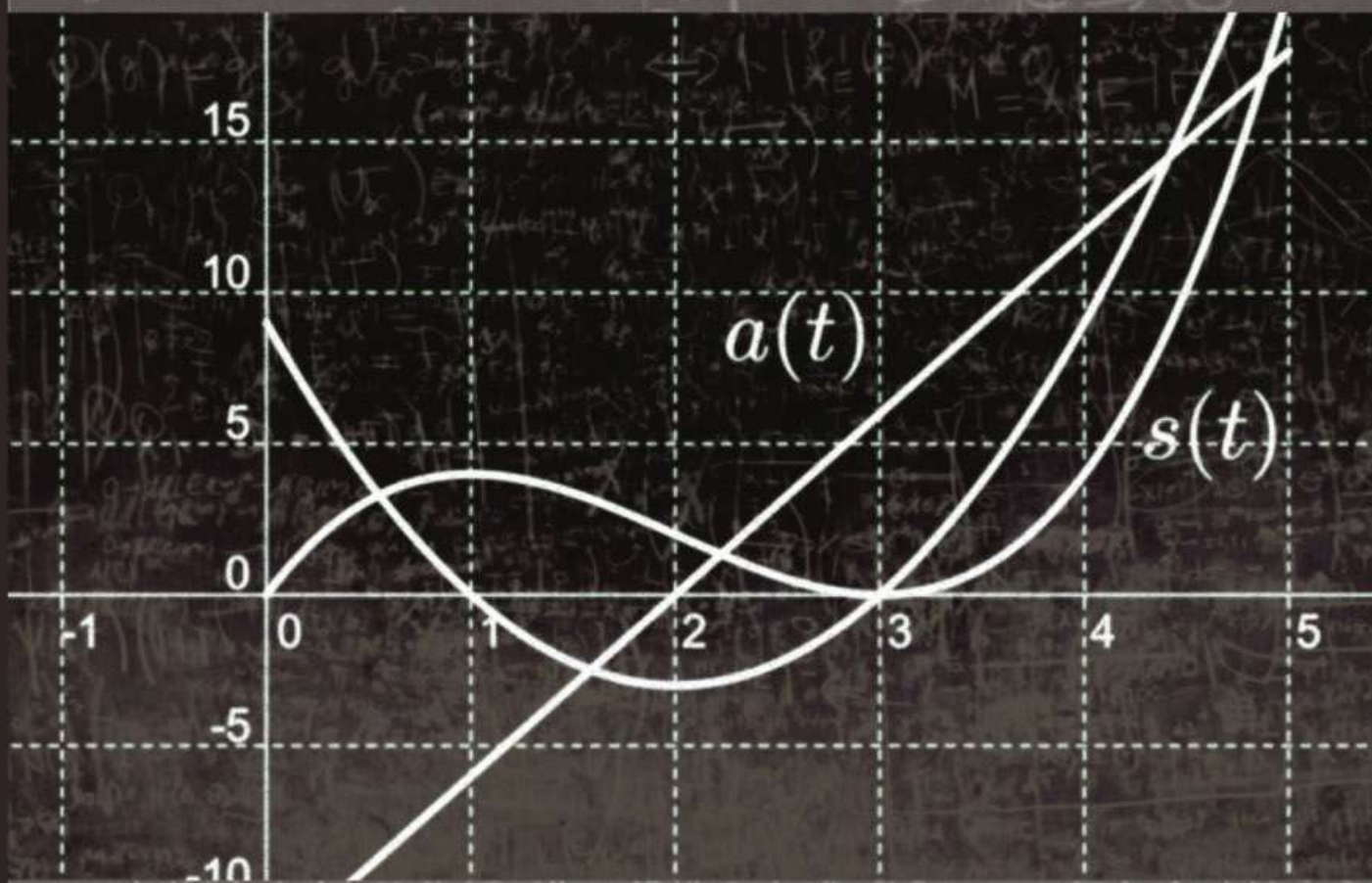


Dr. Kézi Csaba, Gábor

Differenciálszámítás és alkalmazásai



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ÉS ALKALMAZÁSAI

Dr. Kézi Csaba Gábor

DUPress

Lektorok:

Dr. Kocsis Imre

tanszékvezető főiskolai tanár

DE Műszaki Kar, Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Dr. Nagy Gergő

tanársegéd

DE Természettudományi és Technológiai Kar, Analízis Tanszék
tudományos segédmunkatárs (MTA)

ISBN 978 963 318 581 0

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

Kiadta a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi

Készült a DE sokszorosítóüzemében, 2016-ban

Előszó

Ez a jegyzet elsősorban a Debreceni Egyetem Műszaki Karának Matematika II. gyakorlatához készült oktatási segédanyagként. A jegyzet a precíz matematikai felépítésen túl számos, a műszaki és gazdasági életben felmerülő probléma megoldására alkalmazható módszert is bemutat.

A jegyzethez szorosan kapcsolódik mind tematikájában, mind felépítésében, mind jelölésrendszerében egy feladatgyűjtemény, amely 333 darab részletesen kidolgozott feladatot tartalmaz az egyszerűbb típusfeladatoktól, a bonyolultabb versenyszintű feladatokig.

A jegyzetet egyetemünk szinte minden magasabb szintű matematikát tanuló hallgatója használhatja, ugyanis a precíz matematikai felépítés mellett nagy hangsúlyt kapnak az alkalmazott matematikai feladatok.

Minden fejezet végén „ellenőrző kérdések” találhatók, melyek alkalmasak arra, hogy felmérjék, hogy az olvasó mennyire sikeresen sajátította el az adott fejezet tartalmát.

A jegyzet elkészüléseért köszönettel tartozom a jegyzet lektorának, Dr. Kocsis Imre főiskolai tanárnak, a Műszaki Alaptárgyi Tanszék vezetőjének, aki hasznos információkkal látott el a példatár megírása során. Köszönettel tartozom Tóth Xénia Erzsébet mechatronikai mérnök MSc hallgatónak és Dr. Nagy Gergő tanársegédnek a feladatok gondos átolvasásáért. Köszönöm továbbá a Műszaki Alaptárgyi Tanszék minden oktatójának, valamint Dr. Baják Szabolcsnak, akitől a személyes beszélgetéseink során jó néhány hasznosítható ötletet meríthettem. A szakmai segítség mellett elengedhetetlen a család türelme, támogatása és biztatása. Köszönöm édesanyámnak, hogy mindenben mellettem állt és segített.

2016. május 9.

1. Differencia- és differenciálhányados fogalma

1.1. Megjegyzés. A differenciálszámítás a *XVII.* század kimagasló matematikai felfedezése volt, mely Isaac Newton (1643-1727) és Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nevéhez fűződik.

Leibniz 1684-ben az *Acta Eruditorum* című folyóiratban publikálta cikkét, amelyben a függvénygrafikonok érintő egyenesének meghatározását írta le. Ezzel lényegében már a differenciálhányados fogalmát adta meg. Newton, függetlenül Leibniz munkásságától a mozgás sebességét elemezve jutott el a differenciálhányados felfedezéséhez.

Newton és Leibniz megfogalmazásai mai szemmel nézve még pontatlanok voltak, ugyanis nem a határérték precíz fogalmával dolgoztak, eredményeik főleg csak intuíción alapultak, felfedezéseik mégis rendkívüli hatással voltak a matematika későbbi fejlődésére.

A differenciálhányados mind a matematika, mind pedig más tudományok (közgazdaságtan, fizika, társadalomtudomány, kémia, biológia) területén kulcsfontosságú szerepet játszik.

1.2. Megjegyzés. A jegyzet további részében, ha mást nem mondunk I egy rögzített nyílt intervallumot jelöl.

1.3. Definíció. Tekintsük az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt és legyen $x_1, x_2 \in I$ úgy, hogy $x_1 \neq x_2$. Az f függvény $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ pontjaihoz tartozó *differenciahányadosán* az

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

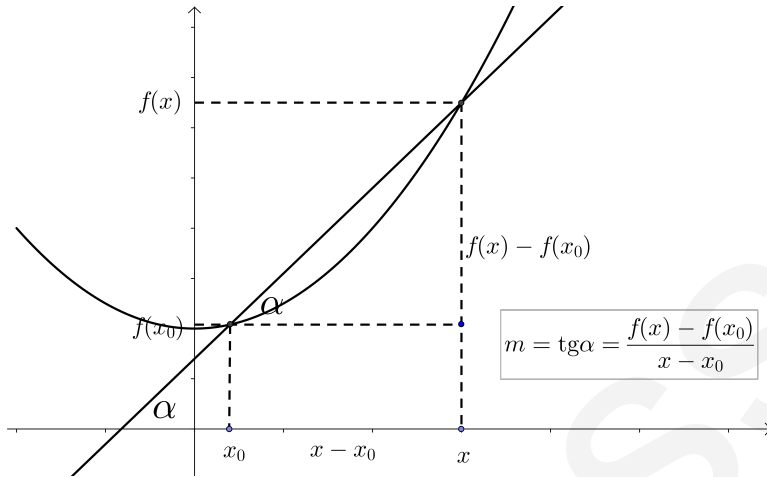
hányadost értjük.

1.4. Definíció. Legyen $x_0 \in I$. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 helyhez tartozó *differenciahányados függvénye* a

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I \setminus \{x_0\}$$

függvény.

1.5. Megjegyzés. A differenciahányados geometria jelentése az $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$ pontokon áthaladó szelő meredeksége.



1.6. Példa. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó differenciáhányados függvényét!

A keresett differenciáhányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \\ &= \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1. \end{aligned}$$

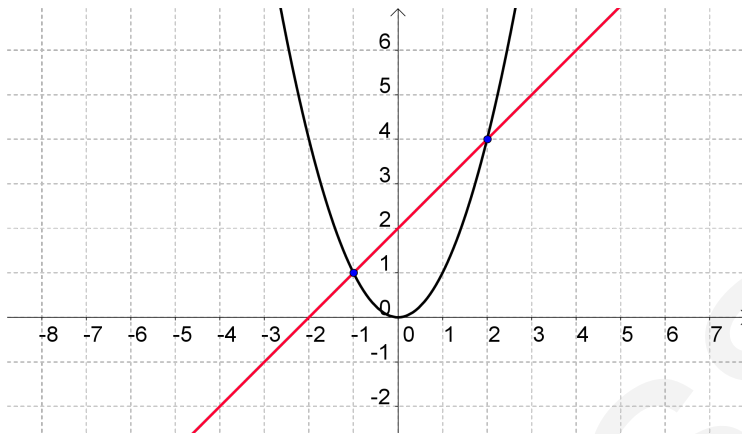
1.7. Példa. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvénynek a $(-1; 1)$ és $(2; 4)$ pontjai által meghatározott szelőjének egyenletét!

Az egyenes egyenletét $y = mx + b$ alakban keressük, ahol m a keresett egyenes meredeksége, b az egyenes y tengellyel való metszéspontja. Az előző megjegyzés szerint a meredekséget a differenciáhányados adja, így

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{2 - (-1)} = 1.$$

Mivel például a $(2; 4)$ pont illeszkedik a keresett egyenesre, ezért annak koordinátáit behelyettesítve az egyenes egyenletébe azonosságot kell kapnunk, így fenn kell állnia a $4 = 1 \cdot 2 + b$ egyenletnek, amiből $b = 2$ adódik. Tehát a keresett egyenes egyenlete

$$y = x + 2.$$



1.8. Megjegyzés. (A differenciálhányados fizikai jelentése.)

Az

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

differenciálhányados értéke az $f(x)$ függvény átlagos változási gyorsaságát adja meg az $[x_1; x_2]$ intervallumon. Nézzünk néhány példát:

- 1) Ha egy egyenes pályán mozgó test hely-idő függvénye a $t \rightarrow s(t)$ függvény, akkor a $[t_1; t_2]$ időintervallumban az átlagsebessége

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1},$$

ami éppen a differenciálhányados.

- 2) Ha egy egyenes pályán mozgó test sebesség-idő függvénye a $t \rightarrow v(t)$ függvény, akkor a $[t_1; t_2]$ időintervallumban az átlagos gyorsulás

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1},$$

ami éppen a differenciálhányados.

- 3) A munkavégzés közben a munka nagysága mellett az is fontos kérdés, hogy mennyi idő alatt zajlott le a folyamat. A munkavégzés intenzitását a teljesítmény fejezi ki. Azt a fizikai mennyiséget, amely megadja a munkavégzés gyorsaságát, tehát, hogy egységnyi idő alatt mennyi a végzett munka, *átlagteljesítménynek* nevezzük. A teljesítmény jele: P . Így

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W(t_2) - W(t_1)}{t_2 - t_1},$$

ami éppen a differenciáhányados.

1.9. Példa. A következőkben a differenciáhányados fizikai alkalmazására mutatunk két konkrét példát.

- 1) Mekkora annak a gépkocsinak az átlagsebessége, amely 8 órát tölt úton, és az első 3 órában 150 kilométert tesz meg, a következő 2 órában egyenletes 60 [km/h] sebességgel halad, azután másfél órát áll, végül még 80 kilométer utat tesz meg?

Az első szakaszon 150 kilométert, a második szakaszon 120 kilométert, végül 80 kilométert tesz meg a gépkocsi, így összesen a megtett út 350 [km]. Az eltelt idő 8 óra, így az átlagsebesség

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{350 - 0}{8 - 0} = 43,75 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right].$$

- 2) Egy szánkót 90 [N] nagyságú vízszintes erővel állandó sebességgel 80 [s] alatt 200 [m]-re húzunk el. Mekkora a teljesítmény?

A végzett munka

$$W(t) = W(80) = F \cdot s = 90 \cdot 200 = 18.000 [J],$$

így a teljesítmény

$$P = \frac{W(t_2) - W(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{18.000 - 0}{80 - 0} = 225 [W].$$

1.10. Példa. [7] Meg szeretnénk állapítani, hogy milyen sebességgel fut a 100 méteres síkfutás egyik versenyzője a cél előtt 10 méterrel. Ezen célból állítunk fel több megfigyelőt a versenypálya mellett azzal a megbízással, hogy stopperórájukkal állapítsák meg pontosan, hogy melyik időpillanatban haladt el előttük a versenyző. A távolságot méterben, az időt másodperceben mérjük. Az első megfigyelő álljon a cél előtt 10 méterrel, s jelezze az órája a $t_0 = 13,8$ időt. Álljon a második megfigyelő a cél előtt 20 méterrel, s órája jelezze a $t_1 = 12,4$ időt, amikor a sportoló elhalad előtte. Ekkor az

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{80 - 90}{12,4 - 13,8} \approx 7,18$$

érték nem adja meg pontosan a versenyző sebességét a cél előtt 10 méterrel, hiszen az utolsó méterekben például valószínűleg gyorsított. Így a kapott érték csak átlagsebességnek tekinthető. Nyilván pontosabban kapjuk meg a keresett sebesség értékét, ha a cél előtt 3 méterre álló megfigyelő adatait vesszük

figyelembe. Legyen $t_2 = 14,6$. Ekkor

$$\frac{s(t_2) - s(t_0)}{t_2 - t_0} = \frac{97 - 90}{14,6 - 13,8} \approx 8,75.$$

Nyilván annál pontosabb értéket kapunk a keresett sebességre, minél közelebb áll az első megfigyelőhöz (aki 10 méterre áll a céltól) a másik megfigyelő. Az adott pontbeli sebességet a megfigyelők mérési adataiból nyert közelítő sebességértékek sorozatának határértéke adja, miközben $t_n \rightarrow 0$.

1.11. Példa. [7] Változó intenzitású áram feltölt egy kondenzátort. Minden t időpillanatban meg tudjuk mondani, mennyi elektromos töltést szállított az áram addig a kondenzátorba. Ki akarjuk számolni, hogy adott t_0 időpillanatban mekkora az áram intenzitása. Egyenáram intenzitását megkaphatjuk, ha valamely időtartam alatt szállított elektromos töltés mérőszámát elosztjuk az időtartam hosszával. Jelöljük a t_n időpillanatig szállított töltések nagyságát $q(t_n)$ -nel. Ha tehát $t_1, t_2, \dots, t_n$ -nel jelölünk bizonyos, a t_0 időpillanathoz közeli pillanatokot, akkor a

$$\frac{q(t_1) - q(t_0)}{t_1 - t_0}, \frac{q(t_2) - q(t_0)}{t_2 - t_0}, \dots, \frac{q(t_n) - q(t_0)}{t_n - t_0}$$

hányadosok közelítőleg adják meg az áram t_0 időpillanatbeli intenzitását. Ha azonban vesszük a $t_n \rightarrow t_0$ határátmenetet, akkor megkapjuk a t_0 pillanatbeli áramintenzitás pontos értékét.

1.12. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* az $x_0 \in I$ helyen, ha a differenciahányados függvényének létezik az x_0 helyen határértéke, és az véges, azaz létezik és véges az

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték. Ekkor ezt a határértéket az f függvény x_0 -beli *differenciálhányadosának*, vagy *deriváltjának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható*, ha értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható.

Jelölések: $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\dot{f}(t)$, $\frac{d}{dx}f(x_0)$.

Gyakran használjuk a differenciálhányadosra a következő tételben leírt formulát.

1.13. Tétel. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, ha létezik a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határérték, és véges.

Bizonyítás: A korábbi jelöléseket megtartva, a differenciálhányados definíciójából $h = x - x_0$ választással adódik a tétel állítása. ■

1.14. Megjegyzés. Az előbbi tételben szereplő h mennyiséget szokás Δx -el is jelölni, így azt kapjuk, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor differenciálható az x_0 helyen, ha létezik az

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

véges határérték.

A következő tétel azt fejezi ki, hogy a differenciálhatóság a lineáris approximálhatóságot jelenti.

1.15. Tétel. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Ha az előbbi egyenlőség teljesül, akkor $A = f'(x_0)$.

Bizonyítás: Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor $A = f'(x_0)$ esetén

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Fordítva, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

akkor

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0) + A \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0)}{x - x_0} + \frac{A \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0)}{x - x_0} + A \rightarrow A,\end{aligned}$$

ha $x \rightarrow x_0$, így f differenciálható és $f'(x_0) = A$. ■

1.16. Megjegyzés. Legyen az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in I$ helyen differenciálható és definiáljuk az

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0}$$

függvényt. Ekkor az előbbi tétel szerint $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow x_0$. Másrészt az egyenletet átrendezve

$$f(x) - f(x_0) = \varepsilon(x) \cdot (x - x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

adódik. Ez alapján tehát, ha f differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor van olyan $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0),$$

és $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow x_0$, azaz

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

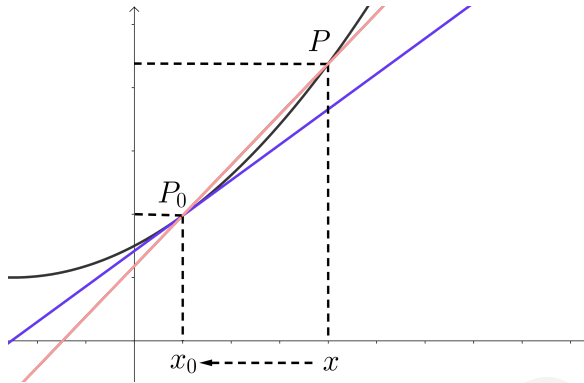
vagyis az f függvény $f(x) - f(x_0)$ növekménye az $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ elsőfokú függvénnyel közelíthető, azaz *lineárisan approximálható*, továbbá a közelítés hibája kicsi, pontosabban fogalmazva az ε függvény (nevezzük hibafüggvénynek) nullához tart, ha $x \rightarrow x_0$.

1.17. Definíció. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor az

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

egyenletű egyenest az f függvény $(x_0, f(x_0))$ pontbeli *érintő egyenesének*, vagy egyszerűen *érintőjének* mondjuk.

1.18. Megjegyzés. A differenciálhányados geometriai jelentése a függvény grafikonjának $(x_0, f(x_0))$ pontjába húzott érintő egyenesének meredeksége.



1.19. **Példa.** Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 5x + 6$ függvény differenciálhányadosát (deriváltját) az $x_0 = 2$ helyen!

A differenciahányados függvény

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 5x + 6 - 0}{x - 2} = \frac{(x - 2) \cdot (x - 3)}{x - 2} = x - 3,$$

melynek a határértéke az $x_0 = 2$ helyen

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1.$$

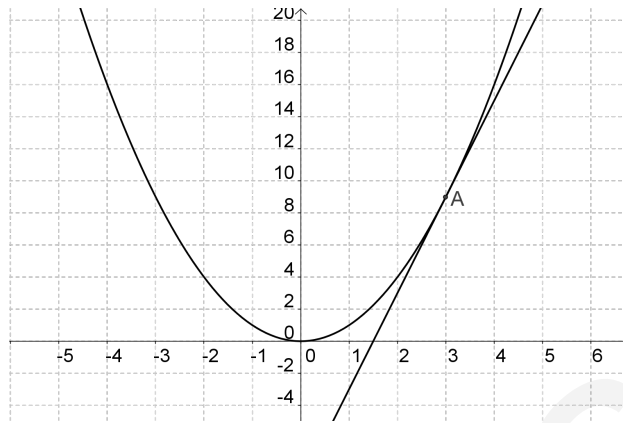
1.20. **Példa.** Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvénynek $x_0 = 3$ helyhez tartozó érintő egyenesének meredekségét, és írjuk föl az érintő egyenletét!

Az érintő egyenletét $y = mx + b$ alakban keressük. Az érintő meredeksége éppen a függvény adott helyhez tartozó differenciálhányadosa. Így

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6. \end{aligned}$$

Mivel a $(3; 9)$ pont illeszkedik a keresett egyenesre, ezért annak koordinátáit behelyettesítve az egyenes egyenletébe azonosságot kell kapnunk, így fenn kell állnia a $9 = 6 \cdot 3 + b$ egyenletnek, amiből $b = -9$ adódik. Tehát a keresett egyenes egyenlete

$$y = 6x - 9.$$



1.21. **Megjegyzés.** A differenciálhányados a függvény változási gyorsaságát fejezi ki az adott helyen.

- 1) Egy egyenesvonalú mozgást végző pontszerű test $t \rightarrow s(t)$ hely-idő függvényének deriváltja a test adott pillanatbeli sebessége:

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- 2) Egy egyenesvonalú mozgást végző pontszerű test $t \rightarrow v(t)$ sebesség-idő függvényének deriváltja a test adott pillanatbeli gyorsulása:

$$a(t_0) = v'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}.$$

- 3) A pillanatnyi teljesítmény a munka idő szerinti deriváltja:

$$P(t_0) = W'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{W(t) - W(t_0)}{t - t_0}.$$

- 4) Megjegyezzük, hogy amennyiben egy fizikai mennyiség időtől való függését vizsgáljuk, úgy a deriváltat ponttal is szokás jelölni, azaz $f'(t)$ helyett az $\dot{f}(t)$ jelölés is használatos.

1.22. **Példa.** Egy 100 méter magas torony tetejéről leejtünk egy követ. A kő t másodperc elteltével $s(t) = 100 - 4,9t^2$ méter távolságra van a talajtól. Mekkora a kő sebessége 2 másodperccel a leejtés után?

Vegyük fel a $\downarrow_{\oplus}$ irányt. A pillanatnyi sebességet a függvény adott helyhez tartozó differenciálhányadosa adja meg

$$\begin{aligned} v(2) = s'(2) &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{100 - 4,9t^2 - (100 - 4,9 \cdot 4)}{t - 2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4,9 \cdot (4 - t^2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4,9 \cdot (2 - t) \cdot (2 + t)}{t - 2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} -4,9 \cdot (2 + t) = -19,6 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]. \end{aligned}$$

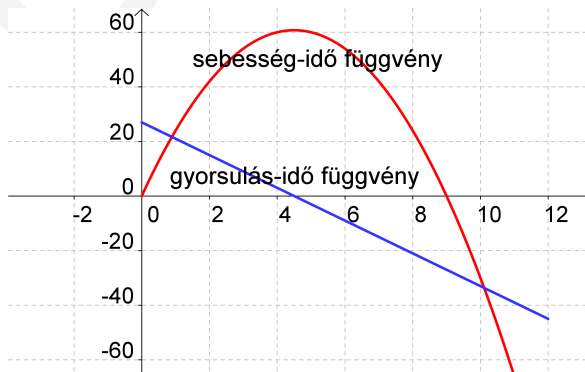
1.23. Példa. Egy egyenes pályán haladó gépkocsi sebesség-idő függvénye a $t \in [0; 12]$ időintervallumban $v(t) = 27t - 3t^2$. Határozzuk meg a gyorsulás-idő függvényt! Ábrázoljuk mindkét függvényt! Értelmezzük a kapott eredményt!

megoldás:

A gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény deriváltja:

$$\begin{aligned} a(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{27t - 3t^2 - (27t_0 - 3t_0^2)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{27 \cdot (t - t_0) - 3 \cdot (t^2 - t_0^2)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{27 \cdot (t - t_0) - 3 \cdot (t - t_0) \cdot (t + t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0) \cdot (27 - 3 \cdot (t + t_0))}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} (27 - 3 \cdot (t + t_0)) = 27 - 6t_0. \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a gyorsulás-idő függvény $a(t) = 27 - 6t$. A sebesség-idő, illetve gyorsulás-idő függvények:



A gépkocsi 4,5 másodpercig távolodik a kiindulás helyétől. Ezután megfordul és elindul az eredetihez képest ellenkező irányba. Az indulást követően 9 másodperccel visszajut a kiindulás helyére, majd tovább halad a megfigyelés végéig.

1.24. Példa. Legyen C egy vállalat adott termékére vonatkozó költségfüggvény, amely megadja x mennyiség előállítás költséget:

$$C(x) = x^2 + x + 100, \quad x > 0.$$

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a költség, ha az előállított mennyiséget 100 egységről 110 egységre növeljük. A költségváltozás

$$\begin{aligned} C(110) - C(100) &= 110^2 + 110 + 100 - (100^2 + 100 + 100) = \\ &= 12.310 - 10.200 = 2.110. \end{aligned}$$

A költség pillanatnyi változási gyorsasága, ha a termelést 100 egységről 110 egységre növeljük:

$$\frac{C(110) - C(100)}{110 - 100} = \frac{2.110}{10} = 211,$$

ami éppen a C függvény $x_0 = 100$ ponthoz tartozó differenciáhányados függvényének helyettesítési értéke az $x = 110$ helyen. A költségváltozás gyorsasága, amelyet a közgazdaságtanban *határköltség*nek is szokás nevezni, éppen a differenciálhányados, azaz

$$\begin{aligned} C'(100) &= \lim_{x \rightarrow 100} \frac{C(x) - C(100)}{x - 100} = \lim_{x \rightarrow 100} \frac{x^2 + x + 100 - 10200}{x - 100} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 100} \frac{x^2 + x - 10100}{x - 100} = \lim_{x \rightarrow 100} \frac{(x - 100) \cdot (x + 101)}{x - 100} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 100} (x + 101) = 201. \end{aligned}$$

Az eredmény azt jelenti, hogy ha a mennyiséget 100-ról egy egységgel növeljük, akkor az előállítási költség közelítőleg 201 egységgel nő.

1.25. Definíció. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 helyhez tartozó *bal oldali differenciálhányadosán* (bal oldali deriváltján) az

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határértéket értjük, ha az létezik és véges.

1.26. Definíció. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 helyhez tartozó *jobb oldali differenciálhányadosán* (*jobb oldali deriváltján*) az

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határértéket értjük, ha az létezik és véges.

1.27. Tétel. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, ha ott létezik a bal oldali és jobb oldali deriváltja, és azok egyenlőek.

Bizonyítás: A tétel állítása azonnal adódik abból a tételből, hogy egy függvénynek pontosan akkor létezik egy adott helyen határértéke, ha ott létezik a bal oldali és jobb oldali határértéke és azok megegyeznek. ■

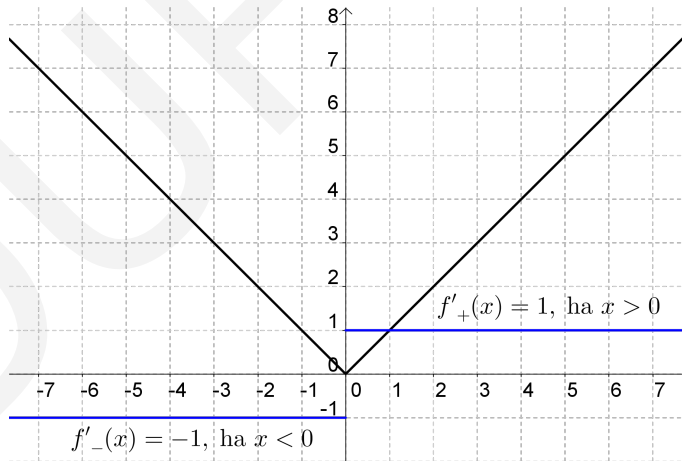
1.28. Példa. Tekintsük az $f(x) = |x|$ függvényt. Ennek bal oldali deriváltja az $x_0 = 0$ helyen

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1,$$

jobb oldali differenciálhányadosa

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1,$$

így a függvény nem differenciálható az $x_0 = 0$ helyen, mert $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$.



Ellenőrző kérdések

1. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli differenciahányadosa:
2. Egyváltozós függvény differenciahányadosának geometriai jelentése:
3. Egyváltozós függvény differenciahányadosának fizikai jelentése:
4. A $t \rightarrow s(t)$ hely-idő függvény differenciahányadosának jelentése a $[t_1; t_2]$ intervallumon:
5. A $t \rightarrow v(t)$ sebesség-idő függvény differenciahányadosának jelentése a $[t_1; t_2]$ intervallumon:
6. Adjuk meg az $f(x) = x^2 + 2x$ függvény $x_0 = -3$ helyhez tartozó differenciahányados függvényét!
7. Adjuk meg az $f(x) = x^2$ függvény $x_0 = 4$ helyhez tartozó differenciahányados függvényének tovább már nem egyszerűsíthető alakját!
8. Adjuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $x_0 = 4$ helyhez tartozó differenciahányados függvényének tovább már nem egyszerűsíthető alakját!
9. Adjuk meg az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény $x_0 = 4$ helyhez tartozó differenciahányados függvényének tovább már nem egyszerűsíthető alakját!
10. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli differenciálhányadosa:
11. Egyváltozós függvény differenciálhányadosának geometriai jelentése:
12. Egyváltozós függvény differenciálhányadosának fizikai jelentése:
13. A $t \rightarrow s(t)$ hely-idő függvény t_0 -beli deriváltjának jelentése:
14. A $t \rightarrow v(t)$ sebesség-idő függvény t_0 -beli deriváltjának jelentése:
15. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény érintő egyenesének egyenlete:
16. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli bal oldali differenciálhányadosa:
17. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli jobb oldali differenciálhányadosa:

2. A differenciálhatóság és a folytonosság közötti kapcsolat

2.1. Tétel. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás: A folytonosság igazolásához megmutatjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Mivel

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

ezért mindkét oldalon véve az $x \rightarrow x_0$ határátmenetet – majd jobb oldalon kihasználva, hogy két függvény szorzatának határértéke a tényezők határértékeinek szorzata, valamint mivel az f függvény differenciálható, ezért a differenciáhányadosnak létezik véges határértéke – azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Tehát

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0,$$

ami ekvivalens a bizonyítandó állítással. ■

2.2. Megjegyzés. Az előbbi tétel megfordítása nem igaz, azaz van olyan folytonos függvény, amely nem differenciálható. Például az $f(x) = |x|$ függvény az $x_0 = 0$ helyen folytonos, de nem differenciálható.

2.3. Megjegyzés. Az előbbieket alapján tehát azt mondhatjuk, hogy a folytonosság szükséges feltétele a differenciálhatóságnak, azonban ez a feltétel nem elégséges. Másképpen fogalmazva a differenciálhatóság elegendő feltétele a folytonosságnak, azonban ez a feltétel nem szükséges feltétel.

A következőkben olyan függvényeket fogunk konstruálni, amelyek értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak, de sehol sem differenciálhatóak. Ehhez szükségünk lesz az alábbi két lemmára. Ezek előtt azonban emlékeztetünk a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmára, amire szükségünk lesz a későbbiekben.

2.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor a $H \subset \mathbb{R}$ halmazon *egyenletesen konvergál* az f függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan x -től független $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq n_0$ és minden $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2.5. Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Ha létezik olyan (b_n) valós számsorozat, hogy minden $x \in H$ esetén

$$|f_n(x)| \leq b_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ numerikus sor konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens H -n.

2.6. Lemma. Egyenletesen konvergens függvénysor összegfüggvénye folytonos.

2.7. Megjegyzés. Létezik olyan függvény, amely értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, de sehol sem differenciálható. Ilyen függvényekre példák az úgynevezett Takagi-típusú függvények. A következőkben megkonstruálunk egy ilyen típusú függvényt. Defináljuk a $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy a $\varphi(x)$ függvény értéke az x helyen legyen x -nek az x -hez legközelebb eső egész számtól való távolsága. Ezt felhasználva definiáljuk a $T(x)$ függvényt az alábbi módon:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \cdot \varphi(4^n \cdot x).$$

Ez a függvény mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható. A folytonosság a függvénysorokra vonatkozó Weierstrass-tételből következik, mert

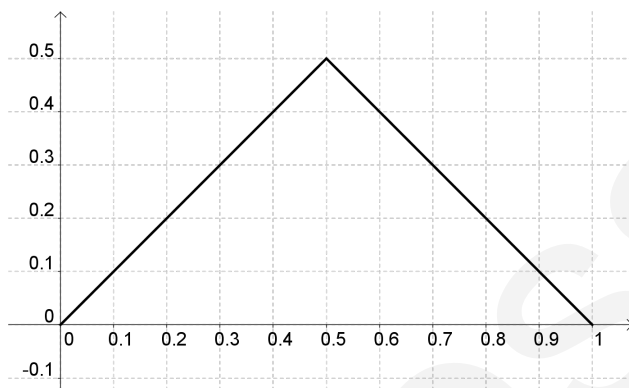
$$\left| \frac{1}{4^n} \cdot \varphi(4^n \cdot x) \right| \leq \left(\frac{1}{4} \right)^n,$$

ugyanis $|\varphi| < 1$, és a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n$ konvergens numerikus sor, azaz T konvergens numerikus sorral felülről becsülhető (majorálható), így a 2.5 lemma szerint egyenletesen konvergens, és így a 2.6 lemma miatt folytonos. Megmutatható, hogy T sehol sem differenciálható. Ezt úgy lehet belátni, hogy megadható olyan $x_n \rightarrow 0$ sorozat, hogy

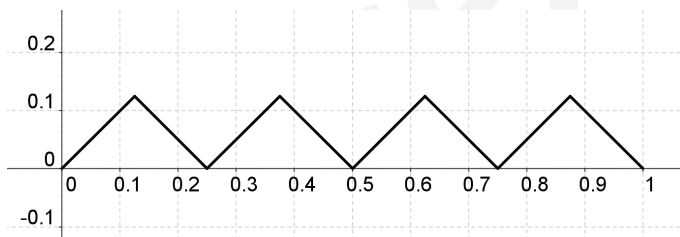
$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \left| \frac{T(x + h_n) - T(x)}{h_n} \right| \rightarrow \infty$$

teljesül minden x -re.

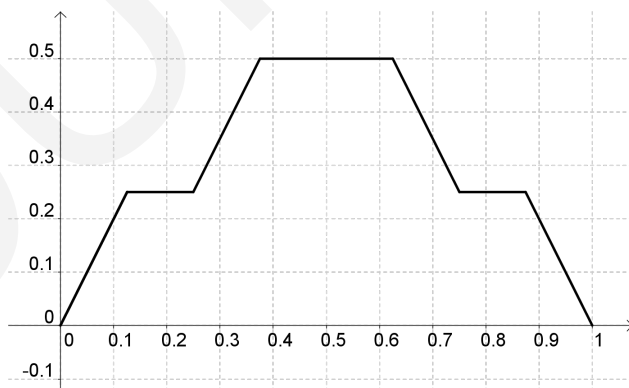
2.8. Megjegyzés. Elkészítjük $n = 0$ -ra és $n = 1$ -re az előbb Takagi-típusú függvény grafikonját. Ha $n = 0$, akkor $T(x) = \varphi(x)$, aminek a grafikonja:



Az $\frac{1}{4} \cdot \varphi(4x)$ függvény grafikonja:



Tehát $n = 1$ esetén a $T(x) = \frac{1}{4} \cdot \varphi(4x) + \varphi(x)$ függvény grafikonja:



2.9. Megjegyzés. Egy másik megközelítés mindenütt folytonos sehol sem differenciálható függvények konstrukciójára.

Tekintsük a $\varphi: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|$ függvényt, továbbá ennek a periodikus kiterjesztését, azaz legyen $\varphi(x) = \varphi(x+2)$, ami egy 2-periodusú függvény. Ez a függvény nyilván folytonos, és megszámlálható sok pontban nem differenciálható. Sűrítsük azokat a pontokat, ahol a függvény nem differenciálható. Tekintsük az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \varphi(4^n \cdot x)$$

függvényt! A korábbi gondolatmenethez hasonlóan mutatható meg, hogy f mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható.

2.10. **Példa.** Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ha } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény folytonos, de nem differenciálható az $x_0 = 0$ helyen! A folytonosság következik abból, hogy egyrészt

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1,$$

másrészt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x + 1 = 0 + 1 = 1,$$

továbbá $f(0) = 1$, így

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0).$$

Ugyanakkor f nem differenciálható, mert a bal oldali derivált a 0 helyen

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} x = 0,$$

a jobb oldali derivált a 0 helyen

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1,$$

így $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, tehát f nem differenciálható a 0 helyen.

2.11. **Példa.** Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ helyen, ugyanis

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x^2 = 0^2 = 0,$$

másrészt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x + 1 = 0 + 1 = 1,$$

így $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$. Mivel azonban f nem folytonos az $x_0 = 0$ helyen, ezért ott nem is differenciálható.

Ellenőrző kérdések

1. A folytonosság feltétele a differenciálhatóságnak.
2. A differenciálhatóság feltétele a folytonosságnak.
3. Mondjunk példát olyan függvényre, amely folytonos, de nem differenciálható!
4. Létezik-e olyan nem folytonos függvény, amelyik differenciálható?
5. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$ függvény azon pontjainak száma, ahol a függvény nem differenciálható
6. Az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvény differenciálhányados függvénye:

3. Deriválási szabályok

3.1. Tétel. Konstans függvény deriváltja nulla, azaz ha $c \in \mathbb{R}$ és $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = 0$.

Bizonyítás: Tekintsük az $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) függvényt. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az f függvény differenciahányados függvénye

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0,$$

melynek határértéke az x_0 helyen nulla, így $f'(x) = 0$. ■

3.2. Tétel. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvény deriváltja minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = 1$.

Bizonyítás: Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor az f függvény differenciahányados függvénye

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

melynek a határértéke az x_0 helyen 1, így $f'(x) = 1$. ■

3.3. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, rögzített. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény deriváltja $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Bizonyítás: Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az f függvény differenciahányados függvénye

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \\ &= \frac{(x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}, \end{aligned}$$

melynek határértéke az x_0 helyen

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}) = n \cdot x_0^{n-1}.$$

Mivel x_0 tetszőleges volt, ezért minden x valós szám esetén $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, amivel igazoltuk az állítást. ■

3.4. Tétel. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény deriváltja minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = \cos x$.

Bizonyítás: Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a differenciáhányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \\ &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0+x+x_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{x_0-x+x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \\ &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{x_0-x}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \\ &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Ebből, felhasználva a szinusz függvény addíciós képletét, miszerint

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta),$$

azt kapjuk, hogy a differenciáhányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + \cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} - \\ &\quad - \frac{\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Elvégezve az összevonást azt kapjuk, hogy a differenciáhányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = \\ &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right). \end{aligned}$$

Vegyük az $x \rightarrow x_0$ határátmenetet! Felhasználva, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0. \end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást. ■

3.5. Tétel. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ függvény deriváltja minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = -\sin x$.

Bizonyítás: Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a differenciahányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{x-x_0+x+x_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_0-x+x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{x-x_0}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_0-x}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{x-x_0}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Ebből, felhasználva a koszinusz függvény addíciós képletét, miszerint

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta),$$

azt kapjuk, hogy a differenciahányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{\cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} - \\ &- \frac{\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Elvégezve az összevonást azt kapjuk, hogy a differenciahányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= -\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \\ &= -\frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = -\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right). \end{aligned}$$

Vegyük az $x \rightarrow x_0$ határátmenetet! Felhasználva, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = -\sin x_0. \end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást. ■

3.6. Tétel. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sh} x$ függvény deriváltja minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = \operatorname{ch} x$.

Bizonyítás: A differenciahányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} x_0}{x - x_0} = \\ &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0+x+x_0}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{x_0-x+x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \\ &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{x_0-x}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \\ &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Ebből, felhasználva a szinusz–hiperbolikus függvény addíciós képletét, miszerint

$$\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh}(\alpha) \cdot \operatorname{ch}(\beta) + \operatorname{ch}(\alpha) \cdot \operatorname{sh}(\beta),$$

azt kapjuk, hogy a differenciahányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} - \\ &- \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Elvégezve az összevonást azt kapjuk, hogy a differenciahányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \\ &= \frac{2 \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}, \end{aligned}$$

azaz

$$d(x) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x+x_0}{2}\right).$$

Vegyük az $x \rightarrow x_0$ határátmenetet! Felhasználva, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1,$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ch}\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \operatorname{ch} x_0. \end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást. ■

3.7. Tétel. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ függvény deriváltja minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = e^x$.

Bizonyítás: A differenciáhányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \frac{e^{x-x_0+x_0} - e^{x_0}}{x - x_0} \\ &= \frac{e^{x-x_0} \cdot e^{x_0} - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Vegyük az $x \rightarrow x_0$ határátmenetet! Felhasználva, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

azt kapjuk, hogy a differenciáhányados függvény

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0},$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

3.8. Tétel. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény deriváltja minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = \operatorname{sh} x$.

Bizonyítás: Mivel

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

ezért

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

3.9. Tétel. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ($a > 0$) függvény deriváltja minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

Bizonyítás: A differenciáhányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \frac{a^{x-x_0+x_0} - a^{x_0}}{x - x_0} = \\ &= \frac{a^{x-x_0} \cdot a^{x_0} - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Vegyük az $x \rightarrow x_0$ határátmenetet! Felhasználva, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

azt kapjuk, hogy a differenciáhányados függvény

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} \cdot \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \ln a,$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

3.10. Tétel. Ha az $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, akkor $f + g$ is differenciálható x_0 -ban és

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Bizonyítás: Legyen $h(x) = (f + g)(x)$. A h függvény differenciáhányados függvénye

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Vegyük mindkét oldalon az $x \rightarrow x_0$ határátmenetet, majd a jobb oldalon használjuk ki, hogy két függvény összegének a határértéke a határértékek összege. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. ■

3.11. **Példa.** Az $f(x) = x^2 + x + 6$ függvény deriváltja

$$f'(x) = (x^2)' + x' + 6' = 2x + 1 + 0 = 2x + 1.$$

3.12. **Tétel.** Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in I$ helyen és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható x_0 -ban és $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

Bizonyítás: A $c \cdot f$ függvény differenciahányados függvénye

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{(c \cdot f)(x) - (c \cdot f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{c \cdot (f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Vegyük mindkét oldalon az $x \rightarrow x_0$ határátmenetet, majd a jobb oldalon használjuk ki, hogy egy függvény számszorosának határértéke a határérték szorozosa. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0),$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. ■

3.13. **Példa.** Az $f(x) = 5x$ függvény deriváltja

$$f'(x) = (5x)' = 5 \cdot x' = 5 \cdot 1 = 5.$$

3.14. **Példa.** Az $f(x) = 5 \sin x$ függvény deriváltja

$$f'(x) = (5 \sin x)' = 5 \cdot (\sin x)' = 5 \cos x.$$

3.15. **Tétel.** Ha az $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, akkor $f \cdot g$ is differenciálható x_0 -ban és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Bizonyítás: Legyen $h(x) = (f \cdot g)(x)$. A h függvény differenciahányados függvénye

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Vegyük mindkét oldalon a $\lim_{x \rightarrow x_0}$ határátmenetet, majd használjuk ki a határértéknek a műveletekkel való kapcsolatát, valamint a g függvény folytonosságát! Ekkor

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)\end{aligned}$$

adódik, ami a bizonyítandó állítás. ■

3.16. Példa. Az $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ függvény deriváltja

$$f'(x) = (x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x.$$

3.17. Példa. Az $f(x) = e^x \cdot \ln x$ függvény deriváltja

$$\begin{aligned}f'(x) &= (e^x \cdot \ln x)' = (e^x)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)' = \\ &= e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \cdot \left(\ln x + \frac{1}{x} \right).\end{aligned}$$

3.18. Tétel. Ha az $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, továbbá $g(x) \neq 0$ ($x \in I$), akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható x_0 -ban és

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Bizonyítás: Legyen $x_0 \in I$ és $h(x) = \frac{f}{g}(x)$. Ekkor a h függvény differenciahányados függvénye

$$\begin{aligned}d(x) &= \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x)}{(x - x_0) \cdot g(x) \cdot g(x_0)}}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x)}{(x - x_0) \cdot g(x) \cdot g(x_0)} = \\ &= \frac{g(x_0) \cdot (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) \cdot (g(x_0) - g(x))}{(x - x_0) \cdot g(x) \cdot g(x_0)}.\end{aligned}$$

Vegyük a $\lim_{x \rightarrow x_0}$ határátmenet, majd használjuk ki a határértéknek a műveletekkel való kapcsolatát, és a g függvény folytonosságát! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) \cdot (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) \cdot (g(x_0) - g(x))}{(x - x_0) \cdot g(x) \cdot g(x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g(x_0) \cdot (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} + \frac{f(x_0) \cdot (g(x_0) - g(x))}{(x - x_0) \cdot g(x) \cdot g(x_0)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \left(\frac{g(x_0) \cdot (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)} - \frac{f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))}{(x - x_0)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \left(\frac{g(x_0) \cdot (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)} - \frac{f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))}{(x - x_0)} \right) = \\ &= \frac{1}{g(x_0)^2} \cdot (f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)), \end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. ■

3.19. Példa. Meghatározzuk az $x \mapsto \frac{x^2}{\sin x}$ függvény deriváltját. Ehhez legyen $f(x) = x^2$ és $g(x) = \sin x$. Ekkor $f'(x) = 2x$ és $g'(x) = \cos x$. Az előbbi tételben szereplő hányados függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$$

3.20. Tétel. Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Bizonyítás: A hányados függvény differenciálási szabályát alkalmazva

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást. ■

3.21. Tétel. Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltja

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Bizonyítás: A hányados függvény differenciálási szabályát alkalmazva

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást. ■

3.22. Tétel. Az $f(x) = \operatorname{th} x$ függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Bizonyítás: A hányados függvény differenciálási szabályát alkalmazva

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

amivel az állítás bizonyított. ■

3.23. Tétel. Az $f(x) = \operatorname{cth} x$ függvény deriváltja

$$f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Bizonyítás: A hányados függvény differenciálási szabályát alkalmazva

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

amivel az állítás bizonyított. ■

3.24. Tétel. Legyenek I és J nyílt intervallumok. Ha a $g: I \rightarrow J$ függvény differenciálható az x_0 helyen, továbbá az $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható a $g(x_0)$ helyen, akkor az $f \circ g: I \rightarrow \mathbb{R}$ összetett függvény is differenciálható az x_0 helyen és

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Bizonyítás: Első lépésben bizonyítjuk, hogy $f \circ g$ valóban differenciálható. Az 1.15 tétel, illetve az azt követő megjegyzés miatt léteznek olyan $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ és $\delta: J \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, hogy egyrészt

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) &= g'(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot \varepsilon(x) \cdot (x - x_0) = \\ &= (g'(x_0) + \varepsilon(x)) \cdot (x - x_0), \end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned} f(y) - f(y_0) &= f'(y_0) \cdot (y - y_0) + \delta(y) \cdot (y - y_0) = \\ &= (f'(y_0) + \delta(y)) \cdot (y - y_0) \end{aligned}$$

továbbá $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ és $\lim_{y \rightarrow y_0} \delta(y) = 0$. Vezessük be a $h(x) = f \circ g(x)$ függvényt és legyen $y = g(x)$. Ekkor

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= f \circ g(x) - f \circ g(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) = \\ &= f(y) - f(y_0) = f'(y_0) \cdot (y - y_0) + \delta(y) \cdot (y - y_0) = \\ &= (f'(y_0) + \delta(y)) \cdot (y - y_0) = \\ &= (f'(y_0) + \delta(y)) \cdot (g(x) - g(x_0)) = \\ &= (f'(y_0) + \delta(y)) \cdot (g'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0)) = \\ &= (f'(g(x_0)) + \delta(g(x))) \cdot (g'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0)) = \\ &= f'(g(x_0)) \cdot (g'(x_0) + \delta(g(x))) \cdot (x - x_0) + \\ &\quad + g'(x_0) \cdot \delta(g(x)) \cdot (x - x_0) + \delta(g(x)) \cdot \varepsilon(x) \cdot (x - x_0). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy ha $x \rightarrow x_0$, akkor

$$(f'(g(x_0)) \cdot \varepsilon(x) + g'(x_0) \cdot \delta(g(x)) + \delta(g(x)) \cdot \varepsilon(x)) \cdot (x - x_0) \rightarrow 0.$$

Ha $x \rightarrow x_0$, akkor $g(x) \rightarrow g(x_0)$, így $\delta(g(x)) \rightarrow 0$, tehát az előbbi háromtagú összeg minden tagja nullához tart, amiből következik az állítás. Tehát $f \circ g$ differenciálható. Az előbbi egyenlőségéből az is következik, hogy $f \circ g$ deriváltja az x_0 helyen: $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$. Megjegyezzük, hogy ha tudjuk azt, hogy az $f \circ g$ függvény differenciálható az x_0 helyen, akkor az $f \circ g$ „deriválási szabálya” az alábbi módon is levezethető:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0), \end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó összefüggés. ■

3.25. Megjegyzés. Összetett függvényt úgy deriválunk, hogy először deriváljuk a külső függvényt, abba a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az így kapott eredményt megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

3.26. Példa. Tekintsük az $f(x) = \sin(x^2 + 5x + 6)$ függvényt. A külső függvény a $k(x) = \sin x$, a belső függvény az $b(x) = x^2 + 5x + 6$. A külső függvény deriváltja $k'(x) = \cos x$, míg a belső függvény deriváltja $b'(x) = 2x + 5$. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján a külső függvény deriváltjába „beírjuk” az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával, így

$$f'(x) = \cos(x^2 + 5x + 6) \cdot (2x + 5).$$

3.27. Tétel. Legyenek I és J nyílt intervallumok. Ha az $f: I \rightarrow J$ függvény szigorúan monoton, folytonos az I intervallumon, differenciálható az $x_0 \in I$ helyen és $f'(x_0) \neq 0$, továbbá $y_0 = f(x_0)$, akkor

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Bizonyítás: A differenciálhányados definícióját használva

$$\begin{aligned} (f^{-1}(y_0))' &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \\ &= \lim_{f(x) \rightarrow f(x_0)} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \\ &= \lim_{f(x) \rightarrow f(x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{f(x) \rightarrow f(x_0)} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \\ &= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

3.28. Megjegyzés. Az inverz függvény definíciója szerint az f függvény inverze az az f^{-1} függvény, melyre $f \circ f^{-1}(x) = x$ teljesül minden olyan x -re, ahol a függvény értelmezve van. Erre az egyenletre alkalmazhatjuk az összetett függvény differenciálási szabályát. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1,$$

amiből $(f^{-1}(x))'$ -at kifejezve éppen az előbb bizonyított formulához jutunk.

3.29. **Tétel.** A $g:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \arcsin x$ függvény deriváltja

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bizonyítás: A $g(x) = \arcsin x$ függvény az $f: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény inverze, és inverzfüggvény deriváltja

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

ezért

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Mivel

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

ezért $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Ezt felhasználva

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

amivel megkaptuk az állítást. ■

3.30. **Tétel.** A $g:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \arccos x$ függvény deriváltja

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bizonyítás: A $g(x) = \arccos x$ függvény az $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ függvény inverze, és inverz függvény deriváltja

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

ezért

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$

Mivel

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

ezért $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Ezt felhasználva

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

ami a bizonyítandó összefüggés. ■

3.31. Tétel. A $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény deriváltja

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Bizonyítás: A $g(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény az $f:]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény inverze, és inverz függvény deriváltja

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

ezért

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}}.$$

A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ egyenlet mindkét oldalát elosztva $\cos^2 x$ -el, azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$. Ezt felhasználva

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2},$$

ami a bizonyítandó összefüggés. ■

3.32. Tétel. A $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arcctg} x$ függvény deriváltja

$$g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Bizonyítás: A $g(x) = \operatorname{arcctg} x$ függvény az $f:]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény inverze, és inverz függvény deriváltja

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

ezért

$$\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arcctg} x)}}.$$

A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ egyenlet mindkét oldalát elosztva $\sin^2 x$ -el, azt kapjuk, hogy $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$. Ezt felhasználva

$$\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arcctg} x)}} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

3.33. **Tétel.** A $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arsh} x$ függvény deriváltja

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Bizonyítás: Mivel a $g(x) = \operatorname{arsh} x$ függvény az $f(x) = \operatorname{sh} x$ függvény inverze, és inverz függvény deriváltja

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

ezért

$$\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)}.$$

Mivel

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x,$$

amiből

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}.$$

Ezt felhasználva

$$\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

3.34. **Tétel.** A $g: [1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arch} x$ függvény deriváltja

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Bizonyítás: Mivel a $g(x) = \operatorname{arch} x$ függvény az $f(x) = \operatorname{ch} x$ ($x > 0$) függvény inverze, és inverz függvény deriváltja

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

ezért

$$\operatorname{arch}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)}.$$

Mivel

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1,$$

ezért

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1},$$

amit felhasználva

$$\operatorname{arch}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arch} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

3.35. Tétel. A $g:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arth} x$ függvény deriváltja

$$g'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Bizonyítás: Mivel a $g(x) = \operatorname{arth} x$ függvény az $f(x) = \operatorname{th} x$ függvény inverze, és inverz függvény deriváltja

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

ezért

$$\operatorname{arth}' x = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arth} x)}}.$$

A

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

egyenlet mindkét oldalát elosztva $\operatorname{ch}^2 x$ -el, azt kapjuk, hogy

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Ezt felhasználva

$$\operatorname{arth}' x = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arth} x)}} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{arth} x)} = \frac{1}{1 - x^2},$$

amivel bizonyítottuk az állítást. ■

3.36. Tétel. A $g:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$ függvény deriváltja $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Bizonyítás: Mivel a $g(x) = \ln x$ függvény az $f(x) = e^x$ inverze, és inverz függvény deriváltja

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

ezért

$$\ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x},$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

3.37. Tétel. Ha $a > 0$, akkor az $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

Bizonyítás: Mivel

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

ezért az előbbi tétel miatt

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a},$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

3.38. Tétel. Legyen r racionális szám. Ekkor az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$ függvény minden x valós szám esetén differenciálható, továbbá a deriváltja $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

Bizonyítás: Legyen elsőként $r = \frac{1}{q}$, ahol q pozitív egész szám. Ekkor az $x^{\frac{1}{q}}$ függvény az x^q függvény inverze, így egyrészt az inverz függvény deriválási szabályát alkalmazva, másrészt azt, hogy $(x^q)' = q \cdot x^{q-1}$, azt kapjuk, hogy

$$(x^r)' = \left(x^{\frac{1}{q}} \right)' = \frac{1}{q \cdot x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1} = r \cdot x^{r-1}.$$

Ha $r = \frac{p}{q}$, ahol p és q pozitív egész számok, akkor $f(x) = x^r$ a $k(x) = x^p$ külső függvény és a $b(x) = x^{\frac{1}{q}}$ belső függvény $k \circ b(x)$ összetett függvényeként kapható meg. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\begin{aligned} (x^r)' &= \frac{1}{q} \cdot (x^p)^{\frac{1}{q}-1} \cdot p \cdot x^{p-1} = \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-p} \cdot x^{p-1} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} = r \cdot x^{r-1}. \end{aligned}$$

Amennyiben r negatív racionális szám, akkor $-r$ már pozitív és a hányados függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$(x^r)' = \left(\frac{1}{x^{-r}} \right)' = \frac{-(-r) \cdot x^{-r-1}}{(x^{-r})^2} = r \cdot x^{-r-1} \cdot x^{2r} = r \cdot x^{r-1}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

3.39. Megjegyzés. Ha c irracionális szám, akkor minden $x > 0$ valós szám esetén az $f(x) = x^c$ függvény deriváltja $f'(x) = c \cdot x^{c-1}$, ugyanis

$$f(x) = x^c = e^{c \ln x},$$

így az összetett függvény deriválási szabálya alapján minden $x > 0$ esetén

$$f'(x) = e^{c \ln x} \cdot c \cdot \frac{1}{x} = x^c \cdot c \cdot \frac{1}{x} = c \cdot x^{c-1}.$$

Ellenőrző kérdések

1. Az $f(x) = x$ függvény deriváltja
2. Konstans függvény deriváltja
3. Adjuk meg két differenciálható függvény összegének „deriválási szabályát”!
4. Adjuk meg két differenciálható függvény különbségének „deriválási szabályát”!
5. Ha f és g differenciálható függvények, akkor $(f \cdot g)'(x) = \dots\dots\dots$
6. Ha f és g differenciálható függvények, akkor $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots\dots\dots$
7. Az $f(x) = \sin x$ függvény deriváltja
8. Az $f(x) = \cos x$ függvény deriváltja
9. Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény deriváltja
10. Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltja
11. Az $f(x) = e^x$ függvény deriváltja
12. Az $f(x) = a^x$ függvény deriváltja
13. Az $f(x) = \ln x$ függvény deriváltja
14. Az $f(x) = \log_a x$ függvény deriváltja
15. Az $f(x) = \arcsin x$ függvény deriváltja
16. Az $f(x) = \arccos x$ függvény deriváltja
17. Az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény deriváltja
18. Az $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ függvény deriváltja
19. Az összetett függvény „deriválási szabálya”
20. Ha f differenciálható függvény, akkor $\sin(f(x))$ deriváltja:
21. Ha f differenciálható függvény, akkor $\ln(f(x))$ deriváltja:
22. Ha f differenciálható függvény, akkor $\sin x \cdot f(x)$ deriváltja:
23. Ha f differenciálható függvény, akkor $\frac{f(x)}{e^x}$ deriváltja:
24. Ha f differenciálható függvény, akkor $f(x) \cdot \cos x$ deriváltja:

25. Ha f differenciálható függvény, akkor $(f(x))^2$ deriváltja:
26. Ha f differenciálható függvény, akkor $(f(x))^5$ deriváltja:
27. Ha f differenciálható függvény, akkor $f(x^2)$ deriváltja:
28. Ha f differenciálható függvény, akkor $f(x^5)$ deriváltja:
29. Ha f differenciálható függvény, akkor $f(\sin x)$ deriváltja:
30. Ha f, g és h differenciálható függvények, akkor $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ deriváltja:
.....

4. Magasabb rendű deriváltak

4.1. Definíció. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az I intervallumon, továbbá a deriváltja differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* x_0 -ban. Jelölés:

$$(f'(x_0))' = f''(x_0).$$

Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $k - 1$ -szer differenciálható az I intervallumon, továbbá a $k - 1$ -edrendű deriváltja differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f *k-szor differenciálható* x_0 -ban. Jelölés:

$$(f^{(k-1)}(x_0))' = f^{(k)}(x_0).$$

4.2. Példa. Az $f(x) = x^3$ függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2$, második deriváltja $f''(x) = (3x^2)' = 6x$, harmadik deriváltja $f'''(x) = (6x)' = 6$, negyedik, illetve minden annál magasabb rendű deriváltja 0.

4.3. Példa. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, de rögzített. Ekkor az $f(x) = x^n$ függvény n -edik deriváltja $f^{(n)}(x) = n!$ és az f függvény $(n + 1)$ -edik deriváltja $f^{(n+1)}(x) = 0$.

4.4. Példa. Az $f(x) = \arctg x$ függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}.$$

Az f függvény harmadik deriváltja

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{-2 \cdot (1 + x^2)^2 + 2x \cdot 2 \cdot (1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \\ &= \frac{(1 + x^2) \cdot (-2 \cdot (1 + x^2) + 8x^2)}{(1 + x^2)^4} = \\ &= \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

4.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *végtelen sokszor differenciálható* az $x_0 \in I$ helyen, ha minden pozitív egész n szám esetén az f függvény n -szer differenciálható az x_0 helyen.

4.6. **Példa.** Az $f(x) = e^x$ függvény végtelen sokszor differenciálható.

4.7. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *folytotonosan differenciálható*, ha f differenciálható és f' folytonos függvény.

4.8. **Példa.** Az $f(x) = \sin x$ függvény folytonosan differenciálható, mert differenciálható és $f'(x) = \cos x$ folytonos függvény.

4.9. **Tétel.** Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, de rögzített. Ha az $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvények mindegyike n -szer differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor $f + g$ is n -szer differenciálható az x_0 helyen és

$$(f + g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0).$$

Bizonyítás: Az állítás n szerinti teljes indukcióval igazolható. ■

4.10. **Példa.** Tekintsük az $f(x) = x^2 + \sin x$ függvényt! Ekkor

$$f''(x) = (x^2)'' + (\sin x)'' = (2x)' + (\cos x)' = 2 - \sin x.$$

4.11. **Tétel.** (Leibniz-formula)

Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, de rögzített. Ha az $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvények mindegyike n -szer differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor $f \cdot g$ is n -szer differenciálható az x_0 helyen és

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(k)}(x_0) \cdot g^{n-k}(x_0).$$

Bizonyítás: Az állítás n szerinti teljes indukcióval igazolható a binomiális tétel bizonyításához hasonló módon. ■

4.12. **Példa.** Legyen $f(x) = x^2 \cdot \sin x$. Ekkor

$$\begin{aligned} f''(x) &= \binom{2}{0} \cdot x^2 \cdot (\sin x)'' + \binom{2}{1} \cdot (x^2)' \cdot (\sin x)' + \binom{2}{2} \cdot (x^2)'' \cdot \sin x = \\ &= x^2 \cdot (\cos x)' + 2 \cdot 2x \cdot \cos x + (2x)' \cdot \sin x = \\ &= x^2 \cdot (-\sin x) + 2 \cdot 2x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x = \\ &= -x^2 \cdot \sin x + 4 \cdot x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x. \end{aligned}$$

4.13. **Definíció.** Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, de rögzített, továbbá x_0 torlódási pontja az I intervallumnak. Azt mondjuk, hogy f az x_0 helyen *n -edrendben kicsi*, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

4.14. **Tétel.** Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, de rögzített, $x_0 \in I$. Tegyük fel, hogy az f függvény $n - 1$ -szer differenciálható az x_0 valamely környezetében és n -szer differenciálható az x_0 helyen, továbbá $f^{(n)}(x_0) = 0$. Ekkor az f függvény n -edrendben kicsi.

Ellenőrző kérdések

1. Mikor mondjuk azt, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható?
2. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, ha
3. Az $f(x) = \sin x$ függvény 102-edik deriváltja:
4. Az $f(x) = \cos x$ függvény 105-edik deriváltja:
5. Az $f(x) = e^{2x}$ függvény n -edik deriváltja:
6. Az $f(x) = x^n$ függvény n -edik deriváltja:
7. Az $f(x) = x^n$ függvény $n - 1$ -edik deriváltja:
8. Az $f(x) = x^n$ függvény $n + 1$ -edik deriváltja:
9. Ha f és g kétszer differenciálható függvények, akkor $(f(x) + g(x))'' =$
.....
10. Ha f és g háromszor differenciálható függvények, akkor $(f(x) + g(x))''' =$
.....
11. Ha f és g kétszer differenciálható függvények, akkor $(f(x) \cdot g(x))'' =$
.....
12. Ha f és g háromszor differenciálható függvények, akkor $(f(x) \cdot g(x))''' =$
.....

5. Érintő és normális egyenes egyenlete, érintési paraméterek

5.1. Definíció. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor az x_0 -beli *érintő egyenesén* vagy *érintőjén* az

$$e(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

függvényt értjük.

5.2. Megjegyzés. Az előbbi függvényt

$$e(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

alakban írva látható, hogy az érintő egy elsőfokú függvény (egyenes), melynek meredeksége $f'(x_0)$, ami összhangban van az első fejezetben leírtakkal.

5.3. Definíció. Tekintsük az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, és az $x_0 \in I$ pontot. Az $(x_0, f(x_0))$ ponton áthaladó, az x_0 helyhez tartozó érintő egyenesre merőleges egyenest *normális egyenesnek* nevezzük.

5.4. Tétel. A normális egyenes meredeksége $-\frac{1}{f'(x_0)}$.

Bizonyítás: Mivel egymásra merőleges egyenesek meredekségeinek szorzata -1 és az érintő egyenes meredeksége $f'(x_0)$, ezért, ha m_e jelöli az érintő, m_n a normális egyenes meredekségét, akkor $m_e \cdot m_n = -1$, amiből

$$m_n = -\frac{1}{m_e} = -\frac{1}{f'(x_0)},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. ■

5.5. Következmény. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor az x_0 -beli normális egyenesének egyenlete

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

5.6. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt! Továbbá legyen $x_0 = 2$. Ekkor $f(x_0) = 4$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, így $f'(x_0) = 4$ és $f''(x_0) = 2$. Ezt felhasználva az f függvény $(x_0, f(x_0))$ pontjára illeszkedő érintő egyenesének egyenlete

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = 4 + 4 \cdot (x - 2),$$

azaz $y = 4x - 4$. A normális egyenes egyenlete

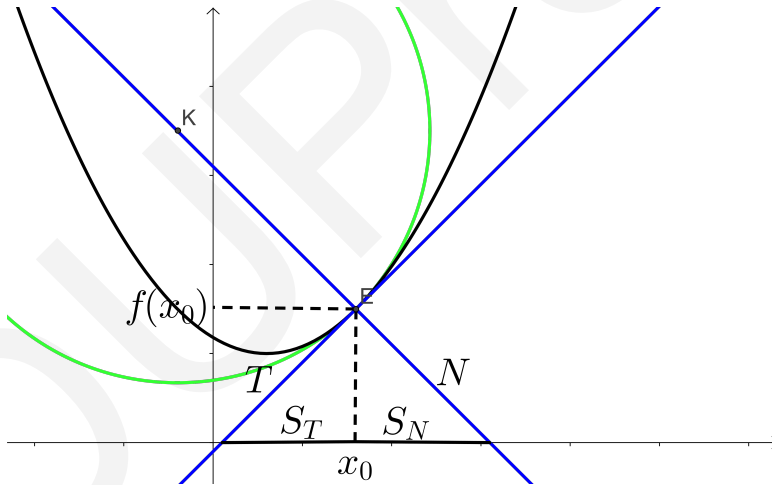
$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = 4 - \frac{1}{4} \cdot (x - 2),$$

azaz $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

5.7. Definíció. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in I$ helyhez tartozó

- *tangens szakasza* a függvényhez húzott érintőnek és az x -tengelynek a metszéspontjától az érintési pontig terjedő szakasza;
- *szubtangense* az x_0 -hoz tartozó tangens szakasznak az x -tengelyre eső merőleges vetülete;
- *normális szakasza* a függvényhez húzott normális egyenesnek és az x -tengelynek a metszéspontjától az $(x_0, f(x_0))$ pontig terjedő szakasza;
- *szubnormálisa* az x_0 -hoz tartozó normális szakasznak az x -tengelyre eső vetülete.

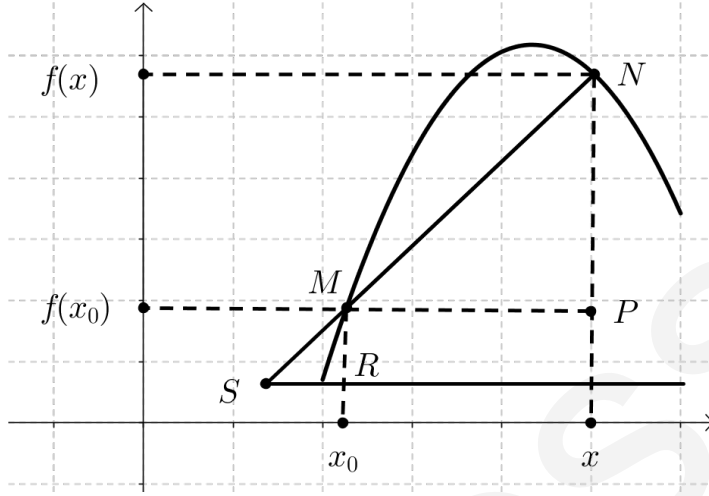
A tangens szakasz, normális szakasz, szubtangens és szubnormális jelölése rendre: T, N, S_T, S_N .



5.8. Tétel. Tekintsük az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt és legyen $x_0 \in I$. Az f függvény x_0 -beli szubtangens szakaszának hossza

$$S_T = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right|.$$

Bizonyítás:



Az MPN háromszög hasonló az SRM háromszöghöz, így teljesül az

$$\frac{SR}{MR} = \frac{MP}{PN}$$

egyenlőség. Ebből SR -et kifejezve

$$SR = \frac{MP \cdot MR}{PN} = \frac{(x - x_0) \cdot f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{f(x_0)}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Vegyük az $x \rightarrow x_0$ határátmenetet. Ekkor a szubtangens hossza

$$S_T = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right|.$$

Ezzel igazoltuk a kívánt összefüggést. ■

5.9. Tétel. Tekintsük az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt és legyen $x_0 \in I$. Az f függvény x_0 -beli tangens szakaszának hossza

$$T = \left| f(x_0) \cdot \frac{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}{f'(x_0)} \right|.$$

Bizonyítás: Az 5.7 definícióban szereplő ábrát és annak jelöléseit tekintve a Pitagorasz-tétel szerint

$$S_T^2 + (f(x_0))^2 = T^2.$$

Az előző tétel eredményét felhasználva

$$\left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)^2 + (f(x_0))^2 = T^2.$$

Kiemelve $(f(x_0))^2$ -et, majd közös nevezőre hozva, végül gyököt vonva

$$\begin{aligned} (f(x_0))^2 \cdot \left(\frac{1}{(f'(x_0))^2} + 1\right) &= T^2 \\ (f(x_0))^2 \cdot \left(\frac{1 + (f'(x_0))^2}{(f'(x_0))^2}\right) &= T^2 \\ \left|f(x_0) \cdot \frac{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}{f'(x_0)}\right| &= T \end{aligned}$$

adódik, amivel igazoltuk az állítást. ■

5.10. Tétel. Tekintsük az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt és legyen $x_0 \in I$. Az f függvény x_0 -beli szubnormális szakaszának hossza

$$S_N = |f(x_0) \cdot f'(x_0)|.$$

Bizonyítás: Az 5.7 definícióban szereplő ábrát és annak jelöléseit tekintve, felírva a magasságtételt azt kapjuk, hogy

$$|f(x_0)| = \sqrt{S_T \cdot S_N}.$$

Felhasználva, hogy

$$S_T = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|,$$

majd átrendezve az egyenletet

$$\begin{aligned} (f(x_0))^2 &= \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \cdot S_N \\ |f(x_0) \cdot f'(x_0)| &= S_N \end{aligned}$$

adódik, ami a bizonyítandó összefüggés. ■

5.11. Tétel. Tekintsük az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt és legyen $x_0 \in I$. Az f függvény x_0 -beli normális szakaszának hossza

$$N = \left|f(x_0) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_0))^2}\right|.$$

Bizonyítás: Az 5.7 definícióban szereplő ábrát és annak jelöléseit tekintve a Pitagorasz tételt felírva

$$S_N^2 + (f(x_0))^2 = N^2.$$

Felhasználva, hogy

$$S_N = |f(x_0) \cdot f'(x_0)|,$$

azt kapjuk, hogy

$$(f(x_0) \cdot f'(x_0))^2 + (f(x_0))^2 = N^2.$$

Kiemelve $f(x_0)^2$ -et

$$(f(x_0))^2 \cdot ((f'(x_0))^2 + 1) = N^2$$

adódik. Gyököt vonva mindkét oldalból az igazolandó összefüggést kapjuk. ■

5.12. Definíció. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, $x_0 \in I$. Ekkor az f függvény x_0 -beli *görbülete*

$$g(x_0) = \frac{|f''(x_0)|}{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Az $x \mapsto g(x)$ függvényt *görbület függvénynek* is nevezzük.

5.13. Megjegyzés. Az $y = f(x)$ alakban megadott függvény görbülete

$$g = \frac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

5.14. Megjegyzés. A görbület egy függvény grafikonjának az egyenestől való eltérésének mértékét adja meg.

5.15. Példa. Egyenes görbülete nulla (az egyenes bármely pontjában).

Tekintsük az $f(x) = mx + b$ egyenest, ahol m és b valós számok. Ekkor $f'(x) = m$, $f''(x) = 0$, így a görbület számlálójában szereplő mennyiség nulla, tehát a görbület nulla.

5.16. Példa. Kör görbülete a kör sugarának reciproka (a kör bármely pontjában).

Tekintsük az $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvényt, ahol $r > 0$. Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

másrészt

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1 \cdot (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{r^2 - x^2} = \\ &= \frac{-\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}}{r^2 - x^2} = \frac{-(r^2 - x^2) - x^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

A görbület nagysága

$$g(x_0) = \frac{|f''(x_0)|}{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left| \frac{-r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right| = \frac{1}{r}.$$

5.17. Megjegyzés. Az előbbi példában látott alakzatok (az egyenes és a kör) úgynevezett konstans görbületű alakzatok, azaz értelmezési tartományuk minden pontjában ugyanannyi a görbületük. Ez azonban egy általánosan megadott függvény esetében nem mindig van így. A következő példában a parabola görbületét adjuk meg.

5.18. Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvényt! Az f függvény deriváltja $f'(x) = 2x$, második deriváltja $f''(x) = 2$. A görbület függvény

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4x^2)^3}}.$$

Az is látható, hogy ez az érték akkor a legnagyobb, ha a nevező a legkisebb, azaz ha $x = 0$. Ekkor $g(0) = 0$. Könnyen látható az is, hogy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

A kapott eredmény összhangban azzal, ami a függvény grafikonjából, azaz a parabola alakjából is jól érzékelhető.

5.19. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ legalább n -szer differenciálható függvények *legalább n -edrendben érintik egymást*, ha

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0) \\ f'(x_0) &= g'(x_0) \\ f''(x_0) &= g''(x_0) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= g^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

5.20. Definíció. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény $x_0 \in I$ -beli *simulóköre*n azt a kört értjük, mely legalább másodrendben érinti a függvényt az x_0 -ban, azaz ha $y = g(x)$ az x_0 szóban forgó környezetében a simulókör, akkor $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0)$, azaz az x_0 helyen az f és g függvények értékei megegyeznek, az x_0 helyen közös az érintőjük, továbbá az x_0 -beli görbületük is egyenlő.

5.21. Megjegyzés. Meg kell jegyeznünk, hogy természetesen egy kör nem írható le $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényként, azonban ez nekünk nem is szükséges, hiszen elegendő, ha az x_0 pont egy környezetében le tudjuk írni függvényvel a simulókör egy darabját, amit viszont meg tudunk tenni.

5.22. Tétel. A simulókör egyenlete

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2,$$

ahol a kör középpontjának koordinátái

$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}, \quad v = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)},$$

továbbá, ahogyan azt már korábban láttuk, a sugár a görbület reciproka

$$r = \frac{1}{g} = \frac{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

Bizonyítás: Tekintsük az

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

általános köregyenletet. Az y -t x függvényeként tekintsük $y = g(x)$ alakban az x_0 pont egy környezetében. Az így kapott egyenlet mindkét oldalát deriváljuk x szerint, majd a kapott egyenlet mindkét oldalát ismét deriváljuk x szerint:

$$\begin{aligned} (x - u)^2 + (g(x) - v)^2 &= r^2 \\ 2 \cdot (x - u) + 2 \cdot (g(x) - v) \cdot g'(x) &= 0 \\ 2 + 2 \cdot (g'(x))^2 + 2 \cdot (g(x) - v) \cdot g''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Az utolsó két egyenletet kettővel osztva, majd kihasználva a másodrendű illeszkedés feltételeit az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned}(x_0 - u)^2 + (f(x_0) - v)^2 &= r^2 \\ (x_0 - u) + (f(x_0) - v) \cdot f'(x_0) &= 0 \\ 1 + (f'(x_0))^2 + (f(x_0) - v) \cdot f''(x_0) &= 0.\end{aligned}$$

A harmadik egyenletből v -t kifejezve

$$v = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}$$

adódik. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve

$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}.$$

Az u -t és v -t az első egyenletbe visszahelyettesítve

$$r = \left| \frac{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)} \right|.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

5.23. Példa. Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt és legyen $x_0 = 1$. Ekkor

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Ezt felhasználva

$$f(x_0) = 1 \quad f'(x_0) = -1 \quad f''(x_0) = 2.$$

A simuló kör középpontjának első koordinátája

$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \Rightarrow u = 1 + 1 \cdot \frac{1 + 1}{2} = 2,$$

második koordinátája

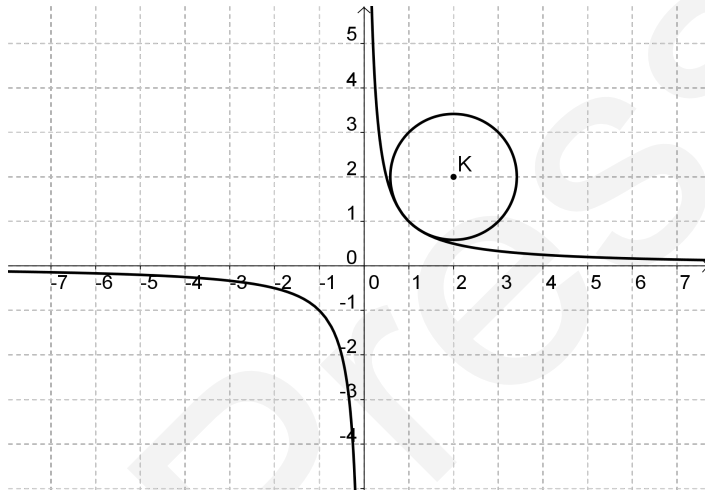
$$v = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \Rightarrow v = 1 + \frac{1 + 1}{2} = 2.$$

A simuló kör középpontja tehát $K = (2; 2)$. A simuló kör sugara

$$r = \left| \frac{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)} \right| \Rightarrow r = \frac{(1+1)^{\frac{3}{2}}}{2} = \sqrt{2}.$$

A simuló kör egyenlete tehát

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2.$$



5.24. Megjegyzés. Görbe vonalú mozgásnál a gyorsulás felbontható érintő irányú (tangenciális) gyorsulásra (a_t), és arra merőleges, úgynevezett centripetális gyorsulásra (a_{cp}), melyek nagysága a következőképp számolható:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \text{ (a sebességnagyság változásából származik),}$$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \text{ (a sebességirány változásából származik),}$$

ahol v a sebesség nagyságát, ω a szögsebességet, r a simuló kör sugarát jelöli.

Ellenőrző kérdések

1. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli érintő egyenesének egyenlete
2. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli érintő egyenesének meredeksége
3. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli normális egyenesének egyenlete
4. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli normális egyenesének meredeksége
5. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli deriváltja zérus, akkor az x_0 -beli érintő egyenesének egyenlete
6. Az $f(x) = x^2$ függvény érintő egyenesének egyenlete az $x_0 = 0$ helyen
7. Az $f(x) = x^3$ függvény érintő egyenesének egyenlete az $x_0 = 1$ helyen
8. Az $f(x) = \sin x$ függvény érintő egyenesének egyenlete az $x_0 = 0$ helyen
9. Ugyanazon helyhez tartozó érintő egyenes és normális egyenes
10. A simulókör középpontja a egyenesre illeszkedik.
11. Az $f(x) = 4x + 2$ függvény görbülete
12. Az r sugarú kör görbülete
13. Az $x^2 + y^2 = 81$ egyenletű kör görbülete
14. Az $x^2 + 4x + y^2 - 6y = 12$ egyenletű kör görbülete

6. A differenciálszámítás középértéktételei

6.1. Tétel. (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele)

Ha $f:]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és f -nek az $x_0 \in]a; b[$ helyen lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. Ilyenkor az x_0 számot *stacionárius hely*-nek, az $(x_0; f(x_0))$ pontot *stacionárius pont*nak nevezzük.

Bizonyítás: Tegyük föl, hogy f -nek az x_0 helyen lokális maximuma van. Ekkor létezik olyan r pozitív valós szám, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ teljesül minden $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$ esetén. Számoljuk ki az f függvény x_0 -beli bal oldali és jobb oldali deriváltját.

A bal oldali derivált

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Mivel $x \rightarrow x_0-$, ezért $x < x_0$, így $x - x_0 < 0$. Másrészt $f(x) \leq f(x_0)$ miatt $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Tehát $f'_-(x_0) \geq 0$.

A jobb oldali derivált

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Mivel $x \rightarrow x_0+$, ezért $x > x_0$, így $x - x_0 > 0$. Másrészt $f(x) \leq f(x_0)$ miatt továbbra is $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Tehát $f'_+(x_0) \leq 0$.

Mivel f differenciálható, így $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, ami csak úgy lehetséges, ha $f'(x_0) = 0$.

Hasonlóan igazolható a tétel állítása abban az esetben is, ha f -nek x_0 -ban lokális minimuma van. ■

6.2. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt. Ennek az $x_0 = 0$ helyen lokális szélsőértéke (lokális minimuma van). Az f függvény deriváltja $f'(x) = 2x$, így $f'(0) = 0$, aminek teljesülnie kellett az előző tétel miatt.

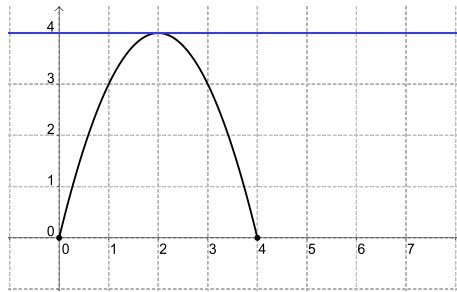
6.3. Megjegyzés. A 6.1 tétel megfordítása nem igaz, ugyanis például tekintsük az $f(x) = x^3$ függvényt. Ekkor

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0,$$

ugyanakkor az f függvénynek az $x_0 = 0$ helyen nincs lokális szélsőértéke.

6.4. Tétel. (Rolle-féle középértéktétel)

Ha $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ az $[a; b]$ -on folytonos, az $]a; b[$ -on differenciálható függvény, továbbá $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $c \in]a; b[$, hogy $f'(c) = 0$.



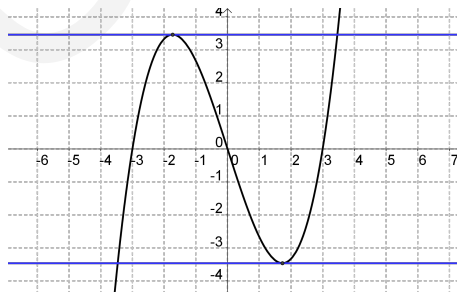
Bizonyítás: Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a szélsőértékeit, mégpedig vagy belső pontban, vagy valamelyik végpontban. Ha a minimum hely vagy a maximum hely belső pontban van, akkor az előző tétel miatt ezen a helyen a derivált nulla. Ha a minimum és a maximum az intervallum végpontjában van, akkor $f(a) = f(b)$ miatt f konstans, így a deriváltja nulla. ■

6.5. Megjegyzés. A Rolle-tétel geometriai tartalma: ha az $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos és az $]a; b[$ -ra való leszűkítése differenciálható, továbbá a függvényértékek az intervallum kezdő- és végpontjában megegyeznek, akkor az $]a; b[$ intervallumnak van olyan c pontja, hogy a $(c; f(c))$ pontba húzott érintő egyenes párhuzamos az x -tengellyel (azaz a meredeksége nulla).

6.6. Példa. Az $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$ függvény a $[-3; 3]$ intervallum minden pontjában folytonos és $] - 3; 3[$ minden pontjában differenciálható. Mivel

$$f(-3) = f(3) = 0,$$

ezért a Rolle-tétel értelmében f' -nek az $a = -3$ és $b = 3$ által határolt nyílt intervallumon legalább egyszer nullának kell lennie. Valójában $f'(x) = x^2 - 3$ kétszer is nulla ezen az intervallumon, egyszer az $x = -\sqrt{3}$, másodszor pedig az $x = \sqrt{3}$ helyen.



6.7. Példa. Az $x^3 + 3x + 1 = 0$ egyenletnek pontosan egy valós megoldása van. Legyen ugyanis $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Az $f'(x) = 3x^2 + 3$ derivált sehol nem

nulla (mert mindenütt pozitív). Ha léteznének olyan a és b különböző valós számok, hogy $f(a) = 0$ és $f(b) = 0$, akkor a Rolle-tétel garantálná egy olyan a és b közé eső c pont létezését, amelyre $f'(c) = 0$. Így tehát f -nek nem lehet egynél több zérushelye. Egy zérushelye azonban biztosan van, mert a Bolzano-tétel szerint az f függvény grafikonja az $x = -1$ (ahol $y = -3$) és az $x = 0$ (ahol $y = 1$) között valahol metszi az x -tengelyt.

6.8. Tétel. (Cauchy-féle középértéktétel)

Ha $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ az $[a; b]$ -on folytonos, az $]a; b[$ -on differenciálható függvények, továbbá minden $x \in]a; b[$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor van olyan $c \in]a; b[$, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bizonyítás: Ha $g(a) = g(b)$ teljesülne, akkor a Rolle-tétel miatt g' az $]a; b[$ intervallum valamelyik pontjában nulla lenne, ami a feltételeink miatt nem lehetséges. Így beszélhetünk az $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ hányadosról.

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, és tekintsük a

$$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(t) = f(t) - \lambda \cdot g(t)$$

függvényt. Legyen

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(b) &= f(b) - \lambda \cdot g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(b) = \\ &= \frac{f(b) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a) - f(b) \cdot g(b) + f(a) \cdot g(b)}{g(b) - g(a)} = \\ &= \frac{f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a)}{g(b) - g(a)}, \end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= f(a) - \lambda \cdot g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(a) = \\ &= \frac{f(a) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - f(b) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(a)}{g(b) - g(a)} = \\ &= \frac{f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a)}{g(b) - g(a)}, \end{aligned}$$

így $\varphi(a) = \varphi(b)$. Másrészt φ folytonos $[a; b]$ -n és differenciálható $]a; b[$ -n, így a Rolle-tétel szerint van olyan $c \in]a; b[$ szám, melyre $\varphi'(c) = 0$. Ugyanakkor

$$\varphi'(t) = f'(t) - \lambda \cdot g'(t),$$

tehát

$$0 = f'(c) - \lambda \cdot g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

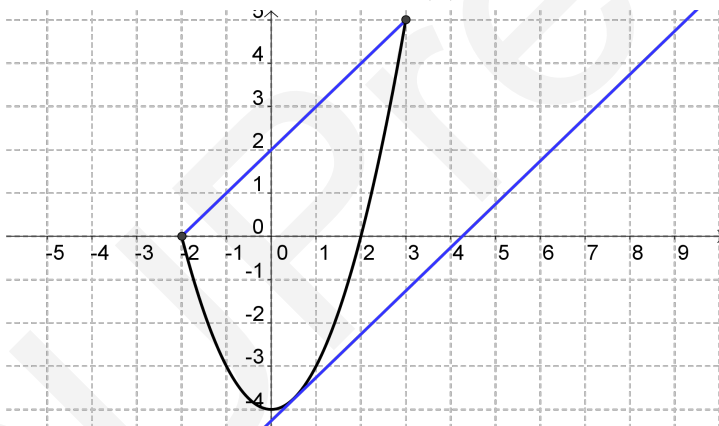
Az egyenletet átrendezve a bizonyítandó összefüggést kapjuk. ■

6.9. Tétel. (Lagrange-féle középértéktétel)

Ha $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ az $[a; b]$ -n folytonos, az $]a; b[$ intervallumon differenciálható függvény, akkor van olyan $c \in]a; b[$, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Bizonyítás: Alkalmazzuk az előző tételt a $g(x) = x$ függvényre.



Ezzel az állítást igazoltuk. ■

6.10. Megjegyzés. A Lagrange-féle középértéktétel geometriai tartalma: ha az $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos és az $]a; b[$ intervallumra való leszűkítése differenciálható, akkor az $]a; b[$ intervallumnak van olyan c pontja, amelyre teljesül, hogy a $(c; f(c))$ pontba húzott érintő egyenes párhuzamos az $(a; f(a))$ és $(b; f(b))$ pontokat összekötő szakasszal.

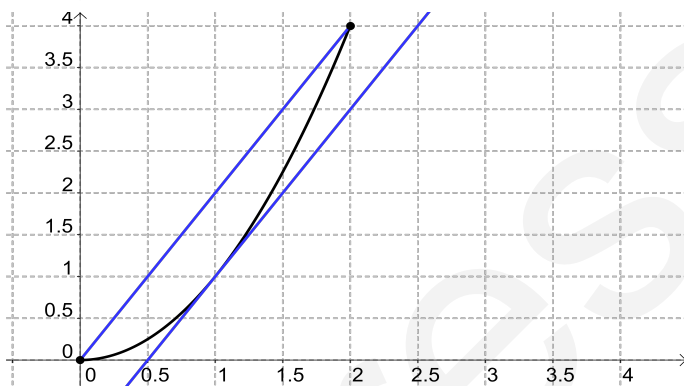
6.11. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény folytonos minden $0 \leq x \leq 2$ esetén, és differenciálható, amennyiben $0 < x < 2$. Mivel

$$f(0) = 0^2 = 0 \quad \text{és} \quad f(2) = 2^2 = 4,$$

ezért a Lagrange-féle középértéktétel szerint a $]0; 2[$ intervallum valamilyen c pontjában az f' függvénynek fel kell vennie a

$$\frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$$

értéket. Ebben az esetben a c pontot a $2c = 2$ egyenlet megoldásával meg tudjuk határozni, amire $c = 1$ adódik.



A $c = 1$ az a pont, amelyben a görbéhez húzott érintő párhuzamos a szelővel.

6.12. Megjegyzés. Ha az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ számot f átlagos megváltozásként (átlagos változási gyorsaságként) értelmezzük az $[a; b]$ intervallumon, $f'(c)$ -t pedig a c -beli pillanatnyi változási gyorsaságként, akkor a középértéktétel azt mondja ki, hogy tetszőleges intervallum esetén lennie kell egy belső pontnak, amelyben a pillanatnyi változási gyorsaság egyenlő a teljes intervallumon vett átlagos változási gyorsasággal.

6.13. Példa. A 6.12 megjegyzésben leírtaknak megfelelően a 6.11 példában megfogalmazott feladat például az alábbi „fizikai” köntösbe is bújtható.

Legyen $s(t) = t^2$ egy egyenes pályán mozgó gépkocsi hely-idő függvénye a $[0; 2]$ intervallumon. Ekkor az átlagsebessége $4 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Megmutatható, hogy a vizsgált időintervallumban van olyan időpillanat, amikor gépkocsi sebességmérője pontosan $4 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ -ot mutat. Ez az időpillanat az 1 [s] . (Lásd a 6.11 példafeladat megoldását.)

6.14. Következmény. (Csak a konstans függvények deriváltja nulla.)

Ha az $]a; b[$ nyílt intervallum minden x pontjában $f'(x) = 0$, akkor van olyan c valós szám, hogy $f(x) = c$ minden $x \in]a; b[$ esetén.

Bizonyítás: Azt, hogy f konstans az $]a; b[$ intervallumon, úgy mutatjuk meg, hogy belátjuk, hogy az $]a; b[$ intervallum tetszőleges x_1 és x_2 pontjai esetén

$f(x_1) = f(x_2)$. Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $x_1 < x_2$. Ekkor az $[x_1; x_2]$ intervallumon f kielégíti a Lagrange-féle középértéktétel feltételeit, ugyanis f az $[x_1; x_2]$ minden pontjában folytonos, továbbá f differenciálható az $]x_1; x_2[$ intervallumon, ezért létezik $c \in]x_1; x_2[$ úgy, hogy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Mivel az $]a; b[$ intervallumon f' mindenütt nulla, ezért

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0,$$

amiből $f(x_1) = f(x_2)$ következik, amivel igazoltuk az állítást. ■

6.15. Következmény. Azok a függvények, amelyeknek a deriváltja megegyezik, csak egy konstansban térnek el egymástól. Pontosabban, ha az $]a; b[$ nyílt intervallum bármely x pontjában $f'(x) = g'(x)$, akkor létezik olyan c valós szám, hogy $f(x) = g(x) + c$ minden $x \in]a; b[$ esetén.

Bizonyítás: Bármely $x \in]a; b[$ esetén a $h = f - g$ függvény deriváltja

$$h'(x) = (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Az előbbi következmény szerint van olyan c valós szám, hogy az $]a; b[$ intervallum minden x elemére $h(x) = c$. Tehát $f(x) - g(x) = c$ az $]a; b[$ intervallumon, amit átrendezve $f(x) = g(x) + c$ adódik, ami a bizonyítandó állítás. ■

6.16. Tétel. (Darboux-féle középértéktétel)

Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor az f' deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú, azaz bármely $a, b \in I$, $a < b$ esetén ha

$$f'(a) < v < f'(b) \quad (\text{vagy } f'(b) < v < f'(a)),$$

akkor létezik olyan $u \in]a; b[$, melyre $f'(u) = v$.

Bizonyítás: Legyen $[a; b] \subset I$. Tegyük fel, hogy $f'(a) < v < f'(b)$. Tekintsük a

$$g: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - v \cdot x$$

függvényt! Nyilván g folytonos $[a; b]$ -n, ezért a Weierstrass-tétel szerint a g -nek van minimuma és van maximuma is az $[a; b]$ intervallumon. Megmutatjuk, hogy g -nek sem a -ban, sem b -ben nincs minimuma. Ha $g'(x) = f'(x) - v$ és

$$g'(a) = f'(a) - v < 0, \text{ ezért } g \text{ az } a \text{ helyen szigorúan monoton csökkenő;}$$

$$g'(b) = f'(b) - v > 0, \text{ ezért } g \text{ a } b \text{ helyen szigorúan monoton növekvő.}$$

Ez azt jelenti, hogy g -nek az $[a; b]$ intervallum belsejében van a minimuma, azaz létezik olyan $u \in]a; b[$, hogy g -nek u -ban lokális szélsőértéke van. Ekkor a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele miatt (lásd: 6.1)

$$g'(u) = f'(u) - v = 0, \text{ azaz } f'(u) = v,$$

ami éppen a bizonyítandó állítást adja. ■

Ellenőrző kérdések

1. Ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van, akkor
2. A Rolle-féle középértéktétel szerint, amennyiben az $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy $f(a) \dots\dots\dots f(b)$, akkor az $[a; b]$ intervallumnak van olyan
3. A Lagrange-féle középértéktétel szerint az $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának van olyan belső pontja, amelybe húzott érintő
4. A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele:
5. Adjunk meg olyan differenciálható függvényt, melyre $f'(x_0) = 0$, azonban f -nek az x_0 helyen nincs lokális szélsőértéke!
6. Ha f és g olyan differenciálható függvények, hogy $f'(x) = g'(x)$, akkor ebből következik-e, hogy $f(x) = g(x)$?

7. L'Hospital-szabály

7.1. Tétel. (L'Hospital-szabály)

Legyen $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f, g:]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$, és legyen $a \leq x_0 \leq b$. Ha f és g differenciálható függvények az $]a; b[\setminus \{x_0\}$ halmazon és $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a; b[$ -re, továbbá

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

továbbá létezik a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ véges vagy végtelen határérték, akkor létezik a

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bizonyítás: Csak a „ $\frac{0}{0}$ ” esetet bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy x jobbról tart x_0 -hoz. Ekkor $g'(x) \neq 0$, és az $[x_0; x]$ zárt intervallumra alkalmazhatjuk a Cauchy-féle középértéktételt. Ekkor létezik olyan $c \in]x_0; x[$ valós szám, hogy

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Ha $f(x_0) = g(x_0) = 0$, akkor

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Amikor $x \rightarrow x_0+$, akkor c is tart x_0 -hoz, mivel c az x_0 és az x között helyezkedik el. Ezért

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Hasonlóan bizonyítható az $x \rightarrow x_0-$ eset is. ■

7.2. Megjegyzés. Az előbbi bizonyítás a differenciálhányados definíciójának felhasználásával is elvégezhető:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

7.3. Megjegyzés. A tétel állítása akkor is érvényben marad ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$$

vagy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

vagy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty.$$

7.4. Példa. Tekintsük a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2}$ határértéket. A számláló határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0,$$

a nevező határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + x^2) = 0 + 0^2 = 0,$$

így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz az eredeti tört határértéke megegyezik a számláló deriváltjából és a nevező deriváltjából képzett tört határértékével, azaz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x + x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

7.5. Megjegyzés. Számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$$

határértéket!

A határérték „ $\frac{\infty}{\infty}$ ” alakú ugyan, azonban a számláló deriváltja $1 + \cos x$, a nevező deriváltja $1 - \sin x$, amely függvényeknek nem létezik a határértéke a végtelenben, így nem alkalmazható a L'Hospital-szabály. Fontos megjegyeznünk tehát, hogy a L'Hospital-szabály alkalmazásához nem elegendő az, hogy a számláló és nevező határértéke egyaránt végtelen vagy 0, annak is teljesülni kell, hogy létezzen a számláló és nevező deriváltjának határértéke.

A L'Hospital-szabály „ $\frac{0}{0}$ ” vagy „ $\frac{\infty}{\infty}$ ” alakú határérték meghatározására használható, azonban megfelelő helyettesítéssel más alakú függvények határértéke is kiszámolható a segítségével.

7.6. Megjegyzés. Ha a határérték „ $0 \cdot \infty$ ” alakú, azaz ha f és g olyan függvények, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$, akkor az egyik lehetőségünk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

ami már $\frac{0}{0}$ alakú, ugyanis $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ és mivel $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$, ezért $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$. A másik lehetőség, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

ami már $\frac{\infty}{\infty}$ alakú, ugyanis $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ és mivel $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, ezért $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$.

7.7. Példa. Tekintsük a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x$ határértéket! Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

A határérték tehát $0 \cdot (-\infty)$ alakú. Az előbbi megjegyzésben leírtakat felhasználva

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

7.8. Megjegyzés. Ha a határérték 0^0 alakú, azaz ha f és g olyan függvények, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, akkor a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$$

határérték úgy számolható, hogy elvégezzük a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

átalakítást és ekkor már $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \ln f(x)$ egy $0 \cdot (-\infty)$ alakú határérték, amire már alkalmazható a 7.6 megjegyzésben leírt eljárás.

7.9. **Példa.** Tekintsük a $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ határértéket. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x},$$

ezért kiszámolva a

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x$$

határértéket

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0$$

adódik, így a keresett határérték $e^0 = 1$.

7.10. **Példa.** Tekintsük a $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$ határértéket. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln x},$$

kiszámolva a

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \cdot \ln x$$

határértéket

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\sin^{-2} x \cdot \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2 \sin x \cos x}{-x \cdot \sin x + \cos x} = 0, \end{aligned}$$

így a keresett határérték $e^0 = 1$

7.11. **Megjegyzés.** Ha a határérték „ $\infty - \infty$ ” alakú, azaz ha f és g olyan függvények, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, akkor a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x))}{f(x) + g(x)},$$

ahol a nevező határértéke végtelen. Ha a számlálónak van határértéke és az véges, akkor a tört határértéke 0. Ha a számláló határértéke végtelen, akkor alkalmazható a L'Hospital-szabály.

7.12. Példa. Tekintsük a $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$ határértéket.

Az előző megjegyzésben leírtakat alkalmazva

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \ln x) \cdot (x + \ln x)}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \ln^2 x}{x + \ln x}.$$

Mivel a L'Hospital-szabályt alkalmazva egyrészt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1 + \frac{1}{x}} = \infty,$$

másrészt felhasználva, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 0,$$

így $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \infty$.

Nézzük még egy további példát a L'Hospital-szabály alkalmazására!

7.13. Példa. Tekintsük a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

határértéket. Egyrészt

$$\text{ha } x \rightarrow 0+ \Rightarrow \frac{1}{\sin x} \rightarrow \infty \text{ és } \frac{1}{x} \rightarrow \infty,$$

másrészt

$$\text{ha } x \rightarrow 0- \Rightarrow \frac{1}{\sin x} \rightarrow -\infty \text{ és } \frac{1}{x} \rightarrow -\infty.$$

Az előbbi megjegyzésben leírtakat alkalmazva

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x}$$

A L'Hospital-szabályt alkalmazva

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cdot \cos x}.$$

Ismét alkalmazva a L'Hospital-szabályt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \cdot \sin x} = 0,$$

így a keresett határérték 0.

Ellenőrző kérdések

1. Mikor és hogyan alkalmazható a L'Hospital-szabály?
2. Ha f és g differenciálható függvények és $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$,
akkor $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$
3. Ha f és g differenciálható függvények és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$
4. Ha $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$
5. Ha $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots\dots\dots$
7. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x - \pi} = \dots\dots\dots$

8. Függvényvizsgálat

Ebben a fejezetben a következő jelölésekkel is élünk:

mon.	monotonitás
konv.	konvexitás
lok. min.	lokális minimum
lok. max.	lokális maximum
ip	inflexiós pont
n. é.	nincs értelmezve

8.1. Tétel. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, továbbá minden $x \in I$ esetén $f'(x) > 0$. Ekkor f szigorúan monoton növekvő az I intervallumon.

Bizonyítás: Legyen $x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_2$. A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan $c \in]x_1; x_2[$ valós szám, hogy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Mivel minden $x \in I$ esetén $f'(x) > 0$, ezért $f'(c) > 0$, így

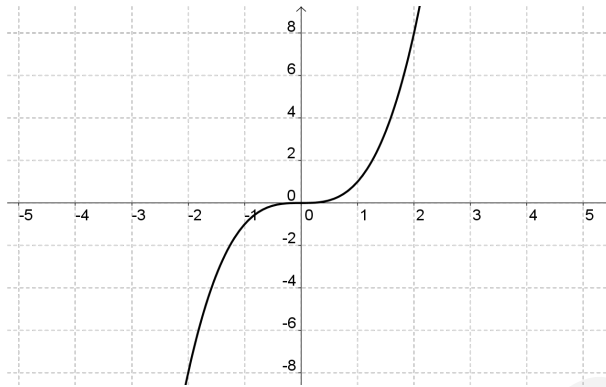
$$x_2 - x_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1),$$

így f szigorúan monoton növekvő. ■

8.2. Következmény. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és minden $x \in I$ esetén $f'(x) < 0$. Ekkor f szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon.

Bizonyítás: Ha $f'(x) < 0$, akkor $-f'(x) > 0$, így $(-f)'(x) > 0$. Az előző tétel szerint ekkor $-f$ monoton növekvő függvény, így f monoton csökkenő, amivel igazoltuk az állítást. ■

8.3. Megjegyzés. Az előző tétel megfordítása nem igaz, ugyanis tekintsük például az $f(x) = x^3$ függvényt. Ekkor f szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$ -en, de $f'(0) = 0$.



8.4. Tétel. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Az f függvény pontosan akkor monoton növekvő I -n, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$.

Bizonyítás: Ha f monoton növekvő, akkor minden $x, t \in I$, $t > x$ esetén $f(t) \geq f(x)$, így

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0,$$

tehát minden $x \in I$ esetén

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x) \geq 0.$$

Megfordítva, ha $f'(x) \geq 0$, akkor a 8.1 tétel bizonyításával megegyező módon igazolható, hogy f monoton növekvő. ■

8.5. Következmény. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor monoton csökkenő I -n, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \leq 0$.

8.6. Következmény. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény derivált függvénye az $x_0 \in I$ helyen előjelet vált, akkor f -nek x_0 -ban lokális szélsőértékhez van. Továbbá, ha létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy f az $]x_0 - \varepsilon; x_0[$ intervallumon monoton csökkenő (azaz $f'(x) \leq 0$, ha $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0[$), és az $]x_0; x_0 + \varepsilon[$ intervallumon monoton növekvő (azaz $f'(x) \geq 0$, ha $x \in]x_0; x_0 + \varepsilon[$), akkor f -nek x_0 -ban lokális minimuma van.

Ha létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy f az $]x_0 - \varepsilon; x_0[$ intervallumon monoton növekvő, (azaz $f'(x) \geq 0$, ha $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0[$) és az $]x_0; x_0 + \varepsilon[$ intervallumon monoton csökkenő (azaz $f'(x) \leq 0$, ha $x \in]x_0; x_0 + \varepsilon[$), akkor f -nek x_0 -ban lokális maximuma van.

8.7. Példa. Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$ függvényt monotonitás és lokális szélsőérték szempontjából!

Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9,$$

melynek zérushelyei

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 3 \cdot 9}}{6} = \frac{6 \pm 12}{6},$$

azaz $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

8.8. Példa. Vizsgáljuk meg az

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 2x}$$

függvényt monotonitás és lokális szélsőérték szempontjából:

A függvény deriváltja

$$f'(x) = -\frac{2 \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}.$$

Az f' függvény zérushelyét a $2 \cdot (2x - 2) = 0$ egyenlet megoldása adja, amiből $x = 1$ adódik. Az f' függvény zérushelye, valamint azok a helyek, ahol a derivált függvény nincs értelmezve négy részintervallumra bontják a számegyeneset. A derivált függvény előjelét tartalmazó táblázat:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	n. é.	+	0	−	n. é.	−
$f(x)$	↗	n. é.	↗	lok. max.	↘	n. é.	↘

8.9. Definíció. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *konvex*, ha minden $x, y \in I$ és minden $t \in [0, 1]$ esetén

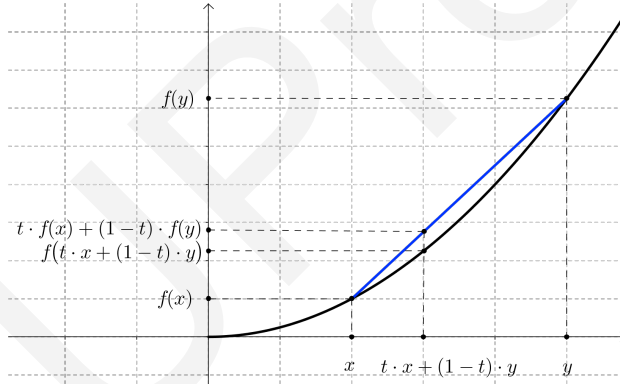
$$f(t \cdot x + (1 - t) \cdot y) \leq t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(y).$$

8.10. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény konvex minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ugyanis minden $x, y \in \mathbb{R}$ és minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$\begin{aligned}
 f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) &= (t \cdot x + (1-t) \cdot y)^2 = \\
 &= (t \cdot x)^2 + 2 \cdot t \cdot x \cdot (1-t) \cdot y + (1-t)^2 \cdot y^2 = \\
 &= t^2 \cdot x^2 + 2 \cdot t \cdot x \cdot y - 2 \cdot t^2 \cdot x \cdot y + y^2 - 2 \cdot t \cdot y^2 + t^2 \cdot y^2 = \\
 &= t^2 \cdot (x-y)^2 + 2 \cdot t \cdot y \cdot (x-y) + y^2 \leq \\
 &\leq t \cdot (x-y)^2 + 2 \cdot t \cdot y \cdot (x-y) + y^2 = \\
 &= t \cdot x^2 - 2 \cdot t \cdot x \cdot y + t \cdot y^2 + 2 \cdot t \cdot x \cdot y - 2 \cdot t \cdot y^2 + y^2 = \\
 &= t \cdot x^2 - t \cdot y^2 + y^2 = t \cdot x^2 + (1-t) \cdot y^2 = t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y),
 \end{aligned}$$

azaz f konvex.

8.11. Megjegyzés. Szemléletesen egy függvény konvexsége azt jelenti, hogy a függvény grafikonjának bármely két pontját összekötő szakasz a függvény grafikonja „fölött” halad. Ezt szemlélteti az alábbi ábra:



8.12. Definíció. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *konkáv*, ha minden $x, y \in I$ és minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \geq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y).$$

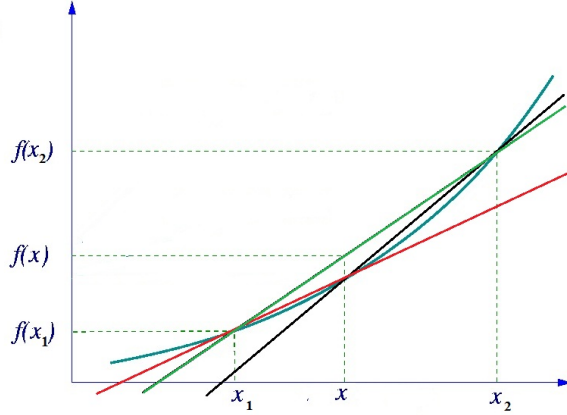
8.13. Megjegyzés. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor konkáv, ha $-f$ konvex.

8.14. Példa. Az $f(x) = -x^2$ függvény konkáv minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

8.15. Lemma. Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény és $x_1 < x < x_2$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Bizonyítás: Az alábbi ábráról szemléletesen nyilvánvaló az állítás, de a konvexitás definíciójából a precíz bizonyítást is elvégezzük.



Legyenek $x, x_1, x_2 \in I$ olyan valós számok, melyekre $x_1 < x < x_2$ teljesül és legyen $0 < t < 1$ olyan valós szám, melyre $x = (1 - t) \cdot x_1 + t \cdot x_2$. Felhasználva, hogy f konvex

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &= \frac{f((1 - t) \cdot x_1 + t \cdot x_2) - f(x_1)}{(1 - t) \cdot x_1 + t \cdot x_2 - x_1} \leq \\ &\leq \frac{(1 - t) \cdot f(x_1) + t \cdot f(x_2) - f(x_1)}{(1 - t) \cdot x_1 + t \cdot x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} &= \frac{f(x_2) - f((1 - t) \cdot x_1 + t \cdot x_2)}{x_2 - (1 - t) \cdot x_1 - t \cdot x_2} \geq \\ &\geq \frac{f(x_2) - (1 - t) \cdot f(x_1) - t \cdot f(x_2)}{x_2 - (1 - t) \cdot x_1 - t \cdot x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

8.16. Megjegyzés. Az előbbi egyenlőtlenségek átrendezésével adódik, hogy ha f konvex, akkor

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1),$$

illetve ezzel ekvivalens módon

$$f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_2)$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy konvex függvény bármely két pontját összekötő szelője a függvény grafikonja „fölött” halad.

8.17. Tétel. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konvex I -n, ha f' monoton növekvő I -n.

Bizonyítás: Ha f konvex és $x_1, x_2, x \in I$ olyanok, hogy $x_1 < x < x_2$, akkor a 8.15 lemma szerint

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Ebből $x \rightarrow x_1$, illetve $x \rightarrow x_2$ határátmenetet véve

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

adódik, következésképpen f' monoton növekvő.

A megfordításhoz legyen f' monoton növekvő és tegyük föl, hogy $x_1, x_2 \in I$ olyanok, hogy $x_1 < x_2$. Ekkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint léteznek olyan $c_1 \in]x_1; x[$, $c_2 \in]x; x_2[$ valós számok, hogy

$$f'(c_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad \text{és} \quad f'(c_2) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

teljesül, és így $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ miatt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq f'(c_2) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

adódik. Ezt átrendezve

$$f(x) \cdot (x - x_2) - f(x_1) \cdot (x - x_2) \geq f(x) \cdot (x - x_1) - f(x_2) \cdot (x - x_1),$$

amiből

$$f(x) \cdot (x_1 - x_2) \geq (f(x_1) - f(x_2)) \cdot x + x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1).$$

Ebből $x_1 - x_2 < 0$ miatt

$$\begin{aligned}
 f(x) &\leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot x + \\
 &+ \frac{x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1) + x_1 \cdot f(x_1) - x_1 \cdot f(x_1)}{x_1 - x_2} = \\
 &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot x - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot x_1 + \frac{f(x_1)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \\
 &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1) + f(x_1),
 \end{aligned}$$

így f konvex. ■

8.18. Következmény. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor konkáv I -n, ha f' monoton csökkenő I -n.

8.19. Következmény. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex I -n, ha $f''(x) \geq 0$ minden $x \in I$ esetén.

8.20. Következmény. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény akkor és csak akkor konkáv I -n, ha $f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

8.21. Definíció. Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, és f -nek az $x_0 \in I$ helyen megváltozik a konvexitása, akkor azt mondjuk, hogy f -nek x_0 -ban *inflexiós helye* van. Ilyenkor az $(x_0, f(x_0))$ pontot *inflexiós pontnak* nevezzük.

8.22. Tétel. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvénynek akkor és csak akkor van az $x_0 \in I$ helyen inflexiós helye, ha f'' előjelet vált x_0 -ban.

Bizonyítás: Ha f -nek x_0 -ban inflexiós helye van, és f konvexből konkávba vált, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $f''(x) \geq 0$, ha $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0[$ és $f''(x) \leq 0$, ha $x \in]x_0; x_0 + \varepsilon[$, tehát f'' előjelet vált x_0 -ban.

Ha f -nek x_0 -ban inflexiós helye van, és f konkávból konvexbe vált, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $f''(x) \leq 0$, ha $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0[$ és $f''(x) \geq 0$, ha $x \in]x_0; x_0 + \varepsilon[$, tehát f'' előjelet vált x_0 -ban.

Megfordítva, ha f'' előjelet vált x_0 -ban, akkor konvexből konkávba vagy konkávból konvexbe vált ott a függvény, így x_0 -ban inflexiós helye van. ■

8.23. Tétel. Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható, és f -nek az $x_0 \in I$ helyen inflexiós helye van, akkor $f''(x_0) = 0$.

Bizonyítás: Ha f konvexből konkávba vált x_0 -ban, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy f konvex az $]x_0 - \varepsilon; x_0[$ intervallumon, azaz $f''(x_0) \geq 0$ és f konkáv az $]x_0; x_0 + \varepsilon[$ intervallumon, azaz $f''(x_0) \leq 0$. Tehát $f''(x_0) = 0$.

Ha f konkávból konvexbe vált x_0 -ban, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy f konkáv az $]x_0 - \varepsilon; x_0[$ intervallumon, azaz $f''(x_0) \leq 0$, valamint f konvex az $]x_0; x_0 + \varepsilon[$ intervallumon, azaz $f''(x_0) \geq 0$. Tehát $f''(x_0) = 0$. ■

8.24. Megjegyzés. Az előző állítás megfordítása nem igaz, ugyanis tekintsük az $f(x) = x^4$ függvényt. Ekkor $f'(x) = 4x^3$, továbbá $f''(x) = 12x^2$. Ekkor $f''(0) = 0$, de f mindenhol konvex, így nincs inflexiós helye.

8.25. Példa. Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$ függvényt konvexitás és inflexiós pont szempontjából:

Az f függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, második deriváltja pedig $f''(x) = 6x - 6$, melynek zérushelye, azaz a $6x - 6 = 0$ egyenlet megoldása, azaz $x = 1$. Ez az érték a számegyenest két intervallumra osztja. A második derivált függvény előjeleit táblázatba foglaljuk:

	$x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

8.26. Tétel. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha

$$f(y) \geq f(x) + f'(x) \cdot (y - x) \quad (x, y \in I),$$

azaz ha a függvény minden érintője a függvény grafikonja „alatt” halad.

Bizonyítás: Ha f konvex, és $x, y \in I$, akkor minden $0 < t \leq 1$ esetén

$$t \cdot y + (1 - t) \cdot x \in I,$$

így

$$f(t \cdot y + (1 - t) \cdot x) \leq (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot f(y).$$

Mindkét oldalt t -vel osztva

$$f(y) \geq f(x) + \frac{(t \cdot y + (1 - t) \cdot x) - f(x)}{t}$$

adódik. Vegyük a $t \rightarrow 0$ határátmenetet. Ekkor

$$f(y) \geq f(x) + f'(x) \cdot (y - x).$$

A megfordításhoz legyen $x, y \in I$, $x \neq y$, és legyen $z = t \cdot x + (1 - t) \cdot y$. Ekkor

$$f(x) \geq f(z) + f'(z) \cdot (x - z)$$

$$f(y) \geq f(z) + f'(z) \cdot (y - z).$$

Szorozzuk meg az első egyenlőtlenséget t -vel, a másodikat $1 - t$ -vel. Ekkor

$$t \cdot f(x) \geq t \cdot f(z) + t \cdot f'(z) \cdot (x - z)$$

$$(1 - t) \cdot f(y) \geq (1 - t) \cdot f(z) + (1 - t) \cdot f'(z) \cdot (y - z).$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva

$$t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(y) \geq f(z)$$

adódik, ami azt jelenti, hogy f konvex. ■

8.27. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *Jensen-konvex*, ha

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (x, y \in I);$$

Jensen-konkáv, ha

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (x, y \in I).$$

8.28. Tétel. Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, akkor Jensen-konvex.

Bizonyítás: Ha f konvex, akkor minden $0 \leq t \leq 1$ esetén

$$f(t \cdot x + (1 - t) \cdot y) \leq t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(y) \quad (x, y \in I).$$

Legyen $t = \frac{1}{2}$. Ekkor

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy f Jensen-konvex. ■

8.29. Megjegyzés. A teljes függvényvizsgálat lépései:

1. Meghatározzuk a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető.
2. Meghatározzuk a függvény zérushelyeit.
3. Kiszámoljuk a függvény első deriváltját, majd annak zérushelyeit, amelyek segítségével megvizsgáljuk a függvényt monotonitás és lokális szélsőérték szerint.

4. Kiszámoljuk a függvény második deriváltját, majd annak zérushelyeit, amelyek segítségével megvizsgáljuk a függvényt konvexitás szempontjából és meghatározzuk az inflexiós helyeket.
5. Kiszámoljuk a határértékeket az értelmezési tartomány határpontjaiban.
6. Felvázoljuk a függvény grafikonját.
7. Meghatározzuk a függvény értékkészletét.
8. Megvizsgáljuk a függvény korlátosságát.
9. Megvizsgáljuk a függvény paritását.
10. Megvizsgáljuk, hogy periodikus-e a függvény. Ha igen, megadjuk a periódusát.
11. Megadjuk a függvény abszolút (globális) szélsőérték helyeit és értékeit.
12. Megvizsgáljuk, hogy invertálható-e a függvény.

8.30. **Példa.** Végezzük el az $f(x) = \ln(1 + x^2)$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\ln(1 + x^2) = 0,$$

amiből $1 + x^2 = 1$, így $x = 0$.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Ennek zérushelye $x = 0$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}$$

Ennek zérushelyei,

$$\frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x^2 + 2 = 0,$$

így $x = \pm 1$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv	ip	konvex	ip	konkáv

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

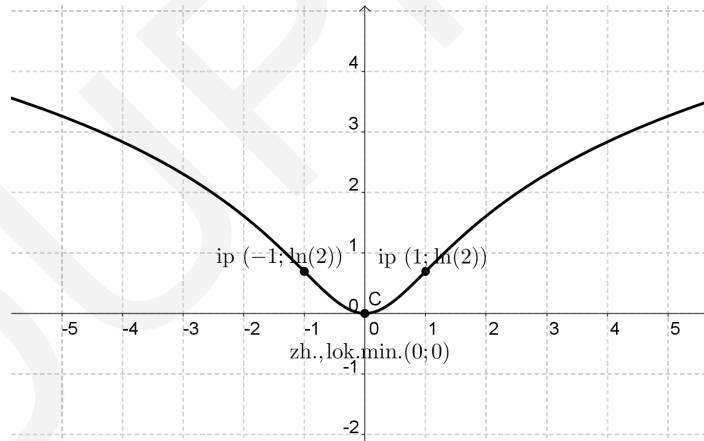
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + x^2) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + x^2) = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot az előző két táblázat alapján.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Mon.	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konvex	konvex	konkáv

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in [0; \infty[$.

8) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos.

9) Paritás: páros, mert a grafikonja szimmetrikus az y -tengelyre, azaz minden

$x \in \mathbb{R}$ esetén $f(-x) = f(x)$.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = 0$, minimum érték: $y = 0$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható.

Ellenőrző kérdések

1. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény monoton növekvő, akkor
2. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény monoton csökkenő, akkor
3. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen lokális szélsőérték helye van, akkor
4. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen lokális minimum helye van, akkor
5. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen lokális maximum helye van, akkor
6. Adjunk példát olyan függvényre, amelynek az x_0 helyen a deriváltja zérus, de a függvénynek az x_0 helyen nincs lokális szélsőértéke:
7. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen megváltozik a monotonitása, akkor
8. Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $\varepsilon > 0$, továbbá az $]x_0 - \varepsilon; x_0[$ intervallumon f monoton növekvő és az $]x_0; x_0 + \varepsilon[$ intervallumon f monoton csökkenő, akkor
9. Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $\varepsilon > 0$, továbbá az $]x_0 - \varepsilon; x_0[$ intervallumon f monoton csökkenő és az $]x_0; x_0 + \varepsilon[$ intervallumon f monoton növekvő, akkor
10. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény konvex, akkor
11. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény konkáv, akkor
12. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen inflexiós helye van, akkor
13. Mondjuk példát olyan függvényre, amelynek az $x_0 \in I$ helyen a második deriváltja zérus, de a függvénynek az x_0 helyen nincs inflexiós helye
14. Mondjunk példát olyan függvényre, amely értelmezési tartományának minden pontjában konvex!
15. Mondjunk példát olyan függvényre, amely értelmezési tartományának minden pontjában konkáv!
16. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen megváltozik a konvexitása, akkor az f függvénynek x_0 -ban

17. Mondjunk példát olyan függvényre, amelynek végtelen sok inflexiós pontja van!
18. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konvex, akkor $-f$
19. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konkáv, akkor $-f$

9. Taylor–polinom, Taylor–sor

9.1. Motiváció. Számos elméleti és gyakorlati feladat esetében előfordul, hogy bizonyos bonyolult formulával megadott függvényeket „egyszerűbbekkel” szeretnénk közelíteni és további számolásokban a közelítő függvényt használni (a „munkapont” közelében). Ebben a fejezetben egy lehetséges ilyen technikát mutatunk be. Itt feltesszük, hogy a közelítendő függvények elég simák, azaz elég sokszor differenciálhatók. A közelítés pedig az egyik legegyszerűbb függvényosztállyal, nevezetesen polinomokkal történik.

9.2. Definíció. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ az $x_0 \in I$ helyen n -szer differenciálható függvény. A

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

függvényt az f függvény x_0 helyhez tartozó (vagy x_0 körüli) n -edfokú (vagy n -edrendű) *Taylor-polinomjának* nevezzük.

9.3. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = e^{3x}$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli másodfokú Taylor-polinomját!

megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első és második deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 0$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	e^{3x}	1
$k = 1$	$3e^{3x}$	3
$k = 2$	$9e^{3x}$	9

Az f függvény x_0 pont körüli másodfokú Taylor-polinomja

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$T_2(x) = 1 + 3 \cdot (x - 0) + \frac{9}{2} \cdot (x - 0)^2.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket

$$T_2(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2.$$

9.4. Megjegyzés. Ha $T_n(x)$ az f függvény x_0 körüli n -edrendű Taylor-polinomja, akkor

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T'_n(x_0) = f'(x_0) \quad \dots \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

9.5. Megjegyzés. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény elsőfokú Taylor polinomja

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

ami éppen a függvény grafikonjának $(x_0; f(x_0))$ pontjába húzott érintő egyenest megadó függvény.

9.6. Tétel. (Taylor)

Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Tegyük föl, hogy létezik olyan $r > 0$ valós szám, melyre f az $]x_0 - r; x_0 + r[$ intervallumon $n + 1$ -szer differenciálható. Legyen $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$ tetszőleges. Ekkor létezik ξ valós szám x_0 és x között úgy, hogy

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(\xi),$$

ahol

$$R_{n+1}(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Az R_{n+1} tagot az f függvény *Lagrange-féle maradéktagjának* nevezzük.

Bizonyítás: Legyenek $s, p:]x_0 - r; x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ az alábbi módon definiálva

$$\begin{aligned} s(t) &= f(t) - T_n(t) \\ p(t) &= (t - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} s(x_0) &= s'(x_0) = \dots = s^{(n)}(x_0) = 0 \\ p(x_0) &= p'(x_0) = \dots = p^{(n)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Másrészt $t \neq x_0$ esetén $p(t) \neq 0$, továbbá

$$\begin{aligned} p'(t) &= (n+1) \cdot (t-x_0)^n \neq 0 \\ p''(t) &= (n+1) \cdot n \cdot (t-x_0)^{n-1} \neq 0 \\ &\vdots \\ p^{(n)}(t) &= (n+1)! \cdot (t-x_0) \neq 0 \\ p^{(n+1)}(t) &= (n+1)! \neq 0. \end{aligned}$$

Legyen $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$ tetszőleges. Tegyük föl, hogy $x > x_0$, és alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt az $]x_0; x[$ intervallumon az s és p függvényekre. Mivel $t \in]x_0; x[$ esetén $p'(t) \neq 0$, ezért létezik $c_1 \in]x_0; x[$ úgy, hogy

$$\frac{s(x)}{p(x)} = \frac{s(x) - s(x_0)}{p(x) - p(x_0)} = \frac{s'(c_1)}{p'(c_1)}.$$

Ismét alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt az $]x_0; c_1[$ intervallumon az s' és p' függvényekre. Ekkor van olyan $c_2 \in]x_0; c_1[$, hogy

$$\frac{s'(c_1)}{p'(c_1)} = \frac{s'(c_1) - s'(x_0)}{p'(c_1) - p'(x_0)} = \frac{s''(c_2)}{p''(c_2)}.$$

Ezt a lépést még $n-1$ -szer alkalmazva, létezik $c_{n+1} \in]a; c_n[$ olyan, hogy

$$\frac{s^{(n)}(c_n)}{p^{(n)}(c_n)} = \frac{s^{(n)}(c_n) - s^{(n)}(x_0)}{p^{(n)}(c_n) - p^{(n)}(x_0)} = \frac{s^{(n+1)}(c_{n+1})}{p^{(n+1)}(c_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Ezek alapján

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{s(x)}{p(x)} = \frac{s'(c_1)}{p'(c_1)} = \frac{s^{(n+1)}(c_{n+1})}{p^{(n+1)}(c_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!},$$

így $\xi = c_{n+1}$ választással

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. ■

9.7. Következmény. Ha az előbbi tétel feltételei mellett még az is teljesül, hogy $f^{(n+1)}$ korlátos az $]x_0 - r; x_0 + r[$ intervallumon, akkor az $f(x) - T_n(x)$ függvény n -edrendben kicsi, azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Bizonyítás: Az előző tétel szerint létezik olyan ξ valós szám, hogy

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad \text{ha } x \rightarrow x_0,$$

mivel $f^{(n+1)}$ korlátos. ■

9.8. Tétel. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény, továbbá $x_0, x \in I$ rögzített. Ha van olyan $K \geq 0$ valós szám, hogy minden x_0 és x közötti y -ra és minden $n \in \mathbb{N}$ -re

$$|f^{(n)}(y)| \leq K,$$

akkor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

Bizonyítás: Minden rögzített x esetén létezik olyan ξ

$$\begin{aligned} |f(x) - T_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \frac{K}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

teljesül, amivel igazoltuk az állítást. ■

9.9. Definíció. Az előző tételben szereplő

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

végtelen sort az f függvény x_0 pont körüli *Taylor-sorának* nevezzük. Ha speciálisan $x_0 = 0$, akkor *MacLaurin sorról* beszélünk.

9.10. **Példa.** Legyen $f(x) = \frac{1}{1-x}$ és $x_0 = 0$, továbbá $|x| < 1$. Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-x)^4},$$

és így tovább, tehát

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = \frac{n!}{|1-x|^{n+1}},$$

amiből $f^{(n)}(0) = n!$. Mivel $|x| < 1$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{(1-\xi)^{n+2} \cdot (n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = 0,$$

így f Maclaurin sora

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!} \cdot (x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$$

9.11. **Példa.** Legyen $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ és $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

Másrészt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = 0,$$

így f Maclaurin sora

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Ellenőrző kérdések

1. Az $f:]x_0 - r; x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 körüli n -edfokú Taylor-polinomja
2. Az $f:]x_0 - r; x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 körüli elsőfokú Taylor-polinomja
3. Az $f:]x_0 - r; x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 körüli másodfokú Taylor-polinomja
4. Az $f:]x_0 - r; x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 körüli elsőfokú Taylor-polinomja megegyezik a függvény x_0 -beli
5. Egy függvény 0 pont körüli Taylor-sorát nevezzük.
6. Az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor sora

10. Szélsőérték feladatok

10.1. Tétel. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény az $x_0 \in I$ helyen és $f'(x_0) = 0$. Ekkor

- ha $f''(x_0) > 0$, akkor a függvénynek az x_0 helyen lokális minimuma van;
- ha $f''(x_0) < 0$, akkor a függvénynek az x_0 helyen lokális maximuma van.

Bizonyítás:

- Tegyük föl, hogy $f''(x_0) > 0$. Ekkor

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

A határérték definíciója szerint létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy $f'(x) < 0$, ha $x \in]x_0 - r; x_0[$ és $f'(x) > 0$, ha $x \in]x_0; x_0 + r[$, azaz f szigorúan monoton csökkenő az $]x_0 - r; x_0[$ -on és szigorúan monoton növekvő az $]x_0; x_0 + r[$, következésképpen, f -nek x_0 -ban lokális minimuma van.

- Tegyük föl, hogy $f''(x_0) < 0$. Ekkor

$$0 > f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

A határérték definíciója szerint létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy $f'(x) > 0$, ha $x \in]x_0 - r; x_0[$ és $f'(x) < 0$, ha $x \in]x_0; x_0 + r[$, azaz f szigorúan monoton növekvő az $]x_0 - r; x_0[$ -on és szigorúan monoton csökkenő az $]x_0; x_0 + r[$, következésképpen, f -nek x_0 -ban lokális maximuma van.

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

10.2. Megjegyzés. Az előző tétel nem mond semmit, ha $f''(x) = 0$. Például $f(x) = x^4$ esetén $f''(x) = 12x^2$, így $f''(0) = 0$, és f -nek $x_0 = 0$ -ban lokális minimuma van. Ha $f(x) = -x^4$, akkor $f''(x) = -12x^2$, így $f''(0) = 0$, és f -nek $x_0 = 0$ -ban lokális maximuma van. Ha $f(x) = x^3$, akkor $f''(x) = 6x$, így $f''(0) = 0$, és f -nek $x_0 = 0$ -ban nincs lokális szélsőértéke.

10.3. Tétel. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény n -szer differenciálható és $x_0 \in I$ olyan, hogy

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

továbbá $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, akkor

- ha n páratlan, akkor f -nek x_0 -ban nincs lokális szélsőértéke;
- ha n páros és $f^{(n)}(x_0) > 0$, akkor f -nek x_0 -ban lokális minimuma van;
- ha n páros és $f^{(n)}(x_0) < 0$, akkor f -nek x_0 -ban lokális maximuma van.

Bizonyítás: A Taylor tétel szerint létezik olyan ξ valós szám x és x_0 között, hogy

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0) + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

az előbbi egyenlőség arra redukálódik, hogy

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

Ha $f^{(n)}(x_0) > 0$, akkor felhasználva, hogy $f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

$$\begin{aligned} 0 < f^{(n)}(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - 0}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0}, \end{aligned}$$

így a határérték definíciója miatt létezik $s > 0$ valós szám úgy, hogy minden $x \in]x_0 - s; x_0 + s[$ esetén

$$\frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0} > 0.$$

Ugyanígy, ha $f^{(n)}(x_0) < 0$, akkor

$$\frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0} < 0, \quad x \in]x_0 - s; x_0 + s[.$$

Ha n páratlan, akkor $]x_0 - s; x_0 + s[$ -en

$$\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sgn} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot \operatorname{sgn}(x - x_0)^n.$$

Ekkor az előbbi kifejezés nem állandó, így x_0 nem lehet szélsőérték.

Ha n páros, akkor

$$\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sgn} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot \operatorname{sgn}(x - x_0)^n = \operatorname{sgn} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Így ha $f^{(n)}(x) > 0$, akkor $f(x) - f(x_0) > 0$, azaz $f(x) > f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - s; x_0 + s[$ esetén, tehát x_0 lokális minimum hely; ha $f^{(n)}(x) < 0$, akkor $f(x) - f(x_0) < 0$, azaz $f(x) < f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - s; x_0 + s[$ esetén, tehát x_0 lokális maximum hely. ■

10.4. Megjegyzés. Tekintsük az $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt, és tegyük fel, hogy f leszűkítése az $]a; b[$ nyílt intervallumra akárhányszor differenciálható. Ekkor f -nek biztosan létezik maximuma és minimuma is, melyeket az alábbi módon határozhatunk meg:

1. Deriváljuk az f függvényt!
2. Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet, ezáltal meghatározva az f stacionárius helyeit!
3. Számoljuk ki a függvényértékeket a stacionárius helyeken, valamint határozzuk meg az $f(a)$ és $f(b)$ függvényértékeket! A kiszámolt értékek közül a legkisebb a függvény abszolút minimuma, a legnagyobb a függvény abszolút maximuma.

10.5. Példa. Adjuk meg az $f: [-1; 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2$ függvény abszolút minimumát és maximumát!

A függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 6x$. A $3x^2 - 6x = 0$ egyenlet megoldásai $x = 0$, $x = 2$.

	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

Másrészt

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 = -4$$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$$

$$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 = 64 - 48 = 16.$$

A függvény abszolút minimum helyei: $x = -1$ és $x = 2$, a minimum érték $y = -4$. Az abszolút maximum hely $x = 4$, a maximum érték $y = 16$.

10.6. Megjegyzés. Ha egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek egyetlen lokális minimuma (maximuma) van, akkor az egyben abszolút minimum (maximum) is.

10.7. Példa. Differenciálszámítás segítségével mutassuk meg, hogy az

$$f:]0; 4[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

függvénynek létezik abszolút minimuma. Adjuk meg annak értékét!

Mivel $f'(x) = 2x$ és a $2x = 0$ egyenlet megoldása $x = 0$, ezért $x = 0$ az egyetlen stacionárius hely, ami egyben abszolút minimum hely is. A minimum értéke $y = 0^2 = 0$.

10.8. Példa. Meghatározzuk az

$$f(x) = 12 \sin x - 5 \cos x$$

függvény értékkészletét.

A függvény szélsőértékeit kell meghatároznunk. A függvény deriváltja

$$f'(x) = 12 \cos x + 5 \sin x.$$

Ennek a zérushelye az az x érték, melyre

$$12 \cos x + 5 \sin x = 0$$

$$12 + 5 \operatorname{tg} x = 0$$

teljesül, azaz $\operatorname{tg} x = -\frac{12}{5}$. Ugyanakkor

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{12}{5}, \quad \Rightarrow \quad \sin x = -\frac{12}{5} \cos x,$$

másrészt a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{144}{25} \cos^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$169 \cos^2 x = 25$$

$$\cos^2 x = \frac{25}{169}$$

$$\cos x = \pm \frac{5}{13}.$$

Ha $\cos x = \frac{5}{13}$, akkor $\sin x = -\frac{12}{13}$, míg ha $\cos x = -\frac{5}{13}$, akkor $\sin x = \frac{12}{13}$. A minimum érték tehát

$$12 \sin x - 5 \cos x = 12 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - 5 \cdot \frac{5}{13} = \frac{-144 - 25}{13} = -13,$$

a maximum érték

$$12 \sin x - 5 \cos x = 12 \cdot \frac{12}{13} + 5 \cdot \frac{5}{13} = \frac{144 + 25}{13} = 13,$$

így az értékkészlet $[-13; 13]$.

Ellenőrző kérdések

1. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen stacionárius helye van és $f''(x_0) > 0$, akkor
2. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen stacionárius helye van és $f''(x_0) < 0$, akkor
3. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ háromszor differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen stacionárius helye van és $f''(x_0) = 0$, de $f'''(x_0) \neq 0$, akkor
4. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen stacionárius helye van és $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, de $f^{(4)}(x_0) > 0$, akkor
5. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen stacionárius helye van és $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, de $f^{(4)}(x_0) < 0$, akkor

11. Implicit függvények deriválása

11.1. Megjegyzés. A korábbiakban olyan függvények deriváltjait határoztuk meg, ahol a függvény $y = f(x)$ alakban, úgynevezett „*explicite*” módon volt megadva. Bizonyos esetekben előfordul, hogy az x és y között olyan összefüggést ismerünk, melyből y *explicite* nincs kifejezve. Ilyenkor akkor azt mondjuk, hogy „*implicit*” van megadva az y .

11.2. Definíció. Ha van olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $(x, f(x)) \in \mathcal{D}_F$ és

$$F(x, f(x)) = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az $F(x, y) = 0$ egyenlőség egy *implicit egyenletet* definiál. Az f függvényt az $F(x, y) = 0$ egyenlet által definiált *implicit függvénynek* nevezzük.

11.3. Példa. A következőkben példát adunk olyan implicit egyenletre, amely explicitté alakítható és olyanra is, amely nem alakítható hát explicit egyenletté.

- (1) Az $y - x^2 = 0$ egyenlet egy implicit egyenlet az y -ra. Ebből azonban könnyen kifejezhetjük az y -t és az $y = x^2$ egyenlethez jutunk, azaz explicit alakot nyerünk, így valójában az $f(x) = x^2$ függvényhez jutottunk.
- (2) Az $x^2 + y^2 - 36 = 0$ egyenlet szintén implicit egyenlet. Az y -t itt is ki tudjuk fejezni az x segítségével, azonban ekkor két megoldást kapunk:

$$y_1 = \sqrt{36 - x^2} \quad y_2 = -\sqrt{36 - x^2}.$$

Egyetlen függvény grafikonjaként nem áll elő a megadott implicit egyenletben szereplő grafikon.

- (3) Az $y^2 - x + \sin(xy) = 0$ egyenlet olyan implicit egyenlet, amelyből már ki sem fejezhető az y az x segítségével.

11.4. Eljárás. Implicit függvények deriválása:

1. Az implicit egyenlet mindkét oldalát deriváljuk x szerint úgy, hogy y -t az x (differentiálható) függvényeként tekintjük.
2. Rendezzük az egyenletet úgy, hogy az $y' = \frac{dy}{dx}$ kifejezést tartalmazó tagok egy oldalra kerüljenek.
3. Oldjuk meg a kapott egyenletet y' -re.

11.5. Példa. Meghatározzuk az

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$$

implicit egyenlet azon $(x; y)$ pontjait, amelyekbe húzott érintő egyenes párhuzamos az x -tengellyel.

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$2x + 4y \cdot y' - 2 + 16y' = 0.$$

Rendezzük az egyenletet úgy, hogy az y' kifejezést tartalmazó tagok egy oldalon szerepeljenek, míg azok a tagok, amik nem tartalmazzák az y' -t, a másik oldalon:

$$4y \cdot y' + 16y' = 2 - 2x.$$

Fejezzük ki az y' -t:

$$\begin{aligned} y' \cdot (4y + 16) &= 2 - 2x \\ y' &= \frac{2 - 2x}{4y + 16}. \end{aligned}$$

Azokat a pontokat keressük, amelyekben az érintő párhuzamos az x -tengellyel, azaz azokat a pontokat, ahol az érintő meredeksége (ami éppen y') zérus:

$$\frac{2 - 2x}{4y + 16} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Ha $x = 1$, akkor ezt az eredeti egyenletbe behelyettesítve

$$1^2 + 4y^2 - 2 \cdot 1 + 16y + 13 = 0$$

adódik. Elvégezve az összevonást a

$$4y^2 + 16y + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 4y + 3 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2},$$

azaz $y_1 = -3$, illetve $y_2 = -2$. Tehát a keresett pontok:

$$P_1 = (1; -3) \quad P_2 = (1; -2).$$

11.6. Példa. Meghatározzuk az

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

egyenlettel definiált implicit függvény deriváltját, továbbá a $(2; 4)$ pontjába húzott érintő egyenes egyenletét.

Az egyenlet mindkét oldalát deriválva

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 9y - 9xy \cdot y' = 0$$

adódik. Rendezzük az egyenletet úgy, hogy az y' kifejezést tartalmazó tagok egy oldalra kerüljenek:

$$3y^2 \cdot y' - 9y - 9xy \cdot y' = 9y - 3x^2.$$

Emeljük ki az y' -t:

$$y' \cdot (3y^2 - 9x) = 9y - 3x^2.$$

Kifejezve az y' -t azt kapjuk, hogy

$$y' = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}.$$

A derivált értéke a $(2; 4)$ pontban, ami a keresett egyenes meredeksége:

$$m = \frac{3 \cdot 4 - 2^2}{4^2 - 3 \cdot 2} = \frac{4}{5}.$$

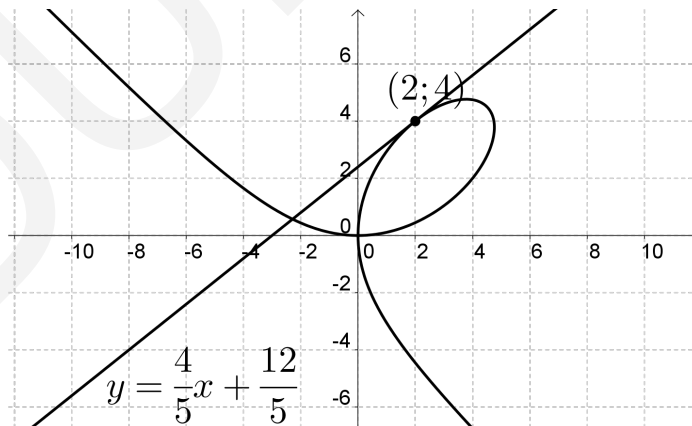
Az érintő egyenes egyenlete:

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = 4 + \frac{4}{5} \cdot (x - 2).$$

Elvégezve a zárójel felbontását és az összevonást

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

adódik. Megjegyezzük, hogy a példában szereplő egyenlet által meghatározott függvény grafikonját Descartes-féle levélnek nevezik. A grafikont és a keresett érintő egyenest az alábbi ábra szemlélteti:



11.7. Példa. Határozzuk meg az $x + y^2 = 5$ implicit egyenlettel definiált függvény második deriváltját az $(1; 2)$ pontban!

Az implicit egyenlet mindkét oldalát deriválva

$$1 + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{2y}$$

adódik. Ismét deriválva a kapott egyenlet mindkét oldalát azt kapjuk, hogy

$$2y' \cdot y' + 2y \cdot y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{(y')^2}{y}$$

Behelyettesítve az y' -re kapott kifejezést azt kapjuk, hogy

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y} = -\frac{1}{4y^3},$$

így a második derivált értéke az $(1; 2)$ pontban:

$$y''(1; 2) = -\frac{1}{4 \cdot 8} = -\frac{1}{32}.$$

11.8. Definíció. Korábban (lásd: 5.12) már definiáltuk az $y = f(x)$ explicit alakban megadott függvény görbületét. Amennyiben a függvény nem adható meg explicit alakban, akkor is definiálható analóg módon a *görbülete*:

$$g(x_0) = \frac{|y''(x_0)|}{(1 + (y'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

11.9. Példa. Tekintsük az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenlettel definiált kört. Ekkor mindkét oldalt deriválva, majd y' -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

A $2x + 2y \cdot y' = 0$ egyenlet mindkét oldalát deriválva

$$2 + 2y' \cdot y' + 2y \cdot y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{-1 - (y')^2}{y}$$

adódik. Felhasználva, hogy $y' = -\frac{x}{y}$ azt kapjuk, hogy

$$y'' = \frac{-1 - \frac{x^2}{y^2}}{y} = \frac{-y^2 - x^2}{y^3}.$$

A görbület

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{y^2 - x^2}{y^3}}{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = \\
 &= \frac{-(y^2 + x^2)}{y^3} \cdot \frac{y^3}{\sqrt{y^2 + x^2} \cdot (y^2 + x^2)} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2}} = \frac{1}{r},
 \end{aligned}$$

így tehát a korábban (5.16) már megkapott eredményhez jutottunk ismét, azaz, hogy a kör görbülete a kör minden pontjában a kör sugarának reciprokával egyenlő.

Implicit függvények deriválása

1. Tekintsük az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletet. Ekkor $y' = \frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
2. Tekintsük az $y^2 - x^2 = 10$ egyenletet. Ekkor $y' = \frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
3. Adjuk meg explicit egyenletként a $\sqrt{y} - x = 2$ implicit egyenletet $\dots\dots\dots$
4. Ha létezik olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $(x, f(x)) \in \mathcal{D}_F$, tovább $F(x, f(x)) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az $F(x, y) = 0$ egyenlőség $\dots\dots\dots$ definiál.

12. Newton–Raphson módszer

12.1. Motiváció. A matematika egyik alapvető problémája az egyenletek megoldása. Az egyenletek megoldása általában nehéz feladat, sőt sok esetben nem is lehetséges. Ezért fontos az, hogy ha nem is tudjuk megoldani az egyenletet, akkor az egyenlet megoldására közelítő értéket tudjunk adni. Egy ilyen eljárást ad a Newton–Raphson módszer.

12.2. Eljárás. Tekintsük az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, valamint az $f(x) = 0$ egyenletet. Legyen $x_0 \in I$ olyan valós szám, amelyen nem megoldása az $f(x) = 0$ egyenletnek. Írjuk fel az f függvény x_0 -beli érintő egyenesének egyenletét:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

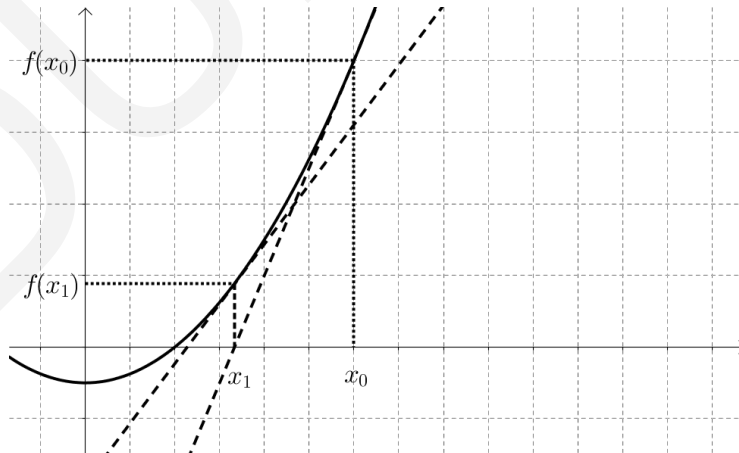
Határozzuk meg ennek az egyenesnek az x -tengellyel való metszéspontját

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Legyen most $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ és írjuk fel az f függvény $(x_1, f(x_1))$ pontjába húzott érintő egyenesének egyenletét és így tovább. Ekkor a k -adik lépésben az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

sorozathoz jutunk.



12.3. Példa. Meghatározzuk a $\sqrt{3}$ közelítő értékét az $x_0 = 1$ kezdeti értéket használva úgy, hogy a Newton–Raphson módszert háromszor alkalmazzuk!

Tekintsük az $f(x) = x^2 - 3$ függvényt. Ennek egyik gyöke $\sqrt{3}$. A függvény deriváltja $f'(x) = 2x$. A közelítő érték kiszámításához az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 3}{2x_k} \quad (k = 1, 2)$$

sorozatot kell tekintenünk. Mivel $x_0 = 1$, ezért

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - 3}{2x_0} = 1 - \frac{1^2 - 3}{2} = 2.$$

A második lépésben

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^2 - 3}{2x_1} = 2 - \frac{2^2 - 3}{4} = 1,75.$$

A harmadik lépésben

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_2 - \frac{x_2^2 - 3}{2x_2} = 1,75 - \frac{1,75^2 - 3}{2 \cdot 1,75} = 1,7321.$$

12.4. Tétel. Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény és x^* gyöke az $f(x) = 0$ egyenletnek, továbbá létezik olyan r pozitív valós szám, hogy az $]x^* - r; x^* + r[$ intervallum minden x elemére

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

teljesül, akkor a Newton–módszer konvergál az x^* gyökhöz, amennyiben a kezdőérték is beleesik az említett intervallumba. Ebben az esetben a konvergencia másodrendű, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = c,$$

ahol c egy állandó érték.

12.5. Megjegyzés. A másodrendű konvergencia lényegében azt jelenti, hogy a „helyes” tizedesjegyek száma minden lépésben megduplázódik.

12.6. Megjegyzés. Tekintsük az $f(x) = x^3 - 5x$ függvény és legyen $x_0 = 1$. Keressük az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásának közelítő értékét.

A függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 5$. A közelítő érték kiszámításához az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 5x_k}{3x_k^2 - 5} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

sorozatot kell tekintenünk. Mivel $x_0 = 1$, ezért

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 - 5x_0}{3x_0^2} = 1 - \frac{1 - 5}{3 - 5} = -1.$$

A második lépésben

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^3 - 5x_1}{3x_1^2} = -1 - \frac{-1 + 5}{3 - 5} = 1 = x_0,$$

így visszajutottunk a kezdeti értékhez. Ilyen esetben más kezdeti értéket kell választanunk.

Ellenőrző kérdések

1. Mire alkalmazható a Newton–Raphson módszer?
2. A Newton–Raphson módszer iterációs sorozata
3. Az $x^2 - 5 = 0$ egyenlet pozitív gyökének közelítő értékére $x_0 = 2$ esetén a Newton–Raphson módszerrel $x_1 = \dots\dots\dots$ adódik.

13. Elaszticitás

13.1. Motíváció. A közgazdaságtanban gyakran vizsgált kérdés, hogy összefüggő mennyiségek esetén az egyik 1%-os megváltozása a másik hány %-os megváltozását vonja maga után. Ezt az úgynevezett *elaszticitás* mutatja.

Lehetséges, hogy arra vagyunk kíváncsiak, hogy valamely termék árának megváltozása hogyan hat a termék keresletére. Ilyenkor megnézhetjük, hogy hány darabbal változik meg a termék iránti kereslet, ha 1 forinttal nő az ár. Ebben az esetben egy konkrét számot kapunk, ami a kereslet változása darabszámban. Sok esetben nem megfelelő az árral szembeni érzékenységet a keresletnek ilyen módon mérni, mivel míg egy autó 1 forintos árnövekedése jelentéktelen, addig 1 csésze kávé árának 1 forintos növekedése jelentősebb.

A probléma az, hogy a keresletnek az árváltozástól való függését, a termék iránti keresletet és az árat ugyanazzal a mértékkel mérjük. Ezek a nehézségek elkerülhetőek, ha relatív változásokat használunk, tehát ha azt vizsgáljuk, hogy hány százalékkal változik a kereslet, ha 1%-kal nő az ár. Az így kapott számot nevezzük a kereslet *árrugalmasságának* vagy *elaszticitásának*, ami független lesz attól, hogy milyen mértékkel mértük a termék árát és a kereslet mennyiségét.

Az $f(x)$ függvény jelentse egy termék iránti keresletet az ár függvényében. Az $f(x)$ *abszolút változása*

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

relatív változása

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}.$$

A kereslet mennyisége *relatív változásának* és az ár relatív változásának hányadosa

$$\frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Az ár egy százalékkal nő, ha $\Delta x = \frac{x}{100}$. Ekkor

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{100},$$

amit az előző képletbe behelyettesítve a kereslet mennyiségének százalékos megváltozását kapjuk. Az előbbieken definiált szám függ az árváltozástól és az x ártól is, de egységmentes, tehát nem számít, hogy a termék mennyiségét

tonnában vagy kilogrammban mérjük, és hogy az ár dollárban vagy forintban van-e megadva. Az f függvény elaszticitását egy adott pontban úgy definiáljuk, hogy az független legyen x megváltozásától. Ekkor f -nek az x pontban vett elaszticitását az

$$\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

hányados határértékeként definiáljuk, midőn $\Delta x \rightarrow 0$. Ekkor a differenciál-hányados definíciója szerint az elaszticitásra az

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

összefüggés adódik.

13.2. Definíció. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Az

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

függvény megmutatja, hogy ha az x értékét 1%-kal változtatjuk, akkor hány százalékkal változik az $f(x)$ értéke. Az $E(x)$ függvényt az f függvény *elaszticitás függvényének* nevezzük.

13.3. Megjegyzés. Például, ha egy termék iránti keresletet az x forintos ár függvényében az $f(x)$ függvény ír le, akkor az elaszticitás megmutatja, hogy ha 1%-kal növeljük (csökkentjük) a termék árát, akkor várhatóan hány százalékkal változik az iránta való kereslet.

13.4. Definíció. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény

- *rugalmatlan*, ha $0 < |E(x)| < 1$;
- *egységnyi rugalmasságú*, ha $|E(x)| = 1$;
- *rugalmas*, ha $|E(x)| > 1$.

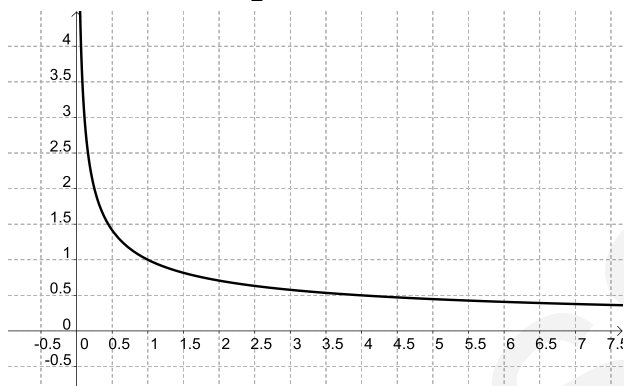
13.5. Példa. Tekintsük az $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvényt. Ekkor

$$f'(x) = (x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}},$$

így

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = x \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $|E(x)| = \frac{1}{2}$, így az f függvény rugalmatlan.



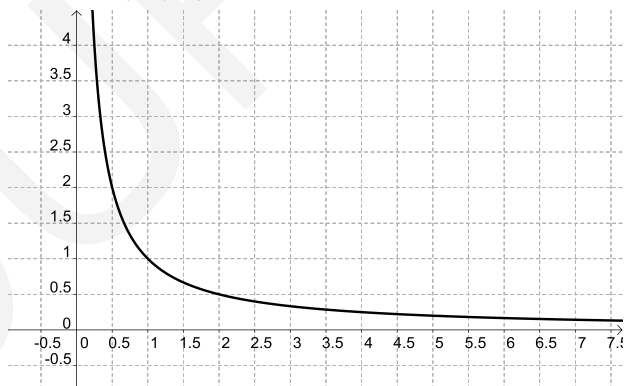
13.6. **Példa.** Tekintsük az $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt. Ekkor

$$f'(x) = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

így

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = x \cdot x \cdot \frac{-1}{x^2} = -1$$

Azt kaptuk tehát, hogy $|E(x)| = 1$, így az f függvény egységnyi rugalmasságú.



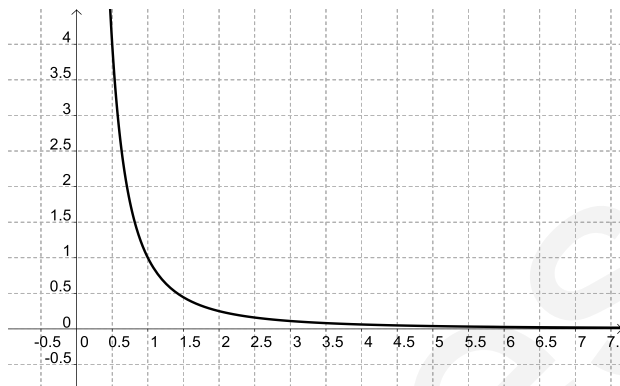
13.7. **Példa.** Tekintsük az $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvényt. Ekkor

$$f'(x) = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3},$$

így

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = x \cdot x^2 \cdot \frac{-2}{x^3} = -2$$

Azt kaptuk tehát, hogy $|E(x)| = 2$, így az f függvény rugalmas.



13.8. Megjegyzés. A közgazdaságtanban rendkívül fontosak azok a függvények, amelyeknek az elaszticitása állandó érték. Ilyenek például az ún. *Cobb-Douglas típusú függvények*. A közgazdaságtan különböző területein, így a mikroökonómiai fogyasztás- és termeléselméletben, valamint a makroökonómiában is széles körben használatosak ezek a függvények. Elsőként Knut Wicksell svéd közgazdász alkalmazta őket, elnevezésük mégis az amerikai Charles Cobb matematikus és Paul Douglas közgazdász nevéből származik. Legyenek a és b adott, valós számok, és tekintsük az

$$f(x) = a \cdot x^b$$

függvényt. Ekkor $f'(x) = a \cdot b \cdot x^{b-1}$, ezért az elaszticitás

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{a \cdot x^b} \cdot a \cdot b \cdot x^{b-1} = \frac{a \cdot b \cdot x \cdot x^{b-1}}{a \cdot x^b} = b,$$

így az elaszticitás értéke nem függ az x értékétől.

13.9. Példa. Egy árucikk iránti keresletet az x ártól függően az

$$f(x) = \frac{100}{x + 5}$$

függvény ad meg. Írjuk föl az elaszticitás függvényt! Hány százalékkal változik a kereslet, ha az áru 5 Ft-os árát 1%-kal emelik, illetve 3%-kal csökkentik?

Első lépésben kiszámoljuk az f függvény deriváltját:

$$f'(x) = \frac{-100}{(x+5)^2}.$$

Ezt felhasználva felírjuk az elaszticitás függvényt:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{\frac{100}{x+5}} \cdot \frac{-100}{(x+5)^2} = x \cdot \frac{x+5}{100} \cdot \frac{-100}{(x+5)^2} = \frac{-x}{x+5}.$$

Mivel a termék ára 5 Ft, ezért kiszámoljuk az $E(5)$ értéket:

$$E(5) = \frac{-5}{5+5} = -\frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha 1%-kal nő az ár, akkor várhatóan fél százalékkal csökken a termék iránti kereslet. Másrészt, ha 3%-kal csökken az ár, akkor várhatóan $3 \cdot 0,5\%$ -kal nő a termék iránti kereslet.

Ellenőrző kérdések

1. Az elaszticitás megmutatja, hogy
2. Az elaszticitás kiszámítása
3. Az $f(x) = 10x + 2000$ függvény elaszticitás függvénye
4. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény rugalmatlan, ha
5. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény egységnyi rugalmasságú, ha
6. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény rugalmas, ha

14. Differenciálszámítás a fizikában és a műszaki tudományokban

14.1. Megjegyzés. Az első fejezetben láttuk, hogy a differenciáhányados fizikai jelentése valamely fizikai mennyiség átlagos változási gyorsaságát jelenti, míg a differenciálhányados fizikai jelentése egy fizikai mennyiség pillanatnyi változási gyorsasága.

14.2. Mozgástani feladatok. Amennyiben $t \mapsto s(t)$ egy hely–idő függvény, úgy ennek differenciáhányadosa a $[t_1; t_2]$ időintervallumon az átlagsebesség; t_0 -beli differenciálhányadosa pedig a t_0 -beli pillanatnyi sebesség. Ha $t \mapsto v(t)$ egy sebesség–idő függvény, akkor annak a differenciáhányadosa a $[t_1; t_2]$ időintervallumon az átlagos gyorsulás; t_0 -beli differenciálhányadosa pedig a t_0 -beli pillanatnyi gyorsulás.

14.3. Példa. Ugyanazon egyenes pályán mozgó két részecske hely–idő függvényei

$$s_1(t) = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5,$$

illetve

$$s_2(t) = -t^3 + 9t^2 - 12t.$$

Az időt mindkét esetben másodpercben, a távolságot pedig méterben mérjük. Mikor lesz a két részecske sebessége egyenlő?

Az első részecske sebesség–idő függvénye

$$v_1(t) = s'_1(t) = 9t^2 - 24t + 18.$$

A második részecske sebesség–idő függvénye

$$v_2(t) = s'_2(t) = -3t^2 + 18t - 12.$$

Azt a t értéket keressük, amelyre $v_1(t) = v_2(t)$, azaz a

$$9t^2 - 24t + 18 = -3t^2 + 18t - 12$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletet nullára redukálva, majd mindkét oldalt elosztva 6-tal

$$12t^2 - 42t + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t^2 - 7t + 5 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenletet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}.$$

A részecskék sebessége tehát a megfigyelés kezdete után 1 másodperccel, majd a megfigyelés kezdete után 2, 5 másodperccel fog megegyezni.

14.4. **Példa.** Egy egyenes pályán mozgó részecske hely–idő függvénye

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t.$$

Az eltelt időt másodpercben, a megtett utat méterben mérjük.

- Határozzuk meg a sebesség–idő függvényt!
- Adjuk meg a pillanatnyi sebességét a 2 és 4 időpillanatokban!
- Határozzuk meg azokat az időpillanatok, amikor a részecske sebessége zérus!
- Adjuk meg azt az időintervallumot, amikor a részecske „megfordul”, azaz az eredetivel „ellentétes irányba” halad!
- Készítsünk vázlatot a részecske mozgásáról!
- Határozzuk meg, hogy az első 5 másodpercben mennyi utat tett meg a részecske?
- Adjuk meg a gyorsulás–idő függvényt!
- Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a hely–idő, a sebesség–idő és a gyorsulás–idő függvényeket!

megoldás:

- a) A sebesség idő függvény

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

- b) A pillanatnyi sebesség a 2 és 4 időpillanatokban:

$$v(2) = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$v(4) = 3 \cdot 16 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

- c) A $v(t) = 0$ egyenlet megoldását keressük, azaz a

$$3t^2 - 12t + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

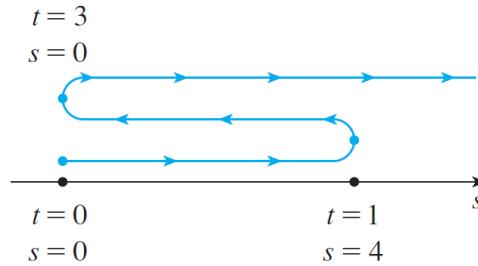
azaz $t_1 = 1$ és $t_2 = 3$ adódik.

- d) Az $s'(t) = v(t)$ függvény előjelét táblázatba foglaljuk:

	$t < 1$	$t = 1$	$1 < t < 3$	$t = 3$	$t > 3$
$s'(t)$	+	0	–	0	+
$s(t)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

Azt kaptuk tehát, hogy a $t \in]1; 3[$ időintervallumban halad a részecske az eredetivel ellentétes irányba.

e) A részecske mozgását az alábbi diagrammal szemléltethetjük:



f) A részecske az első 5 másodpercben

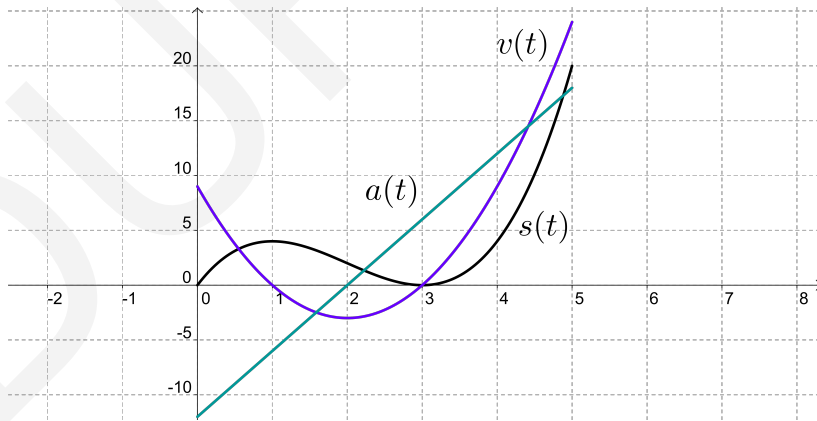
$$\begin{aligned} |s(1) - s(0)| + |s(3) - s(1)| + |s(5) - s(3)| &= \\ = |4 - 0| + |0 - 4| + |20 - 0| &= 28 \text{ [m]} \end{aligned}$$

utat tett meg.

g) A gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény deriváltja:

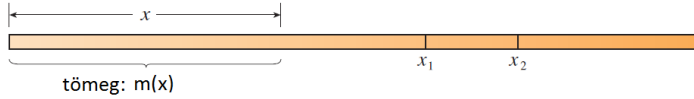
$$a(t) = v'(t) = 6t - 12.$$

h) A hely-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő függvények:



14.5. Vonalmenti tömegsűrűség. Egy homogén egyenes rúd sűrűségét a homogén rúd tömege és a rúd hosszának hányadosaként definiálhatjuk. Ha a rúd nem homogén szerkezetű és a $[0; x]$ intervallumon a tömegét az $m(x)$ függvény

adja meg, akkor a vonalmenti tömegsűrűsége az $m(x)$ függvény differenciálhányadosa.



14.6. Példa. Egy inhomogén egyenes rúd tömegét a rúd bal oldali „végétől” x -ig az $m(x) = \sqrt{x}$ függvény írja le, ahol a tömeget kilogrammban, a hosszúságot méterben mérjük. Ekkor az átlagos sűrűség az 1 és 4 méter közötti szakaszon

$$\Delta \varrho = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{1}}{4 - 1} = \frac{1}{3} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right].$$

A sűrűség az $x = 1$ helyen

$$\varrho = m'(1) = \frac{1}{2 \cdot x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right].$$

14.7. Teljesítmény. Egyenletes munkavégzés esetén a teljesítmény:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t},$$

különben

$$P(t) = W'(t).$$

14.8. Legkisebb négyzetek módszerének egy speciális esete. Differenciálszámítás segítségével meghatározható olyan $f(x) = g(x, a)$ függvény ismeretlen a paramétere, amely „négyzetesen” legjobban közelíti az

$$(x_1; y_1), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$$

pontokat. A feladat tehát a

$$H(a) = \sum_{k=1}^n (y_k - a \cdot g(x_k))^2$$

függvény minimumának megkeresése.

14.9. Példa. Tegyük fel, hogy az x és az y közötti függvény kapcsolat $y = a \cdot 2^x$. Négy mérést végzünk, a mérési eredmények az alábbiak:

$$\begin{aligned} A(x_1; y_1) &= (1; 3) & B(x_2; y_2) &= (2; 6) \\ C(x_3; y_3) &= (3; 10) & D(x_4; y_4) &= (4; 14). \end{aligned}$$

Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy az eltérések négyzetösszege a lehető legkisebb legyen, azaz keressük meg, hogy milyen a valós szám esetén lesz a

$$H(m) = \sum_{k=1}^4 (y_k - a \cdot 2^{x_k})^2$$

függvény értéke minimális.

megoldás:

Behelyettesítve az adatokat a H függvény:

$$H(a) = (3 - 2a)^2 + (6 - 4a)^2 + (10 - 8a)^2 + (14 - 16a)^2.$$

A H függvény deriváltja

$$\begin{aligned} H'(a) &= 2 \cdot (3 - 2a) \cdot (-2) + 2 \cdot (6 - 4a) \cdot (-4) + \\ &\quad + 2 \cdot (10 - 8a) \cdot (-8) + 2 \cdot (14 - 16a) \cdot (-16). \end{aligned}$$

Ha elvégezzük az összevonást, akkor azt kapjuk, hogy

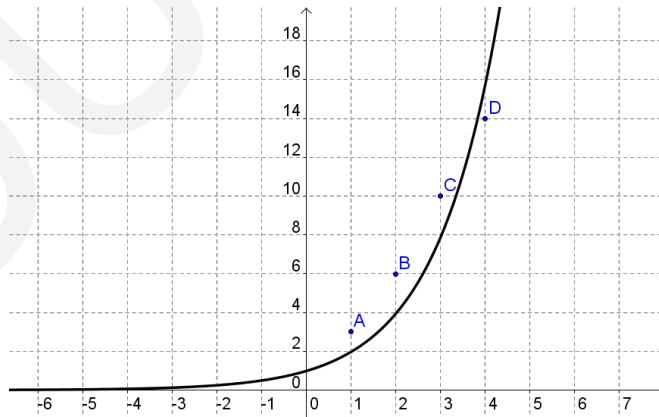
$$H'(a) = 680a - 668.$$

Ennek a zérushelye

$$680a - 668 = 0 \quad \Rightarrow \quad 680a = 668 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{668}{680} = \frac{167}{170},$$

így a keresett ismeretlen paraméter $a = \frac{167}{170}$, tehát a keresett függvény

$$y = \frac{167}{170} \cdot 2^x.$$



Ellenőrző kérdések

1. A $t \rightarrow s(t)$ hely–idő függvény differenciáhányadosának jelentése a $[t_1; t_2]$ intervallumon:
2. A $t \rightarrow v(t)$ sebesség–idő függvény differenciáhányadosának jelentése a $[t_1; t_2]$ intervallumon:
3. A $t \rightarrow s(t)$ hely–idő függvény t_0 -beli deriváltjának jelentése:
4. A $t \rightarrow v(t)$ sebesség–idő függvény t_0 -beli deriváltjának jelentése:
5. Az $s(t) = t^2 - 2t + 1$ hely–idő függvény esetén a sebesség–idő függvény:
6. Az $s(t) = t^2 - 2t + 1$ hely–idő függvény esetén a gyorsulás–idő függvény:
7. Az $s(t) = \sqrt{t}$ hely–idő függvény esetén a gyorsulás–idő függvény:
8. Az $s(t) = \cos(2t)$ hely–idő függvény esetén a pillanatnyi sebesség a $t = \frac{\pi}{4}$ időpillanatban:

15. A differenciálszámítás gazdasági alkalmazásai

15.1. Határkölség. Legyen $C(x)$ egy *költségfüggvény*, amely megmutatja, hogy x darab termék előállításához mennyibe kerül. A *határkölség* a költségfüggvény x (vagyis az előállított termék mennyisége) szerinti deriváltja.

A közgazdászok a termelés költségét általában harmadfokú polinomfüggvényekkel írják le, azaz

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

alakú függvényekkel. Itt a d a gyártás fix költségét jelenti (bérleti díj, fűtési díj, gyártósor megvásárlásának költsége, stb.), a többi tag a változó költség, vagyis az előállított mennyiségtől függő költség.

15.2. Példa. [31] Valamely termék költségfüggvénye

$$C(x) = x^3 - 165x^2 + 10.000x + 20.000 \quad (0 \leq x < 200),$$

ahol x a gyártott termék mennyiségét jelenti ezer darabban, a $C(x)$ költséget pedig euroban értjük.

A határkölség

$$C'(x) = 3x^2 - 330x + 10.000.$$

Mivel a

$$3x^2 - 330x + 10.000 = 0$$

másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 330^2 - 120.000 = 108.900 - 120.000 = -11.100 < 0,$$

így $C'(x)$ -nek nincs zérushelye, ugyanakkor $C'(x)$ egy „felfelé nyíló” parabola, így $C'(x) > 0$ minden x esetén, azaz a $C(x)$ költségfüggvény szigorúan monoton növekvő. A $C(x)$ függvény második deriváltja

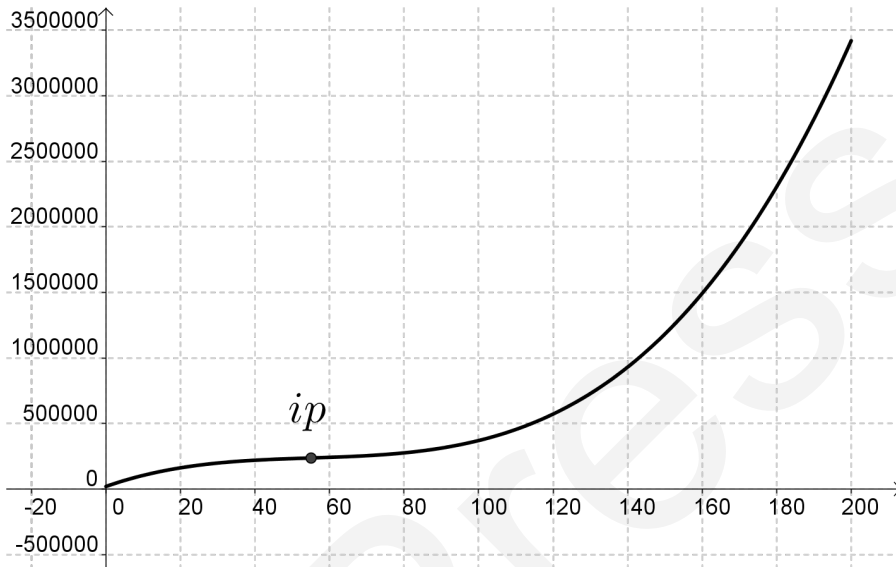
$$C''(x) = 6x - 330.$$

Ennek a zérushelye: $x = 55$. A második derivált előjelét tartalmazó táblázat:

	$x < 55$	$x = 55$	$x > 55$
$C''(x)$	–	0	+
$C(x)$	konkáv	ip	konvex

Mivel $C(0) = 20.000$, ezért 20.000 euro a fixköltség. A termelés növekedésével a költség is nő, de változó intenzitással. Eleinte a költség gyorsabban nő, majd ahogy a gépek, eszközök kihasználtsága javul elkezd csökkenni a költség növekedésének üteme. Később, az inflexió pont után azonban ismét

gyorsul a költségnövekedés üteme. Ennek az oka, hogy a rendelkezésre álló keretek (berendezések, munkaerő) már kevésnek bizonyulnak a termékmennyiség növeléséhez.



15.3. Határkereslet. Azt a függvényt, amely egy termék iránti keresletet mutatja meg a termék árának függvényében, *keresleti függvénynek* nevezzük. Az $f(x)$ keresleti függvény differenciálhányadosának értéke a *határkereslet*.

15.4. Példa. Meghatározzuk az

$$f(x) = 200 \cdot x^{-1,5} \quad (x > 0)$$

függvény határkeresletét az $x_0 = 9$ helyen.

Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = -300 \cdot x^{-2,5},$$

így a határkereslet az $x_0 = 9$ helyen

$$f'(9) = -300 \cdot 9^{-2,5} = -\frac{300}{243} = -1,235.$$

15.5. Határbevétel. Azt a függvényt, amely egy termékből származó bevételt mutatja meg a termék darabszámának függvényében, *bevételi függvénynek* nevezzük. A $B(x)$ bevételi függvény differenciálhányadosának értéke a *határbevétel*.

15.6. Határprofit. Azt a függvényt, amely egy termékből származó nyereséget mutatja meg a termék darabszámának függvényében, *profit vagy nyereség függvénynek* nevezzük. A $P(x)$ profit függvény differenciálhányadosának értéke a *határprofit*.

15.7. Tétel. Maximális profitot biztosító termelés esetén a határbevétel egyenlő a határköltséggel.

Bizonyítás: Legyen a profit függvény $P(x)$, a bevételi függvény $B(x)$, a költség függvény $C(x)$. Ekkor $P(x) = B(x) - C(x)$. Ha a profit maximális, akkor $P'(x) = 0$. Másrészt

$$P'(x) = B'(x) - C'(x),$$

így maximális profit esetén $B'(x) - C'(x) = 0$, tehát $B'(x) = C'(x)$, azaz a határbevétel és a határköltség egyenlő. ■

Ellenőrző kérdések

1. A $C(x)$ költségfüggvény esetén az átlagos költség az $[x_1; x_2]$ intervallum esetén:
2. A $C(x)$ költségfüggvény esetén a határköltség:
3. Maximális profitot biztosító termelés esetén
4. A $C(x) = 2x + 6.000$ költségfüggvény esetén a határköltség
5. A $B(x)$ bevételi függvény differenciálhányadosának értéke a

16. Differenciálszámítás alkalmazása a biológiában és a kémiában

Az alábbiakban a differenciálszámítás egy biológiai alkalmazását mutatjuk be.

16.1. **Példa.** Egy gyógyszerre való reakció sok esetben egy

$$R(M) = M^2 \cdot \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right)$$

alakú függvénnyel írható le, ahol C egy pozitív állandó, M pedig a vérbe fel szívódott hatóanyag mennyisége. Ha például a szóban forgó reakció vérnyomásváltozás, akkor R mértékegysége Hgmm, ha hőmérsékletváltozás, akkor Celsius-fok. A $R'(M)$ deriváltat a test (adott gyógyszerre való) *érzékenysége*-nek nevezzük. Jelen esetben

$$R'(M) = 2M \cdot \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right) + M^2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) = MC - M^2.$$

Az a gyógyszer mennyiség, amelyre a test a legérzékenyebb úgy kapható meg, hogy meghatározzuk azt az M értéket, amelyre az $R'(M)$ derivált függvénynek maximuma van. Ehhez ki kell számolnunk az $R'(M)$ függvény (M -szerinti) deriváltját, majd meghatározzuk annak a zérushelyét:

$$R''(M) = C - 2M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{C}{2}.$$

Mivel az $R'(M)$ függvény második deriváltja (azaz az $R(M)$ harmadik deriváltja) $R''(M) = -2$, ezért az $M = \frac{C}{2}$ helyen valóban maximuma van az $R'(M)$ függvénynek.

Az alábbiakban a differenciálszámítás egy kémiai alkalmazására adunk példát.

16.2. **Feladat.** [34] Egy magnéziumhidroxid telített $3,6 \cdot 10^{-4}$ mólós sósav oldat $[OH^-]$ hidroxid ionkoncentrációjának meghatározásakor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{3,6 \cdot 10^{-11}}{[OH^-]^2} = [OH^-] + 3,6 \cdot 10^{-4}.$$

Határozzuk meg $[OH^-]$ közelítő értékét Newton–Raphson módszerrel!

megoldás:

Vezessük be az $x = 10^4 \cdot [OH^-]$ jelölést. Ekkor a megadott egyenlet átrendezés után

$$x^3 + 3,6x^2 - 36,4 = 0$$

alakú lesz. Tekintsük az

$$f(x) = x^3 + 3,6x^2 - 36,4$$

függvényt! Ennek a deriváltja

$$f'(x) = 3x^2 + 7,2x,$$

így a Newton–Raphson módszerben szereplő iterációs sorozat az alábbi lesz:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 + 3,6x_k^2 - 36,4}{3x_k^2 + 7,2x_k} \quad (k = 1, 2).$$

Tekintsük az $x_0 = 2$ kezdeti értéket. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 + 3,6x_0^2 - 36,4}{3x_0^2 + 7,2x_0} = \\ &= 2 - \frac{2^3 + 3,6 \cdot 2^2 - 36,4}{3 \cdot 2^2 + 7,2 \cdot 2} \approx 2,5303. \end{aligned}$$

Következő lépésben

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^3 + 3,6x_1^2 - 36,4}{3x_1^2 + 7,2x_1} = \\ &= 2 - \frac{2,5303^3 + 3,6 \cdot 2,5303^2 - 36,4}{3 \cdot 2,5303^2 + 7,2 \cdot 2,5303} \approx 2,4541. \end{aligned}$$

Mivel

$$x = 10^4 \cdot [OH^-] \quad \Rightarrow \quad x \cdot 10^{-4} = [OH^-],$$

ezért $[OH^-] \approx 0,00024541$.

17. Áttekintés egy feladaton keresztül

17.1. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ és a $h(x) = x^2 - 2x$ függvényeket, valamint az $l(x) = f \circ h(x)$ függvényt!

- a) Határozzuk meg az $x_0 = 8$ helyen az $f(x)$ függvény differenciáhányados függvényét!
- b) Adjuk meg az $f(x)$ függvény $x_0 = 8$ helyhez tartozó differenciáhányadosának értékét!
- c) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény grafikonjának $(8; 2)$ pontbeli érintő egyenesének meredekségét és irányszögét!
- d) Írjuk fel az $f(x)$ függvény grafikonjának $(8; 2)$ pontjába húzott érintő egyenesének egyenletét!
- e) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény grafikonjának $(8; 2)$ pontbeli normális egyenesének meredekségét és irányszögét!
- f) Írjuk fel az $f(x)$ függvény grafikonjának $(8; 2)$ pontjába húzott normális egyenesének egyenletét!
- g) Adjuk meg az $f(x)$ függvény $x_0 = 8$ helyhez tartozó tangens szakaszának és normális szakaszának hosszát!
- h) Adjuk meg az $f(x)$ függvény $x_0 = 8$ helyhez tartozó szubtangens és szubnormális szakaszának hosszát!
- i) Adjuk meg az $f(x)$ függvény második deriváltjának értékét az $x_0 = 8$ helyen!
- j) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény görbületi függvényét és adjuk meg a görbületet az $x_0 = 8$ helyen!
- k) Mutassuk meg, hogy az $(f(x))^4$ függvény differenciálható az $x_0 = 0$ helyen, de a második deriváltja már nem létezik az $x_0 = 0$ helyen!
- l) Adjuk meg az $f(x)$ függvény $x_0 = 8$ pont körüli másodrendű Taylor-polinomját!
- m) Az előbbi eredmény felhasználásával számoljuk ki $\sqrt[3]{7}$ közelítő értékét!
- n) Adjuk meg az $f(x) \cdot h(x)$ függvény deriváltját!
- o) Határozzuk meg az $\frac{f(x)}{h(x)}$ függvény deriváltját!
- p) Adjuk meg az $l(x)$ függvény deriváltját és az $l'(8)$ értéket!
- q) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{h(x)}$ határértéket!

megoldás:

a) Az f függvény differenciahányadosa az $x_0 = 8$ helyen:

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{8}}{x - 8} = \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{8}) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{8x} + \sqrt[3]{64})}{(x - 8) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{8x} + \sqrt[3]{64})} = \\ &= \frac{x - 8}{(x - 8) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{8x} + \sqrt[3]{64})} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{8x} + \sqrt[3]{64}}. \end{aligned}$$

b) Az f függvény differenciálhányadosa az $x_0 = 8$ helyen:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{8x} + \sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}.$$

c) Az f érintő egyenesének meredeksége az $x_0 = 8$ helyen: $m_e = \frac{1}{12}$. Az érintő egyenes irányszöge

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 4,76^\circ.$$

d) Az érintő egyenes egyenlete

$$y = 2 + \frac{1}{12} \cdot (x - 8) \quad \Rightarrow \quad y = 2 + \frac{1}{12}x - \frac{2}{3},$$

tehát

$$y = \frac{4}{3} + \frac{1}{12}x.$$

e) A normális egyenes meredeksége

$$m_n = -\frac{1}{m_e} = -12,$$

irányszöge

$$\operatorname{tg} \beta = -12 \quad \Rightarrow \quad \beta = 94,76^\circ.$$

f) A normális egyenes egyenlete

$$y = 2 - 12 \cdot (x - 8) \quad \Rightarrow \quad y = 98 - 12x.$$

g) A tangens szakasz hossza

$$T = \left| f(x_0) \cdot \frac{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}{f'(x_0)} \right| = \left| 2 \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{12}\right)^2}}{\frac{1}{12}} \right| = 2 \cdot \sqrt{145}.$$

A normális szakasz hossza

$$N = \left| f(x_0) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \right| = \left| 2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{12} \right)^2} \right| = \frac{\sqrt{145}}{6}.$$

h) A szubtangens szakasz hossza

$$S_T = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{2}{\frac{1}{12}} \right| = 24.$$

A szubnormális szakasz hossza

$$S_N = |f(x_0) \cdot f'(x_0)| = \left| 2 \cdot \frac{1}{12} \right| = \frac{1}{6}.$$

i) Mivel $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$, ezért

$$f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}} \Rightarrow f''(8) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{8^5}} = -\frac{1}{144}.$$

j) A görbületi függvény

$$g(x) = \frac{\left| -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}} \right|}{\left(1 + \left(\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

A görbület értéke az $x_0 = 8$ helyen $g(x_0) \approx -0,0069$.

k) Az $(f(x))^4$ deriváltja

$$4 \cdot (f(x))^3 \cdot f'(x) = 4 \cdot x \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x}.$$

Ennek a függvénynek az $x_0 = 0$ helyen a helyettesítési értéke 0.

Az $x \mapsto \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$ függvény deriváltja $\frac{4}{9} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$, amely az $x_0 = 0$ helyen nincs értelmezve.

l) Az f függvény másodfokú Taylor-polinomja

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 = \\ &= 2 + \frac{1}{12} \cdot (x - 8) - \frac{1}{144} \cdot (x - 8)^2 = \\ &= -\frac{1}{144}x^2 + \frac{7}{36}x + \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

m) A $\sqrt[3]{7}$ közelítő értéke a másodfokú Taylor–polinom felhasználásával

$$\sqrt[3]{7} \approx T_2(7) = -\frac{1}{144} \cdot 7^2 + \frac{7}{36} \cdot 7 + \frac{8}{9} = \frac{275}{144} \approx 1,9097.$$

n) Az $f(x) \cdot h(x)$ függvény deriváltja

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot h(x))' &= (\sqrt[3]{x})' \cdot (x^2 - 2x) + \sqrt[3]{x} \cdot (x^2 - 2x)' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 - 2x) + \sqrt[3]{x} \cdot (2x - 2). \end{aligned}$$

o) Az $\frac{f(x)}{h(x)}$ függvény deriváltja

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{h(x)} \right)' &= \frac{(\sqrt[3]{x})' \cdot (x^2 - 2x) - \sqrt[3]{x} \cdot (x^2 - 2x)'}{(x^2 - 2x)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 - 2x) - \sqrt[3]{x} \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}. \end{aligned}$$

p) Az l függvény deriváltja

$$\begin{aligned} l'(x) &= (\sqrt[3]{x^2 - 2x})' = \frac{1}{3} \cdot (x^2 - 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 2) = \\ &= \frac{2x - 2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$l'(8) = \frac{2 \cdot 8 - 2}{3 \cdot \sqrt[3]{(8^2 - 2 \cdot 8)^2}} = \frac{7}{72} \cdot \sqrt[3]{48}.$$

q) A határérték kiszámolásához a L'Hospital–szabályt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{h(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}}{2x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}} \cdot (2x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot (2x - 2)} = 0. \end{aligned}$$

18. Az ellenőrző kérdések megoldásai

Differencia- és differenciálhányados fogalma

1. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in I$ -beli differenciálhányados függvénye:

$$d(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
2. Egyváltozós függvény differenciálhányadosának geometriai jelentése:
 függvény grafikonjának két különböző pontján áthaladó szelő meredeksége.
3. Egyváltozós függvény differenciálhányadosának fizikai jelentése:
 egy „b” fizikai mennyiség átlagos megváltozása „t” fizikai mennyiség függvényében. Például hely–idő függvény differencia hányados függvénye a sebesség–idő függvény; sebesség–idő függvény differenciálhányados függvénye a gyorsulás–idő függvény; munkavégzés–idő függvény differenciálhányados függvénye a teljesítmény–idő függvény.
4. A $t \rightarrow s(t)$ hely–idő függvény differenciálhányadosának jelentése a $[t_1; t_2]$ intervallumon: átlagsebesség a $[t_1; t_2]$ intervallumon.
5. A $t \rightarrow v(t)$ sebesség–idő függvény differenciálhányadosának jelentése a $[t_1; t_2]$ intervallumon: átlagos gyorsulás a $[t_1; t_2]$ intervallumon.
6. Adjuk meg az $f(x) = x^2 + 2x$ függvény $x_0 = -3$ helyhez tartozó differenciálhányados függvényét! A differenciálhányados függvény $x \neq -3$ esetén:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2+2x-3}{x+3} = \frac{(x+3) \cdot (x-1)}{x+3} = x-1$$
7. Adjuk meg az $f(x) = x^2$ függvény $x_0 = 4$ helyhez tartozó differenciálhányados függvényének tovább már nem egyszerűsíthető alakját!

$$d(x) = \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x+4) \cdot (x-4)}{x-4} = x+4 \quad (x \neq 4)$$
8. Adjuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $x_0 = 4$ helyhez tartozó differenciálhányados függvényének tovább már nem egyszerűsíthető alakját!

$$d(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{x}+2)}{(x-4) \cdot (\sqrt{x}+2)} = \frac{(x-4)}{(x-4) \cdot (\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \quad (x \neq 4)$$
9. Adjuk meg az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény $x_0 = 4$ helyhez tartozó differenciálhányados függvényének tovább már nem egyszerűsíthető alakját!

$$d(x) = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4} = \frac{4-x}{(x-4) \cdot 4x} = -\frac{1}{4x} \quad (x \neq 4)$$
10. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in I$ -beli differenciálhányadosa:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

11. Egyváltozós függvény differenciálhányadosának geometriai jelentése: **függvény adott pontbeli érintő egyenesének meredeksége.**
12. Egyváltozós függvény differenciálhányadosának fizikai jelentése: **egy „b” fizikai mennyiség változási gyorsasága a „t” fizikai mennyiség függvényében. Például hely–idő függvény differenciálhányadosa a pillanatnyi sebesség; sebesség–idő függvény differenciálhányadosa a pillanatnyi gyorsulás.**
13. A $t \rightarrow s(t)$ hely–idő függvény t_0 -beli deriváltjának jelentése: **t_0 -beli pillanatnyi sebesség.**
14. A $t \rightarrow v(t)$ sebesség–idő függvény t_0 -beli deriváltjának jelentése: **t_0 -beli pillanatnyi gyorsulás.**
15. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény érintő egyenesének egyenlete: **$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.**
16. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli bal oldali differenciálhányadosa: **$\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.**
17. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli jobb oldali differenciálhányadosa: **$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.**

A differenciálhatóság és a folytonosság közötti kapcsolat

1. A folytonosság **szükséges, de nem elégséges** feltétele a differenciálhatóságnak.
2. A differenciálhatóság **elegendő, de nem szükséges** feltétele a folytonóságnak.
3. Mondjunk példát olyan függvényre, amely folytonos, de nem differenciálható! **Például $f(x) = |x|$.**
4. Létezik-e olyan nem folytonos függvény, amelyik differenciálható? **Nem létezik, mert a folytonosság szükséges feltétele a differenciálhatóságnak.**
5. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$ függvény azon pontjainak száma, ahol a függvény nem differenciálható. **Az függvény az $x = -3$ és az $x = 2$ helyen nem differenciálható, azaz azon helyek száma, ahol nem differenciálható: 2.**

6. Az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvény differenciálhányados függvénye:
- $$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Deriválási szabályok

1. Az $f(x) = x$ függvény deriváltja $f'(x) = 1$.
2. Konstans függvény deriváltja 0 .
3. Adjuk meg két differenciálható függvény összegének „deriválási szabályát”!
Ha f és g differenciálható függvények, akkor $f + g$ is differenciálható és $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
4. Adjuk meg két differenciálható függvény különbségének „deriválási szabályát”!
Ha f és g differenciálható függvények, akkor $f - g$ is differenciálható és $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.
5. Ha f és g differenciálható függvények, akkor $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
6. Ha f és g differenciálható függvények, akkor $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.
7. Az $f(x) = \sin x$ függvény deriváltja $f'(x) = \cos x$.
8. Az $f(x) = \cos x$ függvény deriváltja $f'(x) = -\sin x$.
9. Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény deriváltja $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
10. Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltja $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
11. Az $f(x) = e^x$ függvény deriváltja $f'(x) = e^x$.
12. Az $f(x) = a^x$ függvény deriváltja $f'(x) = a^x \ln a$.
13. Az $f(x) = \ln x$ függvény deriváltja $f'(x) = \frac{1}{x}$.
14. Az $f(x) = \log_a x$ függvény deriváltja $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.
15. Az $f(x) = \arcsin x$ függvény deriváltja $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

16. Az $f(x) = \arccos x$ függvény deriváltja $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
17. Az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény deriváltja $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
18. Az $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ függvény deriváltját $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.
19. Az összetett függvény „deriválási szabálya” ha f és g differenciálható függvények, akkor $f \circ g$ is differenciálható és $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
20. Ha f differenciálható függvény, akkor $\sin(f(x))$ deriváltja:
 $\cos(f(x)) \cdot f'(x)$.
21. Ha f differenciálható függvény, akkor $\ln(f(x))$ deriváltja:
 $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
22. Ha f differenciálható függvény, akkor $\sin x \cdot f(x)$ deriváltja:
 $\cos x \cdot f(x) + \sin x \cdot f'(x)$.
23. Ha f differenciálható függvény, akkor $\frac{f(x)}{e^x}$ deriváltja:
 $\frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$.
24. Ha f differenciálható függvény, akkor $f(x) \cdot \cos x$ deriváltja:
 $f'(x) \cdot \cos x + f(x) \cdot (-\sin x) = f'(x) \cdot \cos x - f(x) \cdot \sin x$.
25. Ha f differenciálható függvény, akkor $(f(x))^2$ deriváltja: $2f(x) \cdot f'(x)$.
26. Ha f differenciálható függvény, akkor $(f(x))^5$ deriváltja: $5(f(x))^4 \cdot f'(x)$.
27. Ha f differenciálható függvény, akkor $f(x^2)$ deriváltja: $f'(x^2) \cdot 2x$.
28. Ha f differenciálható függvény, akkor $f(x^5)$ deriváltja: $f'(x^5) \cdot 5x^4$.
29. Ha f differenciálható függvény, akkor $f(\sin x)$ deriváltja: $f'(\sin x) \cdot \cos x$.
30. Ha f, g és h differenciálható függvények, akkor $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ deriváltja:
 $f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$.

Magasabb rendű deriváltak

1. Mikor mondjuk azt, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható?
Ha differenciálható, és a derivált függvény is differenciálható.

2. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, ha **differenciálható és a deriváltja folytonos függvény**.
3. Az $f(x) = \sin x$ függvény 102-edik deriváltja: $f^{(102)}(x) = -\sin x$.
4. Az $f(x) = \cos x$ függvény 105-edik deriváltja: $f^{(105)}(x) = -\sin x$.
5. Az $f(x) = e^{2x}$ függvény n -edik deriváltja: $f^{(n)}(x) = e^{2x} \cdot 2^n$.
6. Az $f(x) = x^n$ függvény n -edik deriváltja: $f^{(n)}(x) = n!$.
7. Az $f(x) = x^n$ függvény $n - 1$ -edik deriváltja: $f^{(n-1)}(x) = n! \cdot x$.
8. Az $f(x) = x^n$ függvény $n + 1$ -edik deriváltja: $f^{(n+1)}(x) = 0$.
9. Ha f és g kétszer differenciálható függvények, akkor $(f(x) + g(x))'' = f''(x) + g''(x)$.
10. Ha f és g háromszor differenciálható függvények, akkor $(f(x) + g(x))''' = f'''(x) + g'''(x)$.
11. Ha f és g kétszer differenciálható függvények, akkor $(f(x) \cdot g(x))'' = f''(x) + 2 \cdot f'(x) \cdot g'(x) + g''(x)$.
12. Ha f és g háromszor differenciálható függvények, akkor $(f(x) \cdot g(x))''' = f'''(x) + 3 \cdot f''(x) \cdot g'(x) + 3 \cdot f'(x) \cdot g''(x) + g'''(x)$.

Érintő és normális egyenes egyenlete, érintési paraméterek

1. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli érintő egyenesének egyenlete $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
2. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli érintő egyenesének meredeksége $f'(x_0)$.
3. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli normális egyenesének egyenlete $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.
4. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli normális egyenesének meredeksége $-\frac{1}{f'(x_0)}$.
5. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli deriváltja zérus, akkor az x_0 -beli érintő egyenesének egyenlete $y = f(x_0)$.
6. Az $f(x) = x^2$ függvény érintő egyenesének egyenlete az $x_0 = 0$ helyen $y = 0$.

7. Az $f(x) = x^3$ függvény érintő egyenesének egyenlete az $x_0 = 1$ helyen $y = 3x - 2$. Ugyanis, mivel $f'(x) = 3x^2$, így $f'(1) = 3$, tehát az érintő egyenes egyenlete $y = 1 + 3 \cdot (x - 1) = 3x - 2$, azaz $y = 3x - 2$.
8. Az $f(x) = \sin x$ függvény érintő egyenesének egyenlete az $x_0 = 0$ helyen $y = x$. Ugyanis, mivel $f'(x) = \cos x$, így $f'(0) = 1$, tehát az érintő egyenes egyenlete $y = 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$, azaz $y = x$.
9. Ugyanazon helyhez tartozó érintő egyenes és normális egyenes merőleges egymásra.
10. A simuló kör középpontja a normális egyenesre illeszkedik.
11. Az $f(x) = 4x + 2$ függvény görbülete minden pontban nulla, hiszen az f függvény grafikonja egyenes.
12. Az r sugarú kör görbülete $\frac{1}{r}$.
13. Az $x^2 + y^2 = 81$ egyenletű kör görbülete $\frac{1}{9}$.
14. Az $x^2 + 4x + y^2 - 6y = 12$ egyenletű alakzat görbülete $\frac{1}{5}$, hiszen teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, ami egy 5 egység sugarú kör egyenlete.

A differenciálszámítás középértéktételei

1. Ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.
2. A Rolle-féle középértéktétel szerint, amennyiben az $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy $f(a) = f(b)$, akkor az $[a; b]$ intervallumnak van olyan belső pontja, amelybe húzott érintője párhuzamos az x -tengellyel, azaz a deriváltja az említett helyen zérus.
3. A Lagrange-féle középértéktétel szerint az $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának van olyan belső pontja, amelybe húzott érintő párhuzamos az $(a; f(a))$ és $(b; f(b))$ pontokat összekötő szelővel.
4. A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele: ahol a függvénynek szélsőértéke van, azon a helyen a deriváltja zérus.
5. Adjunk meg olyan differenciálható függvényt, melyre $f'(x_0) = 0$, azonban f -nek az x_0 helyen nincs lokális szélsőértéke! $f(x) = x^5$ és $x_0 = 0$.

6. Ha f és g olyan differenciálható függvények, hogy $f'(x) = g'(x)$, akkor ebből következik-e, hogy $f(x) = g(x)$? **Nem következik, ugyanis attól, hogy két függvény deriváltja megegyezik, a két függvény még konstans összeadandóban különbözhet egymástól.** Gondoljunk például az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = x^2 + 5$ függvényekre. Ekkor $f'(x) = 2x$ és $g'(x) = 2x$, tehát $f'(x) = g'(x)$, de $f(x) \neq g(x)$.

L'Hospital-szabály

1. Mikor és hogyan alkalmazható a L'Hospital-szabály? **A L'Hospital-szabály függvények határértékének kiszámítására alkalmazható $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, illetve 0^0 alakú határértékek esetén.**
2. Ha f és g differenciálható függvények és $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
3. Ha f és g differenciálható függvények és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
4. Ha $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
5. Ha $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$.
7. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$.

Függvényvizsgálat

1. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény monoton növekvő, akkor $f'(x) \geq 0 \quad (x \in I)$.
2. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény monoton csökkenő, akkor $f'(x) \leq 0 \quad (x \in I)$.
3. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen lokális szélsőérték helye van, akkor $f'(x_0) = 0$.

4. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen lokális minimum helye van, akkor $f'(x_0) = 0$.
5. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen lokális maximum helye van, akkor $f'(x_0) = 0$.
6. Mondjunk példát olyan függvényre, amelynek az x_0 helyen a deriváltja zérus, de a függvénynek az x_0 helyen nincs lokális szélsőértéke:
 $f(x) = x^3, x_0 = 0$.
7. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen megváltozik a monotonitása, akkor f -nek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van.
8. Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $\varepsilon > 0$, továbbá az $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ intervallumon f monoton növekvő és az $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ intervallumon f monoton csökkenő, akkor az f függvénynek az x_0 helyen lokális maximum helye van.
9. Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $\varepsilon > 0$, továbbá az $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ intervallumon f monoton csökkenő és az $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ intervallumon f monoton növekvő, akkor az f függvénynek az x_0 helyen lokális minimum helye van.
10. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény konvex, akkor
 $f''(x) \geq 0 \quad (x \in I)$.
11. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény konkáv, akkor
 $f''(x) \leq 0 \quad (x \in I)$.
12. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen inflexiós helye van, akkor $f''(x_0) = 0$.
13. Mondjunk példát olyan függvényre, amelynek az $x_0 \in I$ helyen a második deriváltja zérus, de a függvénynek az x_0 helyen nincs inflexiós helye:
 $f(x) = x^4, x_0 = 0$.
14. Mondjunk példát olyan függvényre, amely értelmezési tartományának minden pontjában konvex! Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában konvex.
15. Mondjunk példát olyan függvényre, amely értelmezési tartományának minden pontjában konkáv! Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában konkáv.
16. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen megváltozik a konvexitása, akkor az f függvénynek x_0 -ban inflexiós helye van.

17. Mondjunk példát olyan függvényre, amelynek végtelen sok inflexiós pontja van! Például $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$.
18. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konvex, akkor $-f$ **konkáv**.
19. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konkáv, akkor $-f$ **konvex**.

Taylor–polinom, Taylor–sor

1. Az $f:]x_0 - r; x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 körüli n -edfokú Taylor-polinomja $T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$.
2. Az $f:]x_0 - r; x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 körüli elsőfokú Taylor-polinomja $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
3. Az $f:]x_0 - r; x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 körüli másodfokú Taylor-polinomja $T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2$.
4. Az $f:]x_0 - r; x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 körüli elsőfokú Taylor-polinomja megegyezik a függvény x_0 -beli **érintő egyenesével**.
5. Egy függvény 0 pont körüli Taylor-sorát **McLaurin sornak** nevezzük.
6. Az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor sora $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$.

Szélsőérték feladatok

1. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen stacionárius helye van és $f''(x_0) > 0$, akkor f -nek az x_0 helyen **lokális minimuma van**.
2. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen stacionárius helye van és $f''(x_0) < 0$, akkor f -nek az x_0 helyen **lokális maximuma van**.
3. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ háromszor differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen stacionárius helye van és $f''(x_0) = 0$, de $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f -nek az x_0 helyen **inflexiós helye van**.
4. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen stacionárius helye van és $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, de $f^{(4)}(x_0) > 0$, akkor f -nek az x_0 helyen **lokális minimuma van**.

5. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ helyen stacionárius helye van és $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, de $f^{(4)}(x_0) < 0$, akkor f -nek az x_0 helyen lokális maximuma van.

Implicit függvények deriválása

1. Tekintsük az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletet. Ekkor $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.
2. Tekintsük az $y^2 - x^2 = 10$ egyenletet. Ekkor $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.
3. Adjuk meg explicit egyenletként a $\sqrt{y} - x = 2$ implicit egyenletet:
 $y = (x + 2)^2$.
4. Ha létezik olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $(x, f(x)) \in \mathcal{D}_F$, tovább $F(x, f(x)) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az $F(x, y) = 0$ egyenlőség egy implicit egyenletet definiál.

Newton–Raphson módszer

1. Mire alkalmazható a Newton–Raphson módszer? Egyenletek gyökeinek közelítő értékének meghatározására.
2. A Newton–Raphson módszer iterációs sorozata $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.
3. Az $x^2 - 5 = 0$ egyenlet pozitív gyökének közelítő értékére $x_0 = 2$ esetén a Newton–Raphson módszerrel $x_1 = 2 - \frac{-1}{4} = 2,25$ adódik.

Elaszticitás

1. Az f differenciálható függvény elaszticitás függvénye: $E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$.
2. Az $f(x)$ függvény elaszticitás függvényének értelmezése: ha az x értékét 1%-kal változtatjuk, hány százalékkal változik az $f(x)$ értéke.
3. Az $f(x) = x$ függvény elaszticitás függvénye: $E(x) = \frac{x}{x} \cdot 1 = 1$.
4. Ha az $f(x)$ keresleti függvény elaszticitásának értéke az $x_0 = 100$ helyen $E(x_0) = 2$, akkor ez azt jelenti, hogy ha a termék 100 egységnyi árát 1%-kal változtatjuk, akkor az iránta való kereslet 2%-kal fog változni.
5. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény rugalmatlan, ha $|E(x)| < 1$.
6. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény egységnyi rugalmasságú, ha $|E(x)| = 1$.

7. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény rugalmas, ha $|E(x)| > 1$.

Differenciálszámítás a fizikában és a műszaki tudományokban

1. A $t \mapsto s(t)$ hely-idő függvény differenciáhányadosának jelentése a $[t_1; t_2]$ intervallumon: **átlagsebesség a $[t_1; t_2]$ időintervallumban.**
2. A $t \mapsto v(t)$ sebesség-idő függvény differenciáhányadosának jelentése a $[t_1; t_2]$ intervallumon: **átlagos gyorsulás a $[t_1; t_2]$ időintervallumban.**
3. A $t \mapsto s(t)$ hely-idő függvény t_0 -beli deriváltjának jelentése: **pillanatnyi sebesség a t_0 időpillanatban.**
4. A $t \mapsto v(t)$ sebesség-idő függvény t_0 -beli deriváltjának jelentése: **pillanatnyi gyorsulás a t_0 időpillanatban.**
5. Az $s(t) = t^2 - 2t + 1$ hely-idő függvény esetén a sebesség-idő függvény: **$v(t) = 2t - 2$.**
6. Az $s(t) = t^2 - 2t + 1$ hely-idő függvény esetén a gyorsulás-idő függvény: **$s(t) = 2$.**
7. Az $s(t) = \sqrt{t}$ hely-idő függvény esetén a sebesség-idő függvény: **$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.**
8. Az $s(t) = \cos(2t)$ hely-idő függvény esetén a pillanatnyi sebesség a $t = \frac{\pi}{4}$ időpillanatban: **$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$.**

A differenciálszámítás gazdasági alkalmazásai

1. A $C(x)$ költségfüggvény esetén az átlagos költség az $[x_1; x_2]$ intervallum esetén: **$\frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1}$.**
2. A $C(x)$ költségfüggvény esetén a határköltség: **$C'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C(x) - C(x_0)}{x - x_0}$.**
3. Maximális profitot biztosító termelés esetén **a határbevétel megegyezik a határköltséggel.**
4. A $C(x) = 2x + 6.000$ költségfüggvény esetén a határköltség **$C'(x) = 2$.**
5. A $B(x)$ bevételi függvény differenciáhányadosának értéke **a határbevétel.**

Irodalomjegyzék

- [1] Babcsányi István – Gyurmánczi János – Szabó Lajos – Wettl Ferenc, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetemi Kiadó, 2009.
- [2] Bárd Ágnes – Frigyesi Miklós – Lukács Judit – Major Éva – Székely Péter – Vancsó Ödön, *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten (feladatgyűjtemény)*, Műszaki Kiadó, 2006.
- [3] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- [4] Bárczy Barnabás, *Differenciálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994.
- [5] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II*, Műegyetemi Kiadó, 2002.
- [6] Bíró Fatime – Vincze Szilvia, *A gazdasági matematika alapjai*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2010.
- [7] Császár Ákosné, *Matematika I/I*, Műegyetemi Kiadó, 2003.
- [8] Csikós Pajor Gizella – Péics Hajnalka, *Analízis elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.
- [9] Denkinger Géza – Gyurkó Lajos, *Analízis gyakorlatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1987.
- [10] Farkas István, *Differenciálszámítás gyakorlati jegyzet*, Debreceni Egyetem, 2005.
- [11] Gábos Adél – Halmos Mária, *Készüljünk az érettségire matematikából közép-, emelt szinten*, Műszaki Könyvkiadó, 2005.
- [12] Dr. Gerőcs László – Juhász István – Orosz Gyula – Paróczay József – Számadó László – Szász Dr. Simon Judit, *Matematika emelt szintű tananyag*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2013.
- [13] Gilbert János – Sólyom András – Kocsányi László, *Fizika mérnököknek I-II*, Egyetemi Tankönyv, Műegyetemi Kiadó, 1999.
- [14] J. Harcet – L. Heinrichs – P. M. Seiler – M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.
- [15] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Pirooska – Róka Sándor – Tassy Gergely, *Tehetséggondozás a matematikában*, <http://users.itk.ppke.hu/adorjan/matematika/list.html>, 2011.
- [16] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.
- [17] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai feladatgyűjtemény*, 2016.
- [18] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf>, 2011.
- [19] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1996. január, 51. oldal, 2869. fizika feladat, <http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatoz.phtml?id=41005>

- [20] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv Áron, *Matematika eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2011.
- [21] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [22] Kovács István – Trembeczki Csaba, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, az analízis elemei, 11 – 12 emelt szint*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.
- [23] Lengyel Csilla Mária, *Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei*, ELTE, szakdolgozat, 2012.
- [24] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
- [25] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.
- [26] Nándori Frigyes – Szirbik Sándor, *Statika oktatási segédlet a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére*, Mechanikai Tanszék, Miskolc-Egyetemváros, 2008.
- [27] Pintér Lajos, *Analízis I*, Typotex, 1998.
- [28] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.
- [29] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet, tankonyvtar.ttk.bme.hu, 2013.
- [30] Simon Anita, *Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2009.
- [31] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.
- [32] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.
- [33] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial, Life and Social Sciences*, Brooks/Cole, 1999.
- [34] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék

1. Differencia- és differenciálhányados fogalma	5
2. A differenciálhatóság és a folytonosság közötti kapcsolat	18
3. Deriválási szabályok	24
4. Magasabb rendű deriváltak	44
5. Érintő és normális egyenes egyenlete, érintési paraméterek	48
6. A differenciálszámítás középértéktételei	58
7. L'Hospital-szabály	66
8. Függvényvizsgálat	72
9. Taylor-polinom, Taylor-sor	86
10. Szélsőérték feladatok	92
11. Implicit függvények deriválása	98
12. Newton–Raphson módszer	104
13. Elaszticitás	108
14. Differenciálszámítás a fizikában és a műszaki tudományokban	114
15. A differenciálszámítás gazdasági alkalmazásai	120
16. Differenciálszámítás alkalmazása a biológiában és a kémiában	124
17. Áttekintés egy feladaton keresztül	126
18. Az ellenőrző kérdések megoldásai	130
Irodalomjegyzék	141

