



EXTENSIONS OF LOOPS  
AND QUASIGROUPS

LOOPOK ÉS KVÁZICSOPORTOK  
BŐVÍTÉSEI

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Izabella Stuhl

Supervisor: Dr. Péter Tibor Nagy

University of Debrecen  
Doctoral Council of Natural Sciences  
Doctoral School of Mathematics and Computational Sciences

Debrecen, 2010

# 1 Introduction

In the sense of the well-known Schreier extension, beginning with two given groups a new one is constructed which contains the first group as a normal subgroup such that the quotient group with respect to this normal subgroup is isomorphic to the second one. This construction is carried out by defining an appropriate operation on the cartesian product of the given structures and described by the following exact sequence

$$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Let  $G$  and  $\Gamma$  be two groups, the group  $\mathfrak{G}$  is an extension of  $\Gamma$  by  $G$  if on the set  $G \times \Gamma$  is defined a multiplication by

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, f(a, b) \cdot \alpha^{T(b)}\beta),$$

where  $T : G \longrightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  and  $f : G \times G \longrightarrow \Gamma$  is the factor system with

1.  $f(1, a) = f(a, 1) = 1$ ;
2.  $T(a)^{-1}T(b)^{-1}f(a, b)T(ab)f(a, b)^{-1} = 1$ ;
3.  $f(b, c)f(a, bc) = f(a, b)^{T(c)}f(ab, c)$ ;

for all  $a, b, c \in G$ .

The simplest case occurs when  $T$  and  $f$  are both trivial maps, in this case  $\mathfrak{G}$  is the direct product of  $\Gamma$  and  $G$ . If the map  $f$  is trivial and  $T$  is non-trivial, then  $\mathfrak{G}$  is a semidirect product of  $\Gamma$  and  $G$ . If  $T$  is trivial and  $f$  is non-trivial, then we have for the multiplication

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, f(a, b) \cdot \alpha \cdot \beta),$$

which is called  $f$ -extension.

Similar construction can be given for loops and quasigroups with appropriate modification, but the lack of associativity changes the situation so drastically, that a general extension theory of these structures does not exist. Nowadays, many authors apply extensions of loops and quasigroups in different interpretations for example [3], [11], [14], [16], [17], [18]. Loop extension of groups by loops is studied by Péter T. Nagy and Karl Strambach in [22] very systematically. The goal of this dissertation is to show some further investigations of  $f$ -extensions of loops and quasigroups in the sense of the above mentioned authors, described by exact sequences

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathfrak{L} \longrightarrow L \longrightarrow 1,$$

respectively

$$Q \longrightarrow \mathfrak{Q} \longrightarrow K,$$

where  $\Lambda, L$  are loops and  $K, Q$  are quasigroups.

## 2 Central extension

In this chapter are investigated central extensions of groups by loops which have combinatorial background. An extension is called central, if the kernel of the corresponding homomorphism is contained in the center of the extension. At first we consider these combinatorial structures, give them an algebraic face and determine their groups of translations. Since for a loop  $L$  the knowledge of the group  $G$  generated by the set  $\mathfrak{L}$  of its left translations is essential. Namely, if  $H$  is the stabilizer of the identity of  $L$  in  $G$ , then  $L$  is isomorphic to the loop defined on  $\mathfrak{L}$  by  $(x, y) \mapsto x * y = \pi(x, y) : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ , where  $\pi$  assigns to the element  $xy \in G$  the left translation of  $L$  contained in  $xyH$ . (cf. [21] Section 1.2). Results of the first section can be found in [26].

### 2.1 Translation groups of Steiner loops

For turning a Steiner triple system  $\mathfrak{S}$  into a Steiner quasigroup  $(Q(\mathfrak{S}), *)$ , we define as  $a * b$  the third point of the line determined by  $a, b$  and put  $a * a = a^2 = a$  for all  $a \in \mathfrak{S}$ . Moreover, with a Steiner triple system is associated a Steiner loop  $(S(\mathfrak{S}), \circ)$  such that the elements of  $S(\mathfrak{S}) \setminus \{e\}$ , where  $e$  is the identity of  $S(\mathfrak{S})$ , are the points of the Steiner system  $\mathfrak{S}$  and  $a \circ b := a * b$  for  $a \neq b$ ,  $a, b \in S(\mathfrak{S}) \setminus \{e\}$ , whereas  $a \circ a = a^2 = e$ . A Steiner loop is a commutative loop of exponent 2 with the inverse property [25], Chap.V.

Very often the identities which hold in a Steiner quasigroup associated with a Steiner triple system  $\mathfrak{S}$  do not hold in the Steiner loop  $S(\mathfrak{S})$  associated with  $\mathfrak{S}$ . Examples are the Steiner triple systems, called *Hall systems*, in which every three non-collinear points generate an affine plane of order 3. In the associated Steiner quasigroup  $Q(\mathfrak{S})$  one has  $(xy)z = (xz)(yz)$  for all  $x, y, z \in Q(\mathfrak{S})$  but this identity fails to hold in the associated Steiner loop  $S(\mathfrak{S})$ . Another convincing example for this is the group  $\Phi$  generated by the translations of  $Q(\mathfrak{S})$  and the group  $G$  generated by the translations of  $S(\mathfrak{S})$ , if  $\mathfrak{S}$  is a finite Hall triple system of size  $n$ . Namely, in this case the group  $\Phi$  is solvable (see [12] and [3] p. 86), but  $G$  does not.

The automorphism group of a Steiner loop coincides with the automorphism group of the corresponding Steiner triple system. In [7], Corollary 1, p. 251 it is proved that a Steiner loop  $S(\mathfrak{S})$  is an elementary abelian group of order  $n + 1 = 2^m$  if and only if the Steiner triple system  $\mathfrak{S}$  corresponding to  $S(\mathfrak{S})$  is isomorphic to the projective space of dimension  $m - 1$  over the field  $GF(2)$ . Hence the group of translations of a Steiner loop corresponding to a projective space is an elementary abelian 2-group.

For Steiner loops corresponding to Steiner triple systems which are not

projective spaces the situation changes drastically.

**Theorem.** *Let  $S(\mathfrak{S})$  be a proper Steiner loop of order  $n$  and let  $Q(\mathfrak{S})$  be a Steiner quasigroup both corresponding to the Steiner triple system  $\mathfrak{S}$ . If the product  $\lambda^*_a \lambda^*_b$  of any two distinct translations of  $Q(\mathfrak{S})$  has odd order, then the group  $G$  generated by the translations of  $S(\mathfrak{S})$  is the alternating group  $A_n$  or the symmetric group  $S_n$  depending whether  $n$  is divisible by 4 or not.*

**Remark.** *Any Steiner quasigroup  $Q(\mathfrak{S})$  corresponding to a Hall system satisfies the conditions of the previous Theorem.*

There are also Steiner triple systems which are not Hall systems but for which the products of any two distinct translations of the associated Steiner quasigroup have odd order. We illustrate this for Steiner triple systems constructed in [9], 2.1. p. 291.

Let  $C$  be a cyclic group of order  $k = \frac{1}{3}(4^n - 1)$  such that  $n > 1$  is odd. Let  $\mathfrak{S}$  be the disjoint union  $\mathfrak{S} = C_0 \cup C_1 \cup C_2$  such that  $C_0, C_1, C_2$  are three exemplars of  $C$ . If the element  $x \in C$  is contained in the exemplar  $C_i$ , then we denote this element with  $x_i$ . The blocks of a Steiner triple system  $\mathfrak{S}_C$  on the point set  $\mathfrak{S}$  of size  $4^n - 1$  are the following triples:

- (i) all subsets  $\{x_0, x_1, x_2\}$ , with  $x_0 = x_1 = x_2 = x \in C$ ,
- (ii) all subsets  $\{x_0, y_0, z_1\}, \{x_1, y_1, z_2\}, \{x_2, y_2, z_0\}$  of  $\mathfrak{S}$  with  $x, y, z \in C$  such that  $x \neq y$  and  $xy = z^2$ .

**Remark.** *Let  $C$  be a cyclic group of order  $\frac{4^n-1}{3}$  with odd  $n > 1$  and let  $Q(\mathfrak{S}_C)$  be the Steiner quasigroup corresponding to the Steiner triple system constructed from  $C$  as above. Then the translation group of the Steiner loop  $S(\mathfrak{S}_C)$  of order  $4^n$  corresponding to  $Q(\mathfrak{S}_C)$  is the alternating group  $A_{4^n}$ .*

## 2.2 Oriented Steiner loops

We consider loop extensions

$$(*) \quad 1 \longrightarrow A \longrightarrow L \longrightarrow S \longrightarrow 1,$$

where  $A$  is the group of order 2 and  $S$  is a Steiner loop.

The loop  $L$  is realized on the set  $S \times A = \{(a, \epsilon) : a \in S, \epsilon \in A\}$  such that the multiplication is given by

$$(a_1, \epsilon_1) \circ (a_2, \epsilon_2) = (a_1 a_2, \epsilon_1 \epsilon_2 f(a_1, a_2)),$$

where  $f$  is a function  $f : S \times S \longrightarrow A$  with  $f(a, e) = f(e, a) = 1$  for all  $a \in S$  and the unit element  $e$  of  $S$ . The identity of  $L$  is the element  $(e, 1)$  and the left and right inverse of any element coincide.

Even the simplest case of non-associative extensions of the group of order 2 by an abelian 2-group yields a rich variety of loops which are distinguish among them by different weak associativity conditions. To obtain more homogeneous classes of extensions it is necessary to restrict the possibilities for the factor systems  $f$ . The best known examples in this direction are the code loops (see [13], [15]) and C-loops (cf. [17]). We deal here with extensions of type  $(*)$  in which  $f(x, y) = -f(y, x)$  holds for all different  $x, y \in S \setminus \{e\}$  and all elements of  $L \setminus \{(e, 1)\}$  have either order 2 or 4, i. e.,  $f(x, x) = 1$ , respectively  $f(x, x) = -1$  for all  $x \in S \setminus \{e\}$ . Results obtained in this section are in [27].

**Definition.** An oriented Steiner triple system  $(\mathfrak{S}, T)$  is a Steiner triple system  $\mathfrak{S}$  such that on the set  $T$  of blocks for each block is given a cyclic order.

**Definition.** An oriented Steiner loop  $L$  is an extension  $(*)$  for which there exists an oriented Steiner triple system  $(\mathfrak{S}, T)$  such that the elements different from the identity of the Steiner loop  $S$  are the points of  $\mathfrak{S}$  and the restriction of the factor system of  $L$  to  $(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}) \setminus \{(x, x), x \in \mathfrak{S}\}$  coincides with the orientation function of  $(\mathfrak{S}, T)$  and  $f(x, x) = -1$ , respectively  $f(x, x) = 1$  for all  $x \in S \setminus \{e\}$  holds.

The center of an oriented Steiner loop  $L$  has order 2 if the exponent of  $L$  is 4 and it is trivial if the exponent of  $L$  is 2. The oriented Steiner triple system  $(\mathfrak{S}, T)$  of an oriented Steiner loop  $L$  is uniquely determined by  $L$  and conversely, an oriented Steiner triple system  $(\mathfrak{S}, T)$  determines a unique oriented Steiner loop  $L$  of exponent  $d \in \{2, 4\}$ .

**Theorem.** Any oriented Steiner loop  $L$  is flexible.

The loop  $L$  satisfies the inverse property if and only if every element of  $L$  not contained in the center has order 4.

The loop  $L$  has the cross inverse and the automorphic inverse properties but satisfies neither the left nor the right inverse property if and only if  $L$  has exponent 2.

**Theorem.** An oriented Steiner loop  $L$  is a group if and only if it is the quaternion group of order 8.

Let  $\hat{G}_l$ ,  $\hat{G}_r$  and  $\hat{G}$  be the group generated by left, right and all translations of the Steiner loop  $L$ . To describe these groups we need the following mapping, let  $\tau_a : L \longrightarrow L$  ( $a \in S \setminus \{e\}$ ),  $\tau_a : (y, \epsilon) \mapsto (y, \epsilon)$ ,  $y \in \{e, a\}$ ,

$\epsilon \in \{1, -1\}$ ,  $\tau_a : (x, \epsilon) \mapsto (x, -\epsilon)$ ,  $a \neq x \in S \setminus \{a, e\}$ ,  $\epsilon \in \{1, -1\}$ . Then we have

**Theorem.** *If the oriented Steiner loop  $L$  corresponds to a Steiner loop  $S$  of order  $n$ , then the normal subgroup  $\Theta = \langle \tau_a, a \in S \rangle$  of  $\hat{G}$  is the elementary abelian 2-group of order  $2^{n-1}$  or  $2^{n-2}$  depending on whether  $n$  is odd or even and the factor group  $\hat{G}/\Theta$  is isomorphic to  $\hat{G}_l$  as well as to  $\hat{G}_r$ .*

**Corollary.** *The groups  $\hat{G}_l$  and  $\hat{G}_r$  are isomorphic.*

We obtain for the group of automorphisms of an oriented Steiner triple system

**Proposition.** *The automorphism group  $\Gamma$  of an oriented Steiner triple system has odd order.*

**Proposition.** *Let  $U$  be a group of automorphisms of a Steiner triple system  $\mathfrak{S}$  such that  $U$  has odd order. Then there is an oriented Steiner triple system having  $U$  as a group of automorphisms.*

**Remark.** *Let  $(\mathfrak{S}, T)$  be a finite oriented Steiner triple system having  $K$  as a group of automorphisms and let  $K_0$  be a proper subgroup of  $K$  such that a block orbit  $B$  of  $K$  splits into different orbits  $B_1, \dots, B_m$  of  $K_0$ . Then there exists an oriented Steiner triple system  $(\mathfrak{S}, T_0)$  such that  $K_0$  consists of automorphisms, but  $K$  is not a group of automorphisms of  $(\mathfrak{S}, T_0)$ .*

Now we can determine the groups of automorphisms of oriented Steiner loops

**Theorem.** *The automorphism group  $\Gamma$  of an oriented Steiner loop  $L$  is a semidirect product of a normal elementary abelian 2-group  $\Delta$  inducing on the factor loop  $L/A$  the identity and corresponding to the set of homomorphisms from  $S$  into  $\mathbb{Z}_2$  by the automorphism group  $\Sigma$  of the oriented Steiner loop.*

**Definition.** *Let  $\mathfrak{S}$  be a Steiner triple system. We call a proper subsystem  $\mathfrak{K}$  a blockade subsystem if each block of  $\mathfrak{S}$  not contained in  $\mathfrak{K}$  meets  $\mathfrak{K}$  in a point.*

**Theorem.** *There is a bijection between the non-trivial automorphisms of an oriented Steiner loop  $L$ , which induce on the corresponding Steiner triple system  $\mathfrak{S}$  of  $S$  the identity, and the blockade subsystems of  $\mathfrak{S}$ .*

**Proposition.** *Let  $\gamma$  be an epimorphism from a Steiner loop  $S$  onto  $\mathbb{Z}_2$ . Then  $S$  contains a normal Steiner subloop  $K$  such that  $S$  is the union  $S = K \cup Ka$ , where  $a$  is an element of  $S$  not contained in  $K$ .*

*If  $\mathfrak{S}$  and  $\mathfrak{K}$  are Steiner triple systems corresponding to  $S$ , respectively to  $K$ , then  $\mathfrak{K}$  is a blockade subsystem of  $\mathfrak{S}$ .*

**Theorem.** *Let  $\Gamma$  be the automorphism group the oriented Steiner loop  $L$ . Corresponding to an oriented Steiner triple system  $(\mathfrak{S}, T)$ .*

*If  $\mathfrak{S}$  is an affine space over the field  $GF(3)$ , then the group  $\Delta$  consists only of the identity and  $\Gamma$  is isomorphic to the automorphism group  $\Sigma$  of  $(\mathfrak{S}, T)$ .*

*If  $\mathfrak{S}$  is a projective space of dimension  $n$  over the field  $GF(2)$ , then  $\Delta$  is the elementary abelian group of order  $2^n$ .*

**Corollary.** *The automorphism group of an oriented Steiner loop of order 8 is isomorphic to the alternating group  $A_4$ .*

Let  $S$  be a Steiner loop corresponding to the Steiner triple system  $\mathfrak{S}$ . A valuation  $v$  of  $S$  is a mapping  $S \rightarrow \{1, -1\}$  such that  $v(e) = 1$  for the identity  $e$  of  $S$ .

Let  $L_1$  and  $L_2$  be oriented Steiner loops corresponding to the same Steiner triple system  $\mathfrak{S}$  and having as factor systems  $f_1$  or  $f_2$ , respectively such that  $f_1(a, a) = f_2(a, a)$  for all  $a$  contained in the Steiner loop  $S$  which corresponds to  $\mathfrak{S}$ .

We suppose that  $L_1$  and  $L_2$  correspond to oriented Steiner triple systems  $(\mathfrak{S}, T_1)$ , respectively  $(\mathfrak{S}, T_2)$  over  $\mathfrak{S}$  such that the automorphism groups of  $(\mathfrak{S}, T_1)$  and  $(\mathfrak{S}, T_2)$  coincide. If  $\Gamma$  is this automorphism group, then any element  $\tilde{\gamma}$  of  $\Gamma$  induces on the Steiner loop  $S$  an automorphism  $\gamma$  such that  $f_1(a, b) = f_1(a^\gamma, b^\gamma)$  and  $f_2(a, b) = f_2(a^\gamma, b^\gamma)$ .

A valuation  $v$  is compatible with the pair  $(f_1, f_2)$  if  $v(a)v(b)f_2(a, b) = v(ab)f_1(a, b)$  for all  $a, b \in S$ . The valuations  $v$  compatible with the pair  $(f_1, f_2)$  correspond in a unique way with isomorphisms from  $L_1$  onto  $L_2$  which induce on  $S$  the identity.

**Lemma.** *The loops  $L_{f_i}$  ( $i = 1, 2$ ) such that for the factor systems  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) one has  $f_1(x, y) = -f_2(x, y)$  for distinct  $x, y \in S \setminus \{e\}$  and  $f_1(x, x) = f_2(x, x)$ ,  $x \in S$  are isomorphic. An isomorphism  $\phi$  is given by the mapping  $(x, \epsilon) \mapsto (x, -\epsilon)$ .*

**Theorem.** *Let  $L_1$  and  $L_2$  be oriented Steiner loops of the same exponent with factor systems  $f_1$  and  $f_2$  respectively, such that the factor loops  $L_1/A$  and  $L_2/A$  correspond to the same Steiner triple system  $\mathfrak{S}$ . If the automorphism*

groups of the oriented Steiner triple systems  $(\mathfrak{S}, T_1)$  and  $(\mathfrak{S}, T_2)$  corresponding to  $L_1$ , respectively  $L_2$  coincide, then  $L_1$  and  $L_2$  are isomorphic if and only if there exists a valuation  $v$  of the Steiner loop  $S$  belonging to  $\mathfrak{S}$  compatible with  $(f_1, f_2)$ .

**Theorem.** *Let  $L_1$  be an oriented Steiner loop having  $K$  as the automorphism group. If  $\alpha$  is an automorphism of the Steiner loop  $S$  corresponding to  $L_1$ , then there exists an oriented Steiner loop  $L_2$  isomorphic to  $L_1$  and having the conjugate group  $K^\alpha$  as its automorphism group.*

**Proposition.** *Oriented Steiner loops  $L_1$  and  $L_2$  of the same exponent associated with the Steiner triple system  $\mathfrak{S}$  and having block transitive automorphism groups are isomorphic.*

We call an oriented Steiner loop  $L$  *projective* if the associated Steiner triple system  $\mathfrak{S}$  is isomorphic to the point-line design of a projective geometry over  $GF(2)$ . If  $L$  has order  $2^{n+1}$ , then the automorphism group of  $L$  is a subgroup  $U$  of odd order in  $SL(n, 2)$ . Therefore  $U$  is a solvable subgroup of  $SL(n, 2)$ .

If  $U$  is a solvable group of automorphisms of the vector space  $V$  of an even dimension  $n$  over  $GF(2)$  such that  $U$  has odd order and acts transitively on the vectors different from zero, then  $V$  may be identified with the additive group of the field  $GF(2^n)$  and  $U$  is as a permutation group isomorphic to the sharply transitive group  $\Sigma := \{x \mapsto ax; 0 \neq a \in GF(2^n)\}$  since the automorphism group of  $GF(2^n)$  is a cyclic group of even order (cf. [24], Theorem 19.9, p. 246.).

**Proposition.** *Let  $L$  be an oriented projective Steiner loop of order 16 such that its automorphism group  $\Gamma$  acts transitively on the lines of the corresponding oriented projective plane  $\mathfrak{S}$  of order 2. Then the group  $\Gamma$  is the semidirect product of the normal subgroup  $\Delta$  isomorphic to  $\mathbb{Z}_2^3$  by the group of order 21 acting on  $\Delta$  faithfully.*

**Corollary.** *Any oriented projective Steiner loop  $L$  of order 16 and of exponent 4 such that the order of its automorphism group  $\Gamma$  is divisible by 7 is the Moufang loop of order 16.*

**Theorem.** *Any oriented projective Steiner loop  $L$  of order  $\geq 32$  and exponent 4 is not Moufang.*

**Theorem.** *Any oriented projective Steiner loop  $L$  of order  $\geq 32$  and exponent 4 is not Moufang.*

Let  $L_1$  and  $L_2$  be oriented Steiner loops arising from the oriented Steiner triple systems  $(\mathfrak{S}, T_1)$ , respectively  $(\mathfrak{S}, T_2)$  with the orientation functions  $f_1$ , respectively  $f_2$  such that the automorphism groups of  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) are conjugate subgroups in the automorphism group of  $\mathfrak{S}$ . Then we may assume that the automorphism groups of  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) induce on  $\mathfrak{S}$  the same group  $\Gamma$  of automorphisms. The decision when  $L_1$  and  $L_2$  are isomorphic requires a detailed discussion on the relations among the restrictions of the orientation functions of  $(\mathfrak{S}, T_1)$  and  $(\mathfrak{S}, T_2)$  to the orbits of the group  $\Gamma$ . In the last subsection is illustrated this situation for oriented Steiner loops with 16 respectively 20 elements seeking a valuation  $v$  of  $\mathfrak{S}$  such that  $v(a)v(b)f_1(a, b) = v(ab)f_2(a, b)$  for all  $a, b \in \mathfrak{S}$ .

### 3 Nuclear extension

In this chapter we deal with nuclear extensions of quasigroups our results are in [23]. A loop extension is usually called (right) nuclear, if the kernel of the corresponding homomorphism is contained in the (right) nucleus of the extension. (Right) nuclear extensions are very natural generalizations of central extensions, they have been investigated by many authors and used for different constructions in loop theory (e. g. [11], [14], [16], [17], [18], [21]). Most of the examples treated in these papers are central extensions, but only a few examples are known for non-central (right) nuclear extensions.

The aim of the third chapter is the systematic study of right nuclei of quasigroups obtained by an extension process in the category of quasigroups with right unit. The investigated extensions of quasigroups are defined by a slight modification of non-associative Schreier-type extensions of groups or loops (c.f. [18], [22], [26]). These extensions will be determined by a triple  $(L, K, f)$ , where  $L$  is a loop,  $K$  is a quasigroup with right unit and  $f : K \times K \rightarrow L$  is a function. The main results give characterizations of quasigroup extensions satisfying particular nuclear conditions. We apply the results to the description of constructions of quasigroups with right inverse property, having a prescribed right nucleus.

Now, let  $\mathfrak{Q}_f = (K \times L, \circ)$  be an  $f$ -extension of a loop  $(L, \cdot)$  by a quasigroup  $(K, \cdot)$  and assume that  $\mathfrak{Q}_f$  has non-trivial right nucleus. The homomorphic image of the right unit of  $\mathfrak{Q}_f$  in  $(K, \cdot)$  is a right unit of  $(K, \cdot)$ , which will be denoted by  $e_r \in K$ . Let  $\epsilon$  denote the unit of  $(L, \cdot)$ . Let us denote  $\xi^\lambda = \epsilon/\xi$  and  $\xi^\rho = \xi \setminus \epsilon$  for any  $\xi \in L$ . The element  $\alpha' \in L$  is called the *cross inverse* of  $\alpha \in L$  if  $\alpha\xi \cdot \alpha' = \xi$  for any  $\xi \in L$ . In this case necessarily  $\alpha' = \alpha^\rho$  holds. Clearly, for any  $\alpha \in Z(Q)$  the element  $\alpha^\rho$  is the cross inverse of  $\alpha$ .

**Lemma.** *The right unit of  $\mathfrak{Q}_f$  has the shape  $(e_r, f(e_r, e_r)^\rho)$ . The function  $f : K \times K \rightarrow L$  satisfies*

- (a)  $f(x, e_r) = f(e_r, e_r)$  for any  $x \in K$ ,
- (b)  $f(e_r, e_r)^\rho$  is the cross inverse of  $f(e_r, e_r)$ .

In the following we will consider  $f$ -extensions  $\mathfrak{Q}_f$  satisfying conditions (a) and (b) of the previous Lemma.

**Proposition.** *An element  $(n, \nu) \in \mathfrak{Q}_f$  belongs to the right nucleus  $N_r(\mathfrak{Q}_f)$  of  $\mathfrak{Q}_f$  if and only if the following conditions hold:*

- (i)  $n \in N_r(K)$  and  $f(e_r, n) = f(e_r, e_r)$ ,
- (ii)  $f(y, n)\nu$  belongs to the right nucleus of the loop  $(L, \cdot)$  for any  $y \in K$  and  $\rho_{f(y, n)\nu} = \lambda_{f(y, n)} \circ \rho_\nu$  holds for any  $y \in K$ ,
- (iii) the equality  $\lambda_{f(x, y)} \circ \lambda_{f(xy, n)} = \lambda_{f(x, yn)} \circ \lambda_{f(y, n)}$  holds any  $x, y \in K$ ,
- (iv) for any  $(n, \nu) \in N_r(\mathfrak{Q}_f)$  the element  $(e_r, \nu)$  belongs to  $N_r(\mathfrak{Q}_f)$ , too.

Putting  $n = e_r$  in the previous Proposition we get

**Corollary.** *An element  $(e_r, \nu)$  is contained in  $\varphi_f^{-1}(e_r) \cap N_r(\mathfrak{Q}_f)$  if and only if  $f(e_r, e_r)\nu \in N_r(L)$  and  $\rho_{f(e_r, e_r)\nu} = \lambda_{f(e_r, e_r)} \circ \rho_\nu$  hold.*

**Corollary.** *Assume that  $f(e_r, e_r) \in N_r(L)$ . An element  $(n, \nu)$  belongs to the right nucleus  $N_r(\mathfrak{Q}_f)$  if and only if the following conditions hold:*

- (i)  $n \in N_r(K)$  and  $f(e_r, n) = f(e_r, e_r)$ ,
- (ii)  $\nu \in N_r(L)$  and  $f(e_r, e_r) \in C(L)$ ,
- (iii)  $f(y, n) \in N_r(L) \cap C(L)$  for any  $y \in K$ ,
- (iv)  $\lambda_{f(x, y)} \circ \lambda_{f(xy, n)} = \lambda_{f(x, yn)} \circ \lambda_{f(y, n)}$  for any  $x, y \in K$ .

Particularly,  $(e_r, \nu) \in N_r(\mathfrak{Q}_f)$  if and only if (ii) holds.

Now we study  $f$ -extensions with different nuclear properties.

Let  $\mathfrak{Q}_f = (K \times L, \circ)$  be an  $f$ -extension of a loop  $(L, \cdot)$  by a quasigroup  $(K, \cdot)$  and let  $\tilde{\mathfrak{Q}}_f = (H \times M, \circ) \subset \mathfrak{Q}_f$  be an  $f$ -subextension of the subloop  $M \subset L$  by the subquasigroup  $H \subset K$ .

**Theorem.** Let  $\tilde{\mathfrak{Q}}_{\tilde{f}} = (H \times M, \circ) \subset \mathfrak{Q}_f$  be an  $f$ -subextension of the subloop  $M \subset L$  by the subquasigroup  $H \subset K$ . The subquasigroup  $\tilde{\mathfrak{Q}}_{\tilde{f}} = (H \times M, \circ) \subset \mathfrak{Q}_f$  of  $\mathfrak{Q}_f = (K \times L, \circ)$  is right nuclear if and only if

- (i)  $H \subset N_r(K)$  and  $f(e_r, h) = f(e_r, e_r)$  for all  $h \in H$ ,
- (ii)  $M \subset N_r(L)$  and  $f(y, h) \in N_r(L) \cap C(L)$  for any  $y \in K$ ,  $h \in H$ ,
- (iii)  $\lambda_{f(x,y)} \circ \lambda_{f(xy,h)} = \lambda_{f(x,yh)} \circ \lambda_{f(y,h)}$  for any  $x, y \in K$  and  $h \in H$ .

Since  $e_r \in K$  is an idempotent element the subset  $\mathfrak{N} = \{(e_r, \nu); \nu \in N_r(L)\}$  is a subquasigroup of  $\mathfrak{Q}_f$ . Applying the previous theorem to the trivial subgroup  $H = \{e_r\} \subset K$  and to the right nucleus  $M = N_r(L)$  we get the following

**Corollary.** The subquasigroup  $\mathfrak{N}$  is right nuclear in  $\mathfrak{Q}_f$  if and only if  $f(e_r, e_r) \in N_r(L) \cap C(L)$ .

Let  $(H, \cdot)$  be a subquasigroup of  $(K, \cdot)$  and consider the  $f$ -subextension  $\tilde{\mathfrak{Q}}_{\tilde{f}} = (\varphi_f^{-1}(H), \circ) = (H \times L, \circ) \subset \mathfrak{Q}_f$  of the loop  $(L, \cdot)$  by the subquasigroup  $(H, \cdot)$ .

**Corollary.** The subquasigroup  $\varphi_f^{-1}(H)$  is right nuclear in  $\mathfrak{Q}_f$  if and only if

- (i)  $H \subset N_r(K)$  and  $f(e_r, h) = f(e_r, e_r)$  for all  $h \in H$ ,
- (ii)  $(L, \cdot)$  is a group and  $f(y, h)$  is contained in the center  $Z(L)$  for any  $y \in K$ ,  $h \in H$ ,
- (iii)  $f(x, y)f(xy, h) = f(x, yh)f(y, h)$  for any  $x, y \in K$  and  $h \in H$ .

This assertion implies for trivial subquasigroup  $H = \{e_r\}$  the following

**Theorem.** An  $f$ -extension  $\mathfrak{Q}_f$  is right nuclear if and only if  $(L, \cdot)$  is a group and  $f(e_r, e_r)$  is contained in the center  $Z(L)$ .

If the nucleus  $N(\mathfrak{Q}_f)$  of  $\mathfrak{Q}_f$  is non-empty, then  $\mathfrak{Q}_f$  has a unit and hence it is a loop. Consequently, its homomorphic image  $(K, \cdot)$  is also a loop.

**Corollary.** An  $f$ -extension  $\mathfrak{Q}_f$  of a loop  $(L, \cdot)$  by a quasigroup  $(K, \cdot)$  is nuclear if and only if

- (A)  $(K, \cdot)$  is a loop (with unit  $e \in K$ ) and  $(L, \cdot)$  is a group,
- (B)  $f(e, x) = f(x, e) = f(e, e)$  for all  $x \in K$  and this element is contained in the center  $Z(L)$ .

**Remark.** A nuclear  $f$ -extension  $\mathfrak{Q}_f$  is a central extension if and only if the group  $(L, \cdot)$  is abelian.

Let  $\mathfrak{Q}_f$  be a right nuclear  $f$ -extension, i. e.  $(L, \cdot)$  is a group and  $f(e_r, e_r)$  is contained in the center  $Z(L)$  of  $(L, \cdot)$ . Let  $\mathfrak{Q}_f^*$  be the  $f^*$ -extension defined by the function  $f^*(x, y) = f(x, y)f(e_r, e_r)^{-1}$  and the corresponding multiplication  $(x, \xi) * (y, \eta) = (xy, f(x, y)f(e_r, e_r)^{-1}\xi\eta)$  on  $K \times L$ . Clearly, the quasigroups  $\mathfrak{Q}_f$  and  $\mathfrak{Q}_f^*$  are isomorphic with respect to the isomorphism  $(x, \xi) \mapsto (x, f(e_r, e_r)^{-1}\xi)$ . Hence we may normalize the function  $f : K \times K \rightarrow L$  by the assumption  $f(x, e_r) = f(e_r, e_r) = \epsilon$ .

**Proposition.** Let  $\mathfrak{Q}_f$  be an  $f$ -extension of a group  $(L, \cdot)$  by a quasigroup  $(K, \cdot)$  with right unit  $e_r$  satisfying  $f(x, e_r) = \epsilon$  for all  $x \in K$ .  $\mathfrak{Q}_f$  has the right inverse property if and only if

- (i) the quasigroup  $(K, \cdot)$  has the right inverse property,
- (ii) there exists a function  $\mu : K \rightarrow Z(L)$  such that for any  $x, y \in K$   $\mu(y) = f(xy, \iota(y))f(x, y)$  holds, where  $\rho_{\iota(x)} = \rho_x^{-1}$ .

Let  $\Gamma$  be the permutation group acting on the set  $K \times K$  generated by the bijection  $\phi : (x, y) \mapsto (xy, \iota(y)) : K \times K \rightarrow K \times K$ . Since the map  $\phi$  is an involution, the group  $\Gamma$  has order 2. The orbit  $\Gamma(x, y) = \{(x, y), (xy, \iota(y))\}$  consists of one point if and only if  $y = e_r$ , in the case  $y \neq e_r$  the orbit  $\Gamma(x, y)$  consists of two different points. We denote by  $(K \times K)/\Gamma$  the set of orbits of  $\Gamma$  in  $K \times K$ .

**Corollary.** Let  $(L, \cdot)$  be a group and  $(K, \cdot)$  be a quasigroup with right inverse property. Let be given a map  $\mu : K \rightarrow Z(L)$ , a choice function  $c : (K \times K)/\Gamma \rightarrow K \times K : \gamma \mapsto c(\gamma) \in \gamma$  of orbits of  $\Gamma$  in  $K \times K$  and a function  $\nu : (K \times K)/\Gamma \rightarrow L$  satisfying  $\nu(\{(x, e_r)\}) = \epsilon$  for all  $x \in K$ . Then the function  $f : K \times K \rightarrow L$  is determined by the conditions

- (i)  $f(c(\gamma)) = \nu(\gamma)$  for any  $\gamma \in (K \times K)/\Gamma$ ,
- (ii)  $f(\phi(x, y)) = \mu(y)f(x, y)^{-1}$  for any  $x, y \in K$

yields an  $f$ -extension  $\mathfrak{Q}_f$  with right inverse property. Conversely, any right nuclear  $f$ -extension with right inverse property can be obtained by the previous construction.

Now, let  $(K, \cdot)$  be an involutorial right Bol loop with unit  $e \in K$ . Then we have

**Theorem.** *Let  $\mathfrak{Q}_f$  be an  $f$ -extension of a group  $(L, \cdot)$  by an involutorial right Bol loop  $(K, \cdot)$  such that  $f(x, e) = \epsilon$  for any  $x \in K$ . The  $f$ -extension  $\mathfrak{Q}_f$  is right alternative if and only if  $\mathfrak{Q}_f$  is a loop with right inverse property. In this case the  $f$ -extension  $\mathfrak{Q}_f$  is nuclear.*

## 4 Regular permutations

In this chapter we investigate  $f$ -extension of proper quasigroups. If a quasigroup has non-empty right or left nucleus, then it has right or left unit element, respectively. V.D. Belousov introduced the notions of right and left regular permutations which can be used for the measure of the near-associativity of quasigroups having neither right nor left unit element. In the case if the quasigroup has right or left unit element, then the right or left regular permutations coincide with right or left translations by elements of the right or left nuclei, respectively. Hence the notions of regular permutations can be considered as natural generalizations of the notions of nuclei. These are published in [28].

For the investigation of groups of right or left regular permutations we use the methods of extension theory. Now, we investigate quasigroup extensions having empty nuclei and describe their groups of left or right regular permutations. We give conditions under which the orbits of the groups of right or left regular permutations are contained in the kernels of the homomorphism associated with the extension. This construction alerts us quasigroups with prescribed groups of right or left regular permutations of different sizes.

**Lemma.** *A bijection  $\rho : (x, \xi) \mapsto (\rho_1(x, \xi), \rho_2(x, \xi)) : K \times Q \rightarrow K \times Q$  is a right-regular permutation of an  $f$ -extension  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$  if and only if*

- (i)  $\rho_1$  is constant on the equivalence classes of the extension and induces a right-regular permutation  $\rho_1 : K \rightarrow K$  of the quasigroup  $(K, \cdot)$ ,
- (ii)  $\rho_2$  satisfies

$$\rho_2(xy, f(x, y) \cdot \xi\eta) = f(x, \rho_1(y, \eta)) \cdot \xi\rho_2(y, \eta)$$

for all  $x, y \in K, \xi, \eta \in Q$ .

**Remark.** *If the group of right-regular permutations of a quasigroup  $(K, \cdot)$  is trivial, then the orbits of the group of right-regular permutations of the  $f$ -extension  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$  are contained in the congruence classes of the extension.*

This result motivates the investigation of extensions by quasigroups which have trivial group of right-regular permutations. Quasigroups with trivial right-regular permutation groups form a wide class. For example, idempotent quasigroups have this property, since if a quasigroup  $(K, \cdot)$  is idempotent and a map  $\phi : K \rightarrow K$  satisfies  $x\phi(x) = \phi(x^2)$  for any  $x \in K$ , then  $x\phi(x) = \phi(x)^2$  and hence  $\phi(x) = x$ . Many constructions of idempotent quasigroups are given in [21], Sections 9 and 10 by the study of the core of Bol loops.

**Theorem.** *Assume that the group of right-regular permutations of the quasigroup  $(K, \cdot)$  is trivial and  $(Q, \cdot)$  is a loop. A map  $\rho : \mathfrak{Q}_f \rightarrow \mathfrak{Q}_f$  is a right-regular permutation of the  $f$ -extension  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$  if and only if it has the shape  $\rho = (id, \rho_\nu)$ , where  $\nu \in N_r(Q)$ .*

**Corollary.** *The group of the right-regular permutations of the quasigroup  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$  is isomorphic with the right nucleus of  $(Q, \cdot)$ .*

**Corollary.** *If the right nucleus  $N_r(Q)$  is a normal subgroup, then the equivalence relation induced by the orbits of the right-regular permutation group  $R(\mathfrak{Q}_f)$  is a normal congruence.*

**Corollary.** *If  $(K, \cdot)$  is an idempotent quasigroup and the right nucleus of  $(Q, \cdot)$  is a normal subgroup, then the orbits of the right-regular permutation group are normal subquasigroups of the kernel quasigroups of the extension.*

Similarly to the right regular case we have

**Lemma.** *A bijection  $\lambda : (x, \xi) \mapsto (\lambda_1(x, \xi), \lambda_2(x, \xi)) : K \times Q \rightarrow K \times Q$  is a left-regular permutation of an  $f$ -extension  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$  if and only if*

(i)  $\lambda_1$  is constant on the equivalence classes of the extension and induces a left-regular permutation  $\lambda_1 : K \rightarrow K$  of the quasigroup  $(K, \cdot)$ ,

(ii)  $\lambda_2$  satisfies

$$\lambda_2(xy, f(x, y) \cdot \xi\eta) = f(\lambda_1(x, \xi), y) \cdot \lambda_2(x, \xi)\eta$$

for all  $x, y \in K, \xi, \eta \in Q$ .

**Theorem.** *Assume that the group of left-regular permutations of the quasigroup  $(K, \cdot)$  is trivial and  $(Q, \cdot)$  is a loop. A map  $\lambda : K \times Q \rightarrow K \times Q$  is a left-regular permutation of the  $f$ -extension  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$  if and only if it has the shape  $(x, \xi) \mapsto (x, \nu(x)\xi)$ , where  $\nu$  is a mapping  $\nu : K \rightarrow N_l(Q)$  satisfying*

$$(1) \quad \nu(xy)f(x, y) = f(x, y)\nu(x) \quad \text{and} \quad \lambda_{f(x, y)\nu(x)} = \lambda_{f(x, y)}\lambda_{\nu(x)}$$

for any  $x, y \in K$ .

Let  $F$  denote the subloop of  $(Q, \cdot)$  the element of which commute with all  $f(x, y)$ ;  $x, y \in K$ . The previous theorem yields the following

**Corollary.** *The map  $\lambda = (id, \lambda_\nu)$  is a left regular permutation of the  $f$ -extension  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$  if  $\nu \in N_l(Q) \cap F$  and  $\lambda_{f(x,y)\nu} = \lambda_{f(x,y)}\lambda_\nu$  for any  $x, y \in K$ .*

**Theorem.** *Assume that the group of left-regular permutations of the quasi-group  $(K, \cdot)$  is trivial,  $(Q, \cdot)$  is a loop and there exists  $k \in K$  such that  $f(k, y) = \kappa$  is constant for any  $y \in K$  with  $\kappa \in F$ . A map  $\lambda : K \times Q \rightarrow K \times Q$  is a left-regular permutation of the  $f$ -extension  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$  if and only if  $\lambda = (id, \lambda_\nu)$ , where  $\nu \in N_l(Q) \cap F$  and  $\lambda_{f(x,y)\nu} = \lambda_{f(x,y)}\lambda_\nu$  for any  $x, y \in K$ .*

**Theorem.** *Assume that the group of left-regular permutations of the quasi-group  $(K, \cdot)$  is trivial and the loop  $(Q, \cdot)$  has the cross inverse property. A map  $\lambda : K \times Q \rightarrow K \times Q$  is a left-regular permutation of the  $f$ -extension  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$  if and only if  $\lambda = (id, \lambda_\nu)$ , where  $\nu \in N_l(Q)$  and  $\lambda_{f(x,y)\nu} = \lambda_{f(x,y)}\lambda_\nu$  for any  $x, y \in K$ .*

## Bevezetés

A csoportokra jól ismert Schreier-féle bővítés elmélet értelmében, két adott csoportból kiindulva egy új csoport készíthető oly módon, hogy a kapott csoport az elsőt normálosztóként tartalmazza, illetve amelyre vonatkozó faktorcsoporthoz izomorf a másik csoporttal. Ez a konstrukció az alábbi egzakt sorozattal írható le:

$$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Legyenek  $G$  és  $\Gamma$  adott csoportok, a  $\mathfrak{G}$  csoport a  $\Gamma$  bővítése  $G$ -vel, ha a  $G \times \Gamma$  halmazon egy művelet a következő módon van definiálva

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, f(a, b) \cdot \alpha^{T(b)} \cdot \beta),$$

ahol  $T : G \longrightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  és  $f : G \times G \longrightarrow \Gamma$  leképezésekre teljesül

1.  $f(1, a) = f(a, 1) = 1$ ;
2.  $T(a)^{-1}T(b)^{-1}f(a, b)T(ab)f(a, b)^{-1} = 1$ ;
3.  $f(b, c)f(a, bc) = f(a, b)^{T(c)}f(ab, c)$ ;

minden  $a, b, c \in G$  esetén.

A legegyszerűbb esetben, amikor mind  $T$  mind  $f$  triviális, a  $\mathfrak{G}$  csoport a  $\Gamma$  és  $G$  csoportok direkt szorzata. Ha az  $f$  faktor rendszer triviális és a  $T$  leképezés nem triviális, akkor  $\mathfrak{G}$  a  $\Gamma$  és  $G$  csoportok szemidirekt szorzata. Ha  $T$  triviális és  $f$  nemtriviális, akkor a művelet a következő alakot ölti

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, f(a, b) \cdot \alpha \cdot \beta),$$

ezt az esetet  $f$ -bővítésnek fogjuk nevezni.

Hasonló konstrukció adható meg loopok és kvázicsoporthoz bővítéseire a megfelelő változtatásokkal, ám az asszociativitás hiánya folytán olyan drasztikus változás áll be, hogy általános bővítéselmélet nem létezik. Az utóbbi időben gyakran alkalmazzák ezen struktúrák bővítéseit eltérő interpretációban [3], [11], [14], [16], [17], [18].

Csoportok loopokkal történő loop bővítéseit áttekintően, rendszerezve taglalja Nagy Péter és Karl Strambach [22] munkája, melynek eszméjét követve loopok és kvázicsoporthoz  $f$ -bővítéseit vizsgáljuk ezen disszertációban az alábbi egzakt sorozatok szerint

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathfrak{L} \longrightarrow L \longrightarrow 1$$

illetve

$$Q \longrightarrow \mathfrak{Q} \longrightarrow K,$$

ahol  $\Lambda$ ,  $L$  loop és  $K$ ,  $Q$  kvázicsoporthoz.

## 2 Centrális bővítés

A második fejezetben egy centrális loop bővítést vizsgálunk, amelynek kombinatorikai háttere van. Egy bővítést centrálisnak nevezünk, ha a hozzá tartozó homomorfizmus magja centrális részcsoporthoz tartozó. Mielőtt a vizsgálatára térnénk, tekintsük ezt a kombinatorikai hátteret és meghatározzuk az eltolásai által generált csoportot. A fejezet első részének eredményei megtalálhatóak a [26]-ben.

Legyen  $\mathfrak{S}$  egy Steiner-hármasrendszer, azaz egy  $(n, 3, 1)$ -illeszkedési rendszer. A pontjainak halmazán bevezetünk egy műveletet a következőképpen:  $a * b = c$  akkor és csak akkor, ha  $(a, b, c)$  egy blokk és  $a * a = a$ . Erre a műveletre vonatkozóan az  $a * y = c$  és  $x * b = c$  egyenletek egyértelműen megoldhatóak ami azt jelenti, hogy  $(\mathfrak{S}, *)$  kvázicsoporthoz tartozik. A pontok szerepe a blokkon belül szimmetrikus, ezért  $a * b = b * a$ ,  $a * (a * b) = b$  is teljesül és ezzel együtt  $Q(\mathfrak{S}) := (\mathfrak{S}, *)$  totálisan szimmetrikus idempotens kvázicsoporthoz tartozik, *Steiner kvázicsoporthoz*.

Ha a Steiner-hármasrendszer pontjainak halmazát kibővítjük egy  $e$ -vel jelölt szimbólummal  $S := \mathfrak{S} \cup \{e\}$  és az előző műveletet annyiban módosítjuk, hogy  $a * a = e$ ,  $a * e = e * a = a$ , akkor  $S(\mathfrak{S}) := (S, *)$  egy totálisan szimmetrikus, 2 exponensű, egységelemes kvázicsoporthoz tartozik, azaz egy *Steiner loop* [25], Chap.V.

A Steiner-kvázicsoporthoz és a Steiner-loop ugyanannak a struktúrájának két arca, és egyformán viselkednek mindaddig, amíg az egységelem nem jut lényeges szerephez. Például a Steiner-hármasrendszer automorfizmus csoportja izomorf a belőle származtatott Steiner-kvázicsoporthoz és Steiner-loop automorfizmus csoportjával:  $Aut(\mathfrak{S}) \cong Aut(Q(\mathfrak{S})) \cong Aut(S(\mathfrak{S}))$ . Mielőtt megnevezzük az egységelem szerepe a helyzet drasztikusan megváltozik, például ha  $\mathfrak{S}$  egy Hall-rendszer (olyan Steiner-hármasrendszer, amelyben bármely három nemkollineáris pont az affín síkot generálja), akkor  $Q(\mathfrak{S})$ -ban teljesül az  $(xy)z = (xz)(yz)$  azonosság, ami egy záródási tulajdonság az affín síkon, míg  $S(\mathfrak{S})$ -ban nem, amely közvetlenül adódik, ha az  $x$  helyére  $e$ -t írunk. Egy másik példa, az eltolások által generált csoport Hall-rendszerek esetén a kvázicsoporthoz tartozó feloldható [12] és [3], 86 o., míg a loopnál nemfeloldható.

Egy  $S(\mathfrak{S})$  Steiner loop csoport, akkor és csak akkor, ha bármely 3 nemkollineáris pontja a Fano-síkot generálja [7], Corollary 1, 251. o., így egy projektív térből származó Steiner-loop eltolás csoportja egy elemi Abel-2-csoport. Arra az esetre amikor a Steiner-loop nem projektív térből származik a következő eredményt kaptuk:

**Tétel.** *Legyen  $\mathfrak{S}$   $n - 1$  elemű,  $S(\mathfrak{S})$  illetve  $Q(\mathfrak{S})$  a belőle származtatott Steiner-loop illetve Steiner-kvázicsoporthoz tartozik. Ha  $Q(\mathfrak{S})$  két különböző eltolásának*

szorzata páratlan rendű, akkor a  $S(\mathfrak{S})$  eltolásai által generált csoport az  $A_n$  vagy az  $S_n$ , attól függően, hogy  $n$  osztható-e 4-gyel vagy nem.

**Megjegyzés.** Minden Hall-rendszerből származó Steiner-kvázicsoport eleget tesz a Tétel feltételének.

A tétel alkalmazható további nem Hall-rendszerekből származó Steiner-loopokra, például tekintsük a következő konstrukciót [9], 2.1., 291. o.: Legyen  $C$   $\frac{4^n-1}{3}$ -rendű ciklikus csoport, legyen  $\mathfrak{S} := C_0 \cup C_1 \cup C_2$ , ahol  $C_i = C$  ( $i = 0, 1, 2$ ) és ha  $x \in C$  a  $C_i$  példányban van, akkor jelöljük  $x_i$ -vel, ezek alkossák a Steiner-hármas rendszer pontjait és a blokkjai legyenek

- $\{x_0, x_1, x_2\}$  halmazok  $x_0 = x_1 = x_2 = x \in C$
- $\{x_0, y_0, z_1\}, \{x_1, y_1, z_2\}, \{x_2, y_2, z_0\}$ ,  
ahol  $x, y, z \in C : x \neq y, xy = z^2$ .

**Megjegyzés.** Legyen  $C$   $\frac{4^n-1}{3}$  ( $n > 1$ ) rendű ciklikus csoport és legyen  $Q(\mathfrak{S}_C)$  a  $C$ -ből a fenti konstrukció által készített Steiner-hármasrendszerhez tartozó Steiner-kvázicsoport. Ekkor a  $Q(\mathfrak{S}_C)$ -hez tartozó  $S(\mathfrak{S}_C)$  Steiner-loop eltolásai által generált csoport az  $A_{4^n}$  alternáló csoport.

A fejezet második részében tekintjük a másodrendű ciklikus csoport alábbi  $f$ -bővítését Steiner-loopokkal:

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow L \longrightarrow S \longrightarrow 1$$

a következőképpen az

$$S \times C_2 = \{(a, \epsilon) : a \in S, \epsilon \in C_2\}$$

halmazon definiáljunk egy műveletet az alábbi módon

$$(a_1, \epsilon_1) \circ (a_2, \epsilon_2) = (a_1 a_2, \epsilon_1 \epsilon_2 f(a_1, a_2)),$$

ahol az  $f : S \times S \longrightarrow C_2$  leképezés a bővítés faktor rendszere. Ebben a bővítésben az automorfizmusok identitások, így a bővítést az  $f$  függvény határozza meg, ezért ezeket  $f$ -bővítéseknek nevezzük. Az  $(a, \alpha) \circ (x, \xi) = (b, \beta)$  és  $(x, \xi) \circ (a, \alpha) = (b, \beta)$  egyenletek egyértelműen megoldhatóak, így  $(L, \circ)$  egy kvázicsoport. Ha a faktor rendszerre előírjuk, hogy  $f(a, e) = f(e, a) = 1$  minden  $a \in S$ , akkor  $(e, 1)$  az egységeleme lesz, azaz egy loopot kapunk. A kapott  $L$  loop minden további tulajdonságát az  $f$  faktor rendszer határozza meg. Már a legegyszerűbb esetben, amikor a másodrendű csoportot azzal a négyelemű Steiner-looppal bővítjük, amelyik a negyedrendű elemi

Abel-2-csoport, loopok egy széles osztályát kapjuk különböző gyenge asszociativitási tulajdonságokkal. A legismertebb példák a kód loopok ([13], [15]) és a C-loopok ([17]). A további vizsgálatainkat azokra az  $L$   $f$ -bővítésekre szorítjuk, amelyek faktor rendszerére  $f(x, y) = -f(y, x) \forall x \neq y \in S \setminus \{e\}$  és  $f(x, x) = 1$  ill  $-1$  minden  $y \in S \setminus \{e\}$ -ra teljesül. Ugyanis az így kapott loopok kombinatorikai tartalommal bírnak. Az erre vonatkozó eredmények [27]-ban vannak ismertetve.

Ha egy Steiner-hármasrendszer minden blokkján adott egy ciklikus rendezés, akkor irányított Steiner-hármasrendszerrel beszélünk. Minden irányított Steiner-hármasrendszerhez rendelhetünk egy  $f : (\mathfrak{S}, T) \times (\mathfrak{S}, T) \longrightarrow \{\pm 1\}$  irányítás függvényt oly módon, hogy ha  $(a_1, a_2, a_3)$  egy irányított blokk, akkor  $f(a_1, a_2) = 1$  és  $f(a_2, a_1) = -1$ . Ezek ismeretében definiálhatjuk a következő fogalmat

**Definíció.** *Irányított Steiner-loopnak nevezünk egy olyan  $L$  bővítést, amelyhez létezik egy  $(\mathfrak{S}, T)$  irányított Steiner-hármasrendszer úgy, hogy a bővítésbeli  $S$  Steiner-loop egységelemtől különböző elemei az  $\mathfrak{S}$  pontjai és a bővítés faktor rendszerének leszűkítése az  $(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}) \setminus \{(x, x), x \in \mathfrak{S}\}$ -ra megegyezik az  $(\mathfrak{S}, T)$  irányítás függvényével, továbbá  $f(x, x) = -1$  vagy  $f(x, x) = 1$  minden  $x \in S \setminus \{e\}$ -re.*

Ha az  $L$  irányított Steiner-loop exponense 4 illetve 2, akkor a centruma másodrendű illetve triviális.

**Tétel.** *Minden  $L$  irányított Steiner-loop flexibilis.*

*Az  $L$  irányított Steiner-loop inverz tulajdonságú akkor és csak akkor, ha a centrumán kívüli elemek rendje 4.*

*Az  $L$  irányított Steiner-loop cross és automorf inverz tulajdonságú de sem bal- sem jobbinverz tulajdonságú pontosan akkor, ha az exponense 2.*

Ezek után egy irányított Steiner-loop asszociativitására az alábbi eredményt kapjuk

**Tétel.** *Egy irányított Steiner-loop pontosan akkor csoport, ha a 8-ad rendű kvaternió csoport.*

A továbbiakban jelölje  $\hat{G}$ ,  $\hat{G}_l$  és  $\hat{G}_r$  rendre az  $L$  loop összes-, bal- és jobb-eltolásai által generált csoportot. Ahhoz, hogy ezeket le tudjuk írni, be kell vezetnünk egy leképezést, legyen  $\tau_a : L \longrightarrow L$  ( $a \in S \setminus \{e\}$ ),  $\tau_a : (y, \epsilon) \mapsto (y, \epsilon)$   $y \in \{e, a\}$ ,  $\epsilon \in \{1, -1\}$ ;  $\tau_a : (x, \epsilon) \mapsto (x, -\epsilon)$   $a \neq x \in S \setminus \{a, e\}$ ,  $\epsilon \in \{1, -1\}$ .

**Tétel.** *Ha az  $L$  irányított Steiner-loop egy  $n$  elemű  $S$  Steiner-loop-hoz tartozik, akkor  $\hat{G}$  normális részcsoportha  $\Theta = \langle \tau_a, a \in S \rangle$ , a  $2^{n-1}$ -ed vagy a  $2^{n-2}$ -ed rendű elemi Abel-2-csoport attól függően, hogy  $n$  páratlan vagy páros és a  $\hat{G}/\Theta$  faktorcsoportha izomorf  $\hat{G}_l$ -al és  $\hat{G}_r$ -al.*

**Következmény.** A  $\hat{G}_l$  és  $\hat{G}_r$  csoportok izomorfak.

Az irányított Steiner-hármasrendszer automorfizmusaira vonatkozóan

**Állítás.** Irányított Steiner-hármasrendszerek automorfizmus csoportja páratlan rendű.

**Állítás.** Legyen  $U$  egy  $\mathfrak{S}$  Steiner-hármasrendszer páratlan rendű automorfizmus csoportja. Ekkor létezik irányított Steiner-hármasrendszer, amelynek  $U$  automorfizmus csoportja.

**Megjegyzés.** Legyen  $(\mathfrak{S}, T)$  egy véges irányított Steiner-hármasrendszer  $K$  automorfizmus csoporttal és legyen  $K_0$  olyan valódi részcsoportha  $K$ -nak, hogy a  $K$  egy  $B$  blokk orbitja a  $K_0$   $B_1, \dots, B_m$  különböző orbitjaira bomlik fel. Ekkor létezik egy  $(\mathfrak{S}, T_0)$  irányított Steiner-hármasrendszer úgy, hogy  $K_0$  automorfizmusokból áll, de  $K$  nem automorfizmus csoportja.

Az irányított Steiner-hármasrendszer automorfizmus csoportjának ismeretében leírhatjuk a hozzá tartozó irányított Steiner-loop automorfizmus csoportját.

**Tétel.** Egy  $L$  irányított Steiner-loop automorfizmus csoportja, az irányított Steiner-hármasrendszer automorfizmus csoportjának szemidirekt szorzata egy olyan normális elemi Abel-2-csoporttal, amely az  $L/A$  faktorloopen az identitást indukálja és az  $S \rightarrow \mathbb{Z}_2$  homomorfizmusok halmazához tartozik.

A továbbiakhoz be kell vezetnünk egy újabb fogalmat:

**Definíció.** Legyen  $\mathfrak{S}$  egy Steiner-hármasrendszer. Egy  $\mathfrak{K}$  valódi részrendszerét blokád részrendszernek nevezzük, ha  $\mathfrak{S}$  minden nem  $\mathfrak{K}$ -beli blokkja  $\mathfrak{K}$ -t egy pontban metszi.

**Tétel.** Az  $\mathfrak{S}$  Steiner-hármasrendszer blokád részrendszerei és az  $L$  irányított Steiner-loop azon automorfizmusai között, amelyek  $\mathfrak{S}$ -en az identitást indukálják, bijekció létezik.

**Tétel.** Legyen  $\Gamma$  az  $(\mathfrak{S}, T)$  irányított Steiner-hármasrendszerhez tartozó  $L$  irányított Steiner-loop automorfizmus csoportja.

Ha  $\mathfrak{S}$  egy a  $GF(3)$  test feletti affin tér, akkor a  $\Delta$  csoport triviális és  $\Gamma$  izomorf  $(\mathfrak{S}, T)$  automorfizmus csoportjával.

Ha  $\mathfrak{S}$  egy  $n$  dimenziós projektív tér a  $GF(2)$  test felett, akkor  $\Delta$  a  $2^n$ -ed rendű elemi Abel-2-csoport.

**Következmény.** *Egy nyolcadrendű irányított Steiner-loop automorfizmus csoportja izomorf az  $A_4$  alternáló csoporttal.*

Az irányított Steiner-loopok izomorfiáinak vizsgálatánál előbukkan egy leképezés, aminek az izomorfia eldöntésében nagy szerepe van, tekintsük ezt a leképezést.

Az  $L$  irányított Steiner-loop  $v$  értékelése egy  $S \rightarrow \{1, -1\}$  leképezés, amelyre  $v(e) = 1$ , ahol  $e$  az  $S$  loop egységeleme. Egyazon  $S$  Steiner-loophoz tartozó  $f_1$  illetve  $f_2$  függvény által meghatározott  $L_1$  illetve  $L_2$  irányított Steiner-loopok esetén egy  $v$  értékelést kompatibilisnek mondunk az  $(f_1, f_2)$  párral, ha  $v(a)v(b)f_1(a, b) = v(ab)f_2(a, b)$  minden  $a, b \in S$ . Az  $(f_1, f_2)$  párral kompatibilis értékelések, illetve az  $L_1$  és  $L_2$  loopok azon izomorfizmusai között, melyek az  $\mathfrak{S}$ -n az identitást indukálják, egyértelmű megfeleltetés van.

Ennek ismeretében az izomorfia kérdésére a következőket kapjuk:

**Lemma.** *Az  $L_{f_i}$  ( $i = 1, 2$ ) loopok, amelyek  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) faktor rendszereire  $f_1(x, y) = -f_2(x, y)$  minden különböző  $x, y \in S \setminus \{e\}$  és  $f_1(x, x) = f_2(x, x)$ , izomorfak. Az  $(x, \epsilon) \mapsto (x, -\epsilon)$  leképezés izomorfíát definiál.*

**Tétel.** *Legyenek  $L_1$  és  $L_2$  olyan azonos exponensű  $f_1$  és  $f_2$  faktor rendszerű irányított Steiner-loopok, hogy az  $L_1/A$  és  $L_2/A$  faktor loopok ugyanahhoz az  $\mathfrak{S}$  Steiner-hármasrendszerhez tartoznak. Ha az  $L_1$  és  $L_2$  loopokhoz tartozó  $(\mathfrak{S}, T_1)$  és  $(\mathfrak{S}, T_2)$  irányított Steiner-hármasrendszerek automorfizmus csoportjai megegyeznek, akkor  $L_1$  és  $L_2$  pontosan akkor izomorfak, ha  $S$  rendelkezik az  $(f_1, f_2)$  párral kompatibilis értékeléssel.*

**Tétel.** *Legyen  $L_1$  egy  $K$  automorfizmus csoportú irányított Steiner-loop. Ha  $\alpha$  az  $L_1$ -hez tartozó  $S$  Steiner-loop automorfizmusa, akkor létezik egy az  $L_1$ -gyel izomorf  $L_2$  irányított Steiner-loop, amelynek a  $K^\alpha$  konjugált csoport az automorfizmus csoportja.*

**Állítás.** *Az  $\mathfrak{S}$  Steiner-hármasrendszerhez tartozó azonos exponensű blokk tranzitív automorfizmus csoportú  $L_1$  és  $L_2$  irányított Steiner-loopok izomorfak.*

Ezek után vizsgáljuk, azokat az irányított Steiner-loopokat, amelyekhez tartozó  $\mathfrak{S}$  Steiner-hármasrendszer pont-egyenes sémája izomorf egy a  $GF(2)$  test feletti projektív geometriával, ezeket hívjuk projektív irányított Steiner-loopoknak. Ha az  $L$  rendje  $2^{n+1}$ , akkor az  $S$  és így az  $L$  automorfizmus csoportja egy páratlan rendű részcsoporthoz tartozó az  $SL(n, 2)$  csoportnak. Ennek folytán  $U$  feloldható részcsoporthoz tartozó az  $SL(n, 2)$ -nek.

Ha  $U$  a  $GF(2)$  test feletti  $n$  páros dimenziójú  $V$  vektortér automorfizmusainak feloldható csoportja úgy, hogy  $U$  páratlan rendű és tranzitívan hat a

nem-nulla vektorokon, akkor  $V$  beazonosítható  $GF(2^n)$  additív csoportjával és  $U$  mint permutáció csoport izomorf a  $\Sigma := \{x \mapsto ax; 0 \neq a \in GF(2^n)\}$  erősen tranzitív csoporttal, mivel  $GF(2^n)$  automorfizmus csoportja egy páros rendű ciklikus csoport (lsd. [24], Theorem 19.9, p. 246.).

**Állítás.** *Legyen  $L$  egy olyan 16-od rendű irányított projektív Steiner-loop, amely  $\Gamma$  automorfizmus csoportja tranzitívan hat a hozzá tartozó 2-od rendű  $\mathfrak{S}$  projektív sík egyenesein. Ekkor a  $\Gamma$  csoport szemidirekt szorzata, a  $\mathbb{Z}_2^3$ -al izomorf  $\Delta$  normális részcsoporthnak, a  $\Delta$ -n hűen ható 21-ed rendű csoporttal.*

**Következmény.** *Tetszőleges 4 exponensű 16-od rendű olyan irányított projektív Steiner-loop, amely automorfizmus csoportjának a rendje osztható 7-tel a 16-od rendű Moufang-loop.*

**Tétel.** *Egyetlen  $\geq 32$ -ed rendű és 4 exponensű irányított projektív Steiner-loop sem lehet Moufang-loop.*

**Következmény.** *Tetszőleges irányított projektív Steiner-loop, amelyik Bol-loop, izomorf a 16-od rendű Moufang-looppal.*

A fejezet utolsó részében az izomorfia kérdésének összetettségére világítunk rá abban az esetben, ahol az  $L_1$  illetve  $L_2$  irányított Steiner-loopok az  $f_1$  illetve  $f_2$  irányítás függvényű  $(\mathfrak{S}, T_1)$ , illetve  $(\mathfrak{S}, T_2)$  irányított Steiner-hármasrendszerből származnak. Továbbá automorfizmus csoportjuk konjugált csoportok  $\mathfrak{S}$  automorfizmus csoportjában. Ekkor feltehető, hogy  $L_1$ ,  $L_2$

automorfizmus csoportja ugyanazt a  $\Gamma$  automorfizmus csoportot indukálják. Az  $L_1$  és  $L_2$  loopok izomorfájának eldöntése az  $f_1$  és  $f_2$  függvények leszűkítéseinek vizsgálatát igényli a  $\Gamma$  csoport orbitjaira. Ezt a vizsgálatot illusztráljuk a 3-ad rendű affin illetve a 2-od rendű projektív síkból származó irányított Steiner-loopokra.

### 3 Nukleáris bővítés

Egy loop bővítést (jobb) nukleárisnak nevezünk, ha a bővítéshez tartozó homomorfizmus magja a bővítés (jobb) nukleuszában fekszik. A (jobb) nukleáris bővítéseket a loopok elméletében az elmúlt időszakban sokan vizsgálják és különböző konstrukciókhoz használják ([11], [14], [16], [17], [18], [21]). Az előforduló nukleáris bővítések nagyrészt centrálisak, kevés olyan példa ismert, amely nem centrális nukleáris bővítést ír le.

A harmadik fejezetben tetszőleges  $L$  loop  $f$ -bővítését,  $\mathfrak{Q}_f$ -t, vizsgáljuk tetszőleges  $K$  kvázicsoporttal és keressük azokat a feltételeket, amelyek esetén a

bővítésünk nukleáris lesz. A kapott eredmények segítségével olyan konstrukciót adunk meg, amely előre megadott jobb nukleuszú jobb inverz tulajdonságú kvázicsoportot eredményez. Mindezek megtalálhatóak [23]-ben.

A kapott  $\mathfrak{Q}_f$   $f$  bővítés egy kvázicsoport, amelynek ha az  $N_r(\mathfrak{Q}_f)$  jobb nukleusza nem üres, akkor ennek a részcsoportnak az egységeleme a  $\mathfrak{Q}_f$  kvázicsoport jobb egységeleme.

Bevezetjük a következő jelöléseket  $\xi^\lambda = \epsilon/\xi$  és  $\xi^\rho = \xi \setminus \epsilon$  bármely  $\xi \in L$ . Az  $\alpha' \in L$  elem az  $\alpha \in L$  cross inverze, azaz  $\alpha\xi \cdot \alpha' = \xi$  minden  $\xi \in L$  esetén, így tetszőleges  $\alpha \in Z(Q)$  elemre az  $\alpha^\rho$  a cross inverz eleme  $\alpha$ -nak.

**Lemma.** *A  $\mathfrak{Q}_f = (K \times L, \circ)$  bővítés jobb egységeleme  $(e_r, f(e_r, e_r)^\rho)$  alakú. Az  $f : K \times K \rightarrow L$  függvényre:*

- (a)  $f(x, e_r) = f(e_r, e_r)$  teljesül minden  $x \in K$ -ra,
- (b)  $f(e_r, e_r)^\rho$  az  $f(e_r, e_r)$  cross inverze.

A következőkben olyan  $\mathfrak{Q}_f$   $f$ -bővítéseket tekintünk, amelyekre az előző lemma (a) és (b) feltétele teljesül.

**Állítás.**  *$(n, \nu) \in \mathfrak{Q}_f$  a  $\mathfrak{Q}_f$  jobb nukleuszának  $N_r(\mathfrak{Q}_f)$ -nek egy eleme, akkor és csak akkor, ha a következő feltételek teljesülnek:*

- (i)  $n \in N_r(K)$  és  $f(e_r, n) = f(e_r, e_r)$ ,
- (ii)  $f(y, n)\nu$  az  $(L, \cdot)$  loop jobb nukleuszában van minden  $y \in K$  esetén és  $\rho_{f(y, n)\nu} = \lambda_{f(y, n)} \circ \rho_\nu$  bármely  $y \in K$ -ra,
- (iii)  $\lambda_{f(x, y)} \circ \lambda_{f(xy, n)} = \lambda_{f(x, yn)} \circ \lambda_{f(y, n)}$  minden  $x, y \in K$ ,
- (iv) bármely  $(n, \nu) \in N_r(\mathfrak{Q}_f)$  esetén  $(e_r, \nu) \in N_r(\mathfrak{Q}_f)$ .

**Következmény.** *Minden  $(e_r, \nu)$  elem akkor és csak akkor fekszik  $\varphi_f^{-1}(e_r) \cap N_r(\mathfrak{Q}_f)$ -ben, ha  $f(e_r, e_r)\nu \in N_r(L)$  és  $\rho_{f(e_r, e_r)\nu} = \lambda_{f(e_r, e_r)} \circ \rho_\nu$ .*

**Következmény.** *Tegyük fel, hogy  $f(e_r, e_r) \in N_r(L)$ . Egy  $(n, \nu)$  elem pontosan akkor eleme az  $N_r(\mathfrak{Q}_f)$  jobb nukleuszának, ha a következő feltételek teljesülnek:*

- (i)  $n \in N_r(K)$  és  $f(e_r, n) = f(e_r, e_r)$ ,
- (ii)  $\nu \in N_r(L)$  és  $f(e_r, e_r) \in C(L)$ ,
- (iii)  $f(y, n) \in N_r(L) \cap C(L)$  bármely  $y \in K$ -ra,
- (iv)  $\lambda_{f(x, y)} \circ \lambda_{f(xy, n)} = \lambda_{f(x, yn)} \circ \lambda_{f(y, n)}$  minden  $x, y \in K$  esetén.

Speciálisan,  $(e_r, \nu) \in N_r(\mathfrak{Q}_f)$  akkor és csak akkor, ha (ii) teljesül.

A jobb nukleusz struktúrájára, nukleáris tulajdonságaira vonatkozóan szükségünk van a részbővítés fogalmára.

Legyen  $(H, \cdot)$  részkvázicsoportja  $(K, \cdot)$ -nak és legyen  $(M, \cdot)$  részloopja  $(L, \cdot)$ -nek. Ha az  $f : K \times K \rightarrow L$  függvényre teljesül, hogy  $f(h_1, h_2) \in M$  minden  $h_1, h_2 \in H$ -ra és  $\tilde{f} : H \times H \rightarrow M$  az  $f : K \times K \rightarrow L$  leszűkítése  $H \times H$ -ra, akkor az  $\tilde{f}$ -bővítését  $\tilde{\mathfrak{Q}}_{\tilde{f}} = (H \times M, \circ)$   $(M, \cdot)$ -nek  $(H, \cdot)$ -vel  $\mathfrak{Q}_f = (K \times L, \circ)$   $f$ -részbővítésének nevezzük.

**Tétel.** Legyen  $\tilde{\mathfrak{Q}}_{\tilde{f}} = (H \times M, \circ) \subset \mathfrak{Q}_f$  egy  $f$ -részbővítése az  $M \subset L$  részloopnak a  $H \subset K$  részkvázicsoporttal.  $\mathfrak{Q}_f = (K \times L, \circ)$ -nek a  $\tilde{\mathfrak{Q}}_{\tilde{f}} = (H \times M, \circ) \subset \mathfrak{Q}_f$  részkvázicsoportja jobb nukleáris akkor és csak akkor, ha

- (i)  $H \subset N_r(K)$  és  $f(e_r, h) = f(e_r, e_r)$  minden  $h \in H$  esetén,
- (ii)  $M \subset N_r(L)$  és  $f(y, h) \in N_r(L) \cap C(L)$  minden  $y \in K$ ,  $h \in H$ ,
- (iii)  $\lambda_{f(x,y)} \circ \lambda_{f(xy,h)} = \lambda_{f(x,yh)} \circ \lambda_{f(y,h)}$  bármely  $x, y \in K$  és  $h \in H$ .

Mivel  $e_r \in K$  idempotens, az  $\mathfrak{N} = \{(e_r, \nu); \nu \in N_r(L)\}$  részkvázicsoportja  $\mathfrak{Q}_f$ -nek. Az előző tételt alkalmazva a  $H = \{e_r\} \subset K$  triviális részcsoporthoz és az  $M = N_r(L)$  jobb nukleuszra kapjuk, hogy

**Következmény.** Az  $\mathfrak{N}$  részcsoporthoz jobb nukleáris  $\mathfrak{Q}_f$ -ban akkor és csak akkor, ha  $f(e_r, e_r) \in N_r(L) \cap C(L)$ .

Legyen  $(H, \cdot)$  részkvázicsoportja  $(K, \cdot)$ -nak és tekintsük az  $(L, \cdot)$  loop  $f$ -részbővítését  $\tilde{\mathfrak{Q}}_{\tilde{f}} = (\varphi_f^{-1}(H), \circ) = (H \times L, \circ) \subset \mathfrak{Q}_f$ -t a  $(H, \cdot)$  részkvázicsoporttal.

**Következmény.** A  $\varphi_f^{-1}(H)$  részkvázicsoport pontosan akkor jobb nukleáris  $\mathfrak{Q}_f$ -ban, ha

- (i)  $H \subset N_r(K)$  és  $f(e_r, h) = f(e_r, e_r)$  minden  $h \in H$ ,
- (ii)  $(L, \cdot)$  csoport és  $f(y, h)$  a  $Z(L)$  centrumban fekszik bármely  $y \in K$ ,  $h \in H$  esetén,
- (iii)  $f(x, y)f(xy, h) = f(x, yh)f(y, h)$  minden  $x, y \in K$  és  $h \in H$ .

Ez az állítás a  $H = \{e_r\}$  triviális részkvázicsoportra a következőt adja

**Tétel.** Egy  $\mathfrak{Q}_f$   $f$ -bővítés pontosan akkor jobb nukleáris, ha  $(L, \cdot)$  csoport és  $f(e_r, e_r)$  a  $Z(L)$  centrumban fekszik.

Ha  $\mathfrak{Q}_f$ -nek a nukleusza  $N(\mathfrak{Q}_f)$  nemüres, akkor  $\mathfrak{Q}_f$ -nak létezik egységeleme és így egy loop. Következésképpen a homomorf képe  $(K, \cdot)$  szintén loop.

**Következmény.** Az  $(L, \cdot)$  loop  $\mathfrak{Q}_f$   $f$ -bővítése a  $(K, \cdot)$  kvázicsoporttal nukleáris, akkor és csak akkor, ha

- (A)  $(K, \cdot)$  loop ( $e \in K$  egységelemmel) és  $(L, \cdot)$  csoport,
- (B)  $f(e, x) = f(x, e) = f(e, e)$  bármely  $x \in K$  és ez az elem a  $Z(L)$  centrumban fekszik.

**Megjegyzés.** Egy nukleáris  $\mathfrak{Q}_f$   $f$ -bővítés pontosan akkor centrális, ha az  $(L, \cdot)$  csoport kommutatív.

Legyen  $\mathfrak{Q}_f$  jobb nukleáris  $f$ -bővítés, azaz  $(L, \cdot)$  egy csoport és  $f(e_r, e_r) \in Z(L)$ . Legyen  $\mathfrak{Q}_f^*$  az az  $f^*$ -bővítés, amelyet az  $f^*(x, y) = f(x, y)f(e_r, e_r)^{-1}$  függvény és az  $(x, \xi) * (y, \eta) = (xy, f(x, y)f(e_r, e_r)^{-1}\xi\eta)$  művelet definiál. A  $\mathfrak{Q}_f$  és  $\mathfrak{Q}_f^*$  kvázicsoportok izomorfak, a köztük lévő izomorfia  $(x, \xi) \mapsto (x, f(e_r, e_r)^{-1}\xi)$ . Így az  $f : K \times K \rightarrow L$  függvényt normalizálhatjuk az  $f(x, e_r) = f(e_r, e_r) = \epsilon$  feltétellel.

**Állítás.** Egy  $(L, \cdot)$  csoport  $\mathfrak{Q}_f$   $f$ -bővítése egy  $e_r$  jobb egységelemes  $(K, \cdot)$  kvázicsoporttal, amelyre  $f(x, e_r) = f(e_r, e_r) = \epsilon$  jobbinverz tulajdonságú akkor és csak akkor, ha

- (i)  $(K, \cdot)$  jobbinverz tulajdonságú,
- (ii) létezik egy  $\mu : K \rightarrow Z(L)$  függvény úgy, hogy minden  $x, y \in K$  esetén  $\mu(y) = f(xy, \iota(y))f(x, y)$  teljesül, ahol  $\rho_{\iota(x)} = \rho_x^{-1}$ .

Legyen  $\Gamma$  a  $K \times K$  halmazon ható és a  $\gamma : (x, y) \mapsto (xy, \iota(y)) : K \times K \rightarrow K \times K$  bijekció által generált permutáció csoport. Mivel  $(xy \cdot \iota(y))y = y$  teljesül minden  $x, y \in K$ -ra, az  $\iota : K \rightarrow K$  és  $\phi : K \times K \rightarrow K \times K$  bijekciók involúciók és a  $\Gamma$  csoport rendje 2. A  $\phi$  leképezés fixpontjainak halmaza  $\Sigma = \{(x, e_r); x \in K\}$  és tetszőleges  $(x, y) \in (K \times K) \setminus \Sigma$  orbitja két elemből áll.

Legyen  $\mathfrak{Q}_f$   $f$ -bővítése egy  $(L, \cdot)$  csoportnak egy  $e_r$  jobb egységelemes  $(K, \cdot)$  kvázicsoporttal. Tegyük fel, hogy  $f(x, e_r) = f(e_r, e_r) = \epsilon$  minden  $x \in K$  esetén és  $(K, \cdot)$  jobbinverz tulajdonságú. Ekkor, az előző állítás alapján

**Következmény.** Legyen  $(L, \cdot)$  csoport és  $(K, \cdot)$  egy jobbinverz tulajdonságú kvázicsoport. Legyen adott egy  $\mu : K \rightarrow Z(L)$  leképezés, egy  $c : (K \times K)/\Gamma \rightarrow K \times K : \gamma \mapsto c(\gamma) \in \gamma$  kiválasztási függvénye  $\Gamma$  orbitjainak  $K \times K$ -ban és egy  $\nu : (K \times K)/\Gamma \rightarrow L$  leképezés, amelyre  $\nu(\{(x, e_r)\}) = \epsilon$  teljesül minden  $x \in K$  esetén. Ekkor az alábbi feltételekkel megadott  $f : K \times K \rightarrow L$  függvény

- (i)  $f(c(\gamma)) = \nu(\gamma)$  minden  $\gamma \in (K \times K)/\Gamma$ -ra,
- (ii)  $f(\phi(x, y)) = \mu(y)f(x, y)^{-1}$  minden  $x, y \in K$ -ra

egy jobb inverz tulajdonságú  $\mathfrak{Q}_f$   $f$ -bővítést eredményez. Megfordítva, tetszőleges jobbinverz tulajdonságú jobb nukleáris  $f$  bővítés megkapható a fenti konstrukcióval.

Legyen most  $(K, \cdot)$  egy involutorikus jobb Bol loop  $e \in K$  egységelemmel. Ekkor

**Tétel.** *Legyen  $\mathfrak{Q}_f$  az  $(L, \cdot)$  csoport olyan  $f$ -bővítése egy  $(K, \cdot)$  involutorikus jobb Bol looppal, hogy  $f(x, e) = \epsilon$  minden  $x \in K$  esetén. A  $\mathfrak{Q}_f$   $f$ -bővítés pontosan akkor jobb alternatív, ha  $\mathfrak{Q}_f$  jobbinverz tulajdonságú loop és ebben az esetben a  $\mathfrak{Q}_f$   $f$ -bővítés nukleáris.*

## 4 Reguláris permutációk

A negyedik fejezetben ([28]) az előző kvázicsoport bővítést vizsgáljuk abban az esetben, amikor az valódi kvázicsoportot eredményez. Ilyen esetben, ahogy azt már korábban láttuk, a nukleuszok üres halmazok és nem megfelelően mérik az asszociativitást. Belouszov vezette be a reguláris permutációk fogalmát, bizonyos értelemben általánosítva a nukleusz definícióját valódi kvázicsoportokra.

Egy  $\lambda : Q \rightarrow Q$  illetve  $\rho : Q \rightarrow Q$  bijekció bal-reguláris permutáció illetve jobb-reguláris permutáció, ha minden  $x, y \in Q$  esetén  $\lambda(xy) = \lambda(x) \cdot y$  illetve  $\rho(xy) = x \cdot \rho(y)$  teljesül. A jobb- illetve bal-reguláris permutációk csoportot alkotnak, amelyek a bal- illetve jobb eltolások által generált csoport részcsoportjai. Amennyiben a kvázicsoportnak van jobb egységeleme, akkor a jobb-reguláris permutációk csoportja izomorf a jobb nukleusszal, míg ha bal egységeleme van, akkor a bal-reguláris permutáció csoport izomorf a bal nukleusszal. Mind a jobb-, mind a bal-reguláris permutáció csoport indukál egy ekvivalenciarelációt a kvázicsoporton, és az ily módon kapott osztályok az őket reprezentáló elemekhez tartozó elem-nukleuszok. Így az osztályon belüli elemek asszociálnak egymással.

**Lemma.** *Egy  $\rho : (x, \xi) \mapsto (\rho_1(x, \xi), \rho_2(x, \xi)) : K \times Q \rightarrow K \times Q$  bijekció a  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$   $f$ -bővítés jobb-reguláris permutációja, akkor és csak akkor, ha*

- (i)  $\rho_1$  konstans a bővítés ekvivalenciaosztályain és egy  $\rho_1 : K \rightarrow K$  jobb-reguláris permutációt indukál  $K$ -n,

(ii)  $\rho_2$  kielégíti az alábbi azonosságot

$$\rho_2(xy, f(x, y) \cdot \xi\eta) = f(x, \rho_1(y, \eta)) \cdot \xi\rho_2(y, \eta)$$

minden  $x, y \in K$ ,  $\xi, \eta \in Q$ .

Azok a kvázicsoportok, amelyeknek csak triviális jobb-reguláris permutációi vannak, széles osztályt képeznek. Ilyenek például a Steiner-kvázicsoportok, vagy azok a kvázicsoportok, amelyek egy ciklikus csoport corját képezik. Ha a bővítésünkben ilyen a  $K$  kvázicsoport, akkor

**Megjegyzés.** Ha a  $K$  kvázicsoport jobb-reguláris permutációinak csoportja triviális, akkor  $R(\mathfrak{Q}_f)$  orbitjait tartalmazzák a bővítés kongruencia osztályai.

Itt a nukleáris bővítés feltételével ellentétes tartalmazást kapunk az elem-nukleuszokra.

**Tétel.** Tegyük fel, hogy  $R(K)$  triviális és  $Q$  loop. Egy  $\rho : \mathfrak{Q}_f \rightarrow \mathfrak{Q}_f$  leképezés pontosan akkor jobb-reguláris permutációja  $\mathfrak{Q}_f$ -nek, ha  $\rho = (id, \rho_\nu)$  alakú, ahol  $\nu \in N_r(Q)$ .

**Következmény.**  $R(\mathfrak{Q}_f) \cong N_r(Q)$ .

Abban az esetben, mikor a  $Q$  kvázicsoport csoport, akkor  $R(\mathfrak{Q}_f)$  izomorf  $Q$ -val és ilyenkor az elemnukleuszok egybeesnek a bővítés kongruenciaosztályaival, így nukleáris bővítést kapunk ebben az általánosított értelemben.

**Következmény.** Ha az  $N_r(Q)$  jobb nukleusz normális részcsoport, akkor a  $R(\mathfrak{Q}_f)$  csoport által indukált ekvivalencia reláció normális kongruencia.

**Következmény.** Ha  $K$  idempotens kvázicsoport és  $N_r(Q)$  normális részcsoport  $Q$ -ban, akkor  $R(\mathfrak{Q}_f)$  orbitjai normális részkvázicsoportjai a bővítés magkvázicsoportjainak.

Hasonló eredmények érvényesek a bal-reguláris permutációkra, illetve az azok által alkotott csoportra.

**Tétel.** Tegyük fel, hogy  $\Lambda(K)$  triviális és  $Q$  loop. Egy  $\lambda : K \times Q \rightarrow K \times Q$  leképezés pontosan akkor bal-reguláris permutációja  $\mathfrak{Q}_f$ -nek, ha  $(x, \xi) \mapsto (x, \nu(x)\xi)$  alakú, ahol a  $\nu : K \rightarrow N_l(Q)$  leképezés teljesíti a

$$\nu(xy)f(x, y) = f(x, y)\nu(x) \quad \text{és} \quad \lambda_{f(x,y)\nu(x)} = \lambda_{f(x,y)}\lambda_{\nu(x)}$$

feltételeket bármely  $x, y \in K$ .

Jelölje  $F$  azt a részloopját  $Q$ -nak, amelynek az elemei kommutálnak minden  $f(x, y)$ ;  $x, y \in K$ -el.

**Következmény.** A  $\lambda = (id, \lambda_\nu)$  leképezés bal-reguláris permutációja a  $(\mathfrak{Q}_f, \circ)$   $f$ -bővítésnek, ha  $\nu \in N_l(Q) \cap F$  és  $\lambda_{f(x,y)\nu} = \lambda_{f(x,y)}\lambda_\nu \forall x, y \in K$ .

**Tétel.** Tegyük fel, hogy  $\Lambda(K)$  triviális,  $Q$  loop és létezik olyan  $k \in K$ , hogy  $f(k, y) = \kappa$  konstans minden  $y \in K$ -ra,  $\kappa \in F$ -ra. Egy  $\lambda : K \times Q \rightarrow K \times Q$  leképezés pontosan akkor bal-reguláris permutációja  $\mathfrak{Q}_f$ -nak, ha  $\lambda = (id, \lambda_\nu)$ , ahol  $\nu \in N_l(Q) \cap F$  és  $\lambda_{f(x,y)\nu} = \lambda_{f(x,y)}\lambda_\nu$  minden  $x, y \in K$ .

**Tétel.** Tegyük fel, hogy  $\Lambda(K)$  triviális és  $Q$  egy cross inverz tulajdonságú loop. Egy  $\lambda : K \times Q \rightarrow K \times Q$  leképezés, akkor és csak akkor bal-reguláris permutációja  $\mathfrak{Q}_f$ -nak, ha  $\lambda = (id, \lambda_\nu)$ , ahol  $\nu \in N_l(Q)$ .

Ezen eredmények arra adnak lehetőséget, hogy előre megadott reguláris permutáció csoportú valódi kvázicsoportot állítsuk elő, így előre tudhatjuk, hogy mely részhalmazok elemei asszociálnak egymással.

## List of papers of the author

1. Peter T. Nagy - Izabella Stuhl, Differentiable loops on the real line, Publ. Math. Debrecen, 70/3-4 (2007), 361-370
2. Karl Strambach - Izabella Stuhl, Translation groups of Steiner loops, Discrete Mathematics, 309 (2009), 4225-4227
3. Izabella Stuhl, Regular permutations of quasigroups, Journal of Mathematical Studies, 3 (2010), 111-116
4. Peter T. Nagy - Izabella Stuhl, Right nuclei of quasigroup extensions, (submitted 9 p.),
5. Karl Strambach - Izabella Stuhl, Oriented Steiner loops, (submitted 20 p.),
6. Stuhl Izabella, Topologikus algebrák fedő homomorfizmusai, Debreceni Egyetem Tehetségkutató program I. Konferenciája, konferencia kiadványban (2002).

## List of conference talks of the author

1. *Topologikus algebrák fedő homomorfizmusai*, Debreceni Egyetem Tehet-séggondozó Programjának I. Konferenciája, Debrecen (2002),
2. *Folytonos loopok*, Tudományos Diákköri Konferencia, Debrecen (2003),
3. *Differentierbare 1 dimensionale reale Loops*, Algebra und Geometrie Gemeinschaft, Erlangen, Germany (2005),
4. *Die einheitsgruppe des Gruppenringes über den Restklassring*, Algebra Seminar, Erlangen, Germany (2005),
5. *Karakterisierung der Translationengruppe der Steiner loops*, Algebra und Geometrie Gemeinschaft, Würzburg, Germany (2006),
6. *Steiner loopok kis bővítései*, Véges geometria szeminárium, Eötvös Loránd Egyetem, Budapest (2008),
7. *Oriented Steiner loops*, The Sixth Conference of PhD Students in Computer Science, Szeged (2008),
8. *Quasigroup extensions*, The 5th International Students' Conference on Analysis, Szare, Poland (2009),
9. *Nuclei of quasigroup extensions*, Groups and topological groups, Milan, Italy, (2009),
10. *Loopok és kvázicsoportok bővítéseiről*, Országos algebra szeminárium, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapest, (2009).

## References

- [1] V.D. Belousov, Foundations of the theory of quasigroups and loops, (Russian), *Nauka, Moscow (1967)*.
- [2] P.J.Cameron, Permutation groups, in Handbook of combinatorics, ed. R.L. Graham, M. Groetschel, L.Lovász *Elsevier Science B.V, 611-645 (1995)*.
- [3] O. Chein, Examples and methods of construction, in *Quasigroups and Loops: Theory and Applications*, ed. O. Chein, H.O. Pflugfelder, J.D.H. Smith, *Heldermann Verlag, Berlin 27-95, (1990)*.
- [4] O. Chein, Moufang loops of small order I., *Trans. Amer. Math Soc.,188 Issue 2, (1974), 31-51*.
- [5] O. Chein, Moufang loops of small order, *Memoirs Am. Math. Soc., Vol 13. (1978)*.
- [6] M. Deza, G. Sabidussi, Combinatorial structures arising from commutative Moufang loops, in *Quasigroups and Loops: Theory and Applications*, ed. O. Chein, H.O. Pflugfelder, J.D.H. Smith, *Heldermann Verlag, Berlin 151-160, (1990)*.
- [7] J.W. DiPaola, When is a totally symmetric loop a group, *Amer. Math. Monthly,76 (1969), 249-252*.
- [8] J.D. Dixon, B. Mortimer, Permutation Groups, *Springer-Verlag, New York-Berlin (1996)*.
- [9] J. Doyen, Sur la structure de certains systèmes triples de Steiner, *Math. Z.,111 (1969), 289-300*.
- [10] A. Drapal, On extraspecial left conjugacy closed loops, *J. of Algebra,302 (2006), 771-792*.
- [11] A. Dralap, P Vojtechovsky, Explicit constructions of loops with commuting inner mappings, *European J. of Combinatorics, Volume 29, Issue 7 (2008), 1662-1681*.
- [12] B. Fischer, Distributive Quasigruppen endlicher Ordnung, *Math. Z.,83 (1964) 267-303*.
- [13] R.L. Griess, Code loops, *J.of Algebra,100 (1986) 224-234*.

- [14] E.G. Goodaire, D. A. Robinson, Loops which are cyclic extensions of their nuclei, *Compositio Mathematica*, 45, (1982), 341-356.
- [15] T.Hsu, Explicit constructions of code loops as centrally twisted products, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*,128,No 2. (2000) 222-232.
- [16] H. Kiechle, G.P. Nagy, On the extension of involutorial Bol loops, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 72, (2002), 235-250.
- [17] M.K. Kinyon, J.D. Phillips, P. Vojtechovsky, C-loops:extensions and contructions, *J. of Algebra and its Applications*, 6, (2007), 1-20.
- [18] M. K. Kinyon, J. D. Phillips, P. Vojtechovsky, When is the commutant of a Bol loop a subloop?, *Trans. Amer. Math. Soc.* 5, (2008), 2393-2408.
- [19] K. Kunen, Moufang Quasigroups, *Journal of Algebra*, 183, (1996), 231-234.
- [20] E. Mendelsohn, On the Groups of Automorphisms of Steiner Triple and Quadruple Systems, *J. of Combinatorial Theory*,25 Ser.A, (1978), 97-104.
- [21] P. T. Nagy and K. Strambach, Loops in Group Theory and Lie Theory, Expositions in Mathematics 35, *Walter de Gruyter, Berlin–New York* (2002).
- [22] P.T. Nagy, K. Strambach, Schreier loops, *Czechoslovak Math. J.*, 58 (133), (2008), 759-786.
- [23] P.T. Nagy, I. Stuhl, Right nuclei of quasigroup extensions, (*submitted*) (2009)
- [24] D. Passman, Permutation Groups, *Benjamin, New York* (1966).
- [25] H.O. Pflugfelder, Quasigroups and Loops: Introduction, *Heldermann Verlag, Berlin* (1990).
- [26] K. Strambach, I. Stuhl, Translation groups of Steiner loops, *Discrete Mathematics*, 309 (2009), 4225-4227.
- [27] K. Strambach, I. Stuhl, Oriented Steiner loops, (*submitted*) (2008)
- [28] I. Stuhl, Regular permutations of quasigroups, *Journal of Mathematical Studies*, 3 (2010), 111-116.

- [29] M. Wild, The groups of order sixteen made easy, *The Amer. Math. Monthly*, 112 (2005), 20-31.
- [30] S. Walter, Geordnete Steinersche Tripelsysteme, *Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg (1983)*.