



LINEÁRIS FÜGGVÉNYEGYENLETEK
MEGOLDÁSI MÓDSZEREI ÉS
 t -KONVEX FÜGGVÉNYEK STABILITÁSA

doktori (PhD) értekezés

Házy Attila

Debreceni Egyetem,
Debrecen, 2004

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Matematika doktori program Analízis alprogramja keretében készítettem 1999-2002 között és ezúton nyújtom be a Debreceni Egyetem doktori (Ph.D.) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2004. október 7.

.....

Házy Attila
jelölt

Tanúsítom, hogy Házy Attila doktorjelölt 1999-2002 között a fent nevezett doktori alprogram keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglaltak a jelölt önálló munkáján alapulnak, az eredményekhez önálló alkotó tevékenységével meghatározó módon járult hozzá. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2004. október 7.

.....

Dr. Páles Zsolt
témavezető

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretném megköszönni néhány embernek a disszertáció elkészítésében nyújtott segítségét.

Elsősorban témavezetőmnek, Páles Zsoltnak, aki nélkül ez a disszertáció soha nem készülhetett volna el.

A Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének és Analízis Tanszékének, valamint a Miskolci Egyetem Matematikai Intézetének, hogy lehetővé tették számomra, hogy folytassam az elkezdett munkát, és támogattak a tanulmányaim befejezésében.

Végül szeretném megköszönni szüleimnek, testvéreimnek és barátaimnak (akiket itt csak azért nem sorolok fel, mert még véletlenül sem szeretnék kifejejteni senkit) azt, hogy mindenben segítettek, támogattak, bíztattak és végig mellettem álltak.

1 BEVEZETÉS

A függvényegyenletek elméletének első rendszerezése, összefoglalása Aczél János [Acz66] könyvében található. Ez a könyv a 60-as évekig elért legfontosabb eredményeknek egy átfogó ismertetését nyújtja.

Ritka az, hogy olyan módszer létezne, amely egy egész egyenletosztályra alkalmazható. Ilyen módszert talált Székelyhidi László [Szék82] a

$$(1.1) \quad \sum_{i=0}^{n+1} c_i f_i(p_i x + q_i y) = 0$$

konstans együtthatós, lineáris argumentumú lineáris függvényegyenletek általános megoldására. Az ilyen egyenletek (Székelyhidi László módszerével való) megoldásának számítógépes algoritmizálását Maple V. nyelven Gilányi Attila [Gil98] végezte el. Az (1.1)-től általánosabb

$$(1.2) \quad h_0(x, y)f_0(g_0(x, y)) + \dots + h_n(x, y)f_n(g_n(x, y)) = F(x, y)$$

alakú lineáris, kétváltozós függvényegyenletek differenciál-függvényegyenletekre való redukciójának algoritmusát Páles Zsolt [Pál92] találta meg. Itt $g_0, g_1, \dots, g_n, h_0, h_1, \dots, h_n$ és F adott valós értékű függvények az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konvex, nyílt halmazon, $f_0, f_1, \dots, f_n$ pedig ismeretlen függvények. Ilyen egyenletek például a következők:

$$f(x+y) - g(x) - h(y) = 0, \quad (\text{Pexider-egyenlet})$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x) + f(y)}{2} = 0, \quad (\text{Jensen-egyenlet})$$

$$f(xy) + g((1-x)y) + h(x(1-y)) + l((1-x)(1-y)) = 0, \\ (\text{információelméletből származó egyenlet})$$

$$xf(x+y) - yg(xy) - h(y) = 0.$$

A dolgozat első részében leírjuk a redukció algoritmusának elméleti hátterét, amely Páles Zsolt [Pál92] dolgozatából származik. Az ebben a dolgozatban közölt eredmények szerint megmutatható, hogy elegendően magas rendbeli differenciálhatóságot feltételezve létezik egy

$$\mathbf{D} = \sum_{i,j \geq 0, i+j \leq k} \alpha_{ij}(x, y) \partial_x^i \partial_y^j$$

lineáris parciális differenciál operátor (változó együtthatókkal és k kisebb, mint $2n - 1$ renddel) amely "megöl" minden tagot az egyenlet bal oldalában, kivéve az elsőt. Azaz, alkalmazva $\mathbf{D}$ -t az (1.1) egyenletre kapjuk, hogy

$$\mathbf{D}[h_i(x, y)f_i(g_i(x, y))] = 0$$

minden $(x, y) \in \Omega$ és $i = 1 \dots n$ esetén, továbbá

$$\mathbf{D}[h_0(x, y)f_0(g_0(x, y))] = \mathbf{D}F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

amely egy k -ad rendű lineáris differenciál-függvényegyenlet. Megmutatjuk, hogy a differenciálegyenlet együtthatói meghatározhatóak az adott g_i, h_i, F függvények ismeretében. A következő fejezetben néhány példán keresztül bemutatjuk az algoritmus működését. Megadjuk a kapott mátrixokat, a differenciáloperátort és a függvényegyenletből kapott differenciál-függvényegyenletet. A következő részben a kapott differenciál-függvényegyenlettel foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy ha tekintjük az

$$(1.3) \quad l_n(x, y)f^{(n)}(g(x, y)) + \dots + l_0(x, y)f(g(x, y)) = F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

egyenletet, ahol $l_0, l_1, \dots, l_n, g$ és F adott valós, analitikus függvények Ω -n, továbbá f a $g(\Omega)$ -n értelmezett ismeretlen függvény, akkor létezik egy olyan differenciál-függvényegyenlet

$$(1.4) \quad h_m(x, y)f^{(m)}(g(x, y)) + \dots + h_0(x, y)f(g(x, y)) = H(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

(ahol $m \leq n$) amelynek az $(n+1)$ -szer differenciálható megoldásai megegyeznek az (1.3) megoldásaival, és a $h_0, h_1, \dots, h_m, H$ függvények teljesítik a következő parciális differenciálegyenlet-rendszert:

$$\partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y h_i - h_i \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x h_i - h_i \cdot \partial_x h_m)$$

minden $i = 1, \dots, m-1$ esetén és

$$\partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y H - H \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x H - H \cdot \partial_x h_m).$$

Néhány természetes feltétel mellett, ebből következik, hogy a $h_0, h_1, \dots, h_m$ és a H függvények felírhatóak a következő alakban:

$$h_i(x, y) = h_m(x, y)K_i(g(x, y))$$

minden $i = 0, \dots, m-1$ esetén és

$$H(x, y) = h_m(x, y)K(g(x, y)).$$

Így egyszerűsítés és $t = g(x, y)$ -nal való helyettesítés után kapjuk, hogy (1.4) egy közösleges differenciálegyenlet az f függvényre, amelynek rendje általában jóval kisebb, mint az (1.3) egyenlet rendje.

Ezután a program rövid leírása található. Megadjuk a programlistát, illetve a program működésének rövid leírását. A fejezet végén néhány futtatási eredmény található.

A disszertáció második részében néhány konvexitás-típusú egyenlőtlenséggel foglalkozunk. Ezekben az egyenlőtlenségekben az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény rendelkezik valamilyen gyenge regularitási tulajdonsággal (leggyakrabban azt tesszük fel, hogy f lokálisan felülről korlátos az értelmezési tartományának valamely pontjában), és teljesíti a konvexitási egyenlőtlenséget valamilyen hibataggal. Az első ilyen típusú vizsgálat Bernstein és Doetsch nevéhez fűződik, akik [BD15]-ben megmutatták, hogy ha egy f függvény lokálisan felülről korlátos az értelmezési tartományának valamely pontjában és Jensen-konvex, akkor f konvex. Ha az f függvény teljesíti a következő egyenlőtlenséget (azaz ε -Jensen konvex)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) + \varepsilon,$$

akkor Nikodem és Ng [NN93]-ban megmutatták, hogy az f függvény 2ε -konvex, azaz

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + 2\varepsilon$$

minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén. Ha rögzített $t \in]0, 1[$ esetén az f függvény teljesíti az

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon$$

egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ -re, akkor Páles Zsolt megmutatta [Pál00]-ben, hogy az f függvény kielégíti az

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \max\left\{\frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}\right\} \varepsilon$$

egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

A célunk ezen eredmények általánosítása volt. Első esetben megmutattuk, hogy ha f teljesíti az

$$(1.5) \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i |x-y|^{p_i}, \quad (x, y \in D)$$

egyenlőtlenséget, ahol $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, 1[^{k+1}$ és $t \in]0, 1/2]$ rögzített paraméterek és f az értelmezési tartományának valamely pontjában felülről korlátos függvény, akkor

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^k \frac{\varepsilon_i}{(1-t)^{p_i} - (1-t)} (s(1-s))^{p_i} |x-y|^{p_i}$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

A második esetben az (1.5) egyenlőtlenségnek azzal a speciális esetével foglalkozunk, amikor $k = 1$ és $p_0 = 0$. Ebben az esetben egy pontosabb becslést tudunk adni az f függvényre. Pontosabban ha az f függvényre igaz az

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 |x-y|^p$$

egyenlőtlenség, ahol $t \leq 1/2$ és $p < 1$, akkor

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \varepsilon_0/t + \varepsilon_1 \max \left\{ \frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2 - t)^p} \right\} (s(1-s))^p |x-y|^p$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

ELSŐ RÉSZ

Lineáris függvényegyenletek
megoldása számítógéppel

2 LINEÁRIS FÜGGVÉNYEGYENLETEK MEGOLDÁSA SZÁMÍTÓGÉPPSEL

2.1 LINEÁRIS KÉTVALTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLET REDUKCIÓJA DIFFERENCIÁL-FÜGGVÉNYEGYENLETRE.

2.1.1 JELÖLÉSEK

Első lépésként ismertetünk néhány jelölést és definíciót, amelyek a továbbiakban fontosak lesznek számunkra. Ezek a jelölések Páles Zsolt [Pál92] dolgozatából származnak, és mi is ezeket fogjuk használni a továbbiakban.

Legyen Ω egy nem üres halmaz $\mathbb{R}^2$ -ben. Jelöljük $\mathcal{C}^k(\Omega)$ -val az Ω -n k -szor folytonosan differenciálható valós értékű függvények halmazát, és legyen $\mathcal{C}(\Omega)$ a folytonos függvények halmaza.

$\mathcal{D}^k(\Omega)$ jelölje a

$$\mathbf{D} = \sum_{\substack{0 \leq i, j \\ i+j \leq k}} \alpha_{ij}(x, y) \partial_x^i \partial_y^j$$

alakú lineáris parciális differenciáloperátorok halmazát, ahol $\alpha_{ij}(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega)$ minden i, j esetén.

A $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_m \in \mathcal{D}^k(\Omega)$ operátorok egy rendszerét *függetlennek* nevezzük, ha a

$$\mathbf{D} = \alpha_1(x, y) \mathbf{D}_1 + \dots + \alpha_m(x, y) \mathbf{D}_m \quad (\alpha_i \in \mathcal{C}(\Omega))$$

differenciáloperátor $\mathcal{D}^k(\Omega)$ -n akkor és csak akkor azonosan nulla, ha $\alpha_i = 0$ az $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazon minden $i = 1, \dots, m$ esetén.

Nyilvánvaló, hogy a

$$\Delta = \{\text{id}, \partial_x, \partial_y, \dots, \partial_x^k, \partial_x^{k-1} \partial_y, \dots, \partial_y^k\}$$

operátorrendszer független és bázis $\mathcal{D}^k(\Omega)$ -ban. (Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbf{D} \in \mathcal{D}^k(\Omega)$ operátort elő tudunk állítani Δ elemeinek lineáris kombinációjaként $\mathcal{C}(\Omega)$ -beli együtthatókkal.) Így $\mathcal{D}^k(\Omega)$ dimenziója $(k+1)(k+2)/2$.

Szükségünk lesz a következő definícióra is: Azt mondjuk, hogy az Ω -n értelmezett $\{u_1, \dots, u_q\}$ folytonos, $\mathbb{R}^m$ -beli értékű függvények rendszerének

rangja r , ha r egy olyan egész szám, amelyhez létezik egy r -tagú $\{v_1, \dots, v_r\}$ részrendszere $\{u_1, \dots, u_q\}$ -nak, és egy $\Omega^* \subseteq \Omega$ sűrű, nyílt halmaz, melyekre

$$(2.1) \quad r = \text{rang}\{v_1(x, y), \dots, v_r(x, y)\} \quad (x, y) \in \Omega^*$$

és

$$(2.2) \quad u_i(x, y) = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij}(x, y) v_j(x, y) \quad (x, y) \in \Omega^*$$

teljesül minden $1 \leq i \leq q$ esetén, ahol $\alpha_{ij} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény minden i, j -re. (Ekkor a folytonosság miatt u_i egyértelműen meghatározott a fenti egyenlettel.) Ebben az esetben $\{v_1, \dots, v_r\}$ -t az $\{u_1, \dots, u_q\}$ generátorrendszerének nevezzük. Az Ω -n értelmezett $\mathbb{R}^m$ -beli értékű függvények tetszőleges rendszerének nem szükségszerűen létezik rangja a fenti értelemben. Azonban az alábbi Páles Zsolttól származó lemma szerint az analitikus függvények rendszerének beszélhetünk a rangjáról.

2.1.1. LEMMA. ([Pál92]) *Ha Ω egy összefüggő nyílt halmaz és $u_1, \dots, u_q$ $\mathbb{R}^m$ -beli értékű analitikus függvények Ω -n, akkor a rendszernek létezik rangja. Továbbá, ha tekintjük $u_1, \dots, u_q$ -t, mint meromorf valós értékű függvények teste feletti $\mathbb{R}^m$ -beli értékű meromorf függvények vektorterének elemeit, akkor $\{u_1, \dots, u_q\}$ rendszer rangja ebben a vektortérben a fent definiált r érték, valamint az α_{ij} függvények meromorf függvények.*

2.1.2 FELHASZNÁLT EREDMÉNYEK

Ebben a fejezetben ismertetünk néhány Páles Zsolttól származó eredményt [Pál92], melyekre a későbbiekben támaszkodni fogunk. Ahhoz azonban, hogy megfogalmazhassuk a tételt, még néhány jelölést be kell vezetnünk.

Legyen $g_0, \dots, g_n, h_0, \dots, h_n, F \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ olyan, hogy $\Omega_i = g_i(\Omega)$ nyílt minden $i = 0, \dots, n$ -re. Tekintsük a

$$(2.3) \quad h_0(x, y) f_0(g_0(x, y)) + \dots + h_n(x, y) f_n(g_n(x, y)) = F(x, y)$$

függvényegyenletet, ahol $f_0 \in \mathcal{C}^k(\Omega_0), \dots, f_n \in \mathcal{C}^k(\Omega_n)$ ismeretlen függvények.

Megjegyezzük, hogy ha $\mathbf{D} \in \mathcal{D}^k(\Omega)$ akkor

$$\mathbf{D}[h_i(x, y)f_i(g_i(x, y))] = \sum_{j=0}^k h_{ij}^{\mathbf{D}}(x, y)f_i^{(j)}(g_i(x, y))$$

fenáll, ahol $h_{ij}^{\mathbf{D}} \in \mathcal{C}(\Omega)$ minden $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k$ esetén.

Legyen k fix és legyen $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_m \in \mathcal{D}^k(\Omega)$ differenciáloperátorok egy rendszere $\mathcal{C}^k(\Omega)$ -n. Defináljuk a $h_{ij}^l : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket (ahol $0 \leq i \leq n, 1 \leq l \leq m$) a

$$\mathbf{D}_l[h_i(x, y)f_i(g_i(x, y))] = \sum_{j=0}^k h_{ij}^l(x, y)f_i^{(j)}(g_i(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega$$

azonossággal.

Ekkor legyen

$$\begin{aligned} h_{ij} &:= (h_{ij}^1, \dots, h_{ij}^m)^T, & i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, k; \\ H_i &:= (h_{i0}, \dots, h_{ik}), & i = 0, \dots, n; \\ H &:= (H_1, \dots, H_n); \\ H^* &:= (H_0, H_1, \dots, H_n). \end{aligned}$$

A következő tétel azt mutatja, hogy hogyan konstruálható olyan differenciáloperátor, amely eliminálja az egyenletből az összes ismeretlen függvényt az első kivételével.

2.1.2. TÉTEL. ([Pál92]) *Tegyük fel, hogy $\{\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_m\}$ differenciáloperátorok egy független rendszere és a H függvénytáblázat, azaz a*

$$(2.4) \quad \{h_{10}, \dots, h_{1k}, \dots, h_{n0}, \dots, h_{nk}\}$$

rendszer rangja létezik, és nem nagyobb, mint $m-1$. Ekkor létezik egy nem azonosan nulla $\mathbf{D}$ operátor $\mathcal{D}^k(\Omega)$ -n, melyre

$$(2.5) \quad \mathbf{D}[h_i(x, y)f_i(g_i(x, y))] = 0$$

minden $(x, y) \in \Omega$ és $i = 1, \dots, n$ esetén. Ha H^ -nak is létezik rangja és $\text{rang}(H) < \text{rang}(H^*)$ teljesül, akkor létezik egy $\mathbf{D} \in \mathcal{D}^k(\Omega)$ úgy, hogy (2.5) érvényes, és*

$$(2.6) \quad \mathbf{D}[h_0(x_0, y_0)f_0(g_0(x_0, y_0))] \neq 0$$

valamely $f_0 \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ függvényre és valamely $(x_0, y_0) \in \Omega$ pontra.

Ha $v_1 = (v_{1,1}, \dots, v_{1,m})^T, \dots, v_r = (v_{r,1}, \dots, v_{r,m})^T$ generátorrendszer a (2.4) rendszernek, akkor a $\mathbf{D}$ differenciáloperátort fel tudjuk írni

$$(2.7) \quad \mathbf{D} = \det \begin{vmatrix} v_{1,1}(x, y) & \dots & v_{m-1,1}(x, y) & \mathbf{D}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{1,m}(x, y) & \dots & v_{m-1,m}(x, y) & \mathbf{D}_m \end{vmatrix}$$

alakban, ahol a v_{ij} együtthatókat ($r < i < m; 1 \leq j \leq m$) tetszőlegesen választhatjuk.

A (2.3) típusú egyenletek megoldására vonatkozó regularitási eredmények találhatóak Páles Zsolt [Pál92] dolgozatában illetve Járai Antal [Jár04] könyvében.

2.1.3 A DIFFERENCIÁL-FÜGGVÉNYEGYENLETTÉ ALAKÍTÓ ALGORITMUS

Az eddigi eredmények segítségével megadhatunk egy algoritmust $\mathbf{D}$ keresésére és (2.3) megoldására:

- (A) Az ismert $h_0, \dots, h_n, g_0, \dots, g_n, F$ függvények megadása;
- (B) $k = 0$;
- (C) k növelése 1-gyel
- (D) Legyen $m := (k+1)(k+2)/2$, és $\{\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_m\} = \{\text{id}, \partial_x, \partial_y, \dots, \partial_x^k, \partial_x^{k-1}\partial_y, \dots, \partial_y^k\}$;
- (E) A $H_0, \dots, H_n$ függvenymátrixok meghatározása;
- (F) $\text{rang}(H)$ és $\text{rang}(H^*)$ meghatározása;
- (G) Ha $m-1 < \text{rang}(H)$, akkor **(C)**, egyébként **(H)**;
- (H) Ha $\text{rang}(H) = \text{rang}(H^*)$ akkor **(C)**, egyébként **(I)**;
- (I) $\mathbf{D}$ differenciáloperátor meghatározása (a (2.7) képlettel);
- (J) A $\mathbf{D}$ differenciáloperátor alkalmazása a (2.3) egyenletre. Így egy differenciál-függvényegyenletet kapunk f_0 -ra.

Az algoritmussal kapcsolatosan három megjegyzést tehetünk:

2.1.3. MEGJEGYZÉS. Ha növeljük a k értékét, a H mátrix rangja $m - 1$ -nél kisebbé tehető. Kivételes esetekben azonban az is előfordulhat, hogy H és H^* rangja egyenlő minden olyan k esetén, amelyre $\text{rang}(H) \leq m - 1$.

2.1.4. MEGJEGYZÉS. Megjegyezzük, hogy ha tetszőleges k_0 esetén a $\text{rang}(H) < \text{rang}(H^*)$ egyenlőtlenség érvényes, akkor ez teljesül bármely $k \geq k_0$ esetén is.

2.1.5. MEGJEGYZÉS. Ha a (2.3)-ban a g_i függvények függetlenek abban az értelemben, hogy

$$\partial_x g_i(x, y) \partial_y g_j(x, y) - \partial_x g_j(x, y) \partial_y g_i(x, y) \neq 0$$

teljesül Ω egy sűrű, nyílt részhalmazán (ahol $i, j = 0, \dots, n, i \neq j$), akkor $k < n$ esetén a H és H^* rangja egyenlő $m = (k + 1)(k + 2)/2$ -vel. Ezért általános esetben k kezdeti értéke a **(B)** lépésben $n - 1$ is lehetne.

2.1.4 PÉLDÁK

Ebben az alfejezetben néhány példát adunk az átalakító algoritmus működésére. Megadjuk az eljárás végén kapott mátrixokat, a differenciáloperátort, a kapott differenciál-függvényegyenletet, valamint az egyenletek megoldásait.

1.PÉLDA: Tekintsük a következő függvényegyenletet:

$$(x + y)f(x + y) - yg(x) - h(y) = x + y.$$

Legyen $k = 2$, és tekintsük az $\{\text{id}, \partial_y, \partial_x, \partial_y^2, \partial_y \partial_x, \partial_x^2\}$ operátorokat. Ezeket alkalmazva az egyenletre a

$$H_f := \begin{bmatrix} x + y & 0 & 0 \\ 1 & x + y & 0 \\ 1 & x + y & 0 \\ 0 & 2 & x + y \\ 0 & 2 & x + y \\ 0 & 2 & x + y \end{bmatrix}; \quad H_g := \begin{bmatrix} -y & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -y \end{bmatrix};$$

$$H_h := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixokat kapjuk.

Ha el akarjuk távolítani az utolsó két tagot a függvényegyenletből, akkor a

$$H = (H_g, H_h) = \begin{bmatrix} -y & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot kell tekintenünk. Ekkor a H mátrix rangja 5-tel, a H^* mátrix rangja pedig 6-tal egyenlő. Így teljesülnek az

$$5 = m - 1 \geq \text{rang}(H) = 5$$

és a

$$5 = \text{rang}(H) < \text{rang}(H^*) = 6$$

feltételek, így

$$\mathbf{D} = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \text{id} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \partial_y \\ -y & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \partial_y \partial_y \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_y \partial_x \\ 0 & -y & 0 & 0 & 0 & \partial_x \partial_x \end{vmatrix} = y \partial_x - y^2 \partial_x \partial_y.$$

Alkalmazva a kapott $\mathbf{D}$ differenciáloperátort a függvényegyenletre, az alábbi differenciál-függvényegyenletet kapjuk:

$$f(x+y) + (x-y)f'(x+y) - (yx+y^2)f''(x+y) = 1.$$

Az így kapott differenciál-függvényegyenletnek a megoldását a következő fejezetben leírt eljárással kaphatjuk. Most csak megadjuk, hogy ennek az egyenletnek a megoldása:

$$f(t) = 1 + \frac{c_1}{t}.$$

Ha a kapott megoldást visszahelyettesítjük az egyenletbe, akkor az

$$-yg(x) - h(y) = c_1$$

egyenlet adódik, melynek könnyen látható megoldásai:

$$g(x) = c_2 \quad \text{és} \quad h(y) = c_1 + c_2 y.$$

Így a fenti függvényegyenlet kétszer differenciálható megoldásait meghatároztuk.

2.PÉLDA: Tekintsük az

$$xf(x+y) - yg(xy) - h(y) = 0$$

egyenletet. Legyen $k = 2$, és vegyük az $\{\text{id}, \partial_y, \partial_x, \partial_y^2, \partial_y \partial_x, \partial_x^2\}$ operátorokat. Ekkor a

$$H_f = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix}; \quad H_g = \begin{pmatrix} -y & 0 & 0 \\ -1 & -xy & 0 \\ 0 & -y^2 & 0 \\ 0 & -2x & -yx^2 \\ 0 & -2y & -xy^2 \\ 0 & 0 & -y^3 \end{pmatrix}; \quad H_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixokat kapjuk. A keresett differenciáloperátor

$$\mathbf{D} = -y^3(x\partial_x^2 - y\partial_x\partial_y + 2\partial_x).$$

Ezt alkalmazva a függvényegyenletre a

$$-y^3(2f(x+y) + (4x-y)f'(x+y) + (x^2-yx)f''(x+y)) = 0$$

differenciál-függvényegyenletet kapjuk. Ismét csak megadjuk az egyenlet megoldását, ami

$$f(t) = 0.$$

Ezt visszahelyettesítve az egyenletbe könnyen látható, hogy

$$g(t) = c$$

és

$$h(t) = -ct.$$

2.2 A DIFFERENCIÁL-FÜGGVÉNYEGYENLET MEGOLDÁSA

Alkalmazva az előző fejezetben leírt eljárást a (2.3) típusú függvényegyenletekre egy inhomogén, lineáris differenciál-függvényegyenletet kapunk az f ismeretlen függvényre a következő alakban:

$$(2.8) \quad l_k(x, y)f^{(k)}(g(x, y)) + \dots + l_0(x, y)f(g(x, y)) = L(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

ahol $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt, összefüggő halmaz, $l_0, l_1, \dots, l_k, g, L$ adott valós függvények Ω -n és $g(\Omega)$ nyílt halmaz, továbbá $f : g(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ egy k -szor differenciálható ismeretlen függvény.

A rövidség kedvéért (2.8)-at az alábbi alakban használjuk a továbbiakban:

$$(2.9) \quad l_k \cdot (f^{(k)} \circ g) + \dots + l_0 \cdot (f \circ g) = L.$$

Az egyenletet *homogén*nek nevezzük, ha $L = 0$. Az egyenletet *k -ad rendű differenciál-függvényegyenlet*nek nevezzük, ha $l_k \neq 0$.

A megoldási módszer a következő: Tekintsünk egy k -ad rendű lineáris inhomogén differenciál-függvényegyenletet. Az *első lépés*ben konstruálunk egy újabb differenciál-függvényegyenletet, amelynek a rendje nem nagyobb, mint az eredeti egyenleté és a kapott egyenletrendszer megoldása megegyezik az eredeti egyenlet megoldásával. A *második lépés*ben pedig a kapott egyenletrendszerből előállítunk egy kisebb rendű differenciál-függvényegyenletet, amelynek a megoldása megegyezik az egyenletrendszer megoldásával. A kapott egyenletre pedig ismétljük az előző két lépést mindaddig, amíg a legutoljára kapott egyenlet együtthatói ki nem elégítenek egy parciális differenciálegyenlet-rendszert. Végül a $t = g(x, y)$ helyettesítéssel kapunk egy közös differenciálegyenletet.

Az eljárás illusztrálására nézzük az előző fejezet végén leírt példák közül az elsőt. Megmutatjuk, hogy hogyan kaphatjuk meg az egyenlet megoldásait:

Tekintsük a következő függvényegyenletet:

$$(2.10) \quad (x + y)f(x + y) - yg(x) - h(y) = x + y.$$

Alkalmazva a $\mathbf{D} = \partial_x - y\partial_x\partial_y$ differenciáloperátort az egyenletre, a g és h ismeretlen függvényeket eliminálhatjuk az egyenletből, és kapjuk a következő másodrendű differenciál-függvényegyenletet f -re:

$$(2.11) \quad -(xy + y^2)f''(x + y) + (x - y)f'(x + y) + f(x + y) = 1.$$

Ha alkalmazzuk a $\mathbf{D}_0 = \partial_x - \partial_y$ differenciáloperátort erre az egyenletre, akkor az egyenlet rendje nem növekszik, és kapjuk hogy

$$(2.12) \quad (x+y)f''(x+y) + 2f'(x+y) = 0$$

teljesül. Megszorozva a (2.12) egyenletet $(xy+y^2)$ -vel, a (2.11) egyenletet $(x+y)$ -nal és összeadva a kapott egyenleteket

$$(2.13) \quad (x+y)^2 f'(x+y) + (x+y)f(x+y) = x+y$$

adódik. Könnyű belátni, hogy az így kapott (2.13) egyenlet megoldásai megegyeznek a (2.11) egyenlet megoldásaival. Továbbá a (2.13) egyenlet rendje kisebb, mint a (2.11). A $t = x+y$ helyettesítéssel az egyenlet a

$$t^2 f'(t) + t f(t) = t,$$

egyenletté transzformálódik, amelyből kapjuk, hogy

$$f(t) = 1 + \frac{c_1}{t}.$$

Visszahelyettesítve a kapott f függvényt a (2.10) egyenletbe a következő egyenlet adódik a g és h függvényekre:

$$yg(x) + h(y) = c_1.$$

Könnyen észrevehetjük, hogy létezik egy c_2 konstans, hogy

$$g(x) = c_2, \quad h(y) = c_1 - c_2 y.$$

Könnyen látható, hogy ezek a függvények tényleg megoldásai a (2.10) egyenletnek.

A következő lemma garantálja, hogy mindig elő tudunk állítani egy differenciál-függvényegyenletet úgy, hogy az egyenlet rendje ne növekedjen.

2.2.1. LEMMA. ([Ház04]) *Legyen $l_0, l_1, \dots, l_k, g$ és L adott valós értékű differenciálható függvény Ω -n (úgy, hogy $g(\Omega)$ nyílt halmaz), továbbá legyen f egy $(k+1)$ -szer differenciálható valós függvény $g(\Omega)$ -n. Ekkor, alkalmazva a*

$$\mathbf{D}_0 = \partial_y g \cdot \partial_x - \partial_x g \cdot \partial_y$$

differenciáloperátort a (2.8) egyenletre, az egyenlet rendje nem növekszik.

B i z o n y í t á s. Könnyen belátható, hogy a $\mathbf{D}_0$ differenciáloperátor rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_0(\varphi + \psi) &= \mathbf{D}_0\varphi + \mathbf{D}_0\psi, \\ \mathbf{D}_0(\varphi \cdot \psi) &= \varphi \cdot \mathbf{D}_0\psi + \psi \cdot \mathbf{D}_0\varphi\end{aligned}$$

minden $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ esetén. Továbbá

$$\mathbf{D}_0(\chi \circ g) = 0$$

minden $\chi \in \mathcal{C}^1(g(\Omega))$ -re.

Alkalmazva a $\mathbf{D}_0$ a (2.8) operátort az egyenlet bal oldalára, kapjuk hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_0\left(\sum_{i=0}^k l_i \cdot (f^{(i)} \circ g)\right) &= \sum_{i=0}^k \mathbf{D}_0(l_i \cdot (f^{(i)} \circ g)) = \sum_{i=0}^k ((\mathbf{D}_0 l_i) \cdot (f^{(i)} \circ g) \\ &+ l_i \cdot \mathbf{D}_0(f^{(i)} \circ g)) = \sum_{i=0}^k ((\mathbf{D}_0 l_i) \cdot (f^{(i)} \circ g)) \\ &= \sum_{i=0}^k (\partial_y g \cdot \partial_x l_i - \partial_x g \cdot \partial_y l_i) \cdot (f^{(i)} \circ g)\end{aligned}$$

teljesül. Ekkor, (2.8)-ból adódik, hogy

$$(2.14) \quad \sum_{i=0}^k (\partial_y g \cdot \partial_x l_i - \partial_x g \cdot \partial_y l_i) \cdot (f^{(i)} \circ g) = \partial_y g \cdot \partial_x L - \partial_x g \cdot \partial_y L,$$

amely egy legfeljebb k -ad rendű differenciál-függvényegyenlet.

Nyilvánvaló, hogy a (2.8), (2.14) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása megegyezik a (2.8) egyenlet megoldásával.

2.2.2. MEGJEGYZÉS. Alkalmazzuk a $\mathbf{D}_0$ differenciáloperátort a (2.8) egyenletre.

Ha a kapott új egyenlet bal oldala egyenlő 0-val, akkor $\mathbf{D}_0(l_i) = 0$, azaz,

$$\partial_y g \cdot \partial_x l_i - \partial_x g \cdot \partial_y l_i = 0$$

minden $i = 0, \dots, k$ esetén. Ekkor, ha $\mathbf{D}_0(L) \neq 0$, akkor nincs megoldása a (2.8) egyenletnek. Egyébként pedig

$$\partial_y g \cdot \partial_x L - \partial_x g \cdot \partial_y L = 0.$$

Alkalmazva a $\mathbf{D}_0$ differenciáloperátort egy k -ad rendű differenciál-függvényegyenletre kapunk egy m -ed rendű egyenletet, ahol $m \leq k$. A következő lemmában bizonyítjuk, hogy létezik egy m -nél nem nagyobb rendű differenciál-függvényegyenlet, amelynek a megoldása megegyezik az ebből a két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásával.

2.2.3. LEMMA. ([Ház04]) *Tekintsük a következő két egyenletet:*

$$(2.15) \quad \sum_{i=0}^k h_i(x, y) \cdot f^{(i)}(g(x, y)) = H(x, y) \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$(2.16) \quad \sum_{i=0}^m l_i(x, y) \cdot f^{(i)}(g(x, y)) = L(x, y) \quad (x, y) \in \Omega,$$

ahol a $h_0, h_1, \dots, h_k, l_0, l_1, \dots, l_m, g, H, L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ adott analitikus függvények és $h_k, l_m \neq 0$ Ω -n. Tegyük fel, hogy $k \geq m$. Ekkor vagy nincs közös megoldása ezeknek az egyenleteknek, vagy léteznek olyan analitikus $w_0, w_1, \dots, w_s, W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, (ahol $s \leq m$) úgy, hogy a k -szor differenciálható megoldása a

$$(2.17) \quad \sum_{i=0}^s w_i(x, y) \cdot f^{(i)}(g(x, y)) = W(x, y) \quad (x, y) \in \Omega$$

egyenletnek megegyezik a (2.15), (2.16) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásával.

B i z o n y í t á s. A bizonyítást két esetre bontjuk. Először a $k > m$ esetet vizsgáljuk. Ekkor, ha alkalmazzuk a

$$\mathbf{D}_1 = \partial_x g \cdot \partial_x + \partial_y g \cdot \partial_y$$

differenciáloperátort a (2.16) egyenletre, akkor az $(f^{(m+1)} \circ g)$ együtthatója $l_m \cdot ((\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2)$, amely nem azonosan 0 Ω -n. Valóban, hiszen tegyük fel, hogy $l_m \cdot ((\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2) = 0$. Mivel l_m nem azonosan 0 Ω -n, így létezik egy $\Omega_1 \subseteq \Omega$ nyílt gömb, amelyen $l_m \neq 0$. Ebből következik, hogy $(\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2 = 0$ az Ω_1 -en. Ekkor $\partial_x g = 0$ és $\partial_y g = 0$ Ω_1 -en, így g konstans ezen a halmazon. Mivel g analitikus függvény és Ω összefüggő, így g konstans Ω -n is, amely ellentmond a $g(\Omega)$ halmaz nyíltságának. Ezért, alkalmazva a $\mathbf{D}_1$ operátort a (2.16) egyenletre kapunk egy $(m + 1)$ -ed rendű differenciál-függvényegyenletet. Ismételve ezt a

lépést $m - k$ -szor, azaz alkalmazva a $\mathbf{D}_1$ differenciáloperátort $(m - k)$ -szor az egyenletre, kapunk egy k -ad rendű egyenletet

$$(2.18) \quad \sum_{i=0}^k \tilde{l}_i \cdot (f^{(i)} \circ g) = \tilde{L}.$$

A $k = m$ esetben nem kell növelnünk a (2.16) egyenlet rendjét, így közvetlenül használhatjuk a (2.18) egyenlet helyett (feltéve, hogy az együtthatóit $\tilde{l}_i$ -vel jelöljük l_i helyett).

Megszorozva a (2.15) egyenletet $\tilde{l}_k$ -val, a (2.18)-at h_k -val kapjuk a

$$(2.19) \quad \sum_{i=0}^k \tilde{l}_k \cdot h_i \cdot (f^{(i)} \circ g) = \tilde{l}_k \cdot H$$

és a

$$(2.20) \quad \sum_{i=0}^k h_k \cdot \tilde{l}_i \cdot (f^{(i)} \circ g) = h_k \cdot \tilde{L}$$

egyenleteket. Kivonva ezeket az egyenleteket egymásból a

$$(2.21) \quad \sum_{i=0}^k (\tilde{l}_k \cdot h_i - h_k \cdot \tilde{l}_i) \cdot (f^{(i)} \circ g) = \tilde{l}_k \cdot H - h_k \cdot \tilde{L}$$

egyenlet adódik. Megmutatjuk, hogy a (2.15), (2.16) egyenletekből álló egyenletrendszer k -szor differenciálható megoldásai megegyeznek a (2.16) és (2.21) egyenletrendszer megoldásaival.

Valóban, tegyük fel, hogy f egy k -szor differenciálható közös megoldása a (2.15) és (2.16) egyenleteknek. Nyilvánvaló, hogy ennek az egyenletrendszernek a megoldásai egybeesnek a (2.15), (2.16), (2.18) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásaival. Ekkor f teljesíti a (2.19) és (2.20) egyenleteket is, így f kielégíti a (2.21)-et.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f egy közös megoldása a (2.16) és (2.21) egyenleteknek. Mivel f kielégíti a (2.16) egyenletet, így a (2.18) egyenlet is teljesül f -re, amely maga után vonja a (2.20) egyenlet érvényességét. Összeadva a (2.20) és (2.21) egyenleteket, láthatjuk, hogy f megoldása (2.19)-nek. Mivel $\tilde{l}_k$ analitikus és nem nulla Ω egy sűrű, nyílt Ω^* részhalmazán, ezért f megoldása a (2.15) egyenletnek Ω^* -n, amelyből következik, hogy megoldása Ω -n is, mivel f folytonos.

A (2.21) egyenlet rendje kisebb, mint k , ezért a kapott egyenletrendszer, azaz (2.15) és (2.21), rendjeinek az összege kisebb, mint az eredeti egyenletek, (2.15) és (2.16), rendjeinek összege.

Ismételve ezt az eljárást, a magasabb rendű egyenletet ki tudjuk cserélni egy alacsonyabb rendűvel. Az eljárás végén kapott két egyenlet közül az egyiknek a bal oldala egyenlő 0-val. Ha a jobb oldala nem egyenlő 0-val, akkor nincs közös megoldása az eredeti két egyenletnek ((2.15)-nek és (2.16) -nak), egyébként az utolsó nemtriviális egyenlet lesz a keresett egyenlet.

2.2.4. MEGJEGYZÉS. Alkalmazva a $\mathbf{D}_0$ differenciáloperátort a

$$(2.22) \quad \sum_{i=0}^k h_i(x, y) \cdot f^{(i)}(g(x, y)) = H(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

egyenletre kapjuk a következő m -ed rendű differenciál-függvényegyenletet

$$(2.23) \quad \sum_{i=0}^k (\partial_y g \cdot \partial_x h_i - \partial_x g \cdot \partial_y h_i) \cdot (f^{(i)} \circ g) = \partial_y g \cdot \partial_x H - \partial_x g \cdot \partial_y H,$$

ahol $m \leq k$. Ha az előző lemmát alkalmazva ezekre az egyenletekre egy k -ad rendű differenciál-függvényegyenletet kapunk, akkor $k = m$ és a $h_0, \dots, h_k, H$ függvények kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$(2.24) \quad \partial_x g \cdot (h_k \cdot \partial_y h_i - h_i \cdot \partial_y h_k) = \partial_y g \cdot (h_k \cdot \partial_x h_i - h_i \cdot \partial_x h_k), \quad (i = 1, \dots, k-1)$$

és

$$(2.25) \quad \partial_x g \cdot (h_k \cdot \partial_y H - H \cdot \partial_y h_k) = \partial_y g \cdot (h_k \cdot \partial_x H - H \cdot \partial_x h_k).$$

Valóban, tegyük fel, hogy a kapott egyenlet k -ad rendű differenciál-függvényegyenlet, ekkor $k = m$ (mivel, ha $m < k$, akkor az így kapott egyenlet rendje s kisebb, vagy egyenlő lenne mint m , amelyből következne, hogy $s < k$). Szorozzuk meg (2.22)-t $\partial_y g \cdot \partial_x h_k - \partial_x g \cdot \partial_y h_k$ -val, (2.23)-at h_k -val és vonjuk ki egymásból a kapott egyenleteket. Ekkor

$$h_k \cdot (\partial_y g \cdot \partial_x h_i - \partial_x g \cdot \partial_y h_i) = (\partial_y g \cdot \partial_x h_k - \partial_x g \cdot \partial_y h_k) \cdot h_i$$

minden $i = 1, \dots, k-1$ -re és

$$h_k \cdot (\partial_y g \cdot \partial_x H - \partial_x g \cdot \partial_y H) = (\partial_y g \cdot \partial_x h_k - \partial_x g \cdot \partial_y h_k) \cdot H$$

adódik, amelyből átrendezéssel kaphatjuk a (2.24) és (2.25) egyenleteket.

Most már megfogalmazhatjuk ennek a résznek az egyik fő eredményét, amely azt mutatja, hogy bizonyos feltételek mellett tetszőleges differenciál-függvényegyenletet tekintve tudunk konstruálni egy olyan egyenletet, amelynek megoldásai megegyeznek az eredeti egyenlet megoldásaival, a rendje általában kisebb, mint az eredeti egyenlet rendje, és az együtthatói kielégítenek egy parciális differenciálegyenlet-rendszert:

2.2.5. TÉTEL. ([Ház04]) *Tekintsük a*

$$(2.26) \quad l_k(x, y)f^{(k)}(g(x, y)) + \dots + l_0(x, y)f(g(x, y)) = L(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

egyenletet, ahol $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt, összefüggő halmaz, $l_0, l_1, \dots, l_k, g$ és L adott valós értékű analitikus függvények Ω -n (úgy, hogy $g(\Omega)$ egy nyílt halmaz), továbbá f egy valós ismeretlen függvény $g(\Omega)$ -n. Ekkor létezik egy differenciál-függvényegyenlet

$$(2.27) \quad h_m(x, y)f^{(m)}(g(x, y)) + \dots + h_0(x, y)f(g(x, y)) = H(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

(ahol $m \leq k$) melynek $(k+1)$ -szer differenciálható megoldása egybeesik a (2.26) egyenlet megoldásával és a $h_0, h_1, \dots, h_m, H$ függvények kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$(2.28) \quad \partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y h_i - h_i \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x h_i - h_i \cdot \partial_x h_m),$$

minden $i = 1, \dots, m-1$ esetén és

$$(2.29) \quad \partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y H - H \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x H - H \cdot \partial_x h_m).$$

B i z o n y í t á s. Alkalmazva a $\mathbf{D}_0$ differenciáloperátort a (2.26) egyenletre és felhasználva a 2.2.1. Lemmát, kapunk két egyenletet, amelyeknek megoldása megegyezik az eredeti egyenlet megoldásával. Most két eset lehetséges.

Első eset: Ha az új egyenlet baloldala azonosan nulla, akkor a 2.2.2. Megjegyzésből adódik, hogy vagy nincs megoldása a (2.26) egyenletnek (ha az egyenlet jobboldala nem egyenlő nullával) vagy ha eljelöljük az $f^i \circ g$ együtthatóját h_i -vel, és az egyenlet jobboldalát H -val, akkor kapjuk, hogy

$$\partial_y g \cdot \partial_x h_i - \partial_x g \cdot \partial_y h_i = 0$$

minden $i = 0, \dots, m$ esetén és

$$\partial_y g \cdot \partial_x H - \partial_x g \cdot \partial_y H = 0$$

teljesülnek, amelyből következik

$$h_m \cdot (\partial_y g \cdot \partial_x h_i - \partial_x g \cdot \partial_y h_i) = (\partial_y g \cdot \partial_x h_m - \partial_x g \cdot \partial_y h_m) \cdot h_i$$

minden $i = 0, \dots, m$ -re és

$$h_m \cdot (\partial_y g \cdot \partial_x H - \partial_x g \cdot \partial_y H) = (\partial_y g \cdot \partial_x h_m - \partial_x g \cdot \partial_y h_m) \cdot H.$$

Ezért (2.28) és (2.29) egyenletek teljesülnek.

Második eset: Ha az új egyenlet baloldala nem azonosan nulla, akkor jelöljük az $f^i \circ g$ együtthatóját h_i -vel, és az egyenlet jobboldalát H -val. Alkalmazva a 2.2.3. Lemma állítását, vagy kapunk egy egyenletet az előző kettőből úgy, hogy a kapott egyenlet megoldása megegyezik az eredeti egyenlet megoldásával és az új egyenlet rendje nem nagyobb, mint az eredeti egyenlet rendje, vagy azt kapjuk, hogy nincs megoldása az eredeti egyenletnek. Ha a kapott egyenlet rendje nem kisebb, mint az eredeti egyenlet rendje, akkor (alkalmazva a 2.2.4. Megjegyzést) kapjuk, hogy

$$\partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y h_i - h_i \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x h_i - h_i \cdot \partial_x h_m)$$

minden $i = 1, \dots, m-1$ esetén és

$$\partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y H - H \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x H - H \cdot \partial_x h_m).$$

Ha a kapott egyenlet rendje kisebb, mint az eredeti egyenlet rendje, akkor ismét alkalmazhatjuk a $\mathbf{D}_0$ differenciáloperátort, és ismételjük az első, vagy a második esetet, addig amíg az eljárás be nem fejeződik.

2.2.6. MEGJEGYZÉS. Tegyük fel, hogy $h_m \neq 0$ az Ω halmazon. Ekkor a (2.28) és (2.29) egyenleteket osztva h_m^2 -mel kapjuk, hogy

$$\partial_x g \cdot \left(\frac{\partial_y h_i \cdot h_m - \partial_y h_m \cdot h_i}{h_m^2} \right) = \partial_y g \cdot \left(\frac{\partial_x h_i \cdot h_m - \partial_x h_m \cdot h_i}{h_m^2} \right)$$

minden $i = 0, \dots, m-1$ esetén és

$$\partial_x g \cdot \left(\frac{\partial_y H \cdot h_m - \partial_y h_m \cdot H}{h_m^2} \right) = \partial_y g \cdot \left(\frac{\partial_x H \cdot h_m - \partial_x h_m \cdot H}{h_m^2} \right),$$

amelyből

$$(2.30) \quad \partial_x g \cdot \partial_y \left(\frac{h_i}{h_m} \right) = \partial_y g \cdot \partial_x \left(\frac{h_i}{h_m} \right)$$

adódik minden $i = 0, \dots, m-1$ esetén és

$$(2.31) \quad \partial_x g \cdot \partial_y \left(\frac{H}{h_m} \right) = \partial_y g \cdot \partial_x \left(\frac{H}{h_m} \right).$$

Ezért $\mathbf{D_0} \left(\frac{h_i}{h_m} \right) = 0$ és $\mathbf{D_0} \left(\frac{H}{h_m} \right) = 0$. Ha léteznek olyan $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}, K$ differenciálható függvények úgy, hogy

$$\frac{h_i(x, y)}{h_m(x, y)} = K_i(g(x, y))$$

minden $i = 0, \dots, m-1$ esetén és

$$\frac{H(x, y)}{h_m(x, y)} = K(g(x, y)),$$

akkor a (2.30) és (2.31) egyenletek nyilvánvalóan teljesülnek.

Ezért, most adunk egy elegendő feltételt a $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}, K$ függvények létezésére. Ehhez szükségünk lesz a következő definícióra:

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt halmaz, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor Ω -t (*simán*) *g-összefüggőnek* nevezzük, ha minden olyan $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ esetén, amelyre $g(x_0, y_0) = g(x_1, y_1)$, létezik egy olyan $(x, y) : [0, 1] \rightarrow \Omega$ differenciálható függvény, amelyre $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, $(x(1), y(1)) = (x_1, y_1)$ és $t \mapsto g(x(t), y(t))$ konstans.

2.2.7. LEMMA. ([Ház04]) *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt halmaz, g egy differenciálható valós értékű függvény Ω -n úgy, hogy $(\partial_x g, \partial_y g) \neq (0, 0)$ Ω -n. Tegyük fel, hogy Ω simán g -összefüggő. Ha $\mathbf{D_0}\varphi = 0$ (ahol φ egy differenciálható függvény Ω -n), akkor létezik egy $\Phi : g(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy $\varphi(x, y) = \Phi(g(x, y))$. Továbbá, ha φ és g k -szor folytonosan differenciálható függvény, akkor Φ is az.*

A bizonyításunkhoz szükségünk lesz a következő nyilvánvaló lemmára:

2.2.8. LEMMA. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt halmaz, g legyen egy Ω -n értelmezett függvény. Ekkor létezik egy Φ függvény úgy, hogy $\varphi = \Phi \circ g$ akkor és csak akkor ha $g(x_0, y_0) = g(x_1, y_1)$ -ből következik $\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x_1, y_1)$.*

B i z o n y í t á s. [A 2.2.7. Lemma bizonyítása]

Legyen $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ olyan, hogy $g(x_0, y_0) = g(x_1, y_1)$. Meg kell mutatnunk, hogy $\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x_1, y_1)$. Az Ω sima g -összefüggősége miatt létezik

egy $(x, y) : [0, 1] \rightarrow \Omega$ differenciálható függvény úgy, hogy $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, $(x(1), y(1)) = (x_1, y_1)$ és a $t \mapsto g(x(t), y(t))$ függvény konstans. Megmutatjuk, hogy $\varphi(x(t), y(t))$ is konstans.

Felhasználva, hogy $g(x(t), y(t))$ konstans, és a g, x, y függvények differenciálhatóak, kapjuk, hogy

$$(2.32) \quad \partial_x g(x(t), y(t))x'(t) + \partial_y g(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

Ha φ differenciálható és $\mathbf{D}_0\varphi = 0$ akkor kapjuk, hogy

$$(2.33) \quad \partial_x g(x(t), y(t)) \cdot \partial_y \varphi(x(t), y(t)) - \partial_y g(x(t), y(t)) \cdot \partial_x \varphi(x(t), y(t)) = 0.$$

Tekintsük a (2.32) és (2.33) egyenleteket mint egy lineáris egyenletrendszert, ahol a változók $\partial_x g(x(t), y(t))$ és $\partial_y g(x(t), y(t))$. Mivel $(\partial_x g, \partial_y g) \neq (0, 0)$ Ω -n, ezért a lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa egyenlő nullával, ezért

$$(2.34) \quad \partial_y \varphi(x(t), y(t)) \cdot y'(t) + \partial_x \varphi(x(t), y(t)) \cdot x'(t) = 0,$$

amelyből

$$\varphi'(x(t), y(t)) = 0$$

következik.

Így kaptuk, hogy $\varphi(x(t), y(t))$ konstans. Ezért $\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x_1, y_1)$. Alkalmazva az előző lemmát kapjuk, hogy létezik egy Φ függvény úgy, hogy $\varphi = \Phi \circ g$.

Megmutatjuk, hogy ha φ és g k -szor differenciálható függvények, akkor Φ is k -szor differenciálható. Legyen $(x_0, y_0) \in \Omega$, $s_0 = g(x_0, y_0)$ és tekintsük a következő kezdeti érték feladatot:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \partial_x g(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= \partial_y g(x(t), y(t)) \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Alkalmazva a Peano egzisztencia tételt, kapjuk, hogy létezik a 0 egy U környezetén értelmezett lokális megoldása ennek az egyenletnek. Legyen $\gamma(t) = g(x(t), y(t))$ ($t \in U$). Mivel

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \partial_x g(x(t), y(t))x'(t) + \partial_y g(x(t), y(t))y'(t) \\ &= (\partial_x g(x(t), y(t)))^2 + (\partial_y g(x(t), y(t)))^2 > 0, \end{aligned}$$

így, kapjuk hogy γ szigorúan monoton és a γ inverze is differenciálható. Használva Φ definícióját

$$\Phi(\gamma(t)) = \varphi(x(t), y(t)),$$

adódik, így

$$\Phi(s) = \varphi(x(\gamma^{-1}(s)), y(\gamma^{-1}(s))) \quad (s \in \gamma(U))$$

egy differenciálható függvény $s_0 = g(x_0, y_0)$ -ben. Ha g és φ k -szor folytonosan differenciálható, akkor x és y is az. Így γ és Φ is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Ezek után már megfogalmazhatjuk ennek a témakörnek a végső eredményét, amely azt mutatja, hogy bizonyos feltételek mellett minden differenciál-függvényegyenlet esetén létezik egy olyan közösleges differenciálegyenlet, amelynek megoldásai megegyeznek a differenciál-függvényegyenlet megoldásaival:

2.2.9. TÉTEL. ([Ház04]) *Tekintsük a*

$$(2.35) \quad l_n(x, y)f^{(n)}(g(x, y)) + \dots + l_0(x, y)f(g(x, y)) = F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

ahol $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt, simán g -összefüggő halmaz, $l_0, l_1, \dots, l_n, g$ és F adott valós értékű analitikus függvények Ω -n (úgy, hogy $g(\Omega)$ egy nyílt halmaz, továbbá $(\partial_x g, \partial_y g) \neq (0, 0)$ Ω -n), továbbá f egy valós függvény $g(\Omega)$ -n. Ekkor létezik egy közösleges differenciálegyenlet

$$(2.36) \quad f^{(m)}(t) + K_{m-1}(t)f^{(m-1)}(t) + \dots + K_0(t)f(t) = K(t),$$

(ahol $m \leq n$, $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}$ és K differenciálható valós értékű függvények) amelynek $(n+1)$ -szer differenciálható megoldása lokálisan megegyezik a (2.35) megoldásával.

B i z o n y í t á s. Felhasználva a 2.2.5. Tételt, kapjuk, hogy létezik egy differenciál-függvényegyenlet

$$(2.37) \quad h_m(x, y)f^{(m)}(g(x, y)) + \dots + h_0(x, y)f(g(x, y)) = H(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

(ahol $m \leq n$) amelynek $(n+1)$ -szer differenciálható megoldásai megegyeznek a (2.35) megoldásaival, úgy, hogy $h_0, h_1, \dots, h_m, H$ teljesítik a következő egyenletrendszert

$$(2.38) \quad \partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y h_i - h_i \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x h_i - h_i \cdot \partial_x h_m),$$

minden $i = 1, \dots, m-1$ esetén és

$$(2.39) \quad \partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y H - H \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x H - H \cdot \partial_x h_m).$$

Tegyük fel, hogy $h_m \neq 0$ egy nyílt, g -összefüggő Ω^* részhalmazán Ω -nak. Ekkor kapjuk, hogy

$$\mathbf{D}_0 \left(\frac{h_i}{h_m} \right) = 0$$

minden $i = 1, \dots, m-1$ és

$$\mathbf{D}_0 \left(\frac{H}{h_m} \right) = 0$$

teljesül Ω^* -n (a 2.2.6. Megjegyzésben leírtaknak megfelelően).

Alkalmazva a 2.2.7. Lemma állítását kapjuk, hogy léteznek olyan $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}$ és K differenciálható függvények, amelyekre

$$\frac{h_i(x, y)}{h_m(x, y)} = K_i(g(x, y))$$

minden $i = 0, \dots, m-1$ esetén és

$$\frac{H(x, y)}{h_m(x, y)} = K(g(x, y)).$$

A (2.37) egyenletet h_m -mel osztva a következő egyenlet adódik:

$$(2.40) \quad f^{(m)}(g(x, y)) + K_{m-1}(g(x, y))f^{(m-1)}(g(x, y)) \\ + \dots + K_0(g(x, y))f(g(x, y)) = K(g(x, y)).$$

A bizonyítás befejezéséhez legyen $t = g(x, y)$, és a helyettesítés után a (2.40) egyenletből egy közönséges differenciálegyenletet kapunk f -re

$$(2.41) \quad f^{(m)}(t) + K_{m-1}(t)f^{(m-1)}(t) + \dots + K_0(t)f(t) = K(t).$$

Az eljárás illusztrálására nézzük a következő példát:

PÉLDA: Tekintsük a következő differenciál-függvényegyenletet:

$$(2.42) \quad x f^{(4)}(x+y) + y^2 f'(x+y) + xy f(x+y) = xy.$$

Alkalmazva a $\mathbf{D}_0 = \partial_x - \partial_y$ differenciáloperátort a (2.42) egyenletre a

$$(2.43) \quad f^{(4)}(x+y) - 2yf'(x+y) + (y-x)f(x+y) = y-x$$

egyenlet adódik. Megszorozva ezt az egyenletet $-x$ -szel és összeadva az így kapott egyenletet és a (2.42) egyenletet

$$(2.44) \quad (y^2 + 2xy)f'(x+y) + x^2f(x+y) = x^2$$

adódik. Háromszor alkalmazva a $\mathbf{D}_1 = \partial_x + \partial_y$ differenciáloperátort a (2.44) egyenletre kapjuk, hogy

$$(2.45) \quad (8y^2 + 16xy)f^{(4)}(x+y) + (48y + 8x^2 + 24x)f'''(x+y) + (24x + 36)f''(x+y) + 12f'(x+y) = 0.$$

Szorozzuk meg a kapott egyenletet (-1) -gyel és a (2.43) egyenletet $(8y^2 + 16xy)$ -nal és adjuk össze a kapott két egyenletet:

$$(2.46) \quad -(48y + 8x^2 + 24x)f'''(x+y) - (24x + 36)f''(x+y) - (16y^3 + 32xy^2 - 12)f'(x+y) + (8y^3 + 8xy^2 - 16x^2y)f(x+y) = 8y^3 + 8xy^2 - 16x^2y.$$

Kétszer alkalmazva a $\mathbf{D}_1$ differenciáloperátort a (2.44) egyenletre kapjuk a

$$(2.47) \quad (4y^2 + 8xy)f'''(x+y) + (16y + 4x^2 + 8x)f''(x+y) - (8x + 6)f'(x+y) + 2f(x+y) = 2$$

egyenletet. Ezt megszorozva $48y + 8x^2 + 24x$ -nal, (2.46)-ot pedig $4y^2 + 8xy$ -nal és összeadva a kapott egyenleteket

$$(2.48) \quad (480xy + 128x^2y - 96y^2x + 192x^2 + 624y^2 + 32x^4 + 160x^3)f''(x+y) + (288xy - 256y^4x - 256x^2y^3 + 288y + 144x - 64y^5 - 48y^2 + 64x^3 + 240x^2)f'(x+y) + (96y^4x - 128x^3y^2 + 96y + 48x + 32y^5 + 16x^2)f(x+y) = 96y^4x - 128x^3y^2 + 96y + 48x + 32y^5 + 16x^2$$

adódik. Alkalmazva a $\mathbf{D}_1$ differenciáloperátort (2.44) a következő egyenletet kapjuk:

$$(2.49) \quad (2y^2 + 4xy)f''(x+y) + (4y + 2x^2 + 2x)f'(x+y) + 2xf(x+y) = 2x.$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet $(480xy + 128x^2y - 96y^2x + 192x^2 + 624y^2 + 32x^4 + 160x^3)$ -nal, és a (2.42) egyenletet $-(2y^2 + 4xy)$ -nal és adjuk össze az így kapott egyenleteket:

$$\begin{aligned}
 (2.50) \quad & (-1024x^3y^4 + 64y^2x^2 + 768y^3x - 768y^6x - 1536y^5x^2 - 1728y^2x \\
 & - 128x^4y - 896x^3y - 1152x^2y + 320y^2x^3 - 128y^7 - 96y^4 - 384x^5 - 704x^4 - 1920y^3 \\
 & - 384x^3 - 64x^6)f'(x+y) + (320y^6x - 512x^4y^3 - 192x^3y + 384y^5x^2 - 768x^2y \\
 & - 256x^3y^4 + 224y^2x^2 - 768y^2x - 320x^4 + 64y^7 - 384x^3 + 192y^3 - 64x^5)f(x+y) \\
 & = 320y^6x - 256x^3y^4 + 224y^2x^2 - 512x^4y^3 - 192x^3y + 384y^5x^2 - 768x^2y - 768y^2x \\
 & \quad - 320x^4 + 64y^7 - 384x^3 + 192y^3 - 64x^5.
 \end{aligned}$$

Végül megszorozva (2.44)-et $(-1024x^3y^4 + 64y^2x^2 + 768y^3x - 768y^6x - 1536y^5x^2 - 1728y^2x - 128x^4y - 896x^3y - 1152x^2y + 320y^2x^3 - 128y^7 - 96y^4 - 384x^5 - 704x^4 - 1920y^3 - 384x^3 - 64x^6)$ -nal, (2.50)-et $-(y^2 + 2xy)$ -nal és összeadva a kapott egyenleteket

$$\begin{aligned}
 (2.51) \quad & (-768y^2x^4 - 192y^2x^3 - 384y^2x^5 + 448y^8x + 1280y^6x^3 + 320y^4x^2 \\
 & + 1152y^7x^2 + 512y^5x^4 - 512y^3x^3 - 384y^4x - 384y^3x^2 + 256x^5y + 384x^4y \\
 & + 704x^6 + 384x^7 + 64x^8 + 192y^5 + 64y^9 + 384x^5)f(x+y) = -768y^2x^4 \\
 & - 192y^2x^3 - 384y^2x^5 + 448y^8x + 1280y^6x^3 + 320y^4x^2 + 1152y^7x^2 \\
 & + 512y^5x^4 - 512y^3x^3 - 384y^4x - 384y^3x^2 + 256x^5y + 384x^4y + 384x^7 \\
 & \quad + 704x^6 + 64x^8 + 192y^5 + 64y^9 + 384x^5
 \end{aligned}$$

adódik, amelyből

$$f(x+y) = 1.$$

A $t = x + y$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$f(t) = 1.$$

2.3 A *feqsolve* PROGRAM MŰKÖDÉSE

A *feqsolve* program MAPLE¹ V, Release 4 nyelven készült, amely a (2.3) alakú egyenletek megoldására használható. A programot a következő utasítással indíthatjuk:

$$\text{feqsolve}(h_0(x, y) * f_0(g_0(x, y)) + \dots + h_n(x, y) * f_n(g_n(x, y)) = F(x, y), \\ [f_0, f_1, \dots, f_n]);$$

ahol a *feqsolve* program első paramétere a függvényegyenlet, amelyet meg akarunk oldani, a második paramétere pedig az ismeretlen függvények listája. A program a függvényegyenletet a lista első elemére oldja meg.

2.3.1 A PROGRAM MŰKÖDÉSÉNEK RÖVID LEÍRÁSA

A program a **feqsolve** eljárás meghívásával indul. Ezen eljárásnak két paramétere van: a vizsgálandó függvényegyenlet (*fegy*) és az ismeretlen függvények (*fs*). Az ismeretlen függvényeket egy listában kell megadni, a függvényegyenletet a lista első elemére oldjuk meg. A **feqsolve** hívja meg a többi eljárást. Első lépésben betöltjük a linalg programcsomagot, majd a **feqsolve** meghívja a **recogn** eljárást, amely irányított bemenetet valósít meg.

A **recogn** eljárásnak is ugyanaz a két paramétere, mint a **feqsolve** eljárásnak. Az első lépésben megkeressük a lista első elemét. Megvizsgáljuk, hogy *fs* típusa lista, vagy *fs* egyetlen elemből áll. Ha nem, akkor hibaüzenetet küldünk. (Az ismeretlen függvényeket egy listában kell megadni. Ez alól csak az az egy eset kivétel, amikor egyetlen ismeretlen függvény van. Ekkor a függvényt zárójelek nélkül kell megadni). Ha igen, akkor az *fs*-t átalakítjuk halmazzá (*ism*). Ha a halmaznak több eleme van, mint a listának, akkor hibaüzenetet küldünk (ekkor nyilván ugyanaz a függvény többször is belekerült a listába). Ha a függvényegyenlet nem egyenlőség típusú (azaz nem adunk meg jobb oldalt), akkor megnézzük, hogy van-e benne összeadás. Ha nincs, akkor hibaüzenetet küldünk (az egyenletnek legalább két tagúnak kell lennie). Ezután *F* egyenlő az egyenlet jobb oldalával vagy nullával (ha nem adtunk

¹MAPLE is a registered trademark of Waterloo Maple software

meg semmit). Ha F -ben van ismeretlen függvény, akkor újabb hibaüzenetet továbbítunk. A függvényegyenlet bal oldalát felbontjuk tagokra. Ha valamelyik tagban ismeretlen függvények szorzata van, akkor szintén hibát jelzünk. Ezután megvizsgáljuk, hogy minden tagban van-e ismeretlen függvény. Ha igen, akkor vizsgáljuk, hogy az ismeretlen függvényekben ne legyenek ismeretlen függvények. Ha minden feltétel teljesül, akkor kiírjuk az egyenletet, és visszatérünk a **feqsolve** eljárásba. Itt meghívjuk a **deriv** eljárást, amelyben a differenciáloperátort keressük. Első lépésben megnézzük, hogy a lista első eleme szerepel-e az egyenletben. Ha nem, akkor hibaüzenetet küldünk. Ha igen, akkor keressük a differenciáloperátort. Mindig kiírjuk, hogy éppen milyen rendű operátort keresünk. Legyen a differenciáloperátor rendje (*ordq*) 1. Előállítjuk a $H_0, H_1, \dots, H_n$ mátrixokat, és a Δ operátorrendszert (ahol Δ egy lista). Ezután feltöltjük a mátrixokat. A Δ elemeit egy vektorba rendezzük és létrehozuk a H és H^* mátrixokat. Ezután a funcrank eljárás meghívásával kiszámoljuk a megfelelő rangokat (r_1, r_2). Majd megvizsgáljuk, hogy az eljárás (**G**) és (**H**) feltételei teljesülnek-e. Ha nem, akkor a **deri** eljárás hívásával keresünk $ordq + 1$ rendű differenciáloperátort. Ezt addig folytatjuk, amíg a feltételek nem teljesülnek. Ha minden feltétel teljesült, akkor a **feqsolve** meghívja az **eliminate** eljárást, amellyel a mátrixot olyan alakúra hozzuk, hogy azt a **diffeq** eljárásban könnyen tudjuk kezelni. A **diffeq**-ban előállítjuk az ismeretlen függvényeknek, és F -nek a Δ elemeihez tartozó differenciáljait ($Delt, diF$). Kiszámítjuk a mátrix determinánsát, amely a keresett parciális differenciáloperátor lesz. Ezután a függvényegyenletből előállítjuk a differenciál-függvényegyenletet, és ezt ki is írhatjuk. Ezután a **diffeq** eljárást hívjuk meg, amely az előzőekben megadott eljárást felhasználva előállítja a kapott differenciál-függvényegyenletből a közöséges differenciálegyenletet. Ezután megpróbálja megoldani a kapott egyenletet. Sajnos a kapott megoldás nem az eredeti függvényegyenlet megoldása, csak a differenciál-függvényegyenleté, mivel a kapott differenciál-függvényegyenlet csak következményegyenlete az eredeti egyenletnek.

A program forráskódjának három változata, három különböző Maple verzióhoz (Release 4, 7, 9), megtalálható a disszertáció CD mellékletében és letölthető a következő weblapról:

www.uni-miskolc.hu/~matha

2.3.2 A PROGRAMLISTA

```
fegsolve := proc(fegy, fs)
  global unknownfunction, Hk, y;
  restart;
  with(linalg);
  recogn(fegy, fs);
  deriv(turn, turnnumber, m, F, unknownfunction, g, h);
  eliminates(Hk);
  diffeq()
end
recogn := proc(fegy, fs)
  local ij, j, ism, s, i;
  global tag, turn, turnnumber, m, F, unknownfunction, g, h;
  m := op(1, fs);
  if not (whattype(fs) = list or nops(fs) = 1) then ERROR(
    'Wrong data. The unknown functions must be given in a list.')
  fi;
  ism := convert(fs, set);
  if nops(ism) < nops(fs) then ERROR('Wrong data. \
    One of the functions appears several times in the list.')
  fi;
  if not (whattype(fegy) = '=' or whattype(fegy) = '+') then
    ERROR('Wrong data. There must be at least two terms \
    in the equation.')
  fi;
  if whattype(fegy) = '=' then
    F := op(2, fegy); tag := op(1, fegy)
  else F := 0; tag := fegy
  fi;
  if has(F, ism) then ERROR('Wrong data. There cannot \
```

```

    be an unknown function in the right – hand side.‘)
fi;
if not (whattype(tag) = ‘+’) then ERROR(‘Wrong \
    data. There must be at least two terms in the equation.‘)
else
    turnnumber := nops(tag);
    for i to turnnumber do turn.i := op(i, tag) od;
    for i to turnnumber do
        h.i := 1;
        unknownfunction.i := turn.i;
        if nops(turn.i) ≠ 1 then
            s := 0;
            if hastype(turn.i, ‘*’) then
                s := 0;
                for j to nops(turn.i) do
                    if not has(op(j, turn.i), ism) then
                        h.i := h.i × op(j, turn.i)
                    else unknownfunction.i := op(j, turn.i); s := s + 1
                    fi
                od;
            if not (s = 1) then ERROR(‘Wrong data. There can \
                be only one unknown function in a factor.‘)
            fi
        fi;
    if not (whattype(unknownfunction.i) = function) then
        ERROR(‘Wrong data. There must be an unknown \
            function in each factor.‘)
    else
        g.i := op(1, unknownfunction.i);
        unknownfunction.i := op(0, unknownfunction.i);
        if has(g.i, ism) then ERROR(‘Wrong data. There \

```

```

                                cannot be an unknown function in inner operator.‘)
                                fi
                                fi
                                else unknownfunction.i := op(0, turn.i); g.i := op(1, turn.i)
                                fi
                                od
                                fi;
                                print(‘The functional equation is‘);
                                print(tag = F)
                                end
deriv := proc(
    turn, turnnumber, m, F, unknownfunction, g, h)
    local ij, s, j, u, vc, tyr;
    global r1, r2, k, De, Δ, d, H, Hk, Hn, ordq, rang;
    k := 1;
    print(‘Search for the differential operator‘);
    while not (unknownfunction.k = m) and k ≤ turnnumber do
        k := k + 1
    od;
    if turnnumber < k then ERROR(‘Wrong Data. The \
        first element of the list is not in the equation.‘)
    else
        ordq := 1;
        for ij to turnnumber do H.ij := array(1..3, 1..2) od;
        for ij to turnnumber do
            Δ.ij := [turn.ij];
            l := 0;
            while l ≤ 1 do
                Δ.ij :=
                    [op(Δ.ij), op([convert(diff(turn.ij, x $ l, y $(1 - l)), D))]];

```

```

     $l := l + 1$ 
  od;
  for  $j$  to nops( $\Delta.ij$ ) do
     $s := \text{op}(j, \Delta.ij)$ ;
     $H.ij_{j,1} := \text{coeff}(s, \text{unknownfunction}.ij(g.ij))$ ;
     $H.ij_{j,2} := \text{coeff}(s, D(\text{unknownfunction}.ij)(g.ij))$ 
  od
od;
 $De := [D, D_2, D_1]$ ;
 $d := \text{vector}(\text{nops}(De), De)$ ;
if  $k = 1$  then
   $H := H.2$ ;
  for  $ij$  from 3 to turnnumber do  $H := \text{concat}(H, H.ij)$  od
else
   $H := H.1$ ;
  for  $ij$  from 2 to turnnumber do
    if not ( $ij = k$ ) then  $H := \text{concat}(H, H.ij)$  fi
  od
fi;
 $Hk := \text{concat}(H, d)$ ;
 $Hn := \text{concat}(H, (il \$ (il = 1..turnnumber)))$ ;
funcrank( $H$ );
 $r1 := \text{rang}$ ;
funcrank( $Hn$ );
 $r2 := \text{rang}$ ;
 $tyr := [st, nd, rd, th, th, th, th, th, th, th]$ ;
print(' Search for 1st order operator');
while not ( $r1 \leq 1/2 \times (ordq + 1) \times (ordq + 2) - 1$  and  $r1 < r2$ )
do
   $ordq := ordq + 1$ ;
  if  $10 \leq ordq$  and  $ordq \leq 20$  or  $ordq \bmod 10 = 0$  then

```

```
        vc := th
    else vc := op(ordq mod 10, tyr)
    fi;
    u := sprintf(' Search for %d%s order operator', ordq, vc);
    print(u);
    deri(turn, turnnumber, unknownfunction, ordq, k, d, g)
od
fi
end
deri := proc(
    turn, turnnumber, unknownfunction, ordq, k, d, g)
local ij, l, j, s;
global r1, r2, rang,  $\Delta$ , De, H, Hk, Hn;
    for ij to turnnumber do H.ij := extend(H.ij, ordq + 1, 1, 0)
    od;
    for ij to turnnumber do
        l := 0;
        while l ≤ ordq do
             $\Delta$ .ij := [
                op( $\Delta$ .ij), op([convert(diff(turn.ij, x $ l, y $ (ordq - l)), D))]
            ;
            l := l + 1
        od;
        for j from nops( $\Delta$ .ij) - 1/2 × ordq × (ordq + 1) + 1 to
nops( $\Delta$ .ij) do
            s := op(j,  $\Delta$ .ij);
            for l to ordq + 1 do H.ijj,l :=
                coeff(s, (D@@(l - 1))(unknownfunction.ij)(g.ij))
            od
        od
    od
```

```

    od;
    l := 0;
    while l ≤ ordq do
        De := [op(De), D1$l, 2$(ordq-l)]; l := l + 1
    od;
    d := vector(nops(De), De);
    if k = 1 then
        H := H.2;
        for ij from 3 to turnnumber do H := concat(H, H.ij) od
    else
        H := H.1;
        for ij from 2 to turnnumber do
            if not (ij = k) then H := concat(H, H.ij) fi
        od
    fi;
    Hk := concat(H, d);
    Hn := concat(H.(il$(il = 1..turnnumber)));
    print(H, Hk, Hn);
    funcrank(H, rang);
    r1 := rang;
    funcrank(Hn, rang);
    r2 := rang
end
eliminates := proc(xava)
    local ij, sj, oj, ta, ra, qw, sa;
    global ac;
    ac := xava;
    with(linalg);
    ij := 1;
    while ij ≤ min(rowdim(ac), coldim(ac) - 1) do

```

```
if  $ac_{ij, ij} = 0$  then
   $sj := ij$ ;
  while  $ac_{sj, ij} = 0$  and  $sj \leq \text{rowdim}(ac) - 1$  do  $sj := sj + 1$ 
od;
if  $sj = \text{rowdim}(ac)$  and  $ac_{sj, ij} = 0$  then  $ac := \text{concat}(\text{submatrix}(ac, 1..\text{rowdim}(ac), 1..ij - 1), \text{submatrix}(ac, 1..\text{rowdim}(ac), ij + 1..\text{coldim}(ac)))$ 
else
  for  $ta$  to  $\text{coldim}(ac)$  do
     $ra := ac_{ij, ta}$ ;  $ac_{ij, ta} := ac_{sj, ta}$ ;  $ac_{sj, ta} := ra$ 
  od;
  if  $ij < \text{coldim}(ac) - 1$  then for  $qw$  from  $ij + 1$  to  $\text{coldim}(ac) - 1$  do
     $sa := ac_{ij, qw}$ ;
    for  $ta$  from  $ij$  to  $\text{rowdim}(ac)$  do
       $ac_{ta, qw} := \text{simplify}(ac_{ta, qw} - sa \times ac_{ta, ij} / ac_{ij, ij})$ 
    od
  od
fi;
 $ij := ij + 1$ 
fi
else
  for  $qw$  from  $ij + 1$  to  $\text{coldim}(ac) - 1$  do
     $sa := ac_{ij, qw}$ ;
    for  $ta$  from  $ij$  to  $\text{rowdim}(ac)$  do
       $ac_{ta, qw} := \text{simplify}(ac_{ta, qw} - sa \times ac_{ta, ij} / ac_{ij, ij})$ 
    od
  od;
   $ij := ij + 1$ 
fi
```

```

    od
  end
  sorelim := proc(ab)
    local ki, ij, j, oj, sj, r, qw, sa, ta;
    global rang, xav;
    with(linalg);
    xav := ab;
    ki := min(rowdim(xav), coldim(xav));
    for ij to ki do
      j := ij;
      if xavij,j = 0 then
        oj := j;
        while xavij,oj = 0 and oj < coldim(xav) do oj := oj + 1
        od;
        if oj = coldim(xav) and xavij,oj = 0 then
          sj := ij;
          while xavsj,j = 0 and sj < rowdim(xav) do sj := sj + 1 od
          ;
          if sj = rowdim(xav) and xavsj,j = 0 then
            sj := ij;
            oj := j;
            while xavsj,oj = 0 and
              not (sj = rowdim(xav) and oj = coldim(xav)) do
                if oj < coldim(xav) then oj := oj + 1
                else oj := j; sj := sj + 1
                fi
            od;
          if
            sj = rowdim(xav) and oj = coldim(xav) and xavsj,oj = 0
          then return

```

```
    else
      for  $ta$  from  $j$  to  $\text{coldim}(xav)$  do
         $r := xav_{ij, ta} ; xav_{ij, ta} := xav_{sj, ta} ; xav_{sj, ta} := r$ 
      od;
      for  $ta$  from  $j$  to  $\text{rowdim}(xav)$  do
         $r := xav_{ta, j} ; xav_{ta, j} := xav_{ta, oj} ; xav_{ta, oj} := r$ 
      od
    fi
  elseif  $ta$  from  $j$  to  $\text{coldim}(xav)$  do
     $r := xav_{ij, ta} ; xav_{ij, ta} := xav_{sj, ta} ; xav_{sj, ta} := r$ 
  od
fi
elseif  $ta$  from  $j$  to  $\text{rowdim}(xav)$  do
   $r := xav_{ta, j} ; xav_{ta, j} := xav_{ta, oj} ; xav_{ta, oj} := r$ 
od
fi
fi;
if  $xav_{ij, j} \neq 0$  then for  $qw$  from  $ij + 1$  to  $\text{rowdim}(xav)$  do
   $sa := xav_{qw, j} ;$ 
  for  $ta$  from  $j$  to  $\text{coldim}(xav)$  do  $xav_{qw, ta} :=$ 
     $\text{simplify}((xav_{ij, j} \times xav_{qw, ta} - sa \times xav_{ij, ta}) / xav_{ij, j})$ 
  od
od
fi
od
end
funcrank := proc( $xa$ )
  local  $di, j$ ;
  global  $rang, ab, a$ ;
   $ab := xa ;$ 
```

```

    sorelim(ab);
    a := xav;
    di := min(rowdim(a), coldim(a));
    if a1,1 = 0 then rang = 0
    else
        j := 1;
        while not (aj,j = 0) and j < di do j := j + 1 od;
        if aj,j = 0 then rang := j - 1 else rang := j fi
    fi
end
diffeq := proc()
    local hik, ft, deq, jl, diF, gy, ik, hij, ls, mij, diffe, van, t, ty,
    Delt, Delt1, j, l, a, ij, hx, hy, jk, dfg, rt, xy, s1, s2, lx, ly, sd0,
    Fx, Fy, m1, m2;
    global tag, k, ac, turn, turnnumber, m, F, unknownfunction,
    g, h, Hk, Hn, ordq, rang, we;
    deq := 0;
    diF := 0;
    Delt := [turn.k];
    Delt1 := [F];
    for j to ordq do
        l := 0;
        while l ≤ j do
            Delt :=
                [op(Delt), op([convert(diff(turn.k, x $ l, y $ (j - l)), D))]);
            Delt1 :=
                [op(Delt1), op([convert(diff(F, x $ l, y $ (j - l)), D))]);
            l := l + 1
        od
    od;
end;

```

```

gy := min(rowdim(ac), coldim(ac));
a := submatrix(ac, 2..gy, 2..gy);
print(a);
we := factor(simplify(det(a)));
for ij to nops(De) do
    hij := op(ij, De);
    ls := collect(we, hij);
    mij := coeff(ls, hij);
    deq := deq + mij × op(ij, Delt);
    diF := diF + mij × op(ij, Delt1)
od;
diffE := factor(normal(deq));
diF := factor(normal(diF));
print('The differential equation obtained from functional\
    equation : ');
print(diffE = diF);
fde(diffE, diF, ordq, unknownfunction.k, g.k)
end
fde := proc(diffE, diF, ordq, func, gfunc)
    local h1, h2, h2u, n2, n2u, ij, ijk, fdeq2u, fdeq2Fu;
    global lx, ly, Fx, Fy, fdeq2, fdeq2F, dxg, dyg, n, fdeq, fdeqF,
    dfdeqx, dfdeqy, dfdeqFx, dfdeqFy;
    n := ordq;
    fdeq := diffE;
    fdeqF := diF;
    h1 := coeff(collect(fdeq, (D@@n)(func)(gfunc)),
        (D@@n)(func)(gfunc));
    lx := diff(fdeq, x);
    ly := diff(fdeq, y);
    Fx := diff(fdeqF, x);

```

```

Fy := diff(fdeqF, y);
dxg := diff(g.k, x);
dyg := diff(g.k, y);
fdeq2 := simplify(dyg × lx − dxg × ly);
fdeq2F := simplify(dyg × Fx − dxg × Fy);
h2 := coeff(collect(fdeq2, (D@@n)(func)(gfunc)),
  (D@@n)(func)(gfunc));
ij := n;
while h2 = 0 and 0 ≤ ij do
  ij := ij − 1;
  h2 := coeff(collect(fdeq2, (D@@ij)(func)(gfunc)),
    (D@@ij)(func)(gfunc))
od;
n2 := ij;
if simplify(h1 × fdeq2 − h2 × fdeq) = 0 then
  fdeqsolve(func, gfunc)
else
  while fdeq2 ≠ 0 do
    if n2 = n then
      h1 := coeff(collect(fdeq, (D@@n)(func)(gfunc)),
        (D@@n)(func)(gfunc));
      h2 := coeff(collect(fdeq2, (D@@n)(func)(gfunc)),
        (D@@n)(func)(gfunc));
      fdeq2 := simplify(h2 × fdeq − h1 × fdeq2);
      fdeq2F := simplify(h2 × fdeqF − h1 × fdeq2F);
      h2 := coeff(collect(fdeq2, (D@@n)(func)(gfunc)),
        (D@@n)(func)(gfunc));
      ij := n;
      while h2 = 0 and 0 ≤ ij do
        ij := ij − 1;

```

```
h2 := coeff(collect(fdeq2, (D@@ij)(func)(gfunc)),
            (D@@ij)(func)(gfunc))
od;
n2 := ij
else
fdeq2u := fdeq2;
fdeq2Fu := fdeq2F;
h1 := coeff(collect(fdeq, (D@@n)(func)(gfunc)),
            (D@@n)(func)(gfunc));
h2 := coeff(collect(fdeq2, (D@@n2)(func)(gfunc)),
            (D@@n2)(func)(gfunc));
for ijk from n2 + 1 to n do
dfdeqx := diff(fdeq2u, x);
dfdeqy := diff(fdeq2u, y);
dfdeqFx := diff(fdeq2Fu, x);
dfdeqFy := diff(fdeq2Fu, y);
fdeq2u := dyg × dfdeqy + dxg × dfdeqx;
fdeq2Fu := dyg × dfdeqFy + dxg × dfdeqFx
od;
h2u := coeff(collect(fdeq2u, (D@@n)(func)(gfunc)),
            (D@@n)(func)(gfunc));
ij := n;
while h2u = 0 and 0 ≤ ij do
ij := ij - 1;
h2u := coeff(collect(fdeq2u, (D@@ij)(func)(gfunc)),
            (D@@ij)(func)(gfunc))
od;
n2u := ij;
fdeq2u := simplify(h2u × fdeq - h1 × fdeq2u);
fdeq2Fu := simplify(h2u × fdeqF - h1 × fdeq2Fu);
```

```

    h2u := coeff(collect(fdeg2u, (D@@n)(func)(gfunc)),
        (D@@n)(func)(gfunc));
    ij := n;
    while h2u = 0 and 0 ≤ ij do
        ij := ij - 1;
        h2u := coeff(collect(fdeg2u, (D@@ij)(func)(gfunc)),
            (D@@ij)(func)(gfunc))
    od;
    n2u := ij;
    if n2 < n2u then
        fdeg := fdeg2u; fdegF := fdeg2Fu; n := n2u
    else
        fdeg := fdeg2;
        fdegF := fdeg2F;
        n := n2;
        fdeg2 := fdeg2u;
        fdeg2F := fdeg2Fu;
        n2 := n2u
    fi
fi
od;
if fdeg2 = 0 and fdeg2F ≠ 0 then
    print('The differential – equation hasn't got solution')
else fde(fdeg, fdegF, n, func, gfunc)
fi
fi
end
fesolve := proc(func, gfunc)
    local h, ij, hu, eq, u;
    global fdeg, fdegF, n;

```

```
print('The reduced differential equation is obtained : ');
fdeg := factor(fdeg);
fdegF := factor(fdegF);
print(fdeg = fdegF);
h := coeff(collect(fdeg, (D@@n)(func)(gfunc)),
  (D@@n)(func)(gfunc));
ij := n;
while h = 0 and 0 ≤ ij do
  ij := ij - 1;
  h := coeff(collect(fdeg, (D@@ij)(func)(gfunc)),
    (D@@ij)(func)(gfunc))
od;
n := ij;
hu := coeff(collect(fdeg, (D@@n)(func)(gfunc)),
  (D@@n)(func)(gfunc));
ij := n;
eq := 0;
while 0 ≤ ij do
  eq := eq + simplify(hu/h) × (D@@ij)(func)(gfunc);
  ij := ij - 1;
  hu := coeff(collect(fdeg, (D@@ij)(func)(gfunc)),
    (D@@ij)(func)(gfunc))
od;
u := sprintf('After dividing %A the following\
  differential equation is obtained', h);
print(u);
fdegF := simplify(fdegF/h);
print(eq = fdegF);
eq := subs(gfunc = t, eq);
```

```
fdeqF := subs(gfunc = t, fdeqF);  
print(  
    'The differential equation obtained with the substitution\  
    t' = gfunc);  
print(eq = fdeqF);  
print('The solution of the differential equation');  
dsolve(eq = fdeqF, func(t))  
end
```

2.3.3 FUTTATÁSI EREDMÉNYEK

Ebben a fejezetben néhány futtatási eredmény található, amelyekkel bemutatjuk az algoritmus működését, a kapott differenciálegyenletet és ennek az egyenletnek a megoldását.

1. A Pexider-egyenlet megoldása:

```
> feqsolve(f(x+y)-g(x)-h(y), [f,g,h]);
```

The functional equation is

$$f(x+y) - g(x) - h(y) = 0$$

search for the differential operator

search for 1st order operator

search for 2nd order operator

The differential functional equation obtained from functional equation :

$$(D^{(2)})(f)(x+y) = 0$$

The differential equation obtained with the substitution $y = t - x$

$$(D^{(2)})(f)(t) = 0$$

The solution of the differential equation :

$$f(t) = _C1 + _C2 t$$

A kapott függvény megoldása a Pexider-egyenletnek. Hasonlóan kaphatjuk, hogy a függvényegyenlet kétszer differenciálható megoldásai:

$$g(t) = _C3 + _C2t \text{ és } h(t) = _C2t + _C1 - _C3.$$

2. Az $f(x+y) - g(x-y) - h(x) - l(y) = 0$ egyenlet megoldása:

```
> feqsolve(f(x+y)-g(x-y)-h(x)-l(y), [f,g,h,l]);
```

The functional equation is

$$f(x+y) - g(x-y) - h(x) - l(y) = 0$$

search for the differential operator

search for 1st order operator

search for 2nd order operator

search for 3rd order operator

The differential functional equation obtained from functional equation :

$$(D^{(3)})(f)(x+y) = 0$$

The differential equation obtained with the substitution $y = t - x$

$$(D^{(3)})(f)(t) = 0$$

The solution of the differential equation :

$$f(t) = _C1 + _C2 t + _C3 t^2$$

Hasonlóan kaphatjuk, hogy minden ismeretlen függvény $_C1 + _C2 t + _C3 t^2$ alakú.

3. A polinomiális egyenlet megoldása $n = 4$ esetén:

$$f(x+4y) - 4f(x+3y) + 6f(x+2y) - 4f(x+y) + f(x) = 0$$

```
> feqsolve(f(x+4*y)-4*f(x+3*y)+6*f(x+2*y)-4*f(x+y)+f(x),f);
```

The functional equation is

$$f(x+4y) - 4f(x+3y) + 6f(x+2y) - 4f(x+y) + f(x) = 0$$

search for the differential operator

search for 1st order operator

search for 2nd order operator

search for 3rd order operator

search for 4th order operator

The differential functional equation obtained from functional equation :

$$(D^{(4)})(f)(x + 4y) = 0$$

The differential equation obtained with the substitution $y = \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}x$

$$(D^{(4)})(f)(t) = 0$$

The solution of the differential equation :

$$f(t) = {}_1C_1 + {}_1C_2 t + {}_1C_3 t^2 + {}_1C_4 t^3$$

Ezzel az egyenlet négyszer differenciálható megoldásait meghatároztuk.

4. Az $f(x + y) - g(x - y) - 4h(xy) = 0$ egyenlet megoldása:

`> feqsolve(f(x+y)-g(x-y)-4*h(x*y)=0, [h,f,g]);`

The functional equation is

$$f(x + y) - g(x - y) - 4h(xy) = 0$$

Search for the differential operator

Search for 1st order operator

Search for 2nd order operator

The differential equation obtained from functional equation :

$$-16(D^{(2)})(h)(xy)(x - y)(x + y) = 0$$

After dividing $-16(x^2 - y^2)$ the following differential equation is obtained

$$(D^{(2)})(h)(xy) = 0$$

The differential equation obtained with the substitution $t = xy$

$$(D^{(2)})(h)(t) = 0$$

The solution of the differential equation

$$h(t) = _C1 + _C2 t$$

> feqsolve(f(x+y)-g(x-y)=4*(_C1+_C2*x*y), [g,f]);

The functional equation is

$$f(x+y) - g(x-y) = 4_C1 + 4_C2 xy$$

Search for the differential operator

Search for 1st order operator

The differential equation obtained from functional equation :

$$-2D(g)(x-y) = -4_C2 (x-y)$$

After dividing -2 the following differential equation is obtained

$$D(g)(x-y) = 2_C2 (x-y)$$

The differential equation obtained with the substitution $t = x - y$

$$D(g)(t) = 2_C2 t$$

The solution of the differential equation

$$g(t) = _C3 + _C2 t^2$$

Végül $f(t) = 4_C1 + _C3 + _C2 t^2$ adódik. Ezzel a függvényegyenlet kétszer differenciálható megoldásait meghatároztuk.

5. Az $(x+y)f(x+y) - yg(x) - h(y) = x+y$ egyenlet megoldása:

> feqsolve((x+y)*f(x+y)-y*g(x)-h(y)=x+y, [f,g,h]);

The functional equation is

$$(x+y)f(x+y) - yg(x) - h(y) = x+y$$

Search for the differential operator

Search for 1st order operator

Search for 2nd order operator

The differential functional equation obtained from functional equation :

$$f(x+y) + (x-y) D(f)(x+y) - y (D^{(2)})(f)(x+y) x - (D^{(2)})(f)(x+y) y^2 = 1$$

The reduced differential equation is obtained :

$$x f(x+y) + D(f)(x+y) x^2 + y f(x+y) + y^2 D(f)(x+y) + 2 y x D(f)(x+y) = x+y$$

Dividing by $(x^2 + y^2 + 2xy)$ we get the following differential equation

$$D(f)(x+y) + \frac{f(x+y)}{x+y} = \frac{1}{x+y}$$

The differential equation obtained with the substitution $t = x+y$

$$D(f)(t) + \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{t}$$

The solution of the differential equation :

$$f(t) = 1 + \frac{-C1}{t}$$

Végül kaphatjuk, hogy $g(t) = -C2$ és $h(t) = -C1 - C2t$.

MÁSODIK RÉSZ

t-konvex függvények vizsgálata

3 MEGKÖZELÍTŐLEG t -KONVEX FÜGGVÉNYEKRŐL

A disszertáció ezen részében a bevezetőben említett konvexitás-típusú egyenlőtlenségekkel foglalkozunk. Első lépésként megismételjük pontosan a vizsgálandó problémát.

Jelöljön a továbbiakban $(X, |\cdot|)$ egy normált teret, $D \subset X$ egy nemüres, konvex részhalmazát X -nek. Az f függvényt $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvexnek nevezzük, ha teljesíti az

$$(3.1) \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i |x-y|^{p_i}, \quad (x, y \in D)$$

egyenlőtlenséget, ahol $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty)^{k+1}$, $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty)^{k+1}$ és $t \in [0, 1]$ rögzített paraméterek.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy milyen konvexitási tulajdonságok teljesülnek az $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvex függvényekre bizonyos regularitási feltételek teljesülése esetén, illetve vizsgáljuk az $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvex függvények regularitási és folytonossági tulajdonságait is.

Pontosabban keresünk olyan $\phi_{p_i, t} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, k$) függvényeket, amelyekre igaz a

$$(3.2) \quad f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \phi_{p_i, t}(s) |x-y|^{p_i}$$

egyenlőtlenség minden $x, y \in D$ és minden $s \in [0, 1]$ esetén.

Megjegyezzük, hogy ha az f függvény felírható $f = g + l_0 + \dots + l_n$ alakban, ahol g konvex, az l_i függvények pedig teljesítik az

$$(3.3) \quad |l_i(x) - l_i(y)| \leq \varepsilon_i |x-y|^{p_i} \quad (x, y \in D, p_i \leq 1)$$

egyenlőtlenséget minden $0 \leq i \leq n$ esetén (azaz p_i -rendű Lipschitz függvények), akkor az f függvényre igaz a (3.1) egyenlőtlenség minden $t \in [0, 1]$ esetén.

Ugyanis

$$\begin{aligned}
& f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y) \\
& \leq g(tx + (1-t)y) - tg(x) - (1-t)g(y) \\
& \quad + \sum_{i=0}^n \left(l_i(tx + (1-t)y) - tl_i(x) - (1-t)l_i(y) \right) \\
& \leq g(tx + (1-t)y) - tg(x) - (1-t)g(y) \\
& \quad + \sum_{i=0}^n \left(t|l_i(tx + (1-t)y) - l_i(x)| + (1-t)|l_i(tx + (1-t)y) - l_i(y)| \right).
\end{aligned}$$

Felhasználva g konvexitását, a (3.3), a $t^{p_i} \leq 1$ és a $(1-t)^{p_i} \leq 1$ egyenlőtlenségeket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
& f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y) \\
& \leq \sum_{i=0}^n (t\varepsilon_i|(1-t)(x-y)|^{p_i} + (1-t)\varepsilon_i|t(x-y)|^{p_i}) \\
& \leq \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(t(1-t)^{p_i} + (1-t)t^{p_i})|x-y|^{p_i} \leq \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(t + (1-t))|x-y|^{p_i} \\
& = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i|x-y|^{p_i}.
\end{aligned}$$

Ennek a résznek célja az, hogy a bevezetésben ismertetett eredményeket általánosításuk erre az esetre, ezért megismételjük a korábbi eredményeket.

3.1 ELŐZMÉNYEK

A legegyszerűbb esetben a $k = 0$, $\varepsilon_0 = 0$, $t = 1/2$ esetén a klasszikus Bernstein, Doetsch tételt [BD15] kapjuk. (További referenciákat találhatunk a [Kuc85] könyvben.)

A $k = 0$, $p_0 = 0$ és $t = 1/2$ esetet Nikodem és Ng vizsgálták [NN93]. Megmutatták, hogy ha $\varepsilon_0 \geq 0$ tetszőleges és egy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(\varepsilon_0, 0, 1/2)$ -

konvex, azaz teljesíti az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \varepsilon_0$$

egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ esetén és az értelmezési tartományának egy pontjában lokálisan felülről korlátos, akkor fennáll a

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + 2\varepsilon_0$$

egyenlőtlenség minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

A $k = 0$, $p_0 = 0$ esetet Páles Zsolt vizsgálta.

3.1.1. TÉTEL. ([Pál00]) *Legyen $\varepsilon_0 \geq 0$ és $t \in]0, 1[$ tetszőleges. Ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ lokálisan felülről korlátos a D egy pontjában és $(\varepsilon_0, 0, t)$ -konvex, azaz teljesíti a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon_0$$

egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ esetén, akkor f kielégíti az

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \max\left\{\frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}\right\} \varepsilon_0$$

egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

A $k = 1$, $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $t = 1/2$ esetet Páles Zsolttal közösen vizsgáltuk [HP04]-ben. (Ennek a dolgozatnak az eredményeit a disszertációban nem részletezzük.)

3.1.2. TÉTEL. *Legyen D egy nyílt konvex részhalmaza az $(X, |\cdot|)$ normált térnek. Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ nemnegatív konstansok. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, 1), 1/2)$ -konvex, azaz teljesíti az*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1|x-y|$$

egyenlőtlenséget és lokálisan felülről korlátos az értelmezési tartományának valamely pontjában, akkor

$$(3.4) \quad f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + 2\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1\varphi(s)|x-y|$$

minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén, ahol φ az úgynevezett Takagi függvény, ami a következő képlettel van értelmezve.

$$\varphi(s) = \sum \frac{\text{dist}(2^n s, \mathbb{Z})}{2^n}.$$

Mivel a Takagi függvényre igaz, hogy $\varphi(s) \leq 1.4\phi(s)$, ahol

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \phi(s) &:= \max(-s \log_2 s, -(1-s) \log_2(1-s)) \\ &= \begin{cases} -s \log_2 s & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ -(1-s) \log_2(1-s) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

ezért az

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + 2\varepsilon_0 + 2.8\varepsilon_1\phi(s)|x-y|$$

egyenlőtlenség is teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

3.2 AZ $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -KONVEX FÜGGVÉNYEK REGULARITÁSI TULAJDONSÁGAI

Első lépésként az $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvex függvények korlátossági és folytonossági tulajdonságaival foglalkozunk. Az első tételünkben megmutatjuk, hogy ha egy $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvex függvényről tudjuk az értelmezési tartományának egy pontjában lokálisan felülről korlátos, akkor a függvény lokálisan korlátos a teljes értelmezési tartományán. A szimmetriát felhasználva feltehetjük, hogy $0 < t \leq 1/2$.

3.2.1. TÉTEL. ([HP]) Legyen $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty)^{[k+1]}$, $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty)^{[k+1]}$ és $t \in [0, 1/2]$. Ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ az értelmezési tartományának egy $w \in D$ pontjában lokálisan felülről korlátos $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvex függvény, akkor f lokálisan korlátos D -n.

Bizonyítás. Először bebizonyítjuk, hogy f lokálisan felülről korlátos D -n. Defináljuk a D_n halmazzsorozatot a következő módon:

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{w\} \\ D_{n+1} &:= tD_n + (1-t)D. \end{aligned}$$

Ekkor indukcióval kaphatjuk, hogy

$$D_n = t^n w + (1 - t^n)D.$$

Most szintén n -szerinti indukciót használva belátjuk, hogy f lokálisan felülről korlátos D_n minden pontjában. A tétel feltételeiből következik, hogy f lokálisan felülről korlátos $w \in D_0$ -ban. Tegyük fel, hogy f lokálisan felülről korlátos D_n minden pontjában. Ekkor $x \in D_{n+1}$ esetén léteznek olyan $x_0 \in D_n$ és $y_0 \in D$ pontok, melyekre $x = tx_0 + (1 - t)y_0$. Az indukciós feltevésünket felhasználva adódik, hogy létezik egy $r > 0$ és egy $M_0 \geq 0$ konstans úgy, hogy $f(x') \leq M_0$ minden $|x_0 - x'| < r$ esetén. Ekkor, az f függvény $(\mathbf{e}, \mathbf{p}, t)$ -konvexitásából következik, hogy tetszőleges $x' \in U_0 := U(x_0, r)$ esetén

$$\begin{aligned} f(tx' + (1 - t)y_0) &\leq tf(x') + (1 - t)f(y_0) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i |x' - y_0|^{p_i} \\ &\leq tM_0 + (1 - t)f(y_0) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i (|x' - x_0| + |x_0 - y_0|)^{p_i} \\ &\leq tM_0 + (1 - t)f(y_0) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i (|x_0 - y_0| + r)^{p_i} =: M. \end{aligned}$$

Így azt kaptuk, hogy minden $x \in U := tU_0 + (1 - t)y_0 = U(tx_0 + (1 - t)y_0, tr)$ esetén $f(x) \leq M$. Így f lokálisan felülről korlátos D_{n+1} -en.

Másrészt könnyen látható, hogy

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Valóban, hiszen rögzített $x \in D$ esetén az x_n sorozatot definiálhatjuk a következőképpen:

$$x_n := \frac{(1/t)^n x - w}{(1/t)^n - 1}.$$

Ekkor $x_n \rightarrow x$ ha $n \rightarrow \infty$. A halmaz nyíltságából adódóan $x_n \in D$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ezért

$$x = \frac{w + ((1/t)^n - 1)x_n}{(1/t)^n} = t^n w + (1 - t^n)x_n \in t^n w + (1 - t^n)D = D_n.$$

Így f lokálisan felülről korlátos D -n.

Most megmutatjuk, hogy f lokálisan alulról korlátos. Legyen $q \in D$ tetszőleges. Mivel f lokálisan felülről korlátos q -ban, ezért léteznek $\varrho > 0$ és $M > 0$ konstansok úgy, hogy

$$\sup_{U(q, \varrho)} f \leq M.$$

Legyen $x \in U(q, \varrho)$ és $y := \frac{1}{1-t}q - \frac{t}{1-t}x$. Ekkor az f függvény $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvexitását felhasználva kapjuk, hogy

$$f(q) = f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \frac{1}{(1-t)^{p_i}} |x - q|^{p_i},$$

amely maga után vonja az

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{1}{t}f(q) - \frac{1-t}{t}f(y) - \frac{1}{t} \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \frac{1}{(1-t)^{p_i}} |x - q|^{p_i} \\ &\geq \frac{1}{t}f(q) - \frac{1-t}{t}M - \frac{1}{t} \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \frac{1}{(1-t)^{p_i}} \varrho^{p_i} =: M^* \end{aligned}$$

egyenlőtlenség teljesülését. Ezért f lokálisan alulról korlátos D minden pontjában.

A következő tétel azt mutatja, hogy néha elegendő lényegesen gyengébb regularitási tulajdonságot feltételezni. Például, ha a függvény értelmezési tartománya véges dimenziós, akkor felhasználva a Steinhauz és Piccard tételeket (lásd [Ste20], [Pic42]) hasonló állítást kaphatunk, mint az előző tételben.

3.2.2. TÉTEL. ([HP]) *Legyen $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty^{k+1}$, $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty^{k+1}$ és $t \in]0, 1/2]$. Legyen továbbá D egy nyílt konvex részhalmaza $\mathbb{R}^n$ -nek és legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ egy $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvex függvény. Tegyük fel, hogy létezik egy $S \subset D$ pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmaz (vagy egy második kategóriájú Baire-mérhető halmaz) és egy $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető (illetőleg egy Baire-mérhető) függvény úgy, hogy $f \leq g$ az S halmazon. Ekkor f lokálisan korlátos D -n.*

B i z o n y í t á s. Legyen

$$S_{j,m} := \{x \in S \mid g(x) \leq j\} \cap U(0, m) \quad (m, j \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{j,m},$$

ezért valamely j, m esetén az $S_{j,m}$ halmaz pozitív mértékű (második kategóriájú). Ezért f felülről korlátos j -vel $S_{j,m}$ -n, amely egy korlátos pozitív mértékű (második kategóriájú) halmaz.

Két tetszőleges $x, y \in S_{j,m}$ pontot véve kapjuk, a következő egyenlőtlenséget:

$$f(tx + (1-t)y) \leq j + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i |x - y|^{p_i}.$$

Így f korlátos a $tS_{j,m} + (1-t)S_{j,m}$ halmazon, amely, felhasználva a Steinhaus tételt [Ste20] (Piccard tételt [Pic42]) tartalmaz belső pontot. Ezért f lokálisan felülről korlátos a D halmaz egy pontjában. Ekkor alkalmazva a 3.2.1. Tételt, kapjuk f lokális korlátosságát a D halmazon.

A következő eredmény azt mutatja, hogy ha a $\mathbf{p}$ minden komponense pozitív, akkor az $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvex függvények lokális felülről korlátosságából következik a folytonosságuk. A tétel bizonyítása analóg a [Kuc85]-ben leírtakkal.

3.2.3. TÉTEL. *Legyenek adottak $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in]0, \infty[^{k+1}$, és $t \in]0, 1/2]$. Ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ egy $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvex és lokálisan felülről korlátos D valamely pontjában, akkor folytonos.*

B i z o n y í t á s. Ha f lokálisan felülről korlátos D valamely pontjában, akkor f lokálisan korlátos D -n. Defináljuk az m_f és M_f függvényeket a következő módon:

$$(3.6) \quad m_f(x) := \lim_{r \rightarrow 0+} \inf_{U(x,r)} f$$

és

$$(3.7) \quad M_f(x) := \lim_{r \rightarrow 0+} \sup_{U(x,r)} f.$$

A lokális korlátosság felhasználásával könnyen láthatjuk, hogy a (3.6) és a (3.7) egyenletekben szereplő határértékek végesek. Továbbá nyilvánvaló, hogy a

$$(3.8) \quad m_f(x) \leq f(x) \leq M_f(x)$$

egyenlőtlenség teljesül.

Vegyünk egy tetszőleges x pontot D -ből. Ekkor léteznek olyan $x_n \in D$ és $z_n \in D$ pontsorozatok, amelyekre igaz, hogy

$$(3.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = m_f(x),$$

és

$$(3.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = M_f(x).$$

Továbbá legyen

$$y_n = \left(\frac{1}{1-t} \right) z_n - \left(\frac{t}{1-t} \right) x_n.$$

Az x_n és z_n sorozat definíciójából következik, hogy

$$(3.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x,$$

továbbá $z_n = tx_n + (1-t)y_n$. Így az f függvény (ϵ, p, t) -konvexitását felhasználva kapjuk, hogy

$$f(z_n) \leq tf(x_n) + (1-t)f(y_n) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i |x_n - y_n|^{p_i}$$

Mindkét oldal "limsup"-ját véve kapjuk, hogy

$$M_f(x) \leq tm_f(x) + (1-t) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \leq tm_f(x) + (1-t)M_f(x)$$

teljesül, amelyből

$$M_f(x) \leq m_f(x)$$

következik. Ez pedig a (3.8) egyenlettel együtt azt jelenti, hogy

$$M_f(x) = m_f(x),$$

amely viszont könnyen látható, hogy szükséges és elégséges feltétele az f függvény x pontbeli folytonosságának. Mivel $x \in D$ tetszőleges volt, így az f folytonossága adódott a D halmazon.

3.3 EGY FÜGGVÉNYEGYENLET ÉS A KAPCSOLÓDÓ FÜGGVÉNYEGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

Legyen adott az $\mathbf{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$ és $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty[^{k+1}$ két paramétervektor, és a szimmetriát felhasználva továbbra is feltehetjük, hogy $0 < t \leq 1/2$.

Legyen $\mathcal{B}(I)$ az $I := [0, 1]$ intervallumon értelmezett korlátos, valós értékű függvények tere ellátva a közönséges szuprémum normával. Egy rögzített $p \geq 0$ és $t \in]0, 1/2]$ esetén definiáljuk a $T_{p,t} : \mathcal{B}(I) \rightarrow \mathcal{B}(I)$ operátort a következőképpen:

$$(T_{p,t}f)(s) = \begin{cases} (1-t)f\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p, & \text{ha } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ (1-t)f\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Először megmutatjuk, hogy a

$$(3.12) \quad \varphi(s) = (T_{p,t}\varphi)(s) \quad (s \in [0, 1])$$

egyenletnek létezik egyértelmű megoldása. Továbbá tekintve a

$$(3.13) \quad \Phi(s) \leq (T_{p,t}\Phi)(s) \quad (s \in [0, 1]),$$

$$(3.14) \quad \Psi(s) \geq (T_{p,t}\Psi)(s) \quad (s \in [0, 1])$$

egyenlőtlenségeket vizsgáljuk ezek megoldásának kapcsolatát az egyenlet megoldásával.

3.3.1. TÉTEL. ([HP]) *A (3.12) egyenletnek egyértelműen létezik egy $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, nemnegatív, korlátos és $1/2$ -re szimmetrikus megoldása (azaz $\varphi(s) = \varphi(1-s)$ minden $s \in [0, 1]$ esetén). Továbbá, ha $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos megoldása a (3.13) egyenlőtlenségeknek és $\Psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos megoldása a (3.14) egyenlőtlenségeknek, akkor teljesül a*

$$\Phi \leq \varphi \leq \Psi$$

egyenlőtlenség.

B i z o n y í t á s. Könnyen látható, hogy $T_{p,t}$ egy kontrakció a korlátos függvények terén és a kontrakciós faktor $1-t < 1$. Így, alkalmazva a Banach-féle fixpont tételt kapjuk, hogy létezik egy egyértelmű $\varphi \in \mathcal{B}(I)$ fixpontja $T_{p,t}$ -nek, azaz $T_{p,t}\varphi = \varphi$, vagyis (3.12) teljesül.

Legyen a $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat a következőképpen definiálva:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &:= 0 \\ \varphi_{n+1}(s) &:= (T_{p,t}\varphi_n)(s). \end{aligned}$$

Indukcióval könnyen látható, hogy a φ_n függvények folytonosak, nemnegatívak és szimmetrikusak $1/2$ -re nézve a $[0, 1]$ intervallumon. Alkalmazva ismét a Banach-féle fixpont tételt, a sorozat egyenletesen tart φ -hez, azaz $T_{p,t}$ fixpontjához. Ezért φ is folytonos, nemnegatív és szimmetrikus.

Végül legyenek $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és $\Psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos megoldásai a (3.13) és (3.14) egyenlőtlenségeknek. Figyelembe véve, hogy a $T_{p,t}$ operátor monoton a pontonkénti rendezésre nézve, ezért, alkalmazva a $T_{p,t}^n$ operátort a (3.13) és (3.14) egyenlőtlenségekre kapjuk, hogy

$$T_{p,t}^n \Phi \leq T_{p,t}^{n+1} \Phi \quad \text{és} \quad T_{p,t}^n \Psi \geq T_{p,t}^{n+1} \Psi \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\Phi \leq T_{p,t}^n \Phi \quad \text{és} \quad \Psi \geq T_{p,t}^n \Psi \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

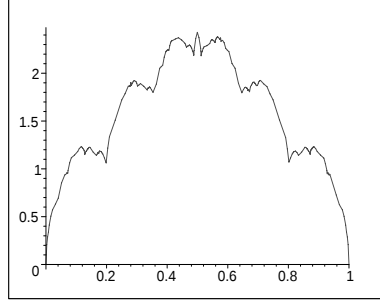
Véve a $n \rightarrow \infty$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$\Phi \leq \varphi \leq \Psi.$$

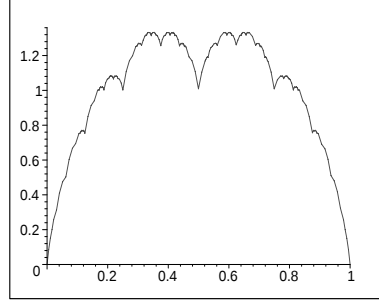
A továbbiakban a (3.12) egyenlet egyértelmű φ megoldását $\varphi_{p,t}$ -vel jelöljük.

Megjegyezzük, hogy a $\varphi_{p,t}$ értékeit nem könnyű meghatározni, mivel a kapott függvények "fraktál"-szerűek. Adunk néhány példát arra, hogy milyenek lehet-

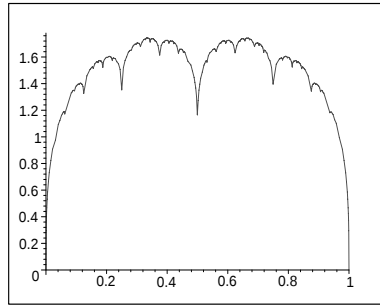
nek ezek a függvények:



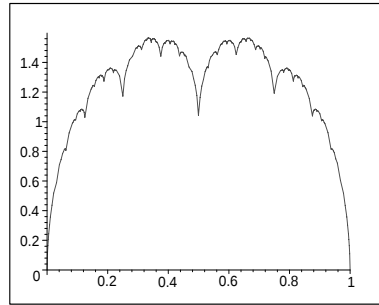
A $p = 1/2, t = 1/3$ eset



A $p=1, t=1/2$ eset



A $p = 1/3, t = 1/2$ eset



A $p=0.6, t=1/2$ eset

Ahhoz, hogy $\varphi_{p,t}$ -t becsülni tudjuk egy könnyebben számolható függvénnyel bevezetjük a $\phi_p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$(3.16) \quad \phi_p(s) := (s(1-s))^p.$$

A $\varphi_{p,t}$ és ϕ_p összehasonlításához szükségünk lesz a következő lemmára:

3.3.2. LEMMA. ([HP]) *Legyen $0 \leq p < 1$ tetszőleges konstans és definiáljuk a $\gamma_{p,t} : [0, 1-t] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következő formulával:*

$$\gamma_{p,t}(s) := (1-s)^p(1-t)^p - (1-t)^{1-p}(1-t-s)^p.$$

Ekkor $\gamma_{p,t}$ egy pozitív és monoton növekvő függvény.

B i z o n y í t á s. Mivel $0 < 1-t < 1$ és $0 \leq p < 1$, ezért

$$\gamma_{p,t}(0) = (1-t)^p - (1-t) > 0.$$

A $\gamma_{p,t}$ függvény differenciálható és

$$\gamma'_{p,t}(s) = p(-(1-s)^{p-1}(1-t)^p + (1-t-s)^{p-1}(1-t)^{1-p}).$$

Mivel $p \geq 0$, ezért elegendő csak azt belátni, hogy minden $s \in [0, 1-t]$ esetén

$$-(1-s)^{p-1}(1-t)^p + (1-t-s)^{p-1}(1-t)^{1-p} > 0,$$

amely ekvivalens a

$$1 - \frac{t}{1-s} < (1-t)^{\frac{2p-1}{p-1}}$$

egyenlőtlenséggel. Könnyen látható, hogy az egyenlőtlenség baloldala egy monoton függvénye s -nek, és az egyenlőtlenség teljesül az intervallum végpontjaiban $s = 0$ -ban és $s = 1-t$ -ben. Ezért, az egyenlőtlenség érvényes minden $s \in [0, 1-t]$ esetén is. Így $\gamma_{p,t}$ egy növekvő függvény és egyben pozitív is a $[0, 1-t]$ intervallumon.

Ha $0 \leq p < 1$, akkor a ϕ_p és $\varphi_{p,t}$ függvények rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

3.3.3. TÉTEL. ([HP]) *Ha $0 \leq p < 1$, akkor*

$$(3.17) \quad \frac{\phi_p(s)}{\gamma_{p,t}(1/2)} \leq \varphi_{p,t}(s) \leq \frac{\phi_p(s)}{\gamma_{p,t}(0)} \quad (s \in [0, 1]).$$

Bizonyítás. A bizonyítás első lépéseként belátjuk, hogy a $\Phi = \frac{\phi_p}{\gamma_{p,t}(1/2)}$ függvény megoldása a (3.13) egyenlőtlenségnek.

Először vizsgáljuk a $0 \leq s \leq 1/2$ esetet. A $\gamma_{p,t}$ függvény pozitív, monoton növekvő függvény, ezért $\gamma_{p,t}(s) \leq \gamma_{p,t}(1/2)$ minden $0 \leq s \leq 1/2$ esetén, azaz

$$\frac{\gamma_{p,t}(s)}{\gamma_{p,t}(1/2)} = \frac{(1-s)^p(1-t)^p - (1-t)^{1-p}(1-s-t)^p}{\gamma_{p,t}(1/2)} \leq 1,$$

amelyből adódik, hogy

$$\frac{(1-s)^p(1-t)^p}{\gamma_{p,t}(1/2)} \leq \frac{(1-t)^{1-p}(1-s-t)^p}{\gamma_{p,t}(1/2)} + 1.$$

Megszorozva ezt az egyenlőtlenséget $\left(\frac{s}{1-t}\right)^p$ -vel, kapjuk, hogy

$$\frac{s^p(1-s)^p}{\gamma_{p,t}(1/2)} \leq \frac{(1-t)}{\gamma_{p,t}(1/2)} \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \left(1 - \frac{s}{1-t}\right)^p + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p,$$

azaz

$$\frac{\phi_p(s)}{\gamma_{p,t}(1/2)} \leq \frac{(1-t)}{\gamma_{p,t}(1/2)} \phi_p\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p.$$

Hasonlóan, ha $1/2 \leq s \leq 1$, akkor

$$\frac{\phi_p(s)}{\gamma_{p,t}(1/2)} \leq \frac{(1-t)}{\gamma_{p,t}(1/2)} \phi_p\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p$$

teljesül. Így beláttuk, hogy a $\Phi = \frac{\phi_p}{\gamma_{p,t}(1/2)}$ függvény valóban teljesíti a (3.13)

egyenlőtlenséget. Felhasználva a 3.3.1. Tételt, kapjuk, hogy $\frac{\phi_p}{\gamma_{p,t}(1/2)} \leq \varphi_{p,t}$, azaz a (3.17) baloldali egyenlőtlensége teljesül

Ahhoz, hogy megkapjuk a (3.17) jobboldali egyenlőtlenségét meg kell mutatni, hogy a $\Psi = \frac{\phi_p}{\gamma_{p,t}(0)}$ függvény egy korlátos megoldása a (3.14) függvényegyenlőtlenségnek, és ismét használhatjuk a 3.3.1. Tételt.

3.4 AZ $(\mathbf{\epsilon}, \mathbf{p}, t)$ -KONVEX FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ FŐ EREDMÉNYEK

3.4.1. TÉTEL. ([HP]) *Legyenek adottak $\mathbf{\epsilon} = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_k) \in [0, \infty)^{[k+1]}$, $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty)^{[k+1]}$ és $t \in]0, 1/2]$. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ egy $(\mathbf{\epsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvex, az értelmezési tartományának valamely pontjában felülről korlátos függvény, akkor*

$$(3.18) \quad f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^k \epsilon_i \varphi_{p_i, t}(s) |x - y|^{p_i}$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén, ahol a $\varphi_{p_i, t}$ függvények a $T_{p_i, t}$ operátorok fixpontjai.

Bizonyítás. Felhasználva a 3.2.1. Tétel állítását kapjuk, hogy az f lokálisan korlátos az értelmezési tartományának minden pontjában. Így f korlátos a D halmaz minden kompakt részhalmazán.

Legyen $x, y \in D$ rögzített és jelölje $K_{x,y}$ az

$$s \mapsto f(sx + (1-s)y) - sf(x) - (1-s)f(y) \quad (s \in [0, 1]).$$

függvény felső korlátját. Indukcióval megmutatjuk, hogy
(3.19)

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + (1-t)^n K_{x,y} + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i(T_{p_i,t}^n \mathbf{0})(s)|x-y|^{p_i}$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén, ahol $\mathbf{0}$ a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett azonosan nulla függvényt jelöli.

Az $n = 0$ esetben az állításunk a $K_{x,y}$ definíciójából következik.

Tegyük fel, hogy (3.19) teljesül valamely $n \in \mathbb{N}$ -re. Továbbá tegyük fel, hogy $s \in [1/2, 1]$. Ekkor felhasználva az $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvexitását f -nek, az

$$\begin{aligned} f(sx + (1-s)y) &= f\left(tx + (1-t)\left(\frac{s-t}{1-t}x + \frac{1-s}{1-t}y\right)\right) \leq tf(x) \\ &+ (1-t)f\left(\frac{s-t}{1-t}x + \frac{1-s}{1-t}y\right) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i\left(\frac{1-s}{1-t}\right)^{p_i} |x-y|^{p_i} \end{aligned}$$

egyenlőtlenség adódik. Másrészt, felhasználva a (3.19) egyenletet kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f\left(\frac{s-t}{1-t}x + \frac{1-s}{1-t}y\right) &\leq \frac{s-t}{1-t}f(x) + \frac{1-s}{1-t}f(y) + (1-t)^n K_{x,y} + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i(T_{p_i,t}^n \mathbf{0})\left(\frac{1-s}{1-t}\right) |x-y|^{p_i}. \end{aligned}$$

Az előző két egyenlőtlenség kombinálásával nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} f(sx + (1-s)y) &\leq sf(x) + (1-s)f(y) + (1-t)^{n+1} K_{x,y} \\ &+ \sum_{i=0}^k \varepsilon_i\left((1-t)(T_{p_i,t}^n \mathbf{0})\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^{p_i}\right) |x-y|^{p_i} \\ &= sf(x) + (1-s)f(y) + (1-t)^{n+1} K_{x,y} \\ &+ \sum_{i=0}^k \varepsilon_i(T_{p_i,t}^{n+1} \mathbf{0})(s) |x-y|^{p_i} \end{aligned}$$

teljesül. Ezzel beláttuk (3.19)-et $s \in [1/2, 1]$ esetén. Teljesen hasonló módon megmutathatjuk, hogy a (3.19) egyenlőtlenség igaz az $s \in [0, 1/2]$ esetben is.

A bizonyításunk teljessé tételéhez hajtsuk végre az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet a (3.19) egyenletben.

Felhasználva a 3.3.3. Tétel jobboldali egyenlőtlenségét, ha mindegyik p_i paraméter kisebb mint 1, akkor azonnal kapjuk a következő eredményt:

3.4.2. KÖVETKEZMÉNY. ([HP04]) *Legyenek adottak $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, 1[^{k+1}$, és $t \in]0, 1/2]$. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ az értelmezési tartományának valamely pontjában felülről korlátos $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -konvex függvény, akkor*

$$(3.20) \quad f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^k \frac{\varepsilon_i}{(1-t)^{p_i} - (1-t)} (s(1-s)|x-y|)^{p_i}$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

B i z o n y í t á s. A 3.3.3. Tételből következik, hogy $0 \leq p < 1$ esetén

$$\varphi_{p_i, t}(s) \leq \frac{\phi_{p_i}(s)}{\gamma_{p_i, t}(0)} = \frac{(s(1-s))^{p_i}}{(1-t)^{p_i} - (1-t)} \quad s \in [0, 1],$$

ahol a $\gamma_{p_i, t}$ függvény a 3.3.2. Lemmában van definiálva. Így az állításunk közvetlenül adódik az előző tételből.

3.5 Az $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$ -KONVEX ESET

Ebben a részben azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor $k = 1$, $p_0 = 0$, és $t \in]0, 1[$, azaz az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$ -konvex, vagyis teljesíti a következő egyenlőtlenséget:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon_0 + \varepsilon_1|x-y|^p$$

minden $x, y \in D$ esetén, ahol $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \geq 0$, $p > 0$ és $t \in]0, 1[$.

Ebben a speciális esetben az általános esethez képest egy más megközelítéssel egy kisebb hibát tudunk adni a konvexitási egyenlőtlenségben szereplő függvényre, illetve a kapott függvényt pontosabban tudjuk megbecsülni.

A szimmetriát felhasználva itt is feltehetjük, hogy $t \in]0, 1/2]$.

3.6 EGY ÚJABB FÜGGVÉNYEGYENLET ÉS A KAPCSOLÓDÓ FÜGGVÉNYEGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

Egy rögzített $p \geq 0$ és $t \in]0, 1/2]$ esetén bevezetjük a $S_{p,t}$ operátort a következőképpen:

$$(S_{p,t}f)(s) = \begin{cases} \min \left\{ \begin{array}{l} (1-t)f\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \\ tf\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p \end{array} \right\}, & \text{ha } 0 \leq s \leq t, \\ \min \left\{ \begin{array}{l} (1-t)f\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \\ (1-t)f\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \end{array} \right\}, & \text{ha } t < s < 1-t, \\ \min \left\{ \begin{array}{l} tf\left(\frac{1-s}{t}\right) + \left(\frac{1-s}{t}\right)^p \\ (1-t)f\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \end{array} \right\}, & \text{ha } 1-t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy $S_{p,t}(f) \leq T_{p,t}(f)$ bármely f függvény esetén.

Ebben a részben a következő függvényegyenlettel foglalkozunk:

$$(3.21) \quad \varphi(s) = (S_{p,t}\varphi)(s) \quad (s \in [0, 1]).$$

Első eredményként itt is meghatározzuk a (3.21) függvényegyenlet nemnegatív, korlátos $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ megoldását. Ezt a megoldást a továbbiakban $\varphi_{p,t}^*$ -gal fogjuk jelölni.

3.6.1. ÁLLÍTÁS. ([Ház]) *Legyen a $(\varphi_n) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt sorozat a*

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &:= 0, \\ \varphi_{n+1}(s) &:= (S_{p,t}\varphi_n)(s) \end{aligned}$$

képlettel definiálva. Ekkor φ_n monoton növekvő, nemnegatív, folytonos függvények sorozata és az alábbi módon definiált φ függvény teljesíti a (3.21) egyenletet:

$$(3.23) \quad \varphi(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) \quad (s \in [0, 1]),$$

Továbbá ez a függvény folytonos, nemnegatív és $s = 1/2$ -re szimmetrikus a $[0, 1]$ intervallumon, azaz $\varphi(s) = \varphi(1 - s)$ minden $s \in [0, 1]$ esetén.

A bizonyításunkban felhasználjuk a következő nyilvánvaló lemmát:

3.6.2. LEMMA. ([Ház]) *Legyenek a, b, c, d tetszőleges valós számok. Ekkor*

$$|\min\{a, b\} - \min\{c, d\}| \leq \max\{|a - c|, |b - d|\}.$$

B i z o n y í t á s. [A 3.6.1. Állítás bizonyítása]

Teljes indukcióval könnyen beláthatjuk, hogy a φ_n függvényt sorozat valóban monoton növekvő, folytonos valamint $s = 1/2$ -re szimmetrikus.

Alkalmazva a 3.6.2. Lemmát belátjuk, hogy a $S_{p,t}$ operátor kontrakció a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett korlátos függvények terén (ellátva a hagyományos szuprémumnormával). Ha $s \in [0, t]$, akkor

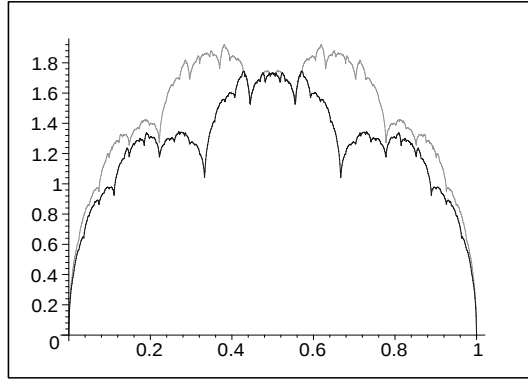
$$\begin{aligned}
& |S_{p,t}\Phi(s) - S_{p,t}\Psi(s)| \\
&= \left| \min \left\{ (1-t)\Phi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p; t\Phi\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p \right\} \right. \\
&\quad \left. - \min \left\{ (1-t)\Psi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p; t\Psi\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p \right\} \right| \\
&\leq \max \left\{ \left| (1-t)\Phi\left(\frac{s}{1-t}\right) - (1-t)\Psi\left(\frac{s}{1-t}\right) \right|, \left| t\Phi\left(\frac{s}{t}\right) - t\Psi\left(\frac{s}{t}\right) \right| \right\} \\
&\leq \max \{ (1-t)\|\Phi - \Psi\|, t\|\Phi - \Psi\| \} = (1-t)\|\Phi - \Psi\|.
\end{aligned}$$

A $s \in [t, 1-t]$ és $s \in [1-t, 1]$ eseteket hasonlóan bizonyíthatjuk. Így kapjuk, hogy

$$\|S_{p,t}\Phi - S_{p,t}\Psi\| = \max_{s \in [0,1]} |S_{p,t}\Phi(s) - S_{p,t}\Psi(s)| \leq (1-t)\|\Phi - \Psi\|,$$

ahol $1-t < 1$, ezért, alkalmazva a Banach-féle fixpont tételt, létezik egyértelmű fixpontja az $S_{p,t}$ kontrakciónak. Szintén a Banach-féle fixpont tételből kapjuk, hogy a φ_n sorozat egyenletesen konvergál a $S_{p,t}$ fixpontjához. Ezért φ is folytonos, nemnegatív és szimmetrikus.

Mivel $S_{p,t}(f) \leq T_{p,t}(f)$ bármely f függvény esetén, ezért az $S_{p,t}$ operátor fixpontja nem haladhatja meg a $T_{p,t}$ operátor fixpontját. A $t = 1/3, p = 1/2$ esetben a $\varphi_{p,t}$ és $\varphi_{p,t}^*$ függvények grafikonját mutatja az alábbi ábra:



Most vizsgáljuk a (3.21) egyenlethez kapcsolódó következő két függvényegyenlőtlenséget:

$$(3.24) \quad \Psi(s) \leq (S_{p,t}\Psi)(s) \quad (s \in [0, 1]),$$

$$(3.25) \quad \Phi(s) \geq (S_{p,t}\Phi)(s) \quad (s \in [0, 1]).$$

3.6.3. ÁLLÍTÁS. ([Ház]) *Legyen $\Psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ egy felülről korlátos megoldása a (3.24) függvényegyenletnek és $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ egy alulról korlátos megoldása a (3.25) egyenletnek. Ekkor $\Psi \leq \varphi_{p,t}^* \leq \Phi$, ahol a $\varphi_{p,t}^*$ függvény a (3.21) egyenlet egyértelmű megoldása.*

B i z o n y í t á s. Legyen a $(\psi_n) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \psi_1 &:= 1/t, \\ \psi_{n+1}(s) &:= (S_{p,t}\psi_n)(s) \end{aligned}$$

módon definiálva és legyen továbbá

$$K := \sup_{s \in [0,1]} \Psi(s), \quad L := \inf_{s \in [0,1]} \Phi(s).$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(s) = \varphi(s)$ mivel a $S_{p,t}$ operátornak egyértelműen létezik fix-pontja. Továbbá a (3.24) és (3.25) egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

$$\Psi(s) \leq \begin{cases} tK + \left(\frac{s}{t}\right)^p \leq tK + 1, & 0 \leq s \leq t, \\ (1-t)K + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \leq (1-t)K + 1, & 0 \leq s \leq 1-t, \\ (1-t)K + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \leq (1-t)K + 1, & t \leq s \leq 1, \\ tK + \left(\frac{1-s}{t}\right)^p \leq tK + 1, & 1-t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

és

$$\Phi(s) \geq \begin{cases} tL + \left(\frac{s}{t}\right)^p \geq tL, & 0 \leq s \leq t, \\ (1-t)L + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \geq (1-t)L, & 0 \leq s \leq 1-t, \\ (1-t)L + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \geq (1-t)L, & t \leq s \leq 1, \\ tL + \left(\frac{1-s}{t}\right)^p \geq tL, & 1-t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Ezért

$$K = \sup_{s \in [0,1]} \Psi(s) \leq (1-t)K + 1 \quad \text{és} \quad L = \inf_{s \in [0,1]} \Phi(s) \geq tL,$$

amelyből kapjuk, hogy

$$K \leq 1/t \quad \text{és} \quad L \geq 0.$$

Azaz

$$\Psi \leq \psi_1 \quad \text{és} \quad \Phi \geq \varphi_1.$$

Indukcióval könnyen látható, hogy $\Psi \leq \psi_n$ és $\Phi \geq \varphi_n$ minden n esetén. Véve a $n \rightarrow \infty$ határátmenetet kapjuk, hogy $\Phi \geq \varphi_{p,t}^*$ és $\Psi \leq \varphi_{p,t}^*$.

A következő állításunkban össze fogjuk hasonlítani a (3.21) egyenlet megoldásaként kapott $\varphi_{p,t}^*$ függvényt az általános esetben is használt $\phi_p : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel:

$$\phi_p(s) := (s(1-s))^p.$$

Ehhez azonban szükségünk lesz a következő lemmára:

3.6.4. LEMMA. ([Ház]) *Legyen $0 \leq p < 1$ tetszőleges konstans és a $\gamma_{p,t}^* : [0,t] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt definiáljuk a következőképpen:*

$$\gamma_{p,t}^*(s) = (1-s)^p - t^{1-2p} (t-s)^p.$$

Ekkor $\gamma_{p,t}^$ egy pozitív, monoton növekvő függvény.*

B i z o n y í t á s. Mivel $t < 1$ és $0 < 1-p < 1$, ezért

$$\gamma_{p,t}^*(0) = 1 - t^{1-p} > 0.$$

A $\gamma_{p,t}^*$ függvény differenciálható, továbbá

$$\gamma_{p,t}^{*'}(s) = -p(1-s)^{p-1} + t^{1-2p}p(t-s)^{p-1} = t^{-2p}p \left(-(1-s)^{p-1}t^{2p} + t(t-s)^{p-1} \right).$$

Mivel $t^{-2p}p > 0$, ezért elég megmutatni, hogy

$$t(t-s)^{p-1} > (1-s)^{p-1}t^{2p},$$

azaz

$$(3.27) \quad \left(\frac{t-s}{1-s} \right)^{p-1} > t^{2p-1}.$$

Legyen

$$g_{p,t}(s) = \left(\frac{t-s}{1-s} \right)^{p-1}.$$

Ekkor $g_{p,t}(0) = t^{p-1} > t^{2p-1}$ és $g_{p,t}$ is differenciálható függvény, továbbá

$$g'_{p,t}(s) = (p-1) \left(\frac{t-s}{1-s} \right)^{p-2} \frac{t-1}{(1-s)^2} > 0,$$

amelyből következik, hogy $g_{p,t}$ monoton növekvő függvény és a (3.27) egyenlőtlenség teljesül. Így kapjuk, hogy a $\gamma_{p,t}^*$ függvény is monoton növekvő, amely maga után vonja, hogy $\gamma_{p,t}^*(s) > 1 - t^{1-p}$ minden $0 \leq s \leq t$ esetén.

Ha $0 \leq p \leq 1$, akkor a ϕ_p és $\varphi_{p,t}^*$ függvények rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

3.6.5. ÁLLÍTÁS. ([Ház]) Ha $0 < t \leq 1/2$ és $0 < p < 1$, akkor

$$(3.28) \quad \frac{1}{(t(1-t))^p} \phi_p(s) \leq \varphi_{p,t}^*(s) \\ \leq \max \left\{ \frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2 - t)^p} \right\} \phi_p(s)$$

minden $s \in [0, 1]$ esetén.

Bizonyítás. A bizonyítás első lépéseként belátjuk, hogy a $\Psi = \frac{1}{(t(1-t))^p} \phi_p$ függvény megoldása a (3.24) függvényegyenlőtlenségnek.

Ebben az esetben azt kell belátnunk, hogy $\Psi(s) \leq S_{p,t}(\Psi)(s)$, azaz

$$\Psi(s) \leq \begin{cases} \min \left\{ \begin{array}{l} (1-t)\Psi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \\ t\Psi\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p \end{array} \right\} & \text{ha } 0 \leq s \leq t, \\ \min \left\{ \begin{array}{l} (1-t)\Psi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \\ (1-t)\Psi\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \end{array} \right\} & \text{ha } t < s < 1-t, \\ \min \left\{ \begin{array}{l} t\Psi\left(\frac{1-s}{t}\right) + \left(\frac{1-s}{t}\right)^p \\ (1-t)\Psi\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \end{array} \right\} & \text{ha } 1-t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

amely azt jelenti, hogy

$$(3.29) \quad \Psi(s) \leq \begin{cases} t\Psi\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p, & \text{ha } 0 \leq s \leq t, \\ (1-t)\Psi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p, & \text{ha } 0 \leq s < 1-t, \\ t\Psi\left(\frac{1-s}{t}\right) + \left(\frac{1-s}{t}\right)^p, & \text{ha } 1-t \leq s \leq 1, \\ (1-t)\Psi\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p, & \text{ha } t < s \leq 1 \end{cases}$$

teljesül. Ha $0 \leq s \leq t$, akkor alkalmazva az előző lemmát kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(t(1-t))^p} \gamma_{p,t}^*(s) \leq \frac{1}{(t(1-t))^p} \gamma_{p,t}^*(t) = \frac{1}{(t(1-t))^p} (1-t)^p = \frac{1}{t^p}$$

amelyből

$$\frac{1}{(t(1-t))^p} \left[(1-s)^p - t^{1-p} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^p \right] \leq \frac{1}{t^p}$$

adódik. Átrendezve ezt az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$\Psi(s) = \frac{1}{(t(1-t))^p} s^p (1-s)^p \leq t \frac{1}{(t(1-t))^p} \frac{s^p}{t^p} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^p + \frac{s^p}{t^p} = t\Psi\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p,$$

amely pontosan az első bizonyítandó egyenlőtlensége (3.29)-nek.

Ha $0 \leq s \leq 1 - t$, akkor alkalmazva az előző lemmát t helyett $1 - t$ -vel, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(t(1-t))^p} \gamma_{p,1-t}^*(s) \leq \frac{1}{(t(1-t))^p} \gamma_{p,1-t}^*(1-t) = \frac{1}{(t(1-t))^p} t^p = \frac{1}{(1-t)^p},$$

azaz

$$\frac{1}{(t(1-t))^p} \left[(1-s)^p - (1-t)^{1-p} \left(1 - \frac{s}{1-t} \right)^p \right] \leq \frac{1}{(1-t)^p},$$

amelyből

$$\frac{1}{(t(1-t))^p} s^p (1-s)^p \leq (1-t) \frac{1}{(t(1-t))^p} \frac{s^p}{(1-t)^p} \left(1 - \frac{s}{1-t} \right)^p + \frac{s^p}{(1-t)^p}$$

adódik. Így megkaptuk a második egyenlőtlenségét (3.29)-nek.

Mivel ϕ_p szimmetrikus $s = 1/2$ -re nézve, azaz $\phi_p(s) = \phi_p(1-s)$ minden $s \in [0, 1]$ esetén, ezért Ψ is szimmetrikus. Ezért a $t < s \leq 1$ és $1-t \leq s \leq 1$ esetekben azonnal kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(t(1-t))^p} s^p (1-s)^p \leq (1-t) \frac{1}{(t(1-t))^p} \left(\frac{s-t}{1-t} \right) \left(\frac{1-s}{1-t} \right)^p + \left(\frac{1-s}{1-t} \right)^p$$

és

$$\frac{1}{(t(1-t))^p} s^p (1-s)^p \leq t \frac{1}{(t(1-t))^p} \left(\frac{s+t-1}{t} \right)^p \left(\frac{1-s}{t} \right)^p + \left(\frac{1-s}{t} \right)^p,$$

azaz a harmadik és negyedik egyenlőtlenségét (3.29)-nek. Így azt kaptuk, hogy $\frac{1}{(t(1-t))^p} \phi_p$ egy korlátos megoldása a (3.24) egyenlőtlenségnek, amelyből felhasználva az előző állításunkat kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(t(1-t))^p} \phi_p \leq \varphi_{p,t}^*.$$

Most megmutatjuk, hogy a

$$c_{p,t} = \max \left\{ \frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p} (1/2 - t)^p} \right\}$$

konstans olyan, hogy a $\Phi = c_{p,t} \phi_p$ függvény megoldása a (3.25) függvényegyenlőtlenségnek.

Ebben az esetben azt kell belátnunk, hogy $\Phi(s) \geq S_{p,t}(\Phi)(s)$, azaz

$$\Phi(s) \geq \begin{cases} \min \left\{ \begin{array}{l} (1-t)\Phi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \\ t\Phi\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p \end{array} \right\} & 0 \leq s \leq t, \\ \min \left\{ \begin{array}{l} (1-t)\Phi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \\ (1-t)\Phi\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \end{array} \right\} & t < s < 1-t, \\ \min \left\{ \begin{array}{l} t\Phi\left(\frac{1-s}{t}\right) + \left(\frac{1-s}{t}\right)^p \\ (1-t)\Phi\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \end{array} \right\} & 1-t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

Ha $0 \leq s \leq t$, akkor a $\frac{1}{t^p \gamma_{p,t}^*(s)}$ és $\frac{1}{(1-t)^p \gamma_{p,1-t}^*(s)}$ függvények monoton csökkenőek, továbbá

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^p \gamma_{p,t}^*(0)} &= \frac{1}{t^p - t}, \\ \frac{1}{(1-t)^p \gamma_{p,1-t}^*(0)} &= \frac{1}{(1-t)^p - (1-t)}. \end{aligned}$$

Mivel $t \leq 1/2$, ezért $t^p - t \geq (1-t)^p - (1-t)$, így

$$\begin{aligned} c_{p,t} \geq \frac{1}{t^p - t} &= \min \left\{ \frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1-t)^p - (1-t)} \right\} \\ &= \max_{0 \leq s \leq t} \left\{ \min \left\{ \frac{1}{t^p \gamma_{p,t}^*(s)}; \frac{1}{(1-t)^p \gamma_{p,1-t}^*(s)} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Így

$$c_{p,t} \geq \min \left\{ \frac{1}{t^p \gamma_{p,t}^*(s)}; \frac{1}{(1-t)^p \gamma_{p,1-t}^*(s)} \right\}$$

minden $0 \leq s \leq t$ esetén, amelyből következik, hogy vagy

$$c_{p,t} \gamma_{p,t}^*(s) = c_{p,t} [(1-s)^p - t^{1-2p} (t-s)^p] \geq \frac{1}{t^p},$$

vagy

$$c_{p,t}\gamma_{p,1-t}^*(s) = c_{p,t} [(1-s)^p - (1-t)^{1-2p} (1-t-s)^p] \geq \frac{1}{(1-t)^p}$$

teljesül minden $0 \leq s \leq t$ esetén. Így vagy

$$c_{p,t}s^p(1-s)^p \geq tc_{p,t} \frac{s^p}{t^p} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^p + \frac{s^p}{t^p},$$

vagy

$$c_{p,t}s^p(1-s)^p \geq (1-t)c_{p,t} \frac{s^p}{(1-t)^p} \left(1 - \frac{s}{1-t}\right)^p + \frac{s^p}{(1-t)^p}$$

minden $0 \leq s \leq t$ esetén, ezért

$$c_{p,t}s^p(1-s)^p \geq \min \left\{ \begin{array}{l} (1-t)c_{p,t} \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \left(1 - \frac{s}{1-t}\right)^p + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \\ tc_{p,t} \left(\frac{s}{t}\right)^p \left(1 - \frac{s}{t}\right)^p + \left(\frac{s}{t}\right)^p \end{array} \right\}$$

amelyből következik, hogy

$$\Phi(s) \geq \min \left\{ (1-t)\Phi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p; t\Phi\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p \right\}.$$

Ha $t \leq s \leq 1-t$, akkor a $\frac{1}{(1-t)^p\gamma_{p,1-t}^*(s)}$ függvény monoton csökkenő és a

$\frac{1}{(1-t)^p\gamma_{p,1-t}^*(1-s)}$ függvény monoton növekvő és

$$\frac{1}{(1-t)^p\gamma_{p,1-t}^*(1/2)} = \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2 - t)^p}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} c_{p,t} &\geq \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2 - t)^p} \\ &= \max_{t < s < 1-t} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{(1-t)^p\gamma_{p,1-t}^*(1-s)}, & \text{ha } t \leq s \leq 1/2 \\ \frac{1}{(1-t)^p\gamma_{p,1-t}^*(s)}, & \text{ha } 1/2 \leq s \leq 1-t \end{array} \right\} \\ &= \max_{t \leq s \leq 1-t} \left\{ \min \left\{ \frac{1}{(1-t)^p\gamma_{p,1-t}^*(s)}; \frac{1}{(1-t)^p\gamma_{p,1-t}^*(1-s)} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Ezek az egyenlőtlenségek teljesülnek, ha

$$c_{p,t} \geq \min \left\{ \frac{1}{(1-t)^p \gamma_{p,1-t}^*(s)}; \frac{1}{(1-t)^p \gamma_{p,1-t}^*(1-s)} \right\} \quad (t < s < 1-t),$$

amelyből következik, hogy minden $t \leq s \leq 1-t$ esetén vagy

$$c_{p,t} \gamma_{p,1-t}^*(s) = c_{p,t} [(1-s)^p - (1-t)^{1-2p} ((1-t) - s)^p] \geq \frac{1}{(1-t)^p},$$

vagy

$$c_{p,t} \gamma_{p,1-t}^*(1-s) = c_{p,t} [s^p - (1-t)^{1-2p} (s-t)^p] \geq \frac{1}{(1-t)^p}$$

teljesül minden $t \leq s \leq 1-t$ esetén, azaz vagy

$$c_{p,t} s^p (1-s)^p \geq (1-t) c_{p,t} \frac{s^p}{(1-t)^p} \frac{(1-t-s)^p}{(1-t)^p} + \frac{s^p}{(1-t)^p},$$

vagy

$$c_{p,t} s^p (1-s)^p \geq (1-t) c_{p,t} \frac{(1-s)^p}{(1-t)^p} \frac{(s-t)^p}{(1-t)^p} + \frac{(1-s)^p}{(1-t)^p}.$$

Ezért

$$c_{p,t} s^p (1-s)^p \geq \min \left\{ \begin{array}{l} (1-t) c_{p,t} \left(\frac{s}{1-t} \right)^p \left(1 - \frac{s}{1-t} \right) + \left(\frac{s}{1-t} \right)^p \\ (1-t) c_{p,t} \left(\frac{1-s}{1-t} \right)^p \left(1 - \frac{1-s}{1-t} \right) + \left(\frac{1-s}{1-t} \right)^p \end{array} \right\}$$

minden $t \leq s \leq 1-t$ esetén, így

$$\Phi(s) \geq \min \left\{ (1-t) \Phi \left(\frac{s}{1-t} \right) + \left(\frac{s}{1-t} \right)^p; (1-t) \Phi \left(\frac{1-s}{1-t} \right) + \left(\frac{1-s}{1-t} \right)^p \right\}$$

minden $t < s < 1-t$ esetén.

Mivel ϕ_p szimmetrikus $s = 1/2$ -re nézve, azaz $\phi_p(s) = \phi_p(1-s)$ minden $s \in [0, 1]$ esetén, ezért Φ szimmetrikus. Így a $1-t \leq s \leq 1$ esetben kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_{p,t} &\geq \max_{1-t \leq s \leq 1} \left\{ \min \left\{ \frac{1}{t^p \gamma_{p,t}^*(s)}; \frac{1}{(1-t)^p \gamma_{p,1-t}^*(s)} \right\} \right\} \\ &= \max_{0 \leq s \leq t} \left\{ \frac{1}{t^p \gamma_{p,t}^*(s)} \right\} = \frac{1}{t^p - t}, \end{aligned}$$

azaz

$$\Phi(s) \geq \min \left\{ t\Phi\left(\frac{1-s}{t}\right) + \left(\frac{1-s}{t}\right)^p; (1-t)\Phi\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \right\}$$

minden $1-t \leq s \leq 1$ esetén.

Ezért, ha $c_{p,t} = \max \left\{ \frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2 - t)^p} \right\}$, akkor $c_{p,t}\phi_p$ egy korlátos megoldása a (3.25) egyenlőtlenségnek, amelyből következik, hogy $\varphi_{p,t}^* \leq c_{p,t}\phi_p$.

Nem nehéz belátni, hogy az így kapott felsőbecslésre igaz, hogy $c_{p,t}\Phi_p \leq \frac{1}{\gamma_{p,t}(0)}\Phi_p$, tehát a $\varphi_{p,t}^*$ -ra a Φ_p -vel nyert felsőbecslés élesebb, mint a $\varphi_{p,t}$ -re vonatkozó hasonló egyenlőtlenség.

3.7 AZ $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$ -KONVEX ESETRE VONATKOZÓ FŐ EREDMÉNYEK

Most már minden eszközünk adott ahhoz, hogy kimondhassuk az erre az esetre vonatkozó legfőbb eredményeinket:

3.7.1. TÉTEL. ([Ház]) *Legyen D egy nyílt konvex részhalmaza az $(X, |\cdot|)$ normált térnek. Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, p$ nemnegatív konstansok és legyen $t \in]0, 1/2]$ rögzített. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$ -konvex és lokálisan felülről korlátos az értelmezési tartományának valamely pontjában, akkor*

$$(3.30) \quad f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \varepsilon_0/t + \varepsilon_1\varphi_{p,t}^*(s)|x-y|^p$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén, ahol a $\varphi_{p,t}^$ függvény a (3.21) egyenlet egyértelmű megoldása.*

B i z o n y í t á s. Ha $\varepsilon_1 = 0$, akkor az állítás következik Páles [Pál00] eredményéből. Ezért feltehetjük, hogy $\varepsilon_1 > 0$. Legyenek $x, y \in D, x \neq y$ rögzített pontok és vezessük be a $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következő módon:

$$g(s) := f(sx + (1-s)y) - sf(x) - (1-s)f(y) \quad (s \in [0, 1]).$$

Ekkor a g függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- (a) felülről korlátos,
 (b) $((\varepsilon_0, \varepsilon_1|x-y|^p), (0, p), t)$ -konvex, azaz

$$g(ts + (1-t)z) - (tg(s) + (1-t)g(z)) \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1|x-y|^p|s-z|^p,$$

- (c) $g(0) = g(1) = 0$.

Felhasználva az f függvény tulajdonságait egyszerűen megkaphatjuk az állításaink bizonyítását. Az f függvény felülről való korlátosságából következik, hogy g is felülről korlátos, azaz (a) teljesül. Kihasználva az f függvény $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$ -konvexitását kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & g(ts + (1-t)z) - (tg(s) + (1-t)g(z)) \\ &= f\left((ts + (1-t)z)x + (1 - (ts + (1-t)z))y\right) \\ &\quad - (ts + (1-t)z)f(x) - (1 - (ts + (1-t)z))f(y) \\ &\quad - t\left(f(sx + (1-s)y) - sf(x) - (1-s)f(y)\right) \\ &\quad - (1-t)\left(f(zx + (1-z)y) - zf(x) - (1-z)f(y)\right) \\ &= f\left(t(sx + (1-s)y) + (1-t)f(zx + (1-z))y\right) \\ &\quad - tf(sx + (1-s)y) - (1-t)f(zx + (1-z)y) \\ &\leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1\left|(sx + (1-s)y - zx - (1-z)y\right|^p = \varepsilon_0 + \varepsilon_1|x-y|^p|s-z|^p. \end{aligned}$$

Így a (b) tulajdonságot is beláttuk. A (c) tulajdonság triviális. Defináljuk a Φ függvényt a következőképpen:

$$\Phi(s) = \frac{g(s) - c\varepsilon_0}{\varepsilon_1|x-y|^p}, \quad \text{ahol } c = \max\left\{\frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}\right\} = \frac{1}{t}$$

Megmutatjuk, hogy Φ kielégíti a (3.24) egyenlőtlenséget.

Tegyük fel, hogy $0 \leq s \leq t$. Ekkor az s pontot felírhatjuk a következő két alakban:

$$s = t \cdot 0 + (1-t) \cdot \frac{s}{1-t}$$

és

$$s = (1-t) \cdot 0 + t \cdot \frac{s}{t}.$$

Az első esetben, felhasználva a g függvény $((\varepsilon_0, \varepsilon_1|x-y|^p), (0, p), t)$ -konvexitását kapjuk, hogy

$$g(s) \leq tg(0) + (1-t)g\left(\frac{s}{1-t}\right) + \varepsilon_0 + \varepsilon_1|x-y|^p\left|0 - \frac{s}{1-t}\right|^p.$$

Ezért, felhasználva hogy

$$g(s) = \Phi(s)\varepsilon_1|x-y|^p + \varepsilon_0/t$$

és

$$g(0) = 0$$

kapjuk a következő egyenlőtlenséget

$$\Phi(s)\varepsilon_1|x-y|^p + \frac{\varepsilon_0}{t} \leq (1-t)\left(\Phi\left(\frac{s}{1-t}\right)\varepsilon_1|x-y|^p\right) + \frac{\varepsilon_0}{t} + \varepsilon_1|x-y|^p\left(\frac{s}{1-t}\right)^p.$$

Vonjunk ki ε_0/t -t az egyenlőtlenség mindkét oldalából, majd osszuk el $\varepsilon_1|x-y|^p$ -nel. Ekkor

$$\Phi(s) \leq (1-t)\Phi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p.$$

A második esetben, felhasználva a g függvény $((\varepsilon_0, \varepsilon_1|x-y|^p), (0, p), t)$ -konvexitását kapjuk, hogy

$$g(s) \leq (1-t)g(0) + tg\left(\frac{s}{t}\right) + \varepsilon_0 + \varepsilon_1|x-y|^p\left|0 - \frac{s}{t}\right|^p.$$

Ezért, most felhasználva a

$$g(s) = \Phi(s)\varepsilon_1|x-y|^p + \varepsilon_0/t$$

és

$$g(0) = 0$$

egyenlőségeket kapjuk, hogy

$$\Phi(s)\varepsilon_1|x-y|^p + \varepsilon_0/t \leq t\left(\Phi\left(\frac{s}{t}\right)\varepsilon_1|x-y|^p + \frac{1}{t}\varepsilon_0\right) + \varepsilon_0 + \varepsilon_1|x-y|^p\left(\frac{s}{t}\right)^p,$$

amelyből

$$\Phi(s) \leq t\Phi\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p + \frac{\left(2 - \frac{1}{t}\right) - \varepsilon_0}{\varepsilon_1|x-y|^p} \leq t\Phi\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p$$

adódik. Azaz, ha $s \in [0, t]$ akkor

$$\Phi(s) \leq \min \left\{ (1-t)\Phi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p ; t\Phi\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p \right\}.$$

Hasonlóan, ha $s \in [t, 1-t]$ akkor felírhatjuk

$$s = t \cdot 0 + (1-t) \cdot \frac{s}{1-t}$$

és

$$s = t \cdot 1 + (1-t) \cdot \frac{s-t}{1-t}$$

alakban. Ezeket az alakokat felhasználva

$$\Phi(s) \leq \min \left\{ (1-t)\Phi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p ; (1-t)\Phi\left(\frac{s-t}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \right\}$$

adódik. Ha $s \in [1-t, 1]$, akkor felírhatjuk

$$s = t \cdot 1 + (1-t) \cdot \frac{s-t}{1-t}$$

és

$$s = (1-t) \cdot 1 + t \cdot \frac{s+t-1}{t}$$

alakban. Ebben az esetben pedig

$$\Phi(s) \leq \min \left\{ t\Phi\left(\frac{s+t-1}{t}\right) + \left(\frac{1-s}{t}\right)^p ; (1-t)\Phi\left(\frac{s-t}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \right\}$$

teljesül. Mivel g felülről korlátos, így Φ is az, amelyből következik, hogy Φ egy korlátos megoldása a (3.24) egyenletnek. Felhasználva a 3.6.3. Állítást kapjuk, hogy

$$\Phi \leq \varphi_{p,t}^*.$$

A Φ függvény definíciójából adódik, hogy

$$g(s) \leq \varepsilon_1 |x-y|^p \varphi_{p,t}^*(s) + \varepsilon_0/t.$$

Így, felhasználva a g definícióját kapjuk, hogy

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \varepsilon_0/t + \varepsilon_1 \varphi_{p,t}^*(s) |x-y|^p,$$

amely a bizonyítandó egyenlőtlenségünk.

Felhasználva az előző tételünket és a 3.6.5. Állítást azonnal kapjuk a következő eredményt:

3.7.2. KÖVETKEZMÉNY. ([Ház]) Legyen D egy nyílt konvex részhalmaza az $(X, |\cdot|)$ normált térnek. Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, p, t$ nemnegatív konstansok, ahol $t \in]0, 1/2]$ és $0 \leq p < 1$. Ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ egy $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$ -konvex függvény, amely lokálisan felülről korlátos az értelmezési tartományának valamely pontjában, akkor

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \varepsilon_0/t$$

$$+ \varepsilon_1 \max \left\{ \frac{1}{t^p - t}, \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2 - t)^p} \right\} (s(1-s))^p |x - y|^p$$

minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

3.8 ZÁRÓ MEGJEGYZÉSEK

Ha $0 \leq p < 1$, akkor a $T_{p,t}$ illetve az $S_{p,t}$ operátorok $\varphi_{p,t}$ és $\varphi_{p,t}^*$ fixpontjait nagyságrendileg a $\phi_p(s) = (s(1-s))^p$ függvény jól közelíti.

A $p = 1$ esetben ($t = 1/2$ esetén) a (3.5) alatt értelmezett függvény ad jó nagyságrendi becslést.

Nem ismert azonban, hogy $p > 1$ esetén milyen egyszerűen értelmezhető függvény ad pontos nagyságrendi közelítést $\varphi_{p,t}$ -re illetve $\varphi_{p,t}^*$ -ra.

4 ÖSSZEFOGLALÁS

Az értekezésünk két egymástól jól elválasztható részből áll.

Az első részben a

$$h_0(x, y)f_0(g_0(x, y)) + \dots + h_n(x, y)f_n(g_n(x, y)) = F(x, y)$$

alakú lineáris, kétváltozós függvényegyenletekkel foglalkozunk. Felhasználva Páles [Pál92] eredményeit az ilyen típusú egyenletek átalakíthatóak egy differenciál-függvényegyenletté (2.1. fejezet). A disszertáció 2.2. fejezetében megmutattuk, hogy bizonyos feltételek mellett a kapott egyenlet átalakítható egy közönséges differenciálegyenletté, amelynek a megoldásai megegyeznek a differenciál-függvényegyenlet megoldásaival, és a rendje általában kisebb, mint az eredeti egyenlet rendje (2.2.9. Tétel)

Tekintsük a

$$l_n(x, y)f^{(n)}(g(x, y)) + \dots + l_0(x, y)f(g(x, y)) = F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

egyenletet, ahol $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt, simán g -összefüggő halmaz, $l_0, l_1, \dots, l_n, g$ és F adott valós értékű analitikus függvények Ω -n (úgy, hogy $g(\Omega)$ egy nyílt halmaz, továbbá $(\partial_x g, \partial_y g) \neq (0, 0)$ Ω -n), továbbá f egy valós függvény $g(\Omega)$ -n. Ekkor létezik egy közönséges differenciálegyenlet

$$f^{(m)}(t) + K_{m-1}(t)f^{(m-1)}(t) + \dots + K_0(t)f(t) = K(t),$$

(ahol $m \leq n$, $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}$ és K differenciálható valós értékű függvények) amelynek $(n+1)$ -szer differenciálható megoldása lokálisan megegyezik a (2.35) megoldásával.

Ezután a Maple V. programnyelven írt program rövid leírása található (2.3.1. fejezet), illetve maga a programlista (2.3.2. fejezet), amely a kapott lineáris kétváltozós egyenletből előállítja a differenciál-függvényegyenletet, majd ezt átalakítja egy közönséges differenciálegyenletté, majd megoldja a kapott egyenletet. Végül adtunk néhány futtatási eredményt is (2.2.3. fejezet).

Az értekezés második részében t -konvex függvények stabilitásával foglalkozunk. A 3.1. fejezetben bemutatjuk az előzményeket. Az első ilyen típusú vizsgálatok Bernstein és Doetsch [BD15] nevéhez fűződnek. Az általuk kapott eredményt később többen általánosították. Az értekezésben az Ng és Nikodem [NN93], Páles [Pál00], és a Házy és Páles [HP04] dolgozatokban követett irányvonalat folytatva adtunk meg újabb általánosításokat. Az általunk vizsgált

függvények teljesítik az

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i |x - y|^{p_i}, \quad (x, y \in D)$$

egyenlőtlenséget, ahol $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, 1[^{k+1}$ és $t \in [0, 1]$ rögzített paraméterek.

Első lépésként ezen függvények regularitási tulajdonságaival foglalkoztunk (3.2. fejezet). Megmutattuk, hogy ha egy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az értelmezési tartományának egy $w \in D$ pontjában lokálisan felülről korlátos és $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$ -konvex, akkor f lokálisan korlátos D -n.

Ha $\boldsymbol{p}$ minden komponense pozitív, akkor beláttuk, hogy az értelmezési tartományának egy pontjában lokálisan felülről korlátos $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$ -konvex függvény egyben folytonos is.

Majd megmutattuk, hogy milyen konvexitási tulajdonság állítható ezekről a függvényekről abban az esetben, ha az értelmezési tartományuk valamely pontjában felülről korlátosak (3.4.1. Tétel és 3.4.2. Következmény)

Legyen $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, 1[^{k+1}$, és $t \in]0, 1/2]$. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ az értelmezési tartományának valamely pontjában felülről korlátos $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$ -konvex függvény, akkor

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^k \frac{\varepsilon_i}{(1-t)^{p_i} - (1-t)} (s(1-s)|x-y|)^{p_i} \quad (4.1)$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

Majd egy kevésbé általános esettel foglalkoztunk, amikor a hibatag csak két részből állhat. Ebben az esetben jobb eredményeket tudtunk elérni, a kapott konvexitási tulajdonság pontosabb lesz, mint az általános esetben (3.7. fejezet)

Legyen D egy nyílt konvex részhalmaza az $(X, |\cdot|)$ normált térnek. Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, p, t$ nemnegatív konstansok, ahol $t \in]0, 1/2]$ és $0 \leq p < 1$. Ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ egy $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$ -konvex függvény, amely lokálisan felülről korlátos az értelmezési tartományának valamely pontjában, akkor

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \varepsilon_0/t + \varepsilon_1 \max \left\{ \frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2 - t)^p} \right\} (s(1-s))^p |x-y|^p$$

minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

5 SUMMARY

This PhD dissertation contains new results in the theory of functional equations. It consists of two parts, which are different from each other.

In the first part of our dissertation we deal with the linear two variable functional equation

$$(5.1) \quad h_0(x, y)f_0(g_0(x, y)) + \cdots + h_n(x, y)f_n(g_n(x, y)) = F(x, y)$$

where n is a positive integer, $g_0, g_1, \dots, g_n, h_0, h_1, \dots, h_n$, and F are given real valued analytic functions on an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, furthermore $f_0, f_1, \dots, f_n$ are unknown functions.

Such equations are, for example,

$$f(x + y) = g(x) + h(y) \quad (\text{Pexider equation}),$$

$$f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y) \quad (\text{Hosszú equation}),$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + ky) = n!f(y) \quad (\text{monomial equation}).$$

$$f(xy) + g(x(1 - y)) + h((1 - x)y) + k((1 - x)(1 - y)) = 0,$$

Applying the results of Páles [Pál92] we get recursively an inhomogeneous linear differential-functional equation in one of unknown functions for $f_1, f_2, \dots, f_n$, respectively.

One of our main results states that the solutions of the differential-functional equation obtained are the same as that of an ordinary differential equation (under some assumptions), whose order is usually much smaller than the order of the differential-functional equation.

According to the results of Zsolt Páles, it can be shown that, assuming sufficiently high-order differentiability, there exists a linear partial differential operator

$$\mathbf{D} = \sum_{\substack{ci, j \geq 0, \\ i+j \leq k}} \alpha_{ij}(x, y) \partial_x^i \partial_y^j$$

(with variable coefficients and order k less than $2n - 1$) which "kills" all of the members in the left hand side of the equation (5.1), except the first one. That is, applying $\mathbf{D}$ to the equation (5.1), it yields

$$\mathbf{D}[h_0(x, y)f_0(g_0(x, y))] = \mathbf{D}F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

which is a linear differential-functional equation of order at most k . We recall the algorithm employed to the construction of the program.

In the 2.3 section, we deal with the obtained differential-functional equations. It is shown (2.2.9. Tétel), that if we consider the equation

$$(5.2) \quad l_k(x, y)f^{(k)}(g(x, y)) + \dots + l_0(x, y)f(g(x, y)) = L(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

where $l_0, l_1, \dots, l_k, g$ and L are given real valued analytic functions on Ω , furthermore f is an unknown real function on $g(\Omega)$, then there exists a differential equation (under some assumptions) of the form

$$(5.3) \quad f^{(m)}(g(x, y)) + \sum_{i=0}^{m-1} K_i(g(x, y))f^{(i)}(g(x, y)) = K(g(x, y)),$$

whose $(k+1)$ -times differentiable solutions coincide with that of (5.2). Hence after simplification and with the substitution $t = g(x, y)$, (5.3) reduces to an ordinary differential equation with respect to f whose order is usually much smaller than the order of (5.2).

The solving method is the following. Consider the k -th order inhomogeneous linear differential-functional equation. In the first step we construct another differential-functional equation, whose order is not greater than the order of the original equation and the solutions of the system of these equations are the same as that of the original equation. In the second step, we create a smaller order differential-functional equation whose solutions are the same as that of the system of equations. We repeat this two steps until getting such differential-functional equation whose coefficients satisfy a certain system of partial differential equations.

More precisely, we have the following theorem (2.2.5. Tétel)

Consider the equation

$$(5.4) \quad l_k(x, y)f^{(k)}(g(x, y)) + \dots + l_0(x, y)f(g(x, y)) = L(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is an open, connected set and $l_0, l_1, \dots, l_k, g$ and L are given real valued, analytic functions on Ω (such that $g(\Omega)$ is an open set), furthermore f is an unknown real function on $g(\Omega)$. Then there exists a functional-differential equation

$$(5.5) \quad h_m(x, y)f^{(m)}(g(x, y)) + \dots + h_0(x, y)f(g(x, y)) = H(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

(where $m \leq k$) whose $(k+1)$ -times differentiable solutions coincide with that of (5.4) such that $h_0, h_1, \dots, h_m, H$ satisfy the following system of equations

$$(5.6) \quad \partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y h_i - h_i \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x h_i - h_i \cdot \partial_x h_m)$$

for all $i = 1, \dots, m-1$ and

$$(5.7) \quad \partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y H - H \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x H - H \cdot \partial_x h_m).$$

If $h_m \neq 0$ on Ω , then we get $\mathbf{D}_0 \left(\frac{h_i}{h_m} \right) = 0$ and $\mathbf{D}_0 \left(\frac{H}{h_m} \right) = 0$.

If there exist differentiable functions $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}, K$ such that

$$\frac{h_i(x, y)}{h_m(x, y)} = K_i(g(x, y))$$

for all $i = 0, \dots, m-1$ and

$$\frac{H(x, y)}{h_m(x, y)} = K(g(x, y)).$$

then (5.6) and (5.7) are obviously valid.

Now, we give a sufficient condition for the existence of $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}, K$. We need the following definition

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ be an open set, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. We say that Ω is (smoothly) g -connected if for all $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ such that $g(x_0, y_0) = g(x_1, y_1)$, there exists a differentiable function $(x, y) : [0, 1] \rightarrow \Omega$ such that $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, $(x(1), y(1)) = (x_1, y_1)$ and $t \mapsto g(x(t), y(t))$ is constant.

We show the following theorem (2.2.7. Lemma)

Let Ω be an open set, g be a differentiable, real valued function on Ω such that $(\partial_x g, \partial_y g) \neq (0, 0)$ on Ω . Assume that Ω is smoothly g -connected. If $\mathbf{D}_0 \varphi = 0$ (where φ is a differentiable function on Ω), then there exists a function $\Phi : g(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\varphi(x, y) = \Phi(g(x, y))$. Moreover, if φ and g are k -times continuously differentiable functions, then Φ is also a k -times continuously differentiable function.

Now, we are able to formulate our final result (2.2.9. Tétel)

Consider the equation

$$(5.8) \quad l_k(x, y) f^{(k)}(g(x, y)) + \dots + l_0(x, y) f(g(x, y)) = L(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is an open, smoothly g -connected set and $l_0, l_1, \dots, l_k, g$ and L are given real valued, analytic functions on Ω (such that $g(\Omega)$ is an open set, $(\partial_x g, \partial_y g) \neq (0, 0)$ on Ω), furthermore f is an unknown real function on $g(\Omega)$. Then there exists an ordinary differential equation

$$(5.9) \quad f^{(m)}(t) + K_{m-1}(t)f^{(m-1)}(t) + \dots + K_0(t)f(t) = K(t).$$

(where $m \leq k$ and $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}$ and K are differentiable real valued functions) whose $(k+1)$ -times differentiable solutions locally coincide with that of (5.8).

The computer-program `feqsolve` is written in the Computeralgebra-System MAPLE V. It can be used for solving functional-equations of type (5.1). The program can be started with the command

$$\text{feqsolve}(h_0(x, y) * f_0(g_0(x, y)) + \dots + h_n(x, y) * f_n(g_n(x, y)) = F(x, y), \\ [f_0, f_1, \dots, f_n]);$$

where the first parameter of `feqsolve` is the functional-equation to be solved and the second parameter is the list of unknown functions in the functional-equation. The program solves the functional-equation for the first element of the list.

In the second part of our dissertation we deal with approximately t -convex functions. More precisely we investigated the generalization of the results of Bernstein and Doetsch [BD15], Nikodem and Ng [NN93] and Páles [Pál00].

Let $(X, |\cdot|)$ be a normed space and $D \subset X$ be a nonempty open convex set.

A real valued function f defined on an open convex set D is called $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -convex if it satisfies the inequality

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i |x - y|^{p_i} \quad \text{for } x, y \in D,$$

where $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty)^{k+1}$, $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty)^{k+1}$ and $t \in [0, 1]$ are fixed parameters.

We intend to find functions $\phi_{p_i, t} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, k$) so that

$$(5.10) \quad f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \phi_{p_i, t}(s) |x - y|^{p_i}$$

hold for all $x, y \in D$ and all $s \in [0, 1]$.

First we show some regularity properties of $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -convex functions (3.2.1. Tétel).

Let D be an open convex subset of a real normed space $(X, |\cdot|)$. Let where $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty[^{k+1}$ and $t \in]0, 1/2]$ be fixed parameters. If $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -convex and locally bounded from above at a point $s \in D$, then f is locally bounded on D .

If the underlying space is of finite dimensional, then we prove the following theorem (3.2.2. Tétel)

Let D be an open convex subset of $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty[^{k+1}$ and $t \in]0, 1/2]$ be fixed parameters and $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ be an $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -convex. Assume that there exists a Lebesgue-measurable set $S \subset D$ of positive measure (Baire-measurable set of second category) and a Lebesgue-measurable function (Baire-measurable function) $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f \leq g$ on S . Then f is locally bounded on D .

If every $p_i < 1$, then we get the continuity property of the $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -convex functions (3.2.3. Tétel)

Let D be an open convex subset of a real normed space $(X, |\cdot|)$. Let where $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k) \in]0, \infty[^{k+1}$ and $t \in]0, 1/2]$ be fixed parameters. If $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, t)$ -convex and locally bounded from above at a point $s \in D$, then f is continuous.

In our investigation we need to introduce the operator $T_{p,t} : \mathcal{B}(I) \rightarrow \mathcal{B}(I)$ (where $\mathcal{B}(I)$ is the space of bounded real-valued functions defined on $I := [0, 1]$ equipped with the usual supremum norm and $p \geq 0$ and $t \in]0, 1/2]$ are fixed) by

$$(T_{p,t}\varphi)(s) = \begin{cases} (1-t)\varphi\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ (1-t)\varphi\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

In 3.3.1. Tétel we show, that there exists a unique bounded fixed point $\varphi_{p,t} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ of the operator $T_{p,t}$, i.e.,

$$(T_{p,t}\varphi_{p,t})(s) = \varphi_{p,t}(s).$$

Furthermore, $\varphi_{p,t}$ is continuous, nonnegative and is symmetric with respect to $s = 1/2$, i.e.,

$$\varphi_{p,t}(s) = \varphi_{p,t}(1-s)$$

for all $s \in [0, 1]$.

The main result (3.4.1. Tétel) states that if the function f is $(\epsilon, \mathbf{p}, t)$ -convex and locally bounded from above at a point of D , then

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^k \epsilon_i \varphi_{p_i, t}(s) |x - y|^{p_i}$$

for all $x, y \in D$ and $s \in [0, 1]$, where $\varphi_{p_i, t}$ is the fixed point of the operator $T_{p_i, t}$.

If we assume that every $p_i \in [0, 1]$, then the function f satisfies the following inequality for all $x, y \in D$ and $s \in [0, 1]$ (3.4.2. Következmény)

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^k \frac{\epsilon_i}{(1-t)^{p_i} - (1-t)} (s(1-s)|x-y|)^{p_i}.$$

Finally in the special case, when $k = 1$ and $p_0 = 1$, then we proved, the following theorem (3.7.1. Tétel, 3.7.2. Következmény)

Let D be an open convex subset of a real normed space $(X, |\cdot|)$. Let $\epsilon_0, \epsilon_1, p$ be nonnegative constants and $t \in]0, 1/2]$ fixed. If $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is locally bounded above at a point of D and $((\epsilon_0, \epsilon_1), (0, p), t)$ -convex function, then

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \epsilon_0/t + \epsilon_1 \varphi_{p, t}^*(s) |x - y|^p$$

for all $x, y \in D$ and $\lambda \in [0, 1]$, where $\varphi_{p, t}^*$ is the fixed point of the operator $S_{p, t}$ which is defined by the following formula

$$(S_{p, t} f)(s) = \begin{cases} \min \left\{ \begin{array}{l} (1-t)f\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \\ tf\left(\frac{s}{t}\right) + \left(\frac{s}{t}\right)^p \end{array} \right\}, & \text{if } 0 \leq s \leq t, \\ \min \left\{ \begin{array}{l} (1-t)f\left(\frac{s}{1-t}\right) + \left(\frac{s}{1-t}\right)^p \\ (1-t)f\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \end{array} \right\}, & \text{if } t < s < 1-t, \\ \min \left\{ \begin{array}{l} tf\left(\frac{1-s}{t}\right) + \left(\frac{1-s}{t}\right)^p \\ (1-t)f\left(\frac{1-s}{1-t}\right) + \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^p \end{array} \right\}, & \text{if } 1-t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

If $0 \leq p < 1$, then

$$\varphi_{p_i, t}^*(s) \leq \max \left\{ \frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2 - t)^p} \right\} (s(1-s))^p.$$

Therefore

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \varepsilon_0/t$$

$$+ \varepsilon_1 \max \left\{ \frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2 - t)^p} \right\} (s(1-s))^p |x - y|^p$$

for all $x, y \in D$ and $s \in [0, 1]$.

IRODALOMJEGYZÉK

- [Acz66] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 19, Academic Press, New York–London, 1966. MR 34 #8020
- [BD15] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Annalen **76** (1915), 514–526.
- [Cho84] P. W. Cholewa, *Remarks on the stability of functional equations*, Aequationes Math. **27** (1984), 76–86.
- [CP93] E. Casini and P. L. Papini, *A counterexample to the infinity version of the Hyers-Ulam stability theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 885–890.
- [Ger94] R. Ger, *Stability aspects of delta-convexity*, Stability of mappings of Hyers-Ulam type, Hadronic Press, Palm Harbor, FL, 1994, pp. 99–109.
- [Gil98] A. Gilányi, *Solving linear functional equations with computer*, Math. Pannon. **9** (1998), no. 1, 57–70. MR 99b:39033
- [Gre52] J. W. Green, *Approximately convex functions*, Duke Math. J. **19** (1952), 499–504.
- [Ház] A. Háy, *On approximately t -convexity*, Math. Ineq. and Appl., accepted.
- [Ház04] ———, *Solving linear two variable functional equations with computer*, Aequationes Math. **67** (2004), 47–62.
- [HIR98] D. H. Hyers, G. Isac, and Th. M. Rassias, *Stability of Functional Equations in Several Variables*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 34, vol. 27, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston, 1998.
- [HP] A. Háy and Zs. Páles, *On approximately t -convex functions*, Publ. Math., accepted.
- [HP04] ———, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 3, 339–350.
- [HU52] D. H. Hyers and S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 821–828.
- [Jár04] A. Jár, *Regularity properties of functional equations in several variables*, Adv. Math. (Dordrecht), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.
- [Lac99] M. Laczovich, *The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation*, Aequationes Math. **58** (1999), 135–142.

- [Mro01] J. Mrowiec, *Remark on approximately Jensen-convex functions*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **23** (2001), no. 1, 16–21.
- [NN93] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 103–108.
- [Pál92] Zs. Páles, *On reduction of linear two variable functional equations to differential equations without substitutions*, Aequationes Math. **43** (1992), no. 2-3, 236–247. MR 93f:39016
- [Pál00] ———, *Bernstein–Doetsch-type results for general functional inequalities*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **17** (2000), 197–206, Dedicated to Professor Zenon Moszner on the occasion of his seventieth birthday. MR 2001k:26015
- [Pál01] ———, *Separation by approximately convex functions*, Contributions to the theory of functional equations, III (Graz, 2000) (D. Gronau and L. Reich, eds.), Grazer Math. Ber., vol. 344, Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz, 2001, pp. 43–50.
- [Pál03] ———, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 1, 243–252. MR 2003h:26015
- [Pic42] S. Piccard, *Sur les ensembles parfaits*, Mém. Univ. Neuchâtel, vol. 16, Secrétariat de l'Université Neuchâtel, 1942.
- [Ste20] H. Steinhaus, *Sur les distance des points des ensembles de mesure positif*, Fund. Math. **1** (1920), 99–104.
- [Szék82] L. Székelyhidi, *On a class of linear functional equations*, Publ. Math. Debrecen **29** (1982), no. 1-2, 19–28. MR 84j:39013

TARTALOMJEGYZÉK

1	BEVEZETÉS	1
2	LINEÁRIS FÜGGVÉNYEGYENLETEK MEGOLDÁSA SZÁMÍTÓGÉPPEL	7
2.1	LINEÁRIS KÉTVALTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLET REDUKCIÓJA	7
2.1.1	JELÖLÉSEK	7
2.1.2	FELHASZNÁLT EREDMÉNYEK	8
2.1.3	A DIFFERENCIÁL-FÜGGVÉNYEGYENLETTÉ ALAKÍTÓ ALGORITMUS	10
2.1.4	PÉLDÁK	11
2.2	A DIFFERENCIÁL-FÜGGVÉNYEGYENLET MEGOLDÁSA	14
2.3	A <i>fesolve</i> PROGRAM MŰKÖDÉSE	28
2.3.1	A PROGRAM MŰKÖDÉSÉNEK RÖVID LEÍRÁSA	28
2.3.2	A PROGRAMLISTA	30
2.3.3	FUTTATÁSI EREDMÉNYEK	46
3	MEGKÖZELÍTŐLEG t -KONVEX FÜGGVÉNYEKRŐL	53
3.1	ELŐZMÉNYEK	54
3.2	AZ (ϵ, p, t) -KONVEX FÜGGVÉNYEK REGULARITÁSI TULAJDONSÁGAI . . .	56
3.3	EGY FÜGGVÉNYEGYENLET ÉS A KAPCSOLÓDÓ...	61
3.4	AZ (ϵ, p, t) -KONVEX FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ FŐ EREDMÉNYEK . .	65
3.5	AZ $((\epsilon_0, \epsilon_1), (0, p), t)$ -KONVEX ESET	68
3.6	EGY ÚJABB FÜGGVÉNYEGYENLET ÉS A KAPCSOLÓDÓ...	68
3.7	AZ $((\epsilon_0, \epsilon_1), (0, p), t)$ -KONVEX ESETRE VONATKOZÓ FŐ EREDMÉNYEK .	79
3.8	ZÁRÓ MEGJEGYZÉSEK	83
4	ÖSSZEFOGLALÁS	84
5	SUMMARY	86
	IRODALOMJEGYZÉK	93

**Lineáris függvényegyenletek megoldási módszerei és
 t -konvex függvények stabilitása**

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.

Írta: Házy Attila okleveles matematikus.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika doktori programja Analízis alprogramja
keretében.

Témavezető: Dr. Páles Zsolt

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 200... ..

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 200... ..