

**Szomszédsági sorozatok különböző rácson  
(Neighbourhood sequences in different grids)**

doktori (PhD) értekezés tézisei

NAGY BENEDEK

Debreceni Egyetem  
Természettudományi Kar

Debrecen, 2003

*A digitális geometriában a kör négyzetesítése triviális,  
a feladat sokkal inkább a digitális tér „görbítése”.*



## 1. FEJEZET: Bevezetés

A digitális geometria a képfeldolgozás egyik fontos és dinamikusan fejlődő ága. A digitális geometriában diszkrét teret használunk, a pontoknak egész értékűek a koordinátái. Két pontot akkor szokás szomszédoknak tekinteni, ha koordináta-különbségük koordinátánként legfeljebb egy. Így viszont általában többféle szomszédsági viszonyt is megkülönböztethetünk, az eltérő koordináták száma szerint. Két pont közötti utat kapunk, ha az egyikből úgy jutunk el a másikba, hogy közben mindig csak a megelőző pont egy szomszédjára lépünk. A távolságukat a köztük levő legrövidebb út (vagy utak) hosszával definiáljuk. Az így kapott távolság általában függ nemcsak a pontok koordinátáitól, hanem attól is, hogy milyen típusú szomszédokat engedünk meg a lépések során. Ha lépésenként változtatjuk a szomszédság típusát, eljutunk a szomszédsági sorozat fogalmához. A dolgozatban különböző rácson értelmezzük és vizsgálunk távolságokat a szomszédsági sorozatok segítségével.

### 1.1. A digitális geometria történetéről

A témakör születését szokás az [57] cikkhez kapcsolni, amelyben Rosenfeld és Pfaltz definiálták a két alapvető lépést a négyzetrácson. A 'háztömb' lépés csak egy koordináta megváltoztatását engedi, míg a 'sakk-tábla' lépés megengedi az átlós irányokat is. Ebben a cikkben a szerzők ajánlották az előbbi lépések váltott használatát, így az Euklideszi távolságot jobban közelíti az eredmény.

P. P. Das, P. P. Chakrabarti és B. N. Chatterji több cikkben ([2, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 46]) bevezették és vizsgálták a periódikus szomszédsági sorozatokat négyzetes rácson (magasabb dimenzióban is), amelyekben az egyszerű szomszédsági viszonyokat különbözőképpen variálhatjuk. Vizsgálták a távolság terjedését (ún. hullámfrontokat), valamint a kialakuló digitális köröket. Levezették a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy egy periódikus szomszédsági sorozaton alapuló távolságfüggvény mikor teljesíti a metrika tulajdosságait az  $n$  dimenziós digitális térben. Egy meglehetősen összetett képletet is adtak két pont távolságának meghatározására. Fazekas Attila, Hajdu András és Hajdu Lajos [23]-ban bevezették a végtelen dimenziós digitális tér fogalmát, illetve definiálták az általánosított szomszédsági sorozatokat, amelyek nem feltétlenül periódikusak. Mi ebben az általánosabb értelemben fogjuk használni a szomszédsági sorozatokat. Algoritmust adunk két adott pont között egy legrövidebb út meghatározására, megmutatjuk annak a feltételét, hogy egy általánosított szomszédsági sorozaton alapuló távolságfüggvényre mikor teljesülnek a metrika feltételei véges ( $n$ ) illetve végtelen dimenziós digitális térben [48a, 48]. Adunk egy viszonylag egyszerű képletet a távolság meghatározásához, ami nem periódikus esetre is működik.

A kockarácson történő távolságmérést a gyakorlatban is alkalmaztuk ([34]).

Megjegyzendő, hogy a periódikus szomszédsági sorozatokat általánosabban, bármilyen szomszédsági struktúrára defináltak Yamashita és társai ([62, 63]).

A négyzetrácson párhuzamosan, illetve kicsit később megkezdődött a hatszög- és a háromszögrács vizsgálata is. (Ezen rácson és a kockarács kapcsolatáról lehet olvasni a [37, 52, 52a] cikkekben.) A hatszögrács viszonylagos egyszerűsége miatt alkalmazásokban is nagy népszerűségnek örvend. Általában egyféle szomszédsági viszonyt szokás a hatszögrácson használni [25, 42, 43].

A háromszögrácsokat az utóbbi időben egyre több helyen alkalmazzák a gyakorlatban (geometriai modellezés, 3D szkennelés). A háromszögrácson a három alapvető

szomszédsági viszony már [19]-ben megtalálható. A szomszédsági sorozatokkal definiált távolság a [49a, 49] és [50] cikkeinkben jelent meg. Eredményeinket itt is ismertetjük: algoritmust adtunk tetszőleges két pont közti legrövidebb út meghatározására, illetve megadjuk a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy egy tetszőleges szomszédsági sorozattal definiált távolságfüggvény mikor határoz meg metrikus teret. A háromszögrácson több olyan érdekes jelenség is megfigyelhető amely a négyzetes rácsokon nem tapasztalható. Ezeket a jelenségeket, mint a nem szimmetrikus távolságfüggvény vagy az egymást 'megelőző' sorozatok külön is megvizsgáljuk.

Megjegyezzük, hogy "a számok mértana" témakör ugyancsak ezekkel a rácsokkal foglalkozik, kicsit más terminológiát használva. Csak az érdekesség kedvéért említjük, hogy többek közt Erdős Pálnak ([20, 30]) és Lovász Lászlónak ([27, 41]) is vannak ide kapcsolható eredményei.

## 1.2. A disszertáció felépítése

A 2. Fejezetben néhány általános definíciót és jelölést vezetünk be. A 3. Fejezet a négyzetrácscról, illetve magasabb dimenziós társairól szól. Az alfejezetek rendre a következők: először a specifikus definíciókat adjuk meg, majd algoritmust a legrövidebb út problémára, aztán a távolság meghatározására adunk képletet. Ezután a távolság metrikusságának feltétele következik.

Ezután áttérünk egyéb rácsokra. A 4. Fejezetben a hatszögrácst tárgyaljuk röviden. Megmutatjuk, hogy a szomszédsági viszonyon alapuló távolság metrika. Ezután a kockarács és a hatszögrács viszonyát vizsgáljuk. Az 5. Fejezetben a hatszögrács analógiájára a háromszögrácst vesszük tárgyal. Itt megint több alfejezet van. A specifikus definíciók, illetve a koordináta rendszer bevezetése után a legrövidebb út probléma megoldása következik. Ezután a metrikus távolság problémája (,mint látni fogjuk a szimmetriával is gond lehet a háromszögrács esetén). A háromszögrácst is beágyazhatjuk a kockarácsba, és ennek segítségével adunk képletet a távolság kiszámítására. A következő alfejezet a digitális körökről szól. Ezután felvázolunk egy lehetséges hálózati alkalmazást, ami a háromszögrács szokatlan tulajdonságaira épül.

A 6. Fejezetben további kutatási területeket mutatunk, úgymint sorozatok távolsága, egyéb (háromszöges) rácsok, digitális alakzatok stb.

## 2. FEJEZET: Alapdefiníciók

Ebben a részben néhány olyan definíciót és jelölést adunk meg, amely az egész disszertációban azonos szerepkörben fordul elő.

Az  $\operatorname{sgn}(x)$  függvény az  $x$  valós szám előjelét adja meg (0, ha  $x = 0$ ,  $\frac{x}{|x|}$  egyébként).

**2.1. Definíció.** *Egy  $V$  térben értelmezett távolságfüggvényről akkor mondjuk, hogy 'metrika' tulajdonságú, ha  $\forall p, q, r \in V$  esetén teljesülnek a következő feltételek:*

1.  $d(p, q) = 0$ , akkor és csak akkor, ha  $p = q$
2.  $d(p, q) = d(q, p)$  (szimmetria),
3.  $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$  (háromszög-egyenlőtlenség)

A fenti feltételekből következik, hogy a függvény nem vehet fel negatív értéket.

A disszertációban a  $V$  halmaz elemeire ('pontjaira') általában egészértékű vektorokkal fogunk hivatkozni. Egy  $p$  pont  $i$ . koordinátáját  $p(i)$ -vel fogjuk jelölni.

**2.2. Definíció.** A  $B = (b(i) : i \in \mathbb{N})$  sorozatot, ahol a  $b(i)$  értékek lehetséges szomszédsági értékek 'szomszédsági sorozatnak' hívjuk. Ha van olyan  $l \in \mathbb{N}$ , hogy  $b(i) = b(i + l)$  fennáll minden  $i \in \mathbb{N}$  esetén, akkor  $B$ -t periódikusnak mondjuk,  $l$  periódussal. Ebben az esetben egy periódusnyi elemmel jellemezhetjük a sorozatot:  $B = (b(1), \dots, b(l))$ .

Egy  $B$  szomszédsági sorozatot a következőképpen használunk fel az ún. 'B-útban':

**2.3. Definíció.** Legyen  $p$  és  $q$  két pont és  $B = (b(i) : i \in \mathbb{N})$  egy szomszédsági sorozat. Ha van olyan véges  $\Pi(p, q; B)$  pontsorozat – ami  $p = p_0, p_1, \dots, p_m = q$  formába írható, ahol  $p_{i-1}$  és  $p_i$   $b(i)$ -szomszédok minden  $1 \leq i \leq m$  esetén – akkor ezt egy a  $B$  által meghatározott  $p$ -ből  $q$ -ba vezető útnak hívjuk. A  $\Pi(p, q; B)$  út hossza  $|\Pi(p, q; B)| = m$ .

Itt jegyezzük meg, hogy  $\mathbb{Z}^\infty$ -ben elképzelhető, hogy nincs út két pont között. Például ha a  $\{|p(i) - q(i)| : i \in \mathbb{N}\}$  halmazban nincs legnagyobb elem, vagyis nem korlátos felülről, akkor egyetlen szomszédsági sorozattal sem találhatunk utat a két pont között.

Bevezetjük a 'B-távolság' fogalmát, ami központi szerepet játszik a dolgozatban.

**2.4. Definíció.** Legyen  $p$  és  $q$  két pont, és  $B$  egy szomszédsági sorozat. Ha nincs út a két pont között, akkor legyen  $d(p, q; B) = \infty$ , vagyis a két pont végtelen távol van egymástól. Egyébként a  $p$ -ből  $q$ -ba vezető legrövidebb utat (vagy ezek egyikét) jelölje  $\Pi^*(p, q; B)$ . Ekkor  $p$  és  $q$  távolságát definiáljuk ezen út hosszával:  $d(p, q; B) = |\Pi^*(p, q; B)|$ .

A digitális geometriában a legrövidebb utak problémája inkább a gráfelméleti legrövidebb utak problémára hasonlít, mint a legrövidebb út problémára az Euklideszi térben; ugyanis a digitális geometriában általában nem egy, hanem több legrövidebb út van ugyanazzal a hosszal.

## 3. FEJEZET: Négyzetes rácson

### 3.1. További definíciók, előzmények

Mostantól kezdve  $n$  egy tetszőleges pozitív egész számot fog jelölni,  $N$  pedig egy tetszőleges elemet a  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  halmazból. Az  $n$  és  $N$  jelekkel a tér dimenzióját fogjuk jelölni, ami természetes szám, vagy a végtelen.

Jelölje  $\mathbb{Z}^N$  az  $N$  dimenziós digitális teret, vagyis  $\mathbb{Z}^N = \{(z_i)_{i=1}^N : z_i \in \mathbb{Z}\}$ . A  $\mathbb{Z}^N$  elemeire, mint pontokra fogunk hivatkozni.

**3.1. Definíció.** Legyen  $p$  és  $q$  két adott pont  $\mathbb{Z}^N$ -ban. Legyen  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  amelyre  $0 \leq k \leq N$ . A  $p$  és a  $q$  pontok ' $k$ -szomszédok', ha teljesülnek a következők:

1.  $|p(i) - q(i)| \leq 1$  minden  $1 \leq i \leq N$ ,
2.  $\sum_{i=1}^N |p(i) - q(i)| \leq k$ .

Ha a második feltételben egyenlőség áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy a  $p$  és  $q$  pontok 'szigorúan'  $k$ -szomszédok.

**3.2. Definíció.** Legyen  $B_1$  és  $B_2$  két tetszőleges szomszédási sorozat. A 'gyorsabb' ( $\supseteq^*$ ) relációt a szomszédási sorozatok közt a következőképpen definiáljuk:

$$B_1 \supseteq^* B_2 \quad \Leftrightarrow \quad d(p, q; B_1) \leq d(p, q; B_2)$$

minden  $p, q \in \mathbb{Z}^N$  pontpárra.

Bevezetünk még néhány jelölést:

**3.3. Definíció.** Legyen  $p$  és  $q$  két pont  $\mathbb{Z}^N$ -ben. A  $w_{p,q}$  vektort a  $p$  és a  $q$  pont '(abszolút)különbség-vektorának' hívjuk ha  $w(i) = |p(i) - q(i)|$ . A  $w_{p,q}$ -nak mint multihalmaznak az elemeit nagyság szerint nemcsökkenő sorrendbe szedve kapjuk a  $v_{p,q} = (v(i))_{i=1}^N$  vektort. Ekkor a  $v_{p,q}$  multihalmazként tekintve megegyezik a  $w_{p,q}$ -val, ráadásul ha  $i < j$  akkor  $v(i) \geq v(j)$  is fennáll ( $1 \leq i, j \leq N$ ). A  $v_{p,q}$  vektort 'rendezett különbségvektornak' nevezzük. Amikor az egyértelműséget nem veszélyeztetni el fogjuk hagyni a  $p, q$  indexpárt.

**3.4. Definíció.** Adott egy természetes szám ( $m$ ) és egy szomszédási sorozat:  $B(b(1), b(2), \dots, b(i), \dots)$ , ebből a sorozatból származtathatjuk a

$$B^{(m)}(b^{(m)}(1), b^{(m)}(2), \dots, b^{(m)}(i), \dots),$$

az eredeti ' $m$ -dimenziós korlátozott sorozatát', ahol  $b^{(m)}(i) = \min(b(i), m)$  az eredeti sorozat minden elemére.

Továbbá legyenek  $f_i(j)$ -k a  $B$   $i$ -dimenziós korlátozott sorozatának részletösszegei.

$$f_i(j) = \begin{cases} \sum_{k=1}^j b^{(i)}(k), & \text{if } 1 \leq j \leq n, \\ 0, & \text{if } j = 0. \end{cases}$$

**3.5. Definíció.** Adott egy  $B$  szomszédási sorozat. A  $B(j)$  sorozatot a  $B$  egy 'eltolt sorozatának' mondjuk, ha formálisan kitörölünk  $j - 1$  darab elemet a  $B$  elejéről:  $B(j) = (b(i))_{i=j}^\infty$ .

A következő lemma ([23]-ből) segítségével kiszámolhatjuk, hogy egy szomszédási sorozat gyorsabb-e, mint egy másik.

**3.2. Lemma.** Adott  $B_1$  és  $B_2$  két tetszőleges szomszédási sorozat.

$$B_1 \supseteq^* B_2 \quad \Leftrightarrow \quad f_k^{(1)}(i) \geq f_k^{(2)}(i)$$

minden  $i \in \mathbb{N}$  és  $k \in \{1, \dots, N\}$  esetén.

**3.3. Lemma.** Egy  $B$  szomszédási sorozat mindig gyorsabb, mint a korlátozott szomszédási sorozatai.

### 3.2. Legrövidebb út előállítása

A következő algoritmus egy legrövidebb utat állít elő két tetszőleges  $\mathbb{Z}^N$ -beli ponthoz.

#### 3.1. Algoritmus.

Input: a kezdő- és a végpont  $(p, q)$ , valamint egy  $B$  szomszédssági sorozat, úgy hogy  $d(p, q; B) < \infty$ .

- 1. lépés: Legyen  $w^{(0)} = w_{p,q}$ ,  $t(i) = \text{sgn}(p(i) - q(i))$ ,  $1 \leq i \leq N$ , és  $j = 0$ , valamint  $\Pi = (p)$ .
- 2. lépés: Ha minden  $w^{(j)}(i) = 0$  akkor kész és menjünk a 8. lépésre; különben legyen  $j = j + 1$ .
- 3. lépés: Legyen  $w^{(j)} = w^{(j-1)}$ .
- 4. lépés: Ha  $b(j)$  véges akkor válasszuk ki a  $w^{(j)}$  vektor  $b(j)$  darab legnagyobb elemét. Ha  $b(j) = \infty$  akkor vegyük a  $w^{(j)}$  minden elemét.
- 5. lépés: Minden kiválasztott pozitív  $w^{(j)}(i)$ -re legyen  $w^{(j)}(i) = w^{(j-1)}(i) - 1$ .
- 6. lépés: Fűzzük a  $\Pi$  minimális úthoz az  $x_j$  pontot, melynek koordinátái:  $x_j(i) = q(i) + w^{(j)}(i)t(i)$ ,  $(1 \leq i \leq N)$ .
- 7. lépés: Vissza a 2. lépésre.
- 8. lépés: Output:  $\Pi$ , egy legrövidebb lépésszámú út, valamint  $j$  a két pont távolsága.

**3.1. Tétel.** *Ha a  $p$  és  $q$  pontok közt van  $B$ -út, akkor a 3.1. Algoritmus futása véges sok lépés után befejeződik és egy legrövidebb utat ad eredményül.*

Minket most ennek a legrövidebb útnak a hossza, vagyis a két pont távolsága érdekel.

### 3.3. Képlet a távolságszámításra

Eredetileg Das és társai megadtak egy formulát, melynek segítségével kiszámolható két tetszőleges pont távolsága  $n$  dimenzióban periódikus sorozat esetén. Most más módszerrel adunk egy sokkal egyszerűbb képletet, amely tetszőleges szomszédssági sorozat esetén is működik, illetve akár végtelen dimenziós tér esetén is használható. Ehhez az ún. (digitális) hipergömbök nyújtanak segítséget.

Legyen  $B$  egy szomszédssági sorozat és  $k \in \mathbb{N}$ , ekkor legyen

$$O_k^B = \{p \in \mathbb{Z}^N : d(o, p; B) \leq k\}.$$

$O_k^B$  a  $B$  által  $k$  lépésben elfoglalt terület az  $o$  pontból indulva, azaz  $k$  sugarú '(digitális) hipergömbje' a  $B$ -nek.

**3.2. Tétel.** *Egy  $B$  szomszédssági sorozat  $k$  sugarú hipergömbjének csúcsai a következő vektor koordinátáinak permutációjaként írható fel:*

$$x = \left( \delta_l \sum_{j=1}^k \sigma_{b(j),l} \right)_{l=1}^N.$$

Ahol  $\sigma_{a,b} = 1$  ha  $a \geq b$ , különben  $\sigma_{a,b} = 0$ ,  $\delta_l = \pm 1$  minden lehetséges értékre és  $\delta_l$  értékei különbözhetnek a különböző permutációkban.

**3.4. Lemma.** *Két pont között végtelen dimenziós térben a távolság véges (vagyis létezik út) pontosan akkor, ha*

- a két pont különbségvektora  $(w_{p,q})$  elemeinek halmaza korlátos és a
- $B$  sorozat a  $\infty$  szimbólumot legalább annyiszor tartalmazza ( $k$ -szor), mint a legnagyobb olyan érték, amely a  $(w_{p,q})$ -ban végtelenszer szerepel.

**3.1. Állítás.** A  $p$  és  $q$  pontok  $B$ -távolsága a következő képlettel számolható:

$$d(p, q; B) = \max_{i \leq N} (d_i(w)),$$

ahol

$$d_i(w) = \max \left\{ h \left| \sum_{j=1}^i v(j) > \sum_{j=1}^{h-1} b^{(i)}(j) \right. \right\}.$$

**3.5. Lemma.**  $O_k^B$  csúcsaira az előző állításban szereplő  $d_i(w)$  értékek egyenlők.

**3.6. Lemma.** Ha egy  $q$  pontra fennáll, hogy  $d_i(w_{o,q}) \leq k$  minden  $i$ -re, akkor  $q \in O_k^B$ .

**3.3. Tétel.** A 3.1. Állítás helyes, vagyis

$$d(p, q; B) = \max_{i \leq N} (d_i(w)),$$

a fenti rövidítések alkalmazásával.

### 3.4. A metrikus távolság feltétele

Általában azokat a távolságfüggvényeket tartjuk használhatónak amelyek metrikus teret generálnak. A négyzetes rácsokat tekintve a háromszögegyenlőtlenséggel lehet gond a metrika tulajdonságok közül.

**3.4. Tétel.** Az  $N$  dimenziós térben egy  $B$  szomszédsági sorozaton alapuló távolságfüggvény pontosan akkor metrika, ha a  $B(i)$  eltolt sorozat 'gyorsabb', mint  $B$  bármely  $i$ -re.

**3.6. Megjegyzés.** Adott  $B$  esetén a 3.3. Tétel feltétele a 3.2. Lemma alapján numerikusan is ellenőrizhető.

Érdekességként említjük meg, hogy két dimenzióban a megadott feltétel éppen a Lyndon szavakra illik.

## Háromszögrácsok

A négyzet- és kockarácsok, valamint magasabb dimenziós formáik széles körben használatosak a digitális képfeldolgozás világában. A síkban a négyzetrácson kívül még két szabályos rács található, a hatszög- és a háromszögrács, amik egymás duálisai. Ezek felhasználási szempontból lényegesen egzotikusabbak, mint a négyzetrács. Jellemzőit tekintve (, mint később részletezni is fogjuk) a hatszögrács viszonylag egyszerű és sok esetben szebben viselkedik a négyzetrácsonál. A háromszögrács viszont meglehetősen komplex, és néhány olyan tulajdonságot is produkál, ami nem szokványos még a digitális világban sem. Egy ilyen tulajdonság felhasználására mutatunk majd gyakorlati példát.

### 4. FEJEZET: A hatszögrács

A hatszögrácson két alternatív formája használatos. Az egyik a hatszögrácson a hatszögeket tekintve pontoknak, míg a másik a háromszögrács csúcspontjait. Matematikai szempontból a két forma ekvivalens.

#### 4.1. Definíciók, koordináták

A hatszögrácson általában egyféle szomszédtságot szoktak értelmezni.

*Két objektum 'szomszédos':*

- a háromszögrács csúcspontjai közt, ha közvetlenül össze vannak kötve.
- a hatszögrács régiói közt, ha közös oldaluk van.

A rácsot a szimmetriája miatt három koordinátával írjuk le, amelyek összege minden pontra 0 (lásd: pl. Her [37]).

**4.1. Megjegyzés.** A koordináták közül csak kettő független. Két pont szomszédos, ha egyik koordinátájuk megegyezik, a másik kettőben a különbség pedig  $\pm 1$ .

#### 4.2. Legrövidebb út és távolság

**4.2. Eljárás.** Egy, a  $p$  és  $q$  pontok közti legrövidebb utat kapunk, ha  $p$ -ből indulva először abba az irányba megyünk ahol az a koordináta érték marad konstans, amelyben a legkisebb a koordináták különbsége (ha két ilyen van, bármelyiket választhatjuk). Addig megyünk így, amíg valamelyik koordinátakülönbség 0-ra nem csökken. Ezután amíg a  $q$ -ba nem érünk, addig lépkedünk úgy, hogy a már megfelelő koordináta értéke ne változzon.

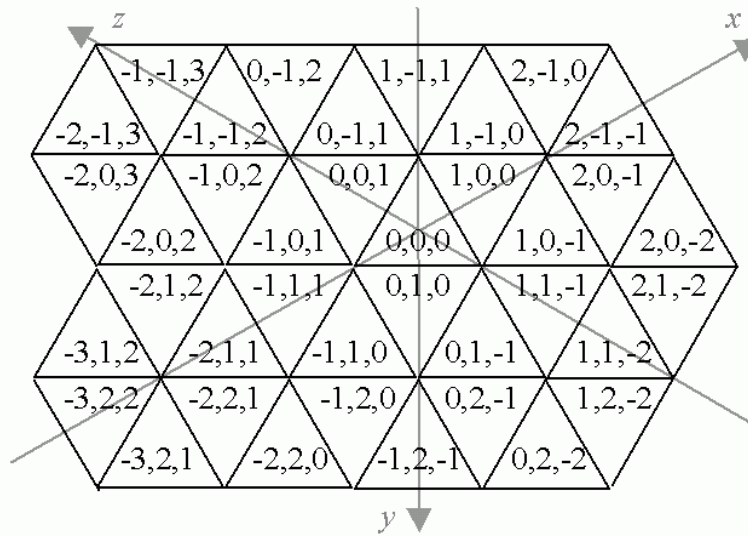
**4.1. Tétel.** Legyen  $p = (p(1), p(2), p(3))$  és  $q = (q(1), q(2), q(3))$  két pont. A távolságuk:

$$d(p, q) = \max(|p(1) - q(1)|, |p(2) - q(2)|, |p(3) - q(3)|).$$

Ez a távolság több szempontból is szépen viselkedik: metrika tulajdonságú és kis hibával közelíti az Euklideszi távolságot.

#### 4.3. A hatszögrács és a kockarács kapcsolata

A hatszögrácson megfelelő (0 koordináta-összegű) pontok a három dimenziós térben egy ferde síkot alkotnak.



Koordináták a háromszögrácson.

## 5. FEJEZET: A háromszögrács

### 5.1. Szomszédsági viszonyok, koordináták és egyéb definíciók

A háromszögrácson háromféle szomszédsági viszonyt szokás definiálni. A koordinátákat az ábrán látható módon vezetjük be. Ekkor a 3.1. Definíció alapján definiálhatjuk a szomszédsági relációkat.

**5.2. Definíció** Rögzítsünk le egy koordinátát. Azon pontok, amelyeknek ez a koordinátája megegyezik ezzel a fix értékkel egy 'sávot' alkotnak.

**5.3. Megjegyzés.** A háromszögrács pontjai egy-egyértelműen azonosíthatók az olyan koordinátaérték-hármasokkal, amelyekre az értékek összege 0 vagy 1.

**5.3. Definíció.** A 0 koordinátaösszegű pontok 'paritása' páros. Azokat a pontokat pedig, amelyeknek a koordináta-összege 1 páratlannak hívjuk.

**5.4. Megjegyzés.** Ha két pont 1-szomszéd, akkor paritásuk különböző, és két különböző sáv is tartalmazza mindkettőjüket. Két szigorúan 2-szomszéd paritása megegyezik, és pontosan egy sávra igaz, hogy mindkettőt tartalmazza. A szigorúan 3-szomszédok paritása különbözik, és nincs olyan sáv, amely mindkettőt tartalmazza.

**5.4. Definíció.** Legyen  $p$  és  $q$  két pont. A  $w_{p,q}$  vektort az  $p$  és a  $q$  pont 'különbségvektorának' hívjuk ha  $w(i) = q(i) - p(i)$ . A  $w_{p,q}$ -nak mint multihalmaznak az elemeit abszolútértékük nagysága szerint nem csökkenő sorrendbe szedve kapjuk a  $v_{p,q}$  vektort. Ekkor a  $v_{p,q}$  multihalmazként tekintve megegyezik a  $w_{p,q}$ -val, ráadásul  $|v(i)| \geq |v(j)|$  ha  $i < j$  is fennáll ( $1 \leq i, j \leq 3$ ). A  $v_{p,q}$  vektort 'rendezett különbségvektornak' nevezzük. Amikor az egyértelműséget nem veszélyezteti el fogjuk hagyni a  $p, q$  indexpárt.

## 5.2. Legrövidebb út megkonstruálása

### 5.1. Algoritmus.

Input: a kezdő- és a végpont  $(p, q)$ , valamint egy  $B$  szomszédssági sorozat.

- 1. lépés: Legyen  $w$  a 2 pont különbségvektora, valamint  $\Pi = (p)$ ,  $x_0 = p$  és  $j = 0$ .
- 2. lépés: Ha minden  $w(i) = 0$  akkor kész és menjünk a 11. lépésre.
- 3. lépés: Legyen  $j = j + 1$ . Legyen  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) a  $(1, 2, 3)$  értékek egy olyan permutációja, amire  $|w(h_1)| \geq |w(h_2)| \geq |w(h_3)|$ , és  $\text{sgn}(w(h_1)) \neq \text{sgn}(w(h_2))$ .
- 4. lépés: Ha  $b(j) = 1$  akkor attól függően, hogy  $x_{j-1}$  páros vagy páratlan, csökkentsük abszolút-értékben eggyel a pozitívát, illetve a negatívát a  $w(h_1)$  és a  $w(h_2)$  közül. Ezután a 8. lépés következik.
- 5. lépés: Ha  $b(j) = 2$  akkor csökkentsük abszolút-értékben eggyel a  $w(h_1)$  és a  $w(h_2)$  közül az(oka)t, amely(ek) nem 0(-k). Ezután a 8. lépés következik.
- 6. lépés: Ha  $x_{j-1}$  páros és  $w$ -ben két pozitív érték szerepel, akkor legyen  $w(i) = \text{sgn}(w(i))|w(i) - 1|$  ( $i = 1, 2, 3$ ), különben pedig (ha  $x_{j-1}$  páros és  $w$ -ben nincs két pozitív érték) legyen  $w(h_1) = \text{sgn}(w(h_1))|w(h_1) - 1|$  és  $w(h_2) = \text{sgn}(w(h_2))|w(h_2) - 1|$ .
- 7. lépés: Ha  $x_{j-1}$  páratlan: ha  $w$ -ben két negatív érték szerepel, akkor legyen  $w(i) = \text{sgn}(w(i))|w(i) - 1|$  ( $i = 1, 2, 3$ ), különben pedig (ha  $x_{j-1}$  páratlan, de  $w$ -ben nincs két negatív érték) legyen  $w(h_1) = \text{sgn}(w(h_1))|w(h_1) - 1|$  és  $w(h_2) = \text{sgn}(w(h_2))|w(h_2) - 1|$ .
- 8. lépés: Az  $x_j$  pont koordinátái legyenek:  $x_j(i) = q(i) - w(i)$ , ( $1 \leq i \leq 3$ ).
- 9. lépés: Fűzzük a  $\Pi$  minimális úthoz az  $x_j$  pontot.
- 10. lépés: Vissza a 2. lépésre.
- 11. lépés: Output:  $\Pi$ , egy legrövidebb lépésszámú út  $p$ -ből  $q$ -ba, valamint  $j$  az út hossza.

**5.1. Tétel.** *Az 5.1. Algoritmus helyes: mindig megáll és egy legrövidebb utat állít elő.*

Az 5.1. Algoritmus mohó algoritmus, konstans tár-bonyolultságú, és a pontok koordinátakülönbség-összegével lineáris időbonyolultságú.

**5.6. Megjegyzés.** *Bármely két pont  $B$ -távolsága függ a pontok különbségvektorától és paritásától, valamint a szomszédssági sorozattól.*

## 5.3. A metrikus távolság feltétele

A háromszögrácson nem csak a háromszögegyenőtlenséggel, hanem a szimetriával is gond lehet, így kicsit más a helyzet, mint a már tárgyalt rácson.

**5.1. Lemma.** *Tetszőleges  $p$  és  $q$  pontok (1)-távolsága:  $d(p, q; (1)) = |w_{p,q}(1)| + |w_{p,q}(2)| + |w_{p,q}(3)|$ .*

**5.5. Definíció.** *Egy  $B$  szomszédssági sorozat 'minimális ekvivalens sorozatán' a következő tulajdonságú  $B'$  szomszédssági sorozatot értjük.*

1.  $d(p, q; B) = d(p, q; B')$  bármely  $p, q$  pontpárra; és
2. minden olyan  $B_1$  szomszédssági sorozatra, amire  $d(p, q; B) = d(p, q; B_1)$  minden  $p, q$  pontpárra, teljesül az, hogy  $b'(i) \leq b_1(i)$  minden  $i$ -re.

**5.2. Lemma.** *Egy  $B$  szomszédsági sorozat  $B'$  minimális ekvivalens sorozata egyértelműen meghatározott:*

- $b'(i) = b(i)$ , ha  $b(i) < 3$ ,
- $b'(i) = 3$ , ha  $b(i) = 3$  és nincs olyan  $j < i$  amire  $b'(j) = 3$ ,
- $b'(i) = 3$ , ha  $b(i) = 3$  és van olyan  $b'(l) = 3$ , hogy  $l < i$ , de  $\sum_{k=j+1}^{i-1} b'(k)$  páros, ahol  $j = \max \{l \mid l < i, b'(l) = 3\}$ ,
- $b'(i) = 2$ , különben.

**5.3. Lemma.** *Egy  $B$ -távolság pontosan akkor nem teljesíti a szimmetria tulajdonságot, ha van olyan  $i \in \mathbb{N}$ , hogy  $b(i) = 3$ , és fennáll legalább a következő esetek egyike az  $i = \min \{l \mid b(l) = 3\}$  értékkel:*

- $\sum_{k=1}^{i-1} b(k)$  páratlan; vagy
- van olyan  $j$ , amire  $b(j) = 1$  és  $i < j$ .

**5.4. Lemma.** *Legyen a  $B$  szomszédsági sorozat olyan, hogy nem tartalmazza a hármas értéket. A háromszög-egyenlőtlenség pontosan akkor nem teljesül a  $B$ -távolságra ha van olyan  $i$  és  $j$ , hogy  $\sum_{k=1}^i b(k) > \sum_{k=j+1}^{j+i} b(k)$ .*

**5.7. Megjegyzés.** *Ha a  $B$  szomszédsági sorozat tartalmazza a 3-at, akkor általában nem egyszerű megmondani mikor teljesíti a  $B$ -távolság a háromszög-egyenlőtlenséget. Abban az esetben viszont, ha a  $B$ -távolság szimmetrikus a megfelelő  $B'$ -ben csak legfeljebb egy 3 szerepelhet. Ekkor könnyű ellenőrizni, hogy az 5.4. Lemmában elég az összegzéseket addig vizsgálni, amíg a  $j + i$  értéke el nem éri ennek a 3-nak a helyét. Ha a lemma feltétele eddig a pontig fennáll, akkor a generált távolságfüggvényre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.*

Az előzőek alapján kimondjuk a tételt:

**5.2. Tétel.** *Legyen  $B$  egy szomszédsági sorozat. A  $B$ -távolság pontosan akkor metrikus, ha teljesülnek a következők:*

- ha  $b(j) = 3$  és  $b(i) = 1$  akkor  $i < j$ ,
- ha a  $B$ -ben szerepel a 3, akkor  $\sum_{b(k)=1} b(k)$  páros,
- $\sum_{k=1}^i b(k) \leq \sum_{k=j+1}^{j+i} b(k)$ , ahol  $i + j < l$ , arra az  $l$ -re ami a  $B$ -ben levő első 3 helye, (ha a 3 nincs a  $B$ -ben akkor a feltételnek minden  $i, j \in \mathbb{N}$  párra fenn kell állnia).

## 5.4. A háromszögrács és a kockarács kapcsolata

A háromszögrács pontjainak megfelelő koordináták a kockarácsban két szomszédos ferdesíket határoznak meg. A minimális ekvivalens sorozat intuitíve kb. éppen azt "felügyeli", hogy a legrövidebb út megkonstruálásakor ne lehessen a kockarács távolabbi pontjait előnyösebben felhasználni annál, mintha a két ferdesík pontjaira korlátoznánk a lehetséges mozgást.

## 5.5. Képlet a távolságszámításra

Felhasználva a háromszögrács kockarácsba való beágyazhatóságát a kockarácsra levezetett képlet alapján fogjuk a távolságot kiszámolni a háromszögrácsban.

Mivel - a háromszögrács sajátosságai miatt - egy  $b(i) = 3$ -assal nem mindig tudunk "közelebb" kerülni a célponthoz, mint ha csak  $b(i) = 2$  lenne, bevezetjük a csökkentett minimális ekvivalens sorozat fogalmát.

**5.6. Definíció.** A  $B''$  szomszédsági sorozatot a  $B$  csökkentett minimális ekvivalens sorozatának hívjuk, ha

- $b''(k) = 2$ , ahol  $k$  az első  $B$ -ben előforduló 3 helye;
- $b''(i) = b'(i)$ , minden más  $i$ -re, ahol a  $b'(i)$ -k a  $B$  minimális ekvivalens sorozatának az elemei.

**5.3. Tétel.** Legyen  $p, q$  két pont és  $B$  egy szomszédsági sorozat. Jelölje  $d'_2, d'_3, d''_2$  és  $d''_3$  azokat az értékeket, amiket rendre a  $B$  minimális ekvivalens sorozatának 2-dimenziós korlátozott sorozatával, a  $B$  minimális ekvivalens sorozatával, a csökkentett minimális ekvivalens sorozatának 2-dimenziós korlátozott sorozatával, illetve a csökkentett minimális ekvivalens sorozatával számolunk a 3.1. Tételben:

$$d'_2 = \max \left( i \left| |v(1)| + |v(2)| > \sum_{j=1}^{i-1} b^{(2)}(j) \right. \right),$$

$$d'_3 = \max \left( i \left| |v(1)| + |v(2)| + |v(3)| > \sum_{j=1}^{i-1} b'(j) \right. \right),$$

$$d''_2 = \max \left( i \left| |v(1)| + |v(2)| > \sum_{j=1}^{i-1} b''(2)(j) \right. \right),$$

$$d''_3 = \max \left( i \left| |v(1)| + |v(2)| + |v(3)| > \sum_{j=1}^{i-1} b''(j) \right. \right).$$

Ekkor legyen

$$d' = \max(|v(1)|, d'_2, d'_3)$$

és

$$d'' = \max(|v(1)|, d''_2, d''_3).$$

$d(p, q; B) = d''$ , ha  $d' \geq k$  és az alábbi esetek egyike fennáll:

| eredeti oldal | $b(i) = 1$ lépés után | $b(i) = 2$ lépés után | $b(i) = 3$ lépés után |
|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 'fűrészfog'   | 'sima'                | 'fűrészfog'           | 'sima'                |
| 'dombos'      | 'dombos'              | 'dombos'              | 'dombos'              |
| 'sima'        | 'fűrészfog'           | 'sima'                | 'sima'                |

## 7. Táblázat, a lehetséges oldaltípusok és lépésenkénti változásai

- $p$  páros,  $\sum_{i=1}^{k-1} b(i)$  páros, és  $w_{p,q}$ -ben két negatív és egy pozitív érték van;
- $p$  páratlan,  $\sum_{i=1}^{k-1} b(i)$  páratlan és  $w_{p,q}$ -ben két negatív és egy pozitív érték van;
- $p$  páratlan,  $\sum_{i=1}^{k-1} b(i)$  páros és  $w_{p,q}$ -ben egy negatív és két pozitív érték van;
- $p$  páros,  $\sum_{i=1}^{k-1} b(i)$  páratlan és  $w_{p,q}$ -ben egy negatív és két pozitív érték van.

Különbözik pedig  $d(p, q; B) = d'$ .

**5.4. Tétel.** Egy  $B$ -távolság függ a  $B$  felhasznált elemeinek sorrendjétől, ha a felhasznált elemeknek van olyan permutációja, amellyel a távolság nem szimmetrikus.

## 5.6. Digitális körök

**5.7. Definíció.** Legyen  $B$  egy szomszédsági sorozat, és  $k \in \mathbb{N}$ , továbbá

$$C_k^B = \{p \mid d(o, p; B) \leq k\}.$$

Ekkor  $C_k^B$  az  $o$  középpontú  $k$  sugarú digitális  $B$ -kör.

Négyzetrácson továbbra is az  $O_k^B = \{p \mid d(o, p; B) \leq k\}$  jelölést használjuk.

A négyzetrácson a különböző szomszédsági sorozattal generált, de egyező sugarú digitális körök egy jól rendezett halmazt alkotnak. Ez háromszögrácson nem teljesül.

A négyzetrácson  $O_k^B$  nem függ a  $B$  első  $k$  elemének sorrendjétől. Ezzel szemben a háromszögrácson pl.  $C_2^{(1,3)}$  és  $C_2^{(3,1)}$  két egymással nem összemérhető ponthalmazt jelöl.

Ahogy a négyzetrácson, úgy a háromszögrácson is igaz viszont az, hogy a  $k$  sugarú növekedtével az ugyanazzal a szomszédsági sorozattal generált  $B$ -körök szigorúan monoton nőnek, vagyis: ha  $k > l$  akkor  $C_k^B \supsetneq C_l^B$ .

A négyzetrácson nem fordulhat elő, hogy két szomszédsági sorozatra a különböző sugarú körök megegyezzenek. Ezzel szemben pl.  $C_2^{(1)} = C_1^{(2)}$ .

**5.9. Megjegyzés.** Adott  $B$  szomszédsági sorozat és minimális ekvivalens sorozata  $B'$  ugyanazt a digitális körsorozatot generálja, vagyis  $(C_k^{B'} = C_k^B)$  bármely  $k \in \mathbb{N}$  esetén.

Tanulmányozva az egy pontból induló, szomszédsági szekvenciával generált hullámfrontokat láthatjuk, hogy a háromszögrácson a digitális köröknek (amik tulajdonképpen három-, hat-, kilenc-, illetve tizenkétszögek) három fajta oldala és hét-féle csúcsa lehet (lásd 7. és 8. Táblázat).

| eredeti csúcs                     | csúcsok egy $b(i) = 1$ lépés után | csúcsok egy $b(i) = 2$ lépés után           | csúcsok egy $b(i) = 3$ lépés után |
|-----------------------------------|-----------------------------------|---|-----------------------------------|
| 'sima'-'sima' (1)                 | 'fűrészfog'-<br>'fűrészfog' (3)   | 'sima'-'sima' (1)                           | 'sima'-'sima' (1)                 |
| 'sima'-'fűrészfog'<br>(2)         | 'sima'-'fűrészfog'<br>(2)         | 'sima'-'fűrészfog'<br>(2)                   | 'sima'-'sima' (1)                 |
| 'fűrészfog'-<br>'fűrészfog' (3)   | 'sima'-'sima' (1)                 | 'fűrészfog'-<br>'fűrészfog' (3)             | 'sima'-'dombos'-<br>'sima' (4,4)  |
| 'sima'-'dombos' (4)               | 'fűrészfog'-<br>'dombos' (5)      | 'sima'-'dombos' (4)                         | 'sima'-'dombos' (4)               |
| 'fűrészfog'-<br>'dombos' (5)      | 'sima'-'dombos' (4)               | 'fűrészfog'-<br>'dombos' (5)                | 'sima'-'dombos' (4)               |
| 'dombos'-'dombos'<br>(6-os típus) | 'dombos'-'dombos'<br>(7-es típus) | 'sima'-'dombos'-<br>'sima' (4,4)            | 'sima'-'dombos'-<br>'sima' (4,4)  |
| 'dombos'-'dombos'<br>(7-típus)    | 'sima'-'dombos'-<br>'sima' (4,4)  | 'dombos'-<br>'fűrészfog'-<br>'dombos' (5,5) | 'dombos'-'dombos'<br>(6-típus)    |

## 8. Táblázat, a lehetséges csúcsok és lépésenkénti változásai

**5.1. Állítás.** Az oldalak változásainak összegzése:

- Egy  $b(i) = 3$  lépés után a 'sima' és a 'fűrészfog' oldalakból 'sima' oldal lesz.
- A  $b(i) = 2$ -es lépések nem változtatnak az oldalak típusán.
- A 'dombos' oldal nem változik meg egyik lépésben sem.

**5.2. Állítás.** A csúcsok változásainak összegzése:

- Két 'dombos' él között kétféle csúcs is kialakulhat (a 6-os típus lapos, míg a 7-es csúcsos).
- A következő esetekben egy csúcsból kettő (azonos típusú) lesz, vagyis egy új él is kialakul: két 'fűrészfog' közti csúcsból egy  $b(i) = 3$  lépéssel, egy új 'dombos' oldal alakul ki két 'sima' között; két 'dombos' között (a 6-os csúcs-típus esetén)  $b(i) = 2$ , illetve  $b(i) = 3$  esetén egy 'sima' oldal jelenik meg; végül két 'dombos' oldal között (a 7-es esetben) attól függően, hogy  $b(i) = 1$  vagy  $b(i) = 2$  egy 'sima' vagy egy 'fűrészfog' oldal keletkezik. (A 8. Táblázatban ezeket az eseteket jeleztük dupla értékkel).

A 10. Táblázatban nyolc osztályba soroltuk a háromszögrács  $B$ -köreit az alakjuk alapján.

**5.7. Lemma.** Ha egy  $p = (p_1, p_2, p_3)$  pont benne van a  $C_k^B(0, 0, 0)$ -középpontú körben, akkor a  $(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3})$  pontok is a kör pontjai, ahol  $(i_1, i_2, i_3)$  az  $(1, 2, 3)$  tetszőleges permutációja.

**5.6. Tétel.** A háromszögrácson egy  $B$ -kör akkor és csak akkor konvex, ha  $A$  vagy  $B$  típusú (a 10. Táblázatban).

|  |   |
|--|---|
| A) háromszög   | kiinduló: 0 (maga az eredeti háromszög) vagy az abból egyetlen $b(1) = 1$ -lépéssel kapott kör  |
| B) hatszög – hat 'sima' oldallal                           | egyetlen felhasznált $b(i) = 3$ -lépés, a többi lehet $b(j) = 1$ , illetve $b(j) = 2$ úgy, hogy a $b(i) = 3$ utáni lépésekre a $B$ elemeinek összege (a sugárig) páros  |
| C) hatszög – három 'sima' és három 'fűrészfog' oldallal    | csak $b(j) = 1$ , illetve $b(j) = 2$ lépések (nem volt $b(j) = 3$ -lépés)   |
| D) hatszög – hat 'fűrészfog' oldallal                      | egyetlen $b(j) = 3$ -lépés a többi $b(j) = 1$ , illetve $b(j) = 2$ , úgy, hogy a $b(i) = 3$ utáni lépésekre a $B$ elemeinek összege (a sugárig) páratlan  |
| E) kilencszög – hat 'dombos' és három 'sima' oldallal      | csak $b(i) = 1$ -lépések és $b(j) = 3$ -lépések, felváltva (legalább 2 lépés: mindkét-féle lépés előfordul), és $b(k) = 3$ -lépés az utolsó   |
| F) kilencszög – hat 'dombos' és három fűrészfog' oldallal  | csak $b(i) = 1$ -lépések és $b(j) = 3$ -lépések, felváltva (legalább 2 lépés: mindkét-féle lépés előfordul), és $b(k) = 1$ -lépés az utolsó   |
| G) tizenkétszög – hat 'dombos' és hat 'sima' oldallal      | legalább egy $b(i) = 2$ -lépés vagy két egymás utáni $b(j) = 1$ és $b(j + 1) = 1$ -lépések, valamint legalább két $b(h_a) = 3$ -lépés és az utolsó $b(h_a) = 3$ -lépés utáni lépésekre a $B$ elemeinek összege (a sugárig) páros    |
| H) tizenkétszög – hat 'dombos' és hat 'fűrészfog' oldallal | legalább egy $b(i) = 2$ -lépés vagy két egymás utáni $b(j) = 1$ és $b(j + 1) = 1$ -lépések, valamint legalább két $b(h_a) = 3$ -lépés és az utolsó $b(h_a) = 3$ -lépés utáni lépésekre a $B$ elemeinek összege (a sugárig) páratlan |

## 10. Táblázat, A $B$ -körök osztályozása

### 5.7. Egy hálózatos alkalmazás

A szomszédsági sorozatok néhány a háromszögrácson előforduló korábban ismertett tulajdonságára adunk felhasználási ötletet. Adott egy háromszögrács, a pontokban levő emberek, gépek stb. kommunikálhatnak egymással a szomszédaikon keresztül.

Ha pl. egy pont elindít egy kérdést, akkor az a hozzá rendelt  $B$  sorozat alapján  $B$ -körként terjed.

Ha valaki tudja a választ, akkor elindítja a válasz-üzenetet.

Ha ugyanaz a szomszédsági sorozat van a válaszhoz is rendelve, mint ami a kérdéshez volt, akkor a metrika tulajdonságú  $B$ -k alkalmazása célszerű.

**5.4. Állítás.** *Ha  $B$  metrika tulajdonságú, és mind a kérdéshez, mind a válaszhoz ugyanaz a  $B$  van hozzárendelve, akkor*

- a kérdés ugyanannyi ideig megy a válaszolóhoz, mint onnan a válasz vissza, és
- senki nem kaphatja meg hamarabb a válasz-jelet, mint a hozzá tartozó kérdést.

Ugyancsak használhatóak különböző szomszédsági sorozatok a kérdés, illetve a válasz küldéséhez.

Ekkor célszerű a választ úgy küldeni, hogy utolérje a kérdést (pl. a (2) sorozat bárhol elindulva utoléri az (1) sorozat által indukált jelet). Ezzel a módszerrel elkerülhető a rendszer "túlterhelése": ha egy válasz-jel utoléri a hozzá tartozó kérdés-jelet, akkor kioltják egymást (minden pont aki tudott a kérdéstről értesült a válaszról is).

## 6. FEJEZET: További kutatási irányok

### 6.1. Sorozatok távolsága

A szomszédsági sorozatok segítségével nagyon rugalmasan skálázhatjuk a távolság-függvényt. Hasonló módon értelmezhetjük nemcsak véges illetve végtelen egészekből álló sorozatok, hanem tetszőleges valós számsorozatok szomszédsági viszonyait, illetve távolságait. Ilyen jellegű eredményeink [53]-ban találhatóak. Továbbmenve, akár függvények távolságait is értelmezhetjük hasonló módon, definiálva köztük a lehetséges szomszédsági viszonyokat.

### 6.2. Egyéb rácsok

Érdekes továbblépés lehet egyéb rácsok vizsgálata. A sík három reguláris rácsáról akár tetszőleges síkba rajzolható gráfra kiterjeszthetjük a vizsgálatot, sőt 3 (esteleg magasabb) dimenzióban tetszőleges gráfon is vizsgálódhatunk. Most a kocka-, a hatszög-, illetve a háromszögrács kapcsolatából kiindulva egy "háromszögrács-családot" mutatunk be. (Ide vonatkozó eredményeinket lásd [52, 52a].)

#### 6.2.1. "Több-síkos" háromszögrácsok

Megmutattuk, hogy a hatszögrács pontjainak egy, míg a háromszögrácsnak két ferde sík pontjai felelnek meg a kockarácsban. Folytassuk a sort. Először a "3-síkos" háromszögráccsal. Az ábra mutatja a síkbarajzolt 3-síkos háromszögrácsot a megfelelő koordináta értékekkel.

**6.1. Tétel.** *A "4-síkos" háromszögrács nem síkbarajzolható.*

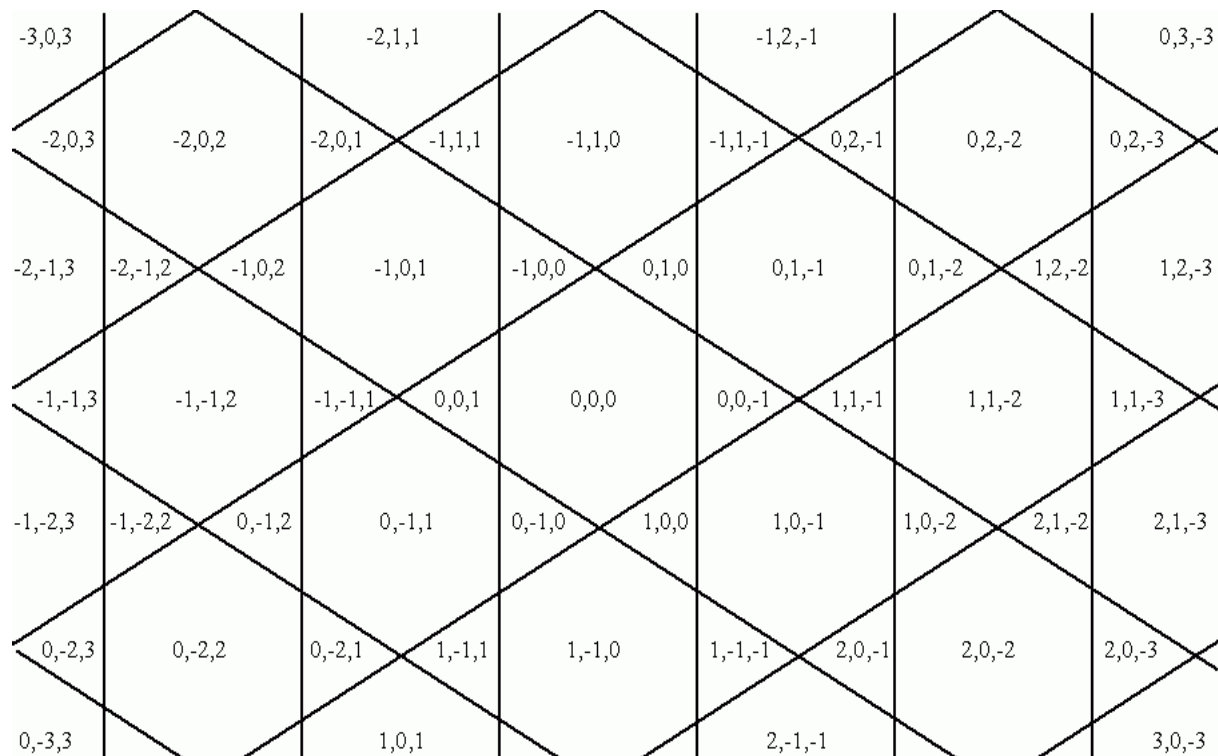
**6.1. Következmény.** *Az "n-síkos" háromszögrácsok nem síkbarajzolhatóak  $n > 3$  esetén.*

### 6.3. Görbék közelítése

A szakirodalomban sok cikk foglalkozik körközelítéssel (pl. [14, 33, 46]). Érdekes lehet egyéb mértani helyek definíciójának megfelelő ponthalmazok vizsgálata is. Példaként a parabolát vagy az ellipszist említhetjük, amik tulajdonképpen terjedő hullámfrontok metszetéből származnak. A terjedő hullámfrontok vizsgálata más alkalmazásokban is érdekes is lehet.

### 6.4. Bolyongás és egyéb alkalmazások

A szerző az első diplomamunkáját ([47]) a bolyongás négyzetrácson témakörben írta. Kézenfekvő és egyszerűen definiálható a bolyongás a szomszédsági sorozatok segítségével



A "3-síkos" háromszögrács és a pontjainak koordinátái.

is. Magas ( $n$ ) dimenzióban előfordulhat, hogy egy  $n$ -lépés hatására "messze" (1-szomszédságokat tekintve) kerülünk az előző ponttól. Ez a tulajdonság az ún. "Lévy-repülés" típusú bolyongásokra jellemző.

Másik lehetséges irány a – Neumann János nevéhez fűződő – sejtautomaták kutatása különböző rácsokon szomszédsági sorozatokkal kombinálva. Ugyancsak érdekes lehet a kép-nyelvek vizsgálata, illetve generálása.

## 7. FEJEZET: Összefoglalás

Rövid (történeti) bevezető után ismertettük az alapdefiníciókat, a rács-specifikus definíciókat ezzel szemben az adott rács jellemzésekor adtuk meg. A 3. Fejezetben a négyzetrácsot, illetve magasabb dimenziós formáit tárgyaltuk. Algoritmust adtunk a legrövidebb  $B$ -út probléma megoldására és viszonylag egyszerű képletet adtunk a  $B$ -távolság számítására. A szomszédsági sorozatokon alapuló távolságokra a háromszögegyenlőtlenség nem mindig áll fenn. Az általunk bevezetett korlátozott-, illetve eltolt sorozatok segítségével adtunk egy szükséges és elégséges feltételt a  $B$  szomszédsági sorozatokra, ahhoz hogy a megfelelő  $B$ -távolság metrika legyen. Az eredményeink nagy része kiterjeszhető a digitális térről a valószám-sorozatokra is, ahogyan utaltunk rá.

Ezután áttértünk a hatszögrács tanulmányozására, ahol egyféle szomszédság az általánosan használt. Itt három koordinátát használtunk a rács leírására, valamint eljárást adtunk a legrövidebb út előállítására. A három koordináta segítségével szimmetrikus alakban határoztuk meg két pont távolságát. Bebizonyítottuk, hogy ez a távolság metrika.

A háromszögrácsot, a szimmetriát megőrizve ugyancsak három koordinátával írtuk le. A bevezetett koordinátarendszer és a három lehetséges szomszédsági viszony összeillik, vagyis a koordináták segítségével ugyanazokat a szomszédsági relációkat definiálhatjuk.

Bevezettük a szomszédsági sorozatokat, értelmeztük az általuk generált utakat és távolságokat. Algoritmust adtunk egy legrövidebb  $B$ -út előállítására bármely adott ponttól egy adott másik pontig. A háromszögrácson előfordulnak nem-szimmetrikus  $B$ -távolságok is. Adtunk egy szükséges és elégséges feltételt a  $B$  szomszédsági sorozatokra ahhoz, hogy a  $B$ -távolság metrika legyen. Ugyancsak levezettünk képletet, amellyel bármely pontok  $B$ -távolságai meghatározhatóak. A szomszédsági sorozatokkal terjedő jelek hullámfrontjait is vizsgáltuk, összehasonlítottuk a négyzet- és a háromszögrács digitális köreit. Leírtuk a nyolcféle kialakuló kört a háromszögrácson. Egy lehetséges hálózatos alkalmazást is felvázoltunk, ahol a háromszögrács éppen a nem szokványos tulajdonságai miatt tűnik használhatónak.

A hatszögrács egy, a háromszögrács pontjai pedig két ferde sík pontjainak felelnek meg a kockarácsonban. Felvázoltuk az 'több-síkos' háromszögrács családot. A következő tag pontjai három darab ferde sík pontjainak felelnek meg a kockarácsonban. Egyéb érdekes kutatási irányok lehetnek pl. a görbék közelítése, vagy a bolyongások vizsgálata a szomszédsági sorozatok segítségével.

## Irodalomjegyzék

- [1] M. R. Anderberg: Cluster Analysis for Application, Academic Press, NY, 1973.
- [2] M. Aswatha Kumar, J. Mukherjee, B. N. Chatterji, and P. P. Das: A geometric approach to obtain best octagonal distances, *Ninth Scandinavian Conf. Image Process.* (1995), pp. 491-498.
- [3] S. B. M. Bell, F. C. Holroyd and D. C. Mason: A digital geometry for hexagonal pixels, *Image and vision comp.* **7** (1989) 194-204.
- [4] G. Borgefors: Distance transformations in arbitrary dimensions, *Comput. Vision Graphics Image Process.* **27** (1984), 321-345.
- [5] G. Borgefors: Distance transformations on hexagonal grids, *Pattern Recognition Lett.* **9** (1989) 97-105.
- [6] C. H. Chen, L. F. Pau and P. S. P. Wang (editors): Handbook of pattern recognition & computer vision, (Handbooks in Science and Technology), Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.
- [7] T. H. Cormen, C. E. Leiserson and R. L. Rivest: Introduction to Algorithms, Hungarian edition Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1997.
- [8] P. Crawley and R. P. Dilworth: Algebraic theory of lattices. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [9] P. E. Danielsson: 3D octagonal metrics, *Eighth Scandinavian Conf. Image Process.* (1993), pp. 727-736.
- [10] P. P. Das: Best simple octagonal distances in digital geometry, *J. Approx. Theory* **68** (1992), 155-174.
- [11] P. P. Das: Lattice of octagonal distances in digital geometry, *Pattern Recognition Lett.* **11** (1990), 663-667.
- [12] P. P. Das, P. P. Chakrabarti and B. N. Chatterji: Distance functions in digital geometry, *Inform. Sci.* **42** (1987), 113-136.
- [13] P. P. Das, P. P. Chakrabarti and B. N. Chatterji: Generalised distances in digital geometry, *Inform. Sci.* **42** (1987), 51-67.

- [14] P. P. Das and B. N. Chatterji: Estimation of errors between Euclidean and  $m$ -neighbor distance, *Inform. Sci.* **48** (1989), 1-26.
- [15] P. P. Das and B. N. Chatterji: Hyperspheres in digital geometry, *Inform. Sci.* **50** (1990), 73-91.
- [16] P. P. Das and B. N. Chatterji: Octagonal distances for digital pictures, *Inform. Sci.* **50** (1990), 123-150.
- [17] P. P. Das, J. Mukherjee and B. N. Chatterji: The  $t$ -cost distance in digital geometry, *Inform. Sci.* **59** (1992), 1-20.
- [18] J. Desbois: Algebraic areas distributions for two-dimensional Lévy flights *J. Phys. A* **25** (1992), L195-L199.
- [19] E. S. Deutsch: Thinning algorithms on rectangular, hexagonal and triangular arrays, *Communications of the ACM*, **15** No.3 (1972) 827-837.
- [20] P. Erdős: Distances between points in the plane. *Geombinatorics* **5** (1996), no. 4, 129-131.
- [21] B. Everitt: Cluster Analysis, Heinemann Educational Books Ltd, London, 1973.
- [22] A. Fazekas: Lattice of distances based on 3D-neighbourhood sequences, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **15** (1999), 55-60.
- [23] A. Fazekas, A. Hajdu and L. Hajdu: Lattice of generalized neighbourhood sequences in  $nD$  and  $\infty D$ , *Publ. Math. Debrecen* **60** (2002), 405-427.
- [24] H. Freeman: Algorithm for Generating a Digital Straight Line on a Triangular Grid *IEEE Transactions on Computers*, **C-28** (1979) 150-152.
- [25] M. J. E. Golay: Hexagonal Parallel Pattern Transformations, *IEEE Transactions on Computers*, **C-18** (1969), 733-740.
- [26] R. C. Gonzalez and R. E. Woods: Digital image processing. Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.
- [27] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver: Geometric algorithms and combinatorial optimization. Second edition. Algorithms and Combinatorics, 2. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [28] P. M. Gruber: Geometry of numbers. *in: Handbook of convex geometry, Vol. A, B*, 739-763, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [29] P. M. Gruber and C. G. Lekkerkerker: Geometry of numbers. Second edition. North-Holland Mathematical Library, 37. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.
- [30] P. M. Gruber, P. Erdős and J. Hammer: Lattice points, Longman Sci. Tech., Harlow, 1989.
- [31] A. Hajdu: Geometry of Neighbourhood Sequences, *Pattern Recognition Lett.*, **24** (2003) 2597-2606.
- [32] A. Hajdu and L. Hajdu: Velocity and distance of neighbourhood sequences, *Acta Cybernet.*, **16** (2003) 133-145.
- [33] A. Hajdu and B. Nagy: Approximating the Euclidean circle using neighbourhood sequences, *KEPAF conference*, **3** (2002), 260-271.
- [34] A. Hajdu, B. Nagy and Z. Zörgő: Indexing and segmenting colour images using neighbourhood sequences, *ICIP'03, IEEE International Conference on Image Processing*, Barcelona, Spain, (2003) 1957-960.
- [35] P. Hajnal: Gráfelmélet (in Hungarian, Graph Theory), Polygon, Szeged, 1997.
- [36] F. Harary, R. A. Melter and I. Tomescu: Digital metrics: a graph theoretical approach, *Pattern Recognition Lett.* **2** (1984), 159-163.
- [37] I. Her: Geometric transformations on the hexagonal grid, *IEEE Transaction on Image Processing* **4** No. 9 (1995), 1213-1221.

- [38] T. Y. Kong and A. Rosenfeld: Digital topology: Introduction and survey, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **48** (1987), 357-393.
- [39] C. G. Lekkerkerker: Geometry of numbers. Bibliotheca Mathematica, Vol. VIII Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1969.
- [40] M. Lothaire: Combinatorics on words. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1983.
- [41] L. Lovász: Geometry of numbers and integer programming. in: Mathematical programming (Tokyo, 1988), 177-201, *Math. Appl. (Japanese Ser.)* **6** SCIPRESS, Tokyo, 1989.
- [42] E. Luczak and A. Rosenfeld: Distance on a Hexagonal Grid, *IEEE Transaction on Computers* (1976), 532-533.
- [43] B. H. McCormick: The Illinois pattern recognition computer-ILLIAC III, *IEEE Trans. Electronic Computers* **EC-12** (1963), 791-813.
- [44] R. A. Melter: A Survey on Digital Metrics, *Contemp. Math.* **119** (1991), 95-106.
- [45] R. A. Melter and I. Tomescu: Path generated digital metrics, *Pattern Recognition Lett.* **1** (1983), 151-154.
- [46] J. Mukherjee, P. P. Das, M. Aswatha Kumar, and B. N. Chatterji: On approximating Euclidean metrics by digital distances in 2D and 3D, *Pattern Recognition Lett.* **21** (2000), 573-582.
- [47] B. Nagy: Bolyongás rácson vizsgálata Rényi entrópiákkal, Master thesis, 1996.
- [48] B. Nagy: Distance functions based on neighbourhood sequences, *Publ. Math. Debrecen* **63** (2003) 483-493.
- [48a] B. Nagy: Distance functions based on neighbourhood sequences, 5<sup>th</sup> *International Conference on Applied Informatics*, Eger-Noszvaj, (2001), 183-190.
- [49] B. Nagy: Shortest Path in Triangular Grids with Neighbourhood Sequences, *Journal of Comp. and Inf. Techn.*, **11** (2003), 111-122.
- [49a] B. Nagy: Finding shortest path with neighbourhood sequences on triangular grids, *ITI - ISPA '01, 2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, Pula, Croatia (2001), 55-60.
- [50] B. Nagy: Metrics Based on Neighbourhood Sequences in Triangular Grids, *Pure Math. Appl.*, **13** (2002), 259-274.
- [51] B. Nagy: Characterization of Digital Circles in Triangular Grid, submitted.
- [52] B. Nagy: Generalised Triangular Grids in Digital Geometry, submitted.
- [52a] B. Nagy: A Family of Triangular Grids in Digital Geometry, *ISPA '03, 3rd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, Rome, Italy, (2003), 101-106.
- [53] B. Nagy: Generalised distances of sequences, submitted
- [54] N. Okabe, J. Toriwaki and T. Fukumura: Paths and distance functions on three-dimensional digitized pictures, *Pattern Recognition Lett.* **1** (1983), 205-212.
- [55] A. Radványi: On the rectangular grid representation of general CNN networks, *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **30** (2002), 181-193.
- [56] A. Rosenfeld, and R. A. Melter: Digital Geometry, *The mathematical intelligencer*, **11** No 3 (1989), 69-72.
- [57] A. Rosenfeld and J. L. Pfaltz: Distance functions on digital pictures, *Pattern Recognition* **1** (1968), 33-61.
- [58] K. Shimizu: Algorithm for Generating a Digital Circle on a Triangular Grid, *CGIP* **15** (1981), 401-402.

- [59] M. Sonka, V. Hlavac and R. Boyle: Image processing, analysis, and machine vision. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, CA, 1999.
- [60] K. Voss: Discrete images, objects, and functions in  $\mathbb{Z}^n$ . Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [61] C. A. Wüthrich and P. Stucki: An algorithmic comparison between square- and hexagonal-based grids, *CVGIP: Graphical Models and Image Proc.* **53** (1991) 324-339.
- [62] M. Yamashita and N. Honda: Distance functions defined by variable neighbourhood sequences, *Pattern Recognition* **17** (1984), 509-513.
- [63] M. Yamashita and T. Ibaraki: Distances defined by neighbourhood sequences, *Pattern Recognition* **19** (1986), 237-246.

## Nagy Benedek publikációi

### Referált folyóiratokban

1. B. Nagy: Metrics Based on Neighbourhood Sequences in Triangular Grids, *Pure Math. Appl.*, **13** (2002), 259-274.
2. B. Nagy: Boole programozás gráfok segítségével, *Sigma* **23** (2002), 115-130.
3. B. Nagy: Truth-teller and liar puzzles and their graphs, *Central European Journal of Operations Research - CEJOR* **11** (2003), 57-72.
4. B. Nagy: SW-type truth-teller - liar puzzles and their graphs, *Acta Cybernetica*, **16** (2003), 67-82.
5. B. Nagy: Shortest Path in Triangular Grids with Neighbourhood Sequences, *Journal of Comp. and Inf. Techn.*, **11** (2003), 111-122.
6. B. Nagy: Distance functions based on neighbourhood sequences, *Publ. Math. Debrecen* **63** (2003) 483-493.
7. B. Nagy: The languages of SAT and  $n$ -SAT over finitely many variables are regular, *Bulletin of EATCS*, megjelenés alatt
8. B. Nagy: Characterization of Digital Circles in Triangular Grid, *Pattern Recognition Lett.*, közlésre elfogadva.
9. B. Nagy: Generalised Triangular Grids in Digital Geometry, közlésre beküldve.
10. B. Nagy: Generalised distances of sequences, közlésre beküldve.

### Referált konferenciakötetekben

11. B. Nagy: Distance functions based on neighbourhood sequences, *5<sup>th</sup> International Conference on Applied Informatics*, Eger-Noszvaj, (2001), 183-190.
12. B. Nagy and M. Kósa: Logical puzzles (truth-tellers and liars), *ICAI'01, 5th International Conference on Applied Informatics* (2001), Eger, 105-112.
13. B. Nagy: Finding shortest path with neighbourhood sequences on triangular grids, *ITI - ISPA'01, 2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, Pula, Croatia (2001), 55-60.
14. A. Hajdu and B. Nagy: Approximating the Euclidean circle using neighbourhood sequences, *KEPAF conference*, **3** (2002), 260-271.
15. B. Bojda and B. Nagy: Információtechnológiai eszközök használata az "új" pedagógiában, *Informatika a Felsőoktatásban* (2002), Debrecen, 600-606.
16. B. Bojda, Zs. Kőműves and B. Nagy: Gondolatok a számítógépes játékok képességfejlesztő hatásáról, egy felmérés kapcsán, *Informatika a Felsőoktatásban* (2002), Debrecen, 537-543.
17. B. Nagy: Informatika az INDIANA Egyetemen, *Informatika a Felsőoktatásban* (2002), Debrecen, 642-648.
18. M. Várterész, B. Nagy, M. Kósa and J. Pánovics: A Mesterséges intelligencia tárgy bevezető kurzusának gyakorlatai a Debreceni Egyetemen, *Informatika a Felsőoktatásban* (2002), Debrecen, 1103-1109.
19. B. Nagy: Boolean programming, truth-teller-liar puzzles and related graphs, *ITI 2003, 25th International Conference on Information Technology Interfaces* (2003), Cavtat, Croatia, 663-668.
20. B. Bojda and B. Nagy: Items of technological planning and education in Hungary, *ITI 2003, 25th International Conference on Information Technology Interfaces* (2003), Cavtat, Croatia, 335-340.

21. B. Nagy: A Family of Triangular Grids in Digital Geometry, *ISPA '03, 3rd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, Rome, Italy, (2003), 101-106.
22. A. Hajdu, B. Nagy and Z. Zörgő: Indexing and segmenting colour images using neighbourhood sequences, *ICIP'03, IEEE International Conference on Image Processing*, Barcelona, Spain, (2003) 1957-960.
23. B. Nagy and G. Allwein: Diagrams and Non-monotonicity in Puzzles, Conference Diagrams'2004 (LNCS, Artificial Intelligence), előadásra és megjelenésre elfogadva

## Postai cím

**Nagy Benedek**

Informatikai Intézet

Debreceni Egyetem

4032, Egyetem tér 1., Debrecen

e-mail: [nbenedek@inf.unideb.hu](mailto:nbenedek@inf.unideb.hu)