



Algebrai számelméleti és leszámoló kombinatorikai vizsgálatok

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Arnóczki Tímea

Témavezető: Dr. Nyul Gábor

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2023

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Explicit módszerek az algebrai számelméletben programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2023. május 16.

.....

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Arnóczki Tímea doktorjelölt 2018–2022 között a fent megnevezett Doktori Iskola Explicit módszerek az algebrai számelméletben programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult.

Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2023. május 16.

.....

a témavezető aláírása

Algebrai számelméleti és leszámoló kombinatorikai vizsgálatok

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében a matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Arnóczki Tímea okleveles alkalmazott matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája (Explicit módszerek az algebrai számelméletben programja) keretében

Témavezető: Dr. Nyul Gábor

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 2023.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek az éveken át tartó alapos munkát és a sok segítséget, bármilyen szakmai kérdéssel bátran fordulhattam hozzá. Kezdetektől fogva látta bennem azokat a lehetőségeket, melyeket nem is gondoltam volna.

Szeretnék köszönetet mondani a Matematikai Intézet valamennyi dolgozójának, akik végigkísértek egyetemi éveim alatt és bátorítottak, amikor szükségem volt rá.

Édesanyámnak szeretném megköszönni, hogy legjobb matektanáromként megalapozta mindazt a tudást, amire a későbbiekben építhettem.

Örök hálával tartozom vőlegényemnek, aki mindvégig biztos támaszom volt és a legnehezebb pillanatokon is átsegített.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	1
I. Algebrai számelméleti vizsgálatok	9
2. Biciklikus bikvadratikus számtestek	9
2.1. Monogenitással kapcsolatos korábbi eredmények	9
2.2. Prím és kis indexű elemek	14
2.3. Minimális index	27
3. Tiszta negyedfokú számtestek	33
3.1. Monogenitással kapcsolatos korábbi eredmények	33
3.2. Minimális index	35
II. Leszámláló kombinatorikai vizsgálatok	39
4. Korlátozott r-Stirling-számok	39
4.1. A korlátozott r -Stirling-számok fogalma	39
4.2. A korlátozott r -Stirling-számok tulajdonságai	40
4.3. Korlátozott r -Bell-polinomok	48
5. Jacobi–Whitney-számok	53
5.1. A Jacobi–Whitney-számok fogalma	53
5.2. A Jacobi–Whitney-számok tulajdonságai	55
5.3. Átmeneti együtthatók	64
5.4. Jacobi–Dowling-polinomok	67

6. Jacobi–Whitney–Lah-számok	71
6.1. A Jacobi–Whitney–Lah-számok fogalma	71
6.2. Első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok	72
6.3. Második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok	76
Összefoglaló	85
Summary	89
Irodalomjegyzék	93

1. Bevezető

A disszertáció két nagyobb részből áll. Az I. részben az algebrai számelmélethez kapcsolódóan algebrai számtestek monogenitásával foglalkozunk, a II. részben pedig a leszámlláló kombinatorikához kötődően különböző Stirling-típusú számokat vizsgálunk.

I.

Algebrai számtestek monogenitásának vizsgálata, ehhez szorosan kapcsolódóan adott indexű elemek keresése, a minimális index és testindex meghatározása az algebrai számelmélet egy lényeges területét képezik. Ez egészen R. Dedekind [19] munkásságáig nyúlik vissza, aki megmutatta egy harmadfokú számtestről, hogy a minimális indexe és testindexe is 2, ezzel megadva az első példát nem monogén algebrai számtestre.

Ismert, hogy minden algebrai számtestnek létezik egész bázisa. Ezzel szemben az $(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$ alakú egész bázis, az úgynevezett *hatvány egész bázis* létezése már nem garantált. Egy algebrai számtestet akkor nevezünk *monogénnek*, ha létezik hatvány egész bázisa. Ekkor α -t a fenti hatvány egész bázis *generátorának* hívjuk.

A bevezető további részében legyen K egy n -edfokú algebrai számtest és jelölje \mathbb{Z}_K a K -beli algebrai egészek gyűrűjét. Egy $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ primitív elem $I(\alpha)$ *indexén* a $(\mathbb{Z}[\alpha], +)$ részcsoport indexét értjük a $(\mathbb{Z}_K, +)$ csoportban, ahol $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}\}$.

A definícióból azonnal következik, hogy α pontosan akkor generál hatvány egész bázist, ha $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}_K$, azaz α indexe 1. Könnyen látható az is, hogy $a \in \mathbb{Z}$ esetén $\mathbb{Z}[a + \alpha] = \mathbb{Z}[\alpha]$, és így $I(a + \alpha) = I(\alpha)$.

Egy $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ primitív elem indexét meghatározhatjuk az elem $D_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$ és a számtest D_K diszkriminánsának segítségével is a

$$D_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = D_K \cdot (I(\alpha))^2$$

összefüggés alapján.

Egy algebrai számtestet jellemző két érték a minimális index és a testindex. A K számtest m_K *minimális indexét*, illetve i_K *testindexét* rendre a K -beli

primitív algebrai egész elemek indexeinek minimumaként, illetve legnagyobb közös osztójaként definiáljuk. Nyilvánvaló, hogy a számtest testindexe egyúttal osztója a minimális indexnek is. Egyszerűen adódik továbbá, hogy egy számtest minimális indexe pontosan akkor 1, ha a számtest monogén, valamint monogén algebrai számtest testindexe is 1.

Legyen $(\omega_1 = 1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ egész bázisa K -nak. Ekkor létezik $I(X_2, \dots, X_n)$ egész együtthatós, homogén, $n - 1$ határozatlanú, $\frac{n(n-1)}{2}$ fokú polinom úgy, hogy $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$D_{K/\mathbb{Q}}(x_1 + x_2\omega_2 + \dots + x_n\omega_n) = D_K \cdot (I(x_2, \dots, x_n))^2.$$

Ezt a polinomot az egész bázishoz tartozó *index formának* nevezzük.

Könnyen látható, hogy ha az $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ primitív elem a fenti egész bázisban $\alpha = x_1 + x_2\omega_2 + \dots + x_n\omega_n$ ($x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$) alakú, akkor

$$I(\alpha) = |I(x_2, \dots, x_n)|.$$

Ennek segítségével a K algebrai számtest minimális indexe és testindexe a következőképpen írható fel:

$$m_K = \min \{|I(x_2, \dots, x_n)| \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z} \text{ és } I(x_2, \dots, x_n) \neq 0\},$$

$$i_K = \text{lko} \{|I(x_2, \dots, x_n)| \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z} \text{ és } I(x_2, \dots, x_n) \neq 0\}.$$

Adott A pozitív egész szám esetén az A indexű elemek keresése ekvivalens az

$$I(x_2, \dots, x_n) = \pm A$$

diofantoszi egyenlet, az úgynevezett *index forma egyenlet* megoldásával. Győry K. [42] effektív módon bizonyította, hogy az index forma egyenletnek véges sok megoldása van, következésképpen egy számtestben racionális egészszel való eltolástól eltekintve véges sok adott indexű primitív algebrai egész elem létezik.

Az index forma egyenletek megoldására általánosan működő, hatékony algoritmus nem ismert, csak kisebb fokú, illetve speciális tulajdonságú számtesetek esetén. Negyedfokú testekben például az index forma egyenlet megoldása visszavezethető harmad- és negyedfokú Thue-egyenletekre (lásd [30, 32]).

Az algebrai számelmélet monogenitásvizsgálat témakörével kapcsolatban további részletek a [24, 26] könyvekben olvashatóak.

A disszertáció 2. fejezetében egy negyedfokú számtestcsalád, a biciklikus bikvadratikus számtestek esetén végzünk monogenitáshoz kötődő vizsgálatokat. A szakirodalom áttekintése után a [4] publikációra épülő 2.2. alfejezetben szükséges és elégséges feltételeket adunk teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestekben prím, illetve kis indexű elemek létezésére, valamint meg is határozzuk ezeket az adott indexű elemeket. A [6] cikken alapuló 2.3. alfejezetben T. Nakahara egy tételének erősítéseként megmutatjuk, hogy tetszőleges természetes szám esetén végtelen sok olyan teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest van, melynek 1 a testindexe, minimális indexe pedig éppen az adott számmal egyenlő. Hasonló állításokat bizonyítunk a testindex többi lehetséges értékére is.

A 3. fejezetben a [7] publikáció eredményeit mutatjuk be, megválaszolva egy tiszta negyedfokú számtestek monogenitásával kapcsolatos korábbi sejtést. Gaál I. és Remete L. azt sejtették, hogy az $m \equiv 1 \pmod{4}$ kongruenciát teljesítő, négyzetmentes m értékeket tekintve pontosan három monogén $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ alakú számtest létezik. Ezzel szemben belátjuk, hogy ha az *abc*-sejtés igaz, akkor az ilyen monogén számtestek száma végtelen. Vizsgáljuk továbbá a négyzetmentes paraméterű tiszta negyedfokú számtestek minimális indexét, teljesen komplex esetben pedig leírjuk a minimális indexű elemeket is.

II.

A leszámlláló kombinatorikában alapvető fontosságúak a Stirling-számok, melyek egy skót matematikus, J. Stirling után kapták a nevüket. Ismert, hogy az $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ elsőfajú Stirling-szám az $1, \dots, n$ számok olyan permutációit számlálja össze, melyek k darab páronként idegen ciklus szorzatára bomlanak, míg az $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ másodfajú Stirling-szám az $1, \dots, n$ elemek k darab osztályba történő osztályozásainak számát jelöli ($0 \leq k \leq n$). Megjegyezzük, hogy 0 darab elem egyetlen permutációján a 0 darab ciklusból álló üres permutációt, egyetlen osztályozásán pedig a 0 darab osztályt tartalmazó üres osztályozást értjük. Ezeket a számokat J. Stirling [79] nem a fenti kombinatorikus úton értelmezte, hanem a differenciaszámítás kapcsán vezette be őket. Az első- és másodfajú Stirling-számokat rendre az emelkedő faktoriálisok és hatványok,

valamint a hatványok és süllyedő faktoriálisok közötti

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k, \quad x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k$$

polinomos összefüggésekkel definiálta, ahol x -nek az n -edik *emelkedő* és k -adik *süllyedő faktoriálisát* az

$$x^{\bar{n}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x + j), \quad x^{\underline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (x - j)$$

módon értelmezzük.

A másodfajú Stirling-számok definícióját úgy módosítva, hogy az osztályokon belül számít az elemek sorrendje, a Lah-számokhoz jutunk, azaz az $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ *Lah-szám* az $1, \dots, n$ elemek k darab rendezett osztályba történő osztályozásainak számát adja meg ($0 \leq k \leq n$). A Lah-számok segítségével leírható az emelkedő és süllyedő faktoriálisok közötti kapcsolat, eredetileg I. Lah [54, 55] is az

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k$$

polinomos azonossággal definiálta a később róla elnevezett számokat. Az $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ Lah-szám előállítható n felső paraméterű elsőfajú Stirling-számok és k alsó paraméterű másodfajú Stirling-számok szorzatösszegeként az

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \sum_{j=k}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \quad (\star)$$

formulával.

Az első- és másodfajú Stirling-számoknak sok általánosítása és változata ismert. A dolgozatban számunkra az r -általánosítás kiemelt fontosságú, amikor megtiltjuk, hogy bizonyos elemek egy ciklusba, illetve egy osztályba kerüljenek.

Legyenek $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$ egész számok. Az $1, \dots, n + r$ számok egy permutációját/osztályozását r -permutációnak/ r -osztályozásnak nevezzük, ha az $n+1, \dots, n+r$ elemek különböző ciklusokban/osztályokban állnak. Ekkor az $n+1, \dots, n+r$ számokat *kitüntetett elemeknek* nevezzük, az őket

tartalmazó ciklusokat és osztályokat pedig *kitüntetett ciklusoknak* és *kitüntetett osztályoknak* hívjuk. Az $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$ *elsőfajú r -Stirling-szám* az $1, \dots, n+r$ elemek olyan r -permutációinak számát jelöli, melyek ciklusfelbontásában $k+r$ darab páronként idegen ciklus szerepel, míg az $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r$ *másodfajú r -Stirling-szám* az $1, \dots, n+r$ számok $k+r$ darab osztályba történő r -osztályozásainak számát adja meg. (Ilyenkor tehát r darab kitüntetett és k darab nem-kitüntetett ciklusunk, illetve osztályunk van.) L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] és R. Merris [58] egymástól függetlenül definiálták ezeket a kombinatorikus számokat, melyek további vonatkozásai a [39, 50, 73, 74] publikációkban olvashatóak.

A fentiekhez hasonlóan Nyul G. és Rácz G. [73] az $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$ *r -Lah-számot* az $1, \dots, n+r$ elemek $k+r$ darab rendezett osztályba történő r -osztályozásainak számaként értelmezték.

Az r -Stirling-számokat tovább általánosítják a Mező I. [59] által bevezetett elsőfajú és másodfajú r -Whitney-számok, melyeknek Gyimesi E. és Nyul G. [41] az elemek színezésével tulajdonított kombinatorikus tartalmat. A dolgozatban ezeket a kombinatorikus definíciókat a számunkra később szükséges módosítással közöljük.

A fejezet hátralévő részében legyenek $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$ egész számok. Egy *m -színes Whitney-színezett r -permutáció*n egy olyan r -permutációt értünk, ahol

- a ciklusok legnagyobb elemei nincsenek színezve,
- egy kitüntetett ciklusban egy elem nincs színezve, ha a kitüntetett elemtől eddig az elemig tartó ciklusíven nincs nála nagyobb elem,
- minden más elem m szín valamelyikével színezett.

Tehát egy nem-kitüntetett ciklusban a ciklusmaximum kivételével minden elemet színezzük, míg egy kitüntetett ciklusban egy elem pontosan akkor kap színt, ha a kitüntetett elemtől eddig az elemig tartó ciklusíven van nála nagyobb elem.

A $w_{m,r}(n, k)$ *m -színes elsőfajú r -Whitney-szám* az $1, \dots, n+r$ elemek olyan m -színes Whitney-színezett r -permutációinak számát adja meg, melyek $k+r$ darab páronként idegen ciklus szorzataként írhatóak fel.

Egy m -színes *Whitney-színezett r -osztályozás* egy olyan r -osztályozást jelent, ahol

- az osztályok legnagyobb elemei nincsenek színezve,
- a kitüntetett osztályok elemei nincsenek színezve,
- minden más elem m szín valamelyikével színezett.

A $W_{m,r}(n, k)$ m -színes másodfajú r -*Whitney-szám* az $1, \dots, n + r$ elemek $k + r$ darab osztályba történő, m -színes *Whitney-színezett r -osztályozásait* számlálja össze.

Megjegyezzük, hogy Mező I. a fenti számokat polinomos azonosságokkal definiálta, melyekben már m differenciájú n -edik *emelkedő* és m differenciájú k -edik *süllyedő faktoriálisok* jelennek meg. Ezeket az

$$(x|m)^{\bar{n}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x + mj), \quad (x|m)^{\underline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (x - mj)$$

módon jelöljük és értelmezzük.

Megemlítjük még, hogy az r -*Whitney-számokat* már a [17, 18] cikkekben is vizsgálták, viszont a fentiekől eltérő megközelítéssel.

Az r -*Whitney–Lah-számokat* G.-S. Cheon és J.-H. Jung [14] a (\star) formula mintájára első- és másodfajú r -*Whitney-számok* szorzatösszegeként definiálták. Később Gyimesi E. és Nyul G. [41] kombinatorikusan is értelmezték ezeket a számokat az előbb említett színezési szabályok megfelelő módosításával.

Egy m -színes *Whitney-színezett, rendezett osztályokba történő r -osztályozás*on egy olyan rendezett osztályokba való r -osztályozást értünk, ahol

- a rendezett osztályok legnagyobb elemei nincsenek színezve,
- egy kitüntetett rendezett osztályban egy elem nincs színezve, ha ezen elem és a kitüntetett elem között nincs nála nagyobb elem,
- minden más elem m szín valamelyikével színezett.

Tehát egy nem-kitüntetett rendezett osztályban az osztálymaximum kivételével minden elem kap színt, míg egy kitüntetett rendezett osztályban egy elemet pontosan akkor színezzük, ha ezen elem és a kitüntetett elem között van nála nagyobb elem.

A $WL_{m,r}(n, k)$ m -színes r -Whitney–Lah-szám az $1, \dots, n + r$ elemek m -színes Whitney-színezett, $k + r$ darab rendezett osztályba történő r -osztályozásainak számát jelöli.

A kombinatorikus definíciók alapján világos, hogy az m -színes r -Whitney-számok és az m -színes r -Whitney–Lah-számok $m = 1$ esetén, azaz ha lényegében eltekintünk a színezéstől, rendre az r -Stirling-számokat és az r -Lah-számokat adják vissza. Nyilvánvaló továbbá, hogy $m = 1$ és $r = 0$ esetén a klasszikus Stirling-számokhoz, illetve Lah-számokhoz jutunk.

Az értekezés 4. fejezetében a másodfajú r -Stirling-számok egy olyan változatával foglalkozunk, ahol az osztályok elemszáma legfeljebb 2 lehet. Az így adódó korlátozott r -Stirling-számokra vonatkozó kombinatorikus tételeinket, valamint a korlátozott r -Bell-polinomokon keresztül vizsgált log-konkáv és unimodális tulajdonságaikat a [8] publikáció tartalmazza.

Az 5. fejezetben a röviden ismertetett Jacobi–Stirling-számok Whitney-típusú általánosításaként új kombinatorikus számokat értelmezzük. Az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok bizonyos Whitney-színezett r -permutációkból, illetve r -osztályozásokból álló rendezett párokat számlálnak össze. Tulajdonságaik igazolásánál itt is törekszünk a kombinatorikus úton történő bizonyításokra, továbbá belátjuk, hogy a segítségükkel képzett Jacobi–Dowling-polinomok gyökei valósak. Eredményeink a [9] cikkben találhatóak.

A Lah-számok Jacobi–Whitney-változatának bevezetésére két út áll előttünk: értelmezhetjük őket kombinatorikusan vagy a (\star) formulához hasonlóan az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok segítségével. Várakozásainkkal ellentétben a különbözőképpen definiált Jacobi–Whitney–Lah-számok nem esnek egybe, vizsgálatukat az [5] publikációnak megfelelően a disszertáció 6. fejezetében részletezzük.

I. rész

Algebrai számelméleti vizsgálatok

2. Biciklikus bikvadratikus számtestek

A fejezetben biciklikus bikvadratikus számtestek monogenitási kérdéseivel foglalkozunk. A teljesen komplex esetben szükséges és elégséges feltételeket adunk prím, illetve legfeljebb 10 indexű elemek létezésére, valamint le is írjuk ezeket az adott indexű elemeket. Ezután azt vizsgáljuk, hogy a testindex lehetséges a értékeinek milyen A többszöröseire igazolható, hogy végtelen sok olyan teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest létezik, melynek testindexe a , minimális indexe pedig A .

2.1. Monogenitással kapcsolatos korábbi eredmények

Legyenek $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ különböző négyzetmentes egész számok. Ekkor a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m} + \sqrt{n})$ alakú algebrai számtesteket *biciklikus bikvadratikus számtestek*nek nevezzük. Ezek pontosan azok a negyedfokú számtestek, melyek Galois-csoportja a Klein-csoport.

Ha $m > 0$ és $n > 0$, akkor a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ számtestet *teljesen valós*, ellenkező esetben *teljesen komplex* biciklikus bikvadratikus számtestnek nevezzük.

A fejezet további részében a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ biciklikus bikvadratikus számtest esetén m és n legnagyobb közös osztóját jelölje $d > 0$, illetve legyenek m_1 és n_1 olyan egészek, hogy $m = dm_1$ és $n = dn_1$ teljesül. Ezen jelölések mellett

$$\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{m_1 n_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m_1 n_1}).$$

Ezt felhasználva K. S. Williams [80] öt esetre redukálta a biciklikus bikvadratikus számtestek vizsgálatát, majd minden esetben megadta a biciklikus bikvadratikus számtestek egy egész bázisát és meghatározta a diszkriminánst is.

Biciklikus bikvadratikus számtestek monogenitásával elsőként T. Nakahara [68] foglalkozott. Belátta, hogy végtelen sok biciklikus bikvadratikus számtest létezik, amelyben van hatvány egész bázis. Igazolta továbbá, hogy a nem monogének száma is végtelen, sőt végtelen sok biciklikus bikvadratikus számtest létezik, amelynek testindexe 1 és minimális indexe nagyobb egy tetszőleges előre rögzített számnál. Bizonyította azt is, hogy 12 bármely pozitív osztója esetén végtelen sok biciklikus bikvadratikus számtest van, amelynek testindexe az adott osztó.

Ez utóbbi eredményre Gaál I., Pethő A. és M. Pohst [29] újabb bizonyítást adtak, továbbá szükséges és elégséges feltételeket igazoltak arra vonatkozóan, hogy biciklikus bikvadratikus számtestek testindexe pontosan mikor egyenlő 12 egy adott osztójával. Mindehhez kiszámították a Williams-féle egész bázisokhoz tartozó index formákat.

M.-N. Gras és F. Tanoé [37] szükséges és elégséges feltételt adtak hatvány egész bázis létezésére biciklikus bikvadratikus számtestekben, melyben azonban szerepel egy negyedfokú diofantoszi egyenlet megoldhatósága. Y. Moto-da [63, 64] az általuk adott feltételből kiindulva vizsgálta a biciklikus bikvadratikus számtestek monogenitását.

H. H. Kim és Z. Wolske [51] biciklikus bikvadratikus számtestek minimális indexére adott felső korlátot a test diszkriminánsának függvényében.

Teljesen valós biciklikus bikvadratikus számtestek esetén Gaál I., Pethő A. és M. Pohst [31] az index forma egyenlet megoldását szimultán Pell-egyenletekre vezették vissza, ezáltal módszert adva adott indexű elemek keresésére.

B. Jadrijević [46, 47], illetve Gaál I. és B. Jadrijević [27] teljesen valós biciklikus bikvadratikus számtestek négy parametrikus családjának határozta meg a testindexét, minimális indexét és minimális indexű elemeit.

T. Funakura [25] tiszta negyedfokú számtestek vizsgálata kapcsán belátta, hogy a $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{n})$ ($n \geq 2$ négyzetmentes egész) alakú teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest pontosan akkor monogén, ha $n \in \{2, 3, 5\}$.

Nyul G. [70] a teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek esetén tovább bontotta a Williams-féle öt esetet. Ezt követően minden esetben megadta a monogenitásnak (azaz az 1 indexű elemek létezésének) a szükséges és elégséges feltételeit, és meg is határozta az összes hatvány egész bázist

generáló (azaz 1 indexű) elemet. Tételének minden esetre kiterjedő bizonyítása a [72] disszertációban található. Később M.-L. Chang [13] egy másik megközelítésből jutott ezekhez az eredményekhez.

Gaál I. és Nyul G. [28] hatékony algoritmust adtak biciklikus bikvadratikus számtestek esetén az index forma egyenlet Mahler-típusú változatának, azaz az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$ (ahol p_1, \dots, p_s rögzített prímszámok, $0 \leq t_1, \dots, t_s \in \mathbb{Z}$ és $\text{lnko}(x_2, x_3, x_4) = 1$) alakú egyenletnek a megoldására. Ezt a módszert felhasználva B. Jadrijević [48] az egyik általa vizsgált parametrikus testcsaládban keresett $2^a 3^b$ (a és b nemnegatív egészek) indexű elemeket.

Megjegyezzük, hogy a racionális számok testének több négyzetmentes egész szám négyzetgyökével történő bővítésével a biciklikus bikvadratikus számtestek egy általánosításához, a multikvadratikus számtestekhez jutunk. Ezek monogenitását a [65, 66, 71, 75] publikációkban vizsgálták.

A fent említett eredmények közül most kiemeljük azokat az állításokat, amelyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

Minden $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ biciklikus bikvadratikus számtest m, n, m_1 és n_1 4-gyel vett osztási maradéka alapján besorolható az alábbi, K. S. Williams [80] által megadott öt eset valamelyikébe:

1. eset: $m \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 1 \pmod{4}$, $m_1 \equiv 1 \pmod{4}$, $n_1 \equiv 1 \pmod{4}$
2. eset: $m \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 1 \pmod{4}$, $m_1 \equiv 3 \pmod{4}$, $n_1 \equiv 3 \pmod{4}$
3. eset: $m \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 2 \pmod{4}$
4. eset: $m \equiv 2 \pmod{4}$, $n \equiv 3 \pmod{4}$
5. eset: $m \equiv 3 \pmod{4}$, $n \equiv 3 \pmod{4}$

A következő lemmákban megadjuk a biciklikus bikvadratikus számtestek egy egész bázisát, majd a hozzá tartozó index formát.

2.1. Lemma. (K. S. Williams [80])

Legyenek $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ különböző négyzetmentes egész számok. Ekkor a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ biciklikus bikvadratikus számtest egy egész bázisa:

- 1. esetben: $\left(1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}, \frac{1+\sqrt{n}}{2}, \frac{1+\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m_1 n_1}}{4}\right)$
- 2. esetben: $\left(1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}, \frac{1+\sqrt{n}}{2}, \frac{1-\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m_1 n_1}}{4}\right)$

- 3. esetben: $\left(1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}, \sqrt{n}, \frac{\sqrt{n}+\sqrt{m_1n_1}}{2}\right)$
- 4. esetben: $\left(1, \sqrt{m}, \sqrt{n}, \frac{\sqrt{m}+\sqrt{m_1n_1}}{2}\right)$
- 5. esetben: $\left(1, \sqrt{m}, \frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2}, \frac{1+\sqrt{m_1n_1}}{2}\right)$

2.2. Lemma. (Gaál I., Pethő A. és M. Pohst [29])

Legyenek $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ különböző négyzetmentes egész számok. Ekkor a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ biciklikus bikvadratikus számtest Williams-féle egész bázisához tartozó $I(X_2, X_3, X_4)$ index forma:

- 1. esetben:

$$\left(d\left(X_2 + \frac{X_4}{2}\right)^2 - \frac{n_1}{4}X_4^2\right) \left(d\left(X_3 + \frac{X_4}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{4}X_4^2\right) \cdot \left(n_1\left(X_3 + \frac{X_4}{2}\right)^2 - m_1\left(X_2 + \frac{X_4}{2}\right)^2\right)$$

- 2. esetben:

$$\left(d\left(X_2 - \frac{X_4}{2}\right)^2 - \frac{n_1}{4}X_4^2\right) \left(d\left(X_3 + \frac{X_4}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{4}X_4^2\right) \cdot \left(n_1\left(X_3 + \frac{X_4}{2}\right)^2 - m_1\left(X_2 - \frac{X_4}{2}\right)^2\right)$$

- 3. esetben:

$$(dX_2^2 - n_1X_4^2) \left(d\left(X_3 + \frac{X_4}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{4}X_4^2\right) (n_1(2X_3 + X_4)^2 - m_1X_2^2)$$

- 4. esetben:

$$\left(\frac{d}{2}(2X_2 + X_4)^2 - \frac{n_1}{2}X_4^2\right) \left(2dX_3^2 - \frac{m_1}{2}X_4^2\right) \left(2n_1X_3^2 - \frac{m_1}{2}(2X_2 + X_4)^2\right)$$

- 5. esetben:

$$(d(2X_2 + X_3)^2 - n_1X_4^2)(dX_3^2 - m_1X_4^2) \left(\frac{n_1}{4}X_3^2 - m_1\left(X_2 + \frac{X_3}{2}\right)^2\right)$$

Megjegyzés. Látható, hogy a Williams-féle egész bázishoz tartozó index forma minden esetben három egész együtthatós kvadratikus forma szorzata. A fejezet további részében jelölje ezeket a fenti alakban szereplő sorrendben $Q_i(X_2, X_3, X_4)$ ($i = 1, 2, 3$). Az egyszerűség kedvéért az i -edik tényezőre és egész számok helyettesítése esetén az i -edik tényező értékére is a Q_i jelölést fogjuk használni.

A biciklikus bikvadratikus számtestek testindexének jellemzését az alábbi lemma írja le.

2.3. Lemma. (Gaál I., Pethő A. és M. Pohst [29])

Legyenek $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ különböző négyzetmentes egész számok, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ biciklikus bikvadratikus számtest. Tekintsük az $m_1 - d$, $n_1 - d$, $m_1 - n_1$ különbségeket. Ekkor

- $i_K = 1$ pontosan akkor, ha sem a 3, sem a 4 nem osztja mindhárom különbséget;
- $i_K = 2$ pontosan akkor, ha a 4 osztja mindhárom különbséget, de a 3 és a 8 nem;
- $i_K = 3$ pontosan akkor, ha a 3 osztja mindhárom különbséget, de a 4 nem;
- $i_K = 4$ pontosan akkor, ha a 8 osztja mindhárom különbséget, de a 3 nem;
- $i_K = 6$ pontosan akkor, ha a 3 és a 4 osztja mindhárom különbséget, de a 8 nem;
- $i_K = 12$ pontosan akkor, ha a 3 és a 8 osztja mindhárom különbséget.

Teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek esetén a Williams-féle öt eset Nyul G. [70] általi finomítását m és n előjelének figyelembevételével az alábbiakban adjuk meg:

1. eset: $m > 0$, $n < 0$, $m \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 1 \pmod{4}$, $m_1 \equiv 1 \pmod{4}$, $n_1 \equiv 1 \pmod{4}$
2. eset: $m > 0$, $n < 0$, $m \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 1 \pmod{4}$, $m_1 \equiv 3 \pmod{4}$, $n_1 \equiv 3 \pmod{4}$
- 3/A. eset: $m > 0$, $n < 0$, $m \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 2 \pmod{4}$
- 3/B. eset: $m < 0$, $n > 0$, $m \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 2 \pmod{4}$
- 4/A. eset: $m > 0$, $n < 0$, $m \equiv 2 \pmod{4}$, $n \equiv 3 \pmod{4}$

4/B. eset: $m < 0, n > 0, m \equiv 2 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$

5/A. eset: $m > 0, n < 0, m \equiv 3 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$

5/B. eset: $m < 0, n < 0, m \equiv 3 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$

Végezetül megemlítünk még egy polinomok teljeshatvány-mentes értékeire vonatkozó segédállítást, amely a későbbiekben kulcsfontosságú lesz.

2.4. Lemma. (T. Nagel [67])

Legyen $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$ olyan k -adfokú ($k \geq 2$) primitív polinom, melynek diszkriminánsa nem 0. Ha $\text{lnc}_k\{p(a) \mid a \in \mathbb{N}\}$ k -adikhatvány-mentes, akkor $p(X)$ végtelen sok természetes szám helyettesítése esetén vesz fel k -adikhatvány-mentes értéket.

Megjegyzés. Ezt a lemmát másodfokú polinomok négyzetmentes értékei kapcsán fogjuk alkalmazni. Ekkor a feltételek egyszerűsödnek, ugyanis könnyen ellenőrizhető, hogy primitív másodfokú polinomok esetén a helyettesítési értékek legnagyobb közös osztója mindig négyzetmentes.

2.2. Prím és kis indexű elemek

Nyul G. korábban említett, 1 indexű elemekre vonatkozó eredményének kiterjesztéseként először páratlan prím indexű elemek létezésére adunk szükséges és elégséges feltételeket teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestekben, és meg is határozzuk ezeket az adott indexű elemeket.

2.5. Tétel. ([4, Theorem 3.1])

Legyenek $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ különböző négyzetmentes egész számok, melyek a teljesen komplex esetben korábban felsorolt nyolc eset valamelyikébe tartoznak, továbbá jelölje $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ biciklikus bikvadratikus számtest 2.1. Lemmában megadott egész bázisát. Ekkor ha p pozitív páratlan prím szám, akkor a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ számtestben p indexű elem létezésének szükséges és elégséges feltételeit, illetve az adott feltételek teljesülése esetén a p indexű $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 + x_4\omega_4$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$) elemeknek az egész bázisra vonatkozó koordinátáit az 1. táblázat tartalmazza. Az 1. és 2. esetben nincs p indexű elem.

1. táblázat. Prím indexű elemek

eset	feltétel	(x_2, x_3, x_4)
3/A.	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $d = 1, m - 4n = p$ (*)	$\pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $m_1 = 1, d - 4n_1 = p$ (*)	$\pm(1, -1, 2), \pm(1, 1, -2)$
3/B.	ha $p = 3$: $m = -3, n = 6$ (*)	$\pm(1, 0, 1), \pm(1, -1, 1),$ $\pm(-1, 0, 1), \pm(-1, -1, 1)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $m_1 = -1, d - 4n_1 = -p$	$\pm(1, -1, 2), \pm(1, 1, -2)$
	ha $p \equiv 3 \pmod{4}$: $m_1 = -1, d - 4n_1 = p$	
	ha $p \equiv 3 \pmod{4}$: $d = 1, 4n - m = p$ (*)	$\pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$
	ha $p \equiv 5 \pmod{16}$, $p - 1$ négyzetszám és $\frac{p+3}{4}$ négyzetmentes: $m = -3, n = \frac{p+3}{4}$ (*)	$\pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 0, 1), \pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, -1, 1),$ $\pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 0, -1), \pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 1, -1)$
4/A.	$m_1 = 2, d - n_1 = 2p$ (*)	$\pm(0, 0, 1), \pm(-1, 0, 1)$
	ha $p = 3$: $m = 2, n = -1$ (*)	$\pm(0, 1, 1), \pm(0, -1, 1),$ $\pm(-1, 1, 1), \pm(-1, -1, 1)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$, $p - 1$ négyzetszám és $p + 1$ négyzetmentes: $m = p + 1, n = -1$ (*)	$\pm(0, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, 1), \pm(0, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, -1),$ $\pm(-1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, 1), \pm(1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, -1)$
4/B.	$m_1 = -2, d - n_1 = \pm 2p$	$\pm(-1, 0, 1), \pm(0, 0, 1)$

5/A.	$d = 1, m - n = 4p \quad (*)$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $n_1 = -1, 4d - m_1 = p$	$\pm(-1, 2, 1), \pm(1, -2, 1)$
	ha $p \equiv 3 \pmod{4}$: $n_1 = -1, 4d - m_1 = -p$	
	ha $p \equiv 1 \pmod{16}$, $p - 1$ négyzetszám és $\frac{3p+1}{4}$ négyzetmentes: $m = \frac{9p+3}{4}, n = \frac{-3p-1}{4} \quad (*)$	$\pm(0, 1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}), \pm(0, -1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}),$ $\pm(-1, 1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}), \pm(1, -1, \frac{\sqrt{p-1}}{2})$
5/B.	$d = 1, m - n = \pm 4p$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $n_1 = -1, 4d - m_1 = p \quad (*)$	$\pm(-1, 2, 1), \pm(1, -2, 1)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $m_1 = -1, 4d - n_1 = p \quad (*)$	$\pm(1, 0, 1), \pm(-1, 0, 1)$

Megjegyzés. Az 5/B. esetben a feltételek szimmetriája miatt a számtestek kétszer is megjelennek.

Megjegyzés. Világos, hogy rögzített p prím mellett csak véges sok olyan m és n egész szám létezik, melyek eleget tesznek a $(*)$ -gal jelölt feltételeknek és az adott esetben tartoznak. A többi feltételről igazolható, hogy azokat végtelen sok (m, n) számpár teljesíti, erre a bizonyítás során mutatunk példát.

Bizonyítás. A bizonyítás alapja, hogy teljesen komplex esetben a Williams-féle egész bázishoz tartozó, a 2.2. Lemmában megadott index forma három tényezője közül kettő mindig szemidefinit. Felhasználjuk továbbá, hogy a Q_1, Q_2, Q_3 tényezők között lineáris kapcsolatok állnak fenn, amelyekből egész számok helyettesítése után az alábbi kongruenciák következnek:

1. és 2. esetben: $m_1 Q_1 + d Q_3 = n_1 Q_2$, így $Q_1 + Q_3 \equiv Q_2 \pmod{4}$
3. esetben: $m_1 Q_1 + d Q_3 = 4 n_1 Q_2$, így $Q_1 + Q_3 \equiv 0 \pmod{4}$
4. esetben: $m_1 Q_1 + d Q_3 = n_1 Q_2$, így $2 Q_1 + Q_3 \equiv 3 Q_2 \pmod{4}$
5. esetben: $m_1 Q_1 + 4 d Q_3 = n_1 Q_2$, így $Q_1 \equiv Q_2 \pmod{4}$

Megjegyezzük, hogy [31] is tartalmazza a kvadratikus formák lineáris függőségét, de csak a tényezők abszolút értékére vonatkozóan, a bizonyításban viszont erre az erősebb alakra lesz szükségünk.

A fenti kongruenciából az 1. és 2. esetben látható, hogy Q_1 , Q_2 és Q_3 nem lehet egyszerre páratlan, így ezekben az esetekben nem létezik páratlan indexű elem. Ez egyébként a [29, 68] publikációk eredményeiből is következik.

A tétel bizonyítását a 3/B. eseten keresztül mutatjuk be, a többi esetben az állítás hasonlóan igazolható.

Vezessük be az $\tilde{m}_1 = -m_1 > 0$ jelölést. Ekkor a p indexű elemek kereséséhez a

$$(dx_2^2 - n_1x_4^2) \left(d \left(x_3 + \frac{x_4}{2} \right)^2 + \frac{\tilde{m}_1}{4} x_4^2 \right) (n_1(2x_3 + x_4)^2 + \tilde{m}_1x_2^2) = \pm p$$

index forma egyenletet kell megoldanunk. Jelen esetben a Q_2 és Q_3 kvadratikusan pozitív szemidefinit. A 3. esetbeli $Q_1 + Q_3 \equiv 0 \pmod{4}$ kongruenciát is használva adódik, hogy $(Q_1, Q_2, Q_3) = (\pm 1, 1, p), (-1, p, 1)$ vagy $(\pm p, 1, 1)$.

I. Vizsgáljuk meg először a $(Q_1, Q_2, Q_3) = (\pm 1, 1, p)$ hármast. Ekkor a második tényezőből a $d(2x_3 + x_4)^2 + \tilde{m}_1x_4^2 = 4$ egyenlőséghez jutunk. Felhasználva, hogy \tilde{m}_1 páratlan, illetve hogy egy négyzetszám 4-gyel osztva csak 0-t vagy 1-et adhat maradékkul, $\tilde{m}_1x_4^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ adódik. Ez alapján a következő lehetőségek állhatnak fenn.

(i) $d(2x_3 + x_4)^2 = 4$ és $\tilde{m}_1x_4^2 = 0$

Ekkor $x_4 = 0$, $d = 1$ és $x_3 = \pm 1$. Az első tényezőbe helyettesítés után kapjuk, hogy $x_2^2 = \pm 1$, így $x_2 = \pm 1$ és $Q_1 = 1$. A tényezőkre vonatkozó kongruencia miatt ez csak akkor lehetséges, ha $p \equiv 3 \pmod{4}$. Ekkor a harmadik tényezőt tekintve a $4n - m = p$ egyenlőségnek kell teljesülnie. (Az előjeleket figyelembe véve csak véges sok ilyen m és n létezik.) Ezen feltételek mellett az index forma egyenlet megoldásai $(x_2, x_3, x_4) = \pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$.

(ii) $d(2x_3 + x_4)^2 = 3$ és $\tilde{m}_1x_4^2 = 1$

Itt $d = 3$, $2x_3 + x_4 = \pm 1$, $\tilde{m}_1 = 1$ és $x_4 = \pm 1$. Ezek alapján a harmadik tényezőre az $n_1 + x_2^2 = p$ egyenlőségnek kell fennállnia. Mivel $n_1 \equiv 2 \pmod{4}$, $x_2^2 \equiv 0$ vagy $1 \pmod{4}$ és p páratlan, így $p \equiv 3 \pmod{4}$. Ekkor a tényezőkre vonatkozó kongruencia miatt $Q_1 = 1$, azaz $3x_2^2 - n_1 = 1$.

Az első és harmadik tényezőből kapott egyenleteket összeadva következik, hogy $(2x_2 - 1)(2x_2 + 1) = p$. Felhasználva, hogy p prím, ez csak úgy fordulhat elő, hogy $p = 3$, $x_2 = \pm 1$, és ekkor $n_1 = 2$. Tehát $p = 3$, $m = -3$, $n = 6$ esetén az index forma egyenlet megoldásai $(x_2, x_3, x_4) = \pm(1, 0, 1)$, $\pm(1, -1, 1)$, $\pm(-1, 0, 1)$, $\pm(-1, -1, 1)$.

(iii) $d(2x_3 + x_4)^2 = 1$ és $\tilde{m}_1 x_4^2 = 3$

Ekkor $d = 1$, $2x_3 + x_4 = \pm 1$, $\tilde{m}_1 = 3$ és $x_4 = \pm 1$. Így a harmadik tényezőre az $n_1 + 3x_2^2 = p$ egyenlőségnek kell teljesülnie. A (ii) részhez hasonló gondolatmenettel most azt kapjuk, hogy $p \equiv 1 \pmod{4}$, ezáltal $Q_1 = -1$, azaz $x_2^2 - n_1 = -1$.

Az első és harmadik tényezőre kapott egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásával adódik, hogy $x_2 = \pm \frac{\sqrt{p-1}}{2}$ és $n_1 = \frac{p+3}{4}$. Ahhoz, hogy x_2 egész szám legyen, $(p-1)$ -nek négyzetszámmal kell lennie. Mivel $n_1 \equiv 2 \pmod{4}$, szükségképpen $p \equiv 5 \pmod{16}$, továbbá $n_1 = \frac{p+3}{4}$ négyzetmentes. Ekkor tehát $m = -3$, $n = \frac{p+3}{4}$ esetén a fenti feltételek mellett az index forma egyenlet megoldásai $(x_2, x_3, x_4) = \pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 0, 1)$, $\pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, -1, 1)$, $\pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 0, -1)$, $\pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 1, -1)$.

(iv) $d(2x_3 + x_4)^2 = 0$ és $\tilde{m}_1 x_4^2 = 4$

Szükségképpen $2x_3 + x_4 = 0$, $\tilde{m}_1 = 1$ és $x_4 = \pm 2$. Ekkor viszont a harmadik tényező alapján $x_2^2 = p$ adódik, aminek nincs egész megoldása.

II. Most tekintsük a $(Q_1, Q_2, Q_3) = (-1, p, 1)$ hármast. A harmadik tényezőtől kiindulva az $n_1(2x_3 + x_4)^2 + \tilde{m}_1 x_2^2 = 1$ egyenlőségnek kell teljesülnie, ami n_1 párossága miatt csak úgy lehetséges, hogy $2x_3 + x_4 = 0$, $\tilde{m}_1 = 1$ és $x_2 = \pm 1$. Így a második tényezőtől kapjuk, hogy $x_4^2 = 4p$, aminek nincs egész megoldása.

III. Végül vizsgáljuk a $(Q_1, Q_2, Q_3) = (\pm p, 1, 1)$ hármast. A harmadik tényező alapján most is csak $2x_3 + x_4 = 0$, $\tilde{m}_1 = 1$ és $x_2 = \pm 1$ lehetséges. Ezen értékek mellett a második tényezőtől következik, hogy $x_4^2 = 4$, azaz $x_4 = \pm 2$. Így az első tényezőre a $d - 4n_1 = \pm p$ egyenlőségnek kell teljesülnie.

Ha $p \equiv 1 \pmod{4}$, akkor az index forma tényezőire vonatkozó kongruencia alapján $d - 4n_1 = -p$. A 2.4. Lemma szerint végtelen sok c természetes szám létezik, melyre $(2c + 1)(16c + 8 - p)$ négyzetmentes és mindkét tényezője

pozitív. Egy ilyen c értéket tekintve legyen $n_1 = 4c + 2$ és $d = 16c + 8 - p$. Ekkor $m = -(16c+8-p)$ és $n = (4c+2)(16c+8-p)$ különböző négyzetmentes egész számok, melyek teljesítik a most kapott feltételeket, illetve a 3/B. eset feltételeit is. Ezzel igazoltuk, hogy végtelen sok megfelelő (m, n) számpár létezik.

Ha $p \equiv 3 \pmod{4}$, akkor az index forma tényezőire fennálló kongruencia miatt $d - 4n_1 = p$. Ismét a 2.4. Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy végtelen sok c természetes szám létezik, melyre $(2c + 1)(16c + 8 + p)$ négyzetmentes, tehát $n_1 = 4c + 2$ és $d = 16c + 8 + p$ választással ekkor is végtelen sok m és n teljesíti a feltételeket.

A megoldások mindkét esetben $(x_2, x_3, x_4) = \pm(1, -1, 2), \pm(1, 1, -2)$. \square

Az alábbiakban az előző tételből kimaradó, legfeljebb 10 indexű elemek létezését vizsgáljuk teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestekben.

2.6. Tétel. ([4, Theorem 3.2])

Legyenek $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ különböző négyzetmentes egész számok, melyek a teljesen komplex esetben korábban felsorolt nyolc eset valamelyikébe tartoznak, továbbá jelölje $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ biciklikus bikvadratikus számtest 2.1. Lemmában megadott egész bázisát. Ekkor a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ számtestben $A \in \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ indexű elem létezésének szükséges és elégséges feltételeit, illetve az adott feltételek teljesülése esetén az A indexű $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 + x_4\omega_4$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$) elemeknek az egész bázisra vonatkozó koordinátáit a 2-7. táblázatok tartalmazzák. Az A indexű elemek táblázatában nem szereplő esetekben nincs A indexű elem.

2. táblázat. 2 indexű elemek

eset	feltétel	(x_2, x_3, x_4)
1.	$m = 5, n = -15$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1),$
	$m = 5, n = -3$	$\pm(-1, 0, 1), \pm(-1, -1, 1)$
2.	$m = 21, n = -7$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1),$
	$m = 21, n = -3$	$\pm(1, 0, 1), \pm(1, -1, 1)$
5/A.	$m = 3, n = -5$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	$m = 7, n = -1$	
5/B.	$d = 1, m - n = \pm 8$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$

3. táblázat. 4 indexű elemek

eset	feltétel	(x_2, x_3, x_4)
2.	$n_1 = -1, 4d - m_1 = 1$	$\pm(1, 1, 2), \pm(1, -3, 2)$
	$n_1 = -1, d - 4m_1 = -1$	$\pm(2, -1, 4), \pm(2, -3, 4)$
	$n_1 = -1, d - m_1 = \pm 4$	$\pm(1, 0, 2), \pm(1, -2, 2)$
3/A.	$n_1 = -2, d - m_1 = \pm 4$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$
3/B.	$m = -3, n = 2$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$
	$m = -3, n = 6$	
	$m_1 = -1, d - 16n_1 = -1$	$\pm(1, -2, 4), \pm(1, 2, -4)$
5/A.	$m = 3, n = -13$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	$m = 11, n = -5$	
	$m = 3, n = -1$	$\pm(0, 1, 1), \pm(-1, 1, 1),$ $\pm(0, 1, -1), \pm(-1, 1, -1)$
	$m = 15, n = -1$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0),$ $\pm(-2, 4, 1), \pm(-2, 4, -1)$
	$n_1 = -1, 16d - m_1 = 1,$ $(m, n) \neq (15, -1)$	$\pm(-2, 4, 1), \pm(-2, 4, -1)$
5/B.	$d = 1, m - n = \pm 16$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$

4. táblázat. 6 indexű elemek

eset	feltétel	(x_2, x_3, x_4)
1.	$m = 5, n = -7$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1),$ $\pm(-1, 0, 1), \pm(-1, -1, 1)$
	$m = 5, n = -35$	
2.	$m = 21, n = -35$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1),$ $\pm(1, 0, 1), \pm(1, -1, 1)$
	$m = 21, n = -15$	
	$m = 33, n = -11$	
	$m = 33, n = -3$	
	$m = 77, n = -11$	
	$m = 77, n = -7$	
5/A.	$m = 7, n = -17$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	$m = 11, n = -13$	
	$m = 19, n = -5$	
	$m = 23, n = -1$	
5/B.	$d = 1, m - n = \pm 24$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$

5. táblázat. 8 indexű elemek

eset	feltétel	(x_2, x_3, x_4)
1.	$m = 5, n = -15$	$\pm(0, -1, 2), \pm(2, 1, -2), \pm(1, 1, -3),$ $\pm(1, 2, -3), \pm(2, 1, -3), \pm(2, 2, -3)$
	$m = 5, n = -3$	$\pm(0, 1, 1), \pm(0, -2, 1), \pm(-1, 1, 1),$ $\pm(-1, -2, 1), \pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$
2.	$m = 69, n = -23$	$\pm(2, -1, 3), \pm(1, -1, 3),$ $\pm(2, -2, 3), \pm(1, -2, 3)$
	$m = 69, n = -3$	$\pm(0, 1, 1), \pm(1, 1, 1),$ $\pm(0, -2, 1), \pm(1, -2, 1)$
	$n_1 = -1, d - m_1 = \pm 8$	$\pm(1, 0, 2), \pm(1, -2, 2)$
3/A.	$n_1 = -2, d - m_1 = \pm 8$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$
3/B.	$m = -15, n = 6$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$
	$m = -15, n = 10$	
	$m = -7, n = 2$	
	$m = -7, n = 14$	
4/A.	$n_1 = -1, d - m_1 = -1$	$\pm(-1, 1, 2), \pm(1, 1, -2)$
5/A.	$m = 3, n = -29$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	$m = 11, n = -21$	
	$m = 15, n = -17$	
	$m = 19, n = -13$	
	$m = 31, n = -1$	
5/B.	$d = 1, m - n = \pm 32$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$

6. táblázat. 9 indexű elemek

eset	feltétel	(x_2, x_3, x_4)
3/B.	$m_1 = -1, 9d - 4n_1 = -1$	$\pm(3, -1, 2), \pm(3, 1, -2)$
	$m_1 = -1, d - 36n_1 = -1$	$\pm(1, -3, 6), \pm(1, 3, -6)$
	$m_1 = -1, d - 4n_1 = -9$	$\pm(1, -1, 2), \pm(1, 1, -2)$
	$m_1 = -3, d - 4n_1 = 1$	
4/A.	$m = 2, n = -17$	$\pm(0, 0, 1), \pm(-1, 0, 1)$
	$m = 6, n = -1$	
	$m = 10, n = -65$	
	$m = 14, n = -77$	
	$m = 22, n = -77$	
	$m = 26, n = -65$	
	$m = 34, n = -17$	
4/B.	$m_1 = -2, 9d - n_1 = \pm 2$	$\pm(1, 0, 1), \pm(-2, 0, 1)$
	$m_1 = -2, d - 9n_1 = \pm 2$	$\pm(-1, 0, 3), \pm(-2, 0, 3)$
	$m_1 = -2, d - n_1 = \pm 18$	$\pm(-1, 0, 1), \pm(0, 0, 1)$
	$m_1 = -6, d - n_1 = \pm 2$	
5/A.	$m = 7, n = -29$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	$m = 19, n = -17$	
	$m = 23, n = -13$	
	$m = 31, n = -5$	
	$m = 35, n = -1$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0),$ $\pm(-3, 6, 1), \pm(3, -6, 1)$
	$n_1 = -1, 36d - m_1 = 1,$ $(m, n) \neq (35, -1)$	$\pm(-3, 6, 1), \pm(3, -6, 1)$
	$n_1 = -1, 4d - 9m_1 = 1$	$\pm(-1, 2, 3), \pm(-1, 2, -3)$
	$n_1 = -1, 4d - m_1 = 9$	$\pm(-1, 2, 1), \pm(-1, 2, -1)$
	$n_1 = -3, 4d - m_1 = -1$	

5/B.	$m = -41, n = -5$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0),$ $\pm(-1, 3, 0), \pm(-2, 3, 0)$
	$m = -5, n = -41$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0),$ $\pm(1, 1, 0), \pm(-2, 1, 0)$
	$m = -5, n = -1$	$\pm(-1, 2, 1), \pm(-1, 2, -1),$ $\pm(-1, 3, 0), \pm(-2, 3, 0)$
	$m = -1, n = -5$	$\pm(1, 1, 0), \pm(-2, 1, 0),$ $\pm(1, 0, 1), \pm(1, 0, -1)$
	$d = 1, m - n = \pm 36,$ $(m, n) \neq (-5, -41),$ $(m, n) \neq (-41, -5)$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	$d = 3, m - n = \pm 12$	
	$d = 1, m - 9n = \pm 4,$ $(m, n) \neq (-5, -1),$ $(m, n) \neq (-41, -5)$	$\pm(-1, 3, 0), \pm(-2, 3, 0)$
	$d = 1, 9m - n = \pm 4,$ $(m, n) \neq (-1, -5),$ $(m, n) \neq (-5, -41)$	$\pm(1, 1, 0), \pm(-2, 1, 0)$

7. táblázat. 10 indexű elemek

eset	feltétel	(x_2, x_3, x_4)
1.	$m = 13, n = -39$	$\pm(-1, -1, 3), \pm(-2, -1, 3),$ $\pm(-1, -2, 3), \pm(-2, -2, 3)$
	$m = 13, n = -3$	$\pm(0, 1, 1), \pm(0, -2, 1),$ $\pm(-1, 1, 1), \pm(-1, -2, 1)$
2.	$m = 93, n = -31$	$\pm(2, -1, 3), \pm(1, -1, 3),$ $\pm(2, -2, 3), \pm(1, -2, 3)$
	$m = 93, n = -3$	$\pm(0, 1, 1), \pm(1, 1, 1),$ $\pm(0, -2, 1), \pm(1, -2, 1)$
5/A.	$m = 3, n = -37$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	$m = 7, n = -33$	
	$m = 11, n = -29$	
	$m = 19, n = -21$	
	$m = 23, n = -17$	
	$m = 39, n = -1$	
5/B.	$d = 1, m - n = \pm 40$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$

Megjegyzés. Az előző tételhez hasonlóan az 5/B. esetben a számtesetek most is kétszer szerepelnek.

Továbbá, az 1. és 2. esetben két különböző alakban is megjelennek a számtesetek, például az 5. táblázatban a 2. esetben $\mathbb{Q}(\sqrt{69}, \sqrt{-23}) = \mathbb{Q}(\sqrt{69}, \sqrt{-3})$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{33}, \sqrt{-11}) = \mathbb{Q}(\sqrt{33}, \sqrt{-3})$.

Megjegyzés. Most is megmutatható, hogy azoknak a szükséges és elégséges feltételeknek, ahol nem konkrét m és n értékek szerepelnek, végtelen sok (m, n) számpár tesz eleget.

Bizonyítás. Az állításaink igazolása során most is felhasználjuk a 2.5. Tétel bizonyításának elején írtakat. Az $A = 4$ indexnél a 3/B. esetet részletezzük, a többi indexre és a többi esetben a bizonyítás hasonlóan történik.

Vezessük be ismét az $\tilde{m}_1 = -m_1 > 0$ jelölést. Ekkor a megoldandó index forma egyenlet a

$$(dx_2^2 - n_1x_4^2) \left(d \left(x_3 + \frac{x_4}{2} \right)^2 + \frac{\tilde{m}_1}{4}x_4^2 \right) (n_1(2x_3 + x_4)^2 + \tilde{m}_1x_2^2) = \pm 4.$$

A Q_2 és Q_3 kvadratikus formák pozitív szemidefinitisége és a korábban említett $Q_1 + Q_3 \equiv 0 \pmod{4}$ kongruencia felhasználásával kapjuk, hogy $(Q_1, Q_2, Q_3) = (-1, 4, 1)$ vagy $(\pm 2, 1, 2)$.

I. Tekintsük először a $(Q_1, Q_2, Q_3) = (-1, 4, 1)$ hármast. Ekkor a harmadik tényezőre $n_1(2x_3 + x_4)^2 + \tilde{m}_1 x_2^2 = 1$ adódik, ami n_1 párossága miatt csak úgy fordulhat elő, hogy $2x_3 + x_4 = 0$, $\tilde{m}_1 = 1$ és $x_2 = \pm 1$. Ez alapján a második tényezőre az $\frac{1}{4}x_4^2 = 4$ egyenlőségnek kell fennállnia, ahonnan kapjuk, hogy $x_4 = \pm 4$. Így az első tényezőre szükségképpen $d - 16n_1 = -1$ teljesül. Ezen feltételek mellett az index forma egyenlet megoldásai $(x_2, x_3, x_4) = \pm(1, -2, 4), \pm(1, 2, -4)$.

Megmutatjuk, hogy a fenti feltételeket végtelen sok m és n egész szám teljesíti. A 2.4. Lemma szerint végtelen sok c természetes szám létezik, amelyre $(2c + 1)(64c + 31)$ négyzetmentes. Ilyen c esetén legyen $n_1 = 4c + 2$ és $d = 64c + 31$. Ekkor $m = -(64c + 31)$ és $n = (4c + 2)(64c + 31)$ különböző négyzetmentes egész számok, amelyek egyaránt eleget tesznek a 3/B. eset feltételeinek és a 4 indexű elemek létezésére előbb kapott szükséges és elégséges feltételeknek.

II. Most vizsgáljuk a $(Q_1, Q_2, Q_3) = (\pm 2, 1, 2)$ hármast. Ekkor a harmadik tényezőt tekintve az $n_1(2x_3 + x_4)^2 + \tilde{m}_1 x_2^2 = 2$ egyenlőségnek kell fennállnia. Mivel \tilde{m}_1 páratlan és n_1 páros, így $n_1 = 2$, $2x_3 + x_4 = \pm 1$ és $x_2 = 0$. Ezek alapján a második tényezőtől a $d + \tilde{m}_1 x_4^2 = 4$ egyenlőséghez jutunk. Ez d páratlansága miatt kétféleképpen lehetséges.

Ha $d = 1$, $\tilde{m}_1 = 3$ (azaz $m = -3$, $n = 2$) és $x_4 = \pm 1$, vagy $d = 3$, $\tilde{m}_1 = 1$ (azaz $m = -3$, $n = 6$) és $x_4 = \pm 1$, akkor az index forma egyenlet lehetséges megoldásai $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$. Ezek valóban megoldások, ugyanis ezen értékek mellett $Q_1 = -2$. \square

Megjegyzés. A 2.5. Tétel és a 2.6. Tétel Nyul G. 1 indexű elemekre vonatkozó eredményével együtt pontosan megadják azokat a teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtesteket, melyek minimális indexe legfeljebb 10. Ezen tételek segítségével leírható a szükséges és elégséges feltétele annak is, hogy egy teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest minimális indexe A -val egyenlő ($A \in \{1, \dots, 10\}$). A minimális index meghatározásához a számtest

legkisebb indexnél történő előfordulását kell tekintenünk, ugyanis vannak olyan számtestek, amelyek több indexnél megjelennek, például $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{6})$ tartalmaz 3, 4 és 5 indexű elemeket is.

2.3. Minimális index

A minimális index kapcsán több számtestcsalád esetén is születtek olyan eredmények, amelyek szerint tetszőlegesen rögzített természetes szám esetén végtelen sok, az adott testcsaládba tartozó számtest létezik, amelynek minimális indexe nagyobb az előre megadott számnál. Ilyen típusú állítást bizonyított M. Hall [43] tiszta harmadfokú, D. S. Dummit és H. Kisilevsky [20] ciklikus harmadfokú, T. Funakura [25] tiszta negyedfokú, T. Nakahara [69] ciklikus negyedfokú számtestek esetén. Biciklikus bikvadratikus számtestekben már említettük T. Nakahara hasonló állítását: Bármely természetes szám esetén végtelen sok biciklikus bikvadratikus számtest van, amelynek testindexe 1 és minimális indexe nagyobb, mint az előre rögzített szám.

B. K. Spearman, Q. Yang és J. Yoo [76] a fenti problémakört új irányból közelítették meg. Igazolták, hogy tetszőleges köbmentes természetes szám esetén végtelen sok tiszta harmadfokú számtest létezik, melynek minimális indexe pontosan az adott számmal egyenlő. Az alábbi tételben T. Nakahara fenti, biciklikus bikvadratikus számtestekre vonatkozó eredményét erősítjük ilyen módon és az állítást kiterjesztjük a testindex többi lehetséges értékére is.

2.7. Tétel. ([6, Theorem 1.1])

- (1) *Ha $a \in \{1, 3\}$, akkor a bármely A pozitív többszöröse esetén végtelen sok teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest létezik, melynek testindexe a és minimális indexe A .*
- (2) *Ha $a \in \{2, 4, 6, 12\}$, akkor $2a$ bármely A pozitív többszöröse esetén végtelen sok teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest létezik, melynek testindexe a és minimális indexe A .*

Bizonyítás. Állításaink igazolásához minden $a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ esetén megadjuk teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek végtelen parametrikus testcsaládjait, amelyek testindexe a , minimális indexe pedig A , sőt

meghatározzuk az összes minimális indexű elemet is. A bizonyítást $a = 1$ esetén részletezzük, ehhez legyen A egy természetes szám.

I. Először tegyük fel, hogy $A \not\equiv 2 \pmod{3}$. Ekkor $(12X + 1)(12X + 1 + 4A)$ primitív polinom, melynek nem 0 a diszkriminánsa, így a 2.4. Lemma szerint végtelen sok c természetes szám létezik, melyre $(12c + 1)(12c + 1 + 4A)$ négyzetmentes. Feltehető, hogy $c > \frac{A+A^2}{9} - \frac{1}{12}$. Ezekre a c természetes számokra tekintsük a

$$K_c = \mathbb{Q} \left(\sqrt{-(12c + 1)}, \sqrt{-(12c + 1 + 4A)} \right)$$

teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtesteket. Ekkor a korábbi jelölések mellett $m = -(12c + 1) \equiv 3 \pmod{4}$, $n = -(12c + 1 + 4A) \equiv 3 \pmod{4}$, és így $d = 1$, $m_1 = -(12c + 1)$, $n_1 = -(12c + 1 + 4A)$. Látható, hogy a K_c számtestek a Williams-féle 5. esetben tartoznak.

A 2.3. Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy K_c testindexe 1, ugyanis $m_1 - d = -12c - 2$ nem osztható sem 3-mal, sem 4-gyel.

A 2.1. Lemma alapján megadható K_c egy egész bázisa, az ehhez tartozó index forma tényezői pedig a 2.2. Lemma szerint

$$\begin{aligned} Q_1 &= (2X_2 + X_3)^2 + (12c + 1 + 4A)X_4^2, \\ Q_2 &= X_3^2 + (12c + 1)X_4^2, \\ Q_3 &= \frac{-(12c + 1 + 4A)}{4}X_3^2 + \frac{12c + 1}{4}(2X_2 + X_3)^2. \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy a K_c számtestben nincs A -nál kisebb indexű elem, azaz nem léteznek olyan x_2, x_3, x_4 egész számok, hogy $1 \leq |I(x_2, x_3, x_4)| < A$ teljesül. Ha valamely egészekre mégis fennállna ez az egyenlőtlenség, akkor x_4 -nek szükségképpen 0-nak kell lennie, ugyanis ellenkező esetben $Q_1 > 4A$ lenne. Így az index forma értéke a következő alakra egyszerűsödik:

$$I(x_2, x_3, 0) = (2x_2 + x_3)^2 x_3^2 \left(\frac{-(12c + 1 + 4A)}{4} x_3^2 + \frac{12c + 1}{4} (2x_2 + x_3)^2 \right).$$

Világos, hogy ha $1 \leq |I(x_2, x_3, x_4)| < A$ teljesülne, akkor az első két tényező alapján az $1 \leq (2x_2 + x_3)^2 < A$ és $1 \leq x_3^2 < A$ egyenlőtlenségek állnának fenn. A harmadik tényező értékének vizsgálatához írjuk fel azt $Q_3 = \frac{12c+1}{4}((2x_2 + x_3)^2 - x_3^2) - Ax_3^2$ alakban.

- Ha $(2x_2 + x_3)^2 = x_3^2$, akkor $|Q_3| = Ax_3^2 \geq A$.
- Ha $(2x_2 + x_3)^2 > x_3^2$, akkor $(2x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \geq 3$, mivel két különböző pozitív négyzetszám különbségéről van szó. Így $Q_3 > \frac{12c+1}{4} \cdot 3 - A^2 > A$ a c paraméterre vonatkozó kezdeti feltétel miatt.
- Ha $(2x_2 + x_3)^2 < x_3^2$, akkor $Q_3 < -A$, tehát $|Q_3| > A$.

Ezzel beláttuk, hogy az $1 \leq |I(x_2, x_3, x_4)| < A$ egyenlőtlenségnek nincs egész megoldása.

Ugyanezt a gondolatmenetet végigkövetve adódik, hogy az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm A$ egyenlet már megoldható, minden egész megoldására az $x_4 = 0$ és $(2x_2 + x_3)^2 = x_3^2 = 1$ egyenlőségeknek kell teljesülniük. Tehát az index forma egyenlet összes megoldása $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$.

II. Ha $A \not\equiv 0 \pmod{3}$, akkor a $(12X + 7)(36X + 21 + 4A)$ polinom primitív, diszkriminánsa nem 0, így a 2.4. Lemma alapján $3(12c+7)(36c+21+4A)$ végtelen sok c természetes szám esetén négyzetmentes. Feltehető, hogy $c > \frac{A+A^2}{27} - \frac{7}{12}$. Ezekre a c természetes számokra tekintsük az

$$L_c = \mathbb{Q} \left(\sqrt{-(36c + 21)}, \sqrt{-(36c + 21 + 4A)} \right)$$

teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtesteket. Most $m = -(36c + 21) \equiv 3 \pmod{4}$, $n = -(36c + 21 + 4A) \equiv 3 \pmod{4}$, és így $d = 1$, $m_1 = -(36c + 21)$, $n_1 = -(36c + 21 + 4A)$.

Az előző rész gondolatait felhasználva megmutatható, hogy az L_c számtestek testindexe szintén 1, minimális indexe A , az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm A$ index forma egyenlet összes megoldása pedig $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$. Ezzel $a = 1$ esetén bizonyítottuk tételünket.

A következőkben a testindex többi lehetséges értékére is megadjuk a testcsaládokat, amelyekkel állításaink igazolhatóak. A testindex, az egész bázis, valamint a hozzá tartozó index forma minden esetben rendre a 2.3. Lemma, a 2.1. Lemma és a 2.2. Lemma segítségével határozható meg, továbbá az $1 \leq |I(x_2, x_3, x_4)| < A$ egyenlőtlenség megoldhatatlansága, illetve az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm A$ index forma egyenlet megoldhatósága is a fentiekhez hasonlóan mutatható meg.

$a = 3$ esetén: Legyen A egy 3-mal osztható természetes szám. Ekkor a

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{-(12c+5)}, \sqrt{-(12c+5+4A)}\right)$$

teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek testindexe 3, minimális indexe A (feltéve, hogy $(12c+5)(12c+5+4A)$ négyzetmentes és $c > \frac{A+A^2}{9} - \frac{5}{12}$ teljesül).

$a = 2$ esetén: Legyen A egy 4-gyel osztható természetes szám.

I. Ha $A \not\equiv 2 \pmod{3}$, akkor a

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{(24c+19)(24c+19+A)}, \sqrt{-(24c+19+A)}\right)$$

teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek testindexe 2, minimális indexe A (feltéve, hogy $(24c+19)(24c+19+A)$ négyzetmentes és $c > \max\left\{\frac{A}{8} - \frac{19}{24}, \frac{A+A^2}{72} - \frac{19}{24}\right\}$ teljesül).

II. Ha $A \not\equiv 0 \pmod{3}$, akkor a

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{(72c+3)(72c+3+A)}, \sqrt{-(72c+3+A)}\right)$$

teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek testindexe 2, minimális indexe A (feltéve, hogy $(24c+1)(72c+3+A)$ négyzetmentes és $c > \max\left\{\frac{A}{24} - \frac{1}{24}, \frac{A+A^2}{216} - \frac{1}{24}\right\}$ teljesül).

$a = 4$ esetén: Legyen A egy 8-cal osztható természetes szám.

I. Ha $A \not\equiv 2 \pmod{3}$, akkor a

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{(24c+7)(24c+7+A)}, \sqrt{-(24c+7+A)}\right)$$

teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek testindexe 4, minimális indexe A (feltéve, hogy $(24c+7)(24c+7+A)$ négyzetmentes és $c > \frac{A+A^2}{72} - \frac{7}{24}$ teljesül).

II. Ha $A \not\equiv 0 \pmod{3}$, akkor a

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{(72c+15)(72c+15+A)}, \sqrt{-(72c+15+A)}\right)$$

teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek testindexe 4, minimális indexe A (feltéve, hogy $(24c+5)(72c+15+A)$ négyzetmentes és $c > \frac{A+A^2}{216} - \frac{5}{24}$ teljesül).

$a = 6$ esetén: Legyen A egy 12-vel osztható természetes szám. Ekkor a

$$\mathbb{Q} \left(\sqrt{(24c+11)(24c+11+A)}, \sqrt{-(24c+11+A)} \right)$$

teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek testindexe 6, minimális indexe A (feltéve, hogy $(24c+11)(24c+11+A)$ négyzetmentes és $c > \frac{A+A^2}{72} - \frac{11}{24}$ teljesül).

$a = 12$ esetén: Legyen A egy 24-gyel osztható természetes szám. Ekkor a

$$\mathbb{Q} \left(\sqrt{(24c+23)(24c+23+A)}, \sqrt{-(24c+23+A)} \right)$$

teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek testindexe 12, minimális indexe A (feltéve, hogy $(24c+23)(24c+23+A)$ négyzetmentes és $c > \frac{A+A^2}{72} - \frac{23}{24}$ teljesül).

Végül megjegyezzük, hogy $a = 3$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$, míg páros a esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(1, 0, 2), \pm(1, -2, 2)$ az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm A$ index forma egyenlet összes megoldása. \square

Megjegyzés. A tétel második részében a nem minden A többszöröse esetén létezik végtelen sok teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest, amelynek testindexe a és minimális indexe A . A 2.6. Tételből következik ugyanis, hogy csak véges sok olyan teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest van, amelynek 2 a testindexe és 2, 6, illetve 10 a minimális indexe, továbbá nincs olyan teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest, amelynek a testindexe és a minimális indexe egyaránt 4 vagy 6.

3. Tiszta negyedfokú számtestek

Ebben a fejezetben a négyzetmentes paraméterű tiszta negyedfokú számtestek minimális indexét vizsgáljuk, továbbá a teljesen komplex esetben a minimális indexű elemeket is megadjuk.

3.1. Monogenitással kapcsolatos korábbi eredmények

Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-4\}$ negyedikhatvány-mentes egész szám, ami nem négyzet-szám. Ha ϑ gyöke az $X^4 - m$ irreducibilis polinomnak, akkor a $K_m = \mathbb{Q}(\vartheta)$ algebrai számtestet *tiszta negyedfokú számtestnek* nevezzük, melyre a továbbiakban a $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ jelölést használjuk.

T. Funakura [25] megadta a tiszta negyedfokú számtestek egy egész bázisát, a diszkriminánsukat és az egész bázishoz tartozó index formát is. Igazolta, hogy K_m testindexe 1 vagy 2, ez utóbbi érték pontosan az $m \equiv 1 \pmod{16}$ esetben fordul elő. Belátta azt is, hogy az összes lehetséges m értékre tekintve a K_m számtestek minimális indexeinek halmazát, az felülről nem korlátos. Szükséges és elégséges feltételeket adott a tiszta negyedfokú számtestek monogenitására, valamint meg is határozta a hatvány egész bázist generáló elemeket. Megjegyezzük azonban, hogy a monogenitás feltételét bizonyos diofantoszi egyenletek megoldhatóságához, a generátorelemek leírását pedig azok feltételezett megoldásaihoz kötötte, $m > 0$ esetén például binom Thue-egyenletekhez.

Y. Motoda [63] új bizonyítást adott T. Funakura egész bázisra és diszkriminánsra vonatkozó tételeire. A tiszta negyedfokú számtestek egy egész bázisa és diszkriminánsa J. G. Huard, B. K. Spearman és K. S. Williams [45] másodfokú résztesttel rendelkező negyedfokú számtestekre vonatkozó, általánosabb eredménye alapján is meghatározható.

A fejezet további részében csak olyan K_m tiszta negyedfokú számtestekkel foglalkozunk, ahol m négyzetmentes.

Binom Thue-egyenletekkel kapcsolatos korábbi eredményeket felhasználva Gaál I. és Remete L. [33] kiszámították K_m hatvány egész bázist generáló elemeit bizonyos kis és speciális négyzetmentes m értékek esetén, melyek

teljesítik az $m \equiv 2$ vagy $3 \pmod{4}$ kongruenciát.

Később Gaál I. és Remete L. [34] legfeljebb kilencedfokú tiszta számtestek egész bázisait és monogenitását vizsgálták. Olyan négyzetmentes m értékek esetén, melyekre $m \not\equiv 9 \pmod{16}$, teljeskörűen leírták a K_m tiszta negyedfokú számtestek monogenitását (lásd még T. Funakura előbb említett eredményét). A kimaradó eset kapcsán az alábbi sejtést fogalmazták meg: Ha m négyzetmentes és $m \equiv 9 \pmod{16}$, akkor K_m pontosan akkor monogén, ha $m = 73$ vagy 89 , egyébként pedig K_m minimális indexe 8 . Mint látni fogjuk, a helyzet ennél jóval bonyolultabb, ugyanis nem csak ez a két kivétel van, hanem valószínűleg végtelen sok.

A K_m tiszta negyedfokú számtestek vizsgálatánál négyzetmentes m esetén a következő három esetet különböztetjük meg:

1. eset: $m \equiv 2$ vagy $3 \pmod{4}$
2. eset: $m \equiv 1 \pmod{8}$
3. eset: $m \equiv 5 \pmod{8}$

Az alábbi lemmában összefoglaljuk a négyzetmentes paraméterű tiszta negyedfokú számtestek egy egész bázisát és a hozzá tartozó index formát.

3.1. Lemma. (T. Funakura [25]; lásd még [34, 63])

Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ négyzetmentes egész szám, ϑ gyöke az $X^4 - m$ polinomnak és $K_m = \mathbb{Q}(\vartheta)$. Ekkor K_m egy egész bázisa:

- 1. esetben: $(1, \vartheta, \vartheta^2, \vartheta^3)$
- 2. esetben: $(1, \vartheta, \frac{1+\vartheta^2}{2}, \frac{1+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3}{4})$
- 3. esetben: $(1, \vartheta, \frac{1+\vartheta^2}{2}, \frac{\vartheta+\vartheta^3}{2})$

A fenti egész bázishoz tartozó index forma minden esetben

$$I(X_2, X_3, X_4) = Q_1(X_2, X_4) \cdot (c_1 Q_1(X_2, X_4)^2 + c_2 m Q_2(X_2, X_3, X_4)^2)$$

alakú, ahol:

- 1. esetben:

$$\begin{aligned} Q_1(X_2, X_4) &= X_2^2 - mX_4^2, \\ Q_2(X_2, X_3, X_4) &= X_2X_4 - X_3^2, \\ c_1 &= 1, c_2 = 4 \end{aligned}$$

- 2. esetben:

$$Q_1(X_2, X_4) = 2X_2^2 + X_2X_4 - \frac{m-1}{8}X_4^2,$$

$$Q_2(X_2, X_3, X_4) = X_3^2 - X_2X_4 + X_3X_4,$$

$$c_1 = 1, c_2 = 1$$

- 3. esetben:

$$Q_1(X_2, X_4) = X_2^2 + X_2X_4 - \frac{m-1}{4}X_4^2,$$

$$Q_2(X_2, X_3, X_4) = 2X_2X_4 - X_3^2 + X_4^2,$$

$$c_1 = 4, c_2 = 1$$

Megjegyzés. A következő alfejezetben az egyszerűség kedvéért a fenti kvadratikus formákra, valamint egész számok helyettesítése esetén az értékükre is a Q_1 és Q_2 jelölést használjuk.

Egyik tételünk bizonyításában az alábbi, polinomok négyzetmentes értékeivel kapcsolatos állítást is alkalmazni fogjuk.

3.2. Lemma. (A. Granville [36])

Legyen $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$ olyan polinom, melynek diszkriminánsa nem 0, továbbá $\text{Ink}\{p(a) \mid a \in \mathbb{N}\} = 1$. Ha az abc-sejtés igaz, akkor $p(X)$ végtelen sok természetes szám helyettesítése esetén vesz fel négyzetmentes értéket.

3.2. Minimális index

Az alábbi tétel alapján négyzetmentes paraméterű tiszta negyedfokú számtestek minimális indexe 1, 4 vagy 8, és mindhárom érték végtelen sok ilyen számtest esetén fordul elő. Ha azonban a fenti eseteket külön-külön tekintjük, a helyzet korántsem írható le ilyen egyszerűen.

3.3. Tétel. ([7, Theorem 3.1])

Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ négyzetmentes egész szám és $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$.

- *Az 1. esetben K_m minimális indexe 1.*

- A 2. esetben K_m minimális indexe 1 vagy 8. A minimális index végtelen sok m esetén 8, és ha az *abc-sejtés* igaz, akkor szintén végtelen sok m esetén 1. Feltéve azonban, hogy $m < 0$, a minimális index csak $m = -7$ esetén 1.
- A 3. esetben K_m minimális indexe $m = -3$ esetén 1, amúgy 4.

Bizonyítás. A bizonyítást a 2. esetben részletezzük. A 3. esetre vonatkozó állítás hasonlóan, bár egyszerűbben kezelhető, míg az 1. esetben K_m monogenitása a 3.1. Lemma azonnali következménye.

A $(2X + 1)^4 - 8$ polinom diszkriminánsa nem 0, továbbá természetes számok helyettesítése esetén a kapott értékek legnagyobb közös osztója 1. Így a 3.2. Lemma alapján $m = (2c + 1)^4 - 8$ végtelen sok c egész szám esetén négyzetmentes, amennyiben az *abc-sejtés* igaz. Ezen m értékeket tekintve a K_m számtestek a 2. esetbe tartoznak és a minimális indexük 1, ugyanis $(x_2, x_3, x_4) = \pm(c(c + 1), c, 1), \pm(c(c + 1), -c - 1, 1)$ megoldásai az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm 1$ index forma egyenletnek.

Ha $m < 0$, akkor a

$$Q_1 = \frac{1}{8}(4X_2 + X_4)^2 - \frac{m}{8}X_4^2$$

kvadratikus forma pozitív definit, ezért az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm 1$ egyenletből következik, hogy $Q_1 = 1$, és így $(4x_2 + x_4)^2 - mx_4^2 = 8$. Mivel $m \equiv 1 \pmod{8}$, ez csak $m = -7$ esetén fordulhat elő. Ez az m érték viszont $(2c + 1)^4 - 8$ alakú, így a fentiek alapján már tudjuk, hogy ekkor K_m minimális indexe 1.

Megmutatható, hogy a 2. esetbe tartozó tetszőleges $m \neq -7$ esetén a K_m számtest nem tartalmaz $2, \dots, 7$ indexű elemeket. (Megjegyezzük, hogy $m = -7$ esetén léteznek 6 indexű elemek.) Például az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm 4$ index forma egyenlet alapján $(Q_1, Q_1^2 + mQ_2^2) = (\pm 1, \pm 4), (\pm 2, \pm 2)$ vagy $(\pm 4, \pm 1)$. Modulo 8 vizsgálatot követően kapjuk, hogy csak a harmadik lehetőség állhat fenn, méghozzá $m = -15$ és $Q_2 = \pm 1$ esetén. A $Q_1 = \pm 4$ alapján azonban a $(4x_2 + x_4)^2 + 15x_4^2 = 32$ egyenlethez jutunk, amelynek nincs egész megoldása.

8 indexű elemeket viszont minden 2. esetbe tartozó K_m számtest tartalmaz, hiszen $(x_2, x_3, x_4) = \pm(1, 0, 0)$ megoldásai az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm 8$ index forma egyenletnek.

Ha $m \equiv 1 \pmod{16}$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy az index forma értéke mindig páros, ugyanis x_2x_4 párossága esetén Q_1 páros, míg x_2x_4 páratlansága esetén $Q_1^2 + mQ_2^2$ páros. Ekkor tehát K_m minimális indexe csak 8 lehet. Dirichlet jól ismert tétele alapján pedig a fenti kongruenciát végtelen sok m prímszám, következésképpen négyzetmentes egész szám teljesíti. \square

Megjegyzés. A bizonyításban leírt $m = (2c + 1)^4 - 8$ paraméterű K_m számtestek nem adják meg az összes 2. esetben tartozó, 1 minimális indexű tiszta negyedfokú számtestet. Léteznek ugyanis egyéb ilyen számtestcsaládok is, sőt ha az *abc*-sejtés igaz, akkor ezek is végtelen sok számtestből állnak. Például $m = (2c + 1)^4 + 8$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(c(c + 1), c, 1), \pm(c(c + 1), -c - 1, 1)$, $m = \frac{(162c + 19)^4 + 8}{81}$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm((81c + 8)(81c + 11), 3(81c + 8), 9), \pm((81c + 8)(81c + 11), -3(81c + 11), 9)$ megoldásai az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm 1$ index forma egyenletnek. Megjegyezzük, hogy az említett m paraméterek magukba foglalják a Gaál I. és Remete L. sejtésében szereplő $m = 73$ és 89 értékeket is.

A teljesen komplex esetben, azaz a negatív paraméterű tiszta negyedfokú számtestek esetén a Q_1 kvadratikus forma pozitív definitése lehetővé teszi, hogy meg is határozzuk az összes minimális indexű elemet.

3.4. Tétel. ([7, Theorem 3.2])

Legyen $m < 0$ négyzetmentes egész szám, $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$, továbbá jelölje $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ a K_m számtest 3.1. Lemmában megadott egész bázisát. Ekkor a minimális indexű $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 + x_4\omega_4$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$) elemeknek az egész bázisra vonatkozó koordinátái

- $m = -1$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(1, 0, 0)$;
- $m = -3$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(-1, 0, 1), \pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$;
- $m = -7$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$;
- $m = -15$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1), \pm(1, 0, 0)$;
- $m \notin \{-1, -3, -7, -15\}$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(1, 0, 0)$.

Bizonyítás. A tételt olyan $m \neq -7$ esetén bizonyítjuk, ahol $m \equiv 1 \pmod{8}$, a többi paraméterre hasonlóan mutatható meg az állítás.

Ekkor a 3.3. Tétel alapján K_m minimális indexe 8, tehát a minimális indexű elemek meghatározásához az $I(x_2, x_3, x_4) = \pm 8$ index forma egyenletet kell megoldanunk. Az előző bizonyításban láttuk, hogy $m < 0$ esetén a Q_1 kvadratikus forma pozitív definit, így az egyenletből következik, hogy $(Q_1, Q_1^2 + mQ_2^2) = (1, \pm 8), (2, \pm 4), (4, \pm 2)$ vagy $(8, \pm 1)$.

Az egyes párokat modulo 8 vizsgálva látható, hogy az első és a harmadik lehetőség nem állhat fenn, a negyedik pár pedig csak egyetlen négyzetmentes m esetén lehetséges, ezt az $m = -7$ értéket azonban kizártuk.

A kimaradó második párt tekintve $Q_1 = 2$ alapján a $(4x_2 + x_4)^2 - mx_4^2 = 16$ egyenlőséghez jutunk. Mivel $m \leq -15$, ez pontosan akkor áll fenn, ha $x_4 = 0$, $x_2 = \pm 1$, illetve ha $m = -15$, $x_4 = \pm 1$, $x_2 = 0$. Felhasználva, hogy $Q_1^2 + mQ_2^2 = \pm 4$ csak $Q_2 = 0$ esetén teljesülhet, rendre $x_3 = 0$, valamint $x_3 \in \{0, \pm 1\}$ adódik, ahol az utóbbi esetben x_3 és x_4 előjele különböző.

Összegezve tehát $(x_2, x_3, x_4) = \pm(1, 0, 0)$ mindig megoldásai a fenti index forma egyenletnek, míg $m = -15$ esetén további megoldások az $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$. \square

II. rész

Leszámláló kombinatorikai vizsgálatok

4. Korlátozott r -Stirling-számok

Ebben a fejezetben a korlátozott r -Stirling-számok új tulajdonságait ismeretjük. Kombinatorikus tételeinket követően a korlátozott r -Stirling-számok segítségével képzett korlátozott r -Bell-polinomok gyökeit is vizsgáljuk.

4.1. A korlátozott r -Stirling-számok fogalma

Bizonyos másodrendű differenciálegyenletek megoldásaként H. L. Krall és O. Frink [53] vezették be a Bessel-polinomokat (lásd még [38]), melyek együtthatóit kombinatorikus megközelítésből J. Y. Choi és J. D. H. Smith [16] vizsgálták elsőként. Kombinatorikus tartalommal látták el a Bessel-polinomok átparaméterezett együtthatóit, melyeket Bessel-számoknak neveztek. A Stirling-számokkal való szoros kapcsolatukat jelzi, hogy a szakirodalomban a Bessel-számokat korlátozott Stirling-számokként is említik, a dolgozatban mi ezt a szóhasználatot követjük.

Az $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{\leq 2}$ korlátozott (másodfajú) Stirling-szám az $1, \dots, n$ számok k darab legfeljebb kételemű osztályba történő osztályozásait számlálja össze ($0 \leq k \leq n$). Az osztályozásokat permutációkra, a legfeljebb kételemű osztályokat pedig legfeljebb kettő hosszú, páronként idegen ciklusokra cserélve jutnánk a korlátozott elsőfajú Stirling-számok definíciójához. A legfeljebb kettő hosszú ciklusokba sorolás azonban lényegében megegyezik az elemek legfeljebb kételemű osztályokba történő osztályozásával, ezért nem különböztetünk meg korlátozott első- és másodfajú Stirling-számokat, valamint a másodfajú jelzőt sem használjuk a továbbiakban.

A Stirling-számok korábban ismertetett r -általánosításához hasonlóan G.-S. Cheon, J.-H. Jung és L. W. Shapiro [15] az $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$ korlátozott r -Stirling-számot az $1, \dots, n+r$ elemek $k+r$ darab legfeljebb kételemű osztályba történő r -osztályozásainak számaként értelmezte ($0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$). Világos, hogy $r = 0$ esetén a korlátozott Stirling-számokat kapjuk vissza.

4.2. A korlátozott r -Stirling-számok tulajdonságai

A korlátozott r -Stirling-számok definíciójából azonnal következik, hogy $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ és $n > 2k + r$ esetén $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = 0$. Ha $n \leq 2k + r$, akkor pedig van megfelelő r -osztályozás, amely $2k + r - n$ darab egyelemű és $n - k$ darab kételemű osztályt tartalmaz.

Nyilvánvaló továbbá, hogy $n, r \geq 0$ esetén $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = r^n$ és $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = 1$.

Különböző kombinatorikus gondolatmenetekkel többféle rekurzió is megadható a korlátozott r -Stirling-számokra (lásd [49, 52]), ezekben azonban korlátozott $(r - 1)$ -Stirling-számok is szerepelnek. Most egy olyan rekurziót bizonyítunk, amely csak korlátozott r -Stirling-számokat tartalmaz. (Ez az összefüggés $r = 0$ esetén megtalálható a [44] cikkben.)

4.1. Tétel. ([8, Theorem 2.1])

Ha $1 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$, akkor

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} + (2k+r-n) \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}.$$

Bizonyítás. Az $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$ korlátozott r -Stirling-szám az $1, \dots, n+1+r$ elemek $k+r$ darab egy- vagy kételemű osztályba történő r -osztályozásait számlálja össze.

Ha az $n+1$ egyelemű osztályban van, akkor a többi n darab nem-kitüntetett és r darab kitüntetett elemet soroljuk $k-1+r$ darab egy- vagy kételemű osztályba, amire $\left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$ lehetőségünk van.

Ha az $n+1$ kételemű osztályban van, akkor a többi $n+r$ darab elemet $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$ féleképpen tehetjük $k+r$ darab legfeljebb kételemű osztályba. Ha $n > 2k+r$,

akkor ez a korlátozott r -Stirling-szám 0-val egyenlő, míg $n \leq 2k + r$ esetén az $n + 1$ elhelyezhető a $2k + r - n$ darab egyelemű osztály bármelyikében. \square

A következő tétel függőleges rekurziót ad a korlátozott r -Stirling-számokra.

4.2. Tétel. ([8, Theorem 2.2])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$, akkor

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = \sum_{j=k}^n (2k+r+1-j)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás során feltehetjük, hogy $n \leq 2k + r + 1$, ugyanis ellenkező esetben a tételben szereplő egyenlőség mindkét oldala 0-val egyenlő.

Tekintsük az $1, \dots, n + 1 + r$ elemek $k + 1 + r$ darab legfeljebb kételemű osztályba történő r -osztályozásait. Ezek száma $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$.

Most összeszámoljuk a fenti r -osztályozásokat egy másik módon. Legyen $n + 1 - j$ az osztályok maximumai közül a legkisebb ($j = k, \dots, n$). Tegyük be először ezt az elemet egy osztályba. Ekkor a j darab $(n + 1 - j)$ -nél nagyobb nem-kitüntetett és r darab kitüntetett elem a többi $k + r$ darab legfeljebb kételemű osztályba kerül, melyek mindegyikében elhelyezünk közülük legalább egyet. Ezt $\left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$ -féleképpen tehetjük meg. (Megjegyezzük, hogy $j = n = 2k + r + 1$ esetén $\left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = 0$.)

Jelenleg $2k + r + 1 - j$ darab egyelemű osztályunk van. Így az $n - j$ darab $(n + 1 - j)$ -nél kisebb elemet $(2k + r + 1 - j)^{n-j}$ -féleképpen helyezhetjük el különböző egyelemű osztályokban.

Tehát az összes elem osztályokba sorolására $\sum_{j=k}^n (2k+r+1-j)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$ lehetőségünk van. \square

A korlátozott r -Stirling-számok polinomos azonosságai az eltolt süllyedő és a 2 differenciájú süllyedő faktoriálisok, illetve az eltolt emelkedő és a 2 differenciájú emelkedő faktoriálisok között teremtenek kapcsolatot.

4.3. Tétel. ([8, Theorem 2.3])

Ha $n, r \geq 0$, akkor

$$(x + r)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} (x|2)^k,$$

$$(x - r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} (x|2)^{\bar{k}}.$$

Bizonyítás. A második azonosság az elsőből $-x$ helyettesítéssel adódik.

Az első egyenlőség igazolásához tekintsük az $1, \dots, n + r$ elemek egy- vagy kételemű osztályokba történő r -osztályozásait, ahol a nem-kitüntetett osztályok legnagyobb elemeit színezzük két színezési eljárással. Az elsődleges színezés során kétféle színnel színezzük őket úgy, hogy különböző elemek elsődleges színei megegyezhetnek. A másodlagos színezésnél c darab színt használunk ($c \geq n$), és különböző elemek nem kaphatják ugyanazt a másodlagos színt.

Ha k darab nem-kitüntetett osztályunk van ($k = 0, \dots, n$), akkor az elemeket $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$ -féleképpen r -osztályozhatjuk legfeljebb kételemű osztályokba. Ezután k darab elemet színezzük elsődlegesen és másodlagosan, amit $2^k c^k = (2c|2)^k$ -féleképpen tehetünk meg. Tehát a színezésekkel kiegészített r -osztályozások száma $\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} (2c|2)^k$.

A következőkben összeszámoljuk ezeket másképpen is. Először tegyük be a kitüntetett elemeket különböző osztályokba, majd csökkenő sorrendben helyezzük el a nem-kitüntetett elemeket és ahol szükséges, egyúttal színezzük is. Tegyük fel, hogy j darab nem-kitüntetett elemet már osztályokba soroltunk ($j = 0, \dots, n - 1$). Ezek közül jelölje t a nem-kitüntetett osztályokba került elemek számát, $2s$ pedig a kételemű nem-kitüntetett osztályokban állókat. Így eddig $t - 2s$ darab elem van nem-kitüntetett egyelemű osztályban és $j - t$ darab nem-kitüntetett elem került kitüntetett osztályba.

A következő elem, az $n - j$ kerülhet a többi $r - (j - t)$ darab kitüntetett osztály bármelyikébe, bármely nem-kitüntetett egyelemű osztályba vagy nyithat egy új osztályt. A csökkenő sorrend miatt az $n - j$ csak az utolsó esetben kap színt, elsődlegesen kétféleképpen színezzük, míg a c darab másodlagos

szín közül a már felhasznált $t - s$ darab kivételével bármelyiket kaphatja. Összesen tehát $r - (j - t) + t - 2s + 2(c - (t - s)) = 2c + r - j$ lehetőségünk van az $n - j$ elhelyezésére és szükség szerinti színezésére.

Így az összes elemet $\prod_{j=0}^{n-1} (2c + r - j) = (2c + r)^n$ -féleképpen r -osztályozhatjuk és színezhethetjük. \square

Egyszerű kombinatorikus ötlettel igazolható az

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = \sum_{j=0}^{\min\{n-k, r\}} \binom{r}{j} n^{2n-2k-j} \frac{1}{2^{n-k-j} (n-k-j)!}$$

explicit formula a korlátozott r -Stirling-számokra ($0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$), amely ekvivalens a [15] cikkben található összefüggéssel.

S. L. Yang és Z. K. Qiao [81] a klasszikus másodfajú Stirling-számoknál megszokott alakú explicit formulát bizonyított a korlátozott Stirling-számokra vonatkozóan. Az alábbi tételben ezt általánosítjuk és a fenti szerzőktől eltérően, a szitaformula segítségével igazoljuk.

4.4. Tétel. ([8, Theorem 2.4])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$, akkor

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = \frac{1}{2^k k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (2(k-j) + r)^n.$$

Bizonyítás. Legyen $A = \{1, \dots, n + r\}$, ahol $n + 1, \dots, n + r$ kitüntetett elemek, B pedig egy $k + r$ elemű halmaz. Számoljuk össze kétféleképpen az alábbi feltételeket teljesítő, színezéssel kiegészített $A \rightarrow B$ szürjektív függvényeket:

- minden B -beli elem legfeljebb két A -beli elemnek a képe,
- az A -beli kitüntetett elemek képei páronként különbözőek,
- azok a B -beli elemek, melyek nem képei egyik A -beli kitüntetett elemnek sem, két szín valamelyikével színezettek.

Egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező szürjektív függvény esetén a B -beli elemek ősképeinek halmaza megadja A -nak egy $k + r$ darab egy- vagy két-elemű osztályba történő r -osztályozását. Minden ilyen r -osztályozás $(k + r)!$ függvényből származik, továbbá a nem-kitüntetett osztályokhoz tartozó B -beli elemek 2^k -féleképpen színezhetőek. Tehát a feltételeket teljesítő $A \rightarrow B$ szürjektív függvények száma $2^k(k + r)! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$.

Jelölje X azoknak a színezéssel ellátott $A \rightarrow B$ függvényeknek a halmazát, melyekre a fenti három tulajdonság teljesül, és határozzuk meg X elemszámát. Világos, hogy az A -beli kitüntetett elemekhez $(k + r)^l$ -féleképpen választhatunk képeket. Tegyük fel, hogy ezt követően az első l darab nem-kitüntetett elemnek már megvan a képe ($l = 0, \dots, n - 1$). Jelölje t ezek közül azoknak a számát, melyek képei nem egyeznek meg egyik kitüntetett elem képével sem, továbbá tegyük fel, hogy ezen t elem közül $2s$ darabhoz páronként ugyanazt a B -beli elemet rendeltük. A következő elem, az $l + 1$ képe lehet olyan B -beli elem, amely

- már képe egy kitüntetett elemnek, viszont más korábbi A -beli elemnek nem. Az ilyen B -beli elemek száma $r - (l - t)$.
- már képe pontosan egy korábbi nem-kitüntetett elemnek, viszont kitüntetett elemnek nem. Az ilyen B -beli elemek száma $t - 2s$. Megjegyezzük, hogy ezek a B -beli elemek már színezettek.
- nem képe még egyik A -beli elemnek sem. Az ilyen B -beli elemek száma $k - (t - s)$, és a választott elemet egyúttal színezzük is a két szín valamelyikével.

Így az $l + 1$ esetén $r - (l - t) + t - 2s + 2(k - (t - s)) = 2k + r - l$, az összes nem-kitüntetett elemet tekintve pedig $\prod_{l=0}^{n-1} (2k + r - l) = (2k + r)^n$ lehetőségünk van a képek megválasztására és esetleges színezésére. Tehát $|X| = (k + r)^r (2k + r)^n$.

Jelölje Y_i azoknak az X -beli függvényeknek a halmazát, ahol a B halmaz i -edik eleme nem áll elő egyik A -beli elem képeként sem ($i = 1, \dots, k + r$). A kitüntetett elemek képeihez legalább r darab B -beli elemet biztosan felhasználunk, így k -nál több Y_i halmaz metszete az üres halmaz. A fentiekhez hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy j darab ($j = 1, \dots, k$) ilyen Y_i halmaz metszetének elemszáma pedig $(k + r - j)^r (2(k - j) + r)^n$.

Tehát a fenti három feltételt teljesítő, színezéssel ellátott $A \rightarrow B$ szürjektív függvények száma a szitaformula felhasználásával

$$|X \setminus (Y_1 \cup \dots \cup Y_{k+r})| = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k+r}{j} (k+r-j)^x (2(k-j)+r)^n.$$

Végezetül a szürjektív függvények számára kapott két értékből egyszerű számolással adódik a tételben szereplő formula. \square

D. Stenlund [78] olyan polinomokat vizsgált, melyek együtthatói elsőfajú és másodfajú Stirling-számok szorzatai. Egy speciális helyettesítéssel ezek előjeles korlátozott Stirling-számokra vezetnek, amely észrevétel már az [57, 81] cikkekben is megjelent. Ezt az eredményt általánosítjuk és kizárólag polinomos azonosságokat használó bizonyítást adunk rá.

$0 \leq k \leq n$ és $r, s \geq 0$ esetén az elsőfajú r -Stirling-számok és a másodfajú s -Stirling-számok segítségével értelmezzük a

$$p_{n,k,r,s}(x) = \sum_{j=k}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}_s x^{j-k}$$

polinomot.

Világos, hogy

$$p_{n,k,r,s}(0) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r,$$

továbbá a [11, 12], illetve a [73] publikációk egy-egy eredménye szerint

$$p_{n,k,r,s}(-1) = \binom{n}{k} (r-s)^{\overline{n-k}},$$

valamint ha $r+s$ páros, akkor

$$p_{n,k,r,s}(1) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{r+s}{2}}.$$

Megmutatjuk, hogy -2 helyettesítésével a $p_{n,k,r,s}(x)$ polinomok előjeles korlátozott $(2s-r)$ -Stirling-számokat adnak.

4.5. Tétel. ([8, Theorem 2.5])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $0 \leq r \leq 2s$, akkor

$$p_{n,k,r,s}(-2) = (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{2s-r}^{\leq 2}.$$

Bizonyítás. Egyrészt, a 4.3. Tétel második állítása alapján

$$(x - (2s - r))^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{2s-r}^{\leq 2} (x|2)^{\bar{k}}.$$

Másrészt, az elsőfajú r -Stirling-számok, valamint a másodfajú s -Stirling-számok polinomos azonosságait (lásd [11, 12]) használva

$$\begin{aligned} ((x - 2s) + r)^{\bar{n}} &= \sum_{j=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r (x - 2s)^j = \sum_{j=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r 2^j \left(\frac{x}{2} - s \right)^j \\ &= \sum_{j=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r 2^j \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s \left(\frac{x}{2} \right)^{\bar{k}} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s (-2)^{j-k} (x|2)^{\bar{k}}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\sum_{j=k}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s (-2)^{j-k} = (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{2s-r}^{\leq 2}.$$

□

J.-H. Jung, Mező I. és J. L. Ramírez [49] igazolták, hogy másodfajú Stirling-számokat, illetve másodfajú r -Stirling-számokat kombinálva korlátozott r -Stirling-számokkal rendre 2-színes másodfajú r -Whitney-számokhoz és másodfajú $2r$ -Whitney-számokhoz jutunk. Ezt az eredményt általánosítjuk és kombinatorikus bizonyítást adunk rá.

4.6. Tétel. ([8, Theorem 2.6])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s^{\leq 2} = W_{2,r+s}(n, k).$$

Bizonyítás. Tekintsük az $1, \dots, n + r + s$ elemek 2-színű Whitney-színezett $(r + s)$ -osztályozásait $k + r + s$ darab osztályba, ahol a nem-kitüntetett osztályokban a legnagyobb elemeket is színezzük ugyanezzel a két színnel. Ezek száma $2^k W_{2,r+s}(n, k)$.

Minden ilyen 2-színű kiterjesztett Whitney-színezett $(r + s)$ -osztályozáshoz képezhetőek alosztályok a következőképpen:

- Egy $n + r + 1, \dots, n + r + s$ valamelyikét tartalmazó kitüntetett osztályból a kitüntetett elem törlésével kapunk egy alosztályt (üres halmazt nem tekintünk alosztálynak).
- Egy $n + 1, \dots, n + r$ valamelyikét tartalmazó kitüntetett osztály egy alosztályt alkot.
- Egy olyan nem-kitüntetett osztály, amelyben minden elem azonos színű, egy alosztályt alkot.
- Egy olyan nem-kitüntetett osztályból, amelyben mindkét színű elem előfordul, a színek alapján lesz két alosztály (az egyik színűekből egy alosztály, a másik színűekből egy másik).

Világos, hogy az alosztályok halmaza az $1, \dots, n + r$ elemeknek egy r -osztályozását adja, továbbá az alosztályok száma legalább $k + r$ és nem lehet nagyobb, mint $n + r$.

Az alosztályok segítségével is összeszámoljuk az $1, \dots, n + r + s$ elemek 2-színű kiterjesztett Whitney-színezett, $k + r + s$ darab osztályba történő $(r + s)$ -osztályozásait. Először az $1, \dots, n + r$ elemeket r -osztályozzuk $j + r$ darab alosztályba ($j = k, \dots, n$). Az $n + 1, \dots, n + r$ elemeket tartalmazó alosztályok egyúttal eredeti kitüntetett osztályok is. A többi j darab alosztályt az $n + r + 1, \dots, n + r + s$ kitüntetett elemekkel s -osztályozzuk $k + s$ darab osztályba úgy, hogy egy alosztály legfeljebb egy másik alosztállyal vagy egy kitüntetett elemmel kerülhet egy osztályba.

- Ha egy kitüntetett elem egyelemű osztályt alkot vagy egy alosztállyal kerül egy osztályba, akkor ebből egy eredeti kitüntetett osztályhoz jutunk.
- Ha egy alosztály egyelemű osztályban van, akkor ez egy eredeti osztály, az elemeit pedig kétféleképpen színezzük egységesen.
- Ha egy osztályban két alosztály szerepel, akkor azok egyesítésével kapunk egy eredeti osztályt, amelyben az egyik alosztály elemeinek egységes szí-

néről kétféleképpen dönthetünk, a másik alosztály elemei a másik szint kapják.

Ezáltal az $1, \dots, n+r+s$ elemek egy 2-színű kiterjesztett Whitney-színezett, $k+r+s$ darab osztályba történő $(r+s)$ -osztályozásához jutunk, melyek száma így $2^k \sum_{j=k}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s^{\leq 2}$. \square

4.3. Korlátozott r -Bell-polinomok

A jól ismert Bell-polinomok együtthatói rögzített felső paraméterű másodfajú Stirling-számok, így természetes módon értelmezhetőek a korlátozott r -Bell-polinomok a korlátozott r -Stirling-számok segítségével.

$n, r \geq 0$ esetén a

$$B_{n,r}^{\leq 2}(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k$$

polinomot az n -edik *korlátozott r -Bell-polinom*nak nevezzük. Ezeket a polinomokat J.-H. Jung, Mező I. és J. L. Ramírez [49] vezették be, de megjegyezzük, hogy $r=0$ esetén már F. L. Miksa, L. Moser és M. Wyman [60] is vizsgálta őket.

A korlátozott r -Stirling-számok rekurziójának felhasználásával a korlátozott r -Bell-polinomokra is megadható rekurzió.

4.7. Tétel. ([8, Theorem 3.1])

Ha $n, r \geq 0$, akkor

$$B_{n+1,r}^{\leq 2}(x) = (x+r-n)B_{n,r}^{\leq 2}(x) + 2x(B_{n,r}^{\leq 2}(x))'.$$

Bizonyítás. Az állítás $n=0$ esetén egyszerű számolással adódik, így feltehetjük, hogy $n \geq 1$. Ekkor a 4.1. Tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} B_{n+1,r}^{\leq 2}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k + r^{n+1} + x^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k + \sum_{k=1}^n (2k+r-n) \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k + r^{n+1} + x^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^{k+1} + 2 \sum_{k=1}^n k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k + (r-n) \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k \\
&\quad + r^{n+1} + x^{n+1} \\
&= x \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k + 2x \sum_{k=1}^n k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^{k-1} + (r-n) \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k \\
&= (x+r-n)B_{n,r}^{\leq 2}(x) + 2x (B_{n,r}^{\leq 2}(x))'.
\end{aligned}$$

□

J.-H. Jung, Mező I. és J. L. Ramírez [49] foglalkozott a korlátozott r -Bell-polinomok gyökeinek vizsgálatával is. Belátták, hogy $B_{n,0}^{\leq 2}(x)$ minden gyöke valós és nempozitív ($n \geq 1$), tetszőleges $r \geq 0$ esetén viszont ugyanezt a korlátozott r -Bell-polinomok gyökeire csak sejtésként fogalmazták meg. A következőkben ezt a sejtést igazoljuk.

4.8. Tétel. ([8, Theorem 3.2])

Ha $n \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinom minden gyöke valós és nempozitív.

Bizonyítás. Könnyen meggondolható, hogy a korlátozott r -Stirling-számok definíciója megfogalmazható gráfelméleti nézőpontból is (lásd [15], $r = 0$ esetén [44]). Tekintsük azt a teljes $(n+1)$ -osztatú gráfot, amelynek n darab egyelemű és egy darab r elemű csúcsosztálya van. Ebben a gráfban $0 \leq k \leq n$ esetén az $n-k$ elemű párosítások száma $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$.

Ismert, hogy egy hurokmentes gráf párosítás-generátorpolinomjának minden gyöke valós és negatív (lásd például [56]). Mivel $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ fordított polinomja éppen a fenti gráf párosítás-generátorpolinomja, ezért $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ gyökei valósak és nempozitívak, hiszen a párosítás-generátorpolinom gyökeinek reciprocai, illetve esetleg a 0. □

Megjegyzés. A korlátozott r -Stirling-számok bizonyításbeli megközelítése érdekes hasonlóságot mutat az r -Lah-számoknak a [74] cikkben található gráfelméleti interpretációjával, mely szerint a $K_{n,n+2r-1}$ teljes páros gráfban az $n-k$ elemű párosítások száma $\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \rfloor_r$.

Newton tételének (lásd például [77]) felhasználásával az előző tétel következményeként kapjuk, hogy rögzített felső paraméter esetén a korlátozott r -Stirling-számok sorozata log-konkáv és unimodális. Ugyanez $r = 0$ esetén már a [16, 44, 49] cikkekben is megjelent.

4.9. Következmény. ([8, Corollary 3.3])

Ha $n \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor az $\left(\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}_r^{\leq 2}\right)_{k=0}^n$ sorozat log-konkáv és unimodális.

A korlátozott r -Stirling-számok 0 értékeiről szóló tulajdonsága alapján egyszerűen megadható, hogy a korlátozott r -Bell-polinomoknak hányosoros gyöke a 0. A gyökökre vonatkozóan a fentiekén túl egy erősebb állítást sejtünk, mely szerint a negatív gyökök mind egyszeresek.

4.10. Sejtés. ([8, Conjecture 3.4])

Legyen $n \geq 1$ és $r \geq 0$. Ha $n \leq r$, akkor a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinom minden gyöke negatív és egyszeres. Ha $n > r$ és

- $n \equiv r \pmod{2}$, akkor a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak $\frac{n-r}{2}$ -szeres gyöke a 0, a többi gyöke negatív és egyszeres,
- $n \not\equiv r \pmod{2}$, akkor a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak $\frac{n-r+1}{2}$ -szeres gyöke a 0, a többi gyöke negatív és egyszeres.

A sejtéssel kapcsolatban az alábbi részeredményt bizonyítjuk.

4.11. Tétel. ([8, Theorem 3.5])

Legyen $n \geq 1$, $r \geq 0$ és $n \equiv r \pmod{2}$. Ha a sejtésben szereplő állítás igaz a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinomra, akkor a $B_{n+1,r}^{\leq 2}(x)$ polinomra is teljesül.

Bizonyítás. A bizonyítás során többször használjuk a 4.7. Tétel alkalmazásával adódó

$$\left(e^{\frac{1}{2}x} x^{\frac{r-n}{2}} B_{n,r}^{\leq 2}(x)\right)' = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} x^{\frac{r-n}{2}-1} B_{n+1,r}^{\leq 2}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

észrevételt.

Először tegyük fel, hogy $n < r$. Ha a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak n darab negatív, egyszeres gyöke van, akkor az $e^{\frac{1}{2}x} x^{\frac{r-n}{2}} B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ függvénynek n darab negatív

zérushelye van, zérushelye a 0 is, továbbá $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{2}x} x^{\frac{r-n}{2}} B_{n,r}^{\leq 2}(x) = 0$. Így a Rolle-tételt alkalmazva az $\left(e^{\frac{1}{2}x} x^{\frac{r-n}{2}} B_{n,r}^{\leq 2}(x) \right)'$ függvénynek van $n+1$ darab negatív zérushelye, melyek a fenti azonosság alapján a $B_{n+1,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak gyökei.

Ha $n = r$ és a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak n darab negatív, egyszeres gyöke van, akkor az $e^{\frac{1}{2}x} B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ függvénynek n darab negatív zérushelye van. Ismét Rolle tételét használva kapjuk, hogy az $\left(e^{\frac{1}{2}x} B_{n,r}^{\leq 2}(x) \right)'$ függvénynek van n darab negatív zérushelye, melyek a fentiekhez hasonlóan a $B_{n+1,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak gyökei. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben a 0 is gyöke a $B_{n+1,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak.

Végül tegyük fel, hogy $n > r$. Ha a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak az $\frac{n+r}{2}$ darab 0-tól különböző gyöke negatív és egyszeres, akkor ugyanez az $\frac{n+r}{2}$ darab negatív szám az $x^{\frac{r-n}{2}} B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak is egyszeres gyöke, így az $e^{\frac{1}{2}x} x^{\frac{r-n}{2}} B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ függvénynek $\frac{n+r}{2}$ darab negatív zérushelye van. Így a Rolle-tételt alkalmazva az $\left(e^{\frac{1}{2}x} x^{\frac{r-n}{2}} B_{n,r}^{\leq 2}(x) \right)'$ függvénynek is van $\frac{n+r}{2}$ darab negatív zérushelye, melyek a bizonyítás elején található összefüggés alapján a $B_{n+1,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak gyökei. Ezekon kívül gyöke a 0 is $\left(\frac{n-r}{2} + 1 \right)$ -szeres multiplicitással. \square

5. Jacobi–Whitney-számok

A fejezetben a Jacobi–Stirling-számok általánosításaként új típusú kombinatorikus számokat definiálunk. Az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok bevezetése után több tulajdonságukat is kombinatorikusan igazoljuk, majd további állítások bizonyításához szükségünk lesz az úgynevezett átmeneti együtthatók, valamint a Jacobi–Dowling-polinomok vizsgálatára.

5.1. A Jacobi–Whitney-számok fogalma

W. N. Everitt, L. L. Littlejohn és R. Wellman [23] újfajta Stirling-típusú számokat definiáltak, az úgynevezett másodfajú Legendre–Stirling-számokat. Ezek általánosításaként néhány év múlva K. H. Kwon és G. J. Yoon szerzőkkel közösen [22] értelmezték a másodfajú Jacobi–Stirling-számokat. Mindkét változatot mély analízisbeli probléma, a klasszikus másodrendű Legendre-, illetve Jacobi-differenciálkifejezések kompozíciós hatványainak spektrálmélete kapcsán vezették be. A [2, 22] cikkekben ezeknek a számoknak az elsőfajú változatait is értelmezték (lásd még [3, 21]).

G. E. Andrews és L. L. Littlejohn [3], E. S. Egge [21], valamint G. E. Andrews, E. S. Egge, W. Gawronski és L. L. Littlejohn [1] a Legendre–Stirling- és Jacobi–Stirling-számokat kombinatorikus nézőpontból is vizsgálták (lásd még [35, 61]), viszont az első- és másodfajú esetre egységes kombinatorikus értelmezés nem született. A következőkben olyan interpretációkat adunk meg, melyekben egyszerre jelennek meg permutációk és r -permutációk, illetve osztályozások és r -osztályozások, ezáltal illeszkednek a közönséges Stirling-számok definícióihoz is. Eredményeink azonban nem csak ezeket a kombinatorikus számokat érintik, hanem jóval általánosabbak. Figyelembe véve az r -Stirling-számok korábban említett Whitney-általánosítását, első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számokat definiálunk, amelyek speciális esetként a Jacobi–Stirling-számokat, azok pedig a Legendre–Stirling-számokat adják vissza.

5.1. Definíció. ([9, Definition 2.1])

Legyenek $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$. Egy (π_1, π_2) rendezett párt (n, k) paraméterű m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpárnak nevezünk, ha

- π_1 az $1, \dots, n$ elemek egy m -színes Whitney-színezett 0-permutációja, amely k darab páronként idegen ciklus szorzatára bomlik,
- π_2 az $1, \dots, n + r$ elemek egy m -színes Whitney-színezett r -permutációja, amely $k + r$ darab páronként idegen ciklus szorzataként áll elő,
- a π_1 -ben lévő ciklusok maximumainak halmaza megegyezik a π_2 -beli nem-kitüntetett ciklusok maximumainak halmazával.

Ezen permutációpárok számát jelöli a $jw_{m,r}(n, k)$ m -színes elsőfajú r -Jacobi–Whitney-szám.

Ha $m = 1$, azaz lényegében eltekintünk a színezéstől, akkor az $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r$ elsőfajú r -Jacobi–Stirling-számhoz jutunk, speciálisan $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_1$ pedig elsőfajú Legendre–Stirling-szám.

5.2. Definíció. ([9, Definition 2.2])

Legyenek $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$. Egy (Π_1, Π_2) rendezett párt (n, k) paraméterű m -színes r -Jacobi–Whitney-osztályozáspárnak nevezünk, ha

- Π_1 az $1, \dots, n$ elemek egy k darab osztályba történő, m -színes Whitney-színezett 0-osztályozása,
- Π_2 az $1, \dots, n + r$ elemek egy $k + r$ darab osztályba történő, m -színes Whitney-színezett r -osztályozása,
- a Π_1 -ben lévő osztályok maximumainak halmaza megegyezik a Π_2 -beli nem-kitüntetett osztályok maximumainak halmazával.

Ezeket az osztályozáspárokat számlálja össze a $JW_{m,r}(n, k)$ m -színes másodfajú r -Jacobi–Whitney-szám.

Ha $m = 1$, akkor az $\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}_r$ másodfajú r -Jacobi–Stirling-számot kapjuk, speciálisan $\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}_1$ pedig másodfajú Legendre–Stirling-szám.

5.2. A Jacobi–Whitney-számok tulajdonságai

Ebben az alfejezetben a Jacobi–Whitney-számok tulajdonságait ismertetjük, melyekből $m = 1$, valamint $m = r = 1$ helyettesítésekkel kapjuk a Jacobi–Stirling- és a Legendre–Stirling-számokra vonatkozó megfelelő állításokat.

A definíciókból könnyen adódik, hogy $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén

$$jw_{m,r}(n, 0) = JW_{m,r}(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad jw_{m,r}(n, n) = JW_{m,r}(n, n) = 1.$$

Kombinatorikus ötletekkel a Jacobi–Whitney-számok más speciális értékeit is megkaphatjuk, melyek közül több megtalálható az [1, 3] cikkekben a Legendre–Stirling- és Jacobi–Stirling-számokra vonatkozóan.

5.3. Tétel. ([9, Theorem 2.3])

Ha $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$jw_{m,r}(n, 1) = m^{n-1}(n-1)!(m+r|m)^{\overline{n-1}}, \quad JW_{m,r}(n, 1) = (m(m+r))^{n-1},$$

$$jw_{m,r}(n, n-1) = JW_{m,r}(n, n-1) = m \left(2m \binom{n}{3} + (m+r) \binom{n}{2} \right).$$

Bizonyítás. A tételt csak az elsőfajú Jacobi–Whitney-számokra igazoljuk, a másodfajú esetben hasonlóan bizonyítható.

I. Először az $(n, 1)$ paraméterű (π_1, π_2) m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpárokat számoljuk össze. Az $1, \dots, n$ elemeket π_1 egyetlen ciklusában $(n-1)!$ -féleképpen helyezhetjük el. Az n ciklusmaximum, így nem kap színt, míg a többi elem mindegyikét m színnel színezzhetjük. Tehát a π_1 permutációra $m^{n-1}(n-1)!$ lehetőségünk van.

Az $n+1, \dots, n+r$ kitüntetett elemeket rakjuk be π_2 különböző ciklusai-
ba. Az n a ciklusmaximumokra vonatkozó feltétel miatt π_2 egyetlen nem-
kitüntetett ciklusában áll, és itt sem színezzük. A nála kisebb elemeket csök-
kenő sorrendben soroljuk be π_2 ciklusaiba és szükség szerint színezzük is
őket. Az $n-j$ kerülhet a már korábban elhelyezett j darab nem-kitüntetett
elem bármelyike mögé ($j = 1, \dots, n-1$), ekkor m -féleképpen színezzhetjük,
vagy betehetjük bármely kitüntetett elem mögé, ekkor nem kap színt. Ez
 $\prod_{j=1}^{n-1} (mj+r) = (m+r|m)^{\overline{n-1}}$ lehetőséget jelent π_2 -re.

II. Most tekintsük az $(n, n - 1)$ paraméterű (π_1, π_2) m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpárokat. Ekkor π_1 ciklusfelbontásában $n - 2$ darab 1 hosszú és egy darab 2 hosszú ciklus szerepel, utóbbinak legyen i a kisebbik eleme ($i = 1, \dots, n - 1$). Az i -t m -féleképpen színezzhetjük, mellé pedig rakhatjuk a nála nagyobb $n - i$ darab elem bármelyikét.

A π_2 ciklusfelbontásában is csak egy darab 2 hosszú ciklus szerepel, a többi mind 1 hosszú. Mivel az i a π_2 -ben sem lehet ciklusmaximum, így biztosan a 2 hosszú ciklusba kerül. Ha ez nem-kitüntetett ciklus, akkor az i az m szín valamelyikével színezett, a ciklusában szereplő másik elemet pedig $(n - i)$ -féleképpen választhatjuk. Ha a 2 hosszú ciklus kitüntetett, akkor az i nem kap színt és az r darab kitüntetett elem bármelyike állhat mellette.

A (π_1, π_2) permutációpárra tehát $\sum_{i=1}^{n-1} m(n-i)(m(n-i)+r)$ lehetőségünk van. Egyszerű számolással adódik, hogy ez az összeg egyenlő a tételben szereplő, binomiális együtthatókat tartalmazó formulával. \square

A Jacobi–Whitney-számokra vonatkozó rekurziókat is kombinatorikusan bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy a Legendre–Stirling- és Jacobi–Stirling-számok esetén tételünk az [1, 2, 3, 21] publikációkban szereplő rekurziókat adja vissza, melyeket a kezdeti értékekkel összevetve látható, hogy az általunk definiált számok valóban egybeesnek a már korábban bevezetett elsőfajú, valamint másodfajú Legendre–Stirling- és Jacobi–Stirling-számokkal.

5.4. Tétel. ([9, Theorem 2.4])

Ha $1 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$jw_{m,r}(n+1, k) = jw_{m,r}(n, k-1) + mn(mn+r)jw_{m,r}(n, k),$$

$$JW_{m,r}(n+1, k) = JW_{m,r}(n, k-1) + mk(mk+r)JW_{m,r}(n, k).$$

Bizonyítás. Az elsőfajú Jacobi–Whitney-számok rekurzióját igazoljuk, a másodfajú esetben hasonló a bizonyítás.

Tekintsük az $(n+1, k)$ paraméterű m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpárokat. Ezek száma $jw_{m,r}(n+1, k)$.

Vegyük észre, hogy egy ilyen (π_1, π_2) permutációpár esetén a ciklusmaximumokra vonatkozó feltétel miatt az 1 pontosan akkor fixpontja π_1 -nek, ha π_2 -nek is, és ilyenkor az 1 egyik permutációban sincs színeve.

Ha az 1 fixpontja π_1 -nek és π_2 -nek, akkor törölve a ciklusát mindkettőből, majd a többi elemet eggyel csökkentve egy $(n, k - 1)$ paraméterű (σ_1, σ_2) m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpárhoz jutunk. Egy ilyen pár esetén σ_1 és σ_2 minden elemét eggyel növelve, majd az 1-et mindkét permutációba fixpontként beszúrva pedig egy $(n + 1, k)$ paraméterű permutációpárt kapunk, melyek száma tehát ebben az esetben $jw_{m,r}(n, k - 1)$.

Ha az 1 sem π_1 -nek, sem π_2 -nek nem fixpontja, akkor az 1-et mindkét permutációból törölve, majd a többi elemet eggyel csökkentve egy (n, k) paraméterű (ρ_1, ρ_2) m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpárt kapunk, melyek száma $jw_{m,r}(n, k)$. Egy ilyen pár esetén növeljük ρ_1 és ρ_2 minden elemét eggyel, majd elhelyezzük az 1-et. A ρ_1 permutációban az n darab elem bármelyike mögé berakhatjuk, ekkor színezzük is az m szín valamelyikével. A ρ_2 permutációban az 1-et betehetjük az n darab nem-kitüntetett elem bármelyike mögé, ekkor színt is kap, vagy az r darab kitüntetett elem valamelyike mögé, ekkor nem színezzük. Tehát egy (ρ_1, ρ_2) párból $mn(mn+r)$ -féleképpen konstruálhatunk olyan $(n + 1, k)$ paraméterű permutációpárt, ahol az 1 nem fixpont. \square

A másodfajú Legendre–Stirling- és Jacobi–Stirling-számok függőleges rekurziója megtalálható az [1, 2] cikkekben. Az alábbi tételben nemcsak a másodfajú, hanem az elsőfajú Jacobi–Whitney-számok függőleges rekurzióját is leírjuk, melyekre egyúttal kombinatorikus bizonyítást adunk.

5.5. Tétel. ([9, Theorem 2.5])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$jw_{m,r}(n + 1, k + 1) = \sum_{j=k}^n (mn|m)^{n-j} (mn + r|m)^{n-j} jw_{m,r}(j, k),$$

$$JW_{m,r}(n + 1, k + 1) = \sum_{j=k}^n (m(k + 1))^{n-j} (m(k + 1) + r)^{n-j} JW_{m,r}(j, k).$$

Bizonyítás. Az első állítást igazoljuk, a második hasonlóan bizonyítható.

A $jw_{m,r}(n+1, k+1)$ elsőfajú Jacobi–Whitney-szám az $(n+1, k+1)$ paraméterű (π_1, π_2) m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpárok számát adja meg.

Most összeszámoljuk a fenti permutációpárokat másképpen. Legyen $n+1-j$ a ciklusok maximumai közül a legkisebb ($j = k, \dots, n$). Helyezzük el először ezt π_1 és π_2 egy-egy ciklusában, ahová az $(n+1-j)$ -nél nagyobb elemek már nem kerülhetnek. Így π_1 -ben ezt a j darab elemet k darab ciklusba, π_2 -ben pedig ugyanezt a j darab nem-kitüntetett elemet az r darab kitüntetett elemmel $k+r$ darab ciklusba soroljuk úgy, hogy minden ciklusba kerül legalább egy elem, az elemeket m színnel színezzük Whitney-színezett értelemben és teljesül a ciklusmaximumokra vonatkozó feltétel is. Ezt $jw_{m,r}(j, k)$ -féleképpen tehetjük meg.

Az $(n+1-j)$ -nél kisebb elemeket csökkenő sorrendben, egyszerre soroljuk be π_1 és π_2 ciklusaiba és szükség szerint színezzük is őket. Az $n+1-j-i$ kerülhet π_1 -ben a már elhelyezett $j+i$ darab elem bármelyike mögé ($i = 1, \dots, n-j$) és m -féle színt kaphat. Az $(n+1-j-i)$ -t π_2 -ben szintén berakhatjuk valamelyik nem-kitüntetett elem mögé és színezzük m -féleképpen, vagy tehetjük kitüntetett elem mögé, ekkor nem kap színt. Tehát az $(n+1-j)$ -nél kisebb elemek elhelyezésére és színezésére $\prod_{i=1}^{n-j} m(j+i) \prod_{i=1}^{n-j} (m(j+i)+r) = (mn|m)^{n-j}(mn+r|m)^{n-j}$ lehetőségünk van.

Az $(n+1, k+1)$ paraméterű m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpárok száma így $\sum_{j=k}^n (mn|m)^{n-j}(mn+r|m)^{n-j} jw_{m,r}(j, k)$. \square

$n, r \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén értelmezzük az n -edik (m, r) -négyzetesen emelkedő, valamint (m, r) -négyzetesen süllyedő faktoriálist az

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x + mj(mj + r)), \quad x^{\underline{\underline{n, m, r}}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x - mj(mj + r))$$

összefüggésekkel. A Jacobi–Whitney-számok polinomos azonosságai írják le a kapcsolatot a négyzetesen emelkedő, illetve négyzetesen süllyedő faktoriálisok és a hatványok között (Legendre–Stirling- és Jacobi–Stirling-számok esetén lásd [1, 2, 22]).

5.6. Tétel. ([9, Theorem 2.6])

Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$x^{\overline{\overline{n,m,r}}} = \sum_{k=0}^n jw_{m,r}(n, k)x^k, \quad x^{\overline{\overline{n,m,r}}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} jw_{m,r}(n, k)x^k,$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n JW_{m,r}(n, k)x^{\overline{\overline{k,m,r}}}, \quad x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} JW_{m,r}(n, k)x^{\overline{\overline{k,m,r}}}.$$

Bizonyítás. A második összefüggés az elsőből, a negyedik pedig a harmadikból $-x$ helyettesítéssel adódik.

I. Az első polinomos azonosság igazolásához tekintsük azokat az n első paraméterű (π_1, π_2) m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpárokat, ahol a nem-kitüntetett ciklusok maximumait is színezzük másodlagosan c darab színnel úgy, hogy π_1 -ben és π_2 -ben az azonos ciklusmaximumok ugyanazt a színt kapják. Az ilyen párok száma nyilván $\sum_{k=0}^n jw_{m,r}(n, k)c^k$.

A következőkben összeszámoljuk ezeket a (π_1, π_2) permutációpárokat egy másik módon. Az r darab kitüntetett elemet tegyük be π_2 különböző ciklusaiba, majd a nem-kitüntetett elemeket csökkenő sorrendben, egyszerre helyezzük el π_1 -ben és π_2 -ben, valamint szükség szerint színezzük is őket.

Ha az $(n - j)$ -t π_1 -ben a már korábban elhelyezett j darab elem valamelyike mögé rakjuk ($j = 0, \dots, n - 1$), akkor m -féleképpen színezhajjuk. A ciklusmaximumokra vonatkozó feltétel miatt az $n - j$ a π_2 -ben is egy már meglévő ciklusba kerül. Betehetjük a nála nagyobb j darab nem-kitüntetett elem bármelyike mögé, ekkor m -féle színt kaphat, vagy rakhatjuk kitüntetett elem mögé, ekkor nem színezzük.

Ha az $n - j$ új ciklust nyit π_1 -ben, akkor ennek a ciklusnak a legnagyobb eleme lesz, így π_2 -ben is új ciklusba kerül. Ekkor az $n - j$ csak másodlagos színt kap.

Tehát a fenti (π_1, π_2) permutációpárok száma $\prod_{j=0}^{n-1} (mj(mj + r) + c) = c^{\overline{\overline{n,m,r}}}$.

II. A harmadik azonosságot n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 0$, akkor az egyenlőség mindkét oldala 1-gyel egyenlő. Tegyük fel, hogy az állítás valamely $n \geq 0$ esetén teljesül. Ekkor az indukciós feltevést és az 5.4. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 x^{n+1} &= x \cdot x^n = \sum_{k=0}^n (x - mk(mk + r) + mk(mk + r)) JW_{m,r}(n, k) x^{\frac{k,m,r}{m}} \\
 &= \sum_{k=0}^n JW_{m,r}(n, k) x^{\frac{k+1,m,r}{m}} + \sum_{k=0}^n mk(mk + r) JW_{m,r}(n, k) x^{\frac{k,m,r}{m}} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} JW_{m,r}(n, k-1) x^{\frac{k,m,r}{m}} + \sum_{k=1}^n mk(mk + r) JW_{m,r}(n, k) x^{\frac{k,m,r}{m}} \\
 &= \sum_{k=1}^n (JW_{m,r}(n, k-1) + mk(mk + r) JW_{m,r}(n, k)) x^{\frac{k,m,r}{m}} + x^{\frac{n+1,m,r}{m}} \\
 &= \sum_{k=1}^n JW_{m,r}(n+1, k) x^{\frac{k,m,r}{m}} + x^{\frac{n+1,m,r}{m}} = \sum_{k=0}^{n+1} JW_{m,r}(n+1, k) x^{\frac{k,m,r}{m}}.
 \end{aligned}$$

□

A polinomos azonosságok felhasználásával megmutatható az elsőfajú és másodfajú Jacobi–Whitney-számok ortogonalitása, amely Legendre–Stirling- és Jacobi–Stirling-számok esetén a [2, 21, 22] publikációkban is megtalálható.

5.7. Tétel. ([9, Theorem 2.7])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} j w_{m,r}(n, j) JW_{m,r}(j, k) = \delta_{n,k},$$

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW_{m,r}(n, j) j w_{m,r}(j, k) = \delta_{n,k}.$$

Bizonyítás. Ezeket az összefüggéseket az 5.12. Tételben igazoljuk általánosabb formában. □

Az első- és másodfajú Jacobi–Stirling-számok előállíthatóak elemi és teljes szimmetrikus polinomok segítségével (lásd [61]). Az alábbi tételben ezeket általánosítjuk Jacobi–Whitney-számokra és egyúttal kombinatorikus bizonyítást is adunk rájuk.

5.8. Tétel. ([9, Theorem 2.8])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$jw_{m,r}(n, k) = e_{n-k}(m(m+r), 2m(2m+r), \dots, m(n-1)(m(n-1)+r)),$$

$$JW_{m,r}(n, k) = h_{n-k}(m(m+r), 2m(2m+r), \dots, mk(mk+r)),$$

ahol $e_{n-k}(x_1, \dots, x_l)$ és $h_{n-k}(x_1, \dots, x_l)$ rendre az $(n-k)$ -edik l határozatlanú elemi és teljes szimmetrikus polinomokat jelölik.

Bizonyítás. Az első azonosságot igazoljuk, a második hasonló gondolatmenettel adódik.

A ciklusmaximumokra vonatkozó feltétel alapján egy (n, k) paraméterű (π_1, π_2) m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpár esetén az $1, \dots, n$ elemek közül ugyanaz a k darab lép fel ciklusmaximumként π_1 -ben és π_2 -ben, továbbá az n biztosan ciklusmaximum. A többi $n-k$ darab nem-kitüntetett elemet jelölje $n - i_{n-k} < \dots < n - i_2 < n - i_1$, ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n-1$.

A fenti (π_1, π_2) párok összeszámolásához először rakjuk be a ciklusmaximumokat π_1 és π_2 különböző ciklusaiba, π_2 esetén beleértve a kitüntetett elemeket is. A többi nem-kitüntetett elemet csökkenő sorrendben, egyszerre helyezzük el π_1 -ben és π_2 -ben, valamint szükség szerint színezzük is őket. Az $(n - i_j)$ -t tehetjük π_1 -ben a nála nagyobb i_j darab elem bármelyike mögé ($j = 1, \dots, n - k$) és m -féleképpen színezzük. Az $n - i_j$ kerülhet π_2 -ben szintén bármely nála nagyobb nem-kitüntetett elem mögé, ekkor m -féle színt kaphat, vagy rakhatjuk valamelyik kitüntetett elem mögé, ekkor nem színezzük. Tehát

$$\begin{aligned} jw_{m,r}(n, k) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n-1} \prod_{j=1}^{n-k} m i_j (m i_j + r) \\ &= e_{n-k}(m(m+r), 2m(2m+r), \dots, m(n-1)(m(n-1)+r)). \end{aligned}$$

□

A másodfajú Legendre–Stirling- és Jacobi–Stirling-számokat egyfajta explicit formula segítségével értelmezték, majd a [2] cikkben ebből vezettek le a klasszikus másodfajú Stirling-számokéhoz hasonló explicit formulát a másodfajú Legendre–Stirling-számokra vonatkozóan. A következő tételben ezt általánosítjuk a másodfajú Jacobi–Stirling-számokra, melyre kizárólag a rekurziót használó bizonyítást adunk.

5.9. Tétel. ([9, Theorem 2.9])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$, akkor

$$\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}_r = \frac{1}{(2k+r)!} \sum_{j=0}^{2k+r} (-1)^j \binom{2k+r}{j} (k-j+1)^{\bar{r}} ((k-j)(k-j+r))^n.$$

Bizonyítás. A bizonyításban kiterjesztjük a másodfajú Jacobi–Stirling-számok fogalmát a $0 \leq n < k$ esetre, ekkor legyen $\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}_r = 0$. Látható, hogy az 5.4. Tételből származó, másodfajú Jacobi–Stirling-számokra vonatkozó rekurzió így minden $k \geq 1$ és $n \geq 0$ esetén teljesül.

Az explicit formulát k és n szerinti kettős indukcióval bizonyítjuk. Ha $k = 0$, akkor az állítás könnyen ellenőrizhető, most megmutatjuk $n = 0$ esetén. A binomiális tétel alapján

$$(x-1)^{2k+r} = \sum_{j=0}^{2k+r} \binom{2k+r}{j} (-1)^j x^{2k+r-j} \quad (x > 0).$$

Az egyenlőség mindkét oldalát x^k -nal osztva, majd r -szer deriválva a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (2k+r)^i (x-1)^{2k+r-i} (-k)^{r-i} x^{-k-r+i} \\ = \sum_{j=0}^{2k+r} \binom{2k+r}{j} (-1)^j (k+r-j)^r x^{k-j} \end{aligned}$$

összefüggéshez jutunk. Innen az 1 helyettesítésével következik, hogy

$$r! \delta_{0,k} = \sum_{j=0}^{2k+r} (-1)^j \binom{2k+r}{j} (k-j+1)^{\bar{r}},$$

ami igazolja a tételünket $n = 0$ esetén.

Legyen $k \geq 1$, $n \geq 0$ és tegyük fel, hogy az állítás teljesül az $\left\{\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}\right\}_r$ és $\left\{\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}\right\}_r$ Jacobi–Stirling-számokra, azaz

$$\begin{aligned} \left\{\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}\right\}_r &= \frac{1}{(2k+r-2)!} \sum_{j=0}^{2k+r-2} (-1)^j \binom{2k+r-2}{j} (k-j)^{\bar{r}} \\ &\quad \cdot ((k-j-1)(k-j-1+r))^n \\ &= \frac{1}{(2k+r)!} (2k+r)(2k+r-1) \sum_{j=1}^{2k+r-1} (-1)^{j-1} \binom{2k+r-2}{j-1} \\ &\quad \cdot (k-j+1)^{\bar{r}} ((k-j)(k-j+r))^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}\right\}_r &= \frac{1}{(2k+r)!} \sum_{j=1}^{2k+r-1} (-1)^j \binom{2k+r}{j} (k-j+1)^{\bar{r}} ((k-j)(k-j+r))^n \\ &\quad + \frac{1}{(2k+r)!} (k+1)^{\bar{r}} (k(k+r))^n \\ &\quad + \frac{1}{(2k+r)!} (-1)^{2k+r} (-k-r+1)^{\bar{r}} ((-k-r)(-k))^n. \end{aligned}$$

Az 5.4. Tételt a másodfajú Jacobi–Stirling-számokra alkalmazva, valamint az indukciós feltevésből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (2k+r)! \left\{\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}\right\}_r &= (2k+r)! \left\{\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}\right\}_r + (2k+r)! k(k+r) \left\{\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}\right\}_r \\ &= \sum_{j=1}^{2k+r-1} (-1)^j \left(k(k+r) \binom{2k+r}{j} - (2k+r)(2k+r-1) \binom{2k+r-2}{j-1} \right) \\ &\quad \cdot (k-j+1)^{\bar{r}} ((k-j)(k-j+r))^n \\ &\quad + (k+1)^{\bar{r}} (k(k+r))^{n+1} + (-1)^{2k+r} (-k-r+1)^{\bar{r}} ((-k-r)(-k))^{n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{2k+r} (-1)^j \binom{2k+r}{j} (k-j+1)^{\bar{r}} ((k-j)(k-j+r))^{n+1}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben az egyszerű számolással igazolható

$$\begin{aligned} k(k+r) \binom{2k+r}{j} - (2k+r)(2k+r-1) \binom{2k+r-2}{j-1} \\ = \binom{2k+r}{j} (k-j)(k-j+r) \end{aligned}$$

azonosságot használtuk. \square

5.3. Átmeneti együtthetők

Ebben az alfejezetben azoknak a Jacobi–Whitney-számoknak a kapcsolatát vizsgáljuk, melyeknél a színek száma, valamint a kitüntetett elemek száma is különböző. Ehhez szükségünk van az alábbi számok bevezetésére.

Rögzített $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$ esetén a $T_{m,l,r,s}(n, k)$ átmeneti együtthetőket ($0 \leq k \leq n$) definiáljuk a következő kezdeti értékek és rekurzió segítségével:

- $T_{m,l,r,s}(n, 0) = \delta_{n,0}$ ($n \geq 0$), $T_{m,l,r,s}(n, n) = 1$ ($n \geq 0$),
- $T_{m,l,r,s}(n+1, k) = T_{m,l,r,s}(n, k-1) + (mn(mn+r) - lk(lk+s))T_{m,l,r,s}(n, k)$ ($1 \leq k \leq n$).

Megjegyezzük, hogy $m \geq 1$ és $r \geq 0$ esetén $T_{m,m,r,r}(n, k) = \delta_{n,k}$ ($0 \leq k \leq n$).

Az átmeneti együtthető elnevezést az indokolja, hogy ezek a számok az (m, r) -, valamint (l, s) -négyzetesen emelkedő, illetve süllyedő faktoriálisok közötti összefüggések együtthetőiként jelennek meg.

5.10. Tétel. ([9, Theorem 3.1])

Ha $n, r, s \geq 0$ és $m, l \geq 1$, akkor

$$x^{\overline{n,m,r}} = \sum_{k=0}^n T_{m,l,r,s}(n, k) x^{\overline{k,l,s}},$$

$$x^{\underline{n,m,r}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} T_{m,l,r,s}(n, k) x^{\underline{k,l,s}}.$$

Bizonyítás. A második állítás az elsőből $-x$ helyettesítéssel adódik.

Az első azonosságot n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 0$, akkor az egyenlőség mindkét oldala 1-gyel egyenlő. Most tegyük fel, hogy valamely $n \geq 0$ esetén az állítás teljesül. Az indukciós feltevés és az átmeneti együtthatók rekurziója alapján

$$\begin{aligned}
x^{\overline{\overline{n+1,m,r}}} &= (x + mn(mn + r))x^{\overline{\overline{n,m,r}}} \\
&= \sum_{k=0}^n (x + lk(lk + s) + mn(mn + r) - lk(lk + s)) T_{m,l,r,s}(n, k) x^{\overline{\overline{k,l,s}}} \\
&= \sum_{k=0}^n T_{m,l,r,s}(n, k) x^{\overline{\overline{k+1,l,s}}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^n (mn(mn + r) - lk(lk + s)) T_{m,l,r,s}(n, k) x^{\overline{\overline{k,l,s}}} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} T_{m,l,r,s}(n, k-1) x^{\overline{\overline{k,l,s}}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n (mn(mn + r) - lk(lk + s)) T_{m,l,r,s}(n, k) x^{\overline{\overline{k,l,s}}} \\
&= \sum_{k=1}^n (T_{m,l,r,s}(n, k-1) + (mn(mn + r) - lk(lk + s)) T_{m,l,r,s}(n, k)) \\
&\quad \cdot x^{\overline{\overline{k,l,s}}} + x^{\overline{\overline{n+1,l,s}}} \\
&= \sum_{k=1}^n T_{m,l,r,s}(n+1, k) x^{\overline{\overline{k,l,s}}} + x^{\overline{\overline{n+1,l,s}}} = \sum_{k=0}^{n+1} T_{m,l,r,s}(n+1, k) x^{\overline{\overline{k,l,s}}}.
\end{aligned}$$

□

Megjegyzés. Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l, p \geq 1$ és $r, s, t \geq 0$, akkor az 5.10. Tétel többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) T_{l,m,s,r}(j, k) = \delta_{n,k}$$

$$\sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) T_{l,p,s,t}(j, k) = T_{m,p,r,t}(n, k).$$

Az átmeneti együtthatók segítségével megadható a kapcsolat az m -színes r -Jacobi–Whitney-számok és az l -színes s -Jacobi–Whitney-számok között.

5.11. Tétel. ([9, Theorem 3.2])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$jw_{m,r}(n, k) = \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) jw_{l,s}(j, k),$$

$$JW_{m,r}(n, k) = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW_{l,s}(n, j) T_{l,m,s,r}(j, k).$$

Bizonyítás. Az 5.6. Tétel és az 5.10. Tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} x^{\overline{n,m,r}} &= \sum_{j=0}^n T_{m,l,r,s}(n, j) x^{\overline{j,l,s}} = \sum_{j=0}^n T_{m,l,r,s}(n, j) \sum_{k=0}^j jw_{l,s}(j, k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) jw_{l,s}(j, k) x^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{j=0}^n JW_{l,s}(n, j) x^{\frac{j,l,s}{j}} = \sum_{j=0}^n JW_{l,s}(n, j) \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} T_{l,m,s,r}(j, k) x^{\frac{k,m,r}{j}} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW_{l,s}(n, j) T_{l,m,s,r}(j, k) x^{\frac{k,m,r}{j}}, \end{aligned}$$

melyeket az 5.6. Tétellel összevetve kapjuk a bizonyítandó állításokat. \square

Az alábbi tételben az elsőfajú és másodfajú Jacobi–Whitney-számok általánosított ortogonalitását mutatjuk meg, melyből $m = l$ és $r = s$ esetén az 5.7. Tétel állításait kapjuk vissza.

5.12. Tétel. ([9, Theorem 3.3])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} jw_{m,r}(n, j) JW_{l,s}(j, k) = T_{m,l,r,s}(n, k),$$

$$\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW_{m,r}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) jw_{l,s}(i, k) = \delta_{n,k}.$$

Bizonyítás. Az 5.6. Tétel, valamint az 5.10. Tétel alapján

$$\begin{aligned} x^{\overline{n,m,r}} &= \sum_{j=0}^n jw_{m,r}(n, j) x^j = \sum_{j=0}^n jw_{m,r}(n, j) \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} JW_{l,s}(j, k) x^{\overline{k,l,s}} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} jw_{m,r}(n, j) JW_{l,s}(j, k) x^{\overline{k,l,s}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{j=0}^n JW_{m,r}(n, j) x^{\overline{j,m,r}} = \sum_{j=0}^n JW_{m,r}(n, j) \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} T_{m,l,r,s}(j, i) x^{\overline{i,l,s}} \\ &= \sum_{j=0}^n JW_{m,r}(n, j) \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} T_{m,l,r,s}(j, i) \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} jw_{l,s}(i, k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW_{m,r}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) jw_{l,s}(i, k) x^k. \end{aligned}$$

□

5.4. Jacobi–Dowling-polinomok

Azokat a Bell-típusú polinomokat, melyek együttthatói rögzített első paraméterű másodfajú r -Whitney-számok, r -Dowling-polinomoknak nevezzük (lásd [10, 14, 40]). Ennek mintájára a másodfajú Jacobi–Whitney-számok segítségével definiálhatóak a Jacobi–Dowling-polinomok.

5.13. Definíció. ([9, Definition 4.1])

$n, r \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén a

$$JD_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^n JW_{m,r}(n, k) x^k$$

polinomot az n -edik m -színes r -Jacobi–Dowling-polinomnak nevezzük.

A Jacobi–Dowling-polinomok teljesítik a következő rekurziót, amely a másodfajú Legendre–Stirling-, illetve Jacobi–Stirling-számokból hasonlóan képezhető Legendre–Bell- és Jacobi–Bell-polinomok esetén megtalálható az [1, 2] cikkekben.

5.14. Tétel. ([9, Theorem 4.2])

Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$JD_{n+1,m,r}(x) = xJD_{n,m,r}(x) + m(m+r)xJD'_{n,m,r}(x) + m^2x^2JD''_{n,m,r}(x).$$

Bizonyítás. Az állítás $n = 0$ esetén könnyen ellenőrizhető. Ha $n \geq 1$, akkor az 5.4. Tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} JD_{n+1,m,r}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} JW_{m,r}(n+1, k)x^k = \sum_{k=1}^n JW_{m,r}(n+1, k)x^k + x^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n JW_{m,r}(n, k-1)x^k + \sum_{k=1}^n mk(mk+r)JW_{m,r}(n, k)x^k + x^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} JW_{m,r}(n, k)x^{k+1} + \sum_{k=1}^n mk(mk-m)JW_{m,r}(n, k)x^k \\ &\quad + \sum_{k=1}^n mk(m+r)JW_{m,r}(n, k)x^k + x^{n+1} \\ &= x \sum_{k=0}^n JW_{m,r}(n, k)x^k + m^2x^2 \sum_{k=2}^n k(k-1)JW_{m,r}(n, k)x^{k-2} \\ &\quad + m(m+r)x \sum_{k=1}^n kJW_{m,r}(n, k)x^{k-1} \\ &= xJD_{n,m,r}(x) + m^2x^2JD''_{n,m,r}(x) + m(m+r)xJD'_{n,m,r}(x). \end{aligned}$$

□

Az [1, 2, 62] publikációkban belátták azt is, hogy a Legendre–Bell- és Jacobi–Bell-polinomok minden gyöke valós, nempozitív és egyszeres. Az alábbi tételben ezt általánosítjuk a Jacobi–Dowling-polinomokra.

5.15. Tétel. ([9, Theorem 4.3])

Ha $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor a $JD_{n,m,r}(x)$ polinom minden gyöke valós és egyszeres, valamint egyik gyöke a 0, a többi gyöke pedig negatív.

Bizonyítás. A tételt n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Most tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ esetén teljesül, azaz $JD_{n,m,r}(x)$ gyökei $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_2 < \alpha_1 = 0$.

A polinom gyöktényezőss alakjából következik, hogy az $]\alpha_{i+1}, \alpha_i[$ intervallumon $JD_{n,m,r}(x)$ előjele $(-1)^i$ ($i = 1, \dots, n-1$). Ekkor léteznek olyan $\beta_i \in]\alpha_{i+1}, \alpha_i[$ negatív számok, hogy páratlan i esetén β_i lokális minimumhely és β_i -ben $JD_{n,m,r}(x)$ lokálisan konvex, míg páros i esetén β_i lokális maximumhely és β_i -ben $JD_{n,m,r}(x)$ lokálisan konkáv. Így $JD_{n,m,r}(\beta_i)$ előjele $(-1)^i$, $JD'_{n,m,r}(\beta_i) = 0$, $JD''_{n,m,r}(\beta_i)$ előjele pedig $(-1)^{i+1}$ vagy 0 (valójában az utóbbi előjel a gyökök egyszeres multiplicitása miatt 0 nem lehet).

Ekkor az 5.14. Tétel alapján azt kapjuk, hogy $JD_{n+1,m,r}(\beta_i)$ előjele $(-1)^{i+1}$. Így a Bolzano-tételt alkalmazva léteznek olyan $\gamma_j \in]\beta_{j-1}, \beta_{j-2}[$ negatív számok, hogy $JD_{n+1,m,r}(\gamma_j) = 0$ ($j = 3, \dots, n$).

Mivel a $JD_{n+1,m,r}(x)$ polinom konstans tagja 0, ezért $\gamma_1 = 0$ szintén gyöke. Továbbá $JD_{n+1,m,r}(\beta_1) > 0$, $JD_{n+1,m,r}(x)$ a $]0, \infty[$ intervallumon pozitív és $JD'_{n+1,m,r}(0) \neq 0$, hiszen az 5.3. Tétel alapján a $JD_{n+1,m,r}(x)$ polinomban az elsőfokú tag együtthatója nem 0. Ezekből adódóan a $JD_{n+1,m,r}(x)$ polinomnak a $]\beta_1, 0[$ intervallumon is van egy γ_2 gyöke. Végezetül felhasználva, hogy $JD_{n+1,m,r}(\beta_{n-1})$ előjele $(-1)^n$, valamint a $\lim_{x \rightarrow -\infty} JD_{n+1,m,r}(x)$ határérték $(-1)^{n+1}$ előjelével egyezően $\pm\infty$, van még egy γ_{n+1} gyök a $]-\infty, \beta_{n-1}[$ intervallumon.

Összegezve tehát $\gamma_{n+1} < \gamma_n < \dots < \gamma_2 < \gamma_1 = 0$ a $JD_{n+1,m,r}(x)$ polinom különböző valós gyökei. \square

Rögzített felső paraméter esetén az elsőfajú, valamint a másodfajú Legendre–Stirling- és Jacobi–Stirling-számok sorozata is log-konkáv és unimodális (lásd ismét [1, 2, 62]). Elsőfajú Jacobi–Whitney-számok esetén ez az 5.6. Tételből, másodfajú Jacobi–Whitney-számokra pedig az 5.15. Tételből következik Newton tételének (lásd például [77]) felhasználásával.

5.16. Következmény. ([9, Corollary 4.4])

Ha $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor a $(jw_{m,r}(n, k))_{k=0}^n$ és $(JW_{m,r}(n, k))_{k=0}^n$ sorozatok szigorúan log-konkávák és unimodálisak.

6. Jacobi–Whitney–Lah-számok

A Stirling-számok előző fejezetben részletezett Jacobi–Whitney-változata után most Jacobi–Whitney–Lah-számokat értelmezzük, amire két lehetőségünk van. Először a kombinatorikus definícióval bevezetett első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokat vizsgáljuk, majd az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok segítségével képzett második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokkal foglalkozunk.

6.1. A Jacobi–Whitney–Lah-számok fogalma

Az 1. fejezetben láthattuk, hogy a Stirling-számok különböző általánosításai a Lah-számok esetén is értelmezhetőek. A Lah-, r -Lah- és r -Whitney–Lah-számokat is kombinatorikus interpretáción keresztül vezetjük be, de azok a (\star) formulának megfelelően rendre az első- és másodfajú Stirling-, r -Stirling- és r -Whitney-számok segítségével is definiálhatóak.

A szakirodalomban a Lah-számoknak sem a Legendre-, sem a Jacobi-változata nem szerepel. Most az 5. fejezethez hasonlóan még általánosabb kombinatorikus számokat vezetünk be, a Jacobi–Whitney–Lah-számokat, amit a fentiek alapján kétféleképpen tehetünk meg.

A másodfajú Jacobi–Whitney-számok kombinatorikus definíciójában osztályok helyett rendezett osztályokat tekintve az első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokhoz jutunk.

6.1. Definíció. ([5, Definition 2.1])

Legyenek $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$. Egy (Φ_1, Φ_2) rendezett párt (n, k) paraméterű m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-osztályozáspárnak nevezünk, ha

- Φ_1 az $1, \dots, n$ elemek egy m -színes Whitney-színezett, k darab rendezett osztályba történő 0 -osztályozása,
- Φ_2 az $1, \dots, n + r$ elemek egy m -színes Whitney-színezett, $k + r$ darab rendezett osztályba történő r -osztályozása,
- a Φ_1 -ben lévő rendezett osztályok maximumainak halmaza megegyezik a Φ_2 -beli nem-kitüntetett rendezett osztályok maximumainak halmazával.

Ezen rendezett osztályokba történő osztályozásokból álló párok számát jelöli a $JWL_{m,r}^{(1)}(n, k)$ első típusú m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-szám.

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokat rögzített első paraméterű elsőfajú Jacobi–Whitney-számok és rögzített második paraméterű másodfajú Jacobi–Whitney-számok szorzatösszegeként vezetjük be.

6.2. Definíció. ([5, Definition 3.1])

Legyenek $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$. Ekkor a

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n, k) = \sum_{j=k}^n jw_{m,r}(n, j)JW_{m,r}(j, k)$$

formulával értelmezett $JWL_{m,r}^{(2)}(n, k)$ számot második típusú m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-számnak nevezzük.

A fejezet további részében, például a 6.3. Tétel és a 6.7. Tétel alapján látni fogjuk, hogy a Lah-számok korábbi általánosításaival ellentétben a Jacobi–Whitney–Lah-számok kétféle megközelítése különböző kombinatorikus számokat eredményez.

6.2. Első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok

Az első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok kombinatorikus definíciója alapján meggondolható, hogy $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad JW_{m,r}^{(1)}(n, n) = 1.$$

Az alábbi tételben az első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok további speciális értékeit adjuk meg.

6.3. Tétel. ([5, Theorem 2.2])

Ha $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, 1) = m^{n-1}n! (2m + 2r|m)^{\overline{n-1}},$$

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, n-1) = 4m \left(2m \binom{n}{3} + (m+r) \binom{n}{2} \right).$$

Bizonyítás. I. Összeszámoljuk az $(n, 1)$ paraméterű (Φ_1, Φ_2) m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-osztályozáspárokat. Az $1, \dots, n$ elemek Φ_1 egyetlen rendezett osztályában $n!$ -féleképpen állhatnak. A legnagyobb elem, az n kivételével minden elemet m színnel színezzük, így Φ_1 -re $m^{n-1}n!$ lehetőségünk van.

Az $n + 1, \dots, n + r$ kitüntetett elemeket elhelyezzük Φ_2 különböző rendezett osztályaiban. Az osztálymaximumokra vonatkozó feltétel miatt az n a Φ_2 egyetlen nem-kitüntetett rendezett osztályába kerül, és itt sem kap színt. A többi elemet csökkenő sorrendben rakjuk be Φ_2 rendezett osztályaiba és szükség szerint színezzük is őket. Az $n - j$ kerülhet kitüntetett elem elé vagy mögé, kitüntetett rendezett osztályban álló nem-kitüntetett elemnek a kitüntetett elemtől távolabbi oldalára, a nem-kitüntetett rendezett osztályban álló elemek valamelyike mögé vagy a nem-kitüntetett rendezett osztály elejére ($j = 1, \dots, n - 1$). Az utóbbi három esetben színezzük is az m szín valamelyikével. Ez összesen $\prod_{j=1}^{n-1} (2r + m(j+1)) = (2r + 2m|m)^{\overline{n-1}}$ lehetőséget jelent Φ_2 -re nézve.

II. Az $(n, n - 1)$ paraméterű (Φ_1, Φ_2) m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-osztályozáspárok esetén Φ_1 -ben és Φ_2 -ben is egy-egy kételemű rendezett osztály van, a többi egyelemű. Ekkor az elemek színezési szabályai lényegében ugyanazok, mint az m -színes r -Jacobi–Whitney-osztályozáspárok esetén. Mivel egy kételemű rendezett osztályban kétféleképpen állhatnak az elemek, így a (Φ_1, Φ_2) párok száma $4JW_{m,r}(n, n - 1)$, amiből az 5.3. Tétel alapján adódik az állítás. \square

Az első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok rekurzióját is kombinatorikus gondolatokkal bizonyítjuk.

6.4. Tétel. ([5, Theorem 2.3])

Ha $1 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned} JW_{m,r}^{(1)}(n+1, k) \\ = JW_{m,r}^{(1)}(n, k-1) + m(n+k)(m(n+k) + 2r)JW_{m,r}^{(1)}(n, k). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az $(n + 1, k)$ paraméterű (Φ_1, Φ_2) m -színes r -Jacobi–Whitney–

Lah-osztályozáspárok száma $JWL_{m,r}^{(1)}(n+1, k)$.

Ha az 1 egyelemű rendezett osztályban van Φ_1 -ben és Φ_2 -ben is, akkor az 5.4. Tétel bizonyításában írtakhoz hasonlóan a (Φ_1, Φ_2) párok száma $JWL_{m,r}^{(1)}(n, k-1)$.

Ha az 1 legalább kételemű rendezett osztályban áll Φ_1 -ben és Φ_2 -ben, akkor az 1 törlésével, majd a többi elem eggyel csökkentésével egy (n, k) paraméterű (Ψ_1, Ψ_2) m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-osztályozáspárhoz jutunk, melyek száma $JWL_{m,r}^{(1)}(n, k)$. Visszafelé, Ψ_1 és Ψ_2 minden elemét eggyel növeljük, majd elhelyezzük az 1-et. A Ψ_1 esetén az 1 kerülhet bármely elem mögé vagy bármely rendezett osztály elejére, azaz $(n+k)$ -féle helyre, és ilyenkor színezzük az m szín valamelyikével. A Ψ_2 esetén berakhatjuk az 1-et az r darab kitüntetett elem bármelyike elé vagy mögé, kitüntetett rendezett osztályban álló nem-kitüntetett elemnek a kitüntetett elemtől távolabbi oldalára, nem-kitüntetett rendezett osztályban álló elem mögé vagy a k darab nem-kitüntetett rendezett osztály bármelyikének az elejére. Az utóbbi három esetben az 1 szint is kap, így egy (Ψ_1, Ψ_2) párból összesen $m(n+k)(2r+m(n+k))$ -féleképpen kaphatunk megfelelő (Φ_1, Φ_2) párt. \square

Az első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok függőleges rekurziójának igazolásához szintén kombinatorikus ötletet használunk.

6.5. Tétel. ([5, Theorem 2.4])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned} & JWL_{m,r}^{(1)}(n+1, k+1) \\ &= \sum_{j=k}^n (m(n+k+1)|m)^{n-j} (m(n+k+1) + 2r|m)^{n-j} JWL_{m,r}^{(1)}(j, k). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Tekintsük az $(n+1, k+1)$ paraméterű m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-osztályozáspárokat. Ezek száma $JWL_{m,r}^{(1)}(n+1, k+1)$.

Számoljuk össze az ilyen (Φ_1, Φ_2) párokat egy másik módon. Legyen $n+1-j$ a rendezett osztályok maximumai közül a legkisebb ($j = k, \dots, n$). Miután ezt az elemet elhelyeztük Φ_1 és Φ_2 egy-egy rendezett osztályában, az 5.5. Tétel bizonyításában írtakhoz hasonlóan a nála nagyobb elemeket $JWL_{m,r}^{(1)}(j, k)$ -féleképpen tehetjük be rendezett osztályokba.

Ezt követően az $(n + 1 - j)$ -nél kisebb elemeket csökkenő sorrendben, egyszerre rakjuk be Φ_1 és Φ_2 rendezett osztályaiba és szükség szerint színezzük is őket. Az $(n + 1 - j - i)$ -t Φ_1 -ben tehetjük a már korábban elhelyezett $j + i$ darab elem bármelyike mögé ($i = 1, \dots, n - j$) vagy a $k + 1$ darab rendezett osztály valamelyikének az elejére, és mindkét esetben m -féle színt kaphat. Az $n + 1 - j - i$ a Φ_2 -ben kerülhet kitüntetett elem elé vagy mögé, kitüntetett rendezett osztályban álló nem-kitüntetett elemnek a kitüntetett elemtől távolabbi oldalára, nem-kitüntetett rendezett osztályban álló elem mögé vagy nem-kitüntetett rendezett osztály elejére. Az utóbbi három esetben színezzük is az m szín valamelyikével. Az $(n + 1 - j)$ -nél kisebb elemek elhelyezésére így összesen

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n-j} m(j+i+k+1) \prod_{i=1}^{n-j} (2r+m(j+i+k+1)) \\ = (m(n+k+1)|m)^{n-j} (2r+m(n+k+1)|m)^{n-j} \end{aligned}$$

lehetőségünk van.

Tehát az $(n+1, k+1)$ paraméterű m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-osztályozáspárok száma

$$\sum_{j=k}^n (m(n+k+1)|m)^{n-j} (2r+m(n+k+1)|m)^{n-j} JW L_{m,r}^{(1)}(j, k).$$

□

A következő tételben a Jacobi–Whitney-számok szimmetrikus polinomos előállításához hasonló formulát adunk meg az első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokra.

6.6. Tétel. ([5, Theorem 2.5])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n-1} \prod_{j=1}^{n-k} m(2i_j - j + 1)(m(2i_j - j + 1) + 2r).$$

Bizonyítás. Egy (n, k) paraméterű (Φ_1, Φ_2) m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-osztályozáspárt tekintve ugyanaz a k darab elem alkotja a Φ_1 -beli és Φ_2 -beli nem-kitüntetett rendezett osztályok maximumainak halmazát, melynek az n biztosan eleme. Jelölje a többi $n - k$ darab nem-kitüntetett elemet $n - i_{n-k} < \dots < n - i_2 < n - i_1$, ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n - 1$.

Most összeszámoljuk a fenti (Φ_1, Φ_2) párokat. Először elhelyezzük Φ_1 és Φ_2 különböző rendezett osztályaiban az osztálymaximumokat, Φ_2 esetén a kitüntetett elemeket is. A többi elemet csökkenő sorrendben, egyszerre rakjuk be Φ_1 és Φ_2 rendezett osztályaiba és szükség szerint színezzük is őket. Az $n - i_j$ kerülhet Φ_1 -ben a nála nagyobb i_j darab elem bármelyike mögé ($j = 1, \dots, n - k$) vagy a nála nagyobb osztálymaximummal rendelkező $i_j - (j - 1)$ darab rendezett osztály elejére. Mivel az $(n - i_j)$ -t színezzük is, ez idáig összesen $m(2i_j - j + 1)$ lehetőséget jelent.

Az $(n - i_j)$ -t Φ_2 -ben tehetjük az r darab kitüntetett elem elé vagy mögé, kitüntetett rendezett osztályban álló, nála nyilván nagyobb nem-kitüntetett elemnek a kitüntetett elemtől távolabbi oldalára, nem-kitüntetett rendezett osztályban álló, nála nagyobb elem mögé vagy nála nagyobb maximumú nem-kitüntetett rendezett osztály elejére. Az utóbbi három esetben színezzük is az m szín valamelyikével, így Φ_2 esetén $2r + m(2i_j - j + 1)$ lehetőségünk van.

Tehát

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n-1} \prod_{j=1}^{n-k} m(2i_j - j + 1)(2r + m(2i_j - j + 1)).$$

□

6.3. Második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok definíciója, illetve az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok megfelelő tulajdonságai alapján kapjuk, hogy $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad JWL_{m,r}^{(2)}(n, n) = 1.$$

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok más speciális értékeit a következő tételben adjuk meg.

6.7. Tétel. ([5, Theorem 3.2])

Ha $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n, 1) = \frac{(m(m+r))^{\overline{n,m,r}}}{m(m+r)},$$

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n, n-1) = 2m \left(2m \binom{n}{3} + (m+r) \binom{n}{2} \right).$$

Bizonyítás. Az első állítás könnyen igazolható n szerinti teljes indukcióval és a későbbi 6.9. Tétel alkalmazásával, melynek bizonyításához nincs szükségünk erre a formulára. A második egyenlőség az 5.3. Tétel felhasználásával szintén egyszerűen adódik. \square

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok segítségével írható le a kapcsolat a négyzetesen emelkedő és négyzetesen süllyedő faktoriálisok között.

6.8. Tétel. ([5, Theorem 3.3])

Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$x^{\overline{n,m,r}} = \sum_{k=0}^n JWL_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\overline{k,m,r}},$$

$$x^{\overline{n,m,r}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} JWL_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\overline{k,m,r}}.$$

Bizonyítás. A második azonosságot az elsőből $-x$ helyettesítéssel kapjuk.

Az első összefüggés igazolásához az 5.6. Tételt használjuk, mely alapján

$$\begin{aligned} x^{\overline{n,m,r}} &= \sum_{j=0}^n j w_{m,r}(n, j) x^j = \sum_{j=0}^n j w_{m,r}(n, j) \sum_{k=0}^j JW_{m,r}(j, k) x^{\overline{k,m,r}} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n j w_{m,r}(n, j) JW_{m,r}(j, k) x^{\overline{k,m,r}} = \sum_{k=0}^n JWL_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\overline{k,m,r}}. \end{aligned}$$

\square

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok rekurziójában az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok rekurzióiban szereplő együttthatók összege jelenik meg.

6.9. Tétel. ([5, Theorem 3.4])

Ha $1 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned} JW L_{m,r}^{(2)}(n+1, k) \\ = JW L_{m,r}^{(2)}(n, k-1) + (mn(mn+r) + mk(mk+r)) JW L_{m,r}^{(2)}(n, k). \end{aligned}$$

Bizonyítás. A 6.8. Tételt használva

$$x^{\overline{\overline{n+1,m,r}}} = \sum_{k=1}^n JW L_{m,r}^{(2)}(n+1, k) x^{\frac{k,m,r}{}} + x^{\frac{n+1,m,r}{}},$$

másfelől

$$\begin{aligned} x^{\overline{\overline{n+1,m,r}}} &= (x + mn(mn+r)) x^{\overline{\overline{n,m,r}}} \\ &= \sum_{k=0}^n (x - mk(mk+r) + mk(mk+r) + mn(mn+r)) JW L_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\frac{k,m,r}{}} \\ &= \sum_{k=0}^n JW L_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\frac{k+1,m,r}{}} \\ &\quad + \sum_{k=0}^n (mk(mk+r) + mn(mn+r)) JW L_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\frac{k,m,r}{}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} JW L_{m,r}^{(2)}(n, k-1) x^{\frac{k,m,r}{}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n (mk(mk+r) + mn(mn+r)) JW L_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\frac{k,m,r}{}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(JW L_{m,r}^{(2)}(n, k-1) + (mk(mk+r) + mn(mn+r)) JW L_{m,r}^{(2)}(n, k) \right) \\ &\quad \cdot x^{\frac{k,m,r}{}} + x^{\frac{n+1,m,r}{}}, \end{aligned}$$

melyeket összevetve a bizonyítandó állítást kapjuk. \square

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok teljesítik a következő függőleges rekurziót.

6.10. Tétel. ([5, Theorem 3.5])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n \frac{(m(k+1)(m(k+1)+r))^{\overline{n+1,m,r}}}{(m(k+1)(m(k+1)+r))^{\overline{j+1,m,r}}} JWL_{m,r}^{(2)}(j, k).$$

Bizonyítás. A tételt rögzített k esetén, n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = k$, akkor az egyenlőség mindkét oldala 1-gyel egyenlő. Tegyük fel, hogy az állítás valamely $n \geq k$ esetén teljesül. Ekkor a 6.9. Tétel és az indukciós feltevés alapján

$$\begin{aligned} & JWL_{m,r}^{(2)}(n+2, k+1) \\ &= JWL_{m,r}^{(2)}(n+1, k) \\ &\quad + (m(n+1)(m(n+1)+r) + m(k+1)(m(k+1)+r)) \\ &\quad \cdot JWL_{m,r}^{(2)}(n+1, k+1) \\ &= JWL_{m,r}^{(2)}(n+1, k) \\ &\quad + (m(k+1)(m(k+1)+r) + m(n+1)(m(n+1)+r)) \\ &\quad \cdot \sum_{j=k}^n \frac{(m(k+1)(m(k+1)+r))^{\overline{n+1,m,r}}}{(m(k+1)(m(k+1)+r))^{\overline{j+1,m,r}}} JWL_{m,r}^{(2)}(j, k) \\ &= \sum_{j=k}^{n+1} \frac{(m(k+1)(m(k+1)+r))^{\overline{n+2,m,r}}}{(m(k+1)(m(k+1)+r))^{\overline{j+1,m,r}}} JWL_{m,r}^{(2)}(j, k). \end{aligned}$$

□

Az alábbi tételben a második típusú 1-színés r -Jacobi–Whitney–Lah-számok explicit formuláját adjuk meg.

6.11. Tétel. ([5, Theorem 3.6])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned} & JW L_{1,r}^{(2)}(n, k) \\ &= \frac{1}{(2k+r)!} \sum_{j=0}^{2k+r} (-1)^j \binom{2k+r}{j} (k-j+1)^{\bar{r}} ((k-j)(k-j+r))^{\overline{n,1,r}}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az 5.9. Tétel bizonyításának gondolatmenetét a másodfajú r -Jacobi–Stirling-számok helyett 1-színes r -Jacobi–Whitney–Lah-számokra alkalmazva hasonlóan mutatható meg az állítás, így ezt nem részletezzük. \square

A Lah-számokhoz hasonlóan a második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok is önortogonálisak.

6.12. Tétel. ([5, Theorem 3.7])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) JW L_{m,r}^{(2)}(j, k) = \delta_{n,k}.$$

Bizonyítás. Az állítást később a 6.15. Tételben bizonyítjuk általánosabb formában. \square

A következő tétel a második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok és az első-, illetve másodfajú Jacobi–Whitney-számok közötti összefüggéseket írja le.

6.13. Tétel. ([5, Theorem 3.8])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned} & \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) jw_{m,r}(j, k) = jw_{m,r}(n, k), \\ & \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} JW_{m,r}(n, j) JW L_{m,r}^{(2)}(j, k) = JW_{m,r}(n, k). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az azonosságokat később a 6.16. Tételben általánosabb formában igazoljuk. \square

Az 5.3. alfejezetben bevezetett átmeneti együtthatók segítségével megadhatóak a 6.8. Tételnél általánosabb kapcsolatok a négyzetesen emelkedő és négyzetesen süllyedő faktoriálisok között.

6.14. Tétel. ([5, Theorem 3.9])

Ha $n, r, s \geq 0$ és $m, l \geq 1$, akkor

$$x^{\overline{n, m, r}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, k) x^{\overline{k, l, s}},$$

$$x^{\overline{n, m, r}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) JW L_{l,s}^{(2)}(j, k) x^{\overline{k, l, s}},$$

$$x^{\overline{n, m, r}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, k) x^{\overline{k, l, s}},$$

$$x^{\overline{n, m, r}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{n-k} T_{m,l,r,s}(n, j) JW L_{l,s}^{(2)}(j, k) x^{\overline{k, l, s}}.$$

Bizonyítás. A harmadik és negyedik összefüggés az első kettőből $-x$ helyettesítéssel adódik.

Az első két azonosságot az 5.10. Tétel és a 6.8. Tétel segítségével bizonyítjuk. Ezek alapján

$$\begin{aligned} x^{\overline{n, m, r}} &= \sum_{j=0}^n JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) x^{\overline{j, m, r}} \\ &= \sum_{j=0}^n JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} T_{m,l,r,s}(j, k) x^{\overline{k, l, s}} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, k) x^{\overline{k, l, s}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{\overline{n,m,r}} &= \sum_{j=0}^n T_{m,l,r,s}(n,j) x^{\overline{j,l,s}} = \sum_{j=0}^n T_{m,l,r,s}(n,j) \sum_{k=0}^j JW L_{l,s}^{(2)}(j,k) x^{\overline{k,l,s}} \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n,j) JW L_{l,s}^{(2)}(j,k) x^{\overline{k,l,s}}.
\end{aligned}$$

□

Az alábbiakban ismét az átmeneti együtthatók alkalmazásával általánosítjuk először a 6.12. Tételt, majd a 6.13. Tételt.

6.15. Tétel. ([5, Theorem 3.10])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n,j) T_{m,l,r,s}(j,i) JW L_{l,s}^{(2)}(i,k) = T_{m,l,r,s}(n,k).$$

Bizonyítás. A 6.8. Tétel és a 6.14. Tétel megfelelő állításait használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
x^{\overline{n,m,r}} &= \sum_{j=0}^n JW L_{m,r}^{(2)}(n,j) x^{\overline{j,m,r}} \\
&= \sum_{j=0}^n JW L_{m,r}^{(2)}(n,j) \sum_{k=0}^j \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} T_{m,l,r,s}(j,i) JW L_{l,s}^{(2)}(i,k) x^{\overline{k,l,s}} \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n,j) T_{m,l,r,s}(j,i) JW L_{l,s}^{(2)}(i,k) x^{\overline{k,l,s}},
\end{aligned}$$

melyet az 5.10. Tétellel összevetve a bizonyítandó egyenlőséghez jutunk. □

6.16. Tétel. ([5, Theorem 3.11])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n,j) T_{m,l,r,s}(j,i) j w_{l,s}(i,k) &= j w_{m,r}(n,k), \\
\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{n-j} JW L_{m,r}^{(2)}(n,j) T_{m,l,r,s}(j,i) JW L_{l,s}^{(2)}(i,k) &= JW L_{l,s}(n,k).
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Az 5.6. Tétel és a 6.14. Tétel megfelelő összefüggései alapján

$$\begin{aligned} x^{\overline{n,m,r}} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) x^{\underline{i,l,s}} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} j w_{l,s}(i, k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) j w_{l,s}(i, k) x^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} JW_{m,r}(n, j) x^{\overline{j,m,r}} \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} JW_{m,r}(n, j) \sum_{k=0}^j \sum_{i=k}^j T_{m,l,r,s}(j, i) JW L_{l,s}^{(2)}(i, k) x^{\underline{k,l,s}} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{n-j} JW_{m,r}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) JW L_{l,s}^{(2)}(i, k) x^{\underline{k,l,s}}, \end{aligned}$$

melyeket az 5.6. Tétellel összevetve az igazolandó állításokat kapjuk. \square

Végül megvizsgáljuk, mi történik, ha a második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok definíciójában olyan első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számokat kombinálunk, ahol a színek száma és a kitüntetett elemek száma is különböző.

6.17. Tétel. ([5, Theorem 3.12])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n j w_{m,r}(n, j) JW_{l,s}(j, k) = \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) JW L_{l,s}^{(2)}(j, k).$$

Bizonyítás. Az 5.6. Tételből adódóan

$$\begin{aligned} x^{\overline{\overline{n,m,r}}} &= \sum_{j=0}^n j w_{m,r}(n, j) x^j = \sum_{j=0}^n j w_{m,r}(n, j) \sum_{k=0}^j JW_{l,s}(j, k) x^{\frac{k,l,s}{s}} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n j w_{m,r}(n, j) JW_{l,s}(j, k) x^{\frac{k,l,s}{s}}, \end{aligned}$$

amely a 6.14. Tétel alapján az állításunkat bizonyítja. □

Összefoglaló

I.

Az algebrai számelmélet egyik lényeges fejezete algebrai számtestek monogenitásával, továbbá adott indexű elemek keresésével, a minimális index és a testindex meghatározásával foglalkozik. Az értekezés I. részében ezt a problémakört vizsgáljuk két negyedfokú számtestcsalád esetén.

A $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ alakú biciklikus bikvadratikus számtestekkel kapcsolatos eredményeinket a disszertáció 2. fejezete tartalmazza. Tételünk igazolásához szükségünk van a K. S. Williams [80] által leírt egész bázishoz tartozó index formára, melyet Gaál I., Pethő A. és M. Pohst [29] számítottak ki. Megadták továbbá a biciklikus bikvadratikus számtestek testindexének jellemzését is.

Nyul G. [70] szükséges és elégséges feltételeket bizonyított az 1 indexű elemek létezésére teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestekben. Ennek kiterjesztéseként a 2.2. alfejezetben meghatározzuk, hogy pontosan mikor létezik páratlan prím, illetve legfeljebb 10 indexű elem teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestekben, és le is írjuk ezeket az adott indexű elemeket. Állításaink bizonyítása során többparaméteres index forma egyenleteket oldunk meg, amit az index forma reducibilitása tesz lehetővé. Biciklikus bikvadratikus számtestekben ugyanis az index forma három egész együtthatós kvadratikus forma szorzata, melyek közül teljesen komplex esetben kettő szemidefinit.

T. Nakahara [68] igazolta, hogy az 1 testindexű biciklikus bikvadratikus számtestek minimális indexeinek halmaza felülről nem korlátos. A 2.3. alfejezetben megmutatjuk, hogy ez a halmaz valójában egybeesik a pozitív egész számok halmazával, sőt minden természetes szám végtelen sok 1 testindexű, teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestnek a minimális indexe. A testindex többi lehetséges $a \in \{2, 3, 4, 6, 12\}$ értékére is vizsgáljuk, hogy a milyen A többszörösei esetén létezik végtelen sok olyan teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest, melynek testindexe a , minimális indexe pedig A .

A dolgozat 3. fejezetében a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ alakú tiszta negyedfokú számtestek esetén végzünk monogenitáshoz kapcsolódó vizsgálatokat. T. Funakura [25]

meghatározta egy egész bázisukat és az ahhoz tartozó index formát, amely itt is speciális szerkezetű, egy kvadratikus és egy negyedfokú forma szorzata. A tiszta negyedfokú számtestek monogenitása azonban négyzetmentes m esetén sincs teljeskörűen leírva. Gaál I. és Remete L. [34] azt sejtették, hogy pontosan két olyan négyzetmentes m egész szám van, melyre $m \equiv 9 \pmod{16}$ és a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ számtest monogén. Ezt megcáfolva igazoljuk, hogy ha az abc -sejtés igaz, akkor végtelen sok ilyen monogén számtest létezik. Foglalkozunk továbbá a négyzetmentes paraméterű tiszta negyedfokú számtestek minimális indexével, teljesen komplex esetben pedig megadjuk az összes minimális indexű elemet is.

II.

A Stirling-számok a leszámlláló kombinatorikában kiemelt fontosságúak. Az elsőfajú Stirling-számok egy szimmetrikus csoportban adott ciklusszámú permutációkat számlálnak össze, a másodfajú Stirling-számok pedig egy véges halmaz adott számú osztályba történő osztályozásainak számát adják meg. Ha az elemek között r darab kitüntetett is szerepel, melyeknek különböző ciklusokba, illetve osztályokba kell kerülniük, az első- és másodfajú r -Stirling-számok fogalmához jutunk. Ezeket L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] és R. Merris [58] vezették be. Gyimesi E. és Nyul G. [41] az r -permutációkat és r -osztályozásokat bizonyos színezési szabályokkal egészítették ki, és így kombinatorikus értelmezést adtak a korábban Mező I. [59] által definiált első- és másodfajú r -Whitney-számokra. A disszertáció II. részében a fenti általánosításokat alapul véve további Stirling-típusú kombinatorikus számokkal foglalkozunk.

A 4. fejezetben a G.-S. Cheon, J.-H. Jung és L. W. Shapiro [15] által bevezetett korlátozott r -Stirling-számokat vizsgáljuk, ahol az elemeket legfeljebb kételemű osztályokba osztályozzuk. A 4.2. alfejezetben kombinatorikusan bizonyítunk egy rekurziót, függőleges rekurziót, polinomos azonosságot és explicit formulát. Az előjeles korlátozott $(2s - r)$ -Stirling-számokat előállítjuk elsőfajú r -Stirling-számok és másodfajú s -Stirling-számok segítségével, továbbá megmutatjuk, hogy a másodfajú r -Stirling-számokat és a korlátozott s -Stirling-számokat kombinálva 2-színes másodfajú $(r + s)$ -Whitney-számokat kapunk.

Rögzített felső paraméterű másodfajú Stirling-számokkal mint együtthatókkal értelmezhetőek a Bell-polinomok. A 4.3. alfejezetben belátjuk, hogy a korlátozott r -Stirling-számok segítségével képzett korlátozott r -Bell-polinomok gyökei valósak, következésképpen a korlátozott r -Stirling-számok sorozata rögzített felső paraméter esetén log-konkáv és unimodális. A gyökökre vonatkozóan egy sejtést is megfogalmazunk és igazolunk egy ahhoz kapcsolódó részeredményt.

W. N. Everitt, K. H. Kwon, L. L. Littlejohn, R. Wellman és G. J. Yoon [22] a már korábban bevezetett Legendre–Stirling-számok kiterjesztéseként definiálták az első- és másodfajú Jacobi–Stirling-számokat, viszont az első- és másodfajú esetre eddig csak eltérő ötleteken alapuló kombinatorikus interpretációk születtek. Az 5. fejezetben nem csak a Jacobi–Stirling-számokra adunk egységes, a klasszikus Stirling-számok definícióihoz is illeszkedő kombinatorikus értelmezést, hanem általánosabb kombinatorikus számokat, első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számokat vezetünk be. Ezek a számok Whitney-színezett r -permutációkból, illetve r -osztályozásokból álló rendezett párokat számlálnak össze.

Az 5.2. alfejezetben a Jacobi–Whitney-számok kombinatorikus definíciójából kiindulva bizonyítunk többek között rekurziót, függőleges rekurziót, polinomos azonosságot és szimmetrikus polinomokkal történő előállítását. Megadunk egy explicit formulát a másodfajú Jacobi–Stirling-számokra, továbbá igazoljuk az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok ortogonalitását. Az 5.3. alfejezetben bevezetett átmeneti együtthatók segítségével általánosabb összefüggéseket mutatunk meg a különböző színszámú és kitüntetett elemszámú Jacobi–Whitney-számok között. Végül az 5.4. alfejezetben a Bell-típusú polinomokhoz hasonlóan értelmezett Jacobi–Dowling-polinomok valós gyökűségén keresztül vizsgáljuk a log-konkáv és unimodális tulajdonságokat.

A közönséges másodfajú Stirling-számok definíciójában osztályok helyett rendezett osztályokat tekintve a Lah-számokhoz jutunk. Ezekkel elsőként I. Lah [54, 55] foglalkozott, majd Nyul G. és Rácz G. [73] bevezették az r -Lah-számokat, G.-S. Cheon és J.-H. Jung [14] pedig r -Whitney–Lah-számokat értelmeztek, melyeknek Gyimesi E. és Nyul G. [41] szintén az elemek színezésével tulajdonított kombinatorikus tartalmat.

A dolgozat 6. fejezetében először a másodfajú Jacobi–Whitney-számok kombinatorikus definícióját módosítjuk úgy, hogy az elemeket rendezett osztályokba soroljuk. A 6.2. alfejezetben az így kapott első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok rekurzióját, függőleges rekurzióját és szimmetrikus polinomos előállítását igazoljuk különféle kombinatorikus gondolatmenetekkel.

A Lah-, r -Lah- és r -Whitney–Lah-számok rendre definiálhatóak az első- és másodfajú Stirling-, r -Stirling- és r -Whitney-számok segítségével is. Ennek mintájára az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok kombinálásával értelmezzük a második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokat, melyek meglepő módon nem esnek egybe a kombinatorikusan bevezetett első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokkal. A 6.3. alfejezetben a második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokra vonatkozóan bizonyítunk polinomos azonosságot, rekurziót, függőleges rekurziót. Igazoljuk továbbá a második típusú 1-színes r -Jacobi–Whitney–Lah-számok egy explicit formuláját, majd ismét az átmeneti együtthatókat alkalmazva általánosítjuk a második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok önortogonalitását, valamint az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számokkal való kapcsolatát.

Summary

I

An essential topic of algebraic number theory deals with monogeneity of algebraic number fields, finding elements with given index, determining the minimal index and field index. In Part I we discuss these problems in two families of quartic number fields.

Results on bicyclic biquadratic number fields of the form $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ are contained in Section 2. In order to prove our theorems we need the integral basis described by K. S. Williams [80] together with the corresponding index form calculated by I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst [29]. They also characterized the field index of bicyclic biquadratic number fields.

G. Nyul [70] proved necessary and sufficient conditions for the existence of elements with index 1 in totally complex bicyclic biquadratic number fields. As an extension of this result, in Subsection 2.2 we determine precisely when totally complex bicyclic biquadratic number fields contain elements with odd prime index, as well as elements with index at most 10, and we also describe all these elements with given index. In the proofs the reducibility of the index form enables us to solve multiparametric index form equations. In bicyclic biquadratic number fields the index form splits into the product of three quadratic forms with integer coefficients, and two of these factors are semidefinite in the totally complex case.

T. Nakahara [68] showed that the set of minimal indices of bicyclic biquadratic number fields with field index 1 is unbounded. In Subsection 2.3 we prove that this set just coincides with the set of positive integers, moreover every natural number occurs infinitely many times as minimal index of totally complex bicyclic biquadratic number fields with field index 1. For the other possible values $a \in \{2, 3, 4, 6, 12\}$ of the field index, we also study for which multiples A of a there exist infinitely many totally complex bicyclic biquadratic number fields with field index a and minimal index A .

In Section 3 we investigate pure quartic number fields of the form $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ in connection with monogeneity. T. Funakura [25] determined an integral basis and the corresponding index form, which has a special structure again, it is

the product of a quadratic and a quartic form. However, the monogeneity of pure quartic number fields is not completely described, not even if m is square-free. I. Gaál and L. Remete [34] formulated the conjecture that there exist exactly two square-free integers m satisfying $m \equiv 9 \pmod{16}$ and $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ being monogeneous. We refute it by showing that the number of such monogeneous pure quartic number fields is infinite if the *abc* conjecture is true. Furthermore, we study the minimal index of pure quartic number fields with square-free parameter, and in the totally complex case we also describe the elements with minimal index.

II

Stirling numbers are basic objects in enumerative combinatorics. Stirling numbers of the first kind count permutations with a given number of disjoint cycles in a symmetric group, while partitions of a finite set into a given number of blocks are counted by Stirling numbers of the second kind. If there are r distinguished elements, which have to stand in distinct cycles or blocks, we obtain r -Stirling numbers of the first and second kind. They were introduced by L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] and R. Merris [58]. E. Gyimesi and G. Nyul [41] added certain colouring rules to the notions of r -permutations and r -partitions, and in this way they provided combinatorial interpretations for r -Whitney numbers of the first and second kind defined previously by I. Mező [59]. In Part II of the thesis we study further Stirling-type combinatorial numbers based on the above generalizations.

In Section 4 we discuss restricted r -Stirling numbers introduced by G.-S. Cheon, J.-H. Jung and L. W. Shapiro [15]. These numbers count those r -partitions where the blocks have at most two elements. In Subsection 4.2 we prove combinatorially a recurrence relation, vertical recurrence, polynomial identity and explicit formula. We express the signed restricted $(2s - r)$ -Stirling numbers with r -Stirling numbers of the first kind and s -Stirling numbers of the second kind, furthermore we show that combining r -Stirling numbers of the second kind and restricted s -Stirling numbers we obtain 2-colour $(r + s)$ -Whitney numbers of the second kind.

One can define Bell polynomials whose coefficients are Stirling numbers of the second kind with fixed upper parameter. In Subsection 4.3 we prove that

restricted r -Bell polynomials derived from restricted r -Stirling numbers have only real roots, consequently for a fixed upper parameter the sequence of restricted r -Stirling numbers is log-concave and unimodal. About the roots we also formulate a conjecture and we present a partial result.

W. N. Everitt, K. H. Kwon, L. L. Littlejohn, R. Wellman and G. J. Yoon [22] defined Jacobi–Stirling numbers of the first and second kind as an extension of the earlier introduced Legendre–Stirling numbers. However, the existing combinatorial interpretations of the first and second kind cases are based on different ideas. In Section 5 we provide combinatorial meanings not only for Jacobi–Stirling numbers in a unified spirit that also fit with the definition of classical Stirling numbers, but we introduce more general combinatorial numbers, Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind. They count ordered pairs which consist of Whitney-coloured r -permutations and r -partitions.

By using the combinatorial definitions of Jacobi–Whitney numbers, in Subsection 5.2 we prove, among others, a recurrence relation, vertical recurrence, polynomial identity and expression with symmetric polynomials. We present an explicit formula for Jacobi–Stirling numbers of the second kind, furthermore we show the orthogonality of Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind. With the help of transition coefficients introduced in Subsection 5.3, we give more general connections between Jacobi–Whitney numbers where the number of colours as well as the number of distinguished elements are different. Finally, in Subsection 5.4 we investigate log-concavity and unimodality properties through the real-rootedness of Jacobi–Dowling polynomials that are defined similarly to Bell-type polynomials.

If we consider ordered blocks instead of blocks in the definition of ordinary Stirling numbers of the second kind, we obtain the Lah numbers. They were first studied by I. Lah [54, 55], then G. Nyul and G. Rácz [73] introduced r -Lah numbers, and r -Whitney–Lah numbers were defined by G.-S. Cheon and J.-H. Jung [14]. To the latter numbers E. Gyimesi and G. Nyul [41] gave a combinatorial meaning again by colouring the elements.

Firstly, in Section 6 we modify the combinatorial definition of Jacobi–Whitney numbers of the second kind such that we place the elements into ordered blocks. In this way we obtain Jacobi–Whitney–Lah numbers of the first type

whose recurrence relation, vertical recurrence and expression with symmetric polynomials are proved in Subsection 6.2 by using several combinatorial ideas.

Lah, r -Lah and r -Whitney–Lah numbers can be also defined with the help of Stirling, r -Stirling and r -Whitney numbers of the first and second kind, respectively. In a similar way, combining Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind we introduce Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type, which surprisingly do not coincide with the combinatorially defined Jacobi–Whitney–Lah numbers of the first type. In Subsection 6.3 we present a polynomial identity, recurrence relation, vertical recurrence for Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type. Furthermore, we prove an explicit formula for 1-colour r -Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type, then by using the transition coefficients again, we generalize the self-orthogonality of Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type, as well as their connection with Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind.

Irodalomjegyzék

- [1] G. E. Andrews, E. S. Egge, W. Gawronski and L. L. Littlejohn, *The Jacobi–Stirling numbers*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **120** (2013), 288–303.
- [2] G. E. Andrews, W. Gawronski and L. L. Littlejohn, *The Legendre–Stirling numbers*, Discrete Mathematics **311** (2011), 1255–1272.
- [3] G. E. Andrews and L. L. Littlejohn, *A combinatorial interpretation of the Legendre–Stirling numbers*, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), 2581–2590.
- [4] T. Arnóczki, *Elements with prime and small indices in bicyclic biquadratic number fields*, Periodica Mathematica Hungarica **77** (2018), 83–93.
- [5] T. Arnóczki, *Two types of Jacobi–Whitney–Lah numbers*, kézirat.
- [6] T. Arnóczki and G. Nyul, *Minimal index of bicyclic biquadratic number fields*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **50** (2020), 1–8.
- [7] T. Arnóczki and G. Nyul, *On a conjecture concerning the minimal index of pure quartic fields*, közlésre benyújtva.
- [8] T. Arnóczki and G. Nyul, *On restricted r -Stirling numbers or r -Bessel numbers*, közlésre benyújtva.
- [9] T. Arnóczki and G. Nyul, *New combinatorial numbers: the Jacobi–Whitney numbers*, közlésre benyújtva.
- [10] M. Benoumhani, *On some numbers related to Whitney numbers of Dowling lattices*, Advances in Applied Mathematics **19** (1997), 106–116.
- [11] A. Z. Broder, *The r -Stirling numbers*, Discrete Mathematics **49** (1984), 241–259.
- [12] L. Carlitz, *Weighted Stirling numbers of the first and second kind I*, Fibonacci Quarterly **18** (1980), 147–162.
- [13] M.-L. Chang, *Monogeneity in biquadratic fields*, International Journal of Pure and Applied Mathematics **31** (2006), 481–490.

-
- [14] G.-S. Cheon and J.-H. Jung, *r-Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Mathematics **312** (2012), 2337–2348.
- [15] G.-S. Cheon, J.-H. Jung and L. W. Shapiro, *Generalized Bessel numbers and some combinatorial settings*, Discrete Mathematics **313** (2013), 2127–2138.
- [16] J. Y. Choi and J. D. H. Smith, *On the unimodality and combinatorics of Bessel numbers*, Discrete Mathematics **264** (2003), 45–53.
- [17] R. B. Corcino and C. B. Corcino, *On the maximum of generalized Stirling numbers*, Utilitas Mathematica **86** (2011), 241–256.
- [18] R. B. Corcino, C. B. Corcino and R. Aldema, *Asymptotic normality of the (r, β) -Stirling numbers*, Ars Combinatoria **81** (2006), 81–96.
- [19] R. Dedekind, *Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **23** (1878), 3–37.
- [20] D. S. Dummit and H. Kisilevsky, *Indices in cyclic cubic fields*, in: Number Theory and Algebra (ed.: H. Zassenhaus), Academic Press, 1977, 29–42.
- [21] E. S. Egge, *Legendre–Stirling permutations*, European Journal of Combinatorics **31** (2010), 1735–1750.
- [22] W. N. Everitt, K. H. Kwon, L. L. Littlejohn, R. Wellman and G. J. Yoon, *Jacobi–Stirling numbers, Jacobi polynomials, and the left-definite analysis of the classical Jacobi differential expression*, Journal of Computational and Applied Mathematics **208** (2007), 29–56.
- [23] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn and R. Wellman, *Legendre polynomials, Legendre–Stirling numbers, and the left-definite spectral analysis of the Legendre differential expression*, Journal of Computational and Applied Mathematics **148** (2002), 213–238.
- [24] J.-H. Evertse and K. Györy, *Discriminant Equations in Diophantine Number Theory*, Cambridge University Press, 2017.

- [25] T. Funakura, *On integral bases of pure quartic fields*, Mathematical Journal of Okayama University **26** (1984), 27–41.
- [26] I. Gaál, *Diophantine Equations and Power Integral Bases*, Birkhäuser, 2019.
- [27] I. Gaál and B. Jadrijević, *Determining elements of minimal index in an infinite family of totally real bicyclic biquadratic number fields*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **39** (2017), 307–326.
- [28] I. Gaál and G. Nyul, *Index form equations in biquadratic fields: the p -adic case*, Publicationes Mathematicae Debrecen **68** (2006), 225–242.
- [29] I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst, *On the indices of biquadratic number fields having Galois group V_4* , Archiv der Mathematik **57** (1991), 357–361.
- [30] I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst, *On the resolution of index form equations in quartic number fields*, Journal of Symbolic Computation **16** (1993), 563–584.
- [31] I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst, *On the resolution of index form equations in biquadratic number fields III. The bicyclic biquadratic case*, Journal of Number Theory **53** (1995), 100–114.
- [32] I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst, *Simultaneous representation of integers by a pair of ternary quadratic forms – with an application to index form equations in quartic number fields*, Journal of Number Theory **57** (1996), 90–104.
- [33] I. Gaál and L. Remete, *Binomial Thue equations and power integral bases in pure quartic fields*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **32** (2014), 49–61.
- [34] I. Gaál and L. Remete, *Integral bases and monogeneity of pure fields*, Journal of Number Theory **173** (2017), 129–146.
- [35] Y. Gelineau and J. Zeng, *Combinatorial interpretations of the Jacobi–Stirling numbers*, Electronic Journal of Combinatorics **17** (2010), R70.

- [36] A. Granville, *abc allows us to count squarefrees*, International Mathematics Research Notices (1998), 991–1009.
- [37] M.-N. Gras and F. Tanoé, *Corps biquadratiques monogènes*, Manuscripta Mathematica **86** (1995), 63–79.
- [38] E. Grosswald, *Bessel Polynomials*, Springer-Verlag, 1978.
- [39] E. Gyimesi and G. Nyul, *A note on combinatorial subspaces and r -Stirling numbers*, Utilitas Mathematica **105** (2017), 137–139.
- [40] E. Gyimesi and G. Nyul, *A comprehensive study of r -Dowling polynomials*, Aequationes Mathematicae **92** (2018), 515–527.
- [41] E. Gyimesi and G. Nyul, *New combinatorial interpretations of r -Whitney and r -Whitney–Lah numbers*, Discrete Applied Mathematics **255** (2019), 222–233.
- [42] K. Györy, *Sur les polynômes à coefficients entiers et de discriminant donné III*, Publicationes Mathematicae Debrecen **23** (1976), 141–165.
- [43] M. Hall, *Indices in cubic fields*, Bulletin of the American Mathematical Society **43** (1937), 104–108.
- [44] H. Han and S. Seo, *Combinatorial proofs of inverse relations and log-concavity for Bessel numbers*, European Journal of Combinatorics **29** (2008), 1544–1554.
- [45] J. G. Huard, B. K. Spearman and K. S. Williams, *Integral bases for quartic fields with quadratic subfields*, Journal of Number Theory **51** (1995), 87–102.
- [46] B. Jadrijević, *Establishing the minimal index in a parametric family of bicyclic biquadratic fields*, Periodica Mathematica Hungarica **58** (2009), 155–180.
- [47] B. Jadrijević, *Solving index form equations in two parametric families of biquadratic fields*, Mathematical Communications **14** (2009), 341–363.
- [48] B. Jadrijević, *On elements with index of the form $2^a 3^b$ in a parametric family of biquadratic fields*, Glasnik Matematički **50** (2015), 43–63.

- [49] J.-H. Jung, I. Mező and J. L. Ramírez, *The r -Bessel and restricted r -Bell numbers*, Australasian Journal of Combinatorics **70** (2018), 202–220.
- [50] Zs. Kereskényi-Balogh and G. Nyul, *Stirling numbers of the second kind and Bell numbers for graphs*, Australasian Journal of Combinatorics **58** (2014), 264–274.
- [51] H. H. Kim and Z. Wolske, *Number fields with large minimal index containing quadratic subfields*, International Journal of Number Theory **14** (2018), 2333–2342.
- [52] T. Komatsu and J. L. Ramírez, *Generalized poly-Cauchy and poly-Bernoulli numbers by using incomplete r -Stirling numbers*, Aequationes Mathematicae **91** (2017), 1055–1071.
- [53] H. L. Krall and O. Frink, *A new class of orthogonal polynomials: the Bessel polynomials*, Transactions of the American Mathematical Society **65** (1949), 100–115.
- [54] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses **9** (1954), 7–15.
- [55] I. Lah, *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*, Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik **7** (1955), 203–212.
- [56] L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching Theory*, North-Holland, 1986.
- [57] T. Mansour, M. Schork and M. Shattuck, *The generalized Stirling and Bell numbers revisited*, Journal of Integer Sequences **15** (2012), Article 12.8.3.
- [58] R. Merris, *The p -Stirling numbers*, Turkish Journal of Mathematics **24** (2000), 379–399.
- [59] I. Mező, *A new formula for the Bernoulli polynomials*, Results in Mathematics **58** (2010), 329–335.
- [60] F. L. Miksa, L. Moser and M. Wyman, *Restricted partitions of finite sets*, Canadian Mathematical Bulletin **1** (1958), 87–96.

- [61] P. Mongelli, *Combinatorial interpretations of particular evaluations of complete and elementary symmetric functions*, Electronic Journal of Combinatorics **19** (2012), P60.
- [62] P. Mongelli, *Total positivity properties of Jacobi–Stirling numbers*, Advances in Applied Mathematics **48** (2012), 354–364.
- [63] Y. Motoda, *Notes on quartic fields*, Reports of the Faculty of Science and Engineering, Saga University, Mathematics **32** (2003), 1–19, **37** (2008), 1–8.
- [64] Y. Motoda, *On integral bases of certain real monogenic biquadratic fields*, Reports of the Faculty of Science and Engineering, Saga University, Mathematics **33** (2004), 9–22.
- [65] Y. Motoda and T. Nakahara, *Power integral bases in algebraic number fields whose Galois groups are 2-elementary abelian*, Archiv der Mathematik **83** (2004), 309–316.
- [66] Y. Motoda, T. Nakahara and K. H. Park, *On power integral bases of the 2-elementary abelian extension fields*, Trends in Mathematics **9** (2006), 55–63.
- [67] T. Nagel, *Zur Arithmetik der Polynome*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **1** (1922), 178–193.
- [68] T. Nakahara, *On the indices and integral bases of non-cyclic but abelian biquadratic fields*, Archiv der Mathematik **41** (1983), 504–508.
- [69] T. Nakahara, *On the minimum index of a cyclic quartic field*, Archiv der Mathematik **48** (1987), 322–325.
- [70] G. Nyul, *Power integral bases in totally complex biquadratic number fields*, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae **28** (2001), 79–86.
- [71] G. Nyul, *Non-monogeneity of multiquadratic number fields*, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis **10** (2002), 85–93.
- [72] Nyul G., *Monogenitási vizsgálatok algebrai számtestekben*, PhD doktori értekezés, Debreceni Egyetem, 2007.

-
- [73] G. Nyul and G. Rácz, *The r -Lah numbers*, Discrete Mathematics **338** (2015), 1660–1666.
- [74] G. Nyul and G. Rácz, *Matchings in complete bipartite graphs and the r -Lah numbers*, Czechoslovak Mathematical Journal **71** (2021), 947–959.
- [75] A. Pethő and M. E. Pohst, *On the indices of multiquadratic number fields*, Acta Arithmetica **153** (2012), 393–414.
- [76] B. K. Spearman, Q. Yang and J. Yoo, *Minimal indices of pure cubic fields*, Archiv der Mathematik **106** (2016), 35–40.
- [77] R. P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Annals of the New York Academy of Sciences **576** (1989), 500–535.
- [78] D. Stenlund, *On the connection between Stirling numbers and Bessel numbers*, Electronic Journal of Combinatorics **29** (2022), P1.40.
- [79] I. Tweddle, *James Stirling’s Methodus Differentialis: An Annotated Translation of Stirling’s Text*, Springer-Verlag, 2003.
- [80] K. S. Williams, *Integers of biquadratic fields*, Canadian Mathematical Bulletin **13** (1970), 519–526.
- [81] S. L. Yang and Z. K. Qiao, *The Bessel numbers and Bessel matrices*, Journal of Mathematical Research and Exposition **31** (2011), 627–636.

Publikációs lista

1. T. Arnóczki, *Elements with prime and small indices in bicyclic biquadratic number fields*, Periodica Mathematica Hungarica **77** (2018), 83–93.
2. T. Arnóczki and G. Nyul, *Minimal index of bicyclic biquadratic number fields*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **50** (2020), 1–8.
3. T. Arnóczki and G. Nyul, *On a conjecture concerning the minimal index of pure quartic fields*, közlésre benyújtva.
4. T. Arnóczki and G. Nyul, *On restricted r -Stirling numbers or r -Bessel numbers*, közlésre benyújtva.
5. T. Arnóczki and G. Nyul, *New combinatorial numbers: the Jacobi–Whitney numbers*, közlésre benyújtva.
6. T. Arnóczki, *Two types of Jacobi–Whitney–Lah numbers*, kézirat.

Előadáslista

1. *Elements with given index in bicyclic biquadratic number fields*, 23rd Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Ostrava (Csehország), 2017. augusztus 28. – szeptember 1.
2. *Monogeneity of bicyclic biquadratic number fields*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, Prága (Csehország), 2019. május 16–19.
3. *Biciklikus bikvadratikus számtestek monogenitása*, ADA konferencia, Debrecen, 2019. május 24–25.
4. *Minimal index of some quartic fields*, 24th Central European Number Theory Conference, Komárno (Szlovákia), 2019. szeptember 2–6.
5. *On a new approach in studying minimal indices*, Third meeting on monogeneity and power integral bases, online, 2021. május 13.
6. *Jacobi–Whitney numbers*, Number Theory Conference in honour of Professors Kálmán Győry, János Pintz and András Sárközy, Debrecen, 2022. július 4–8.