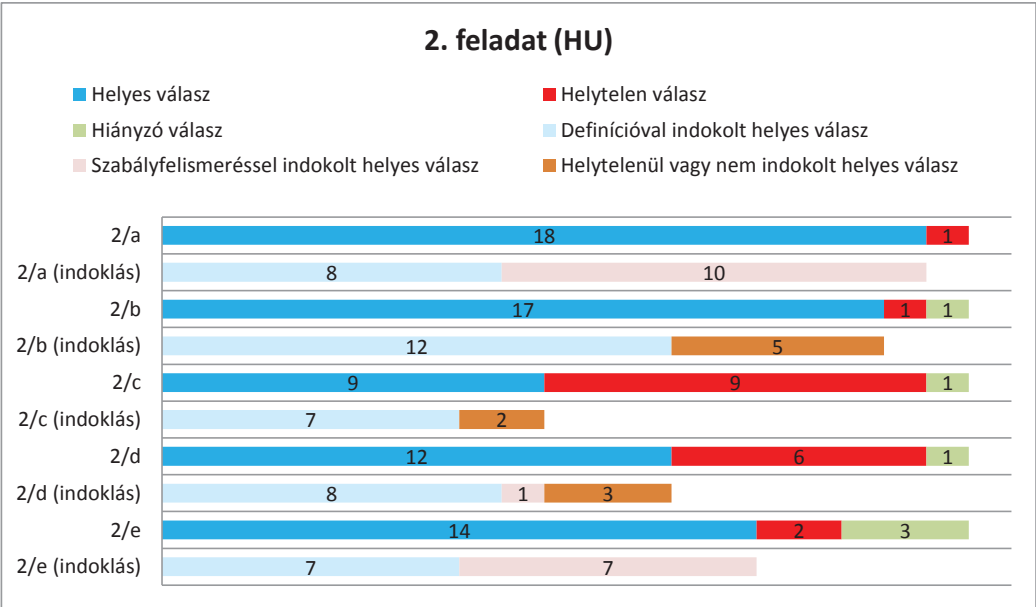
- a hozzárendelés irányának helyes értelmezése (mihez mit rendelünk): [b] „*Függvény, mert egy elemhez egy elem adható*”-U5;
- nyelvi megfogalmazás: [b] „*Nem függvény, mert eltérők a hozzárendelések*”-H16;
- a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést tekintik függvénynek: [c] „*Nem függvény, mert egy elemhez többet is hozzárendeltünk*”-H7, „*egy elemhez többet is rendel a B halmazból, pedig a szabály az, hogy minden számhoz hozzárendeli a felét*”-H4; [d] „*Nem függvény, mert több x értéknél nem lehetséges, hogy csak egy y érték van*”-U9.

Az **e)** kérdésnél többen hagyatkoztak a függvénydefinícióra a válasz meghozatalánál. A helytelen válaszoknál az indokok az előző kérdéseknél is megmutatkozó fogalomképzetekre mutattak.

Összességében elmondható, hogy a helyes választ adó tanulók mindkét csoportban az indoklásnál csak alacsony számban használták fel az előzőleg megadott helyes függvénydefiníciójukat. A többség érveléséből a bennük kialakult fogalomképzetre következtethetünk (például szabályt keresve vagy felismerve döntötték el, hogy függvény-e az adott hozzárendelés).



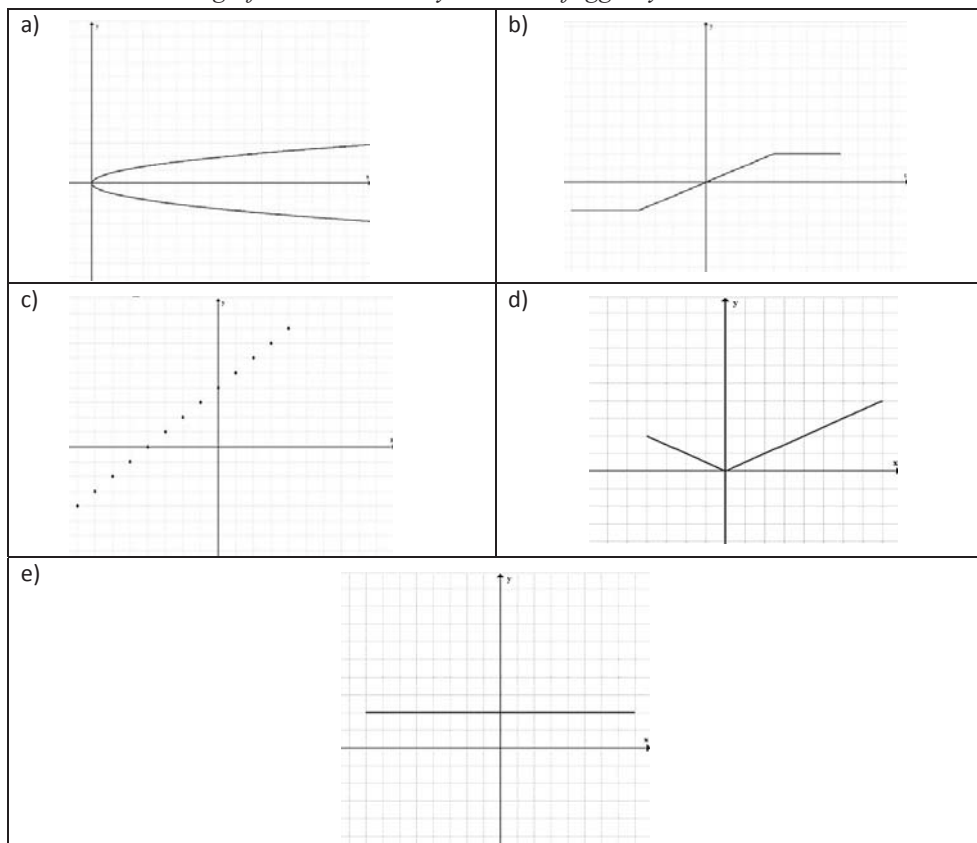
4.18. ábra



4.19. ábra

3. feladat

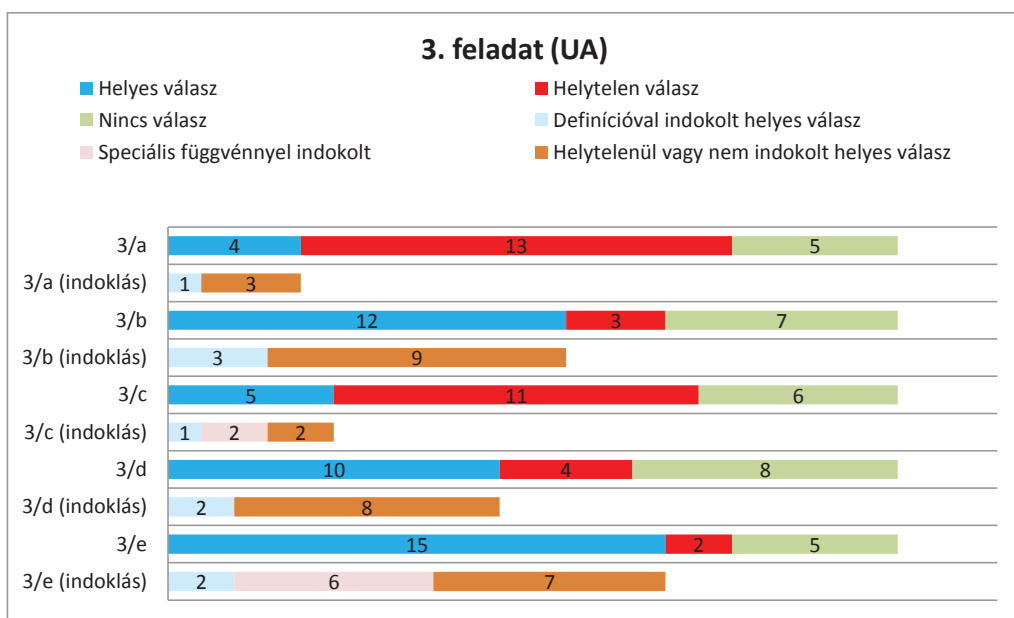
Az ábrákon látható grafikonok közül melyik ábrázol függvényt? Válaszodat indokold!



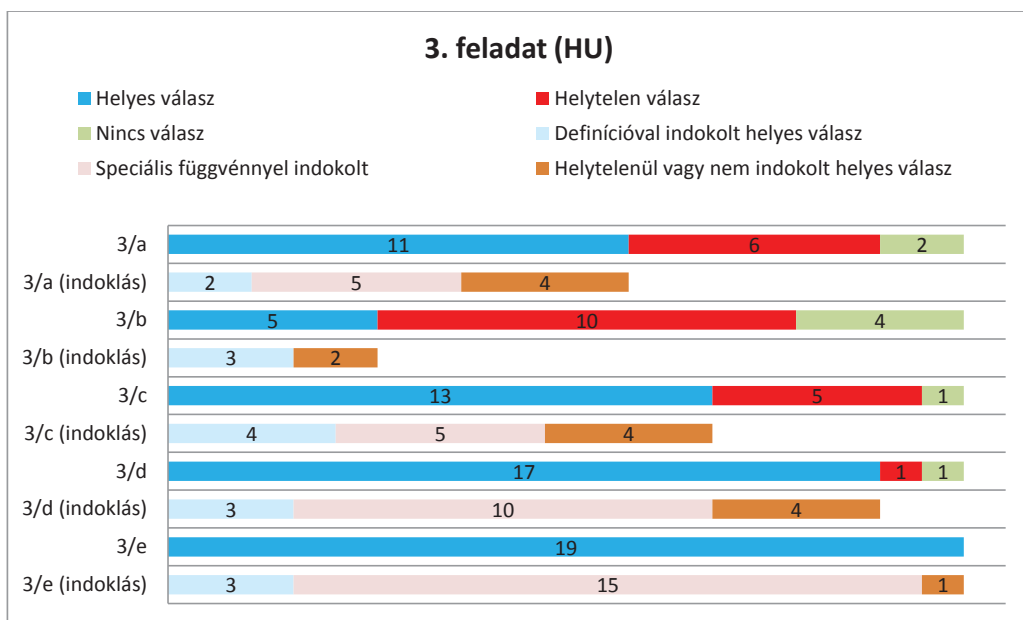
4.20. ábra

A feladat megoldottsági mutatóit a vizsgált tanulói csoportokban a 4.21. és a 4.22. ábra szemlélteti. Hasonlóan a 2. feladat válaszainak elemzéséhez, jelen feladatnál is a „Helytelenül vagy nem indokolt helyes válasz” kategóriába olyan válaszok kerültek, amelyek esetében valamilyen „előfüggvényt” is véltünk felfedezni (például: „megfelel a függvény tulajdonságainak”-U5; „lehet neki adni pontokat”-U13).

Amint azt a 4.21. és 4.22. ábrák mutatják, mindkét tanulói csoport diákjai annak érdekében, hogy eldöntsék, hogy az adott grafikon egy függvény grafikonja-e, ritkán használták a függvény definícióját. A tanulók többsége egy speciális függvény segítségével hozott döntést (helyest vagy helytelen): valamely ismert, nevezetes függvény grafikonjához hasonlította az adott grafikon. Ha az eltért a már ismerttől, akkor az adott görbét nem tekintették függvény grafikonjának.



4.21. ábra



4.22. ábra

Megjegyezzük, hogy a feladat c) kérdésében a grafikon az egész számok halmazán értelmezett függvényt reprezentálta. A kérdésben nem jeleztük az értelmezési tartományt, a tanulói indoklások viszont nem erre alapozók voltak.

Az alábbi táblázat (4.3. táblázat) összefoglalja mindkét tanulói csoport érvelései között a leggyakrabban megjelenő típusokat.

	Indoklási típusok	
	Helyes válaszoknál	Helytelen válaszoknál
3/a	„Nem függvény, mert a parabola függőleges”-H7	„Függvény, mert ez egy parabola...”-H19, U7
3/b		„Nem függvény, mert a függvény nem lehet ilyen”-U14 „Nem függvény, mert egy függvény képe csak egyenes, parabola, hiperbola vagy V alakú lehet”-H28 „Nem függvény, mert nem lehet hozzá felírni függvényképletet”-H4
3/c	„Függvény, mert lineáris függvény” – H26, H4 „Függvény, mert egyenesen vannak a pontok”-U6	„Nem függvény, mert a pontok nincsenek összekötve”-U9, U7, H27, H1
3/d	„Függvény, mert abszolútérték függvény”-H13, H3	„Nem függvény, mert nem egyforma a két ága”-U7
3/e	„Függvény, mert lehet párhuzamos az x-tengellyel”-H11 „Függvény, mert nulladfokú függvény”-H3, H28 „Függvény, mert, $y=b$ függvény”-U22	

4.3. Táblázat: A 3. feladat válaszaiban megjelenő indoklási típusok

A válaszokból arra következtethetünk, hogy a legtöbb tanuló fogalomdefiníciója nem azonos a bennük kialakult fogalomképzettel. A függvényt leginkább egy, a tanórán megismert és vizsgált függvénnyel azonosítják, valamint befolyásolja őket a függvény szokásos ábrázolásmódja is (lásd az U7 tanuló 3/d kérdésre adott választát) vagy az elempárok folytonos vonallal való összekötése.

Összességében elmondható, hogy a vizsgált HU és UA tanulók többsége a választát nem vagy helytelenül indokolta, amely jól mutatja, hogy a tanulók függvény fogalmáról kialakult képzeete még nincs kölcsönös kapcsolatban annak definíciójával.

4. feladat

a) Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az X halmaz elemeihez milyen elemeket rendeltünk az Y halmazból. Lehet-e ez a hozzárendelés függvény? Válaszodat indokold!

x	-1	4	1	6	-4	-5
y	-0,5	2	0,5	2	-2	-2

b) Ha az a) kérdésre a válaszod **IGEN** volt, azaz úgy gondoltod, hogy a megadott táblázat lehet egy függvény értéktáblázata, akkor módosítsd a táblázatot (értékpárok lehúzásával, javításával, táblázat kiegészítésével) úgy, hogy az így kapott hozzárendelés már **NE LEGYEN** függvény!

Ha az **a)** kérdésre a válaszod **NEM** volt, azaz úgy gondolod, hogy a megadott táblázat nem lehet egy függvény értéktáblázata, akkor módosítsd a táblázatot (értékpárok lehúzásával, javításával, táblázat kiegészítésével) úgy, hogy az így kapott hozzárendelés már függvény lesz!

A 4. feladatban a mennyiségek közötti kapcsolatot táblázattal reprezentáltuk. A tanulóknak el kellett dönteniük, hogy az adott hozzárendelés függvény-e. A 4.4. táblázat jól mutatja, hogy csakúgy, mint az előző feladatoknál, jelen esetben is ismert hozzárendelési szabállyal megadott függvényekre alapozva hozták meg döntésüket; a függvénydefinícióval való érvelés csak kevés helyen jelent meg.

	Helyes válasz			Helytelen válasz	Nincs válasz
	Definícióval indokolt	Szabály-felismeréssel indokolt	Helytelen indok		
HU (19-ből)	2	1	0	16	1
UA (22-ből)	1	0	9	10	2

4.4. Táblázat: A 4. feladat megoldottsága

A HU tanulók körében tapasztalható volt, hogy az összetartozó mennyiségek közötti kapcsolatot amiatt nem tekintették függvénynek, mert az nem egy általuk ismert függvénnyel volt megegyező („*nincs szabály az x és y sor között*”-H3; „*mindegyikhez a felét kéne hozzárendelni*”-H19). Ily módon a táblázatot úgy módosították, hogy a kapcsolat az $y=x/2$ szabállyal vált leírhatóvá (például. a (6,3) és (-5;-2,5) számpárok kerültek a táblázatba). 1 tanuló szerint ez a hozzárendelés nem adhat meg függvényt, mert az nem egyértelmű („*nem egyértelmű, mert ha mindegyik számhoz hozzárendeljük a felét, akkor ez így nem lehet*”-H26). Ő a 2/c kérdésnél is, amikor ugyanezen elempárok nyíldiagrammal voltak reprezentálva, eltekintett a függvény létezésétől. Úgy vélte, hogy az adott hozzárendelés nem egyértelmű, valamint a többi hozzárendelés esetében is igyekezett szabályfelismeréssel indokolni döntését. Ezek alapján úgy véljük, hogy az egyértelmű hozzárendelésről is hibás képze van. 1 tanuló (H16) ugyanezen hozzárendelést annak nyíldiagramos és grafikus reprezentációja mellett egyértelműnek tekintette, a táblázatos reprezentációnál viszont úgy vélte, hogy az nem egyértelmű és a többi tanulóhoz hasonlóan, az $y=x/2$ szabály alapján módosította a táblázatot.

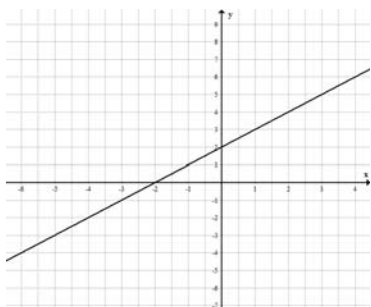
Az UA tanulók esetében a helyes válaszok indoklásában, hasonlóan az előző feladatokhoz, csupán „függvénycsírák” jelentek meg, melyek fogalomképzetük „milyenségére” utalnak. A helyes választ helytelenül adó tanulók válaszából arra következtethetünk, hogy döntésüket az alapján hozták meg, hogy a pontok segítségével grafikon szerkeszthető (például: „*Igen, lehet, mert megrajzolva szabályos grafikont alkotnak*”-U27, „*Igen, lehet, mert a pontok megadják a függvényt*”-U19). A helytelen válaszok között ugyanazon érvelések voltak, mint a HU tanulók esetében: szabályt keresve módosították a táblázatot.

Ha a feladatra érkezett helyes válaszok számát összehasonlítjuk a 2/c és 3/b feladatokra érkezett válaszok számával, ahol ugyanezen két halmaz elemei közötti kapcsolatot nyíldiagrammal és grafikonnal reprezentáltuk, láthatóan ott is alacsony a helyes válaszok száma. Tehát, ha nem írható le egyetlen hozzárendelési szabállyal az elempárok közötti

kapcsolat, akkor azt nem tekintik függvénykapcsolatnak. A fogalomképzetükben egy hozzárendelési szabállyal megadható függvények élnek.

5. feladat

A következő ábrán egy függvény grafikonja látható!



a) Készítsd el a függvény értéktáblázatát!

b) Add meg ezt a függvényt:

I) szavakkal;

II) képlettel.

A feladat a 2015-ös felmérés egyik feladata volt: egyik reprezentációs módról, nevezetesen grafikus reprezentációról táblázat, verbális, majd szimbolikusra történő átjárási képességet vizsgálta. Jelen felmérésbeli rendeltetése a következő kérdés megválaszolása volt: hatással van-e a függvénytani ismeretek bővülése a függvény különböző reprezentációi közötti átjárási képesség „erősödésére”, esetleg tapasztalható-e „gyengülés” ezen képességben.

A 4.5. táblázatban összesítettük a feladat egyes kérdéseire érkezett helyes megoldások számát.

	A függvény megadása		
	Táblázattal	Verbálisan	Képlettel
A HU tanulók száma (19-ből)	19	10	9
Az UA tanulók száma (22-ből)	19	3	7

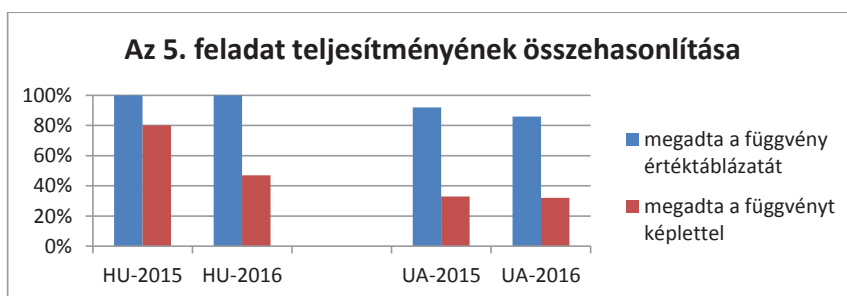
4.5. Táblázat: Az 5. feladat megoldottsága

Láthatólag, csakúgy, mint a korábbi évben, a grafikus reprezentációs módról a táblázatosra való áttérés nem okozott nehézséget egyik tanulói csoportnak sem. Viszont a függvény verbálisan és képlettel történő megadásában már jól érzékelhető a függvénytani ismeretek bővülésének hatása a különböző reprezentációk közötti átjárás képességére. A függvény verbálisan történő reprezentációjánál egyes tanulói válaszok a következő két csoportba sorolhatók:

- (1) a függvény tulajdonságait nevezték meg (például: „képe egyenes; meredeksége 1”-H3);
- (2) a grafikon szerkesztésének algoritmusát írták le (például: „az x tengely mentén 2-t jobbra, az y tengely mentén 1-et fel”-H18).

Az UA tanulók esetében az előző évi felméréssel összehasonlítva az eredményeket azt tudjuk elmondani, hogy az értékek stagnálnak (4.23. ábra). A mennyiségek közötti kapcsolat verbális reprezentációja még mindig nehézséget jelent a tanulók többségének. A tanulók egy része vagy kihagyta, vagy nem adott semmilyen választ a feladat b) kérdésére, míg mások, a függvény tulajdonságát jegyezték le. Ezzel arra következtethetünk, hogy ezen reprezentációs mód az ő esetükben nem épül be „szervesen” a függvényfogalom kialakítási folyamatába még annak bevezetése után sem.

A képlettel való reprezentálás terén erős „visszafejlődés” tapasztalható a HU tanulók 2015-ös felmérésben nyújtott teljesítményéhez képest. Míg akkor a vizsgált HU tanulók 80%-a sikeresen tért át a grafikus reprezentációról a szimbolikusra, addig jelen felmérésben már csak a tanulók 47%-a adta meg helyesen a függvény szimbolikus reprezentációját. A tanulók a képlet leírása során olyan szabályt adtak meg, mely a táblázatban szereplő elem párok közül csak néhányra volt igaz. A leggyakoribb hibás válaszok (pl. „ $y = \frac{1}{2}x + 2$ ”, „ $y = \frac{1}{2}x$ ”) azt feltételezik, hogy a különböző lineáris függvények képleteinek emlékezetben történő rögzülése „visszafejleszti” az együtváltozó mennyiségek közötti kapcsolatot definiáló szabály szimbolikus leírásának képességét. Az elem párok közötti kapcsolat képlettel történő leírásához nem használták az előzőleg elkészített táblázatot, ellentétben a 6. osztályos felmérés során tapasztaltakkal. Akkor még a táblázatra támaszkodva adták meg képlettel a felismert kapcsolatot.



4.23. ábra

6. feladat⁹

40 °C-os vizet hűtünk. Percenként 5 °C-kal csökken a víz hőmérséklete.

- Készíts táblázatot az eltelt idő és a víz hőmérséklete közötti kapcsolatáról!
- A táblázat segítségével szemléltesd grafikonon a víz hőmérsékletváltozását!
- Fogalmazd meg szavakkal hogyan függ a víz hőmérséklete az eltelt időtől!
- Fogalmazd meg matematika nyelvén (írd le képlettel), hogyan függ a víz hőmérséklete az eltelt időtől!
- Hány °C-os lesz a víz 10 perc múlva?
- Hány perc múlva lesz a víz hőmérséklete 0 °C?

A feladat szintén visszacsatolás az előző évi felméréshez (lásd Mellékletek, 4. feladat, 4. old.): a szöveges kontextusban rejtőző összetartozó mennyiségek, az azok közötti kapcsolat felismerésére, a feladat általánosítására irányult, azaz egy probléma függvénytani ismeretek segítségével történő megoldására.

A 4.6. táblázatban összegeztük a feladat egyes kérdéseire érkezett helyes tanulói válaszok számát.

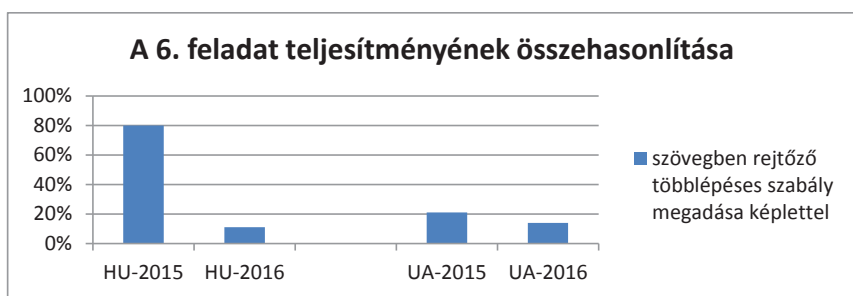
⁹ Hajdu Sándor, Matematika (alapszint, 6. osztály), Műszaki Tankönyvkiadó, 2002, 3.05. feladat (módosítással).

	6/a	6/b	6/c	6/d	6/e	6/f
HU (19-ből)	15	14	17	2	17	17
UA (22-ből)	11	8	8	3	14	14

4.6. Táblázat: A 6. feladat megoldottsága

Az UA tanulók esetében az összetartozó mennyiségek táblázatos reprezentációjának helytelen megadására, többek között, a kezdeti „idő-hőmérséklet” elempár feltüntetésének figyelmen kívül hagyása is hatással volt. Egy másik probléma az összetartozó mennyiségek felismerésére vezethető. Néhány tanuló az eltelt időhöz hozzárendelte az az alatt az idő alatt bekövetkezett hőmérsékletváltozás nagyságát (például: (1, 5), (2, 10) számpárokat képezett). A kapcsolat táblázat alapján történő grafikus reprezentációját a helyes táblázatot adott tanulók közül 3-an kihagyták. Sok esetben a megrajzolt grafikonból (egy növekvő lineáris függvény) arra következtethetünk, hogy a kapott grafikont nem „csatolták vissza” a feladat szövegéhez, elmaradt az ellenőrzés, valamint a grafikon és a szituáció vizuális összekapcsolása. A mennyiségek közötti kapcsolat szavakkal történő megadása még mindig problémát jelentett több tanulónak, illetve annak képlettel történő megadásában az előző évi felméréshez képest nem tapasztalható fejlődés (4.24. ábra).

Ugyanilyen jellegű hibák jelentkeztek a HU tanulóknál is az összetartozó mennyiségek közötti kapcsolat táblázattal és grafikonnal történő megadásában. Viszont kiemelendő, hogy míg 2015-ben a tanulók 80%-a tudta általánosítani a kitűzött feladatot és megalkotni annak kétlépéses szabályát, addig jelen felmérésben mindössze 11%-a adott helyes általánosítást (4.24. ábra). Ahogy azt a 4.6 táblázat is mutatja, a feladat e) és f) kérdéseire mindkét tanulói csoport magas számban adott helyes választ. Ebből arra következtethetünk, hogy a feladat értelmezése nem jelentett problémát.



4.24. ábra

Mindezeket összegezve elmondható, hogy a függvénytani ismeretek segítségével történő problémamegoldás mindkét tanulói csoportban folytonos fejlesztést igényel, még annak ellenére is, hogy a HU tanulók hasonló típusú problémákkal már a függvényfogalom bevezetését megelőzően is találkoztak, ellentétben az UA tanulókkal, akiknél a tanórákba csak a függvény bevezetését követően épültek be.

A fogalomdefiníció és fogalomképzet kapcsolata

A következőkben megvizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat van a tanulói csoportok fogalomdefiníciói és képzei közötti Vinner elmélete alapján (lásd a dolgozat 1.1.4. alfejezete), felhasználva a feladatlap 2-4. feladataira adott tanulói válaszokat.

A 2-3. feladatok öt-öt kérdéseire összesen érkező legalább 4 helyes válasz esetén az indoklásukat figyelembe véve (a helytelenül vagy nem indokolt helyes válaszokat nem soroljuk ide) vizsgáltuk a tanulói definíciók és fogalomképzetek közötti kapcsolatot. A minimum 4 helyes válasz elvárását azzal indokoljuk, hogy így biztosan számításba kerülnek az egyes feladatok „kritikus” kérdései is, azaz azok a kérdések, melyek esetében leggyakrabban adtak helytelen választ mindkét csoport tanulói (2/c, 2/d, 3/a, 3/b, 3/c). A továbbiakban külön-külön elemezzük mindkét tanulói csoportot.

UA tanulói csoport

Az UA tanulók között csak nagyon alacsony számban, 3 tanulóól érkezett legalább 4 helyes válasz a feladatok egyes kérdéseire. Közülük mindössze 2 tanuló (U20, U6) használta a függvény definícióját annak eldöntésére, hogy a nyíldiagrammal reprezentált hozzárendelés függvény-e (2. feladat), valamint 1 tanuló (U27) egyes hozzárendelések esetében definícióval, míg máskor képzetre támaszkodva (2/a) érvelt válasza helyessége mellett. A grafikusan reprezentált hozzárendelések esetében (3. feladat) a legalább 4 helyes választ adó 1 tanuló (U20) a függvény definícióját használta fel indoklasként. A 4. feladatot 1 tanuló (U20) oldotta meg definícióra építve, 2 tanuló (U19, U4) bár helyes választ adott és a táblázatot is helyesen módosította, a feladat a) kérdésére adott válaszuk mellett helytelenül érveltek és a többi feladatban is sok helytelen választ adtak.

9 UA tanuló adott helyes fogalomdefiníciót, de közülük csak 3 tanuló adott erre támaszkodó legalább 4 helyes választ az egyes feladatok valamelyikére.

HU tanulói csoport

Abban az esetben, ha a halmazok elemi közötti kapcsolat nyíldiagrammal volt reprezentálva, a fogalomdefinícióra épülő érvelés jelentkezett a legtöbbször. A fogalomképzetrel történő indoklás a kapcsolatok grafikus reprezentációjánál mutatkozott meg nagyobb számban. Mindezek azzal magyarázhatók, hogy a függvényfogalom iskolai bevezetése leggyakrabban a különböző hozzárendelések vizsgálatával történik, melyeket nyíldiagrammal reprezentálnak. A vizsgált HU tanulóknál a fogalom tartalma (definíciója) „háttérbe” szorult, az ismert függvénygrafikonokra támaszkodva döntöttek arról, hogy az adott görbe egy függvény grafikonja, avagy sem.

A 4. feladatnál rajzolódik ki leginkább a tanulói fogalomképzet. Ahogy a 4.7. táblázat is mutatja, mindössze 3 tanuló adott helyes választ, 2-en közülük (H29, H13,) definícióra építve, 1 tanuló (H20) pedig képzetre alapozva. A többi válaszban a fogalomról kialakult képzetek jelentkeztek: nem találtak „kézzel fogható” szabályszerűséget, így nem tekintették függvénynek a táblázattal reprezentált hozzárendelést. Figyelemre méltó 1 tanuló (H26) munkája, amiből kitűnik, hogy azon hozzárendeléseket nem tekintette egyértelműnek, amit nem lehetett megadni egy szabállyal. Ő a 3/b és 4. feladatokban (melyek ugyanazt a függvény

reprezentálták különböző módon) szereplő hozzárendeléseket nem tekintette függvénynek, míg abban az esetben, ha az nyíldiagrammal volt reprezentálva (2/c feladat) fogalomdefinícióra támaszkodva helyes választ adott.

A 4.7. táblázatban összegeztük az egyes kategóriákba sorolandó UA és HU tanulók számát (megjegyezzük, hogy a HU tanulók mindegyike helyes fogalomdefiníciót adott).

	csak definícióra épülő érvelés (1.2. ábra)		képzetre és definícióra épülő érvelés (1.3. ábra)		csak képzetre épülő érvelés (1.4. ábra)	
	HU	UA	HU	UA	HU	UA
2. feladat	6	2	3	1		
3. feladat	3	1	1		3	
4. feladat	2	1			1	

3.7. Táblázat: A HU és UA tanulók fogalomképzetei és –definíciói közötti kapcsolat

Amint a táblázat is mutatja, mindkét csoportban alacsony számban adtak legalább 4 helyes választ a 2. és 3. feladat öt-öt kérdésére, valamint a 4. feladatra. A fogalomdefiníciót a tanulók leginkább a hozzárendelések nyíldiagrammal történő reprezentációjánál használták fel döntésük melletti érveléshez. Abban az esetben, ha a nyíldiagrammal vagy grafikonnal reprezentált hozzárendelésre találtak egy alkalmas szabályt, a tanulók már nem támaszkodtak a fogalom definíciójára.

4.5. ÖSSZEGZÉS

A 3. fejezetben bemutatott, magyarországi egyetemi hallgatók között végzett felmérés rávilágított arra, hogy a célzott, elemi iskolától kezdődő fogalomkialakítási folyamat ellenére a vizsgált hallgatók többségének a függvényről kialakult fogalomképzete nem felel meg a kerettantervi követelményeknek. Azt, hogy melyik az a korosztály, ahol ez a „törés” bekövetkezhet, egy 3 éven keresztül tartó (6., 7., és 8. osztály) longitudinális méréssorozattal próbáltuk megtalálni.

A felméréssorozat is jól mutatta, hogy a függvényfogalom kialakulása hosszú folyamat. A történeti és didaktikai elemzések rávilágítottak arra, hogy e fogalom kialakítását spirális módon, annak tényleges definiálása előtt kell megkezdeni. Az előkészítési munka fókuszába a függvényfogalom alkotórészeinek (változók, kapcsolatok, szabályok) megismerését érdemes helyezni. Az alkotórészek megismerése során a függvény különböző reprezentációinak bevonásával olyan fogalomkialakítási folyamatot szükséges építeni. A fokozatos haladást a „szűkebb”, szabályokkal leírható kapcsolatok vizsgálatából indulva célszerű kezdenünk a „tágabb” függvényfogalom felé orientálódva. A folyamat végcélja olyan fogalomképzet kialakulása, mely összhangban van a fogalom definíciójával.

A vizsgált magyarországi kerettantervekben és tankönyvekben elemi iskolától kezdődően hangsúlyosan jelentkezik a fogalomalkotást, és ezzel együtt a fogalom alkotórészeinek és különböző reprezentációinak megismerését segítő források (függvénygép, valós életből vett

folyamatok modellezése függvénnyel). Ezzel ellentétben a vizsgált ukrainai matematika programok és tankönyvek ezen alkotórészek megismerésére kevesebb hangsúlyt fektetnek. Tehát azok a Skemp két, fogalomkialakítására vonatkozó hipotézisét kevésbé veszik figyelembe. Mindezek ismeretében a felméréseket a két ország egy-egy tanulói csoportjában valósítottuk meg.

A függvényfogalom bevezetését megelőző évi (6. osztályos) felmérés a fogalom egyik alkotórészéhez, a szabályhoz kapcsolható szabályfelismerő és szabálykövető képességek tanulói birtoklásának vizsgálatára irányult. Az eredmények jól igazolták feltételezésünket, miszerint az elemi iskolától kezdődő fogalomkialakítás pozitív hatással van az említett képességek fejlődésére; a vizsgált UA tanulók alacsonyabb szinten birtokolták ezen képességeket, mint a magyarországi tanulók (a H2.1.-t elfogadjuk). Ők is képesek ugyan kapcsolatot felismerni az együtváltozó mennyiségek között, de a felismert kapcsolat melletti érvelés szavakkal vagy képlettel, már nehézséget jelentett számukra.

A fogalom bevezetésének évében (7. osztály) elvégzett felmérés eredményei alapján elmondható, hogy a függvény definíciójának megismerése és a különböző reprezentációs módok bővülése hatással volt az ukrainai tanulók vizsgált képességek fejlődésére (a H2.3.-t elfogadjuk), mindemellett a magyarországi tanulókéra is. Az ukrainai tanulók többsége a különböző kontextusba (táblázat, szöveg, grafikon) rejtett együtváltozó mennyiségek között képesek voltak az egy lépéses szabállyal definiálható kapcsolatot felismerni vagy a képlettel megadott szabályt követni. Bár kis arányban, de fejlődött a többlépéses szabállyal definiálható kapcsolatok felismerése, képlettel történő megadása is (a H2.2.-t elfogadjuk). A fogalom mély megértésének egyik feltétele a rugalmas átjárási képesség birtoklása egyik reprezentációból a másikba. Ebben csakúgy, mint 6. osztályban, a 7. osztályos felmérésben is a vizsgált magyarországi tanulók értek el jobb eredményt. Tehát a vizsgált magyarországi tanulóknál 7. osztályban a függvényfogalom bevezetésénél erősebb alapokra lehetett támaszkodni, mint a vizsgált ukrainai tanulóknál.

Annak érdekében, hogy választ kapjunk arra a kérdésre, hogy az eltérő fogalomkialakítási folyamat eredményeként milyen fogalomképzetek alakultak a vizsgált tanulóknál 8. osztály végére, újabb felmérést végeztünk. A tapasztalatok alapján elmondható, hogy mindkét ország vizsgált tanulóinak többsége 8. osztály végére, hasonlóan az első éves egyetemi hallgatókhoz, olyan fogalomképzettel rendelkezik, ami nem nincs kölcsönös kapcsolatban annak formális definíciójával; a fogalom tartalma elvesztette jelentését. Csakúgy, mint a vizsgálatunkban résztvevő egyetemi hallgatóknál, a 8. osztályt végző tanulók képzeteiben valamely általános hozzárendelési szabállyal megadható függvények „élnek”.

A magyarországi tanulóknál a fogalomkialakítási folyamat tehát megfelelően kezdődött: a fogalom alkotórészeinek, különböző reprezentációinak megismerése és azok közötti átjárás képességének fejlesztése célzottabban történt, a folyamat a fogalom történeti fejlődését követve a „szűkebb”, szabályokkal leírható kapcsolatok vizsgálatától kiindulva haladt a „tágabb” függvényfogalomig. A felmérés eredményei viszont azt igazolják, hogy a függvény definíciójának megadása után, a különböző specifikus függvények bevezetésének hatására fogalomképzetük egy „szűk” függvényfogalomnak felel meg.

Az eltérő fogalomkialakítási folyamat ellenére a vizsgálatainkban résztvevő ukrainai tanulók képzetében a magyarországi tanulókéhoz hasonló „szűk” függvényfogalom jelenik meg. Csupán 1-1 tanuló volt, akinél a fogalomkialakulási folyamat eredményeként olyan fogalomképzet alakult ki, mely kölcsönös kapcsolatban van a fogalom definíciójával is (a H2.4.-t elvetjük).

Minthogy a vizsgálatainkat kis létszámú, 1-1 tanulói csoportban végeztük, nem volt célunk általánosítani az eredményeket. Viszont azok alapján indokoltnak találjuk a függvényfogalom általános iskolai kialakítási folyamatának átgondolását. Egy lehetséges kezdeti lépéseként kidolgoztunk egy fejlesztő programot, melyet a dolgozat következő fejezetében mutatunk be.

5. A FÜGGVÉNYFOGALOM ELŐKÉSZÍTÉSÉT CÉLZÓ FEJLESZTŐ PROGRAM

Kutatásunk azt vizsgálja, hogyan építhetők be az ukrainai 6. osztályos matematika tanterv bizonyos témaköreibe a függvényfogalom alkotórészei (változók, kapcsolatok, szabályok), hogyan segíthetjük a helyes függvényséma alakulását, és ezzel együtt hogyan alapozhatjuk meg a 7. osztályban bevezetésre kerülő fogalmat. A kutatást akciókísérlet keretében végezzük, figyelembe véve a 4. fejezetben közölt összehasonlító pedagógiai kutatás ismerveit. Az akciókísérlet célja egy speciális, konkrét probléma közvetlen megoldása egy adott közegben, melynek eredményei hasznosak lehetnek a gyakorlatban másutt is. Általános jellemzője, hogy a kutató egyben a pedagógus is (Falus, 2004).

A hipotézisek igazolásához vagy elvetéséhez tájékozódó felmérést, két utótesztet és egy késleltetett tesztet (készség szintmérő tesztet) használunk (feltáró módszer), melyek értékelését kvantitatívan végezzük, a tanulók munkájának kvalitatív elemzésével. Mindezeket az egyes foglalkozásokon megfigyelésekkel (írásos feljegyzések, hangfelvételek, fényképek, a foglalkozásokon használt tanulói „Móka” füzet) szerzett tapasztalatokkal egészítetünk ki (feldolgozó módszer).

5.1. KUTATÁSI KÉRDÉSEK ÉS HIPOTÉZISEK

K3.1. *Hozzájárul-e a függvényfogalom alkotórészeinek jobb megismeréséhez a függvényfogalom különböző forrásainak (függvénygép, valós életből vett folyamat) az ukrainai 6. osztályos matematika tananyag egyes témaköreibe történő beépítése?*

K3.2. *Hogyan segítik az együtváltozó mennyiségek fogalmának alakítását a függvény forrásai és a különböző reprezentációi (verbális, táblázat, képlet, grafikon)?*

K3.3. *Fejleszthetők-e a függvény alkotórészeinek és különböző reprezentációinak 6. osztályban történő megismertetésével a 6. osztályos ukrainai tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességei?*

H3.1. A függvényfogalom forrásainak a 6. osztályos tananyagba történő beépítése hozzájárul a függvényfogalom alkotórészeinek megismeréséhez.

H3.2. Az együtváltozó mennyiségek fogalmának alakítását a források mellett ebben az életkorban jól szolgálja a függvény különböző reprezentációinak megismerése is.

H3.3. A függvényfogalom alkotórészeinek és különböző reprezentációinak 6. osztályban történő megismertetésével fejlődnek a szabálykövető és szabályfelismerő képességek is.

5.2. A KUTATÁS FELÉPÍTÉSE ÉS MÓDSZEREI

A fejlesztő programot az ukrainai magyar tannyelvű, kárpátaljai Nagydobronyi Középiskola egyik 6. osztályában végeztük 2015 telén és 2016 tavaszán. A tanár jelen dolgozat szerzője volt. A tananyag meghatározásánál a korábban bemutatott matematika kerettantervben lefektetett ismeretek (az újabb kerettantervek a függvényfogalom előkészítése szempontjából nem térnek el a 2.2. és 2.3. Táblázatban közöltektől) és fejlesztési követelmények a mérvadók. A tanítási gyakorlatban a már ismertetett 6. osztályos tankönyv mellett és egy újabb kiadású tankönyvet¹⁰ is használtunk. Ezek azok a tankönyvek, melyek eleget tesznek a kerettantervben lefektetett követelményeknek és magyar nyelvre is le vannak fordítva. Az újabb kiadású tankönyv részletes elemzésétől most eltekintünk, mivel annak szerkezete és a benne található feladatok a függvényfogalom kialakítása szempontjából nem térnek el a korábban elemzett tankönyvtől.

A matematika tanórák keretén belül, összesen 11, a tanórát teljesen vagy részben igénybe vevő foglalkozásokat terveztünk. Szem előtt tartottuk, hogy ezeket a foglalkozásokat úgy illesszük be az aktuális tanítási folyamatba, hogy a tanmenetet ne kelljen módosítani.

A fejlesztő programot két részben, a következő tervnek megfelelően valósítottuk meg:

	Fejlesztő stratégia, módszer	Rövid tartalmi leírás
Tájékozódó felmérés (2015. november 17.)		
Fejlesztő program 1. része (2015. november 23 - december 7.) Tanterv szerinti témakör: Arány, aránypár (a foglalkozások a tanórák csak egy részét töltötték ki)		
1.	Elemző képesség, relációs szókincs fejlesztése	Elempárok alkotása manuális tevékenységekkel
2.	Együttváltozó mennyiségek fogalmának alakítása, kapcsolatfelismerő képesség fejlesztése és különböző módon való lejegyzése	Együttváltozó mennyiségek fogalmának bevezetése függvénygép alkalmazásával
3.	Szabálykövető képesség, reprezentációs formák közötti átjárás képességének fejlesztése	Kifejezések helyettesítési értékeinek meghatározása
4.-5.	Együttváltozó mennyiségek, a közöttük lévő kapcsolat felismerésének fejlesztése	Szöveges feladatokban rejtőző együttváltozó mennyiségek felismerése, reprezentálása táblázattal, képlettel
6.	„Kétirányú” gondolkodás fejlesztése	Szituációk és azok általános megoldását leíró algebrai kifejezések összekapcsolása
Utóteszt (2016. január 19.)		

¹⁰ N. A. Taraszenkova, I.M. Bohaterjova, O.M. Kolomijec, Z.O. Szerdjuk. *Matematika: tankönyv 6. osztály számára*. Kijev: Oszvita, 2014.

Fejlesztő program 2. része (2016. április 25. – május 4.) Tanterv szerinti témakör: Grafikonok (a foglalkozások a teljes tanórát kitöltötték)		
7.	Megfigyelőképesség fejlesztése, eligazodás a mindennapi élet grafikonjain	Grafikonok bevezetése. Adatok leolvasása a grafikonról
8.	Együttváltozó mennyiségek jegyzése. Reprezentációk közötti átjárás képességének fejlesztése	Szituációhoz előre elkészített táblázat alapján grafikon szerkesztése, grafikon alapján táblázat kitöltése
9.	Kapcsolat felismerő képesség fejlesztése és reprezentálása játékos eszközökkel	Szituációk eljátszása az együttváltozó mennyiségek táblázatos és grafikus ábrázolásának előkészítéséhez
10.	Tapasztalati függvények alkotása, azok reprezentálása és összekapcsolása a szituációval	Valós életből vett szituációk különböző reprezentálása (diszkrét eset)
11.	Tapasztalati függvények alkotása, azok reprezentálása és összekapcsolása a szituációval	Valós életből vett szituációk különböző reprezentálása (folytonos eset)
Utóteszt (2016. május 11.)		
Késleltetett teszt (2016. május 23.)		

5.1. Táblázat: A függvényfogalom előkészítését célzó fejlesztő program

Az első 6 foglalkozáson az órák fennmaradó részeiben a tanmenet szerinti témákkal foglalkoztunk, összekapcsolva azokat az óra elejei foglalkozásokkal. A fejlesztő program 1. részében a tanulóknak összesen 9 matematika órájuk volt (hetente 4 óra). Tehát 3 olyan óra volt, melyekre a fejlesztő programnak megfelelő foglalkozást nem terveztünk. Minthogy 2016 tavaszán végzett foglalkozások olyan témakörhöz kapcsolódtak, ami az ukrainai 5-6. osztályos matematika tanterv olyan tananyaga, melynek fókuszában a függvényfogalom előkészítése áll, így az erre az időszakra tervezett foglalkozások teljes egészében kitöltötték a tanórákat.

Tájékoztató felmérés és utóteszt

Mivel a fejlesztő programot olyan képességek fejlesztését és olyan fogalom alakítását célozta meg, melyekre az ukrainai 5-6. osztályos matematika kerettanterv csak csekély hangsúlyt fektet, így a tájékoztató felmérés célja az volt, hogy megvizsgáljuk, jelentkeznek-e hiányosságok a foglalkozások során előtérbe kerülő matematikai ismeretekben. Az így szerzett tapasztalatok később segítségül szolgáltak a foglalkozások feladatainak megoldása során tapasztalt problémák okainak feltárásában is.

A két témakörön belül megvalósult foglalkozásokat záró *utóteszt* és *késleltetett teszt* céljai a fejlesztő program hatékonyságának vizsgálata volt. A tananyag elsajátításának minőségét a foglalkozások feladataihoz hasonlókkal vizsgáltuk.

A tanulók munkájának megfigyelése

A foglalkozásokon a gyerekek egyedül vagy tanári vezetéssel dolgoztak. Az individuális munkát folyamatosan figyeltük: minden foglalkozásról jegyzőkönyv, esetenként hangfelvételek, fényképek készültek. A fontosabb „momentumokat” írásban is rögzítettük.

A fejlesztő program első 6 foglalkozásán a gyerekek a matematika munkafüzetük helyett, egy direkt, a fejlesztő programra bevezetett külön füzetben dolgoztak (megjegyzés: a gyerekek ennek a füzetnek a „Mókafüzet” nevet adták). Az órákra feladatlapokat állítottunk össze és osztottunk ki minden tanulónak, amit vagy előre beragasztottunk a „Móka” füzetekbe, vagy az óra folyamán a tanulók tették meg ezt.

Az egyes órákra kitűzött feladatokat a tanulók életkorának, matematikai tudásának és a kutatás céljának megfelelően állítottuk össze. Az órákon a feladatok a spirálitás elvének megfelelően egymásra épültek, szem előtt tartva a célt, hogy a tanulók össze tudják kapcsolni az egyes foglalkozásokon elhangzottakat.

Minden óra után a füzeteket beszedtük, így a hangfelvételekkel, jegyzetekkel együtt külön-külön elemezni tudtuk a tanulói munkákat. Ily módon folyamatos rálátást kaptunk a gyerekek fejlődésére.

A kísérleti osztály jellemzése

Az osztály létszáma 25 fő (11-12 éves gyerekek). A matematikát a kerettantervnek megfelelően heti 4 órában tanulták. A gyerekek az órákon a dolgozatban már említett tankönyveken kívül, magyar nyelvre lefordított feladatgyűjtemények hiányában a tanár által egyénileg összeállított feladatlapokon dolgoztak.

A fejlesztő program idejére a tanulók már megismerkedtek a közös és tízes törtekkel, pozitív és negatív számokkal, elsajátították az azokkal végezhető műveleteket, valamint a terület és kerület fogalmakat. Olyan szöveges feladatokkal, melyek konkrét adatokat tartalmaznak és egy megoldásuk van, már első osztálytól kezdve találkoztak a gyerekek. A szöveges feladatok egyenlettel történő megoldása sem volt ismeretlen terület számukra.

A gyerekek általános matematika tudása közepesnek mondható. A 25 gyerek közül egy fő csak 6. osztálytól jár ebbe az iskolába és ukrán anyanyelvű, magyarul még nem nagyon beszél. 4-en hátrányos helyzetű családból származnak, gyakran hiányoznak az iskolából. Így az ő teljesítményüket az osztálynak a fejlesztő program során nyújtott teljesítményének minősítésénél nem vesszük figyelembe (tehát 20 tanulóval számolunk a foglalkozások elemzésénél). Megemlíjtük még, hogy a 20 tanuló közül 1 fő csak 5. osztálytól jár ebbe az iskolába, magyar anyanyelvű, de azelőtt ukrán iskolákban tanult. Ebből kifolyólag neki a magyar nyelven való gondolkodás nehéz és matematikából főleg a szöveges feladatok értelmezése jelent számára nehézséget. A fejlesztő program egyes foglalkozásainak bemutatása során a tanulókra a monogramjuk szerint fogunk hivatkozni.

Elsőként a fejlesztő programhoz kapcsolódó előzetes felmérésről, a tanulói válaszok elemzéséről szólnunk. Második lépésként a fejlesztő program egyes szakaszaiban végzett foglalkozások részletes bemutatásával, a tapasztalatok ismertetésével foglalkozunk, majd az egyes szakaszokat záró utótesztet, végül a készletetett teszt eredményeit mutatjuk be.

5.3. TÁJÉKOZÓDÓ FELMÉRÉS

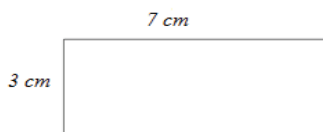
A fejlesztő program megkezdése előtt, 2015. november 17-én 30 perces felmérést írtunk a tanulókkal. A felmérés tájékoztató jellegű volt. Fókuszában olyan matematikai ismeretek tanulói birtoklásának vizsgálata állt, melyek a foglalkozások során fontos jelentőséggel bírtak: a téglalap és négyzet területének meghatározása (1-2. feladat), betűkifejezések kezelése (3. feladat), egész törtrészének meghatározása (4. feladat), egy- (5. feladat), illetve kétműveletes (6-7. feladat) szöveges feladatok megoldása. A felmérés 7 feladatból állt (lásd Mellékletek, 11-12. old.).

5.3.1. A felmérés feladatainak és tapasztalatainak bemutatása

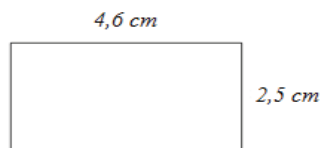
1. feladat

Határozd meg a téglalapok területét!

A)



B)



A felmérésben résztvevő 20 tanuló közül az 1. feladat A) kérdésére 18 adott helyes választ. A 2 helytelen választ adó tanuló közül az egyik a téglalap oldalait összeszorozta és a szorzatot még duplázta („ $S = 7 \cdot 3 \cdot 2 = 42 \text{ (cm}^2\text{)}$ ”). A másik gyerek pedig a kerületet határozta meg. A feladat B) részére 16 helyes válasz érkezett. Ketten ugyanazt a hibát követték el, mint az A) résznél, 2 tanuló a tizedes törtek szorzásánál hibázott.

2. feladat

A feladatban egy előre megrajzolt négyzet oldalát önállóan megmérve kellett annak területét meghatározni, majd egy olyan téglalapot rajzolni, melynek területe az adott négyzet területének a fele. A négyzet területét 15-en helyesen határozták meg. 3-an összeszorozták a 4 oldalt, 1 tanuló csak a négyzet oldalának hosszát határozta meg, 1 pedig a következőképpen számolt: „ $S = 4 \cdot 2 = 8 \text{ (cm}^2\text{)}$ ”.

A feladat második részére mindössze 10 helyes válasz érkezett. Az az 1 tanuló, aki csak megmérte a négyzet oldalát, de annak területét nem számolta ki, megrajzolta azt a téglalapot, melynek területe fele ezen négyzet területének. 1 tanuló a feladat első részében helyesen írta fel a négyzet területének számítását, de az eredménye 8 cm^2 volt, majd egy 4×1 -es téglalapot rajzolt. Tehát nála csak számítási hiba jelentkezett. 1 gyerek megoldási menetében tükröződött az a lépés, hogy megpróbálta képzeletben félbehajítani a négyzetet, csak ekkor az oldalméret felének meghatározásánál hibázott, és 3×4 -es téglalapot rajzolt a 2×4 -es helyett. 2-en nem a négyzet területét felezték meg, hanem annak oldalméretét, így egy 2×2 -es négyzetet rajzoltak. 4 gyerek tetszőleges téglalapot rajzolt, 1 pedig teljesen kihagyta a feladatnak ezt a részét.

3. feladat

Ismeretes, hogy $s = 50 \cdot t$.

a) Számítsd ki az s értékét, ha $t=4$.

b) Ha tudjuk, hogy $s=500$, akkor mennyi a t értéke?

Az a) kérdésre 19 helyes válasz érkezett, 1 tanuló nem mutatott semmilyen gondolatot.

A b) kérdésre, ami visszafelé gondolkodást igényelt, mindössze 7 jó válasz jött. A többiek megoldásában érezhető a sejtés, hogy osztási művelettel tudjuk meghatározni a t értékét, de a többség az 500-at elosztotta az a) részben megadott t értékével, azaz 4-gyel („ $500:4=125$ ”). Más válaszok: „ $S=500:t$ ”. Valószínűsíthető, hogy a kifejezés értelmezésével akadtak nehézségei a gyerekeknek. A visszafelé gondolkodás nehézségét többször tapasztaljuk a matematika órákon.

4. feladat

Határozd meg a) 12-nek az $\frac{1}{6} - \hat{a}t$ b) 6,4-nek az $\frac{1}{8} - \hat{a}t$ c) 2-nek az $\frac{1}{4} - \hat{e}t$

A feladat a) kérdésére 13-an, a b) részre 12-en, a c) részre pedig 13-an adtak helyes választ. 3 gyerek bár helyesen kezdte el megoldani a feladatokat, a törttel való szorzást nem tudta elvégezni. 1 további tanulónak pedig a tizedes tört közönséges törttel való szorzása okozott problémát. 2 tanuló nem a szám tört részét határozta meg, hanem a számot próbálta meghatározni tört része alapján. 2-en semmilyen megoldást nem produkáltak.

5. feladat

1 kg narancs ára 5 hrvinya. Mennyibe kerül 8 kg narancs? Hány kg narancsot vásárolt Peti, ha a pénztárnál 75 hrvinyát fizetett?

A feladat első kérdésére 18 helyes válasz érkezett. Ez egy egyszerű, egy művelettel megoldható feladat, ahol a szöveg közvetlenül utal a szükséges műveletre. 1 tanuló, csakúgy, mint a 4. feladatnál, itt sem próbálkozott. Amint azt az osztály bemutatásánál jeleztük, 1 tanulónak (MM) a szöveges feladatok értelmezésével, nyelvi okokból kifolyólag, komoly gondjai akadnak, ami ezen feladat esetében is megmutatkozott.

A második kérdést, mely szintén egy művelettel megoldható, de fordított gondolkodást igénylő volt, már csak 14-en válaszolták meg helyesen. 3-an kivonási művelettel az első kérdés eredményeire hagyatkozva próbáltak választ adni („ $75-40=35$ (kg)”). 1 kisfiú (KL) (megjegyzem jó felfogású, a szöveges feladatok megoldása során nagyon érdekes, mégis helyes gondolkodást mutató gyerek, de nagyon szétszórt és kapkodó) becslésekkel próbált eljutni a megoldásig: ha 8 kg 40 hrvnyába kerül, akkor még hány kg-t kell vásárolni, hogy 75 hrvnyába kerüljön a vásárlás. Igaz, egy kilogrammal kevesebbet számolt („ $8+6=14$ (kg)”).

6. feladat

Egy csapból a medencében másodpercenként 5 liter víz folyik. Mennyi víz lesz a medencében 2 másodperc múlva, ha a csap megnyitásakor a medencében 100 liter víz volt.

A feladat egy megoldást ad, kétműveletes, az előző feladathoz képest összetettebb szövegezésű. 11 gyerek adott helyes választ. 2-en figyelmen kívül hagyták, hogy a csap

megnyitásakor a medencében már 100 liter víz volt, 1 gyerek (MA) semmit nem írt. A többiek megoldásai nem tükröztek logikus feladatmegoldási menetet: kiragadták a számokat a kontextusból és aritmetikai műveleteket hajtottak végre rajtuk. Például MN az 5.1. ábrán látható módon számolt.

7. feladat

Zsuzsa tulipáncsokrot vásárolt az anyukájának. A csokorban 3 szál tulipán volt, a csomagolás 5 hrivnyába került, és így a csokorért 35 hrivnyát fizetett. Mennyibe került egy szál tulipán?

A feladat szintén egymegoldású, kétműveletes, de visszafelé gondolkodást igényel: a kimenő (output) adat ismeretében kell meghatározni a bemenő (input) adatot, míg az előző szöveges feladatoknál az „input” adott volt. 12 helyes megoldás érkezett. 1 tanuló (MA), aki már az előző két feladatnál sem próbálkozott, ezt a feladatot is kihagyta. 1 gyerek a 6. feladatot nem, ezt viszont helyesen oldotta meg. Valószínűleg a feladat szerkezete és annak a gyerek számára elképzelhetőbb mivolta segítette őt a helyes megoldásban. A többiek a teljes csokor árát elosztották a csomagolás árával, majd azt megszorozták 3-mal (5.2. ábra) vagy a 3-at szorozták a csomagolás árával és vonták ki a 35-ből.

$$\begin{array}{l} 1) 100 : 5 = 20 \text{ (l.)} \\ 2) 20 : 2 = 10 \text{ (l.)} \end{array}$$

5.1. ábra

$$\begin{array}{l} 1) 35 : 5 = 7 \\ 2) 3 : 7 = 21 \end{array}$$

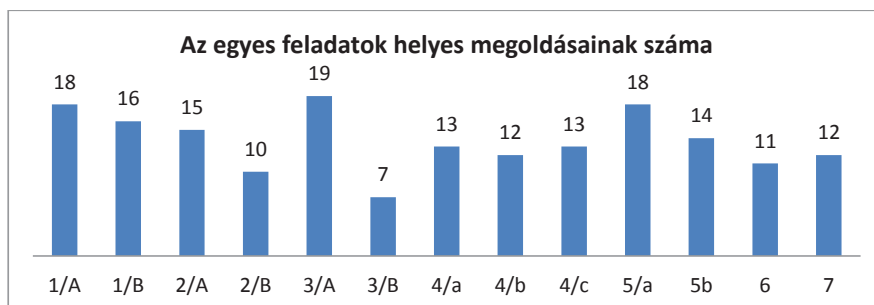
Fellet: 10 hr került egy tulipánra

5.2. ábra

Megjegyzés: A feladatlap kitöltését követő óra elején közösen is megoldottuk a feladatokat, az egyénileg vétett hibákat megbeszéltük.

5.3.2. A felmérés eredményeinek összegzés

Az alábbi diagramon (5.3. ábra) összegeztük az egyes feladatokra érkező helyes megoldások számát.



5.3. ábra

A felmérésben résztvevő 20 tanuló közül RD, SzA, BG, KG mind a 7 feladatot helyesen oldotta meg. HV, BK, HÁ, RE és HP a 3/B feladatban ejtettek hibát, azaz a szabály

inverzének alkalmazásában, ND-nek pedig a téglalap konstruálása jelentett nehézséget (2/B). BM, BB, MN a kitűzött 13 kérdés legalább 6 kérdésre helyes választ adott. A legalacsonyabb teljesítményt ÓDzs, MA, SzL, MM, MB és KV nyújtotta. Ők a kérdések kevesebb, mint a felére adtak helyes választ.

Láthatólag utasítás alapján meghatározott területű téglalap konstruálására kitűzött 2. feladat és a képletben szereplő (független)változó értékének meghatározása (3/B feladat) jelentette a legnagyobb nehézségeket, azaz a visszafelé gondolkodást megcélzó feladatok. A közönséges és tizedes törtekkel való számítások terén is voltak olyanok, akiknek még nehézségei adódtak. A szöveges feladatok megoldási mutatói is alacsonyok a többi feladathoz képest. Ezen tapasztalatokat figyelembe véve a fejlesztő program megtervezésénél igyekeztünk a függvényfogalom forrását képező valós életből vett folyamatot oly módon konstruálni, hogy azok a gyerekek különböző élethelyzeteivel kapcsolatban legyenek, ezzel is segítve a szituációba történő „beleélést”.

5.4. A FEJLESZTŐ PROGRAM ELSŐ RÉSZÉNEK BEMUTATÁSA

A fejlesztő programunk *első része* (2015. november 23. – december 7.) az *Arány, aránypár* c. témakör tanításának időszakára esett. A korábban bemutatott tervezetben látszik (lásd 4.3. fejezet), hogy az együttlévő mennyiségek reprezentációs módjai közül a táblázat, a szöveges (verbális) és a képlet forma kap szerepet. A programban résztvevő tanulók most találkoztak először a függvény egyik forrásával, a *függvénygéppel*, és az együttlévő mennyiségek táblázatos megjelenítési formája is újnak mondható.

A fejlesztő program 1-6. foglalkozásával, majd a további foglalkozásokkal is a K3. kérdésekre kerestük a választ. Célunk a helyes függvényséma kialakulásának erősítése, figyelembe véve a 4. fejezetben leírt, 6. osztályos UA és HU tanulók függvénysémájának ismérveit. Az ukrainai tanterv ugyanis (lásd 2.3. Táblázat), 5. osztályban előírja az ún. betűkifejezések, 6. osztályban a grafikonok megismerését, és erre építi 7. osztályban a függvényfogalom bevezetését (ellentétben a magyarországgal). Korábbi felméréseink tapasztalatai és az elméleti háttérben lefektetett megállapítások alapján elmondható, hogy nem kellően hatékony csupán ezekre támaszkodva építeni fel a függvény fogalmát 7. évfolyamon.

5.4.1. Elempárok alkotása manuális tevékenységekkel

Az 1. foglalkozás céljaul tűztük ki, hogy a tanulók a Bruner-féle reprezentációs síkok közül az enaktív síkon jussanak el két halmaz elemei közötti függvnyszerű kapcsolat felismeréséhez (elemek párosítása tárgyi tevékenységgel). A manipulatív tevékenységek tanítási-tanulási folyamatban való bekapcsolásának fontosságáról a dolgozat korábbi fejezetében már szöltünk (1.1.4. fejezet). Tovább fűzi érvelésünket az efféle tevékenységek mellett az is, hogy a 11-14 éves korosztályhoz tartozó tanulók (az osztály tanulói is) már képesek egyszerű formális gondolkodási műveletekre, esetleg a tapasztalattól való elszakadásra, de a tárgyi tevékenység képzetek még szükségesek az absztrakcióhoz. Ennélfogva úgy véljük, hogy a

függvényfogalom későbbi absztrakciójához célszerű a fogalom előkészítési szakaszában, annak egyik alkotórészének, a kapcsolatok világának alapozását az enaktív síkon kezdenünk.

Az 1. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Időtartam: 35 perc;

Megfigyelési mód: írásos feljegyzések, fényképek készítése, a gyerekek munkájának összegyűjtése;

Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból): 20.

A foglalkozás elején a tanulók kézhez kapták a párosítani kívánt elemeket tartalmazó borítékokat. Az alaphalmaz és a képhalmaz között különbséget tettünk oly módon, hogy eltérő színnel szerepeltek a két halmaz elemei. Minthogy a függvényfogalmat különböző típusú halmazok elemei közötti hozzárendelésekkel alapozhatjuk meg (Herendiné Kónya, 2013), így az 1. borítékban zöld színű négyzetek és piros színű téglalapok voltak, melyek területei a négyzetek területeinek felével voltak egyenlők („dolog-dolog” típusú hozzárendelés). Egy téglalapnak nem volt párja. A 2. borítékban 4 darab (rózsaszín) téglalap és kék kártyákra írt számok (18;18;18,5;24;20;80) voltak, melyek egy-egy téglalap területét határozták meg („dolog-szám” típusú hozzárendelés). 2 olyan szám is szerepelt, melyekhez nem tartozott egyetlen téglalap sem. A 3. borítékban egyszínű kártyákra feketével, illetve pirossal írt számok voltak. Utóbbiak a feketével írottak negyedei („szám-szám” típusú hozzárendelés).

A borítékokat egymás után adtuk oda a gyerekeknek. Minden boríték kiosztásakor megadtuk az utasítást: párosítsák a téglalapokat a négyzetekkel, a téglalapokat a számokkal, a fekete számokat a piros számokkal valamely szabály alapján, úgy, hogy minden alkotott párra igaz legyen ez a szabály. A tanulókat arra kértük, hogy miután párosították az egyes borítékokban lévő elemeket, fogalmazzák meg szavakkal azt a szabályt, ami alapján elkészítették az elempárokat. Az elkészült párosításokat beragasztották és a felismert szabályt beírták a „Móka” füzetükbe. Közben figyeltük a gyerekek munkáját és a leírt szabályokban talált „érdekessegek” alapján kértük egyes gyerekektől, hogy olvassák fel azokat. Minden feladat elkészülte után az elhangzott szabályokat közös megbeszélés követte, kitérve a leírtakban talált hiányosságokra, pontatlanságokra és hogy azok valóban ráillenek-e az elkészített párokra.

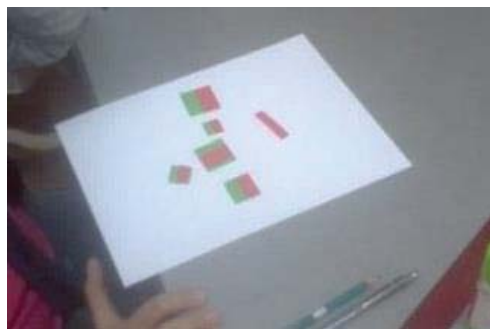
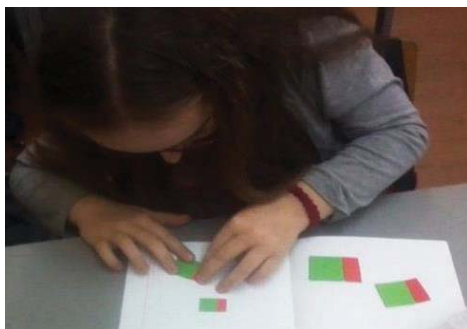
1. feladat (dolog-dolog hozzárendelés)

Az 1. feladattal a tanulók 3 perc alatt elkészültek. 1 tanuló (KG) a négyzetre rátéve a téglalapot vette észre, hogy a négyzet területének a fele a hozzá tartozó téglalap területét adja, és a megfogalmazott szabálya (bár kissé pontatlanul) is ezt tükrözte: „*A zöldnek a piros a fele*” (5.4. ábra).



5.4. ábra

A többiek a négyzet mellé rakták azt a téglalapot, melynek egyik oldalhossza megegyezett a négyzet oldalának hosszával (5.5. ábra). A szabály megfogalmazásában ugyan akadtak pontatlanságok („*Ugyanaz az oldala a téglalapnak, mint a négyzetnek*”; „*Olyan szabály alapján párosítottam, hogy a négyzet és a téglalap oldali egyformák legyenek*”; „*Én úgy párosítottam, hogy egyforma hosszúak a téglalapok és a négyzetek átmérője*”), de azokat a megbeszélés során a gyerekek javították. Összességében mindegyik tanuló sajátos módon megfogalmazta az általa felismert szabályt, mely tükrözte a munkáját is.

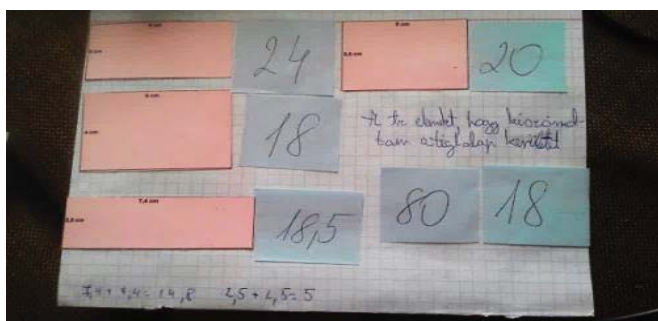


5.5. ábra

Elmondásuk szerint ez nagyon könnyű feladat volt és tetszett nekik, hogy manuálisan kellett dolgozni. Annak ellenére, hogy sajnos ritkán dolgoztak az órákon ily módon, nem idegenkedtek a feladattól, mindenki lelkes volt.

2. feladat (dolog-szám hozzárendelés)

A 2. feladat sem okozott különösebb problémát a tanulóknak, gyorsan elkészítették az elempárokat. Az órán jelen lévő, vizsgálatunkban is résztvevő 20 tanuló közül 3 tanuló (köztük volt 1 olyan tanuló (ÓDzs), aki a tájékozódó felmérés során hibásan számolta ki a téglalap területét) olyan szabályt adott meg, mely nem támasztotta alá a két halmaz elemei közötti kapcsolatteremtést. 2 tanuló szabálya a következő volt: „*kiszámoltam a téglalapok kerületét és így párosítottam*”. Ők valószínűleg sejtették, hogy a számok az egyes téglalapok kerületei vagy területei lehetnek, de nem bizonyosodtak meg róla pontosan. Egyikőjük (KL) láthatóan tudta, hogyan kell kiszámolni a téglalap kerületét, de nem végzett pontos számításokat, csak sejtésekkel dolgozott (5.6. ábra) (ő a tájékozódó felmérés során az 5. feladatot is becsléssel oldotta meg).



5.6. ábra

Figyelve a munkákat észrevettük, hogy 2 tanuló (BB és BK) először megpróbálta kiszámolni a téglalapok területét; 2 párt ezen gondolatmenetet alapján talált, de mivel így tovább nem tudta folytatni a párosítást, nem talált mindegyik téglalaphoz párt, módosított, és kiszámolta azok területeit. 17 tanuló megfogalmazott szabálya tükrözte a párosítást is. Például:

BK: „Kiszámítottam a téglalap területét”

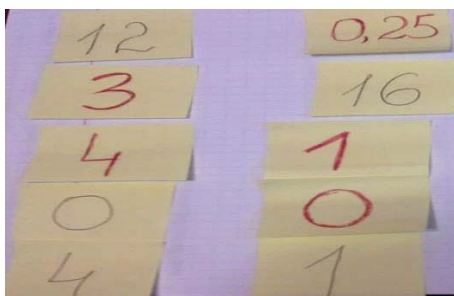
SzA: „Terület szerint párosítottam”

MN: „Megszoroztuk a szélességet a hosszúsággal és így kaptuk meg az eredményt.”

A gyerekek munkáját figyelve azt is észrevettük, hogy a 80-as számot már az elején oldalra tették, azzal tovább nem is foglalkoztak. A közös megbeszélés során kiderült, hogy mindezt azért tették „mert az túl nagy szám volt a téglalapok méreteihez képest”. Aztán néhány gyerek, köztük a fentebb említettek, felolvasták az általuk megfogalmazott szabályokat, a pontatlanságokat javítottuk, a 3 hibás megoldás (KL, MM, ÓDzs) okát megmagyaráztuk.

3. feladat (szám-szám hozzárendelés)

A számok párosítása (3. feladat) okozta a legnagyobb nehézséget. Ebben az esetben a színek ellenére is nehezen tudták elkülöníteni az alaphalmazt és a képhalmazt, 2 tanuló még azután sem, hogy hangsúlyoztuk: „a fekete színű számokhoz keressünk párt a piros színű számok közül egy szabály szerint, mely minden számpárra igaz lesz” (5.7 ábra).



5.7. ábra

Segítséget adtunk nekik azáltal, hogy tanácsoltuk, szelektálják a számokat, egyik oszlopba rendezzék a feketevel írt számokat, egy másikba a pirossal írtakat, majd próbálják úgy rendezgetni a számokat, hogy olyan szabályhoz jussanak, ami minden párra igaz lesz.

2 tanuló (KG és BK) felismerte, hogy egyik halmazban ($\{16;12;4;1;0\}$) a másik halmaz elemeinek ($\{4;3;1;0,25;0\}$) a negyedei szerepelnek („*A fekete számokat négyvel osztjuk és megkapjuk a párját*”). MB párosította az egyforma számokat, a többihez pedig valószínűleg csak véletlenszerűen illesztett párt („*egyformát tettem az egyformához*”). A többiek (17) különböző párosításokkal, de hasonló szabály alapján kapcsolták össze a két halmaz elemeit: „*A fekete számok oszthatók a pirossal*”; „*Az egyik számot oszthatom a másikkal*”. Az, hogy a gyerekek az oszthatóság felé orientálódtak nagy valószínűséggel annak tulajdonítható, hogy az Oszthatóság c. témakörrel nem sokkal a kísérleti tanítást megelőzően foglalkoztunk. A megbeszélés során HP, miután felolvasta az általa megfogalmazott szabályt, kibővítette azt, és szóban már sokkal pontosabban mondta el: „*En az osztás alapján párosítottam... ööö... vagyis mindegyik fekete mellé a negyedét tettem a pirosakból*”.

Tanulságok

A három, különböző típusú hozzárendelések alkotását célzó feladattal elértük a foglalkozás célját: a gyerekek tárgyi tevékenységgel megtapasztalhatták, mit jelent elempárokat alkotni oly módon, hogy mindegyik párra egy és ugyanaz a párosítási szabály legyen igaz. Arra törekedtünk, hogy a tanulók a függvény egyik alkotóeleméhez, a kapcsolatokhoz kötődően, manuális tevékenységekkel szerezzenek tapasztalatokat, alkossanak informális táblázatokat, verbális szabályokat. Az enaktív síkon kezdtük az együttváltozó mennyiségek fogalmának tárgyasítását, a relációs szókincs és ezzel együtt a szabályfelismerés képességének fejlesztését.

Megjegyzés: A következő foglalkozást megelőző tanóra az arány fogalmának elsajátítására irányult. A gyakorlati feladatok közé „beékelünk” egy olyan feladatot, mely elempárok alkotását tűzte ki megadott szabály alapján: az első oszlop számaihoz úgy kellett párt találni a második oszlop számai közül, hogy számok aránya 3 legyen (a táblára két oszlopban a párosítandó számokat tartalmazó cetliket ragasztottuk). Annak jelzésére, hogy melyik számhoz melyiket kapcsoltuk (a későbbiekben a bemenő és kimenő adatokkal való munka során azok közötti különbségtétel fontossága miatt) nyíllal jelöltük (pl. 15→5). A párosítás elvégzését követően beszéltünk arról, hogy ezzel az egyik oszlop számaihoz hozzárendeltünk a másik oszlopból számokat meghatározott szabály alapján. Ekkor jött KG-től a következő megállapítás: „...*megvan! Kapcsolatot teremtettünk a két oszlopban lévő számok között*”. Nagyon örültünk, hogy az általa jól ismert szót bele tudta „ágyazni” ebbe a környezetbe is. A többieknek nagyon tetszett KG mondata: „*Ez nagyon jó. Tényleg, kapcsolatot teremtettünk...*”

5.4.2. Együttváltozó mennyiségek fogalmának bevezetése függvénygép alkalmazásával

A 2. foglalkozás célja az volt, hogy a tanulók megismerkedjenek együttváltozó mennyiségekkel és azok reprezentációs formái közül a táblázat, képlet formákkal. Ezzel együtt irányadó volt a függvény alkotórészeinek (változók, kapcsolatok, szabály) megismertetése a fogalom egyik forrásának, a függvénygépnek a segítségével.

A 2. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Időtartam: 25-27 perc;

Megfigyelési mód: írásos feljegyzések, hangfelvétel, a gyerekek munkájának összegyűjtése.

Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból): 20.

Konkrét gépet készítettünk egy papírdobozból (5.8. ábra). A gép segítségével a tanulók megtapasztalhatták azt, hogyan működik: a betáplált dologgal (input) a gépünk valamit csinál, majd kidob egy másik dolgot (output). A függvénygép modelljének bemutatása továbbá abban is segített, hogy a tanulók megbizonyosodjanak arról, hogy a gépünk minden egyes „input” esetében ugyanúgy működik. Ez nagyon fontos momentum a gép működési elvének megértésében, mivel a korábbi felmérésekben vizsgált 6. osztályos ukrainai tanulók között többen voltak, akik egy táblázaton belül különböző szabályt alkalmaztak annak kitöltésére (4.3., 4.4. fejezet).



5.8. ábra

A gépbe különböző tárgyakat tápláltunk (kupak, kocka, stb.), majd a gép megkészserezve a bedobott tárgyak számát a másik nyíláson kidobta az „output”-ot (a doboznak volt egy hátsó nyílása, ahol a megfelelő mennyiségű tárgyat a tanár ki tudta választani és a másik nyíláson kiadni).

A tanulókat arra kértük, tetszőleges módon jegyezzék le, hogy mit táplálunk be és mit dob ki a gép. Így a tanulók füzetükben lényegében egy kétoszlopos informális táblázatot alkottak (5.9. ábra).

bedobott 1-et,	kidobott 2 pálcikát
bedobott 3-at,	kidobott 6 pálcikát
bedobott 1-et,	kidobott 2 négyzetet
bedobott 4-et,	kidobott 8 kapesót
bedobott 10-kop,	kidobott 20 kopeket
megduplázza a bedobott dolgokat	

5.9. ábra

A gép működéséről a gyerekek a következőket mondták:

RD: „Megduplázza, amit bedobunk”;

KL: „Megtöbbszörözi”

Tanár: „Többszörözi? Hányszorozza?”

KL: „Kétszerezi”

Tanár: „Ez fontos, mivel az, hogy többszörözi, jelentheti azt is, hogy 10-szeresét adja ki a bedobott dolognak”

SzA: „Megszorozza”

Tanár: „Mit szoroz és mennyivel?”

SzA: „Kettővel”

Tanár: „Mit mondhatunk el? Amit betáplálunk azt...”

Gyerekek: „...megszorozza kettővel”

SzA-tól jött olyan válasz is, hogy önmagával szorozza meg a bedobott dolgok darabszámát. Ő csak arra összepontosított ekkor, hogy ha 2 pálcikát dobunk be, akkor 4 darab pálcikát ad ki.

Tanár: „Igaz-e SzA állítása, hogy önmagával szorozza meg a bedobott dolgok darabszámát?”

Ellenőriztük állítását 4 darab pálcika esetén is. SzA ekkor már mondja is, hogy a 4 pálcikánál 8 pálcikát kellene, hogy kidobjon a gép. Közben HP is magyarázta SzA szabályának pontatlanságát: „Azt jelentené, ha önmagával szorozná, hogy 16 jönne ki.”

Táblázat alkotása

Annak diszkussziója után, hogy a betáplált tárgyak számokkal is helyettesíthetők, a gyerekeket arra kértük, hogy töltsék ki a gép működési szabálya alapján az 5.10. ábrán látható táblázat 1-6 sorát. (A táblázatot kinyomtatva minden gyerek megkapta, és felkerült a táblára is.) Fontos volt számunkra, hogy a gép működésének a megfordítását is végiggondolják (lásd a tájékoztató felmérés tapasztalatait), így a táblázatba a „betáplált” oszlop néhány celláját üresen hagytuk, remélve, hogy a „kidobott” adat alapján ki tudják tölteni azt. Miután ezt sikeresen megtették, a gép működési szabályának megfogalmazása következett a narratív formától fokozatosan haladva az algebrai kifejezésig. A következő sor első oszlopába írtuk, hogy *szám*, mellé

Betáplált	Kidobott
2	
8	
0	
	12
	7
81	
<i>szám</i>	<i>kétszer a szám</i>
<i>szám</i>	<i>szám·2</i>
<i>n</i>	<i>n·2</i>
<i>ч</i>	<i>ч·2</i>

5.10. ábra

kétszer a szám először betűvel, majd a „matematika nyelvén” is (KG megfogalmazása alapján: *szám·2*). Megkérdeztük őket: „... hogyan lehetne még rövidebben írni a *szám* szót, hiszen a matematikában mindent röviden próbálunk lejegyezni”. A „szám” szó angol és ukrán megfelelőinek („number és число”) rövidítésével bevezettük a bedobott számok jelölésére az *n* és *ч* betűket, melyek alapján folytattuk a táblázat kitöltését a megfelelő cellákba az *n·2* (ND másképpen is megfogalmazta: „vagy 2*n*”) és *ч·2* kifejezéseket írva. Az elempárok megnevezése és a közöttük lévő kapcsolat megfogalmazása is sikeresnek bizonyult.

Megbeszéltük azt is, hogy akkor milyen szabály alapján működne a gép, ha a jobb oldali oszlop jelentené a betáplált számokat, a bal pedig a kidobott számokat. A gyerekek egybehangzó válasza: „Akkor a betáplált számokat a gép elosztaná kettővel”. A szabályt így is megadtuk algebrai kifejezéssel („*n:2*”). SzA másképpen is leírta: „0,5*n*”. Végül a táblázatot vízszintesen is felrajzoltuk, vagyis most az együvváltozó mennyiségek egymás alatt helyezkedtek el.

Táblázat kitöltése, az elempárok közötti kapcsolat algebrai kifejezéssel történő lejegyzése

A foglalkozás végén a tanulók kaptak egy táblázatot, amit önállóan kellett kitölteniük egy felismert szabály alapján, leírni szavakkal és matematika nyelvén (algebrai kifejezéssel) is mit csinál az a gép, melynek működése az adott táblázatot eredményezte (5.11. ábra). A szabály megegyezett az előzővel, de az együttváltozó mennyiségek most függőlegesen helyezkedtek el, és a táblázatban nem jelöltük azt, hogy melyek a „betáplált” és „kidobott” számok. Ezzel arra törekedtünk, hogy a tanulók tudják értelmezni mindkét típusú táblázatot (függőleges és vízszintes) és így az összetartozó mennyiségek közötti kapcsolatra fókuszáljanak függetlenül azok elhelyezésétől. A változó fogalmának alakítását szolgálta, hogy ezúttal más betűvel (b) jelöltük, azért, hogy ne csak egy-két betű rögzüljön annak funkciójához.

3	8	5	2,3			b
6	16			2	0	

5.11. ábra

Az órán jelen lévő 20 gyerek közül 18 helyesen töltötte ki a táblázatot, a felismert szabályt szavakkal („ a betáplált szám $\cdot 2$, megkapjuk a kidobott számot, vagy fordítva, de akkor osztunk kettővel”) és matematika nyelvén is megfogalmazta („ $b \cdot 2$ ”). Ez arra enged következtetni, hogy ők megértették, hogy a gép kapcsolatot létesít a bemenő és kijövő értékek között és tudják alkalmazni a felismert szabály inverzét is, valamint a vízszintesen adott táblázatot is. 4-en közülük fontosnak tartotta jelezni, hogy a táblázat két halmaz elemei között teremt kapcsolatot, ők a táblázatot kibővítették egy oszloppal, vagy a táblázat egyes sorai elé írták, hogy azok elemei melyik halmazhoz tartoznak: betáplált számok (alaphalmaz) és kidobott számok (képhalmaz) (5.12. ábra).

Betáplált	3	8	5	2,3	1	0	b
Kidobott	6	16	10	4,6	2	0	$b \cdot 2$

5.12. ábra

Volt 2 olyan tanuló is, aki a táblázat második sorában lévő üres négyzeteket kitöltötte a felismert szabály szerint (10;4,6), ugyanakkor az első sor üres helyeire szintén ezt a szabályt és nem az inverzét alkalmazta (4;0). Nem vették figyelembe a hozzárendelés irányát. Bennük valószínűleg nem tudatosult a gépmodell működésének reverzibilitása vagy még nem kapcsolták azt össze a táblázatos reprezentációval.

5.4.3. Kifejezések helyettesítési értékeinek meghatározása

Célunk, hogy a függvényfogalom egyik forrásával, a függvénygéppel szabályok világában fejlesszük a szabályértelmezés és -követés képességeket, valamint az egyik reprezentációs formáról a másikra, nevezetesen szimbolikusról (algebrai kifejezésről) a táblázatos formára való áttérés képességét.

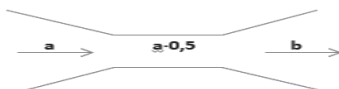
A 3. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Időtartam: 25 perc;

Megfigyelési mód: írásos feljegyzések, gyerekek munkájának összegyűjtése, hangfelvétel;

Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból): 16.

1. feladat: Egy gép a következő szabály szerint működik:



a) Fogalmazd meg a gép működési szabályát! (Mit csinál a gép?)

b) Mennyi a b értéke, ha 1) $a=1$; 2) $a=10$; 3) $a=0,5$?

c) Rendezd a kapott elem párokat táblázatba! d) Mennyi az a értéke, ha $b=14$?

A 2. foglalkozással ellentétben most a gépet fizikailag nem, hanem csak ábrával szemléltettük. A tanulóknak értelmezniük kellett a gép működését (szabályértelmezés), majd követve a szabályt az alaphalmaz és képhalmaz összetartozó elemeit táblázatba rendezni.

A tanulók a „Móka” füzetükbe előre beragasztott feladatlapon dolgoztak. Figyelve a gyerekek munkáját észrevettük, hogy néhányan az előző órán bemutatott gép működését fogalmazták meg („a gép dupláz”; „kétszerezi, amit bedobunk”). Ezért a leírt utasításhoz szükségesnek láttuk a következő tanári magyarázat hozzáfűzését: „a betáplált elemmel a gép valamit csinál, ezt a gép belsejében láthatjuk leírva a matematika nyelvén, majd kidobja a végeredményt, a b -t.” Ezután újra megnézték a „gépet” és javították a leírásukat.

RD minden kérdésre válaszolt, de nem fogalmazta meg a gép működési szabályát, melyet azzal indokolt, hogy „Én nem tudom megfogalmazni”. A kislány jó képességű, nagyon szereti a matematikát, de nehézséget jelent neki a saját gondolatának írásos formában való közvetítése. Próbáltuk ösztönözni, rávezetni.

Tanár: „Hogyan számoltad ki a b értékét, ha $a=1$?”

RD: „Megszoroztam 0,5-tel az a -t”

Tanár: „Akkor mit csinál a gép a bedobott számmal?”

Ezután már megfogalmazta a gép működési szabályát.

BG válaszában pontatlanságot véltünk felfedezni. A kislány a gép működési szabályára a következőt írta: „Megszorozza a bedobott számot”. Rávezető kérdést tettünk fel: „...azt írod, hogy megszorozza, de mennyivel? Ha csak azt írod, hogy megszorozza, akkor arra is gondolhatunk, hogy megszorozza például 10-zel. Így működik ez a gép?” BG ezután már pontosított leírásán.

Az órán lévő 16 tanuló közül 3 tanuló a korábban bemutatott gép működése alapján számolta ki a b értékeit és rendezte az elem párokat táblázatba. Valószínűleg a konkrét gép képe jelent meg az elméjükben. Ez arra enged következtetni, hogy ők még nem értették meg a gépmodell szerepét, gondolkodásuk megmaradt az enaktív reprezentációs síkon. Úgy véljük, hogy nekik egyszeri alkalommal végzett ilyen tevékenység nem volt elegendő ahhoz, hogy a modellből absztraháljanak. Számukra több ilyen foglalkozás szükségeltetik, mellyel a szabályok alkotórésznek a mélyebb megértését is megcélozhatjuk.

Az említett 16 tanuló sikeresen mozgott a megismert reprezentációk (táblázat, képlet) között. 10 tanuló válaszolt a feladat minden kérdésére helyesen, azaz a szabály inverzét helyesen határozták meg és alkalmazták azt (d) feladat). BK fontosnak tartotta magyarázatként fejléceket készíteni táblázatához, rámutatva, hogy mely két halmaz elemei között teremtettünk kapcsolatot (5.13. ábra).

B.	1	10	0,5=A
K.	0,5	5	0,25=B.

5.13. ábra

1 tanuló nem alkotott táblázatot, 1 tanulóknak a tizedes törttel való szorzás okozott problémát, 1 tanuló semmilyen próbálkozást nem mutatott a feladat megoldására.

Táblázat kitöltése megadott szabály alapján

A feladat az 5. osztály Betűkifejezések c. tananyagából való volt olyan különbséggel, hogy ott az együttváltozó mennyiségek nem voltak táblázatba rendezve, egyszerűen az x adott értékei mellett kellett meghatározni az y értékét.

2. feladat: Töltsd ki az üres helyeket a táblázatban a következő szabály szerint: $y = 8 \cdot x$

x	1	4	2,5			0
y				16	6,4	

A kitöltött táblázat alapján válaszolj a következő kérdésekre:

- a) Nevez meg néhány elempárt!
b) Ha $y = 8 \cdot x$, akkor $x = \dots\dots\dots$?

Ezt a feladatot közösen oldottuk meg. A feladatot szintén előre beragasztottuk a gyerekek füzetébe és felkerült a táblára is. SzA nagyon szépen megfogalmazta a szabályt: „Ha az x -et megszorozzuk 8-cal, akkor megkapjuk y -t”. A táblázat kitöltése és a visszafelé gondolkodás sem okozott problémát. Ezután az elempárok megnevezése következett. Különböző tanulókat kérdeztünk, akik helyes példákat hoztak fel az elempárokra.

Tanár: „Próbáljunk felelni a feladat b) kérdésére. Hogyan kapjuk meg az x -et, ismerve, hogy $y = 8 \cdot x$? Nézzünk a kitöltött táblázatra!”

BK: „Elosztjuk az y -t 8-cal”

Megkérdezve a többi tanulót, hogy egyetértenek-e BK válaszával, jól érveltek a kisfiú helyes válasza mellett elempárokat kiragadva a táblázatból.

Tanulságok

A függvényfogalom előkészítését célzó bemutatott tevékenységek jól illeszthetők a vizsgált életkorú tanulók gondolkodásmódjához. A szabályfelismerést segítő függvénygép és a hozzá kapcsolható táblázatos reprezentációs forma megfelel a tanulók fejlettségének, azonban

egyszeri alkalommal végzett ilyen tevékenység nem minden tanulónak volt elegendő ahhoz, hogy a modellből absztraháljanak és a hangsúlyt képesek legyenek egy tetszőleges szabály alapján együttlévő mennyiségek fogalmára áthelyezni. Ehhez nyilvánvalóan több konkrét függvénygéppel végzett tevékenység, illetve a gép ún. "szabálykapcsolóval" történő ellátása járulna hozzá.

5.4.4. Szöveges feladatokban rejtőző együttlévő mennyiségek felismerése, reprezentálása táblázattal, képlettel

A foglalkozások célja a szöveges kontextusban explicit és implicit módon adott együttlévő mennyiségek és azok közötti kapcsolat felismerésének, a kapcsolatot meghatározó szabály különböző módon (táblázat, képlet) való reprezentálásnak fejlesztése volt a függvényfogalom egy másik forrásának, a valós életből vett folyamat a segítségével.

A 4. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Időtartam: 20-22 perc;

Megfigyelési mód: írásos feljegyzések, gyerekek munkájának összegyűjtése, hangfelvétel;

Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból): 20.

Egy kg alma ára 15 hrvnya. Mennyibe kerül:

a) 3 kg alma, b) 5 kg alma, c) 10 kg alma?

A megoldások ismeretében válaszolj a következő kérdésekre:

1) Milyen két mennyiség szerepel a feladatban?

2) A feladatban szereplő elempárokat rendezd táblázatba!

3) Fogalmazd meg szavakkal, hogyan számoljuk ki, hogy mennyit fizetünk bizonyos kg almáért?

A foglalkozás kitűzött feladata valós életből vett, együttlévő mennyiségeket tartalmazó szöveges feladat volt, melyet a gyerekek füzetébe az órát megelőzően beragasztottunk.

Miután elkezdtek dolgozni, az egyik tanuló a következő kérdést tette fel: „Hogy értve, milyen két mennyiség?”. Még mielőtt a tanár válaszolt volna, egy másik tanuló így próbálta rávezetni a kérdezőt: „... például két mennyiség a liter és a perc, vagy az út és az idő, itt meg milyenek vannak...”. Örültünk, mert a kérdező tanuló már írta is a megfelelő választ a füzetébe (hasonló tanulói párbeszédek, amikor rávezető kérdésekkel, magyarázatokkal próbálnak segíteni egymásnak a gyerekek, gyakran előforduló órai momentumok).

Az órán jelen lévő 20 tanuló közül 18 felelt a feladat 1. kérdésére, azaz felismerte a feladatban szereplő két mennyiséget. Az explicite megadott alma mennyiségekért fizetendő összeget mind a 20 gyerek helyesen számolta ki és közülük 12-en gyakorlatilag egy informális táblázatot készítettek (5.14. ábra)

Az összetartozó mennyiségek táblázatba rendezése már csak 11 tanulónak sikerült (vízszintes és függőleges táblázatok egyaránt születtek). 3 tanuló kihagyta a feladatnak ezt a részét, a többiek olyan táblázatot rajzoltak (6 tanuló), melyben a kilogrammonkénti árat rendelték a megadott mennyiségekhez (3, 5, 10 kilogrammhoz) (5.15 ábra).

3 kg alma	-	45 hr per kg
5 kg alma	-	75 hr per kg
10 kg alma	-	150 hr per kg

5.14. ábra

1) kg és hrivnya

2)

a	15	15	15
b	3	5	10

5.15. ábra

BG táblázatának fejléce („bedobott, kidobott”) a gépmoddellre utaló lejegyzéseket mutatott. BK kétfelé fejlécet is adott táblázatának. Ő az a kisfiú, aki az előző órán is szükségét látta jelezni azon mennyiségeket, melyek között felismerte a kapcsolatot (5.16. ábra). A „K” betűt valószínűleg a kilogramm, az „F” betűt pedig a fizetett összeg rövidítéséhez használta.

1	3	5	10	K. kg
15	45	75	150	F. hr.

5.16. ábra

A 3. kérdésre 14 tanuló adott helyes választ („A megadott kilogramm almát megszorozzuk az árával”; „Az adott kilogrammot meg kell szorozni 15-tel”; „Megszorozzuk az egy kg árát annyival, amennyit akarunk venni”), közülük 2-en változót vezettek be a „bizonyos kilogramm” jelölésére („A 15 hr-t megszorozzuk a kg-mal, ami a vásárolt mennyiség”; „Ha egy kilogramm 15 hr, akkor 15-a hrivnya bizonyos kg alma”). 1 tanuló a kérdés megválaszolásához a konkrét adatokat használta fel („A 15 hr-t megszorozzuk 3-mal, 5-tel, 10-zel”). Nála valószínűleg még nehézséget jelent a feladat verbális általánosítása és annak algebrai kifejezéssel történő leírása, csak konkrét adatokra fókuszálva tudja elképzelni a szituációt.

Annak érdekében, hogy azok a tanulók is megértsék a feladatot, akik az önálló munka során nehezebben boldogultak a feladatmegoldással, valamint, hogy megismertessük a tanulókat a kapcsolat algebrai kifejezéssel történő általánosításával, megbeszéléssel folytattuk az órát. A gyerekek bevonásával lépésről-lépésre oldottuk meg a feladatot a táblánál. Az összetartozó mennyiségek táblázatos reprezentációja felkerült a táblára oly módon, hogy annak első sorába vásárolt almamennyiséget mutató számok (3, 5, 10), a második sorába pedig az azokért fizetett összeg (15, 75, 150) került. Ezután a feladat általánosítása következett:

Tanár: „A táblázatunk első sorában lévő számok mit mutatnak?”

Tanuló1: „Azt, hogy hány kg almát vettünk.”

Tanuló2: „A tömeget”

A táblázatot bővítettük egy oszloppal, amelynek első cellájába beírtuk a tanulók válaszát („alma tömege (kg)”).

Tanár: „És mit mutatnak a második sorban lévő számok?”

Tanuló3: „Hogy mennyit fizettünk 3, 5 és 10 kilogramm almáért.”

A táblázat bővített oszlopának második cellájába a következőt írtuk: „fizetett összeg”.

Tanár: „Hogy írhatnánk rövidebben azt, hogy az alma tömege?”

Tanuló4: „Kg”

Tanár: „Jelölhetnénk-e ezt még rövidebben, hisz az előző órákon is beszéltünk róla, hogy a matematikusok szeretnek mindent röviden írni?”

Erre több válasz is érkezett (a , x , k), majd közös döntéssel x -szel jelöltük a vásárolt mennyiséget és újabb oszloppal bővítve a táblázatot az első cellába beírtuk, hogy x . Ezután megkérdeztük a tanulókat:

Tanár: „Tudva azt, hogy 1 kg alma 15 hrvnyába kerül, akkor ha x kg almát vásárolunk, mennyit fizetünk érte?”

Azon tanulók közül kértünk meg egyet a válaszáadásra, akik önállóan rosszul dolgoztak. Kisebb gondolkodás után, még egyszer feltettük a kérdést, melyre kissé bizonytalanul válaszolt: „ $x \cdot 15$?” Mivel kérdezve felelt, így még egyszer elmagyaráztuk a feladatot és azt, hogy mit jelöl az x . Az ezután már kijelentett választ beírtuk az új oszlop második cellájába. Majd megbeszéltük, hogy az általa adott válasz a fizetendő összeg, hasonlóan rövidítve a „fizetendő összeg” megnevezést, y -nal jelöltük azt. Ezt követően megadtuk algebrai kifejezéssel a feladat általános megoldását („ $y = x \cdot 15$ ”).

Tanár: „Mindezeket tudva próbáljuk meg szavakkal elmondani, hogy mit jelent ez a betűkifejezés?”

Azokat a tanulókat kértük fel válaszáadásra, akik füzetükben a feladat 3. kérdésére nem adtak választ. Kisebb rávezetéssel (felelevenítettük, hogy mit jelölnek az x és y betűk) sikerült megfogalmazniuk a leírt szabályt: „... ha veszünk valamennyi almát, akkor azt meg kell szorozni 15-tel és megkapjuk, mennyit fizetünk.”

Az 5. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Időtartam: 25 perc;

Megfigyelési mód: írásos feljegyzések, gyerekek munkájának összegyűjtése;

Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból): 20.

Peti telefonon beszélt a barátjával az 5 perces iskolai szünetben. A beszélgetésük időtartamát egész percekben mérik, és 1 perc 0,5 hrvnyába került. Mennyibe kerülhetett Peti telefonbeszélgetése, ha a kapcsolási díj 1 hrvnya volt?

1) A feladatban szereplő összetartozó mennyiségeket (elempárokat) szemléltesd táblázattal!

2) Fogalmazd meg:

a) szavakkal,

b) matematika nyelvén (írd le matematikai kifejezéssel),

mennyit fizet Peti a telefonbeszélgetésért, ha x percet beszélt?

A 4. foglalkozás feladatával ellentétben jelen feladat esetében a bemenő adatok nem explicit módon adóttak, azok a kontextusban rejtőznek. Tehát a megoldáshoz még inkább elengedhetetlen a helyes szövegértelmezés, a szituáció elképzelése.

Tekintettel a szöveg és így a feladat összetettségére, várható volt, hogy sokaknak nehézséget okoz a megoldása. Ezért nem vártuk el, hogy mindenki önállóan meg tudja oldani azt. A gyerekeknek hagytunk egy kis időt (5 perc), hogy önállóan elolvassák és értelmezzék a feladatot (mindenki próbálkozott a megoldással). Figyelve a gyerekek munkáját észrevettük,

hogy 2 tanuló ez alatt az idő alatt el is készült a helyes megoldással. A többiek esetében a következő 2 megoldási kategória állítható fel:

(1) az 1 perc díjának ismeretében kiszámolta az 5 perces telefonbeszélgetés díját, figyelmen kívül hagyva a kapcsolási díjat;

(2) csak az 1 vagy 5 perces telefonbeszélgetés díját számolta ki kapcsolási díjjal.

Ezen csoportokba tartozó gyerekek között voltak azok, akik a tájékoztató felmérés alkalmával a 6. feladat („vízcsap”) megoldása során is hasonló módon jártak el.

6 gyerek aránypár felírásával törekedett a feladat megoldására (megjegyezzük, hogy az előző órán az egyenes arányossággal foglalkoztunk). Ez talán annak a gyakori tanuló feladatmegoldási stratégiának az alkalmazásához köthető, hogy nem a „józan paraszti” gondolkodás dominál, hanem az új matematikai ismeretekbe próbálnak kapaszkodni.

3-an azon gyerekek közül, akik az (1) vagy (2) feladatmegoldási csoporthoz tartoztak, a feladat 2. kérdésének minden részére viszont helyes választ adtak. Tehát elmondható, nekik a feladatban szereplő bemenő adatok felismerése okozott nehézséget, nem pedig a megfogalmazás.

Annak érdekében, hogy a gyerekeket rávezessük a kontextusban meghúzódó bemenő adatok megtalálását sugalló „kulcsszavak” felismerésére, a szöveg minden szavának pontos értelmezésére, eljátszottuk a szituációt. A beszélgetés során kiderült, hogy a játék eredményesnek bizonyult és rájöttek, hogy Peti 1, 2, 3, 4 vagy 5 percet beszélhetett. A mennyiségek a válaszok érkezésével folyamatosan felkerültek a táblára, előkészítve az összetartozó mennyiségek táblázatos reprezentációját. Ezután megkérdeztük őket, hogy melyik szó utalhatott erre a szövegben. Újra elolvasták a feladatot és sikeresen megtalálták a több megoldásra utaló „kerülhetett” szót. Közösén kiszámoltuk, hogy az egyes percekért mennyit fizetett Peti („ $1 \cdot 0,5 + 1$ ”) és azt a táblázat megfelelő cellájába írtuk. Az elkészített táblázatot az előző órán megoldott feladathoz hasonlóan oszlopokkal bővítettük. Az egyik oszlop felső cellájába szavakkal írtuk be, hogy mit mutatnak az első sorban lévő számok („perc”), az alsó cellába pedig azt, hogy mit mutatnak a második sorban lévők („fizetendő összeg”). Megbeszéltük először, hogy a konkrét adatokkal, hogyan számoltuk ki a különböző percekért fizetett összeget („*a percet megszorozzuk 0,5-tel és hozzáadjuk a kapcsolási díjat*”).

Tanár: „... tehát tudva azt, hogy a beszélt percet meg kell szorozni 0,5-tel és hozzáadni az 1 hrivnya kapcsolási díjat, mennyit fizetett Peti, ha x percet beszélt?”

A tanulók a táblázatban szereplő konkrét adatokból már tudtak általánosítani: „ $x \cdot 0,5 + 1$ ”. Megbeszéltük, hogy ezzel leírtuk matematika nyelvén, mennyit fizetett Peti x percert. Majd bevezettük a fizetett összeg rövidítésére az y változót és különböző tanulókat kértünk fel, a feladat általános megoldásának narratív megadására („*a percek számát megszoroztam egy féllal és hozzáadtam a kapcsolási díjat, így megkaptam, hogy mennyit fizetett Peti*”; „*megszorozzuk a percet, amit beszél 0,5-tel és plusz az 1 hrivnya*”).

Megjegyzés: Az előző óra tananyaga (Egyenes arányosság) elsajátításának ellenőrzéseként, megkérdeztük a tanulókat, hogy a táblázatban szereplő összetartozó mennyiségek egyenesen arányosak-e. A gyerekek hallgatása után szükségesnek láttuk, hogy felidézzük a definíciót. Néhány gyerek definiálta az egyenesen arányos mennyiségeket, ami után érkezett a nemleges

válasz. Arra is választ tudtak adni, hogy hogyan kellene korrigálni a feladatot, hogy az összetartozó mennyiségek egyenesen arányosak legyenek.

5.4.5. Szituációk és azok általános megoldását leíró algebrai kifejezések összekapcsolása

A 6. foglalkozáson a tanulóknak különböző algebrai kifejezéseket (képleteket) kellett megadott szituációkkal (szöveges feladatokkal) párosítani. Tehát a feladatot leíró képlet vagy a képletnek megfelelő szituáció megtalálását céloztuk meg („kétirányú” gondolkodás).

A 6. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Időtartam: 35 perc;

Megfigyelési mód: írásos feljegyzések, gyerekek munkájának összegyűjtése;

Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból): 20.

A tanulók feladatlapján (lásd Mellékletek, 13. old.) 7 szöveges feladat (A, B, C, D, E, F, G) és 4 algebrai kifejezés szerepelt, melyek a 7 közül 6 feladat megoldását írták le. A szövegben a bemenő adatok nem konkrét értékekkel szerepeltek, azok jelölésére már x -et használtunk és ugyanezt használtuk az algebrai kifejezések megadásánál is. Az 5.2. táblázatban összegeztük a különböző párosításokra érkezett válaszok számát. Kékkel jelöltük a helyes párosításokat.

	A	B	C	D	E	F	G
1	0	20	0	0	0	0	11
2	0	0	4	1	16	13	1
3	0	0	4	16	0	1	4
4	1	1	12	0	2	2	1

5.2. Táblázat: Feladatok és hozzájuk tartozó algebrai kifejezések párosítása

Láthatólag a legkevesebben a G, F és C feladathoz találták meg az annak általános megoldását leíró algebrai kifejezést.

A következőkben két-két feladatot mutatunk be a feladatlapra szereplők közül, melyek tartalmilag más, de megoldásukat leíró kifejezések típusa szempontjából megegyezők voltak. A B) feladatot (5.17. ábra) és az őt leíró kifejezést ($y=36 \cdot x$) az órán jelen lévő 20 tanuló mindegyike helyesen párosította. Viszont csak 11 tanuló vette észre, hogy ez a kifejezés egy másik, G) feladat (5.18. ábra) megoldását is reprezentálja. Az, hogy a B) szövegkörnyezetben könnyebben felismerik a tanulók a benne rejtőző szabályt azzal magyarázhatjuk, hogy könnyebben értelmezik azt a feladatot, ahol megjelennek azok a szavak, melyek sugallják a megoldásukhoz szükséges aritmetikai műveletet (például „36-szor annyi”). Ugyanilyen megállapításra jutottunk explicit adatokat tartalmazó feladat esetében is (lásd 4. foglalkozás, „almás” feladat).

B) Egy kosárban x db alma van, körte pedig 36-szor annyi, mint alma. Hány db körte van a kosárban?

5.17. ábra

G) Az osztályba 36 gyerek jár. A gyerekek egyforma karácsonyi csomagot kaptak, mindegyikben x db cukorka volt, minden gyerek kapott egy csomagot. Hány db cukorkát kapott összesen az osztály?

5.18. ábra

A 5.19. és 5.20. ábrákon látható feladattípussal a tanulók az 5. foglalkozáson találkoztak, ahol konkrét adatokkal is megoldottuk a feladatot („telefonbeszélgetés” feladat), valamint az általános megoldást leíró kifejezést is felépítettük. Most 4 algebrai kifejezés közül kellett kiválasztani a megfelelőt. Mindkét feladat egyazon kétlépéses szabály felismerését tette szükségessé, de más szöveggörnyezetben. A két szöveggörnyezet közül az E) esetben mondható sikeresebbnek a hozzá tartozó algebrai kifejezés felismerése. 16 tanuló párosította ezt a feladatot az $y=2 \cdot x+36$ kifejezéssel, míg az F) feladat megoldásához csak 13 tanuló kapcsolta ezt. Ebből arra következtethetünk, hogy az is befolyásolhatja a sikeres feladatmegoldást, hogy az adatokat milyen sorrendben közöljük.

E) Egy csapból a tartályba másodpercenként 2 liter víz folyik. Hány liter víz lesz a tartályban x másodperc múlva, ha a csap megnyitásakor 36 liter víz volt benne?

5.19. ábra

F) Zsuzsa rózsacsokrot vett anyukájának. A csokorban x szál rózsa volt, 1 szál rózsa 2 hrvnyába került, a csomagolás pedig 36 hrvnyába. Mennyit fizetett Zsuzsa a rózsacsokorért?

5.20. ábra

Annak érdekében, hogy elmélyítsük a 4. és 5. foglalkozásokon során végzett tevékenységeket, a szöveges kontextus és az azt reprezentáló táblázat közötti kapcsolat megértését, a 4.20. ábrán látható feladat főbb adatait előre elkészített táblázattal is megadtuk és a változó (x) különböző értékei mellett kellett kitölteni a tanulóknak a táblázat üres helyeit (5.21. ábra). Ennek célja az volt, hogy megvizsgáljuk, a tanulók tudják-e értelmezni és összekapcsolni a szöveggel a táblázatot, továbbá a változó különböző értékei mellett is meg tudják-e azt oldani. Ugyanezen feladatnak a változó azon értéke ($x=11$) melletti megoldását is kértük a tanulóktól, mely nem szerepelt a táblázatban.

Rózsaszálak száma (db)	1	2	3	4	5
Rózsaszálak ára (hr)	2				
Csomagolás ára (hr)	36	36	36	36	36
Fizetett összeg a rózsacsokorért (hr)					

5.21. ábra

A tanulók többsége (18) a táblázat második sorát helyesen kitöltötte és a fizetett összeget is helyesen meghatározta 1 szál rózsa esetében. Viszont a többi adattal 4 tanuló már helytelenül határozta meg a fizetett összeget. Ők az egyes oszlopokban lévő számokat összeadták. Valószínűleg itt már nem tekintettek a feladat feltételére és „automatikusan” összeadták az egyes oszlopokban lévő számokat, figyelmen kívül hagyva, hogy az egyes sorok mit jelölnek.

Ugyanezen 4 tanuló közül 3-an a rózsaszálak egy konkrét adatával sikerebben oldották meg a feladatot, mint táblázattal (5.22. ábra) és ezen 3 tanuló közül 2-en helyesen párosították a feladatot annak általános megoldásával.

1 tanuló bár helyesen kezdte el a feladat megoldását a változó konkrét (11) értékével, csak a rózsaszálak árát számolta ki és figyelmen kívül hagyva a csomagolás árát.

A rózsaszálak száma (db)	1	2	3	4	5
Rózsaszálak ára (hr)	2	4	6	8	10
Csomagolás ára (hr)	36	36	36	36	36
Fizetett összeg a rózsacsokorért (hr)	390	40	42	44	46

Az F) feladat adatai alapján válaszolj a következő kérdésre:

Zsuzsa rózsacsokrában 11 szál róza volt. Mennyit fizetett Zsuzsa ezért a rózsacsokorért?

Megoldás: $11 \cdot 2 = 22 + 36 = 58 \text{ hr.}$ ✓

5.22. ábra

Megjegyzés: Ha az F) feladathoz tartozó táblázat kitöltésének sikerességét (14) összehasonlítjuk a tájékozódó felmérés során a 7. feladatánál („virágcsokros” feladat) tapasztaltakkal (12), akkor elmondható, hogy a táblázat megléte volt, akinek segített a feladat értelmezésében (ND és SzL ebben az esetben mind a táblázattal, mind a változó konkrét értéke mellett helyesen dolgozott, a tájékozódó felmérésen viszont hibásan).

Tanulságok

Az órákon bemutatott, valós élethelyzetet leíró feladatok részletes megoldása, annak általánosítása csupán a tanulók kicsit több mint felének volt elegendő ahhoz, hogy hasonló szöveges feladat általános megoldását leíró algebrai kifejezést fel tudjanak ismerni, valamint egy konkrét szituáció táblázatos reprezentációját a feladat szövegével párhuzamosan értelmezni. A feladat szövegében az általánosításához (szabályalkotáshoz) szükséges aritmetikai műveletre utaló szavak megléte vagy hiánya is befolyásolta a vizsgált életkorú tanulóknál a sikeres szabályfelismerést. Az összetartozó mennyiségek és azok közötti kapcsolat felismerése akkor is nehézséget jelentett, ha azokra csak a szövegben meghúzódo „kulcsszavak” utaltak, vagyis annak sikerességét a szövegkörnyezet és a szövegfelépítés is befolyásolta.

A tanulók órai tevékenységei arra engednek következtetni, hogy a szöveges kontextusban rejtőző összetartozó mennyiségek táblázattal történő reprezentációja, a feladat általánosítása algebrai kifejezéssel egy lépéses szabállyal leírható feladatok esetében rövid idő alatt is fejleszthető, viszont a kétlépéses szabály esetén ez hosszabb, folyamatos fejlesztést igényel. Ezért úgy véljük, hogy egy- és kétlépéses szabállyal leírható szöveges feladatokat feldolgozó tanítási-tanulási egységet a következő szinteknek megfelelően lenne célszerű felépíteni:

- egy adatot (a független változó egy konkrét értékét) tartalmazó feladat;
- több, konkrét bemenő (input) adatot tartalmazó feladat;
- a szövegösszefüggésben rejtőző több, implicit bemenő adattal bíró feladat;
- az összetartozó mennyiségek táblázatba rendezését előíró feladat;
- általános megoldást kérő feladat (változó bevezetése).

Minden egyes szinten az egy- és kétlépéses szabályt rejtő feladatokat párhuzamosan kellene bevonni a tanítási-tanulási folyamatba.

5.4.6. Az utóteszt elemzése

A fejlesztő program első részét, 2016. január 19.-én, több mint 1 hónappal a foglalkozások után, utótesztrel zártuk, melyen 17 tanuló vett részt. A tananyag elsajátításának minőségét, a foglalkozások hatékonyságát, a foglalkozásokon gyakoroltakhoz hasonló feladatokkal vizsgáltuk. A gyerekek a feladatlap (lásd Mellékletek, 14-16. old.) kitöltésére 40 percet kaptak.

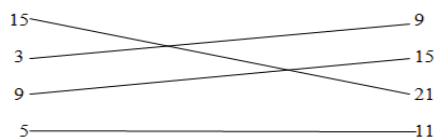
Az 1. feladat előre elkészített számpárok közötti kapcsolat felismerésére, annak szavakkal történő leírására irányult. A 2. feladatban függvénygép működését kellett értelmezni a tanulóknak, majd ez alapján meghatározni a képhalmaz elemeit az alaphalmaz adott értékei mellett és táblázattal reprezentálni az összetartozó mennyiségeket. A 3. feladat konkrét szabály értelmezésére, követésére irányult. A 4. feladattal célunk a táblázattal reprezentált elempárok közötti kapcsolat különböző módon (verbálisan, képlettel) való kifejezése volt. Az 5. feladat kontextusban rejtőző összetartozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerését, annak különböző módon történő reprezentációját (táblázat, képlet) volt hivatott szolgálni.

Az alábbiakban bemutatjuk vizsgálatunk tapasztalatait, külön elemezve az 5. feladat sikerességét, összehasonlítva azt a 2014-ben 6. osztályban végzett felmérés 5. feladatának eredményével (lásd 3.4 fejezet és Mellékletek, 5. feladat, 2. old.).

Tapasztalatok

1. feladat

A bal és a jobb oszlopban lévő számokat párosítottuk egy szabály szerint, mely minden elempárra igaz.



Fogalmazd meg a felismert szabály szavakkal!

12 tanuló adott helyes vagy kisebb pontatlanságok megléte ellenére olyan megfogalmazást, melyből következtethettük arra, hogy felismertek egy alkalmas szabályt. 1 tanuló (MN) szabálya csak 1-re volt igaz: „Az elempárokat el lehet osztani 3-mal, ha elosztjuk hárommal, megkapjuk, hogy mennyi volt valójában”. Mondata második felében valószínűleg csak a (3,9) elempárra igaznak mondható szabályra gondolt. 1 gyerek (SzL), csakúgy, mint a foglalkozások alkalmával, a „szabály” szóról valamilyen matematikai szabályra asszociált: „Ez az összeadás szabálya...mindhez 6-ot adunk...”. 1 tanuló (ÓDzs) leírásában az elempárokról kialakult valamiféle képzet jelent meg: „Azokat a számokat, melyek jobbra és balra van elempároknak nevezzük”. 2 tanuló (MA és BM) nem adott választ a feladat kérdésére.

2. feladat

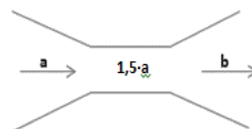
Egy gép a következő szabály szerint működik:

a) Fogalmazd meg a gép működési szabályát! (Mit csinál a gép?)

b) Mennyi a **b** értéke, ha 1) $a = 1$; 2) $a = 10$; 3) $a = 1,2$?

c) Rendezd a kapott elempárokat táblázatba!

d) Mennyi az **a** értéke, ha **b=14**?



13 tanuló helyesen fogalmazta meg a sematikusan ábrázolt gép működését. 1 tanuló (BB) a 2. foglalkozáson bemutatott konkrét gép működésének szabályát írta le („A gép megduplázza a számokat”) és első gondolatként ennek alapján adott választ a feladat c) részére. Azaz először, csakúgy, mint a 3. foglalkozáson a konkrét, bemutatott gépre gondolt. Viszont ezen szabály alapján elkészült táblázatán módosított, amelynek alapján elmondható, hogy valószínűleg megértette, hogy mit csinál a gép, de a már megfogalmazott szabályt nem javította. 2 tanuló (MB és ÓDzs) válasza annak pontatlansága miatt vált helytelenné: „A gép a bedobott számokat megtöbbszörözi”. Összehasonlítva a 3. foglalkozáson nyújtott teljesítményükkel, ahol még a bemutatott gép jelent meg elméjükben a gép ábrája láttán, most a bemutatott géptől a legtöbben már „elrugaszkodtak”, ugyanakkor a gondolataik pontos megfogalmazása még fejlesztést igényel. 1 tanuló (SzL) pedig a feladat b) részét használta fel a kérdés megválaszolására, azaz leírta, hogyan határozzuk meg a **b** értékét a konkrétan felsorolt **a** értékek mellett.

Mint ahogy a feladat b) részével az elempárok megalkotásában próbáltunk segíteni a gyerekek, és 1 gyerek a feladatnak ezt részét kihagyva a c) részre helyes választ adott, így a következőkben a c) rész megoldottságát tárgyaljuk. 13 tanuló sikeresen táblázatba rendezte az elempárokat. Ők mindannyian fejléccel is ellátták a táblázatot, ami arra enged következtetni, hogy ezek a gyerekek a modellből képesek voltak absztrahálni és a hangsúlyt az együttváltozó mennyiségek fogalmára „átültetni”. 2 tanuló (MB és ÓDzs), akiknél a gép működésének verbális leírásával is gond volt, olyan táblázatot alkottak, melyben ahhoz, hogy az **a** hányszorosát (1,5) adja ki a gép tizedes törtekkel való szorzás elvégzésére utaló hiányosságok mellett kiszámolt **b** értéket rendeltek (5.23. ábra). Ők valószínűleg még nem értették meg az összetartozó mennyiségek fogalmát.

a) Fogalmazd meg a gép működési szabályát! (Mit csinál a gép?)
A gép a bedobott számokat megtöbbszörözi.

b) Mennyi a **b** értéke, ha 1) $a = 1$; 2) $a = 10$; 3) $a = 1,2$?

c) Rendezd a kapott elempárokat táblázatba!

1,5	1,5	1,5
= 1,5	= 150	= 180

d) Mennyi az **a** értéke, ha **b=14**?

146

*1,5 · 1 = 1,5
 1,5 · 10 = 150
 1,5 · 1,2 = 180*

14 · 6 = 146

5.23. ábra

2 tanuló csak a feladat b) részét oldotta meg. A feladat d) részére mindössze 7 jó válasz érkezett. 2 gyerek nem adott választ, 4-en a válaszukból ítélve a 2. foglalkozáson látott konkrét gép működésére hagyatkozva adták meg válaszukat ($a=7$), ahol megnéztük a gép működésének megfordítását is. A többi 4 gyerek között volt olyan, aki a 14-ből kivonta az 1,5-öt (bár először osztotta a 14-et 1,5-tel, de azt javította), mások csak egy számot írtak eredményként, számítások nélkül.

3. feladat

Töltsd ki az üres helyeket a táblázatban a következő szabály szerint: $y=50 \cdot x$

x	1	4	2,5			
y				1000	300	60

A kitöltött táblázat alapján válaszolj a következő kérdésekre:

a) Fogalmazd meg a megadott szabályt szavakkal!

b) Nevezd meg néhány elempárt!

c) Ha $y=50 \cdot x$, akkor $x=.....?$

d) Mennyi az $y:x$ arány értéke?

15 tanuló töltötte ki a táblázatot, közülük 3-an kisebb számítási pontatlanságokkal. Ebben az esetben a szabály inverzének alkalmazása is sikeresnek bizonyult. Ha összehasonlítjuk az eredményeket a 2. feladat d) részével elmondható, hogy képlettel megadott szabályt követni, majd a kitöltött táblázat segítségével visszafelé gondolkodni a gyerekek többségének könnyebbnek bizonyult. A szabály megfogalmazása 10 gyereknél volt elfogadható. 3 gyerek (MA, MB, BK) kihagyta a feladatnak ezt a részét, 4-en pedig olyan szabályt írtak le, mely nem adott egyértelmű magyarázatot a követett szabályra. Például: „Először $y \cdot x$, aztán $y:x$ ”; „Mindig szorozni vagy osztani kellett”.

4. feladat

Keress egy szabályt az egymás alatt lévő számokra és ez alapján töltsd ki a táblázatot!

a	15	5	20	50	1	0			
b	3	1	4				6	7	1,4

Jegyezd le az elempárok között felismert szabályt

a) szavakkal, b) matematika nyelvén (kifejezéssel).

9 tanuló töltötte ki hibátlanul a táblázatot egy olyan felismert szabály szerint, melyet meg is fogalmazott (a) rész). 3 gyereknél (HV, HP, MB) a szabály inverzének alkalmazásában jelentkeztek problémák. Közülük 2-en viszont szavakkal és képlettel is megadták a szabályt, és ők a 3. feladatban alkalmazni tudták a megadott szabály inverzét is. Ezért úgy véljük, hogy ebben az esetben miután leírták szavakkal és képlettel is a szabályt, már nem ellenőrizték első gondolatuk alapján kitöltött táblázatot. SzL, ÓDzs és RE táblázatában a 4. oszlop üres cellájának kitöltésekor még a felismert szabályt követték, viszont a felső sor üres celláit már egy másik szabály alapján töltötte ki (felezték az alsó sorban lévő számokat). 1 tanuló (MA), sem erre, sem az 1. feladatra nem adott választ, viszont a 2. és 3. feladatokra, ahol megadott szabályt kellett követni sikeres feladatmegoldást mutatott. Ez arra enged következtetni, hogy a szabálykövető képessége nála „erősebb”, mint a szabály felismerésének képessége.

5. feladat

Egy csapból egy tartályba másodpercenként 2 liter víz folyik. Mennyi víz van a tartályban

- a) 1 s, c) 5 s, e) 16 s,
b) 2 s, d) 10 s, f) x s

múlva, ha a csap megnyitásakor a tartály üres volt?

1) Milyen két mennyiség szerepel a feladatban?

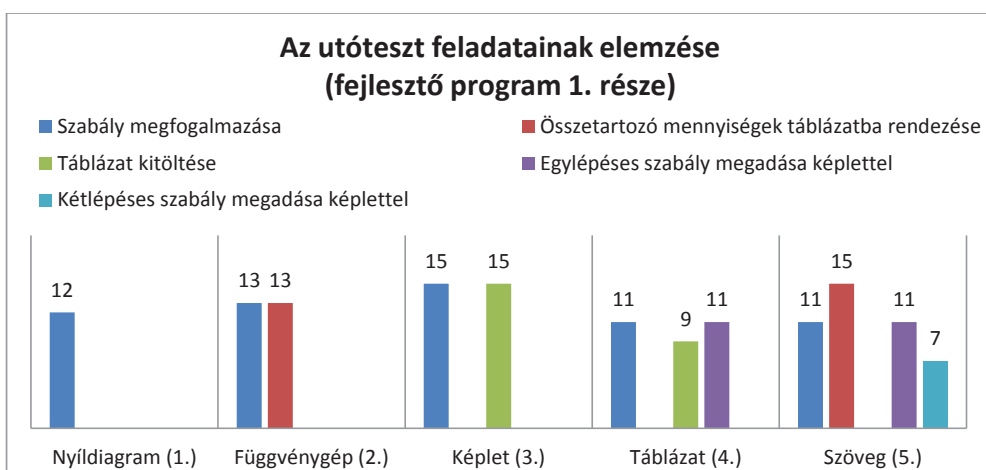
2) Szemléltesd a mennyiségek közötti kapcsolatot táblázattal.

3.) Írd le a) szavakkal b) matematika nyelvén (kifejezéssel) hány liter víz lesz a tartályban x másodperc múlva, ha a csap megnyitásakor a tartályban 3 liter víz volt!

11 gyerek adott választ a feladat a)-f) kérdésére. 15-en a konkrét adatok (a-e) mellett helyesen számoltak, azaz felismerték a mennyiségek közötti kapcsolatot, amit táblázattal is szemléltettek. ÓDzs megoldásából ítélve nem értette meg a feladatot, MB semmilyen próbálkozást nem mutatott. 11 tanuló tudta általánosítani a feladatot, azaz megadni képlettel is a felismert szabályt, mely leírja a mennyiségek közötti kapcsolatot. Ha ezt az eredményt összehasonlítjuk a 2014-es 6. osztályos felméréssel, ahol ugyanez a feladat is szerepelt, ott a vizsgált 26 tanulóból mindössze 10 tudta általánosítani a tartályban lévő vízmennyiség kiszámításának szabályát az eltelt idő függvényében (most 17-ből 11).

A 11 említett tanuló közül a feladat f) kérdésére 7-en adtak választ beírva azt a táblázatba. A többi 4 tanuló az x s –hoz valamilyen konkrét értéket próbált rendelni és azzal adni választ az f) kérdésre (pl: „20s-40l”). 10 tanuló írta le szavakkal is a felismert szabályt. A fentebb említett 7 tanuló adta meg a feladat általános megoldását képlettel abban az esetben, ha a csap megnyitásakor a tartályban 3 liter víz volt. 2 tanuló (KL, BB) egy tetszőlegesen választott x értéke mellett adott választ a feladat utolsó kérdésére. A változó fogalmának azon aspektusa, hogy „bármely tetszőleges számot” jelenthet ezen tanulóknál még nem „nyert” értelmet.

Az 5.24. ábra az utóteszt egyes feladatainak követelmények szerinti megoldottsági mutatóit szemlélteti (összesen 17 tanuló vett részt a teszten). Az adatsorok neveinél zárójelben a feladatok sorszámait szerepelnek.



5.24. ábra

Következtetések

A kísérleti tanításban résztvevő tanulók órai tevékenységét és az utóteszten mutatott eredményességet figyelembe véve arra a következtetésre jutottunk, hogy a tanulók több mint a felénél a bemutatott tevékenységek elérték céljukat. A különböző kontextusba „ágyazott” együttváltozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerése, azok táblázattal történő reprezentálása, a változó fogalmának bevezetése a kipróbált lépéseknek köszönhetően sikeresnek mondható. Néhány tanulóban viszont a bemutatott konkrét gép működése rögzült, melyre hagyatkozva oldották meg a kitűzött feladatok valamely részét. Ez is alátámasztja azt a megállapításunkat, hogy a konkrét reprezentációk fontos szerepet játszanak a tanítási-tanulási folyamatokban, legtöbbször azok és a hozzájuk kapcsolódó tevékenységek idéződnek fel a problémamegoldás során. Ezért az említett tanulóknak nyilvánvalóan több konkrét függvénygép megismerésére lett volna szüksége, vagy, ami ugyanez, a gép ún. „szabálykapcsolóval” való ellátása.

A felismert kapcsolat verbális megadásában még néhány tanulónál jelentkeztek nehézségek, de kisebb fogalmazási pontatlanságok ellenére, a többség leírt szabálya koherens volt annak alkalmazásával. Az együttváltozó mennyiségek táblázatos reprezentációja jól szolgálta az azok közötti kapcsolat „átültetését” a matematika nyelvére (4., 5. feladat), hisz találkoztunk olyan megoldásokkal is (lásd 4. feladat), melynél néhány tanulóknak elegendő volt a megadott elempárok ismerete ahhoz, hogy az azok közötti kapcsolatot matematika nyelvére transzformálják. Azaz a kipróbált tevékenységeknek köszönhetően a tanulók sikeresen tértek át egyik reprezentációs módról a másikra.

A szabály inverzének alkalmazása további fejlesztést igényel. Ez sikerebbnek bizonyult abban az esetben, ha a szabály expliciten volt adott (3. feladat).

5.5. A FEJLESZTŐ PROGRAM MÁSODIK RÉSZÉNEK BEMUTATÁSA

A fejlesztő program *második részének* (2016. április 25. - május 4.) fókuszában az együttváltozó mennyiségek fogalmának további alakítása áll a függvény egy újabb reprezentációs módjának, a derékszögű koordináta-rendszerben való ábrázolásának a megismertetésével, összekötve azt a grafikonleolvasás képességének fejlesztésével. Az 5 foglalkozás célja tehát a mennyiségek közötti kapcsolat ikonikus síkon történő reprezentációjának bevezetése volt. Varga Tamás (1969) szerint a táblázattal és grafikonnal megadott függvénykapcsolatok vizsgálatának akkor is a tanítás fókuszában kell maradniuk, ha már elkezdünk foglalkozni a szabály formulába történő átültetésével.

A tanterv szerinti témakör ebben a ciklusban a *Grafikonok. Mennyiségek közötti kapcsolat ábrázolása grafikonnal* c. tananyag volt. A gyerekek először találkoztak az összetartozó mennyiségek ezen reprezentációs formájával (eddig ez a tananyag nem szerepelt a matematika tantervben), de a koordináta-rendszerrel, pontok ábrázolásával már foglalkoztak (lásd a dolgozat 2.2. alfejezete). Az órák témái teljes egészében az előírt tanmenetet követték. Ennek a tanítási ciklusnak az 1. foglalkozásán a tanulók megismerkedtek a grafikonokkal, fejlesztettük az összetartozó mennyiségek grafikonról történő leolvasásának képességét, azaz törekedtünk arra, hogy a tanulók egészben lássák a grafikonokat, értelmezni tudják a

leolvasott adatokat, maguk előtt lássák az együttváltozó mennyiségek közötti kapcsolat jellegzetességeit.

A 2. foglalkozáson valós életből vett szituációhoz előre megadott táblázat alapján grafikont készítettünk (táblázatról grafikonra való áttérés), majd grafikon alapján táblázat kitöltése következett (grafikonról táblázatra való áttérés).

A 3. foglalkozásnak, sajátos jellemzője volt, hogy a cselekményeket igyekeztünk egyéni élménnyé alakítani, hogy az *epizodikus emlékezetben* (lásd a dolgozat 1.1.3. fejezete) tárolva később felidézhetők legyenek. Az órán a szituáció eljátszásával az volt a célunk, hogy a tanulók a későbbiekben, a függvényfogalom bevezetésénél az együttváltozó mennyiségek tárgyalása kapcsán felidézve az órai tevékenységet a személyes élményekkel, a különböző reprezentációs módok is felszínre kerüljenek.

A 4. és 5. foglalkozások valós életből vett szöveges feladatokban rejtőző összetartozó mennyiségek közötti kapcsolat különböző reprezentálását (táblázat, nyíldiagram, grafikon, képlet) voltak hivatottak szolgálni. Az egyes feladatokban diszkrét és folytonos függvények fordultak elő.

Csakúgy, mint az első tanítási ciklust, ezt is utóteszttel zártuk. Az utóteszt a témazáró dolgozat keretein belül valósult meg.

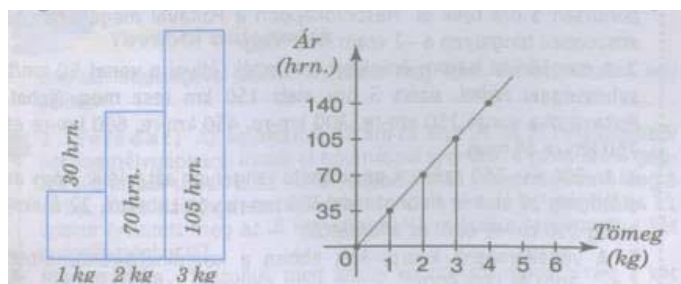
5.5.1. Grafikonok bevezetése. Adatok leolvasása a grafikonról

A 7. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Megfigyelés módja: írásos feljegyzések, hangfelvétel;

Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból):19.

A táblára előre elkészített grafikonokat rajzoltunk. KL-nek ezekről (még mielőtt tettünk volna említést róluk) a „szívfelvétel” (EKG) jutott eszébe. A grafikonok bevezetését a korábban már tanult oszlopdiagramok felelevenítésével kezdtük. Ezután a tankönyv¹¹ példájával (271. old.) magyaráztuk, hogy milyen adatok leolvasására nem alkalmas az ott ábrázolt oszlopdiagram, mely a vásárolt cukorkamennyiség és annak ára közötti összefüggést ábrázolta (5.25. ábra). Megbeszéltük, hogy a diagramról nem tudjuk leolvasni, hogy mennyibe kerül például 2,5 kg cukorka.



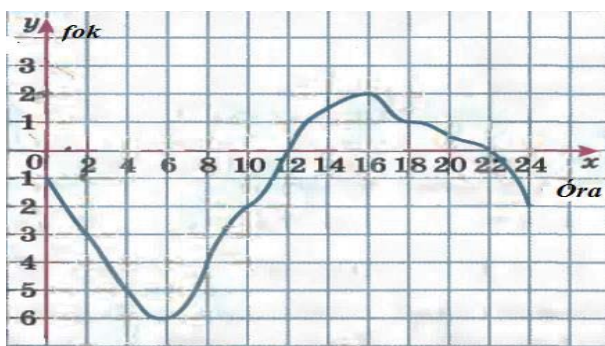
5.25. ábra

¹¹ N. A. Taraszenkova, I.M. Bohaterjova, O.M. Kolomijec, Z.O. Szerdjuk. Matematika: tankönyv 6. osztály számára. Kijev: Oszvita, 2014

Majd a grafikonok rendeltetésének magyarázatát olyan szituációval kezdtük, amikor a mennyiségek közötti kapcsolatot reprezentáló, sok adatot tartalmazó táblázatból bizonyos adatok nehezen olvashatók ki, más ábra viszont megkönnyítheti azt (például egy újszülött magasságának havonkénti rögzítése 2 éven keresztül). Beszéltünk arról, hogy a grafikon a diagram egyik fajtája, amely két mennyiség kapcsolatát, sőt az összetartozó mennyiségek változásait egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja (ekkor felelevenítettük, hogy mit értünk összetartozó mennyiségek alatt). Visszatérve a tankönyvi példához lépésről-lépésre megrajzoltuk a két mennyiség kapcsolatát ábrázoló grafikont: (1) megadtuk a tengelyek neveit; (2) ábrázoltunk néhány számpárt (hangsúlyozva, hogy milyen tömegnek milyen ár felel meg). Arra a kérdésre, hogy „...összeköthetjük-e a pontokat?” a gyerekek igennel válaszoltak és egy tanuló azt is hozzátette, hogy mindig összeköthetjük. A válasz helytelenségét egy olyan szituációval példáztunk, amikor a pontok nem köthetők össze (vásárolt füzetek száma és a fizetett összeg). Ezzel megértették, hogy az adott esetben a pontok összeköthetők, mivel a cukorkamennyiségeknek meg tudjuk mondani az árát az ismert kilogrammonkénti ár mellett, de ez nincs mindig így.

A tengelyek beosztására külön kitértünk, kiemelve, hogy azt az adatoknak megfelelően, egyénileg, racionálisan kell megadnunk. SzA megjegyzést tett arra, hogy mi az oka annak, hogy csak az I. koordináta-negyedben ábrázoltunk: „mert nem lehet negatív se a tömeg, se az ár”.

Az óra fennmaradó részében tankönyvi feladatok segítségével gyakoroltuk a grafikonról történő adatleolvasást. Az 1. feladatban¹² a grafikon a napi hőmérséklet-változást szemléltette. A grafikon a táblára is felkerült, a hozzá tartozó kérdések megválaszolására különböző tanulókat kértünk fel. A tanulók nagyon hamar leolvasták a kérdéses adatokat. A gyengébb képességű tanulók kisebb útmutatással értelmezni tudták azt (5.26. ábra).

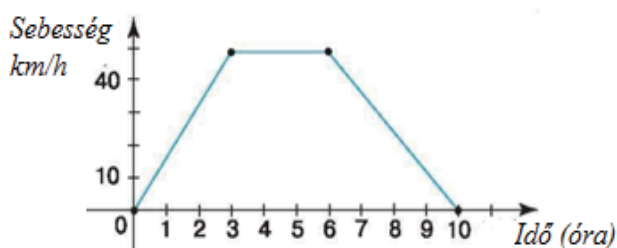


5.26. ábra

A 2. feladat¹³ (5.27. ábra) egy gépkocsi sebességének változását ábrázolta az idő függvényében. A grafikonnak már volt olyan része, mely állandó sebességre utalt. A gyerekek kisebb gondolkodás után a görbe alakjából tulajdonságának megfigyelésével elmondták a sebesség változásának jellegzetességeit: mikor növekedett, csökkent, illetve nem változott.

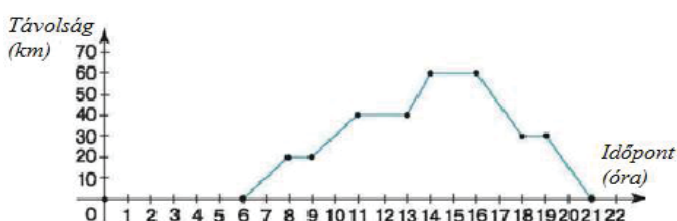
¹² A feladat a Бевз Г.П., Бевз В.Г., Математика 6. кл.: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. - К.: Генеза, 2006 tankönyv 1363. feladata (264. old.).

¹³ A feladat a N. A. Taraszenkova, I.M. Bohaterjova, O.M. Kolomijec, Z.O. Szerdjuk. Matematika: tankönyv 6. osztály számára. Kijev: Oszvita, 2014 tankönyv 1566. feladata (274. old.).



5.27. ábra

A 3. feladatban¹⁴ (5.28. ábra) egy kerékpáros mozgásgrafikonja volt látható.



5.28. ábra

Ebben az esetben a grafikon egészben szemléltése, a visszafelé út figyelembe vételének elkerülése jelentett kisebb nehézséget. Arra a kérdésre érkezett bizonytalan válasz, hogy hány km-t tett meg 19 óráig. Rávezetéssel, a szituáció valós életbe való beágyazásával, vizsgálva a görbe alaki tulajdonságait, megértették a grafikkal bemutatott mozgás jellegzetességeit.

5.5.2. Szituációhoz előre elkészített táblázat alapján grafikon szerkesztése, grafikon alapján táblázat kitöltése

A foglalkozáson valós életből vett szituációhoz előre megadott táblázat alapján grafikont kellett készíteni a tanulónak (együttváltozó mennyiségek táblázatos reprezentációjáról grafikusra való áttérés), majd egy másik szituációt reprezentáló grafikon alapján táblázat kitöltése következett (grafikonról táblázatra való áttérés).

A 8. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Megfigyelés módja: írásos feljegyzés, a gyerekek munkájának begyűjtése, hangfelvétel;

Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból):18.

¹⁴ A feladat a N. A. Taraszenkova, I.M. Bohaterjova, O.M. Kolomijec, Z.O. Szerdjuk. *Matematika: tankönyv 6. osztály számára. Kijev: Oszvita, 2014 tankönyv 1569. feladata (276. old.).*

1. feladat

Marika néni piacra vitt 50 csomó friss retket. Nagyon jó piaca volt, gyorsan eladta a portékáját. Az alábbi táblázat az eltelt idő és a Marika néninél lévő retekcsomó közötti kapcsolatot szemlélteti.

Eltelt idő (perc)	0	1	2	3	4	5	6	7
Marika néninél lévő retekcsomó (db)	50	40	30	30	20	10	10	0

Szerkesszük meg az eltelt idő és a Marika néninél lévő retekcsomó közötti összefüggést ábrázoló grafikont (feltételezzük, hogy Marika néninek folyamatosan volt vásárlója)!

(Megjegyzés: A koordináta-rendszert a tengelyek neveivel és beosztásukkal előre megadtuk.)

A foglalkozás elején felelevenítettük, mire szolgálnak a grafikonok, mik a megrajzolásuknak kezdeti lépései. A gyerekek aktívan bekapcsolódtak a párbeszédbe, érezhető volt, hogy az előző órán elhangzottakat megértették. Örültünk annak, hogy olyan lényeges aspektusokat emelték ki, mint „... mennyiségek közötti kapcsolatot ábrázolunk vele koordináta-rendszerben” és „a tengelyekre a mennyiségek nevei kerülnek”.

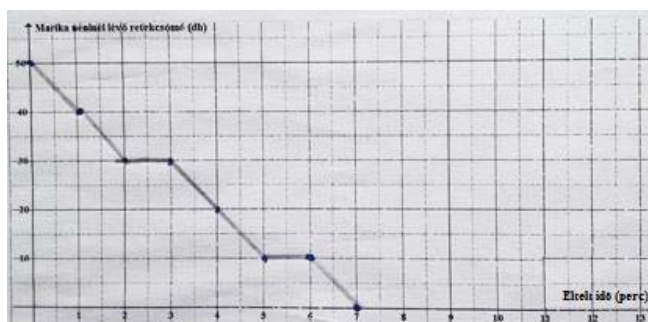
A feladatot megbeszéltük közösen. Minthogy a gyerekek falusiak voltak, a legtöbbjük családja zöldségtermesztéssel foglalkozik, így a tanulók könnyen el tudták képzelni a szituációt a tanítási kísérlet idején. Hangsúlyoztuk, hogy az összetartozó mennyiségek most táblázatban vannak szemléltetve, nekünk grafikonon kell őket ábrázolni. Megbeszéltük, hogy a táblázat első, valamint a második sorában lévő számok és maguk a számpárok, valamint az előre elkészített koordináta-rendszer tengelyei mit jelölnek. Hagytunk időt, hogy egyedül végezzék el a számpárok koordináta-rendszerben történő ábrázolását. SzA közben megjegyzést tett (0;50) számpárra: „ez azt jelenti, hogy akkor kezdett el árulni”.

Miközben a gyerekek dolgoztak, arra kértük őket, gondolkodjanak el rajta, hogy össze lehet-e kötni az ábrázolt pontokat. A gyerekek között beszélgetés kezdődött erre vonatkozóan.

Ekkor csak annyi megjegyzést tettünk, hogy figyeljenek oda, hogy most milyen típusú mennyiségek közötti kapcsolatot akarunk ábrázolni.

Miután mindenki ábrázolta a táblázatban szereplő számpárokat, a táblán megrajzolt koordináta-rendszerben is feltüntettük őket. A gyerekek a (2;30) és (3;30) számpárt helyesen „beágyazták” a szituációba miszerint ez azt jelenti „...hogy 1 perc alatt semmit sem adott el”. A közös beszélgetés során többször javítottuk őket, hangsúlyozva, hogy „nem 1 perckor volt nála 20 db retekcsomó, hanem 1 perc múlva... eltelt időről beszélünk...”. Befejezve a táblázat kitöltését, helyesen állapították meg, hogy melyik számpár utal a portéka eladására.

Ezután újratárgyaltuk a szituációt, kiemelve, hogy a feladat eltelt időről beszél és nem konkrét percről, azaz azt, hogy 1 perc eltelte után 40 csomó retek volt a néninél arról ad információt nekünk, hogy 1 perc folyamán eladott 10 csomót. Ekkor KG-től halkan jött az a megjegyzés, hogy „akkor folyamatosan...”. Ekkor már a többiek is érvelni kezdtek amellest, hogy folyamatosan is adhatta Marika néni a retekcsomókat, pontokat össze is lehetne kötni (5.29. ábra). Viszont arra is kitértünk, hogy ha összekötnénk, akkor az így kapott grafikon torzíthatná a valóságot (elemezve a grafikont megbeszéltük, hogy az adatok kevésnek bizonyulnak ahhoz, hogy pontosan ábrázoljuk a két mennyiség közötti kapcsolatot).



5.29. ábra

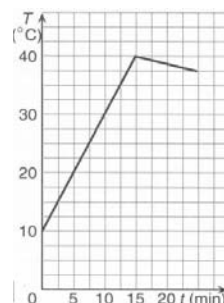
Megjegyzés: Természetesen a valóságban az áru eladása különbözőképpen alakulhat és a megszerkesztett grafikon kissé leegyszerűsíti a valóságot, annak jellege akár az első percben többször utalhat vásárlók mentes időszakra. A feladat célja viszont az volt, hogy hétköznapi életből vett szituáció segítségével sajátítsák el a táblázattal reprezentált összetartozó mennyiségek grafikonon történő ábrázolását, valamint el tudjanak gondolkodni azon, hogy a szituációnak megfelelően a grafikon pontjai összeköthetők vagy sem.

A feladat megoldása során a gyerekek egymás közötti beszélgetése és a tanári kérdésekre adott válaszai alapján elmondható, hogy a tanulók el tudták képzelni a szituációnak megfelelő grafikon milyen lehetne.

2. feladat

2. feladat¹⁵: Vízet gázlángra tesszük, majd egy bizonyos idő után elzárjuk a gázt. A víz hőmérsékletének változását a grafikon szemlélteti. A grafikon alapján töltsük ki a táblázatot!

Eltelt idő (perc)	0	5	10	15	20	25
A víz hőmérséklete ($^{\circ}\text{C}$)						



A foglalkozás 2. feladata egy adott szituációhoz előre elkészített grafikonot tartalmazott, melyből át kellett térniük az összetartozó mennyiségek táblázatos reprezentációjára.

A feladat önálló megoldását közös beszélgetés előzte meg. Kitértünk arra, hogy milyen két mennyiség szerepel a feladatunkban és az egyes tengelyek ezek közül melyiket jelölik. Arra a kérdésre, hogy mit jelenhet az, hogy az eltelt idő értéke 0, azonnali választ kaptam a gyerekektől: „akkor tettük oda a vizet”. A tengelyek beosztása okozott kisebb zavart a tanulóknban. Első ránézésre azt is mondták, hogy nem jól van beosztva, majd miután megbeszéltük (aránypárral is meghatároztuk), hogy mi az egységnek jelölt érték (2 négyzetrácsnyi lépéssel az 5-ös számhoz jutunk, akkor 1 négyzetrácsnyival a 2,5-hez), már rájöttek az abszcissa-tengely beosztására. A táblázat első négy oszlopának hiányzó adatait könnyen leolvasták a grafikonról. A grafikon a táblán is szemléltettük, melyek segítségével ellenőriztük a válaszok helyességét is (a gyerekek az önálló munka folyamán ceruzával

¹⁵ A feladat a Hajdu Sándor: Matematika 6. osztály c. tankönyv 123. old. található.

dolgoztak és az esetleges helytelen válaszokat kértük, hogy tollal javítsák, de ilyennel a feladatlapjuk megtekintése során nem találkoztunk).

Az, hogy hány fokos volt a víz 20 perc és 25 perc után, számítottunk rá, hogy nehézségekbe fog ütközni, szintén a tengely beosztása miatt. Néhányan sikeresen kitöltötték önállóan ezeket a cellákat, de annak érdekében, hogy mindenki megértse, a táblán lévő grafikon felhasználva a gyerekek bevonásával határoztuk meg, hogy az ordináta-tengely milyen beosztású. Ezt követően már könnyen le tudták olvasni a hiányzó adatokat a grafikonról és teljesen kitöltöttük a táblázatot. A görbe alakjára tulajdonságait elemezték, annak megváltozására (növekedés, majd csökkenés) is helyes magyarázatot adtak.

Tanár: „Mi történt 15 perc után?”

Gyerekek: „Levettük a vizet”

Tanulságok

A tanítás előtt az volt a hipotézisünk, hogy a grafikonok értelmezése, arról történő adatleolvasás a mennyiségek közötti kapcsolatok (a vizsgált tanulók számára) új reprezentációs módja, többórás fejlesztést igényel majd. Ennek ellenére a mindennapi életből vett szituációkat ábrázoló grafikon értelmezése ezen 6. osztályos tanulóknak nem okozott nehézséget. Összegezve a tanulók órai tevékenységét elmondható, hogy ezek a tanulók nagyon hamar megértették a grafikonok rendeltetését és az arról történő adatleolvasás módját. Elmondható, hogy a tanulók értelmi fejlődésük ezen szakaszában (konkrét műveletek szakaszából formális műveletek szakaszába való átmenet) képesek egészen látni a grafikon, a görbe alakjának megváltozása alapján maguk előtt látják a változás jellegzetességeit. Képesek eligazodni a mindennapi élet grafikonjain. Viszont a tengelyek beosztásából előforduló grafikonleolvasási nehézségek kiküszöbölésére további feladatok jelenthetnek segítséget.

5.5.3. Szituációk eljátszása az együtváltozó mennyiségek táblázatos és grafikus ábrázolásának előkészítéséhez

A foglalkozás célja az eljátszott szituáció sajátos élménnyé történő formálásával az események epizodikus emlékezetben történő tárolásának megcélzása volt.

A 9. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Megfigyelési mód: írásos feljegyzések, hangfelvétel, fényképek;

Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból):18.

1. feladat

Judit hétfőtől kezdve egy héten keresztül minden nap annyi gombóc fagyit vett, ahányadik napja volt aznap a hétnek. Egy gombóc fagyit 3 hrivnyába került.

Szemléltessük a) táblázattal; b) nyíldiagramon; c) grafikonnal a vásárolt gombócok száma és a fizetett összeg közötti kapcsolatot!

Fogalmazzuk meg matematika nyelvén (írjuk le kifejezéssel) a két mennyiség közötti kapcsolatot!

Míg a gyerekek gondolkodtak a feladaton, a táblára felrajzoltuk a két mennyiség közötti kapcsolatot szemléltető üres táblázatot. A fejlécek különböző színű lapok voltak, a „vásárolt gombóc száma” felirat a piros lapra, a „fizetett összeg” felirat pedig a zöld lapra került. Ezzel ezen két halmaz („vásárolt gombóc száma” és „fizetett összeg”) közötti különbségtételt céloztuk meg.

Felolvasva a feladatot kérdések segítségével próbáltunk megbizonyosodni arról, hogy megértették azt.

Tanár: „...azaz hány napon keresztül vett fagyit?”

Gyerekek: „hét”

Tanár: „...ezek szerint kedden hány gombócot vett?”

Gyerekek: „kettőt”

Még mielőtt hozzákezdünk a szituáció eljátszásához, a gyerekek is megrajzolták a füzetükben a táblázatot, valamint készítettek egy koordináta-rendszert is.

A vásárolt gombócok számát és az azokért fizetett összegeket a megfelelő színű cédulákra írtuk. Minthogy 7 számpárnak kellett kerülni a táblázatba, 14 gyereket választottunk ki a szituáció eljátszására: 7 gyerek piros cédulákat, 7 pedig zöldet kapott, melyeken a számpárokat alkotó számok voltak. A két csoport egymással szemben, elkülönítve helyezkedett el (5.30. ábra).



5.30. ábra

A helyükön maradt gyerekek feladata az volt, hogy keressenek egy, a feladat feltételének megfelelő „párost” (5.31. ábra) és a kapott számpárt írják be a táblázat megfelelő celláiba. A „pár” tagjai pedig nyíldiagramon és grafikonon ábrázolták a megtalált számpárt.



5.31. ábra

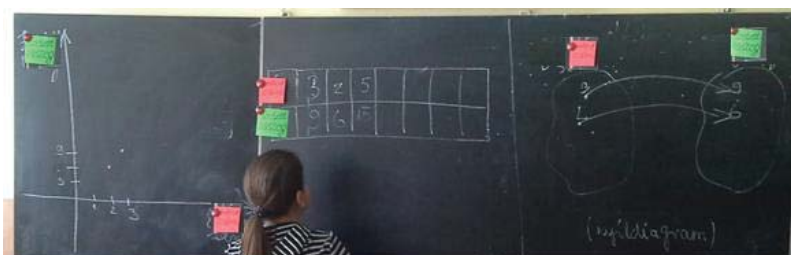
Miután az elsőnek kihívott gyerek megtalált egy párt, a számokat beírta a táblázat megfelelő celláiba. Ezt követően az összetartozó mennyiségek nyíldiagrammal történő ábrázolását mutattuk be a gyerekeknek.

Ekkor ugyanúgy színes lapokkal jeleztük a két mennyiség mérőszámainak halmazát.

Tanár: „...mint látjátok, a gombócok számát elkülönítettük: egy csapatba, halmazba soroltuk ezeket a számokat olyan tulajdonság alapján, hogy ők a vett gombócok számát jelölik, hasonlóan a fizetett összegeket egy másik halmazba”.

Miután mindkét halmazba beírtuk a megfelelő számokat, összekötve a két számot hangsúlyoztuk, hogy a nyíl mutatja azt, hogy egyik halmazból vett elemnek milyen elem felel meg a másik halmazban (érdekes volt egy gyerek megjegyzése: „ennyi?”)

Ezután a „pár” egy tagja grafikonon ábrázolta a kapott számpárt (figyelve a beosztásra) és leültek a helyükre (5.32. ábra)



5.32. ábra

A szituációt egészen addig játszottuk el, míg az utolsó számpár is mindhárom módon (táblázat, nyíldiagram és grafikon) ábrázolásra került (a már megtalált „párok” tagjai elfoglalták helyüket, ahol a füzetükben is elkészítették a táblán lévő ábrákat).

A feladat utolsó része a mennyiségek közötti kapcsolat matematika nyelvén történő lejegyzése volt. Annak érdekében, hogy rálátást kapjunk arról, mennyire volt hatékony a fejlesztő program első része, a gyerekeket önálló munkára kértük fel. A tanulók felének sikerült leírni kifejezéssel a kapcsolatot (BG például a következő képletet írta le: „ $a \cdot 3 = b$, a -gombóc, b -fizetett összeg”). Ezért közös munkával, a mennyiségek értékeit változókkal jelölve, lépésről-lépésre megadtuk képlettel a felismert kapcsolatot és arra kértünk néhány tanulót, hogy ezt szavakkal is fogalmazza meg (a megfogalmazástól már nem idegenkedtek: „ a gombócok számát ha megszorozzuk 3-mal, kijön, hogy mennyit fizetett”).

2. feladat

Judit hétfőtől kezdve 10 napon keresztül minden nap annyi gombóc fagyit vett, ahányadik napja volt aznap a hének. Egy gombóc fagyi 3 hrivnyába került.

Szemléltessük a) táblázattal; b) nyíldiagramon; c) grafikonnal a napok sorszáma és a fizetett összeg közötti kapcsolatot!

A foglalkozás 2. feladata az előző feladatba vitt kisebb változtatásokat tartalmazott. A változtatások célja az volt, hogy a gyerekek megtapasztalják azt az esetet is, amikor egy

másik független változónak (napok sorszáma) ugyanaz a függő változó (fizetett összeg) felel meg.

A szituáció eljátszásának módszere ugyanolyan volt, mint az 1. feladat esetében. Mivel ebben az esetben az alaphalmaznak több eleme volt, mint az előzőben, ezért egy gyereket választottunk, aki a számpárok megtalálásáért volt felelős (az osztály teljes létszámmal (25 fő) vett részt a játékban). Miután a kiválasztott tanuló megtalált egy „párt” (9;6), arra kértük, hogy érveljen választása mellett:

KG: „a 9. nap a kedd, ugyanis újra indul a hét”

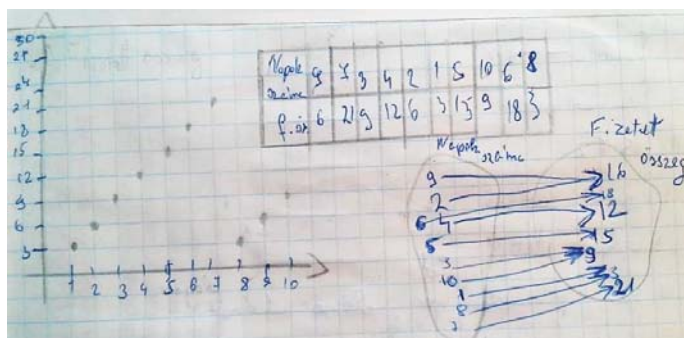
Tanár: „9. nap a kedd, vagyis akkor hány gombóc fagyit vett?”

KG: „2”

Tanár: „Akkor mennyit fizetett?”

KG: „6 hrivnyát”

A megtalált „párok” már nem ültek le. Amikor KG olyan napot választott ki (6.), melyhez már fizetett összeget nem talált a zöld cédulákat tartó gyerekek csoportjából, felhívtuk a gyerekek figyelmét, hogy kiválasztott számnak ugyanaz a szám felel meg, mint ami a 9. napnak. A táblázat kitöltése után az előző és jelen feladat közötti legfőbb különbség megbeszélése következett: ebben az esetben az egyik mennyiség különböző értékeinek a másik mennyiség egyazon értéke felelt meg. A mennyiségek közötti kapcsolat nyíldiagrammal és grafikonnal történő reprezentálását csak 2 elempár ((9,6) és (2,6)) erejéig végeztük el a foglalkozáson, a fennmaradó elempárokkal házi feladat keretében dolgoztak (5.33. ábra).



5.33. ábra

5.5.4. Valós életből vett szituációk különböző reprezentálása (diszkrét eset)

A 10. foglalkozáson olyan valós életből vett szöveges feladatokban rejtőző összetartozó mennyiségek közötti kapcsolat különböző reprezentálását (táblázat, nyíldiagram, grafikon, képlet) hivatott szolgálni, melyeket diszkrét függvénnyel lehetett modellezni.

A 10. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Megfigyelési mód: írásos feljegyzések, hangfelvétel, a tanulók írásbeli munkájának összegyűjtése;

Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból):19.

1. feladat

Zsuzsi néni 10 kg uborkát vitt a piacra. 1 kg uborkát 35 hrvnyáért árult. Mennyi pénzt kaphatott az eladott uborka mennyiségért Zsuzsi néni a piac végére, ha az uborkát egész kilogrammonként adta el?

a) Készíts táblázatot az eladott uborka mennyisége (kg) és azért kapott pénzt közötti kapcsolatáról!

b) Mutasd meg nyíldiagramon a táblázatban szereplő összetartozó mennyiségeket!

c) Ábrázoljuk grafikonon az eladott uborka mennyisége (kg) és azért kapott pénz közötti kapcsolatot!

d) Fogalmazd meg matematika nyelvén és szavakkal is a feladatban szereplő összetartozó mennyiségek (eladott uborka mennyisége (kg) és azért kapott pénz) közötti kapcsolatot!

A feladat elsősorban a fejlesztő program első részének hatékonyságát ellenőrizte. A jelen feladattípussal a tanulók a kísérleti tanítás 5. foglalkozásán találkoztak, ahol a feladat megoldásának nehézségét a benne rejtőző, több lehetséges megoldásra utaló „kulcsszó” megtalálása jelentette (lásd dolgozat 91. old.).

A gyerekek egyedül dolgoztak. Figyelve a munkájukat, az összetartozó mennyiségek táblázatos reprezentációját mindenki sikeresen megadta (felismerték az implicit módon adott együttváltozó mennyiségeket). Miután a tanulók ezzel végeztek, a nyíldiagramos ábrázolást is gyorsan elkészítették. Így megbizonyosodtunk afelől, hogy az 5. foglalkozáson eljátszott szituáció („telefonbeszélgetés”) hatékonyan bizonyult a feladatban rejtőző „bemenő” adatokra utaló „kulcsszó” (kaphatott) felismerésében, igaz a jelen feladat a) része is segítségére lehetett a tanulónak. Miután megkérdeztük őket, hogy melyik szó utalhatott arra, hogy többféle megoldásunk lehet, ND így válaszolt: „az, hogy mennyit kaphatott...”. Ezt követően a táblára is felkerült az összetartozó mennyiségek közötti kapcsolatot reprezentáló táblázat. Néhányuknál a nyíldiagram és a grafikon szerkesztésénél felhívtuk a figyelmet az egyes halmazok, valamint tengelyek neveinek megadására.

RE a pontokat összekötötte (a többi tanuló nem). KL nagyon helyes érvelést adott amellest, hogy ez miért nem lehetséges: „mert egész kilogrammokat adott el”.

A matematika nyelvén való megfogalmazás néhány tanulónak okozott kisebb nehézséget oly módon, hogy az eladott uborkamennyiséget megjelölte változóval, azt megszorozta a kilogrammonkénti árral, de nem mutatta meg, hogy ezzel mit tud kiszámolni, s ezzel így nem létesített képlet formájában kapcsolatot a két mennyiség között (például: „ $35 \cdot u$ ”). Összességében az órán jelen lévő 19 tanuló közül 16 helyesen reprezentálta képlettel a mennyiségek közötti kapcsolatot. Azaz tapasztalati függvények alkotása abban az esetben, ha a változók közötti kapcsolatot egylépéses szabály definiálja a foglalkozásoknak köszönhetően sikeres volt.

Annak érdekében, hogy mindenki megértse, mit is jelent a matematika nyelvén történő kapcsolatteremtés, a 4. és az 5. foglalkozásokhoz hasonlóan lépésről-lépésre jutottunk el annak felírásához: először bevezettük az eladott uborkamennyiség jelölésére az u változót, majd megbeszélve, hogyan számoljuk ki, hogy tetszőleges uborkamennyiségért mennyi pénzt kap Zsuzsi néni, jelöltük a kapott pénzt k -val, és megadtuk az általános megoldást („ $k = 35 \cdot u$ ”) és megfogalmaztuk szavakkal is („az eladott uborkamennyiséget, ha megszorozzuk 35-tel, akkor megkapjuk, hogy mennyi pénzt kapott Zsuzsi néni”).

2. feladat

Peti elhatározta, hogy anyák napja közeledtével szerdától kezdve anyák napjáig (vasárnapig) minden nap meglepi anyukáját virággal. Úgy tervezte, hogy az első nap 1 szál virágot, majd minden következő nap 2 szál virággal többet ad édesanyjának, mint amennyit előző nap adott. 5 napon keresztül, azaz anyák napjáig így tett, majd, hogy az ünnep varázsa megmaradjon, még a 6., a 7. és a 8. napokon is adott egy-egy szál virágot anyukájának.

- Készíts táblázatot a napok sorszáma és az anyának adott virágszálak közötti kapcsolatáról!
- Mutasd meg nyíldiagramon a táblázatban szereplő összetartozó mennyiségeket!
- Ábrázold grafikonon a napok sorszáma és az anyának adott virágszálak közötti kapcsolatot!

A feladat célja az előző foglalkozás megerősítése, az epizodikus emlékezetből történő előhívása volt, azaz olyan valós életből vett, összetartozó mennyiségeket tartalmazó feladat megoldása volt, melyben a szituáció eljátszása nélkül kellett felismerni a tanulóknak, hogy az alaphalmaz különböző elemeinek egyazon elem felel meg a képhalmazból.

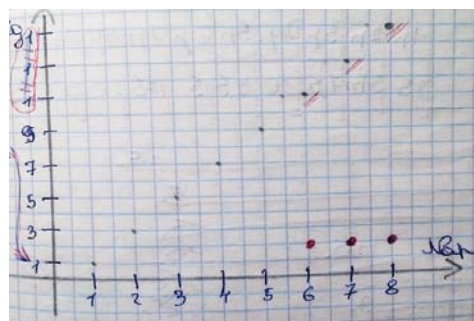
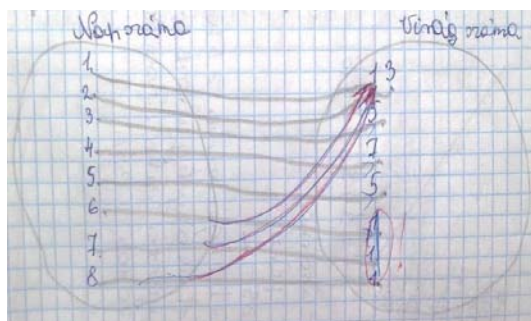
A tanulók az első öt naphoz hozzárendelték a megfelelő virágszál mennyiséget, viszont 5 gyerek a feladat feltételét figyelmen kívül hagyva, követve a felismert szabályt rendelte a többi nap sorszámahoz a 11, 13 és 15 számokat. Ekkor felhívtuk a figyelmüket a feladat utolsó mondatának újbóli értelmezésére, mely után javították a táblázatuk megfelelő celláit (5.34. ábra).

Napok sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8
Virágszál (db)	1	3	5	7	9	1	1	1

5.34. ábra

A gyerekek felének sikerült, általánosságban azoknak, akik a korábbi foglalkozásokon is teljes választ adtak, a kitűzött feladatok mindegyik kérdésére helyes választ adni.

A többieknél a következő hibák jelentkeztek: a nyíldiagramos ábrázolásnál a virágszálak halmazában annyiszor tüntették fel az 1-es számot, ahány elemet rendeltünk hozzá a napok sorszáma halmazából. Ennek megfelelően volt, aki az 1-es számot többször tüntette fel a koordináta-tengelyen is (5.35. ábra).



5.35. ábra

Ezek a hibák arra engednek következtetni, hogy az ilyen feladattípus (több-egyértelmű leképezés) egyszeri eljátszása és összekapcsolása az együttváltozó mennyiségek reprezentációival ezen tanulóknak kevésnek bizonyult és további fejlesztést igényel.

5.5.5. Valós életből vett szituációk különböző reprezentálása (folytonos eset)

Az utolsó foglalkozáson olyan valós életből vett szöveges feladatok megoldásával foglalkoztunk, melyeket folytonos, lineáris függvénnyel lehetett modellezni.

A 11. foglalkozás leírása, tapasztalatok ismertetése

Megfigyelési mód: írásos feljegyzések, a tanulók írásbeli munkájának megfigyelése, összegyűjtése;

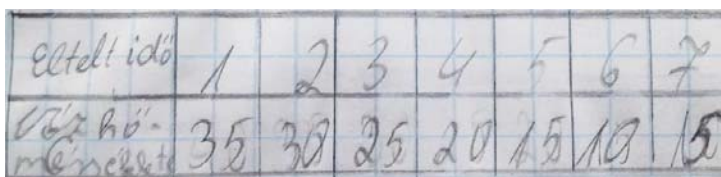
Az órán jelen lévő tanulók száma (a vizsgált 20-ból):18.

1. feladat

- 40 °C-os vizet hűtünk 7 percen keresztül. Percenként 5 °C-kal csökken a víz hőmérséklete.
- a) Készíts táblázatot az eltelt idő és a víz hőmérséklete közötti kapcsolatáról!
 - b) A táblázat segítségével szemléltesd grafikonon a víz hőmérsékletváltozását!
 - c) Fogalmazd meg szavakkal és matematika nyelvén, hogyan függ a víz hőmérséklete az eltelt időtől!
 - d) Hány °C-os lesz a víz 10 perc múlva?
 - e) Hány perc múlva lesz a víz hőmérséklete 10 °C?

Ez a feladat több szempontól is eltér az eddigi foglalkozásokon kitűzöttektől. Egyrészt az összetartozó mennyiségek változása „ellentétes irányú”, azaz, ha az egyik mennyiség növekszik, a másik mennyiség csökken, másrészt olyan tapasztalati függvény alkotását célozza meg, ami már kétlépéses szabállyal adható meg. Ennélfogva számítottunk arra, hogy a gyerekek nehezebben tudják elképzelni a grafikon alakját és megfogalmazni matematika nyelvén a kapcsolatot.

Az eltelt idő és a víz hőmérséklete közötti kapcsolatot szemléltető táblázatot a tanulók fele (a korábbi foglalkozásokon is jól szereplő tanuló) készítette el helyesen. 4 tanuló táblázatából a kezdeti hőmérsékletre utaló (0;40) számpár hiányzott (5.36. ábra).



eltelt idő	1	2	3	4	5	6	7
víz hő- mérséklete	35	30	25	20	15	10	5

5.36. ábra

További 4 tanuló valószínűleg a feladat értelmezése jelentett problémát, ők az eltelt perchez olyan hőmérsékletet rendeltek, amennyit az adott perc elteltével hűlt a víz (például: (1;5), (2;10)). Célszerűnek találtuk, hogy elmagyarázzuk a szituációt: „... képzeljétek el, hogy most 40 °C a víz, eltelt 1 perc, csökkent 5 °C-val, eltelt még egy perc, újra csökkent 5 °C-kal...”. Miután a táblázattal mindenki elkészült (azok is kijavították, akiknél hibákat véltünk felfedezni), egy üres táblázatot rajzoltunk a táblára és a gyerektől érkező számpárokkal kitöltöttük azt. Így egy elempár kimaradt a táblázatból, amit SzA helyesen jegyzett meg: „ez a

(0;40)”. Megbeszéltük, hogy ez mutatja azt, hogy hány fokos volt a víz eredetileg, még mielőtt elkezdtük hűteni.

A grafikon szerkesztésénél 4 tanulónál észrevettük, hogy a függőleges tengelyen olyan sorrendben tüntették fel a víz hőmérsékletét jelölő számokat, ahogyan az a táblázatban szerepelt (az origótól indulva 35, 30, 25, 20, 15, 10, 5). Ennek okát abban találjuk, hogy az előző órákon szerkesztett táblázatokban a függő változó értékei növekvő sorrendben szerepeltek, így automatikusan dolgoztak, nem figyelve arra, hogy a tengelyek számegyenesek. Továbbá az eddig vizsgált kapcsolatokat leíró függvények növekvők volt, így módon ezekben a gyerekekben az ezeket reprezentáló grafikon képe rögzült, azaz a grafikon fogalmához olyan jellemzőt is társítottak, ami nem lényeges (például növekedés). Indokoltnak találtuk annak hangsúlyozását, hogy általában hogyan rendeljük hozzá a mennyiségek értékeihez a tengelyek pontjait.

A következő lépésben alakjának tárgyalását céloztuk meg. A tanulókat a 10. foglalkozáson megszerkesztett grafikon megtekintésére kértük, ami növekvő függvényt ábrázolt (lásd 10. foglalkozás 1. feladata), magyarázva annak szituációból eredő okát (a növekedés elképzelésére a hegyremászás példáját hoztuk fel). Ezt követően jelen szituáció grafikonjának elképzelését igyekeztünk megcélolni azáltal, hogy kiemeltük a kontextusból az erre utaló szót („csökkent”). A megbeszélést követően a számpárokat feltüntettük a koordináta-rendszerben. Arra a kérdésre, hogy összeköthetjük-e a pontokat, különböző válaszok érkeztek. Akik amellet érveltek, hogy nem lehet, az eltelt időt csak egész perceknek tekintették. ND érvelése szerint „...összekötjük, mert biztosan volt 34 °C-os is...”. Helyeselve ND válaszát, újra felhívtuk a gyerekek figyelmét arra, hogy milyen mennyiség értékei vannak a vízszintes tengelyen.

A matematika nyelvén való megfogalmazás senkinek sem sikerült, és bár a próbálkozásaik hibásak voltak, mégis ki kell emelnünk, hogy az eltelt időt és a víz hőmérsékletét az eddig foglalkozásokon használt betűktől eltérő betűkkel jelölték. Ez arra enged következtetni, hogy a tevékenységek segítségével sikerült elérni azt a célt, hogy a változó funkciójához ne csak 1-2 betű rögzüljön. Néhány felírt képlet ($a-5=b$; $a-5=b$; $c-5=h$, ahol a és c a percek, b és h a víz hőmérsékletét jelölték) helytelenségének megbeszélése után kiemeltük a ND-jét ($a-5=b$), ellenőrizve azt az (1;35) számpárra. Ekkor már észrevették, hogy valami még hiányzik, majd HÁ kiegészítette a képletet ($40-a-5=b$). Ezt követően az a néhány értéke mellett ellenőriztük, hogy megkapjuk-e a hozzátartozó hőmérséklet értékét. A tanulók többsége a képlet leírása előtt a füzetében helyes választ adott a feladat d) és e) kérdéseire, de annak érdekében, hogy a szabálykövetést is gyakoroljuk, a képletet felhasználva is választottunk a feladat utolsó két kérdésére.

2. feladat

Egy kerékpáros 2 órán át 14 km/ó egyenletes sebességgel haladt. Ezután 1 órát pihent, majd ugyanilyen sebességgel még 2 órát kerékpározott.

- Készíts táblázatot az eltelt idő és a megtett út közötti kapcsolatáról!
- A táblázat segítségével szemléltesd a kerékpáros mozgásgrafikonját!
- Hány kilométert kerékpározott összesen?

A feladat a korábban bemutatott ukrain tankönyv (lásd 2.2. alfejezet) 1371. feladatának (266. old.) módosított változata.

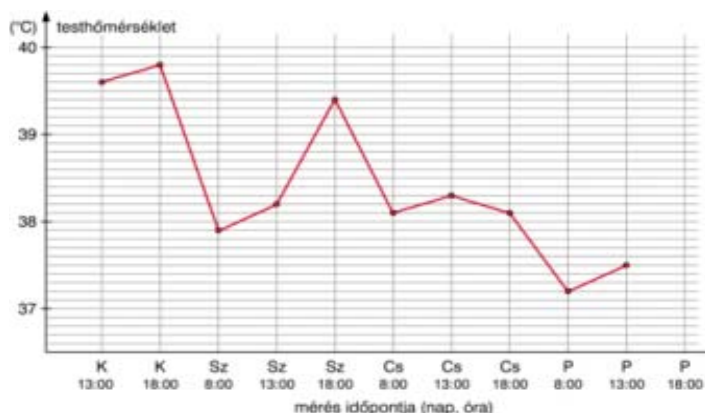
Ismétlés céljából tűztük ki, mivel elemeivel a grafikonok bevezetésére kitűzött órán (7. foglalkozás), valamint házi feladatként már találkoztak, de akkor csak adatleolvasás volt a cél. Most a függvény folytonossága mellett a konstans függvény kiemelése is cél volt. Ennélfogva, időhiány miatt közös megbeszéléssel próbáltunk válaszolni a feladat kérdéseire. Főleg a kiindulási pont táblázatban történő feltüntetésére fektettünk hangsúlyt, mivel az előző feladatban is néhányuk ezt figyelmen kívül hagyta. A pihenőt jelentő órák megfelelő megtett út megtalálásában mutattak némi bizonytalanságot, de KG helyesen jelezte „... tartotta az addigi km-t”. A többi számpárt ezután már probléma nélkül megadták. A grafikon szerkesztésében is magabiztosan jártak el, a tengelyek racionális beosztására is figyelmet fordítottak. A pontok összeköthetősége mellett 1-2 tanuló még hezitált, a többiek viszont határozottan kiálltak amellett, hogy „telt az idő, közben haladt...”, „vagyis össze lehet kötni a pontokat”.

5.5.6. Az utóteszt elemzése

A fejlesztő program második része után egy héttel, 2016. május 11-én a témazáró dolgozat keretein belül vizsgáltuk annak hatékonyságát. A tanulók a grafikonok témakörhöz kapcsolódóan 2 feladatot kaptak (lásd Mellékletek, 17. old.).

Az 1. feladat¹⁶ adatok grafikonról történő leolvasására irányult.

Peti influenzás lett és magas láza volt. Édesanyja keddtől péntekig naponta háromszor mérte a lázát és feljegyezte a mérések eredményeit. Ezekből anyukája az ábrán látható grafikonot készítette.



a) A grafikon alapján töltsd ki a táblázatot!

¹⁶ A feladatban szereplő grafikon Jakab Tamás, Dr. Kosztolányi József, Pintér Klára, Vincze István, *Sokszínű matematika 7. évfolyam, 9. kiadás, 2016 tankönyvből* való.

<i>A mérés időpontja (nap, óra)</i>	<i>K, 18:00</i>	<i>Sz, 13:00</i>	<i>CS, 8:00</i>	<i>Cs, 18:00</i>	<i>P, 13:00</i>
<i>Testhőmérséklet ($^{\circ}\text{C}$)</i>					

- b) Mikor volt a legmagasabb a testhőmérséklete? Mennyi volt ekkor?
c) Hogyan változott a testhőmérséklete kedd 18:00 órától szerda 8:00 óráig?
d) Melyik nap folyamán fordult elő az, hogy a 8:00, 13:00 és 18:00 órai mérési eredmények között kis különbségek voltak?
e) Mennyi volt pénteken 8:00-kor a testhőmérséklete? Meggyógyult-e Peti péntek reggelre?

A 2. feladat szövegben rejtőző együttváltozó mennyiségek, az azok közötti kapcsolat felismerésére és különböző módon történő reprezentálására irányult.

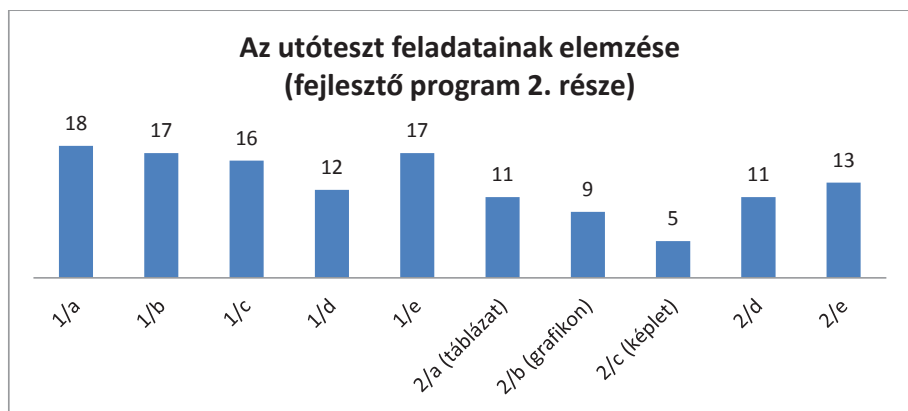
Egy 14 cm-es gyertyából percenként 2 cm elég.

- a) Készíts táblázatot az eltelt idő és a gyertya magassága közötti kapcsolatról!
b) A táblázat segítségével szemléltesd grafikonon a gyertya magasságának változását!
c) Fogalmazd meg szavakkal és matematika nyelvén, hogyan függ a gyertya magassága az eltelt időtől!
d) Hány cm magas lesz a gyertya 5 perc múlva?
e) Hány perc múlva ég el a gyertya?

A feladat a fejlesztő program 6. foglalkozásán (lásd Mellékletek, C feladat, 13. old.) is szerepelt más számadatokkal, a feladat megoldását leíró algebrai kifejezést kellett megkeresni.

Tapasztalatok

Az utóteszten 18 tanuló vett részt. Az egyes feladatok megoldottságát az 5.37. ábra mutatja.



5.37. ábra

Láthatóan az 1. feladat nem jelentett nehézséget a tanulóknak, a kért adatokat sikeresen leolvasták a grafikonról. A feladat c) részében jól látták, hogy a hőmérséklet csökken, de a csökkenés mértékét a kivonási hiba miatt tévesztették. A d) rész kérdésére 4 tanuló szerdát

írta válaszkét, 2-en pedig a kérdéses időpontok közötti hőmérsékletváltozást figyelték meg (például. ÓDzs válasz: „*kicsi és nagy*”).

A 2. feladatban az összetartozó mennyiségek közötti kapcsolatot leíró szabály kétlépéses volt. A mennyiségek táblázatos reprezentációját helytelenül megadó tanulók között voltak azok (ÓDzs, MM, KL, RE, SzL), akik a hasonló, kétműveletes szabállyal leírható kapcsolatot vizsgáló foglalkozás során (lásd a 11. foglalkozás 1. feladata) is nehezen ismerték fel az együttváltozó mennyiségeket és reprezentációjuk is problémát jelentett számukra. Hasonló hibák is jelentkeztek: az eltelt időhöz rendelték a gyertyából az adott idő alatt leégő mennyiséget (például: (1,2) számpárt képzetek, ahol 1 az eltelt időt, 2 a gyertya magasságát jelentett számukra). Az említett tanulók az általuk elkészített táblázat alapján a grafikon megszerkesztették, a tengelyek beosztására és azok jelölésére viszont már figyeltek, valamint próbálkoztak az általuk felismert kapcsolat szavakkal és matematika nyelvén történő megfogalmazásával is. Ha ezen tanulók a utótesztben nyújtott teljesítményét összehasonlítjuk a 10. foglalkozás 1. feladatának teljesítményével (a kapcsolat egy lépéses szabállyal volt leírható), akkor úgy véljük, hogy náluk a kétlépéses szabállyal leírható kapcsolatok felismerése még további fejlesztést igényel.

2 tanulónál a táblázatos reprezentációról a grafikusra való áttérésnél a gyertya magasságát mutató tengely beosztása, vagy a pontok összekötése miatt vált helytelenné a megszerkesztett grafikon (hasonló hibákkal találkozunk a 8. osztályos felmérés 6. feladata esetén is mindkét tanulói csoportban) (lásd a dolgozat 4.5. alfejezete).

Ahogyan a számadatok is mutatják a grafikon értelmezése és az arról történő adatleolvasás a kipróbált tevékenységeknek köszönhetően sikeresnek mondható. A mennyiségek közötti kapcsolat képlettel történő reprezentálása abban az esetben, ha az kétlépéses szabállyal írható le, még nehézséget jelent a tanulók többségének. Ez arra enged következtetni, hogy a szöveges kontextusban rejtőző kétlépéses szabályfelismerés és –alkotás további fejlesztést igényel, hisz a fejlesztő program első részét követő utótesztben is alacsony számban általánosították az ilyen típusú feladatot (5.24. ábra).

5.6. A FEJLESZTŐ PROGRAM HATÉKONYSÁGÁNAK VIZSGÁLATA

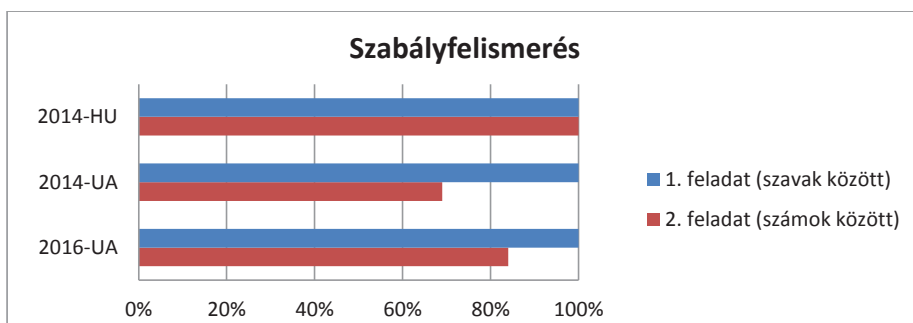
A fejlesztő program záró „akkordjaként”, mint késleltett tesztet, a tanév utolsó hetében, 2016. május 23-án a tanulók kitöltötték ugyanazt a feladatlapot, amit a 2014-es felmérés (lásd a dolgozat 3.4. fejezete) során használtunk a szabályfelismerő és –követő képességek vizsgálatához 6. évfolyamon (lásd Mellékletek, 1. old.). Célunk a *K3.3. kérdés* megválaszolása volt.

A felmérésen 19 tanuló vett részt. A feladatlap kitöltésére 30 perc állt rendelkezésükre.

1. és 2. feladat

Mindkét feladatban az együttváltozó mennyiségek táblázattal voltak reprezentálva. A közöttük lévő kapcsolat felismerését és a felismert kapcsolat mellett szavakkal történő érvelést vártuk el a tanulóktól. Az 5.38. ábra a 2014-es és a fejlesztő program utáni felmérés eredményeit hasonlíttja össze a szabályfelismerő és –követő képességek 1. szintjén (lásd

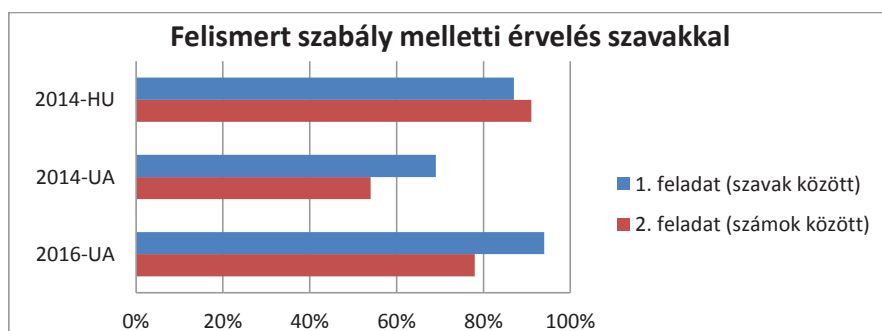
dolgozat 4.3. alfejezete). Azaz azon tanulók arányát, akik felismertek valamilyen kapcsolatot az elempárok között. (A helyes megoldást adó tanulók számát %-osan adtuk meg.)



5.38. ábra

Amint az 5.38. ábra is mutatja a 2. feladat esetében a táblázattal reprezentált számpárok között nagyobb arányban ismertek fel kapcsolatot a fejlesztő programban résztvevő tanulók és ez már majdnem közelítette a 2014-es felmérésben résztvevő HU tanulók arányát. Azon 3 tanulónak jelentett ez a feladat nehézséget, akik mind a foglalkozásokon, mind pedig az utóteszteken gyengébben teljesítettek (ÓDzs, SzL, MA). Közülük 2 gyerek (SzL, MA) a táblázat alsó sorát helyesen töltötte ki, de a felismert szabály inverzét nem alkalmazta.

A felismert szabály mellett szavakkal is érvelt (2. szint) az 1. feladatnál 18, míg a 2. feladatnál 15 tanuló (5.39. ábra). A többi tanuló, akik bár felismertek kapcsolatot az elempárok között, a feladatoknak ezen részeit kihagyták. Amint az 5.39. ábra is mutatja, a felismert szabály melletti érvelésben fejlődtek a fejlesztő programban résztvevő tanulók, a korábbi felmérés résztvevőiehez képest és a HU tanulók arányát közelítették.

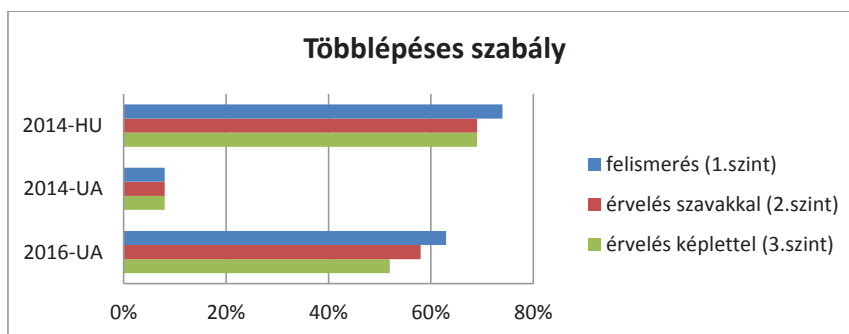


5.39. ábra

3. feladat

A feladatban a táblázat többlépéses szabállyal leírható összetartozó elemeket reprezentált. Ennél jelentkezett a legnagyobb „ugrás” a korábbi teljesítményhez képest. Az 5.40. ábra is jól mutatja, hogy míg 2014-ben a vizsgált UA tanulók mindössze 8 %-a ismerte fel a kétlépéses szabállyal definiálható kapcsolatot (1. szint) és érvelt szavakkal (2. szint), valamint képlettel (3. szint) a felismert kapcsolat mellett, addig jelen felmérésben résztvevő tanulók több mint a fele teljesítette mind a három szint kritériumát. Láthatólag, a táblázattal reprezentált

többlépéses szabály felismerésében, az a mellett szavakkal és képlettel történő érvelésben a fejlesztő programban résztvevő tanulók aránya szintén jól közelítette a HU tanulók arányát.



5.40. ábra

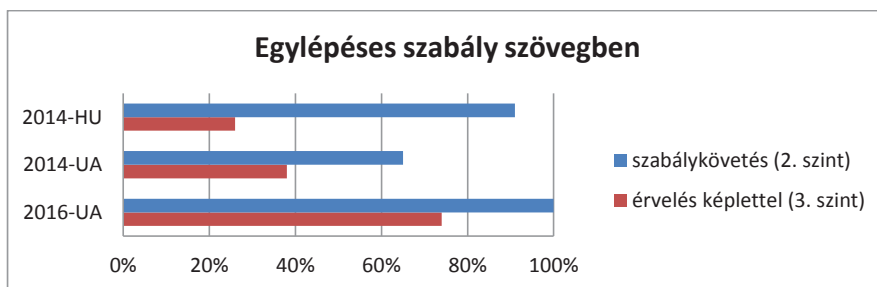
4. feladat

Az explicite adott kétlépéses szabály követése terén (2. szint) nem mutatkozott jelentősebb eltérés a 2014-es eredményekhez képest. Akkor a vizsgált UA tanulók 46%-a, a HU tanulók 91%-a követte a megadott szabályt és töltötte ki a táblázatot: az x változó különböző értékei mellett alkalmazva a szabályt, helyesen határozta meg az y értékét. Most a 19 tanuló közül mindössze 8 gyerek (42%) töltötte ki helyesen a táblázatot és fogalmazta meg a követett szabályt is. A többi tanuló vagy csak egy lépéses szabállyal dolgozott (az x kétszeresét meghatározta, de ehhez már nem adta hozzá a 3-at vagy az x értékeihez csak hozzáadott 3-at), vagy az x értékeit a $2x$ kifejezésben a 2-est cserélte ki (pl. ha $x=-3$, akkor „ $y=-3x+3$ ”). A megadott szabály betűkifejezések néven már ismert lehetett számukra az 5. osztályos tananyagból is, de akkor a betűkifejezés értékét a változó adott értékei mellett úgy kellett meghatározni, hogy azok nem voltak táblázatba rendezve. A 3. kísérleti foglalkozáson foglalkoztunk (egylépéses)szabály követésével, aminek eredményességét a fejlesztő program első része után elvégzett utóteszt ilyen típusú feladatára (lásd 5.24. ábra és Mellékletek, 3. feladat, 14. old.) érkezett helyes válaszok száma is igazolja. Mégis az explicite adott kétlépéses szabály követése, ha a táblázatba rendezett független változó értékéhez kérjük a függő változó értékét, még nehézséget jelent. Emiatt úgy gondoljuk, hogy a táblázat kitöltését megadott szabály alapján legalább a Betűkifejezések tananyaggal együtt lenne célszerű tárgyalnunk 5. osztályban, tehát korábban is el lehet kezdeni az előkészítést.

5. feladat

A feladat egylépéses szabállyal definiálható, szöveges kontextusban rejtőző együtváltozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésére (2. szint), a mellette képlettel történő érvelésre (3. szint) irányult. Hasonló feladattal a 4. foglalkozáson is találkoztak: a bemenő adatok explicite adottak voltak. A foglalkozások hatékonyságát igazolják az 5.41. ábrán látható eredmények. A vizsgált tanulók mindegyike felismerte az együtváltozó mennyiségeket és az azok közötti kapcsolatot, míg a fejlesztő program első részének végén elvégzett utóteszt ezen feladata esetében ez nem sikerült minden tanulónak (lásd 5.24. ábra). A képlettel történő érvelés is csak azon 5 tanulóknak jelentett nehézséget, akik mind a foglalkozásokon, mind az utóteszteken is gyengébben teljesítettek a többi tanulóhoz képest. Az ő esetükben a szabályok világának mélyebb megismerése több foglalkozást igényelt volna. Mindezek mellett a

szöveges kontextusban rejtőző egy lépéses szabály felismerése és képlettel történő megadása a foglalkozásoknak köszönhetően sikeresnek mondható, hisz a feladatot teljesítők arány meghaladta a 2014-es felmérésben résztvevő HU tanulók teljesítményének arányát.



5.41. ábra

Következtetések

A korábbi felmérés (lásd a dolgozat 4.3. alfejezete) eredményeihez képest fejlődés tapasztalható a különböző módon reprezentált együtváltozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésében, a felismert kapcsolat mellett szavakkal és képlettel történő érvelésben.

A célzott 6. osztályos fejlesztés már jól közelítette a 2014-es felmérésben résztvevő HU tanulók eredményeit.

Az eredmények alapján elmondható, hogy a szabályfelismerő és -követő képességek fejlesztését a bemutatott tevékenységek jól szolgálták. Ahhoz, hogy a jelen dolgozatban vizsgált, a foglalkozásokon és utóteszteken is gyengébben teljesítő gyerekeknél és a „globálisan” is jelentkező hiányosságokat korrigáljuk, a bemutatott foglalkozások számának bővítését tartjuk célravezetőnek, figyelembe véve az egyes foglalkozásokon levont tanulságokat. A fogalom előkészítését szolgáló tevékenységek megtervezésénél szem előtt kell tartani a függvényfogalom alkotórészeinek és különböző reprezentációinak megismerését.

5.7. A FEJLESZTŐ PROGRAM ÖSSZEGZÉSE

A fejlesztő programmal a függvényfogalom előkészítését céloztuk meg a bevezetését megelőző évben. A választott tanulói csoport az ukrainai magyar tannyelvű Nagydobronyi Középiskola egy 6. osztálya, ahol a használatos matematika kerettanterv és tankönyv csekély hangsúlyt fektet a fogalom előkészítésére. Kutatásunk azt vizsgálta, hogyan építhető be a 6. osztályos matematika tanterv egyes témaköreibe a függvényfogalom alkotórészei (változók, kapcsolatok, szabályok) és a fogalom különböző reprezentációs formái (táblázat, szöveg, képlet, nyíldiagram, grafikon). A 11 foglalkozással a K3. kérdésekre kerestük a választ.

A fogalom alkotórészei közül a kapcsolatok alapozását tárgyi tevékenységekkel, az enaktív síkon végeztük, mivel a tárgyi tevékenységek a vizsgált életkorban jó kiindulópontot nyújtanak az absztrahálás képességének fejlesztéséhez. A többi alkotórész (változó, szabály) megismertetését, és ezzel együtt az együtváltozó mennyiségek tárgyasítását a függvénygép segítségével kezdtük, mely jól illeszthető a vizsgált tanulók gondolkodásmódjához. Ezt

követően tértünk át a fogalom egy másik forrásának, a valós életből vett folyamatoknak az alkalmazására. A függvény különböző reprezentációs formáival (szöveg, táblázat, képlet, grafikon, nyíldiagram) fokozatosan ismertettük meg a tanulókat.

A fejlesztő program tapasztalatai a tanulók foglalkozásokon végzett munkájának megfigyelése, az utóteszt és a késleltetett teszt alapján (figyelembe véve a 4. fejezetben leírt, 6. osztályos UA és HU tanulók eredményeit is):

- Az alkotórészek megismerését a fogalom forrásai (függvénygép, valós életből vett folyamat) jól szolgálták.
- Néhány tanulónak azonban a „gép” egyszeri bemutatása még nem volt elegendő ahhoz, hogy az adott modelltől más szituációkban el tudjanak vonatkoztatni. Számukra több ilyen tevékenység kipróbálása szükséges, amit a „gép” ún. „szabálykapcsolóval” való ellátásával érhetünk el. Ezzel a szabályok világának a mélyebb megértését is megcélozhatjuk.
- A szabály inverzének alkalmazása abban az esetben, ha az nem expliciten adott, néhány tanulónál még nehézséget jelentett.
- A különböző kontextusba ágyazott együtváltozó mennyiségek fogalmának alakítása és/vagy azok közötti kapcsolat felismerése a különböző függvényreprezentációk megismerésének köszönhetően sikeres volt: az együtváltozó mennyiségek valamely reprezentációja segítséget nyújtott abban, hogy a mennyiségeket megnevezzék, az azok közötti kapcsolatot felismerjék, valamint más módon reprezentálják (lásd az 5.6. alfejezetben közölt eredményeket) (H3.2.-t elfogadjuk).
- Fejlődött a felismert kapcsolat melletti szavakkal történő érvelés is.
- Fejlődött az egyik reprezentációs módról a másikra való áttérés képessége.
- Abban az esetben, ha több független változónak ugyanaz a függő változó felelt meg (több-egyértelmű leképezés) a táblázattal reprezentált együtváltozó mennyiségeket nyíldiagramon vagy grafikonon reprezentálni a tanulók felének még nem sikerült.
- A különböző kontextusban rejtőző együtváltozó mennyiségek közötti kapcsolatfelismerő képesség abban az esetben, ha a kapcsolatot egylépéses szabály definiálta, a foglalkozások segítségével fejlődött. Viszont további foglalkozások levezetése szükségeltetik a szöveges kontextusban meghúzódó együtváltozó mennyiségek és azok közötti kapcsolat felismerésére, annak matematika nyelvén történő megadására, ha ez a kapcsolat kétlépéses szabállyal definiálható és/vagy a mennyiségek impliciten rejtőznek a szövegben.
- A célzott 6. osztályos fejlesztés már jól közelítette a 2014-es felmérésben résztvevő 6. osztályos HU tanulók eredményeit, akiknél a fogalom előkészítő munka elemi iskola 1. osztályától történt.

KONLÚZIÓK, TOVÁBBI KUTATÁSI LEHETŐSÉGEK

Kutatásunk fókuszában a függvényfogalom kialakításának vizsgálata állt. A vizsgálatokat analitikus eljárással, a fogalommal kapcsolatos didaktikai kutatások elemzésére alapozva kezdtük. Erre építve tértünk át az induktív útra (Falus, 2004). Először elsőéves egyetemi hallgatók egy választott csoportjában leíró esettanulmány segítségével vizsgáltuk a hallgatók függvényről kialakult képzeiteit. Ezzel egyidőben összehasonlító pedagógiai kutatás keretében egy-egy ukrainai és magyarországi iskola tanulói csoportjaiban a függvényfogalom előkészítésének, bevezetésének, majd alakulásának fázisaiban elvégzett vizsgálatokból kiindulva dolgoztunk ki, majd akciókísérlettel valószínűsítettünk meg egy, a fogalom előkészítését támogató, lehetséges tanítási tervet.

Az egyes kutatási kérdésekhez (K1., K2., K3.) kapcsolódó hipotéziseink a következők voltak:

- H1.1. A középiskolát befejező tanulói csoport függvényfogalomról kialakult képzeitei nem felelnek meg a kerettantervi követelményeknek.
- H2.1. A vizsgált 6. osztályos ukrainai tanulók alacsonyabb szinten birtokolják a szabályfelismerő és szabálykövető képességeket, mint a vizsgált 6. osztályos magyarországi tanulók.
- H2.2. Az ukrainai tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességei fejlődnek a vizsgált időszakban.
- H2.3. A függvény fogalmának bevezetése hatással van a szabályfelismerő és szabálykövető képességek fejlődésére.
- H2.4. Eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett a vizsgált magyarországi tanulónál 8. osztály végére „ideálisabb” fogalomképzet alakul ki a függvényről (azaz a képzet kölcsönös kapcsolatban van annak definíciójával), mint a vizsgált ukrainai tanulónál.
- H3.1. A függvényfogalom forrásainak a 6. osztályos tananyagba történő beépítése hozzájárul a függvényfogalom alkotórészeinek megismeréséhez.
- H3.2. Az együttváltozó mennyiségek fogalmának alakítását a források mellett ebben az életkorban jól szolgálja a függvény különböző reprezentációinak megismerése is.
- H3.3. A függvényfogalom alkotórészeinek és különböző reprezentációinak 6. osztályban történő megismertetésével fejlődnek a szabálykövető és szabályfelismerő képességek is.

Kutatásunk kiindulópontjaként az ukrainai és magyarországi, 2012-ben kiadott kerettantervek általános és függvényfogalom alakításának tükrében végzett elemzése szolgált. A vizsgálatokat az elméletből levont következtetések szemszögéből végeztük, külön hangsúlyt fektetve az 5-6. osztályos tantervekre (a fogalom előkészítő szakaszára). Ezzel párhuzamosan azon tankönyvek analizálásával foglalkoztunk, melyek a kutatásban résztvevő osztályok matematika tanításánál használatosak voltak. Vizsgálataink arra a megállapításra jutattak, hogy az ukrainai osztályban használatos kerettanterv és tankönyvek kevesebb hangsúlyt fektetnek a fogalom előkészítésére, mint a magyarországi tanterv és tankönyvek, valamint a magyarországi tankönyvekben a fogalom 7. osztályos bevezetésénél is sokkal inkább megjelennek az elméletben tárgyalt alkotórészek (változók, kapcsolatok, szabályok).

Mindezeket figyelembe véve kutatásunk elején arra kerestük a választ, hogy az elemi iskolától kezdődő, a fogalomkialakítását hangsúlyozó tantervek és tankönyvek mellett milyen fogalomképzet alakul-e ki a függvényről az első éves villamosmérnök hallgatók egy csoportjánál (**K1.1.**). Az eredmények igazolták a **H1.1.**-t:

- A vizsgált hallgatók többségének a függvényről kialakult fogalomképzeete nem felel meg a kerettantervi követelményeknek. Képzetükben ismert, egy hozzárendelési szabállyal definiálható függvények „élnék”, a fogalom tartalmi jelentése hiányzik. A fogalomalakítási folyamat tehát valamely szakaszban „megtört”. Annak ellenére, hogy a magyarországi tanterv, illetve tankönyv már 7. osztályban megismerteti a tanulókat a „tágabb” értelemben vett függvénydefinícióval, a vizsgált hallgatók fogalomképzetei egy „szűk” függvényfogalmat mutatnak.

Minthogy a két országban eltérő a fogalom előkészítésének folyamata, több éves longitudinális mérésorozatot terveztünk egy-egy tanulói csoporttal 6., 7. és 8. évfolyamokon. Először 2014 tavaszán vizsgáltuk egy-egy 6. osztályt végző ukrainai és magyarországi tanulói csoportban a függvényfogalom alkotórészeihez (változók, kapcsolatok, szabályok) kapcsolódó szabálykövető és szabályfelismerő képességek szintjét (**K2.1.**). Az eredmények értékeléséhez kvantitatív és kvalitatív módszereket egyaránt alkalmaztunk. A tapasztalatok igazolták a **H2.1.**-t:

- Megfelelő fejlesztési követelmények hiányában a vizsgált 6. osztályos UA tanulók alacsonyabb szinten birtokolják a szabályfelismerő és szabálykövető képességeket, mint a vizsgálatokban résztvevő magyarországi tanulócsoport.

Az UA tanulók képesek ugyan kapcsolatot felismerni a különböző módon reprezentált együttváltozó mennyiségek között és követni azt, de a kapcsolatot meghatározó szabály melletti érvelés verbálisan vagy képlettel már nehézségekbe ütközik. Az egyes szintekhez tartozó feladatokra helyes választ adó UA és HU tanulók a felismert kapcsolat mellett hasonlóan érveltek.

Második lépésben 7. osztály végén (2015 tavaszán), miután a függvény fogalmát mindkét tanulói csoport megismerte, egy újabb felméréssel a **K2.2.** és **K2.3.** kérdésekre próbáltunk választ kapni. A felmérés eredményeként megállapítható:

- Az előző évi kutatásokhoz képest a vizsgált ukrainai tanulók többsége a különböző kontextusba rejtett (táblázat, szöveg, grafikon) egy lépéses szabályt már képes felismerni és követni. Fejlődés tapasztalható az explicit módon adott szabály értelmezésében és követésében is. Tehát a **H2.2.** igazolódott.
- Bár hatással van a fogalom bevezetése a különböző módon reprezentált együttváltozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerése, az ezt meghatározó szabály leírására és követésére (a **H2.3.** igazolódott), az UA tanulók teljesítménye még alatta maradt a HU tanulókénak. Több UA tanulónak még nehézséget jelentett a felismert kapcsolat szavakkal és/vagy képlettel történő megadása.

Végül a fogalom bevezetését követő évben (8. osztály végén, 2016 tavaszán) kitűzött felmérés azt volt hivatott szolgálni, hogy megvizsgálja, az eltérő fogalomkialakítási folyamat milyen fogalomképzethez vezetett az előző évek felméréseiben is résztvevő két csoport tanulójánál (**K2.4.**).

- A tapasztalatok arra engedtek következtetni, hogy mindkét ország vizsgált tanulóinak többségének, hasonlóan az első éves egyetemi hallgatókhoz, fogalomképzete nincs kölcsönös kapcsolatban annak formális definíciójával; a fogalom tartalma még „háttérben” maradt.
- A magyarországi tanulóknál a fogalom alkotórészeinek, különböző reprezentációinak megismerése és azok közötti átjárási képesség fejlesztése célzottabban, elemi iskolától kezdődően, a folyamat a függvény történeti fejlődését követve történt. A felmérés eredményei viszont azt igazolják, hogy a függvény definíciójának megadása után, a különböző specifikus függvények bevezetésének hatására fogalomképzetükben még a „szűk” függvényfogalom él. Mindkét tanulói csoportban csupán 1-1 tanuló volt, akinél olyan fogalomképzet alakult ki, mely kölcsönös kapcsolatban van a fogalom definíciójával is. Ezek alapján úgy véljük, hogy nagyon fontos a középiskolás években a tanulók fogalomképzetének folyamatos vizsgálata, szükség esetén annak korrigálása.

Tehát összességében a **H2.4.**-t elvethetjük és a következőt állíthatjuk: *Eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett a vizsgált magyarországi tanulóknál 8. osztály végére nem alakul ki „ideálisabb” fogalomképzet a függvényről, mint a felméréssorozatunkban résztvevő ukrainai tanulóknál.*

Minthogy a hatékony fogalomképzet kialakulására hatással vannak a fogalom alakítása során szerzett tapasztalatok, vizuális reprezentációk, élmények, konkrét példák és ellenpéldák, ezért az eredmények alapján indokoltnak találtuk a függvényfogalom kialakításának általános iskolai átgondolását. Ehhez egy lehetséges kezdeti lépéseként 6. osztályt megcélzó fejlesztő programot dolgoztunk ki és valósítottunk meg az ukrainai magyar tannyelvű, kárpátaljai Nagydobronyi Középiskolában.

Kutatásunk azt vizsgálta, hogyan építhetők be az ukrainai 6. osztályos matematika tanterv bizonyos témaköreibe a függvényfogalom alkotórészei (változók, kapcsolatok, szabályok), hogyan erősíthetjük a helyes függvénytéma kialakulását, és ezzel együtt hogyan alapozhatjuk meg a 7. osztályban bevezetésre kerülő függvény fogalmát. A vizsgálatokat a választott tanulói csoport azon matematikai ismereteinek feltérképezésével kezdtük, melyek a fejlesztő program egyes foglalkozásain is előtérbe kerültek. A foglalkozásokat az elméletből levont következtetésekre, a korábbi felmérésekkel szerzett tapasztalatokra alapozva dolgoztuk ki és építettük be a 6. osztályos tanmenet egyes témaköreibe (*Arány és aránypár* c. témakör, valamint a *Grafikonok* c. témakör) úgy, hogy azt ne kelljen teljesen módosítani. Ennek megfelelően 11 foglalkozást terveztünk, melyet két ciklusban valósítottunk meg. Minden részt egy-egy utótesztel, majd végül egy késleltetett teszttel zártunk.

A **K3.1.**, **K3.2.** és **K3.3. kérdések** megválaszolását az enaktív reprezentációs síkon kezdtük. Minthogy a tárgyi tevékenységek szükségesek az absztrakcióhoz, arra törekedtünk, hogy a tanulók a kapcsolatok világában manuális tevékenységekkel szerezzenek tapasztalatokat, alkossanak informális táblázatokat, verbális szabályokat. Ugyancsak az enaktív síkon kezdtük az együtváltozó mennyiségek fogalmának tárgyasítását, és ezzel együtt a szabályfelismerés képességének fejlesztését.

A többi alkotórész megismertetését, és ezzel együtt az együtváltozó mennyiségek tárgyasítását a függvény egyik forrásával, a függvénygéppel kezdtük, mely jól illeszthető a vizsgált tanulók gondolkodásmódjához. Ezt követően tértünk át a fogalom egy másik forrásának, a valós életből vett folyamat alkalmazására. A függvény különböző reprezentációs

formáival (szöveg, táblázat, képlet, grafikon, nyíldiagram) fokozatosan ismertettük a tanulókat.

A foglalkozások során szerzett tapasztalatok alapján a következőket állíthatjuk:

- Az alkotórészek megismerését ezen források jól szolgálták, de néhány tanulónak a „gép” egyszeri bemutatása még nem volt elegendő ahhoz, hogy a modelltől más szituációkban, különböző kontextusokban el tudjon vonatkoztatni. Tehát a **H3.1.** a következő módosítással válik igazzá: *A függvényfogalom forrásainak (függvénygép, valós életből vett függvénymodellek) a 6. osztályos tananyagba történő beépítése hozzájárul a függvényfogalom alkotórészeinek megismeréséhez, de a gyengébb képességű tanulók több foglalkozást igényelnek.*
- A különböző kontextusba „ágyazott” együtváltozó mennyiségek alakítása és/vagy azok közötti kapcsolat felismerése a kipróbált tevékenységeknek és a függvény különböző reprezentációi megismerésének köszönhetően sikeresnek mondható (**H3.2.** igazolódott). A felismert kapcsolat táblázattal történő reprezentálása hozzájárult annak matematika nyelvére való „átültetésére”, ha ezt a kapcsolatot egylépéses szabály definiálta.
- További foglalkozások levezetése szükségeltetik a szöveges kontextusban meghúzóó együtváltozó mennyiségek és az azok közötti kapcsolat felismerésére, annak matematika nyelven történő megadására, ha ez a kapcsolat kétlépéses szabállyal definiálható és/vagy a mennyiségek implicite rejtőznek a szövegben.

Összegezve a fejlesztő program utótesztjeinek és az 5.6. alfejezetben bemutatott késleltetett tesztnek a tapasztalatait a **K3.3.** kérdés vonatkozásában a következőt állíthatjuk:

- *A különböző kontextusban rejtőő együtváltozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerése abban az esetben, ha az egylépéses szabállyal definiálható, néhány foglalkozással fejleszthető. Viszont a legalább kétlépéses szabállyal definiálható kapcsolatok felismerése és követése hosszabb, folyamatosabb fejlesztést megcélzó foglalkozásokat igényel.*

Néhány további kutatási lehetőség

- Több magyarországi és ukrainai iskola tanulói csoportjában a függvényfogalom kialakítási folyamatának, s ezzel együtt a fogalomképzet alakulásának vizsgálata további évfolyamokon.
- A bemutatott kísérleti tanítás kipróbálása több ukrainai iskola tanulócsoprtjában a már megszerzett tapasztalatok figyelembe vételével tett módosításokkal.
- A kísérleti tanítás folytatása a függvényfogalom 7. osztályban történő bevezetését célzó foglalkozásokkal, majd további alakítását segítő foglalkozások kidolgozása és kipróbálása mind magyarországi, mind ukrainai iskolákban.
- A kísérleti tanításokban résztvevő tanulók fogalomkialakulási folyamatának összehasonlítása más tanulói csoportokéval.
- További érdekes terület lehet annak felkutatása, hogy van-e kapcsolat a tanulók geometriai gondolkodási szintje (van Hiele szintek) és a függvényről a Bruner-féle reprezentációs síkok közül az ikonikus síkon (grafikus reprezentációjával) történő gondolkodás között.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Akkoç, H., Tall, D.O., The simplicity, complexity and complication of the function concept. *Proceedings of the 26th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* Vol. 2. Norwich, UK, 25–32, 2002.
2. Ambrus, A., *Bevezetés a matematikadidaktikába*. Eötvös Kiadó, javított kiadás, 2004.
3. Ambrus, A., *A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban*.
<http://rmpsz.ro/uploaded/tiny/files/magiszter/2003/osz/9.pdf>
4. Areti P., Paraskevi M., Andreas P., Teaching the concept of function: Definition and problem solving. Konrad Krainer; Nada Vondrova. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.440-445, *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.
5. Bruner, J. S., *Új utak az oktatás elméletéhez*. Gondolat, Budapest, 1974.
6. Chassapis, D., A framing of the world by mathematics: a study of word problems in greek primary school mathematics textbooks. In: U. Gellert, E. Jablonka & C. Morgan (eds.). *Proceedings of the Sixth International Mathematics Education and Society Conference*. Berlin: Freie Universität Berlin, 209-218, 2010.
7. Czeglédy, I., *A matematika tanításának pedagógiai-pszichológiai vonatkozásai*. Eszterházy Károly Főiskola, TAMOP 4.2.5., Eger, 12-39, 2011.
8. Czeglédy, I., Orosz, Gy., Szalontai, T., & Szilák, A., *Matematika tantárgypedagógia II. Főiskolai jegyzet*. Calibra Kiadó, Budapest, 93-105, 1994.
9. Csapó, B., Képesség. In: Z. Báthory, I. Falus (eds.). *Pedagógiai lexikon I-III*, Keraban Kiadó, Budapest, 1997, II/196.
10. Csépe, V., Győri, M., Ragó, A., *Általános pszichológia 1-3.-2.- Tanulásméltékezés-tudás*. Osiris Kiadó, Budapest, 2007.
URL:http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_520_alتانos_pszichologia_2/index.html
11. Davindeko, S., Building the concept of function from students' everyday activities. *The Mathematics Teacher*, Vol. 90, No. 2, Feb97, 144-149, 1997.
12. Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., Reed, H., Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Volume 10, Issue 6, 1243–1267, 2012.
13. Dubinsky, E. & Harel, G., The nature of the process conception of function. In G. Harel and E. Dubinsky (eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). DC: Mathematical Association of America, 1992.
14. Duval, R., Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In *Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Morelos, Mexico, 3-26, 1999.

15. Duval, R., The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16, 2002.
16. Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., Gagatsis, A., Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Vol. 5, 533–556, 2007.
17. Falus, I., A pedagógiai kutatás metodológiai kérdései. In I., Falus (Ed.), *Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 3-17, 2004.
18. Herendiné Kónya, E., *A matematika tanítása alsó tagozaton*. Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, Budapest, 2013.
19. Herendiné Kónya, E., A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei. *Iskolakultúra*, 12(1-2), 51-61, 2003.
20. Herendiné Kónya, E., *Kisiskolások térbeli tájékozódó képességének fejlesztési lehetőségei*. PhD értekezés, Debreceni Egyetem, 2007.
21. Isoda, M., The development of language about function: an application of van Hiele's levels. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 105-112., 1996.
22. Kelemen, R., *A matematikai szövegesfeladat-megoldó képesség vizsgálata többségi és tanulásban akadályozott 9-13 éves tanulók körében*. PhD értekezés Tézisei, 2010. http://www.edu.u-szeged.hu/phd/downloads/kelemen_tezis_hu.pdf
23. Kleiner I., Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, Vol. 20, No. 4, 282-300, 1989.
24. Kwari, R., *An investigation into the development of the function concept through a problem-centered approach by form 1 pupils in Zimbabwe* (Master's thesis), 2007.
25. Malle, G., Variable-Basisartikel mit Überlegungen zur elementaren Algebra. *Mathematik Lehren*, Vol. 15, 2-8, 1986.
26. Norman, A., Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. In Harel, G., Dubinsky, E. (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. DC: Mathematical Association of America, Washington, 215–232, 1992.
27. Páles, Zs., *Bevezetés az analízisbe* (előadáskövető egyetemi jegyzet). Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet, 2013. <http://math.unideb.hu/media/pales-zsolt/anal.pdf>
28. Rivera, F., *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Dordrecht: Springer, 2013.
29. Sain, M., *Nincs királyi út*. Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.
30. Sierpinska, A., On understanding the notion of function. In Harel, G., Dubinsky, E. (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. DC: Mathematical Association of America, Washington, 25-58, 1992.
31. Skemp, R.R., *A matematikatanulás pszichológiája* (S. Klein, ford.). Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005. (Eredeti könyv publikálva 1971-ben.)
32. Stankov, G., *Konkrét és képi reprezentációk használata a hetedik osztályos algebratanításban*. PhD értekezés, Debreceni Egyetem, 2008.

33. Szanyi, Gy., The investigation of students' skills in the process of function concept creation. *Teaching of Mathematics and Computer Science*, 13(2), 249–266, 2015.
34. Szendrei, J., *Gondolod, hogy egyre megy?* Typotex Kiadó, 2005.
35. Székely, J., *Mérés-értékelés a pedagógiában*, Oktatási segédanyag, 2014.
36. Szénássy, B., *Bolyai Farkas*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
37. Tall, D., McGowen, M. & DeMarois, P., The Function machine as a cognitive root for the function concept. In: Fernandez, M.L (Ed.). *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting of the International Group of the Psychology of mathematics education*: Vol. 1 (pp. 256-261). Tucson, Arizona U.S.A., 2000.
38. Thompson, P.W., Students, functions, and the undergraduate curriculum. In Dubinsky, E., Schoenfeld, A., Kaput, J. (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education*, Vol. 4, 21–44, 1994.
39. Török, T., *Relációk, függvények, sorozatok tanítása*, Tanítói kézikönyv, Általános iskola 1-4. osztály. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2012.
40. Varga, T., *A matematika tanítása*. ELTE, Tankönyvkiadó Budapest, 1969.
41. Varga, T., *Komplex módszer a 6 éves kortól kezdődő matematika tanításban. Korszerű módszerek és eszközök az iskolareform szolgálatában*. Tankönyvkiadó, Budapest, 83-101, 1966.
42. Vinner, S., & Hershkowitz, R., Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Berkeley: University of California, Lawrence Hall of Science, 177-184, 1980.
43. Vinner, S., Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305., 1983.
44. Vinner, S., Dreyfus, T., Images and definitios for the concept of function, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366, 1989.
45. Vinner, S., The function concept as a prototype for problems in mathematics learning, In: Harel, G., Dubinsky, E. (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemol-ogy and pedagogy*. DC: Mathematical Association of America, Washington, 195–214, 1992.
46. Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. J., Exploring young students' functional thinking. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 329-336. Ankara, Turkey: PME, 2011.

ÖSSZEFOGLALÓ

Kutatásunk központjában a függvényfogalom kialakításának vizsgálata állt.

Matematikatanítás során többször szembesültünk azzal a problémával, hogy az általános vagy a középiskola befejezése előtt álló, sőt, egyetemet kezdett tanulók „elveszettek” a függvények világában. Vajon mi okozza ezt? Gyanú tárgyát képezte, hogy mindennek háttérében a tanulási folyamat azon szakasza áll, amikor a függvény fogalma bevezetésre kerül.

A függvényfogalom bevezetéséhez alapos előkészítő munka szükséges. Ennek fókuszában a fogalom egy olyan informális bázisának kiépítését célszerű helyezni, melyre később az új tananyag építhető. Mindez elérhető a függvényfogalom azon forrásainak beépítésével, melyek a fogalom alkotórészeinek a megismertetését is segítik.

Vizsgálva az Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma által megerősített, matematika tanterveket és a magyar nyelvre lefordított tankönyveket, kiderült, hogy az előkészítő munka csekély szerepet kap mind a tankönyvekben, mind a tantervben, ellentétben a magyarországi tantervvel és tankönyvekkel.

A dolgozatban a következő kérdésekre kerestük a választ:

- K1.1. Milyen fogalomképzet alakult ki a függvényről a magyarországi középiskolát befejező tanulók egy választott csoportjánál?*
- K2.1. Milyen szinten birtokolják a szabálykövető és szabályfelismerő képességeket 6. osztály végén az ukrán és magyar közoktatásban tanuló vizsgált diákok?*
- K2.2. Fejlődnek-e célzott fejlesztés nélkül is az ukrainai osztály tanulóinak szabálykövető és szabályfelismerő képességei?*
- K2.3. Hatással van-e a függvényfogalom formális bevezetése, különböző reprezentációinak megismerése a szabálykövető és szabályfelismerő képességek fejlődésére az ukrainai csoportban?*
- K2.4. Milyen fogalomképzet alakul ki a függvényről 8. osztály végére a vizsgált ukrainai és magyarországi tanulóknál az eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett?*
- K3.1. Hozzájárul-e a függvényfogalom alkotórészeinek jobb megismeréséhez a függvényfogalom különböző forrásainak (függvénygép, valós életből vett folyamat) az ukrainai 6. osztályos matematika tananyag egyes témaköreibe történő beépítése?*
- K3.2. Hogyan segítik az együttváltozó mennyiségek fogalmának alakítását a függvény forrásai és a különböző reprezentációi (táblázat, szöveg, képlet, grafikon)?*
- K3.3. Fejleszthetők-e a függvény alkotórészeinek és különböző reprezentációinak 6. osztályban történő megismertetésével a 6. osztályos ukrainai tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességei?*

Az **1. fejezetben** a kutatás elméleti háttérét ismertettük.

Skemp (2005) két, fogalomalkotásra vonatkozó alapelve szerint a matematikai fogalomalkotásban a definícióknak meghatározott helyük van. A definíció bevezetésének egészen addig nincs értelme, míg a tanuló nem rendelkezik a megfelelő matematikai kultúrával. A bevezetéshez célszerű minél több olyan tárgyi tevékenységet használni, melyek személyes élménnyé válva az epizodikus emlékezetben tárolódnak. Ez olyan emlékek

„tárháza”, amelyek az ismeretek elsajátításának kontextusát (személyes aspektusait) is megőrzik (Csépe, Győry, Ragó, 2007).

A fogalom megértéséhez azonban nem csupán a fogalom definíciójára van szükség, hanem az arról kialakult fogalomképzetre is. Legtöbbször ezt használják a tanulók annak eldöntésére, hogy egy objektum példája vagy ellenpéldája a fogalomnak. Ennélfogva a fogalom kialakítása során fontos, hogy a tanulóknál olyan fogalomképzet alakuljon ki, mely kölcsönös kapcsolatban van annak formális definíciójával.

A függvényfogalom didaktikai elemzése rámutatott arra, hogyan építhető ki a bevezetéséhez szükséges matematikai kultúra. Történeti fejlődését elemezve kirajzolódtak a fogalom alkotórészei (változók, kapcsolatok, szabályok), melyek a megértéséhez szükséges előzetes ismereteket is magukban hordozzák. A fogalom kialakítási folyamatában fontos a változás érzékelése, a változók közötti kapcsolat felismerése. A változás „milyenségét” pedig a változók közötti kapcsolatot leíró szabály tudja meghatározni.

A legtöbb matematikai fogalom iskolai alakítási folyamata követi annak történeti fejlődését. A függvényfogalom esetében is ez a helyzet, előkészítéséhez a „szűkebb” függvényfogalmat használjuk, azaz a szabályokkal leírható kapcsolatok kerülnek először tárgyalásra. Ebből bontakozik ki később a „tágabb” függvényfogalom (itt már nincs jelentősége annak, hogyan jött létre a kapcsolat).

A didaktikai elemzéssel igyekeztünk megtalálni a függvényfogalom előkészítését segítő forrásokat, kapcsolatba hozva őket a fogalom megértésének egyik kritériumával, a különböző reprezentációk használatának képességével.

A szakirodalmak analizálásával a következő megállapítások tehetők a függvényfogalom kialakítására:

- Az előkészítési szakasz fókuszába a fogalom egyes alkotórészeinek megismerését kell helyezni.
- Az alkotórészek megismertetését és az együttváltozó mennyiségek fogalmának tárgyasítását elérhetjük a fogalom különböző forrásainak (függvénygép, valós életből vett folyamat) bevonásával.
- Az együttváltozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésében a függvény különböző reprezentációi nyújthatnak segítséget (verbális, táblázat, képlet, nyíldiagram, grafikon).
- Mindezekkel együtt a mennyiségek közötti felismert kapcsolatot leíró szabályhoz, kapcsolható szabálykövető és szabályfelismerő képességek fejlesztését is szem előtt kell tartanunk.
- Fejlesztünk kell a különböző reprezentációk közötti átjárás képességét is, mely a fogalom mélyebb megértését segíti.

A dolgozat **2. fejezetében** ukrainai és magyarországi 5-6. osztályos, 2012-ben kiadott matematika kerettantervek és tankönyvek általános, majd a függvényfogalom kialakítása szempontjából végzett elemzésével arra törekedtünk, hogy megtaláljuk milyen hasonlóságok, esetleg különbségek mutatkoznak a fogalom előkészítési szakaszában. Továbbá, azok mennyire vannak összhangban a tankönyvi leckékkel és az azokban kitűzött feladatokkal. A

tankönyvek közül azokat elemeztük, melyeket a kutatásunkban résztvevő tanulói csoportok használtak.

Vizsgálataink arra a megállapításra jutattak, hogy az ukrainai kerettanterv és tankönyvek kevesebb hangsúlyt fektetnek e fogalom előkészítésére, mint a magyarországi tanterv és tankönyvek. A magyarországi tankönyvekben és tantervekben sokkal inkább megjelennek az elméletben tárgyalt alkotórészek (változók, kapcsolatok, szabályok) és a hozzájuk kapcsolódó szabályfelismerő és –követő képességek fejlesztése is hangsúlyozottabb.

A 3. fejezetben magyarországi középiskolát befejező, elsőéves egyetemi hallgatók függvényről kialakult fogalomképzetét vizsgáltuk leíró esettanulmány segítségével. A hipotézis igazolásához vagy elvetéséhez készség- és tudásszintmérő tesztet használtunk, melyet kvantitatív módszerekkel értékeltünk, a hallgatók munkájának kvalitatív elemzésével kiegészítve. A vizsgálatokat Vinner és Dreyfus (1989) kutatásai alapján végeztük a Debreceni Egyetem villamosmérnök hallgatói körében.

A K1.1. kutatási kérdéshez a következő, H1.1. hipotézist kapcsoltuk:

H1.1. A középiskolát befejező tanulói csoport függvényfogalomról kialakult képzetek nem felelnek meg a kerettantervi követelményeknek.

A vizsgált hallgatók többségének a függvényről kialakult fogalomképzetében ismert, egy hozzárendelési szabállyal definiálható függvények voltak jelen, a fogalom tartalmi jelentése hiányzott. Ezeknél a hallgatóknál a fogalomalkítási folyamat tehát valamely szakaszban „megtört”. Annak ellenére, hogy a magyarországi tanterv, illetve tankönyv már 7. osztályban megismertette a tanulókat a „tágabb” értelemben vett függvénydefinícióval, a vizsgált hallgatók fogalomképzetek egy „szűk” függvényfogalmat mutattak. Ezért a H1.1. igazolódott.

A 4. fejezetben egy ukrainai magyar tannyelvű középiskola (elemi, általános és középfokú oktatási intézmény) és egy magyarországi általános iskola egy-egy tanulói csoportjában 3 éven keresztül végzett, a függvényfogalom kialakulását vizsgáló összehasonlító pedagógiai kutatást mutattunk be. A hipotézisek igazolásához vagy elvetéséhez készség szintmérő tesztet használtunk, melyek értékelését kvantitatívan végeztük, a tanulók munkájának kvalitatív elemzésével.

Először 6. osztályban (2014) vizsgáltuk a tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességeinek szintjét a függvényfogalom bevezetése előtt. A felmérés során szerzett tapasztalatok figyelembe vételével ezt 7. osztályban (2015), a függvényfogalom definíciójának bevezetése után, egy újabb felmérés követte, mely a fogalom megismerésének ezen képességekre gyakorolt hatását vizsgálta. Végül a tanulók függvényfogalomról alkotott képzetek feltérképezését céloztuk meg 8. osztály végén (2016).

A K2. kutatási kérdésekhez kapcsolódó hipotézisek (H2) áttekintése:

H2.1. A vizsgált 6. osztályos ukrainai tanulók alacsonyabb szinten birtokolják a szabályfelismerő és szabálykövető képességeket, mint a vizsgált 6. osztályos magyarországi tanulók.

Megfelelő fejlesztési követelmények hiányában a vizsgált 6. osztályos ukrainai (UA) tanulók alacsonyabb szinten birtokolták a szabályfelismerő és szabálykövető képességeket, mint a vizsgálatokban résztvevő magyarországi (HU) tanulócsoporthoz (a H2.1. igazolódott). Tehát az eredmények igazolták a hipotézist. A vizsgált UA tanulók képesek voltak ugyan kapcsolatot felismerni a különböző módon reprezentált együttváltozó mennyiségek között és követni azt, de a kapcsolatot meghatározó szabály melletti érvelés verbálisan vagy képlettel már nehézségekbe ütközött.

H2.2. Az ukrainai tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességei fejlődnek a vizsgált időszakban.

A különböző kontextusba rejtett (táblázat, szöveg, grafikon) egy lépéses szabályfelismerés vagy az expliciten adott szabály értelmezése és követése terén fejlődtek a vizsgált UA tanulók szabályfelismerő és –követő képességei. Bár kis arányban, de a táblázattal reprezentált többlépéses szabályfelismerésben is mutatkozott fejlődés (a H2.2-t elfogadjuk).

H2.3. A függvény fogalmának bevezetése hatással van a szabályfelismerő és szabálykövető képességek fejlődésére.

Bár hatással volt a fogalom bevezetése a különböző módon reprezentált együttváltozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerése, az ezt meghatározó szabály leírására és követésére (H2.3. igazolódott), az UA tanulók teljesítménye még alatta maradt a HU tanulókéhoz. Több UA tanulónak még nehézséget jelentett a felismert kapcsolat szavakkal és/vagy képlettel történő megadása.

A 6. és 7. osztályos vizsgálatok eredményei alapján elmondható, hogy a célzott előkészítő munka erősítette a HU tanulók helyes függvényszemléletének alakulását, a spontán fejlődés mellett.

H2.4. Eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett a vizsgált magyarországi tanulóknál 8. osztály végére „ideálisabb” fogalomképzet alakul ki a függvényről (azaz a képzet kölcsönös kapcsolatban van annak definíciójával), mint a vizsgált ukrainai tanulóknál.

A felmérés eredményei azt mutatták, hogy az eltérő fogalomkialakítási folyamat ellenére, a függvény definíciójának megadása után, a különböző specifikus függvények bevezetésének hatására mindkét tanulói csoport fogalomképzetében még a „szűk” függvényfogalom élt.

Tehát a K2.4. kérdés vonatkozásában a következőt állíthatjuk:

Eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett a vizsgált magyarországi tanulóknál 8. osztály végére nem alakul ki „ideálisabb” fogalomképzet a függvényről, mint a felmérésorozatunkban résztvevő ukrainai tanulóknál.

Az **5. fejezetben** a függvényfogalom előkészítését megcélzó fejlesztő programot és annak tapasztalatait mutattuk be, melyet az ukrainai magyar tannyelvű Nagydobronyi Középiskola 6. osztályában valósítottunk meg 2015-2016-ban akciókísérlet segítségével. A hipotézisek igazolásához vagy elvetéséhez tájékozódó felmérést, két utótesztet és egy késleltetett tesztet

használtunk, melyek értékelését kvantitatívan végeztük, a tanulók munkájának kvalitatív elemzésével. Ezeket az egyes foglalkozásokon megfigyelésekkel (írásos feljegyzések, hangfelvételek, fényképek, a foglalkozásokon használt tanulói „Móka” füzet) szerzett tapasztalatokkal egészítettünk ki.

Az alábbi Táblázat a program 11 foglalkozásáról ad információt.

	Fejlesztő stratégia, módszer	Rövid tartalmi leírás
Tájékoztató felmérés (2015. november 17.)		
Fejlesztő program 1. része (2015. november 23 - december 7.) Tanterv szerinti témakör: Arány, aránypár (a foglalkozások a tanórák csak egy részét töltötték ki)		
1.	Elemző képesség, relációs szókincs fejlesztése	Elempárok alkotása manuális tevékenységekkel
2.	Együttváltozó mennyiségek fogalmának alakítása, kapcsolatfelismerő képesség fejlesztése és különböző módon való lejegyzése	Együttváltozó mennyiségek fogalmának bevezetése függvénygép alkalmazásával
3.	Szabálykövető képesség, reprezentációs formák közötti átjárás képességének fejlesztése	Kifejezések helyettesítési értékeinek meghatározása
4-5.	Együttváltozó mennyiségek, a közöttük lévő kapcsolat felismerésének fejlesztése	Szöveges feladatokban rejtőző együttváltozó mennyiségek felismerése, reprezentálása táblázattal, képlettel
6.	„Kétirányú” gondolkodás fejlesztése	Szituációk és azok általános megoldását leíró algebrai kifejezések összekapcsolása
Utóteszt (2016. január 19.)		
Fejlesztő program 2. része (2016. április 25. – május 4.) Tanterv szerinti témakör: Grafikonok (a foglalkozások a teljes tanórát kitöltötték)		
7.	Megfigyelőképesség fejlesztése, eligazodás a mindennapi élet grafikonjain	Grafikonok bevezetése. Adatok leolvasása a grafikonról
8.	Együttváltozó mennyiségek jegyzése. Reprezentációk közötti átjárás képességének fejlesztése	Szituációhoz előre elkészített táblázat alapján grafikon szerkesztése, grafikon alapján táblázat kitöltése
9.	Kapcsolat felismerő képesség fejlesztése és reprezentálása játékos eszközökkel	Szituációk eljátszása az együttváltozó mennyiségek táblázatos és grafikus ábrázolásának előkészítéséhez
10.	Tapasztalati függvények alkotása, azok reprezentálása és összekapcsolása a szituációval	Valós életből vett szituációk különböző reprezentálása (diszkrét eset)
11.	Tapasztalati függvények alkotása, azok reprezentálása és összekapcsolása a szituációval	Valós életből vett szituációk különböző reprezentálása (folytonos eset)
Utóteszt (2016. május 11.)		
Késleltetett teszt (2016. május 23.)		

Táblázat: A függvényfogalom előkészítését célzó fejlesztő program

A K3 kutatási kérdésekhez kapcsolódó hipotézisek (H3) áttekintése:

H3.1. A függvényfogalom forrásainak a 6. osztályos tananyagba történő beépítése hozzájárul a függvényfogalom alkotórészeinek megismeréséhez.

Az alkotórészek megismerését ezen források jól szolgálták, de néhány tanulónak a „gép” egyszeri bemutatása még nem volt elegendő ahhoz, hogy a modelltől más szituációkban, különböző kontextusokban el tudjon vonatkoztatni. Tehát a H3.1. a következő módosítással válik igazzá: *A függvényfogalom forrásainak (függvénygép, valós életből vett folyamat) a 6. osztályos tananyagba történő beépítése hozzájárul a függvényfogalom alkotórészeinek megismeréséhez, de a gyengébb képességű tanulók több foglalkozást igényelnek.*

H3.2. Az együttváltozó mennyiségek fogalmának alakítását a források mellett ebben az életkorban jól szolgálja a függvény különböző reprezentációinak megismerése is.

A különböző kontextusba ágyazott együttváltozó mennyiségek alakítása és/vagy azok közötti kapcsolat felismerése a kipróbált tevékenységeknek és a függvény különböző reprezentációi megismerésének köszönhetően sikeres volt. Az együttváltozó mennyiségek reprezentációi segítséget nyújtottak abban, hogy azokat megnevezzék, a közöttük lévő kapcsolatot felismerjék, valamint áttérjenek egyik reprezentációs módról a másikra (a H3.2. igazolódott). A felismert kapcsolat táblázattal történő reprezentálása hozzájárult annak a matematika nyelvén való megfogalmazásához, ha ezt a kapcsolatot egy lépéses szabály definiálta.

H3.3. A függvényfogalom alkotórészeinek és különböző reprezentációinak 6. osztályban történő megismertetésével fejlődnek a szabálykövető és szabályfelismerő képességek is.

A szöveges kontextusban meghúzódó együttváltozó mennyiségek és az azok közötti kapcsolat felismerése, annak a matematika nyelvén történő megadása, ha ez a kapcsolat kétlépéses szabállyal definiálható és/vagy a mennyiségek implicite rejtőztek a szövegben, még nehéznek bizonyult.

Így a K3.3. kutatási kérdés vonatkozásában a következőt állíthatjuk:

A függvényfogalom alkotórészeinek és különböző reprezentációinak 6. osztályban történő megismertetésével a különböző kontextusban rejtőző egy lépéses szabállyal definiálható kapcsolat felismerése néhány foglalkozással fejleszthető.

Viszont a legalább kétlépéses szabállyal definiálható kapcsolatok felismerése és követése hosszabb, folyamatosabb fejlesztést megéltató foglalkozásokat igényel.

A dolgozat zárásaként összefoglaltuk kutatásunk legfontosabb eredményeit, tapasztalatait, majd felvázoltunk néhány további kutatási lehetőséget.

SUMMARY

The focus of our study was the investigation of the formation of the function concept which is a fundamental concept.

While teaching Mathematics, we have frequently faced the problem that students before graduation from elementary or secondary schools and even first year university students are lost in the world of functions. What could be the reason of it? One of our initial suspicions was that an important learning period stands behind this problem, particularly, when the concept of function is introduced.

A meticulous preparation is needed before introducing the concept of function. An informal basis of the concept should be built as the focus of this process on which the new material can be built later. It can be carried out by introducing the sources of the function concept which help to familiarize the students with the constitutive parts of the concept.

While studying the Mathematics curricula and the Hungarian translations of the textbooks, which are approved by the Ministry of Education and Science of Ukraine, it turned out that the preparation work plays very little role both in the curricula and the textbooks, as opposed to the curricula and textbooks used in Hungary.

Research questions:

- K1.1. What kind of concept image of function has formed in a chosen group of secondary school graduates in Hungary?
- K2.1. To what extent do the investigated students possess the rule-following and the rule-recognition skills by the end of the 6th form in Ukraine and in Hungary?
- K2.2. Do the rule following and the rule recognition skills of the students in Ukraine improve without targeted improvement?
- K2.3. Does the formal introduction of the function concept and the different representations have any effect on the development of the rule following and the rule recognition skills in the Ukrainian group?
- K2.4. What kind of concept image of function develops by the end of the 8th form in the investigated students from Hungary and Ukraine as a result of the different concept formation process?
- K3.1. Does the introduction of the sources of the function concept (function machine, processes taken from real life) to the topics of Mathematics contribute to the better understanding of the constitutive parts of the function concept?
- K3.2. How do the sources and the different representations of the function (verbal, table, formula, graph) facilitate the formation of the concept of covariant quantities?
- K3.3. Is it possible to improve the rule following and rule recognition skills of the 6th form students by introducing the constitutive elements and representations of the function in the 6th form?

In **Chapter 1** we presented the theoretical background of the research.

According to two principles of Skemp (2005), definitions have defined positions in mathematical concept formation. The introduction of the definition makes no sense until the student has sufficient mathematical culture. To the introduction of the concept should be used

as many activities with objects as possible to make them a personal experiences which are then stored in the episodic memory. This memory store also preserves the context of knowledge acquisition (Csépe, Györy, Ragó, 2007).

However, understanding the concept doesn't only mean the ability to define the concept but the concept image is also necessary. In most cases students use this to decide whether an object is an example or a nonexample of a concept. Thus, in the process of concept formation it is crucial that the students develop a concept image which is in a mutual relationship with its formal definition.

The didactic analyses of the function concept pointed out how could the sufficient mathematical culture be developed, which is necessary for the introduction of the definition. Analysing the historical development, the constitutive parts of the concept were drawn up (variables, relationships, rules), which carry the previous knowledge necessary for its understanding (Sierpinska, 1992). The detection of change and the recognition of the relations between variables is important in the concept formation process. The "quality" of change can be determined by the rules describing the relationship between the variables.

Most concept formation processes in the school follow their historical development. It is the case with the function concept too.

We use the „narrow” function concept to prepare the introduction of function at school, that is, relations that can be described by rules are discussed first. The „broader” function concept emerges from this (it is not important anymore how the relation evolved).

With the didactic analyses we tried to find the sources (*cognitive roots*) which facilitate the preparation of the function concept and connected them with other criteria of understanding the concept, like the ability to use the different representations.

Based on the literature review about the formation of the function concept we can claim the following:

- The constitutive parts of the concept should be placed in the focus of the preparation phase.
- The introduction of the constitutive parts and the reification of the the concept of covariant quantities can be carried out by the involvement of the sources of the concept (function machine, process taken from real life).
- The different representation of the function (verbal, table, formula, arrow diagram, graph) can facilitate the recognition of the relationship between covariant quantities.
- We also have to keep in mind the improvement of the rule following and rule recognition skills which can be connected to the rule which describes the recognised relationship between the quantities.
- The skill of switching between different representations should also be improved, which help the deeper understanding of the concept.

In **Chapter 2** we analysed the Ukrainian and Hungarian Mathematics curricula and textbooks - issued for the 5th-6th forms in 2012 - from a general point of view and from the point of the function concept formation. Our goal was to find out if there were any similarities or differences in the preparation phase of the concept. Furthermore, we were interested in to what extent these phases are in harmony with the tasks in the textbooks and the aims of the textbooks. We analysed the textbooks which were used in the target groups of our research.

Based on our analyses we arrived at the conclusion that the Ukrainian curricula and textbooks put less emphasis on the preparation of the concept than the Hungarian curricula and textbooks. In the Hungarian textbooks and curricula the constitutive parts of the function concept which were discussed in the theoretical part (variables, relationships, rules) are more present and the improvement of the rule recognition and rule following skills are more stressed.

In **Chapter 3** we studied the concept image of function among first year university students who had just finished the secondary school in Hungary. In order to confirm or reject the hypotheses, we used a skill proficiency test which was analysed with quantitative methods complemented with a qualitative analyses of the students' work. The study was carried out following Vinner and Dreyfus (1989) among electric engineer students of the University of Debrecen.

An overview of H1.1. hypothesis:

H1.1. The concept image of function of secondary school graduates do not meet the requirements of the curricula.

In most students concept image of function there were functions which can be defined by an assignment rule, but the content and the meaning of the concept was missing. Most students considered a curve for a graph of a function, if they recognised similarities with the already known function curves. The concept formation process in this group of students "broke" at some point. Despite the fact that the Hungarian curriculum and textbook introduces the "broader" function concept in the 7th form already, the concept images of the students reflected the "narrow" function concept. This confirms *H1.1*.

In **Chapter 4** we reported on the results of a 3 years long contrastive pedagogical longitudinal research on the formation of the function concept. We studied two groups of primary school students: one from a Hungarian school in Ukraine, and the other from Hungary. In order to confirm or reject the hypothesis, we used a skill proficiency test which was analysed with quantitative methods complemented with qualitative analyses of the students' work.

The concept formation happens in a targeted form in the case of students from Hungary, while in the case of students from Ukraine it's different. Knowing these, we first tested the level of rule following and rule recognition skills in the 6th form (2014), before the introduction of the function concept. Based on the experiences of the first measurement, we assessed the students again in the 7th form (2015), after the introduction of the definition of the function concept. In the second test we focused on the effects of the knowledge of the concept on the skills. Finally, we tried to map the concept image of function among the students at the end of the 8th form (2016).

An overview of H2. hypothesis:

H2.1. The investigated 6th form students in the Ukrainian school have lower rule following and rule recognition skills than 6th form students in Hungary.

Due to the insufficient development requirements 6th form students in Ukraine (UA) possessed the rule recognition and the rule following skills on a lower level than their peers in the other group in Hungary (HU). So, the results confirmed *H2.1*. The UA students were able to recognise and to follow the relationship between the covariant quantities which were represented in different ways, but the argumentation verbally or with formulas for the rule that defines this relationship were limited and caused some problems for them.

H2.2. The rule following and rule recognition skills of the Ukrainian students improve in the studied period.

The rule following and rule recognition skills of the UA students improved in the studied period (2014-2015) in the areas of one-step rule recognition hidden in different contexts (table, verbal, graph) or the interpretation and following of explicit rules. Although in small proportions, but some improvement was detectable in the multi-step rule recognition represented with table (*H2.2. accepted*).

H2.3. The introduction of the function concept has an effect on the improvement on the rule following and rule recognition skills.

Although, the introduction of the function concept had an impact on the recognition of the relationship between the covariant quantities represented in different ways and on the description and following of the rule which determines it (*H2.3. confirmed*), the performance of the UA students was behind the HU students. It was difficult for many UA students to describe the recognised relationship with words or formula.

Based on the results of these analyses we can claim that, besides the spontaneous development, the targeted preparation work strengthened the formation of the right function schema in the HU students. The concept of the function, which was introduced in the 7th form, could be built on stronger fundamentals in the HU group.

H2.4. The investigated students in the Hungarian schools develop a more ideal concept image of function (so the concept image has a mutual relationship with the concept definition) by the end of the 8th form compared to their peers in Ukraine.

The results of the research showed that, regardless of the different concept formation processes, after the introduction of the definition of the function and several specific functions, the same “narrow” function concept was present in both groups as in the group of university students. So, despite the less emphasis on the preparation of the function concept in the Ukrainian curricula and textbooks, by the end of the 8th form both groups have similar concept image.

Regarding *K2.4*, we can claim the following:

The Hungarian students couldn't form a more ideal concept image of function by the end of the 8th form than the Ukrainian participants, although the concept formation process was different.

In **Chapter 5** we reported on the experiences of the improvement program targeted on the preparation of the function concept. This was done as an action research in the 6th form of the

Secondary School of Nagydobrony (elementary, primary and secondary school) in the academic year of 2015-2016 considering the criteria of contrastive pedagogical research. In order to confirm or reject the hypotheses, we used a post-test and a delayed test which was analysed quantitatively and completed with the qualitative analyses of the students. In addition, we made observation during the classes (written notes, audio recordings, pictures, the “Móka” workbook).

In the following table we summarized the improvement program of 11 occasions.

	Improvement strategy, method	Brief content description
An exploratory study (17 November 2015)		
1st part of the improvement program (23 November – 7 December 2015) Topic in the curriculum: Ratio, ratio pair (the sessions covered only part of the lessons)		
1.	Analysing skills, relational vocabulary improvement	Creating element pairs with manual activities
2.	Formation of the concept of covariant quantities, improvement of relationship recognition skills and recording them in different ways	The introduction of covariant quantities with the use of function machine
3.	Improvement of the rule following skill, and of the switching between different representation forms	Defining the substitution value of expressions
4-5.	Improvement of the recognition of the covariant quantities and the relationship between them	Recognising covariant quantities hidden in textual tasks and representing them with tables, formulas
6.	Improvement of “two-directional” thinking	Connecting situations and algebraic expressions which describe their solutions
Post-test (19 January 2016)		
2nd part of the improvement program (25 April – 4 May 2016) Topic in the curriculum: Graphs (sessions covered the whole lesson)		
7.	Improvement of observation skills, understanding everyday graphs	Introducing graphs. Reading data from graphs
8.	Recording covariant quantities. Improvement of the switching skill between representations	Creating a graph based on a prepared table and filling in a table based on a graph
9.	Improvement of the recognition skill with playful methods	Acting out situations to prepare the table and graph representation of covariant quantities
10.	Creating experimental functions, representing them and connecting them with different situations	Representing different situations taken from real life (discrete case)
11.	Creating experimental functions, representing them and connecting them with different situations	Representing different situations taken from real life (continuous case)
Post-test (19 January 2016)		
Delayed test (23 May 2016)		

Table: A development program designed to prepare the function concept

An overview of H3. hypothesis:

H3.1. The introduction of the sources of the function concept in the 6th form contributes to the better understanding of the constitutive parts of the function concept.

The sources facilitated the familiarization with the constitutive parts of function concept, but for some students the abstraction from the experiences gained in the program to other situations was not successful. So, *H3.1.* can be only confirmed with the following modification: *The introduction of the sources (function machine, processes taken from real life) of the function concept in the 6th form contributes to the better understanding of the constitutive parts of the concept, but weaker students need more practice.*

H3.2. The formation of the concept of covariant quantities is well facilitated by the understanding of the different representations of the function.

The formation of the covariant quantities embedded in different contexts was facilitated by tried-and-tested activities. The representations of covariant quantities helped students to name and recognise the relationships between them and to switch from one way of representation to the other (*H3.2.* confirmed). The representation of the recognised relationship with tables contributed to the easier verbal expression of this relationship in the language of Mathematics, if the relationship was defined by a one-step rule.

H3.3. The introduction of the constitutive elements and representations of the function concept in the 6th form contribute to the improvement of the rule following and rule recognition skills.

When the covariant quantities and their relationship is hidden in textual context, the recognition and the verbal expression proved to be difficult, in particular when the relationship is defined by a two-step rule or the quantities are implicitly hidden in the text.

Regarding *K3.3.*, we can claim the following:

By introducing the components and different representations in the 6th form, the recognition of the relationship hidden in different contexts that can be defined with one-step rule, can be improved by targeted training. However, the recognition and following of relationships that are defined with at least a two-step rule requires a more intensive long-term training.

At the end of the thesis we summarised the main results and experiences and presented some future implications.

MELLÉKLETEK

A szabálykövető és szabályfelismerő képességek vizsgálatának feladatlapja

6. osztály (2014)

1. Keress egy szabályt a táblázat oszlopainak első és második sorai között! Töltsd ki a táblázatot a talált szabály alapján! Jegyezd le szavakkal a felismert szabályt!

pék	tér	ló	bál	görög		
kép	rét	ól			derék	savas

2. Keress egy szabályt az egymás alatt lévő számokra és töltsd ki a táblázat hiányzó helyeit a talált szabály alapján! Jegyezd le szavakkal a felismert szabályt!

40	80	12	60	44	100	160				
10	20	3					1	13	31	95

3. Keress összefüggést az egyes oszlopok x és y értékei között és ez alapján pótolj a táblázat hiányzó elemeit! Írd le a felismert összefüggést szavakkal és kifejezéssel!

x	1	10	7	0	9	20	38
y	5	23	17				

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

4. Töltsd ki a táblázatot a következő szabály szerint: $y=2x+3$.
Fogalmazd meg szavakkal az adott hozzárendelési szabályt!

x	y
-3	
4	
44	
48	
-20	
0	

5. Egy csapból egy tartályba másodpercenként 2 liter víz folyik. Mennyi víz van a tartályban

a) 1 s,

c) 5 s,

e) 16 s

b) 2 s,

d) 10 s,

f) x s

múlva, ha a csap megnyitásakor a tartály üres volt?

Szemléltesd a mennyiségek közötti kapcsolatot táblázattal!

A szabálykövető és szabályfelismerő képességek vizsgálatának feladatlapja

7. osztály (2015)

1. Keress összefüggést az egyes oszlopok x és y értékei között és ez alapján töltsd ki a táblázatot!

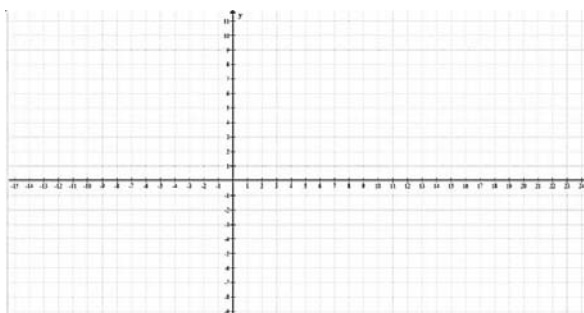
x	16	12	4	-8	20	4	0			
y	4	3	1					6	-3	-1

Jegyezd le a felismert szabályt

a) szavakkal:

b) képlettel:

Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat!



2. Keress összefüggést az egyes oszlopok x és y értékei között és ez alapján pótold a táblázat hiányzó elemeit!

x	1	10	7	0	9	20	38
y	5	23	17				

$y =$ _____

Írd le a felismert összefüggést

a) szavakkal:

b) képlettel:

3. Töltsd ki a táblázatot a következő szabály szerint: $y = \frac{x}{3} - 7$.

x	9	0	42	63	15	3
y						

Fogalmazd meg szavakkal ezt a hozzárendelési szabályt!

4. Egy csapból egy tartályba másodpercenként 2 liter víz folyik. Mennyi víz van a tartályban
- 1 s,
 - 2 s,
 - 5 s,
 - 10 s,
 - 16 s,
 - x s

múlva, ha a csap megnyitásakor a tartály üres volt?

Szemléltesd a mennyiségek közötti kapcsolatot:

I. táblázattal:

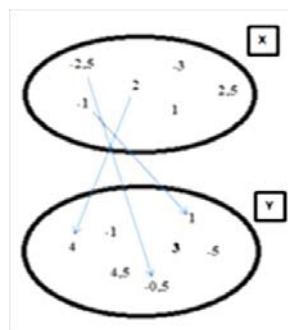
II. képlettel:

Írd le a mennyiségek közötti kapcsolatot képlettel abban az esetben, ha a csap megnyitásakor a tartályban 3 l víz volt!

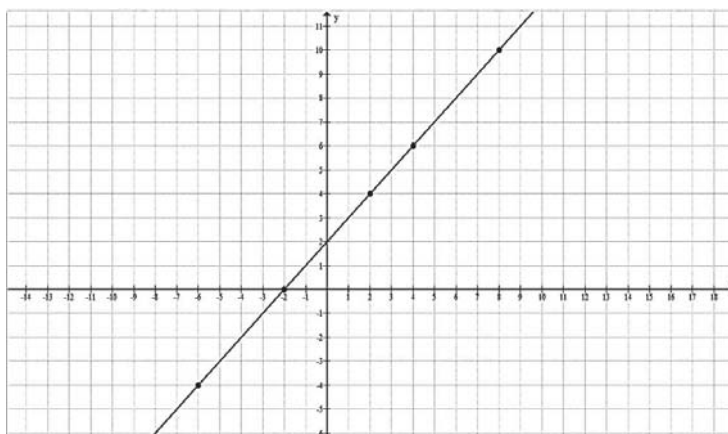
5. A következő ábrán két halmaz néhány összetartozó elempárját nyilakkal jelöltük.

a) Fogalmazd meg a hozzárendelési szabályt!

b) Rajzold be a hiányzó nyilakat!



6. A következő grafikon két halmaz összetartozó elempárjait szemlélteti.



a) Írd be a táblázatba az ábrán pontokkal jelölt összetartozó elempárokat és még két tetszőlegesen választott számpárt!

x								
y								

b) Írd le képlettel az elempárok között felismert szabályt.

A függvény fogalmáról kialakult tanulói képzetek vizsgálatának feladatlapja 8. osztály (2016)

1.) a) Mit nevezünk függvénynek?

.....

.....

.....

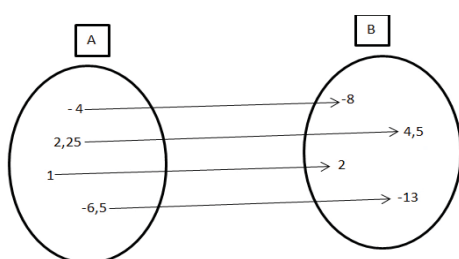
.....

.....

b) Adj rá egy példát!

2.) Az alábbi ábrák az A és a B halmaz elemei közötti kapcsolatot szemléltetik. A nyilak azt jelzik, hogy az A halmaz elemeihez milyen elemeket rendeltünk a B halmazból. Melyik hozzárendelés függvény az alábbiak közül? Válaszodat indokold!

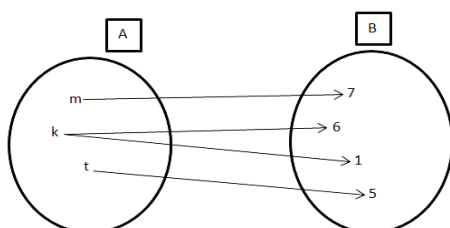
a)



Függvény, mert...

Nem függvény, mert...

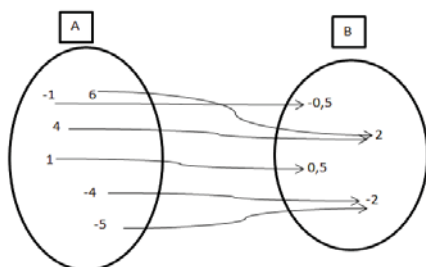
b)



Függvény, mert...

Nem függvény, mert...

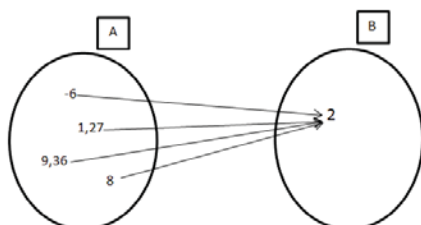
c)



Függvény, mert...

Nem függvény, mert...

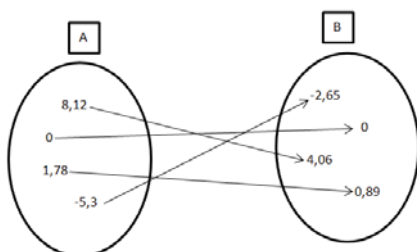
d)



Függvény, mert...

Nem függvény, mert...

e)

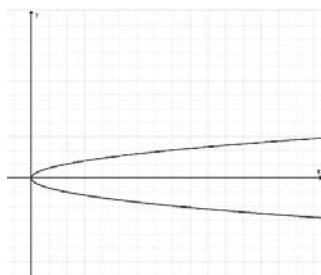


Függvény, mert...

Nem függvény, mert...

3.) Az ábrákon látható grafikonok közül melyik ábrázol függvényt? Válaszodat indokold!

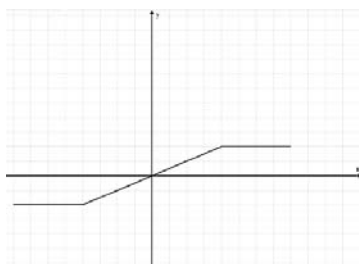
a)



Függvény, mert...

Nem függvény, mert...

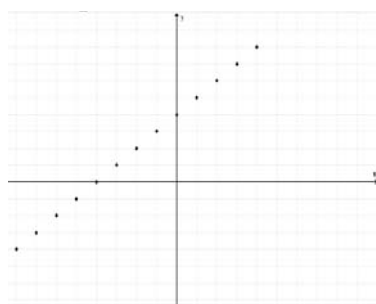
b)



Függvény, mert...

Nem függvény, mert...

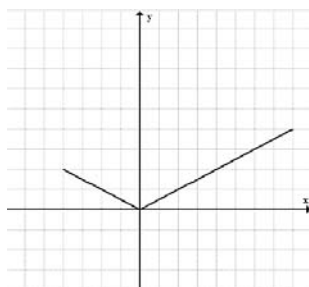
c)



Függvény, mert...

Nem függvény, mert...

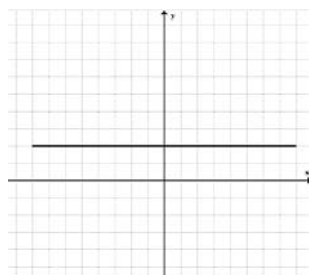
d)



Függvény, mert...

Nem függvény, mert...

e)



Függvény, mert...

Nem függvény, mert...

4.) a) Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az X halmaz elemeihez milyen elemeket rendeltünk az Y halmazból. Lehet-e ez a hozzárendelés függvény? Válaszodat indokold!

x	-1	4	1	6	-4	-5
y	-0,5	2	0,5	2	-2	-2

Igen, lehet, mert.....

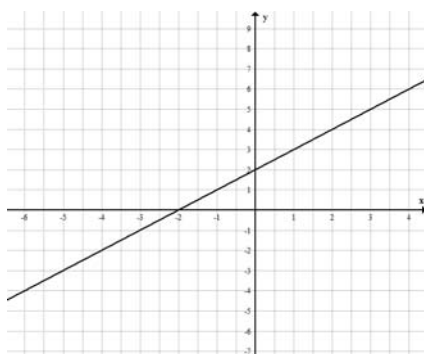
Nem lehet, mert

- b) Ha az **a)** kérdésre a válaszod **IGEN** volt, azaz úgy gondoltod, hogy a megadott táblázat lehet egy függvény értéktáblázata, akkor módosítsd a táblázatot (értékpárok lehúzásával, javításával, táblázat kiegészítésével) úgy, hogy az így kapott hozzárendelés már **NE LEGYEN** függvény!

x	-1	4	1	6	-4	-5		
y	-0,5	2	0,5	2	-2	-2		

Ha az **a)** kérdésre a válaszod **NEM** volt, azaz úgy gondoltod, hogy a megadott táblázat nem lehet egy függvény értéktáblázata, akkor módosítsd a táblázatot (értékpárok lehúzásával, javításával, táblázat kiegészítésével) úgy, hogy az így kapott hozzárendelés már függvény lesz!

5.) A következő ábrán egy függvény grafikonja látható!



a) Készítsd el a függvény értéktáblázatát!

b) Add meg ezt a függvényt:

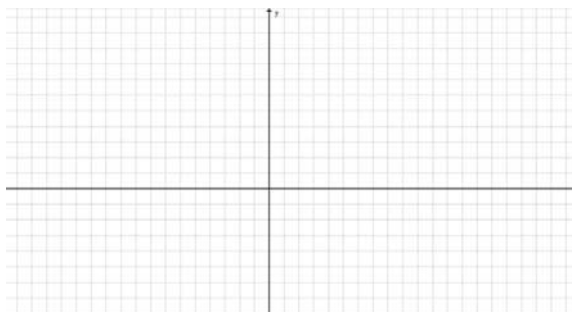
I) szavakkal

II) képlettel

6.) 40°C -os vizet hűtünk. Percenként 5°C -kal csökken a víz hőmérséklete.

a) Készíts táblázatot az eltelt idő és a víz hőmérséklete közötti kapcsolatról!

b) A táblázat segítségével szemléltesd grafikonon a víz hőmérsékletváltozását!



c) Fogalmazd meg szavakkal hogyan függ a víz hőmérséklete az eltelt időtől!

d) Fogalmazd meg matematika nyelvén (írd le képlettel), hogyan függ a víz hőmérséklete az eltelt időtől!

d) Hány $^{\circ}\text{C}$ -os lesz a víz 10 perc múlva?

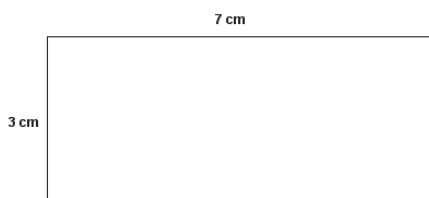
e) Hány perc múlva lesz a víz hőmérséklete 0°C ?

Tájékozódó felmérés

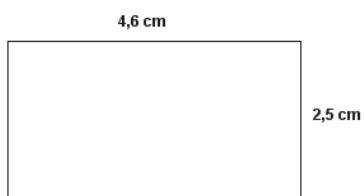
6. osztály (2015. november 17.)

1. Határozd meg a téglalapok területét!

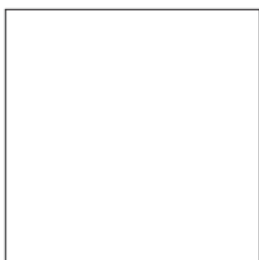
A)



B)



2. Határozd meg az ábrán látható négyzet területét! A szükséges adatokat mérd meg!



Rajzolj olyan téglalapot, melynek területe fele ezen négyzet területének! (a téglalap oldalainak hossza centiméterben mérve egész számok)

3. Ismeretes, hogy $s = 50 \cdot t$.

a) Számítsd ki az s értékét, ha $t = 4$!

Megoldás:

b) Ha tudjuk, hogy $s = 500$, akkor mennyi a t értéke?

Megoldás:

4. Határozd meg

a) 12-nek az $\frac{1}{6}$ -át! *Megoldás:*

b) 6,4-nek az $\frac{1}{8}$ -át! *Megoldás:*

c) 2-nek az $\frac{1}{4}$ -ét! *Megoldás:*

(amennyiben az eredmény egyszerűsíthetetlen tört, azt add meg tizedes törtként!)

5. 1 kg narancs ára 5 hrvnya.

Mennyibe kerül 8 kg narancs?

Hány kg narancsot vásárolt Peti, ha a pénztárnál 75 hrvnyát fizetett?

6. Egy csapból a medencében másodpercenként 5 liter víz folyik. Mennyi víz lesz a medencében 2 másodperc múlva, ha a csap megnyitásakor a medencében 100 liter víz volt.

7. Zsuzsa tulipáncsokrot vásárolt az anyukájának. A csokorban 3 szál tulipán volt, a csomagolás 5 hrvnyába került, és így a csokorért 35 hrvnyát fizetett. Mennyibe került egy szál tulipán?

A fejlesztő program 6. foglalkozásának feladatlapja

(2015. december 7.)

A bal oszlopban lévő 1.)-4.) kifejezések a jobb oszlopban található A)-G) feladatok megoldását írják le. Párosítsd a feladatokat a megoldásaikat leíró kifejezéssel.

- | | |
|------------------------|--|
| 1.) $y=36 \cdot x$ | A) Istvánnak x db füzete van, Petinek 36-tal több füzete van, mint Istvánnak. Hány füzete van Petinek? |
| 2.) $y=2 \cdot x+36$ | B) Egy kosárban x db alma van, körte pedig 36-szor annyi, mint alma. Hány db körte van a kosárban? |
| 3.) $y=36:x$ | C) Egy 36 cm-es gyertyából percenként 2 cm elég. Hány cm marad a gyertyából x perc múlva? |
| 4.) $y=36 - 2 \cdot x$ | D) Az autó x km/ó sebességgel 36 km-t tett meg. Hány órát volt úton? |
| | E) Egy csapból a tartályba másodpercenként 2 liter víz folyik. Hány liter víz lesz a tartályban x másodperc múlva, ha a csap megnyitásakor 36 liter víz volt benne? |
| | F) Zsuzsa rózsacsokrot vett anyukájának. A csokorba x szál rózsa volt, 1 szál rózsa 2 hrivnyába került, a csomagolás pedig 36 hrivnyába. Mennyit fizetett Zsuzsa a rózsacsokorért? |
| | G) Az osztályba 36 gyerek jár. A gyerekek egyforma karácsonyi csomagot kaptak, mindegyikben x db cukorka volt, minden gyerek kapott egy csomagot. Hány db cukorkát kapott összesen az osztály? |

Az F) feladat adatai alapján töltsd ki a következő táblázat üres helyeit:

A rózsaszálak száma (db)	1	2	3	4	5
Rózsaszálak ára (hr)	2				
Csomagolás ára (hr)	36	36	36	36	36
Fizetett összeg a rózsacsokorért (hr)					

Az F) feladat adatai alapján válaszolj a következő kérdésre:

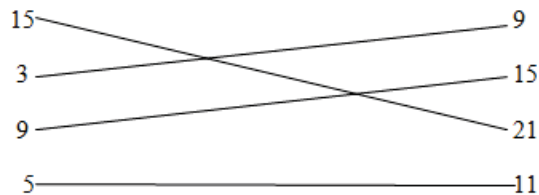
Zsuzsa rózsacsokrában 11 szál rózsa volt. Mennyit fizetett Zsuzsa ezért a rózsacsokorért?

Megoldás:

Utóteszt (a fejlesztő program első részének végén)

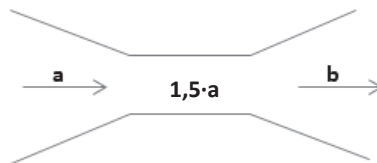
(2016. január 19.)

1. A bal és a jobb oszlopban lévő számokat párosítottuk egy szabály szerint, mely minden elempárra igaz.



Fogalmazd meg a felismert szabályt szavakkal!

2. Egy gép a következő szabály szerint működik:



a) Fogalmazd meg a gép működési szabályát! (Mit csinál a gép?)

b) Mennyi a **b** értéke, ha 1) $a = 1$; 2) $a = 10$; 3) $a = 1,2$?

c) Rendezd a kapott elempárokat táblázatba!

d) Mennyi az **a** értéke, ha **b=14** ?

3. Töltsd ki az üres helyeket a táblázatban a következő szabály szerint: $y = 50 \cdot x$

x	1	4	2,5			
y				1000	300	60

A kitöltött táblázat alapján válaszolj a következő kérdésekre:

a) Fogalmazd meg a megadott szabályt szavakkal!

b) Nevezd meg néhány elempárt!

c) Ha $y = 50 \cdot x$, akkor $x = \dots\dots\dots$?

d) Mennyi az $y:x$ arány értéke?

4. Keress egy szabályt az egymás alatt lévő számokra és ez alapján töltsd ki a táblázatot!

a	15	5	20	50	1	0			
b	3	1	4				6	7	1,4

Jegyezd le az elempárok között felismert szabályt

a) szavakkal:

b) matematika nyelvén (kifejezéssel):

5. Egy csapból egy tartályba másodpercenként 2 liter víz folyik. Mennyi víz lesz a tartályban

- a) 1 s,
- b) 2 s,
- c) 5 s,
- d) 10 s,
- e) 16 s,
- f) x s

múlva, ha a csap megnyitásakor a tartály üres volt?

1) Milyen két mennyiség szerepel a feladatban?

2) Szemléltesd a mennyiségek közötti kapcsolatot táblázattal:

3.) Írd le:

a) szavakkal:

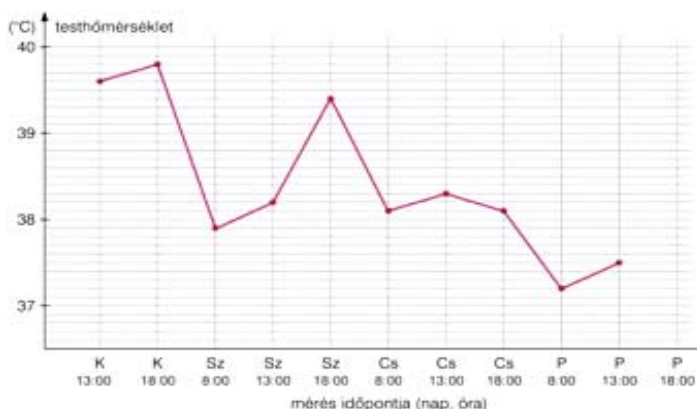
b) matematika nyelvén (kifejezéssel)

hány liter víz lesz a tartályban x másodperc múlva, ha a csap megnyitásakor a tartályban 3 liter víz volt!

Utóteszt (a fejlesztő program második részének végén)

(2016. május 11.)

1. Peti influenzás lett és magas láza volt. Édesanyja keddtől péntekig naponta háromszor mérte a lázát és feljegyezte a mérések eredményeit. Ezekből anyukája az ábrán látható grafikont készítette.



a) A grafikon alapján töltsd ki a táblázatot!

A mérés időpontja (nap, óra)	K, 18:00	Sz, 13:00	CS, 8:00	Cs, 18:00	P, 13:00
Testhőmérséklet (°C)					

b) Mikor volt a legmagasabb a testhőmérséklete? Mennyi volt ekkor?

c) Hogyan változott a testhőmérséklete kedd 18:00 órától szerda 8:00 óráig?

d) Melyik nap folyamán fordult elő az, hogy a 8:00, 13:00 és 18:00 órai mérési eredmények között kis különbségek voltak?

e) Mennyi volt pénteken 8:00-kor a testhőmérséklete? Meggyógyult-e Peti péntek reggelre?

2. Egy 14 cm-es gyertyából percenként 2 cm elég.

a) Készíts táblázatot az eltelt idő és a gyertya magassága közötti kapcsolatról!

b) A táblázat segítségével szemléltesd grafikonon a gyertya magasságának változását!

c) Fogalmazd meg szavakkal és matematika nyelvén, hogyan függ a gyertya magassága az eltelt időtől!

d) Hány cm magas lesz a gyertya 5 perc múlva?

e) Hány perc múlva ég el a gyertya?