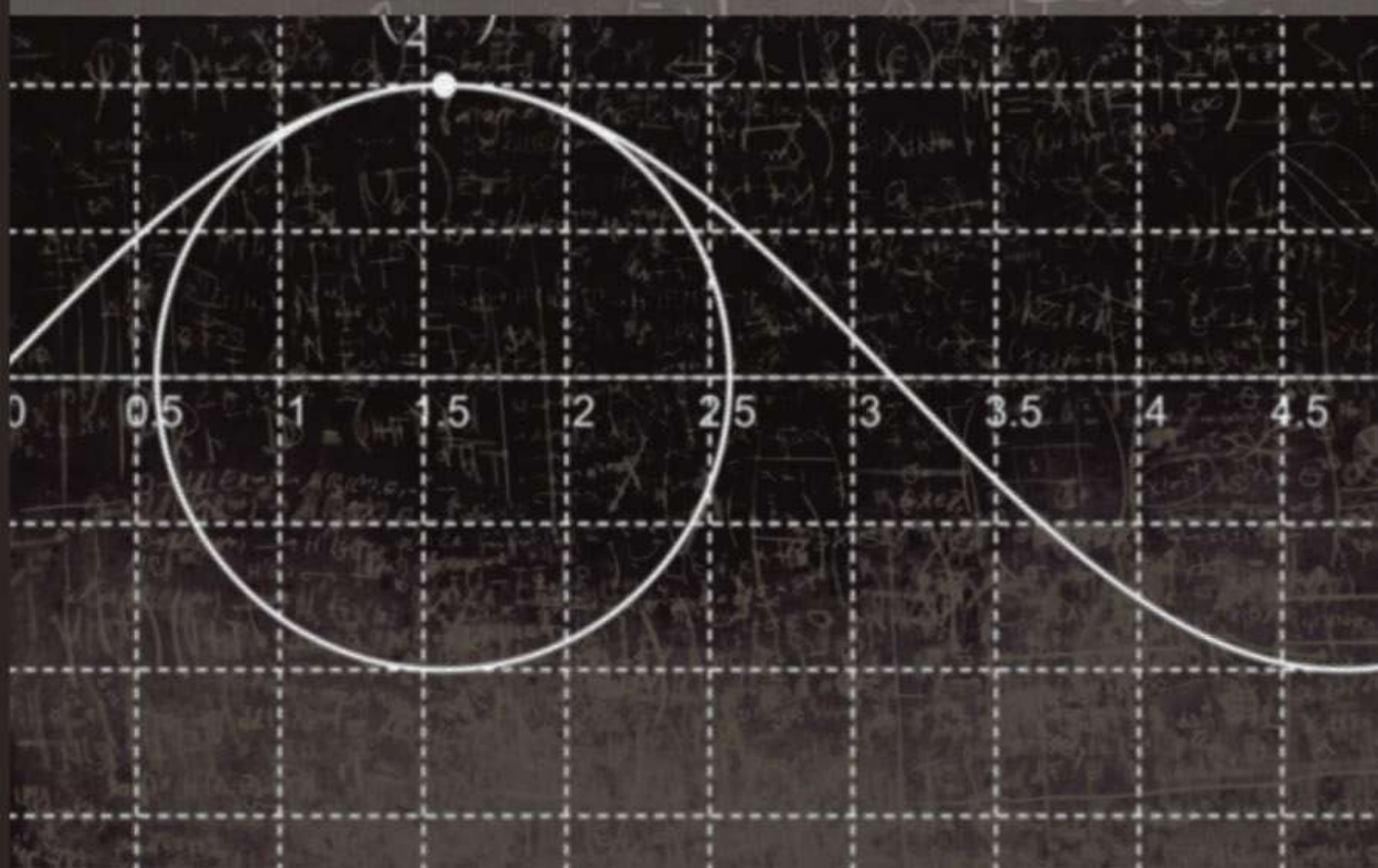


Dr. Kézi Csaba Gábor

Differenciálszámítás és alkalmazásai feladatgyűjtemény



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

**DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ÉS
ALKALMAZÁSAI
FELADATGYŰJTEMÉNY**

Dr. Kézi Csaba Gábor

Lektorok:

Dr. Kocsis Imre

tanszékvezető főiskolai tanár

DE Műszaki Kar, Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Dr. Nagy Gergő

tanársegéd

DE Természettudományi és Technológiai Kar, Analízis Tanszék
tudományos segédmunkatárs (MTA)

ISBN 978 963 318 580 3

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

Kiadta a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi

Készült a DE sokszorosítóüzemében, 2016-ban

Előszó

Ez a feladatgyűjtemény elsősorban a Debreceni Egyetem Műszaki Karának Matematika II. gyakorlatához készült oktatási segédanyagként. A jegyzet a precíz matematikai felépítésen túl számos, a műszaki és gazdasági életben felmerülő probléma megoldására alkalmazható módszert is bemutat.

A feladatgyűjtemény 333 darab részletesen kidolgozott feladatot tartalmaz. Az egyszerűbb típusfeladatoktól, a bonyolultabb versenyszintű feladatokig, széles skálán mozog a feladatok nehézségi szintje, ezáltal egyrészt segítséget nyújt a zárthelyi dolgozatokra és a vizsgákra való felkészüléshez, másrészt a későbbi tanulmányok során, vagy akár versenyekre való felkészüléshez is hasznos segítség lehet. Egyetemünk szinte minden magasabb szintű matematikát tanuló hallgatója találhat a számára megfelelő szintű, típusú és nehézségű feladatot, továbbá akár a matematika szakos tanulók vizsgára, záróvizsgára való felkészülését is segítheti. A feladatgyűjteményben a nehezebb, gondolkodtatóbb feladatokat $\star$ jelöli.

A feladatgyűjtemény elkészüléséért köszönettel tartozom a jegyzet lektorának, Dr. Kocsis Imre főiskolai tanárnak, a Műszaki Alaptárgyi Tanszék vezetőjének, aki hasznos információkkal látott el a példatár megírása során. Köszönettel tartozom Tóth Xénia Erzsébet mechatronikai mérnök MSc hallgatónak a feladatok gondos átolvasásáért. Köszönöm továbbá a Műszaki Alaptárgyi Tanszék minden oktatójának, valamint Dr. Baják Szabolcsnak és Tulipánt Krisztinának, akiktől a személyes beszélgetéseink során jó néhány hasznosítható ötletet meríthettem. A szakmai segítség mellett elengedhetetlen a család türelme, támogatása és biztatása. Köszönöm édesanyámnak, hogy mindenben mellettem állt és segített.

2016. április 9.

1. A differencia- és differenciálhányados fogalma

1.1. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = -3x + 5$ függvény differenciahányados függvényének legegyszerűbb alakját az $x_0 = 3$ helyen!

megoldás:

Mivel $f(x_0) = f(3) = -3 \cdot 3 + 5 = -4$, ezért a differenciahányados függvény $x \neq 3$ esetén:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-3x + 5 + 4}{x - 3} = \frac{-3x + 9}{x - 3} = \frac{-3 \cdot (x - 3)}{x - 3} = -3,$$

tehát a differenciahányados függvény a konstans -3 függvény.

1.2. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x+2}$ függvény differenciahányados függvényének legegyszerűbb alakját az $x_0 = 7$ helyen!

megoldás:

Mivel $f(x_0) = f(7) = \sqrt{7+2} = 3$, ezért a differenciahányados függvény $x \neq 7$ esetén:

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7} = \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 3}{\sqrt{x+2} + 3} = \\ &= \frac{x + 2 - 9}{(x - 7) \cdot \sqrt{x+2} + 3} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + 3}. \end{aligned}$$

1.3. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény differenciahányados függvényének legegyszerűbb alakját az $x_0 = 2$ helyen! A kapott eredményt felhasználva adjuk meg az f függvény differenciálhányadosának értékét az x_0 helyen! Határozzuk meg az f függvény grafikonjának $(x_0, f(x_0))$ pontjába húzott érintő egyenesének meredekségét, majd az egyenes egyenletét és irány-szögét!

megoldás:

Mivel $f(x_0) = f(2) = 2^2 = 4$, ezért a differenciahányados függvény $x \neq 2$ esetén:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \frac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

A differenciálhányados

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Az érintő egyenes meredeksége $m = 4$. Az egyenes egyenletét

$$y = mx + b = 4x + b$$

alakban keressük. Az egyenes illeszkedik a $(2, f(2)) = (2, 4)$ pontra, így

$$4 = 4 \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = -4,$$

tehát az egyenes egyenlete $y = 4x - 4$. Az egyenes irányszöge

$$\operatorname{tg} \alpha = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 75,96^\circ.$$

1.4. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény differenciálhányados függvényének legegyszerűbb alakját az $x_0 = 2$ helyen! A kapott eredményt felhasználva adjuk meg az f függvény differenciálhányadosának értékét az x_0 helyen! Határozzuk meg az f függvény grafikonjának $(x_0, f(x_0))$ pontjába húzott érintő egyenesének meredekségét, majd az egyenes egyenletét és irányszögét!

megoldás:

A differenciálhányados függvény:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \frac{2 - x}{2x \cdot (x - 2)} = -\frac{1}{2x}.$$

A differenciálhányados

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

Az érintő egyenes meredeksége $m = -\frac{1}{4}$, az érintő egyenes egyenlete

$$y = -\frac{1}{4}x + b.$$

Azonban az egyenes illeszkedik a $(2, f(2)) = (2, \frac{1}{2})$ pontra, így

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 1,$$

tehát az egyenes egyenlete $y = -\frac{1}{4}x + 1$. Az egyenes irányszöge

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \approx 165,96^\circ.$$

1.5. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2 - 4$ függvényt és az $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$ értékeket. Határozzuk meg az ezekhez tartozó differenciáhányadost, majd annak segítségével adjuk meg a függvény grafikonjának az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontjain áthaladó szelőjének meredekségét és írjuk fel a szelő egyenletét! Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a függvényt és a szelőt!

megoldás:

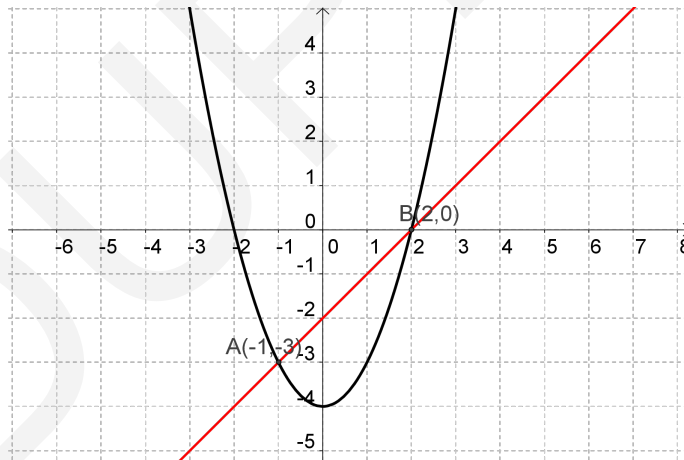
A szelő meredeksége a megadott pontok által meghatározott differenciáhányados:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(2^2 - 4) - ((-1)^2 - 4)}{2 - (-1)} = 1.$$

A szelő egyenlete:

$$y = mx + b = x + b.$$

Mivel a keresett egyenes illeszkedik az $(x_2, f(x_2)) = (2, 0)$ pontra, ezért teljesülnie kell a $0 = 2 + b$ egyenletnek, amiből $b = -2$ adódik, így $y = x - 2$ a keresett egyenes egyenlete.



1.6. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x-2}$ függvényt és az $x_1 = 3$ és $x_2 = 6$ értékeket. Számoljuk ki az ezekhez tartozó differenciáhányadost, majd annak segítségével adjuk meg a függvény grafikonjának az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontjain áthaladó szelőjének meredekségét és határozzuk meg a

szelő egyenletét! Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a függvényt és a szelőt!

megoldás:

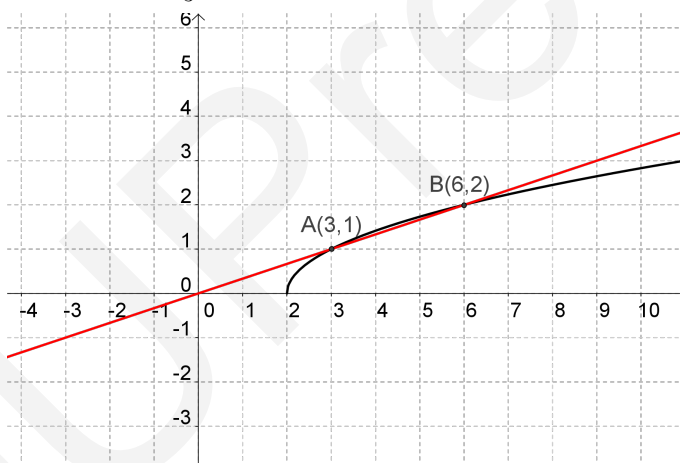
A szelő meredeksége a megadott pontok által meghatározott differenciahányados:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{6-2} - \sqrt{3-2}}{6-3} = \frac{1}{3}.$$

A szelő egyenlete:

$$y = mx + b = \frac{1}{3}x + b.$$

Mivel a keresett egyenes illeszkedik az $(x_2, f(x_2)) = (6, 2)$ pontra, ezért teljesülnie kell a $2 = \frac{1}{3} \cdot 6 + b$ egyenletnek, amiből $b = 0$ adódik, így a keresett egyenes egyenlete: $y = \frac{1}{3}x$.



1.7. Feladat. Egy ház tetejéről függőlegesen leejtünk egy labdát. A labda hely-idő függvénye $s(t) = 4,9t^2$ [m]. (Az időt másodpercben mérjük, s a kiindulási helytől mért távolság.) Állapítsuk meg, hogy 2 másodperccel a leejtést követően milyen távol lesz a labda a kiindulási helytől! Adjuk meg az átlagsebességet az első 3 másodpercben!

megoldás:

A feladatban hallgatólagosan $\downarrow_{\oplus}$ irányfelvétel van, azaz „függőleges, lefelé mutató pozitív irányítást” feltételezünk. A leejtés után 2 másodperccel a labda

$s(2) = 2^2 \cdot 4,9 = 19,6$ méter távolságban lesz a leejtés helyétől. Az átlagsebesség az első 3 másodpercben:

$$\frac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \frac{4,9 \cdot 3^2}{3} = 14,7 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

Megjegyezzük, hogy korábbi ismeretekből tudjuk, hogy egy szabadon eső test hely-idő függvénye, ha a közegellenállástól eltekintünk $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$. Ha a g értékét $9,8 [\text{m/s}^2]$ -nek tekintjük, akkor a feladatban szereplő hely-idő függvényt kapjuk. (Vö. „négyzetes úttörvény”.)

1.8. Feladat. Egy egyenes pályán mozgó test hely-idő függvénye $s(t) = t^2$. Adjuk meg az átlagsebességét a $t \in [2; 4]$ időintervallumban! (A megtett utat méterben, az eltelt időt másodpercben mérjük.)

megoldás:

Az átlagsebesség

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{4^2 - 2^2}{4 - 2} = \frac{16 - 4}{2} = 6 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

1.9. Feladat. Egy hűtőbe tett üdítőital hőmérsékletét a

$$T(t) = \frac{300}{3t^2 + 2t + 10} [^\circ\text{C}]$$

függvénnyel modellezzük, ahol t a hűtőbe helyezéstől eltelt időt jelenti órában.

- Határozzuk meg, hogy hány $[^\circ\text{C}]$ -os volt az üdítőital, amikor betettük a hűtőbe?
- Hány $[^\circ\text{C}]$ -os volt az üdítőital egy óra elteltével?
- Mennyi a hőmérsékletváltozás átlagos gyorsasága az első két órában?

megoldás:

a) Mivel

$$T(0) = \frac{300}{3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 10} = \frac{300}{10} = 30,$$

ezért az üdítőital $30[^\circ\text{C}]$ -os volt, amikor betettük a hűtőbe.

b) Mivel

$$T(1) = \frac{300}{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 10} = \frac{300}{15} = 20,$$

ezért $20[^\circ\text{C}]$ -os volt az üdítőital egy óra elteltével.

c) A hőmérsékletváltozás átlagos gyorsasága az első két órában

$$\frac{T(2) - T(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{300}{3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 10} - 30}{2} \approx -9,23 \left[\frac{^\circ\text{C}}{\text{h}} \right].$$

1.10. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - x$ függvény deriváltját az $x_0 = 1$ helyen a differenciahányados függvény határértékeként!

megoldás:

A differenciahányados függvény $x \neq 1$ esetén

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^3 - x - 0}{x - 1} = \frac{x \cdot (x^2 - 1)}{x - 1} = \\ &= \frac{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = x^2 + x, \end{aligned}$$

melynek határértéke az $x_0 = 1$ helyen

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) = 1 + 1 = 2.$$

1.11. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$ függvény deriváltját az $x_0 \neq 1$ helyen a differenciahányados függvény határértékeként!

megoldás:

A differenciahányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x_0}{x_0-1}}{x - x_0} = \frac{\frac{x \cdot x_0 - x - x_0 \cdot x + x_0}{(x-x_0)(x-1)(x_0-1)}}{x - x_0} = \\ &= -\frac{1}{(x-1) \cdot (x_0-1)}, \end{aligned}$$

melynek határértéke az x_0 helyen

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{1}{(x-1) \cdot (x_0-1)} = -\frac{1}{(x_0-1)^2}.$$

1.12. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 5x + 6$ függvény deriváltját az $x_0 = 2$ helyen a differenciahányados függvény határértékeként!

megoldás:

A differenciahányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 + 5x + 6 - 20}{x - 2} = \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} = \\ &= \frac{(x + 7) \cdot (x - 2)}{x - 2} = x + 7, \end{aligned}$$

melynek határértéke az $x_0 = 2$ helyen

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + 7) = 2 + 7 = 9.$$

Megjegyezzük, hogy az $x^2 + 5x - 14$ polinomot szorzattá alakíthatjuk úgy, hogy meghatározzuk annak gyökeit, ami jelen esetben $x_1 = -7$ és $x_2 = 2$, így a másodfokú polinom $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ gyöktényezős alakja szerint $x^2 + 5x - 14 = (x + 7) \cdot (x - 2)$ adódik. Ehelyett a lépés helyett elvégezhetjük az $(x^2 + 5x - 14)/(x - 2)$ polinomosztást is:

$$\begin{array}{r} (x^2 + 5x - 14) : (x - 2) = x + 7, \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline 7x - 14 \\ -(7x - 14) \\ \hline 0 \end{array}$$

amivel ugyanarra az eredményre jutunk.

1.13. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^3$ függvény deriváltját az $x_0 = 1$ helyen a differenciahányados függvény határértékeként!

megoldás:

A differenciahányados függvény

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)}{x - 1} = \\ &= x^2 + x + 1, \end{aligned}$$

melynek határértéke az $x_0 = 1$ helyen

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3.$$

Megjegyezzük, hogy az

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

azonosság alkalmazása helyett elvégezhetjük az $(x^3-1)/(x-1)$ polinomosztást is:

$$\begin{array}{r}
 (x^3-1) : (x-1) = x^2 + x + 1, \\
 -(x^3-x^2) \\
 \hline
 x^2-1 \\
 -(x^2-x) \\
 \hline
 x-1 \\
 -(x-1) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

amivel ugyanarra az eredményre jutunk.

1.14. Feladat. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvényt!

a) Adjuk meg a binomiális tétel felhasználásával az $f(x+h)$ függvényértéket!

b) Határozzuk meg az $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ hányadost, egyszerűsítsük is a kapott törtet!

c) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény deriváltját a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ definíció felhasználásával!

megoldás:

a) A binomiális tételt felhasználva

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

b) Felhasználva az előbb kapott eredményt is

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \\
 &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \frac{h \cdot (3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \\
 &= 3x^2 + 3xh + h^2.
 \end{aligned}$$

c) Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

1.15. Feladat. [25] Legyen K egy vállalat adott termékére vonatkozó költség-függvénye, amely függvény megadja x egységnyi termék előállítás költséget:

$$K(x) = x^2 + 4x + 20, \quad x > 0.$$

- a) Határozzuk meg a költség átlagos változási gyorsaságát, miközben az előállított termékek mennyiségét 100 egységről 102 egységre növeljük!
- b) Mennyi a költség pillanatnyi változási gyorsasága (azaz a határköltség) 100 egység termék esetén?

megoldás:

- a) A költségváltozás átlagos gyorsasága a megfelelő differenciahányados

$$\frac{K(102) - K(100)}{102 - 100} = \frac{102^2 + 4 \cdot 102 + 20 - (100^2 + 4 \cdot 100 + 20)}{2},$$

amit kiszámolva 206 egység adódik.

- b) A pillanatnyi változási gyorsaságot a differenciálhányados adja meg:

$$\begin{aligned} K'(100) &= \lim_{x \rightarrow 100} \frac{K(x) - K(100)}{x - 100} = \lim_{x \rightarrow 100} \frac{x^2 + 4x + 20 - 10.420}{x - 100} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 100} \frac{x^2 + 4x - 10.400}{x - 100} = \lim_{x \rightarrow 100} \frac{(x - 100) \cdot (x + 104)}{x - 100} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 100} x + 104 = 204, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy ha a termelést 100-ról 1 egységgel növeljük, akkor az előállítási költség közelítőleg 204 egységgel fog növekedni. Megjegyezzük, hogy az

$$x^2 + 4x - 10.400$$

polinomot szorzattá alakíthatjuk úgy, hogy megkeressük a gyökeket, azaz megoldjuk az $x^2 + 4x - 10.400 = 0$ másodfokú egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy $x_1 = -104$ és $x_2 = 100$, így az $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ felbontást alkalmazva

$$x^2 + 4x - 10.400 = (x - 100) \cdot (x + 104)$$

adódik. Ezen lépés helyett elvégezhetjük az $(x^2 + 4x - 10.400)/(x - 100)$ polinomosztást is:

$$\begin{array}{r} (x^2 + 4x - 10.400) : (x - 100) = x + 104 \\ -(x^2 - 100x) \\ \hline 104x - 10.400 \\ -(104x - 10.400) \\ \hline 0 \end{array}$$

1.16. Feladat. [28] Tegyük föl, hogy $8 \leq x \leq 30$ darab radiátor előállítási költségét a $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ függvény adja meg (€-ban), míg az x darab radiátor eladásából származó bevételt az $B(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$ függvény írja le. Üzemünk naponta 10 darab radiátort állít elő.

- a) Határozzuk meg a határköltséget (azaz a $K(x)$ költségfüggvény deriváltját az $x = 10$ helyen)!
- b) Határozzuk meg a határbevételt (azaz a $B(x)$ bevételi függvény deriváltját az $x = 10$ helyen)!

megoldás:

- a) A költség változási gyorsaságát a differenciálhányados adja meg:

$$\begin{aligned} K'(10) &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{K(x) - K(10)}{x - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 6x^2 + 15x - 550}{x - 10} \stackrel{*}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} (x^2 + 4x + 55) = 100 + 40 + 55 = 195. \end{aligned}$$

A $\star$ lépésben elvégeztük a polinomosztást:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 + 15x - 550) : (x - 10) = x^2 + 4x + 55 \\ -(x^3 - 10x^2) \\ \hline 4x^2 + 15x - 550 \\ -(4x^2 - 40x) \\ \hline 55x - 550 \\ -(55x - 550) \\ \hline 0 \end{array}$$

Tehát a határköltség 195 €.

- b) A határbevételi függvény $x_0 = 10$ helyen vett helyettesítési értéke a $B(x)$ függvény differenciálhányados függvényének az $x_0 = 10$ helyen vett helyettesítési értéke:

$$\begin{aligned} B'(10) &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{B(x) - B(10)}{x - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 3x^2 + 12x - 820}{x - 10} \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 10} (x^2 + 7x + 82) = 100 + 70 + 82 = 252. \end{aligned}$$

A $\star$ lépésben elvégeztük a polinomosztást:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 3x^2 + 12x - 820) : (x - 10) = x^2 + 7x + 82 \\
 -(x^3 - 10x^2) \\
 \hline
 7x^2 + 12x - 820 \\
 -(7x^2 - 70x) \\
 \hline
 82x - 820 \\
 -(82x - 820) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Tehát a határbevétel 252 €.

1.17. Feladat. [28] A kilövés után t másodperccel egy rakéta $3t^2$ méter magasságban van függőlegesen a földfelszín felett. Mekkora a rakéta sebessége 10 másodperccel a kilövés után?

megoldás:

Az $s(t) = 3t^2$ függvény differenciálhányadosát (deriváltját) kell meghatároznunk a $t_0 = 10$ helyen. A differenciahányados függvény

$$\begin{aligned}
 \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} &= \frac{s(t) - s(10)}{t - 10} = \frac{3t^2 - 300}{t - 10} = \frac{3 \cdot (t^2 - 100)}{t - 10} = \\
 &= \frac{3 \cdot (t + 10) \cdot (t - 10)}{t - 10} = 3 \cdot (t + 10).
 \end{aligned}$$

Ennek határértéke a $t_0 = 10$ helyen

$$v(10) = s'(10) = \lim_{t \rightarrow 10} 3 \cdot (t + 10) = 60 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

1.18. Feladat. [28] Egy robbanás egy szikladarabot 49 [m/s] sebességgel repít fel, pontosan függőleges irányban. A kő $s(t) = 49t - 4,9t^2$ méter magasságba emelkedik t másodperc elteltével.

- Milyen magasra emelkedik a szikladarab?
- Mekkora a sebesség $78,4$ méter magasságban, amikor a szikladarab felfelé tart és amikor ugyanebben a magasságban halad lefelé?
- Mekkora a gyorsulás?
- A robbanás után hány másodperccel ér újra földet a szikladarab?
- Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $s(t)$ függvényt, valamint a sebesség-idő és a gyorsulás-idő függvényeket!

megoldás:

- a) Hallgatólágoosan $\uparrow_{\oplus}$ irányfelvétel van. A szikladarab akkor éri el a lehető legnagyobb magasságot, amikor a sebessége 0. A sebesség-idő függvény

$$\begin{aligned} v(t_0) = s'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{49t - 4,9t^2 - (49t_0 - 4,9t_0^2)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{49 \cdot (t - t_0) - 4,9 \cdot (t^2 - t_0^2)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{49 \cdot (t - t_0) - 4,9 \cdot (t - t_0) \cdot (t + t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0) \cdot (49 - 4,9 \cdot (t + t_0))}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} 49 - 4,9 \cdot (t + t_0) = 49 - 9,8t_0, \end{aligned}$$

így $v(t_0) = 0$ pontosan akkor, ha $49 - 9,8t_0 = 0$, azaz ha $t_0 = 5$. Tehát a robbanás után 5 másodperccel lesz legmagasabban a szikladarab, ekkor

$$s(5) = 49 - 4,9 \cdot 5^2 = 122,5 \text{ [m]}$$

magasan van.

- b) A 78,4 méter magassághoz tartozó sebesség kiszámításához először kiszámoljuk, melyek azok a t időpillanatok, amikor a szikladarab éppen 78,4 méter magasságban van, vagyis amikor

$$s(t) = 49t - 4,9t^2 = 78,4,$$

amiből azt kapjuk, hogy $-4,9t^2 + 49t - 78,4 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldása

$$t_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 4,9 \cdot 78,4}}{-9,8} = \frac{-49 \pm 29,4}{-9,8},$$

így $t_1 = 2$, $t_2 = 8$. Mivel az előbb meghatároztuk, hogy a sebesség-idő függvény $v(t) = 49 - 9,8t$, ezért

$$v(2) = 49 - 9,8 \cdot 2 = 29,4 \quad v(8) = 49 - 9,8 \cdot 8 = -29,4.$$

A sebesség nagysága mindkét időpontban 29,4 [m/s]. Mivel $v(2) > 0$, ezért a $t = 2$ időpillanatban fölfelé, $v(8) < 0$ miatt pedig a $t = 8$ időpillanatban lefelé mozog a szikladarab.

c) A gyorsulás a sebesség változási gyorsasága, így

$$\begin{aligned} a(t_0) &= v'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{49 - 9,8t - (49 - 9,8t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{-9,8 \cdot (t - t_0)}{t - t_0} = -9,8, \end{aligned}$$

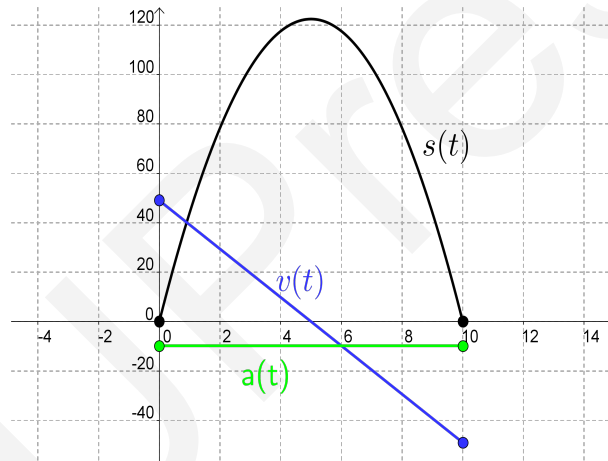
így a gyorsulás minden időpillanatban állandó, $-9,8 \text{ [m/s}^2\text{]}$.

d) A szikladarab abban a t időpillanatban ér földet, amikor $s(t) = 0$. Mivel

$$49t - 4,9t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t \cdot (49 - 4,9t) = 0,$$

ezért $t_1 = 0$, illetve $t_2 = 10$. A $t = 0$ időpillanat a robbanás időpontja, a szikladarab tehát 10 másodperc elteltével ér földet.

e) Az $s(t) = 49t - 4,9t^2$, a $v(t) = 49 - 9,8t$ és az $a(t) = -9,8$ függvényeket kell ábrázolnunk:



1.19. Feladat. Legyen I egy rögzített, nyílt intervallum! Bizonyítsuk be, hogy ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ páros, differenciálható függvény, akkor a deriváltja páratlan!

megoldás:

Az f függvény páros, ezért $f(-x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén. Mivel

$$\begin{aligned} f'(-x_0) &= \lim_{-x \rightarrow -x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{-x + x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{-(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -f'(x_0), \end{aligned}$$

így f' páratlan.

1.20. Feladat. Legyen I egy rögzített, nyílt intervallum! Bizonyítsuk be, hogy ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ páratlan, differenciálható függvény, akkor a deriváltja páros!

megoldás:

Az f függvény páratlan, ezért $f(-x) = -f(x)$ minden $x \in I$ esetén. Mivel

$$\begin{aligned} f'(-x_0) &= \lim_{-x \rightarrow -x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{-x + x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-f(x) + f(x_0)}{-(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{f(x) - f(x_0)}{-(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \end{aligned}$$

így f' páros.

1.21. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x + 1| + |x + 1|$ függvény differenciálható az $x_0 = -1$ helyen!

megoldás:

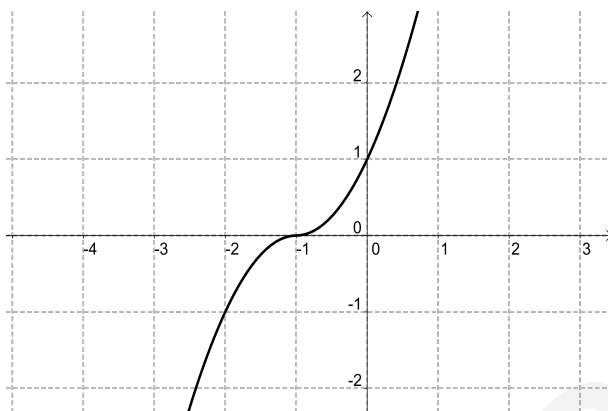
A bal oldali derivált az $x_0 = -1$ helyen

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x \cdot (-x - 1) - x - 1 - 0}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x + 1) \cdot (-x - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x - 1) = 0, \end{aligned}$$

a jobb oldali derivált

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x \cdot (x + 1) + x + 1 - 0}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1+} (x + 1) = 0, \end{aligned}$$

így $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, azaz az $x_0 = -1$ helyen a bal oldali és jobb oldali derivált megegyezik, tehát a függvény differenciálható az $x_0 = -1$ helyen. Megjegyezzük, hogy a függvény minden $x \in \mathbb{R}$ helyen differenciálható.



1.22. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható az $x_0 = 0$ helyen! Határozzuk meg az $f'(0)$ értéket!

megoldás:



A differenciáhányados függvény

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = x \cdot \sin \frac{1}{x},$$

amelynek határértéke az $x_0 = 0$ helyen 0, ugyanis

$$0 \leq \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0.$$

Tehát a függvény differenciálható az $x_0 = 0$ helyen, és $f'(0) = 0$.

1.23. Feladat. Differenciálható-e az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény az $x_0 = 0$ helyen?

megoldás:

A differenciáhányados függvény az $x_0 = 0$ helyen

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

A differenciáhányados függvény határértéke az $x_0 = 0$ helyen

$$\lim_{x \rightarrow 0} d(x) = 0,$$

így f differenciálható az $x_0 = 0$ helyen és $f'(0) = 0$.

1.24. Feladat. Differenciálható-e az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény az $x_0 = 0$ helyen?

megoldás:

A differenciáhányados függvény az $x_0 = 0$ helyen

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{x - 0}{x - 0} = 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \end{cases}$$

ezért nem létezik a differenciahányados függvény határértéke az $x_0 = 0$ helyen, tehát f nem differenciálható az $x_0 = 0$ helyen.

2. A differenciálhatóság és a folytonosság közötti kapcsolat

2.1. Feladat. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény folytonos. Mutassuk meg, hogy az $x_0 = 0$ helyen mégsem differenciálható!

megoldás:

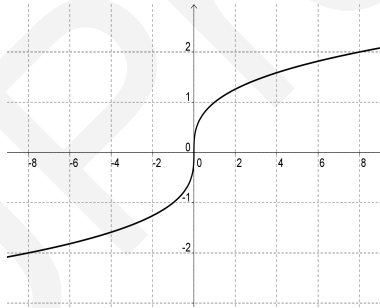
Az f függvény differenciahányados függvénye az $x_0 = 0$ helyen

$$d(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty.$$

Ezért létezik ugyan a differenciahányados határértéke az $x_0 = 0$ helyen, de nem véges.



2.2. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x+2|}$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában folytonos! Határozzuk meg azokat a helyeket, amelyekben a függvény nem differenciálható!

megoldás:

Az $x \mapsto |x|$ és az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvények folytonosak, továbbá folytonos függvények kompozíciója is folytonos, így az f függvény folytonos. Mivel

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}, & \text{ha } x \geq -2 \\ \sqrt{-x-2}, & \text{ha } x < -2, \end{cases}$$

ezért egyedül az $x_0 = -2$ helyen lehet „probléma” a differenciálhatósággal, így írjuk fel az $x_0 = -2$ helyen a differenciáhányados függvényt:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{|x+2|}}{x+2}.$$

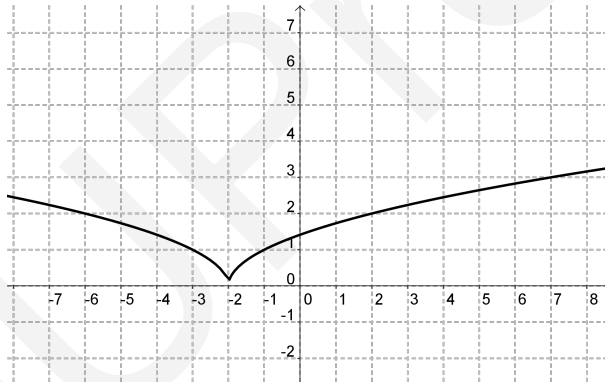
Ennek a bal oldali határértéke

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{\sqrt{|x+2|}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{\sqrt{-(x+2)}}{x+2} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{\sqrt{-(x+2)}}{-(x+2)} = - \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{1}{\sqrt{-(x+2)}} = -\infty. \end{aligned}$$

A jobb oldali határérték

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{\sqrt{|x+2|}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{\sqrt{x+2}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \infty.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, így az $x_0 = -2$ helyen f nem differenciálható.



2.3. Feladat. Ábrázoljuk az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ||x-5|-3|$ függvényt! Mutassuk meg, hogy az f függvény folytonos, továbbá állapítsuk meg, hogy értelmezési tartományának mely pontjaiban nem differenciálható!

megoldás:

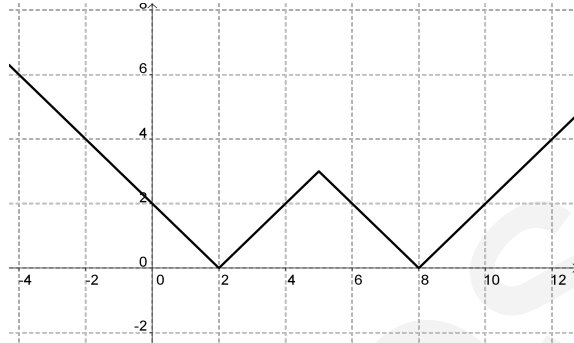
Mivel

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{ha } x \geq 5 \\ -x+5, & \text{ha } x < 5 \end{cases},$$

ezért

$$f(x) = \begin{cases} |x - 8|, & \text{ha } x \geq 5 \\ |-x + 2|, & \text{ha } x < 5 \end{cases}.$$

Ez alapján a függvény grafikonja:



Tehát az $x_0 = 2; 5; 8$ pontokban lehet „probléma” a differenciálhatósággal, így ezeken a helyeken ellenőrizzük a differenciálhatóságot. Mivel az $x_0 = 2$ helyen a bal oldali derivált

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|-x + 5 - 3|}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|-x + 2|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x + 2}{x - 2} = -1, \end{aligned}$$

a jobb oldali derivált pedig

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|-x + 5 - 3|}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|-x + 2|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1, \end{aligned}$$

ezért $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, így f nem differenciálható az $x_0 = 2$ helyen. Hasonlóan mutatható meg, hogy az $x_0 = 5$, illetve az $x_0 = 8$ helyen sem differenciálható a függvény.

2.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény az $x_0 = 0$ helyen folytonos, de nem differenciálható!

megoldás:

A függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban, mert ott létezik a határértéke, és az 0, ugyanis

$$0 \leq \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0.$$

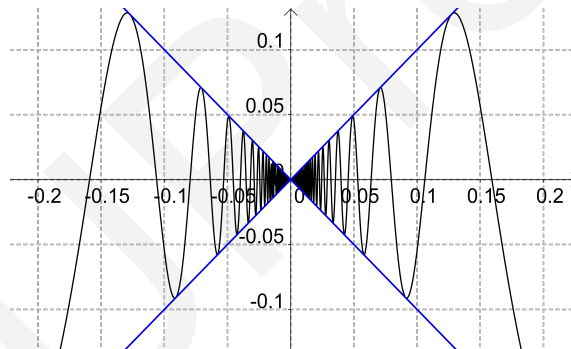
A differenciálhányados függvény

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \frac{1}{x},$$

aminek nem létezik az $x_0 = 0$ helyen határértéke, mert például az $\frac{1}{2n\pi}$ és az $\frac{1}{(2n+1)\pi}$ nullsorozatokat véve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} \right) = 0 \quad \text{illetve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{1}{\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}} \right) = 1.$$

Tehát a függvény nem differenciálható az $x_0 = 0$ helyen. A feladatban szereplő függvény grafikonját az alábbi ábra szemlélteti:



2.5. Feladat. Differenciálható-e az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ha } x \leq 1 \\ 2x - 3, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

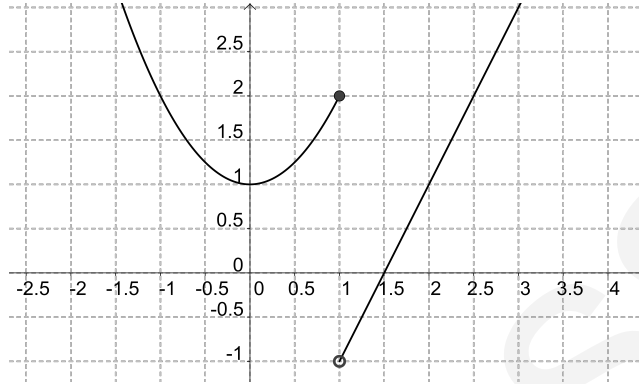
függvény az $x_0 = 1$ helyen?

megoldás:

Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2 \quad \text{valamint} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1,$$

így $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, tehát a függvény nem folytonos az $x_0 = 1$ helyen, így ott nem is differenciálható.



2.6. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 1 \\ ax + 1 - a, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény folytonos! Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy f differenciálható legyen az $x_0 = 1$ helyen!

megoldás:

Az f függvény bal oldali határértéke az 1 helyen:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 = 1,$$

az f függvény jobb oldali határértéke az 1 helyen:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a \cdot 1 + 1 - a = 1,$$

továbbá $f(1) = 1$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1),$$

így f folytonos. A bal oldali derivált $f'_-(x) = 2x$, amelynek az $x_0 = 1$ helyen a helyettesítési értéke $f'_-(1) = 2 \cdot 1 = 2$. A jobb oldali derivált

$$f'_+(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax + 1 - a - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a \cdot (x - 1)}{x - 1} = a.$$

A bal oldali és jobb oldali deriválnak egybe kell esnie ahhoz, hogy a függvény differenciálható legyen, így $a = 2$ adódik.

2.7. Feladat. Határozzuk meg az m és b valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ha } x \leq 1 \\ mx + b, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen az $x_0 = 1$ helyen!

megoldás:

A függvény bal oldali deriváltja

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + x + 1) = 3, \end{aligned}$$

jobb oldali deriváltja

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{mx + b - (m + b)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{m \cdot (x - 1)}{x - 1} = m. \end{aligned}$$

Egy függvény pontosan akkor differenciálható az x_0 helyen, ha ott a bal oldali és jobb oldali deriváltja megegyezik, ezért $m = 3$. A differenciálhatósághoz szükséges az adott pontbeli folytonosság, amihez szükséges az adott pontban a bal oldali és jobb oldali határérték egyenlősége. Így a

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \Rightarrow 1 = m \cdot 1 + b.$$

Az m értékét már ismerjük. Azt behelyettesítve $b = -2$ adódik. Ezzel meghatároztuk a kért paraméterek értékét.

2.8. Feladat. Az a és b paraméterek mely értéke esetén lesz az

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{ha } x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & \text{ha } x > -1 \end{cases}$$

függvény mindenütt differenciálható?

megoldás:

Egyedül az $x_0 = -1$ helyen lehet probléma a differenciálhatósággal. Ezen

a helyen szükségképpen folytonosnak kell lennie a függvénynek, amihez teljesülni kell a

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$$

egyenlőségnek. Ez jelen esetben az

$$a \cdot (-1) + b = a \cdot (-1)^3 + (-1) + 2b$$

egyenletet jelenti, amiből $b = 1$ adódik. A differenciálhatósághoz a bal oldali és jobb oldali deriváltaknak egybe kell esni. A bal oldali derivált

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{ax + b - (-a + b)}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{a \cdot (x + 1)}{x + 1} = a, \end{aligned}$$

a jobb oldali derivált

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{ax^3 + x + a + 1}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{a \cdot (x^3 + 1) + x + 1}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{a \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) + x + 1}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x + 1) \cdot (a \cdot (x^2 - x + 1) + 1)}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} a \cdot (x^2 - x + 1) + 1 = 3a + 1. \end{aligned}$$

Így teljesülnie kell a $3a + 1 = a$ egyenletnek, amiből $a = -\frac{1}{2}$ adódik.

2.9. Feladat. ★ Az m és b paraméterek mely értéke mellett lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } x < \pi \\ mx + b, & \text{ha } x \geq \pi \end{cases}$$

függvény differenciálható az $x_0 = \pi$ helyen!

megoldás:

A differenciálhatóságnak szükséges feltétele a folytonosság. Ehhez az $x_0 = \pi$ helyen meg kell egyeznie a függvény bal oldali és jobb oldali határértékének. A bal oldali határérték

$$\lim_{x \rightarrow \pi-} f(x) = \sin \pi = 0,$$

a jobb oldali határérték

$$\lim_{x \rightarrow \pi+} f(x) = m \cdot \pi + b.$$

Tehát teljesülni kell az

$$m \cdot \pi + b = 0$$

egyenletnek. Másrészt ahhoz, hogy a függvény differenciálható legyen, a bal oldali és jobb oldali deriváltjának meg kell egyeznie az $x_0 = \pi$ helyen. A bal oldali derivált

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\sin x - \sin \pi}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\sin x}{x - \pi} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\sin\left(\frac{x-\pi+x+\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi-x+x+\pi}{2}\right)}{x - \pi} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\sin\left(\frac{x-\pi}{2} + \frac{x+\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+\pi}{2} - \frac{x-\pi}{2}\right)}{x - \pi} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+\pi}{2}\right) - \left(\sin\left(\frac{x+\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)\right)}{x - \pi} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}{x - \pi} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}{\frac{x-\pi}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}{\frac{x-\pi}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}{\frac{x-\pi}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi-} \cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right) = \cos \pi = -1. \end{aligned}$$

A jobb oldali derivált

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow \pi+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow \pi+} \frac{mx + b - (m\pi + b)}{x - \pi} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi+} \frac{m(x - \pi)}{x - \pi} = m. \end{aligned}$$

Mivel $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ egyenlőségnek teljesülnie kell a differenciálhatósághoz, ezért $m = -1$ adódik. Másrészt a folytonosságból adódóan az $m \cdot \pi + b = 0$ egyenletnek is fenn kell állnia, amiből következik, hogy $b = \pi$.

3. Deriválási szabályok

3.1. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva, hogy összeget tagonként deriválhatunk, továbbá, hogy függvény számszorosának deriváltja a derivált számszorosa (azaz a számszorító differenciáláskor változatlan marad)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3)' + (3x^2)' - 1' = 2 \cdot (x^3)' + 3 \cdot (x^2)' - 1' = \\ &= 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 0 = 6x^2 + 6x. \end{aligned}$$

3.2. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^7 + 8x^2 - 3$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva az összeadásra, illetve konstansszorzóra vonatkozó deriválási szabályokat

$$f'(x) = (x^7)' + (8x^2)' - 3' = 7x^6 + 16x.$$

3.3. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = 5x^7 + 6x^2 + 7$ függvényt!

megoldás:

Összeget tagonként deriválva

$$f'(x) = 35x^6 + 12x.$$

3.4. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva, hogy $\frac{1}{x} = x^{-1}$, továbbá, hogy $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, majd az összeget tagonként deriválva

$$f'(x) = 1 - x^{-2} - 2x^{-3} = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}.$$

3.5. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ függvényt!

megoldás:

A $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, illetve a $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ azonosságok felhasználása után az összeget tagonként deriválva azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 2x + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$$

3.6. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = 3 \sin x + 5 \cos x + 2 \operatorname{sh} x$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva az összeadásra, illetve konstansszorzóra vonatkozó deriválási szabályokat

$$f'(x) = 3 \cos x - 5 \sin x + 2 \operatorname{ch} x.$$

3.7. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = 5^x - \log_4 x$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva a különbség függvényre vonatkozó deriválási szabályt:

$$f'(x) = 5^x \cdot \ln 5 - \frac{1}{x \cdot \ln 4}.$$

3.8. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = 3^x \cdot \log_2 x$ függvényt!

megoldás:

A szorzat deriválási szabályát felhasználva

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \log_2 x + 3^x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \log_2 x + \frac{3^x}{x \cdot \ln 2}.$$

3.9. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x \cdot \ln x$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva a szorzásra vonatkozó deriválási szabályt

$$f'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

3.10. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = 4^x \cdot \lg x$ függvényt!

megoldás:

A szorzat deriválási szabálya szerint

$$f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 \cdot \lg x + 4^x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10}.$$

3.11. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{2^x}{\log_3 x}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva a hányados függvényre vonatkozó deriválási szabályt

$$f'(x) = \frac{(2^x)' \cdot \log_3 x - 2^x \cdot (\log_3 x)'}{\log_3^2 x} = \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \log_3 x - 2^x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3}}{\log_3^2 x}.$$

3.12. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva a hányados függvényre vonatkozó deriválási szabályt

$$f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot \sin x - e^x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$$

3.13. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$ függvényt!

megoldás:

Ha $u(x) = e^x$ és $v(x) = \sin x + \cos x$, akkor a szorzat deriválási szabálya szerint $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. Ezt felhasználva

$$f'(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x) + e^x \cdot (\cos x - \sin x) = 2 \cos x e^x.$$

3.14. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{\cos x}$ függvényt!

megoldás:

Hányadost úgy deriválunk, hogy a számláló deriváltját megszorozzuk a nevezővel, ebből levonjuk a számlálónak a nevező deriváltjával való szorzatát, majd az így kapott különbséget elosztjuk a nevező négyzetével. Ezt felhasználva

$$f'(x) = \frac{(2x + \cos x) \cdot \cos x - (x^2 + \sin x) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}.$$

Felbontva a zárójeleket, és felhasználva a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ trigonometrikus azonosságot

$$f'(x) = \frac{1 + 2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}.$$

3.15. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x} + x^2}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ azonosságot, majd alkalmazva a hányados deriválási szabályát

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (\sqrt{x} + x^2) - \sin x \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x\right)}{(\sqrt{x} + x^2)^2}.$$

3.16. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{x^2 + \sqrt[7]{x}}{x^3}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva a $\sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$ azonosságot, majd alkalmazva a hányados deriválási szabályát

$$f'(x) = \frac{\left(2x + \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}\right) \cdot x^3 - (x^2 + \sqrt[7]{x}) \cdot 3x^2}{x^6}.$$

3.17. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{e^x}$ függvényt.

megoldás:

Felhasználva a hányados függvény deriválási szabályát

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 3x - 1)' \cdot e^x - (x^2 + 3x - 1) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{(2x + 3) \cdot e^x - (x^2 + 3x - 1) \cdot e^x}{e^{2x}} \end{aligned}$$

A számlálóban e^x -et kiemelve, majd elvégezve az egyszerűsítést

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 3) \cdot e^x - (x^2 + 3x - 1) \cdot e^x}{e^{2x}} = \\ &= \frac{e^x \cdot (2x + 3 - x^2 - 3x + 1)}{e^{2x}} = \frac{4 - x - x^2}{e^x}. \end{aligned}$$

3.18. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = (x^2 + 7x + 2) \cdot \sin x$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva a szorzat függvény deriválási szabályát

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 7x + 2)' \cdot \sin x + (x^2 + 7x + 2) \cdot (\sin x)' = \\ &= (2x + 7) \cdot \sin x + (x^2 + 7x + 2) \cdot \cos x. \end{aligned}$$

3.19. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{3^x}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva a hányados függvény és szorzat függvény deriválási szabályát

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x \cdot \sin x)' \cdot 3^x - x \cdot \sin x \cdot (3^x)'}{3^{2x}} = \\ &= \frac{(\sin x + x \cdot \cos x) \cdot 3^x - x \cdot \sin x \cdot 3^x \cdot \ln 3}{3^{2x}}. \end{aligned}$$

3.20. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot 5^x$ függvényt!

megoldás:

Ha $u(x)$, $v(x)$ és $w(x)$ differenciálható függvények, akkor

$$(u(x) \cdot v(x) \cdot w(x))' = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \cdot \sin x \cdot 5^x + x^2 \cdot (\sin x)' \cdot 5^x + x^2 \cdot \sin x \cdot (5^x)' = \\ &= 2x \cdot \sin x \cdot 5^x + x^2 \cdot \cos x \cdot 5^x + x^2 \cdot \sin x \cdot 5^x \ln 5. \end{aligned}$$

3.21. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \ln(\sin x)$ függvényt!

megoldás: A külső függvény az $\ln x$, a belső függvény a $\sin x$. Először deriváljuk a külső függvényt, amire $\frac{1}{x}$ adódik, majd abba „beírjuk” az eredeti belső függvényt, végül a kapott eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

3.22. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \ln(x^2 + 5x - 1)$ függvényt!

megoldás: A külső függvény az $\ln x$, a belső függvény $x^2 + 5x - 1$. Először deriváljuk a külső függvényt, amire $\frac{1}{x}$ adódik, majd abba „beírjuk” az eredeti belső függvényt, végül a kapott eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 5x - 1} \cdot (x^2 + 5x - 1)' = \frac{1}{x^2 + 5x - 1} \cdot (2x + 5) = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x - 1}.$$

3.23. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = e^{x^2}$ függvényt!

megoldás:

A külső függvény az e^x , a belső függvény az x^2 . A külső függvény deriváltja e^x , ebbe „beírjuk” az eredeti belső függvényt, végül a kapott eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x.$$

3.24. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = (3x + 20)^{100}$ függvényt!

megoldás:

A külső függvény az x^{100} , a belső függvény $3x + 20$. A külső függvény deriváltja $100 \cdot x^{99}$. Ebbe „beírjuk” az eredeti belső függvényt, végül a kapott eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 100 \cdot (3x + 20)^{99} \cdot (3x + 20)' = 100 \cdot (3x + 20)^{99} \cdot 3 = \\ &= 300 \cdot (3x + 20)^{99}. \end{aligned}$$

3.25. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 12}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva, hogy $\sqrt[3]{x^2 + 12} = (x^2 + 12)^{\frac{1}{3}}$, a külső függvény $x^{\frac{1}{3}}$, a belső függvény $x^2 + 12$. A külső függvény deriváltja $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, így

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 12)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + 12)' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x^2 + 12)^{\frac{2}{3}}} \cdot 2x = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 12)^2}}. \end{aligned}$$

3.26. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \ln(x \cdot \sin x)$ függvényt!

megoldás:

Külső függvény az $\ln x$, belső függvény az $x \cdot \sin x$. A külső függvény deriváltja $\frac{1}{x}$, amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: $\frac{1}{x \cdot \sin x}$ adódik. A belső függvény deriváltja $\sin x + x \cdot \cos x$, így

$$f'(x) = \frac{\sin x + x \cdot \cos x}{x \cdot \sin x}.$$

3.27. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{\cos x}\right)$ függvényt!

megoldás:

Külső függvény a $\sin x$, belső függvény a $\frac{3x}{\cos x}$. A külső függvény deriváltja $\cos x$, amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: $\cos\left(\frac{3x}{\cos x}\right)$. A belső függvény deriváltja $\frac{3 \cos x + 3x \sin x}{\cos^2 x}$, így

$$f'(x) = \cos\left(\frac{3x}{\cos x}\right) \cdot \frac{3 \cos x + 3x \sin x}{\cos^2 x}.$$

3.28. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + x)$ függvényt!

megoldás:

Külső függvény a $\lg x$, belső függvény az $x^2 + x$. A külső függvény deriváltja $\frac{1}{\cos^2 x}$, amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: $\frac{1}{\cos^2(x^2+x)}$. A belső függvény deriváltja $2x + 1$, így

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x^2 + x)} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{\cos^2(x^2 + x)}.$$

3.29. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = e^{\sin x}$ függvényt!

megoldás:

Külső függvény az e^x , belső függvény a $\sin x$. A külső függvény deriváltja e^x , amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: $e^{\sin x}$. A belső függvény deriváltja $\cos x$, így

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x.$$

3.30. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = e^{x^2+3x-4}$ függvényt!

megoldás:

Külső függvény az e^x , belső függvény az $x^2 + 3x - 4$. A külső függvény deriváltja e^x , amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: e^{x^2+3x-4} . A belső függvény deriváltja $2x + 3$, így

$$f'(x) = e^{x^2+3x-4} \cdot (2x + 3).$$

3.31. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = 2^{\sin x}$ függvényt!

megoldás:

Külső függvény a 2^x , belső függvény a $\sin x$. A külső függvény deriváltja $2^x \cdot \ln 2$, amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: $2^{\sin x} \cdot \ln 2$. A belső függvény deriváltja $\cos x$, így

$$f'(x) = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x.$$

3.32. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \sqrt{x^2 + 12x - 3}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva, hogy $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, a külső függvény az $x^{\frac{1}{2}}$, belső függvény az $x^2 + 12x - 3$. A külső függvény deriváltja $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: $\frac{1}{2}(x^2 + 12x - 3)^{-\frac{1}{2}}$. A belső függvény deriváltja $2x + 12$, így

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 12x - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 12) = \frac{x + 6}{\sqrt{x^2 + 12x - 3}}.$$

3.33. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \cos(\sin x)$ függvényt!

megoldás:

Külső függvény a $\cos x$, belső függvény a $\sin x$. A külső függvény deriváltja $-\sin x$, amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: $-\sin(\sin x)$. A belső függvény deriváltja $\cos x$, így

$$f'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x.$$

3.34. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \sin(2^x)$ függvényt!

megoldás:

Külső függvény a $\sin x$, belső függvény a 2^x . A külső függvény deriváltja $\cos x$, amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: $\cos(2^x)$. A belső függvény deriváltja $2^x \cdot \ln 2$, így

$$f'(x) = \cos(2^x) \cdot 2^x \cdot \ln 2.$$

3.35. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x \cdot \cos(x^2 + 3x + 1)$ függvényt!

megoldás:

A szorzat és összetett függvény deriválási szabályát használva

$$f'(x) = \cos(x^2 + 3x + 1) - x \cdot \sin(x^2 + 3x + 1) \cdot (2x + 3).$$

3.36. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot \ln \frac{x+1}{x+2}$ függvényt!

megoldás:

A szorzat, az összetett függvény és a hányados deriválási szabályát használva

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 2) \cdot \ln \frac{x+1}{x+2} + (x^2 + 2x) \cdot \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x+2 - (x+1)}{(x+2)^2} = \\ &= (2x + 2) \cdot \ln \frac{x+1}{x+2} + (x^2 + 2x) \cdot \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \\ &= (2x + 2) \cdot \ln \frac{x+1}{x+2} + \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = \\ &= (2x + 2) \cdot \ln \frac{x+1}{x+2} + \frac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \\ &= (2x + 2) \cdot \ln \frac{x+1}{x+2} + \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

3.37. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2 + 1}{2} \right)$ függvényt!

megoldás:

A szorzat, a hányados és az összetett függvény deriválási szabályát használva

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2 + 1}{2} \right) + x \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 + 1}{2} \right)^2} \cdot x = \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2 + 1}{2} \right) + \frac{4x^2}{x^4 + 2x^2 + 5}. \end{aligned}$$

3.38. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \operatorname{tg}(e^{2x})$ függvényt!

megoldás:

Külső függvény a $\operatorname{tg} x$, belső függvény az e^{2x} . A külső függvény deriváltja $\frac{1}{\cos^2 x}$, amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: $\frac{1}{\cos^2(e^{2x})}$. A belső függvény szintén összetett, a külső függvény e^x , a belső függvény $2x$, az összetett függvény deriválási szabálya szerint $(e^{2x})' = 2e^{2x}$. Így

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(e^{2x})} \cdot (e^{2x})' = \frac{1}{\cos^2(e^{2x})} \cdot 2e^{2x} = \frac{2e^{2x}}{\cos^2(e^{2x})}.$$

3.39. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \ln(\ln(2x))$ függvényt!

megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(2x)} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x \cdot \ln(2x)}.$$

3.40. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \sin x^5 + \sin^5 x + \sin(5x)$ függvényt!

megoldás:

Az összetett függvény és az összeg függvény deriválási szabályát felhasználva

$$f'(x) = 5x^4 \cdot \cos x^5 + 5 \sin^4 x \cdot \cos x + 5 \cdot \cos(5x).$$

3.41. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva, hogy $\sqrt{\sin x^2} = (\sin x^2)^{\frac{1}{2}}$, az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sin x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x^2 \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{\sin x^2} \cdot \cos x^2}.$$

3.42. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \sin(\cos(\sin x))$ függvényt!

megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva

$$f'(x) = \cos(\cos(\sin x)) \cdot (-\sin(\sin x)) \cdot \cos x.$$

3.43. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \ln(x^2 + \sin(x^2))$ függvényt!

megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + \sin(x^2)} \cdot (2x + 2x \cdot \cos(x^2)) = \frac{2x + 2x \cdot \cos(x^2)}{x^2 + \sin(x^2)}.$$

3.44. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = 2^{\sin(2x)}$ függvényt!

megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva

$$f'(x) = 2^{\sin(2x)} \cdot \ln 2 \cdot 2 \cos(2x).$$

3.45. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva, hogy $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

3.46. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{\sin x}$ függvényt!

megoldás:

A hányados és a szorzat függvény differenciálási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1) \cdot \sin x - x \cdot \ln x \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$$

3.47. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \frac{\sin^2 x + \sin(x^2)}{x^3}$ függvényt!

megoldás:

A hányados és az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = \frac{(2 \sin x \cos x + 2x \cos(x^2)) \cdot x^3 - (\sin^2 x + \sin(x^2)) \cdot 3x^2}{x^6}.$$

3.48. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \sin(3x) \cdot \sin(5x)$ függvényt!

megoldás:

A szorzat és összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = 3 \cos(3x) \sin(5x) + 5 \sin(3x) \cos(5x).$$

3.49. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = (2x + 1)^3 \cdot \sin(x^4)$ függvényt!

megoldás:

A szorzat és összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk. Vezessük be az $u(x) = (2x + 1)^3$ és $v(x) = \sin(x^4)$ függvényeket! Ekkor egyrészt

$$u'(x) = 3 \cdot (2x + 1)^2 \cdot 2 = 6 \cdot (2x + 1)^2,$$

másképpen

$$v'(x) = \cos(x^4) \cdot 4x^3.$$

Mivel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, ezért

$$f'(x) = 6 \cdot (2x + 1)^2 \cdot \sin(x^4) + (2x + 1)^3 \cdot 4x^3 \cdot \cos(x^4).$$

3.50. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sin x}{e^x}$ függvényt!

megoldás:

A hányados és a szorzat függvény differenciálási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = \frac{(2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x) \cdot e^x - x^2 \cdot \sin x \cdot e^x}{e^{2x}}.$$

3.51. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \frac{\sqrt[8]{x}}{x^2 \cdot \sin x}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználjuk, hogy $\sqrt[8]{x} = x^{\frac{1}{8}}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}} \cdot x^2 \cdot \sin x - \sqrt[8]{x} \cdot (2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x)}{(x^2 \cdot \sin x)^2}.$$

3.52. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^{3\pi} + (4\pi)^{5x}$ függvényt!

megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$f'(x) = 3\pi \cdot x^{3\pi-1} + (4\pi)^{5x} \cdot \ln(4\pi) \cdot 5.$$

3.53. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{(x^3 + x) \cdot e^x}{\operatorname{tg} x}$ függvényt!

megoldás:

A hányados függvény deriválási szabályát alkalmazzuk, figyelve arra, hogy a számláló két függvény szorzata, így ott a szorzat függvény deriválási szabályát használjuk:

$$f'(x) = \frac{((3x^2 + 1) \cdot e^x + (x^3 + x) \cdot e^x) \cdot \operatorname{tg} x - (x^3 + x) \cdot e^x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Elvégezve az összevonást

$$f'(x) = \frac{e^x \left((x^3 + 3x^2 + x + 1) \operatorname{tg} x - \frac{x^3 + x}{\cos^2 x} \right)}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

3.54. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x}) + \sqrt{\sin x}}{e^{2x}}$ függvényt!

megoldás:

Legyen $u(x) = \sin(\sqrt{x})$, $v(x) = \sqrt{\sin x} = (\sin x)^{\frac{1}{2}}$ és $w(x) = e^{2x}$. Ekkor

$$u'(x) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}},$$

másrészt

$$v'(x) = \frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}},$$

továbbá

$$w'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

A hányados függvény deriválási szabálya szerint

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} = \\ &= \frac{\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \cdot e^{2x} - (\sin(\sqrt{x}) + \sqrt{\sin x}) e^{2x} \cdot 2}{e^{4x}}. \end{aligned}$$

3.55. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{x^3 + x - 1}{e^{-x} - \operatorname{tg} x}$ függvényt!

megoldás:

A hányados és összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 1) \cdot (e^{-x} - \operatorname{tg} x) - (x^3 + x - 1) \cdot (e^{-x}(-1) - \frac{1}{\cos^2 x})}{(e^{-x} - \operatorname{tg} x)^2}.$$

3.56. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = 2^{2x} + \arcsin(2x)$ függvényt!

megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$f'(x) = 2^{2x} \ln 2 \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot 2.$$

3.57. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \frac{x^7 - x + \operatorname{arctg} x}{e^x + \ln x}$ függvényt!

megoldás:

A hányados függvény differenciálási szabálya szerint

$$f'(x) = \frac{(7x^6 - 1 + \frac{1}{1+x^2}) \cdot (e^x + \ln x) - (x^7 - x + \operatorname{arctg} x) \cdot (e^x + \frac{1}{x})}{(e^x + \ln x)^2}.$$

3.58. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^x$ függvényt!

1. megoldás:

Az $a = e^{\ln a}$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x}.$$

Az átalakítás során alkalmaztuk az $\ln a^b = b \ln a$ logaritmus azonosságot. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

2. megoldás:

Vegyük az $f(x) = x^x$ egyenlet mindkét oldalának a logaritmusát:

$$\ln(f(x)) = \ln x^x,$$

amiből

$$\ln(f(x)) = x \cdot \ln x.$$

Mindkét oldalt differenciálva az x változó szerint

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln x + 1.$$

Végigszorozva $f(x)$ -el, kapjuk a megoldást

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

3.59. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^{\sin x}$ függvényt!

1. megoldás:

Az $a = e^{\ln a}$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) = x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \cdot \ln x}.$$

Az átalakítás során alkalmaztuk az $\ln a^b = b \ln a$ logaritmus azonosságot. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

2. megoldás:

Vegyük az $f(x) = x^{\sin x}$ egyenlet mindkét oldalának a logaritmusát:

$$\ln(f(x)) = \ln x^{\sin x},$$

amiből

$$\ln(f(x)) = \sin x \cdot \ln x.$$

Mindkét oldalt differenciálva az x változó szerint

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

Végigszorozva $f(x)$ -el, kapjuk a megoldást

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

3.60. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = (\sin x)^x$ függvényt!

1. megoldás:

Az $a = e^{\ln a}$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) = (\sin x)^x = e^{\ln(\sin x)^x} = e^{x \cdot \ln(\sin x)}.$$

Az átalakítás során alkalmaztuk az $\ln a^b = b \ln a$ logaritmus azonosságot. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \cdot \ln(\sin x)} \cdot \left(\ln(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right) = \\ &= (\sin x)^x \cdot (\ln(\sin x) + x \cdot \operatorname{ctg} x). \end{aligned}$$

2. megoldás:

Vegyük az $f(x) = (\sin x)^x$ egyenlet mindkét oldalának a logaritmusát:

$$\ln(f(x)) = \ln(\sin x)^x,$$

amiből

$$\ln(f(x)) = x \cdot \ln(\sin x).$$

Mindkét oldalt differenciálva az x változó szerint

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln(\sin x) + x \operatorname{ctg} x.$$

Végigszorozva $f(x)$ -el, kapjuk a megoldást

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln(\sin x) + x \cdot \operatorname{ctg} x) = (\sin x)^x \cdot (\ln(\sin x) + x \cdot \operatorname{ctg} x).$$

3.61. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^{\cos x}$ függvényt!

1. megoldás:

Az $a = e^{\ln a}$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) = x^{\cos x} = e^{\ln x^{\cos x}} = e^{\cos x \cdot \ln x}.$$

Az átalakítás során alkalmaztuk az $\ln a^b = b \ln a$ logaritmus azonosságot. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\cos x \cdot \ln x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right) = \\ &= x^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right). \end{aligned}$$

2. megoldás:

Vegyük az $f(x) = x^{\cos x}$ egyenlet mindkét oldalának a logaritmusát:

$$\ln(f(x)) = \ln x^{\cos x},$$

amiből

$$\ln(f(x)) = \cos x \cdot \ln x.$$

Mindkét oldalt differenciálva az x változó szerint

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}.$$

Végigszorozva $f(x)$ -el, kapjuk a megoldást

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) = x^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right).$$

3.62. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = (\cos x)^x$ függvényt!

1. megoldás:

Az $a = e^{\ln a}$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) = (\cos x)^x = e^{\ln(\cos x)^x} = e^{x \cdot \ln(\cos x)}.$$

Az átalakítás során alkalmaztuk az $\ln a^b = b \ln a$ logaritmus azonosságot. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \cdot \ln(\cos x)} \cdot \left(\ln(\cos x) - x \cdot \frac{1}{\cos x} \sin x \right) = \\ &= (\cos x)^x \cdot (\ln(\cos x) - x \cdot \operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

2. megoldás:

Vegyük az $f(x) = (\cos x)^x$ egyenlet mindkét oldalának a logaritmusát:

$$\ln(f(x)) = \ln(\cos x)^x,$$

amiből

$$\ln(f(x)) = x \cdot \ln(\cos x).$$

Mindkét oldalt differenciálva az x változó szerint

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x.$$

Végigszorozva $f(x)$ -el, kapjuk a megoldást

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln(\cos x) - x \cdot \operatorname{tg} x) = (\cos x)^x \cdot (\ln(\cos x) - x \cdot \operatorname{tg} x).$$

3.63. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ függvényt!

megoldás:

Az $a = e^{\ln a}$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\ln(\sin x)^{\cos x}} = e^{\cos x \cdot \ln(\sin x)}.$$

Az átalakítás során alkalmaztuk az $\ln a^b = b \ln a$ logaritmus azonosságot. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\cos x \cdot \ln(\sin x)} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right) = \\ &= (\sin x)^{\cos x} (-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \operatorname{ctg} x). \end{aligned}$$

3.64. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ függvényt!

megoldás:

Az $a = e^{\ln a}$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\ln x^{\sqrt{x}}} = e^{\sqrt{x} \cdot \ln x}.$$

Az átalakítás során alkalmaztuk az $\ln a^b = b \ln a$ logaritmus azonosságot. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = e^{\sqrt{x} \cdot \ln x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

3.65. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = (\sqrt{x})^x$ függvényt!

megoldás:

Az $a = e^{\ln a}$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) = (\sqrt{x})^x = e^{\ln(\sqrt{x})^x} = e^{x \cdot \ln \sqrt{x}}.$$

Az átalakítás során alkalmaztuk az $\ln a^b = b \ln a$ logaritmus azonosságot. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln \sqrt{x}} \cdot \left(\ln \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = (\sqrt{x})^x \cdot \left(\ln \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right).$$

3.66. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^{e^x}$ függvényt!

megoldás:

Az $a = e^{\ln a}$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) = x^{e^x} = e^{\ln x^{e^x}} = e^{e^x \cdot \ln x}.$$

Az átalakítás során alkalmaztuk az $\ln a^b = b \ln a$ logaritmus azonosságot. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = e^{e^x \cdot \ln x} \cdot \left(e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{e^x} \cdot \left(e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x} \right).$$

3.67. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = (2x)^{3x}$ függvényt!

megoldás:

Az $a = e^{\ln a}$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) = (2x)^{3x} = e^{\ln(2x)^{3x}} = e^{3x \cdot \ln(2x)}.$$

Az átalakítás során alkalmaztuk az $\ln a^b = b \ln a$ logaritmus azonosságot. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = e^{3x \cdot \ln(2x)} \cdot \left(3 \ln(2x) + 3x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 \right) = (2x)^{3x} (3 \ln(2x) + 3).$$

3.68. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^{\arcsin(x^2)}$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva, hogy

$$f(x) = e^{\ln x^{\arcsin(x^2)}} = e^{\arcsin(x^2) \cdot \ln x},$$

az összetett függvény deriválási szabálya szerint (külső függvény az e^x)

$$f'(x) = e^{\arcsin(x^2) \cdot \ln x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot 2x \cdot \ln x + \arcsin x^2 \cdot \frac{1}{x} \right),$$

amiből

$$f'(x) = x^{\arcsin(x^2)} \cdot \left(\frac{2x \cdot \ln x}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{\arcsin(x^2)}{x} \right).$$

3.69. Feladat. Legyenek f és g differenciálható függvények, melyek helyettesítési értékét, valamint a deriváltfüggvények helyettesítési értékét az $x = 1; 2; 3$ helyen az alábbi táblázat mutatja:

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	1
$f'(x)$	1	4	2
$g(x)$	2	1	4
$g'(x)$	4	2	3

Legyen $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ és $h(x) = g \circ f(x)$. Határozzuk meg a $p'(3)$ és $h'(2)$ értékeket!

megoldás:

Felhasználva a szorzatfüggvény deriválási szabályát:

$$p'(3) = f'(3) \cdot g(3) + f(3) \cdot g'(3) = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 11.$$

Az összetett függvény deriválási szabálya alapján:

$$h'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(1) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16.$$

3.70. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x - \arctg x$ függvényt. Mutassuk meg, hogy minden $x > 0$ valós szám esetén $f'(x) > 0$.

megoldás:

Mivel

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

ezért látható, hogy mind a számláló, mind a nevező pozitív minden $x \neq 0$ valós szám esetén, így $f'(x) > 0$, ha $x > 0$.

3.71. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x \cdot \sin 2x$ függvényt! Határozzuk meg az $f'(\pi)$ értéket!

megoldás:

A szorzat és összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = \sin 2x + 2x \cdot \cos 2x.$$

Ekkor $f'(\pi) = \sin 2\pi + 2\pi \cdot \cos 2\pi = 2\pi$.

3.72. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-8}}$ függvényt! Határozzuk meg az $f'(3)$ értéket!

megoldás:

A hányados és összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2-8} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2-8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x^2-8} = \frac{\sqrt{x^2-8} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-8}}}{x^2-8} = \\ &= \frac{x^2-8-x^2}{\sqrt{x^2-8} \cdot (x^2-8)} = \frac{-8}{(x^2-8)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva $f'(3) = -8$.

3.73. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = x \cdot e^x$ függvény deriváltjának zérushelyét!

megoldás:

A függvény deriváltja

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x),$$

amelynek zérushelyét az $e^x \cdot (1+x) = 0$ egyenlet megoldása adja. Mivel azonban $e^x \neq 0$, ezért $1+x=0$, így $x=-1$.

3.74. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot e^x$ függvény deriváltjának zérushelyét!

megoldás:

A függvény deriváltja

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x),$$

amelynek zérushelyét az $e^x \cdot (x^2 + 2x) = 0$ egyenlet megoldása adja. Mivel azonban $e^x \neq 0$, ezért $x^2 + 2x = 0$, azaz $x \cdot (x+2) = 0$, amiből $x_1 = 0$, illetve $x_2 = -2$ adódik.

3.75. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvény deriváltjának zérushelyét!

megoldás:

A függvény deriváltja

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x,$$

amelynek zérushelyét a $2x \cdot \ln x + x = 0$ egyenlet megoldása adja. Ha kiemelünk x -et, akkor az

$$x \cdot (2 \ln x + 1) = 0$$

egyenlethez jutunk. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$, vagy $2 \ln x + 1 = 0$ adódik. Az x értéke nem lehet 0, mivel az nem eleme az $\ln x$ függvény értelmezési tartományának, így csak $2 \ln x + 1 = 0$ teljesülhet. Mindkét oldalból 1-et kivonva, majd az egyenletet 2-vel osztva

$$2 \ln x = -1 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{2}$$

adódik, amiből a logaritmus definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3.76. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \sin |x|$ függvény derivált függvényét, ahol létezik!

megoldás:

A függvény az $x = 0$ helyen nem differenciálható, ugyanis ha $x < 0$, akkor $f(x) = -\sin x$, másrészt ha $x > 0$, akkor $f(x) = \sin x$, így a bal oldali derivált $f'_-(x) = -\cos x$, míg a jobb oldali derivált $f'_+(x) = \cos x$, tehát

$$f'_-(0) = -\cos 0 = -1 \quad f'_+(0) = \cos 0 = 1,$$

így az $x = 0$ helyen a bal oldali és jobb oldali derivált értéke nem egyezik meg. Ha $x \neq 0$, akkor a függvény differenciálható, a derivált függvény

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x > 0 \\ -\cos x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}.$$

3.77. Feladat. Adjuk meg azokat a valós számokat, ahol az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{ha } x \leq 0 \\ (x+1)^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható!

megoldás:

Mivel az e^{2x} függvény és az $(x+1)^2$ függvény mindenütt differenciálható, ezért csak az $x_0 = 0$ helyen kell ellenőriznünk a differenciálhatóságot. Az $x_0 = 0$ helyen a bal oldali derivált

$$f'_-(x) = 2 \cdot e^{2x} \quad \Rightarrow \quad f'_-(0) = 2 \cdot e^{2 \cdot 0} = 2,$$

továbbá az $x_0 = 0$ helyen a jobb oldali derivált

$$f'_+(x) = 2 \cdot (x + 1) \quad \Rightarrow \quad f'_+(0) = 2 \cdot 1 = 2,$$

így f differenciálható az $x_0 = 0$ helyen is, tehát f mindenütt differenciálható.

4. Magasabb rendű deriváltak

4.1. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^3 + 8x^2 - 2x + 1$ függvény harmadik deriváltját!

megoldás:

A függvény deriváltja

$$f'(x) = 3x^2 + 16x - 2,$$

a második derivált

$$f''(x) = 6x + 16,$$

a harmadik derivált

$$f'''(x) = 6.$$

4.2. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^n$ függvény n -edik és $(n + 1)$ -edik deriváltját!

megoldás:

A függvény deriváltja $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. A második derivált

$$f''(x) = n \cdot (n - 1) \cdot x^{n-2}.$$

Ebből már látható, hogy az n -edik derivált

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!.$$

Mivel az n -edik derivált konstans, ezért $f^{(n+1)}(x) = 0$.

4.3. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = e^{2x}$ függvény n -edik deriváltját!

megoldás:

A függvény első deriváltja $f'(x) = e^{2x} \cdot 2$, a második deriváltja $f''(x) = 4e^{2x}$, harmadik deriváltja $8e^{2x}$. Ebből az a sejtésünk, hogy $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$. Ezt teljes indukcióval igazolhatjuk. Nyilván $n = 1$ -re teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás. Ekkor

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (2^n e^{2x})' = 2^n \cdot 2 \cdot e^{2x} = 2^{n+1} \cdot e^{2x},$$

amiből azt láthatjuk, hogy $n + 1$ -re is igaz az állítás, így igazoltuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}.$$

4.4. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = \ln x$ függvény n -edik deriváltját!

megoldás:

A függvény első deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

a második deriváltja

$$f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

a harmadik deriváltja

$$f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

Ebből megsejthető, hogy az n -edik derivált

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}.$$

4.5. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = \sin x$ függvény n -edik deriváltját!

megoldás:

A függvény deriváltja $f'(x) = \cos x$, második deriváltja $f''(x) = -\sin x$, harmadik deriváltja $f'''(x) = -\cos x$, negyedik deriváltja $f^{(4)}(x) = \sin x$. Innentől kezdve ugyanezek a deriváltak ismétlődnek, így

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } n = 4k \text{ (azaz, ha } n \text{ osztható 4-el)} \\ \cos x, & \text{ha } n = 4k + 1 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 1 maradékot ad)} \\ -\sin x, & \text{ha } n = 4k + 2 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 2 maradékot ad)} \\ -\cos x, & \text{ha } n = 4k + 3 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 3 maradékot ad)}. \end{cases}$$

4.6. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = \cos x$ függvény n -edik deriváltját!

megoldás:

A függvény deriváltja $f'(x) = -\sin x$, második deriváltja $f''(x) = -\cos x$, harmadik deriváltja $f'''(x) = \sin x$, negyedik deriváltja $f^{(4)}(x) = \cos x$. Innentől kezdve ugyanezek a deriváltak ismétlődnek, így

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } n = 4k \text{ (azaz, ha } n \text{ osztható 4-el)} \\ -\sin x, & \text{ha } n = 4k + 1 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 1 maradékot ad)} \\ -\cos x, & \text{ha } n = 4k + 2 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 2 maradékot ad)} \\ \sin x, & \text{ha } n = 4k + 3 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 3 maradékot ad)}. \end{cases}$$

4.7. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény negyedik deriváltját!

megoldás:

A függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

A második derivált

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}}.$$

A harmadik derivált

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8 \cdot \sqrt{x^5}}.$$

A negyedik derivált

$$f^{iv}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16 \cdot \sqrt{x^7}}.$$

4.8. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

függvény n -edik deriváltját!

megoldás:

A függvény deriváltja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+x)' \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1-x + (1+x)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{2}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

A második derivált

$$f''(x) = (2 \cdot (1-x)^{-2})' = -4 \cdot (1-x)^{-3} \cdot (-1) = \frac{4}{(1-x)^3}.$$

A harmadik derivált

$$f'''(x) = (4 \cdot (1-x)^{-3})' = -12 \cdot (1-x)^{-4} \cdot (-1) = \frac{12}{(1-x)^4}.$$

Így az n -edik deriváltra a sejtésünk

$$f^{(n)}(x) = 2n! \cdot (1-x)^{-(n+1)} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Ezt teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Nyilván $n = 1$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n -re igaz, és bizonyítsuk be $(n+1)$ -re:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (2n! \cdot (1-x)^{-(n+1)})' = \\ &= 2n! \cdot (-(n+1)) \cdot (1-x)^{-(n+2)} \cdot (-1) = \\ &= 2(n+1)! \cdot (1-x)^{-(n+2)} = \frac{2(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}. \end{aligned}$$

4.9. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény az $x_0 = 0$ helyen differenciálható, de a második deriváltja nem létezik!

megoldás:

Az első fejezet (1.22) feladatában már láttuk, hogy a függvény differenciálható. A derivált függvény $x \neq 0$ esetén

$$f'(x) = \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

A derivált függvény $x = 0$ esetén

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Mivel a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

határérték nem létezik, ezért f' nem folytonos az $x = 0$ helyen, így ott nem is lehet differenciálható, tehát f'' nem létezik.

4.10. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvényt! Határozzuk meg az $f'''(1)$ értéket!

megoldás:

A függvény első deriváltja

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1).$$

A második derivált

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3.$$

A harmadik derivált

$$f'''(x) = \frac{2}{x},$$

így $f'''(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

4.11. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(t) = e^{1-2t^3}$ függvény második deriváltját!

megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$f'(t) = e^{1-2t^3} \cdot (-6t^2).$$

Legyen most $u(t) = e^{1-2t^3}$ és $v(t) = -6t^2$. Ekkor a szorzat függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t) = \\ &= e^{1-2t^3} \cdot (-6t^2) \cdot (-6t^2) + e^{1-2t^3} \cdot (-12t) = \\ &= e^{1-2t^3} \cdot 36t^4 - e^{1-2t^3} \cdot 12t = e^{1-2t^3} \cdot (36t^4 - 12t). \end{aligned}$$

4.12. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(t) = \ln(1 + t^2)$ függvény második deriváltjának zérushelyeit!

megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}.$$

A hányados függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f''(t) = \frac{2 \cdot (1 + t^2) - 2t \cdot 2t}{(1 + t^2)^2} = \frac{2 - 2t^2}{(1 + t^2)^2}.$$

Meg kell oldanunk az $f''(t) = 0$ egyenletet. Egy tört csak akkor lehet 0, ha a számlálója 0, így a $2 - 2t^2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amiből $t_1 = -1$, illetve $t_2 = 1$ adódik.

5. Érintő és normális egyenes egyenlete, érintési paraméterek

5.1. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó érintő egyenesének egyenletét!

megoldás:

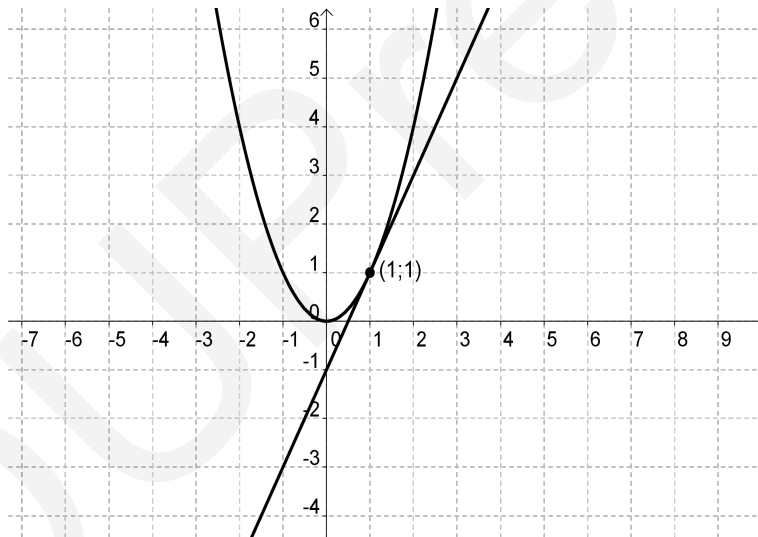
Az érintő egyenes egyenlete

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Jelen esetben egyrészt $f(x_0) = f(1) = 1$, másrészt $f'(x) = 2x$, amiből $f'(x_0) = f'(1) = 2$. A keresett egyenes egyenlete tehát

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Elvégezve a zárójel felbontását és az összevonást $y = 2x - 1$ adódik.



5.2. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 0$ helyhez tartozó érintő egyenesének egyenletét!

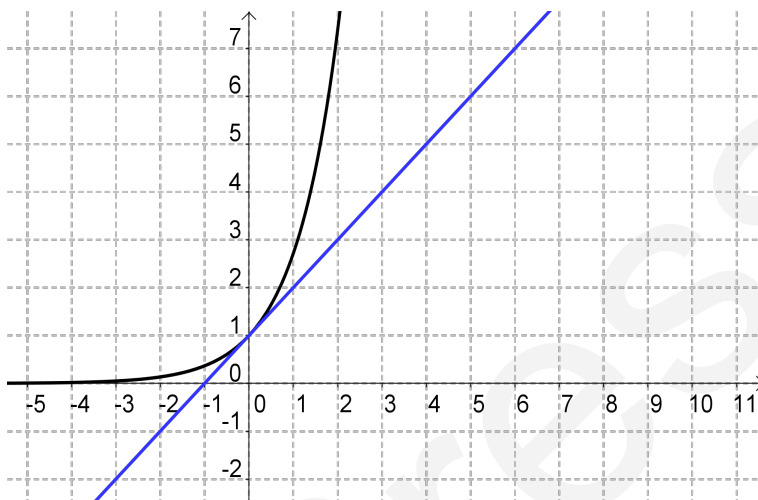
megoldás:

Az érintő egyenes egyenlete

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Jelen esetben egyrészt $f(x_0) = f(0) = e^0 = 1$, másrészt $f'(x) = e^x$, amiből $f'(x_0) = f'(0) = 1$. Az érintő egyenes egyenlete tehát

$$y = 1 + 1 \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = x + 1.$$



5.3. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{x+2}$ függvény $x_0 = 2$ helyhez tartozó érintő egyenesének egyenletét!

Az érintő egyenes egyenlete

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Jelen esetben egyrészt $f(x_0) = f(2) = \sqrt{4} = 2$, másrészt

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+2}},$$

amiből $f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{4}$. A keresett egyenes egyenlete

$$y = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Beszorozva a közös nevezővel $4y - x = 6$ adódik.

5.4. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$ függvény $x_0 = -1$ helyhez tartozó érintő egyenesének egyenletét!

megoldás:

Az érintő egyenes egyenlete

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Jelen esetben egyrészt $f(x_0) = f(-1) = 2$, másrészt

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+2) - (x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2},$$

így $f'(x_0) = f'(-1) = -4$. Ebből a keresett egyenlet

$$y = 2 - 4 \cdot (x + 1).$$

Elvégezve a zárójel felbontását és az összevonást $y = -4x - 2$ adódik.

5.5. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5$ függvény azon érintő egyenesének egyenletét, amelyik merőleges az $y = -\frac{1}{12}x + 5$ egyenletű egyenesre!

megoldás:

A keresett egyenes egyenlete $y = mx + b$, ahol $m = 12$ a merőlegesség miatt (ugyanis egymásra merőleges egyenesek meredekségeinek szorzata -1), tehát az érintő $y = 12x + b$ alakú. Másrészt $m = f'(x_0) = 6x_0^2 + 6x_0$. Így x_0 meghatározható a

$$6x_0^2 + 6x_0 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 + x_0 - 2 = 0$$

egyenletből. Ennek megoldásai

$$x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2},$$

azaz $x_0 = 1$ vagy $x_0 = -2$. Két érintési pont van tehát: $E_1 = (1, 10)$ és $E_2 = (-2, 1)$. Az $y = 12x + b$ egyenletbe behelyettesítve az érintési pontok koordinátáit, megkapjuk a b értékét: $b_1 = -2$, $b_2 = 25$. A keresett érintő egyenesek egyenletei:

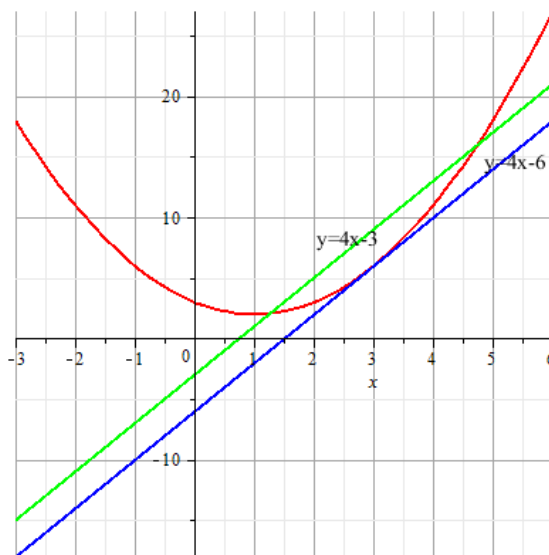
$$y = 12x - 2, \quad y = 12x + 25.$$

5.6. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény azon érintő egyenesének egyenletét, amelyik párhuzamos az $y = 4x - 3$ egyenletű egyenessel!

megoldás:

A keresett egyenes egyenlete $y = mx + b$, ahol $m = 4$ a párhuzamosság miatt (ugyanis párhuzamos egyenesek meredeksége megegyezik), tehát az érintő

$y = 4x + b$ alakú. Másrészt $m = f'(x_0) = 2x_0 - 2$. Így x_0 meghatározható a $2x_0 - 2 = 4$ egyenletből, ami ekvivalens a $2x_0 = 6$ egyenlettel, amelynek megoldása $x_0 = 3$. Így az érintési pont $E = (3, 6)$. Az $y = 4x + b$ egyenletbe behelyettesítve az érintési pont koordinátáit azt kapjuk, hogy a b értéke $b = -6$. Az érintő egyenes egyenlete tehát $y = 4x - 6$.



5.7. Feladat. Határozzuk meg, hogy az $f(x) = \frac{3x^2+1}{3+x^2}$ függvénynek melyik pontjába húzott érintője párhuzamos az x tengellyel?

megoldás:

A keresett érintő meredeksége nulla, így az érintőt $y = b$ alakban keressük. Másrészt

$$m = f'(x_0) = \frac{6x_0 \cdot (3 + x_0^2) - (3x_0^2 + 1) \cdot (2x_0)}{(3 + x_0^2)^2} = \frac{16x_0}{(3 + x_0^2)^2},$$

amiből $x_0 = 0$. Így $f(x_0) = \frac{1}{3}$. A keresett pont tehát $(0, \frac{1}{3})$. Az érintő egyenes egyenlete $y = \frac{1}{3}$.

5.8. Feladat. Határozzuk meg annak a háromszögnek a területét, melyet az

$$f(x) = e^{2x} - 2x^3$$

függvénynek a $(0, f(0))$ pontjába húzott érintője a koordináta-tengelyekkel bezár?

megoldás:

Az érintő egyenes egyenlete $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Jelen esetben $f(x_0) = 1$, továbbá $f'(x) = 2e^{2x} - 6x^2$, így $f'(x_0) = f'(0) = 2$. Tehát az érintő egyenlete $y = 2x + 1$. Ez az egyenes az x tengelyt $-1/2$ -nél, az y -tengelyt 1-nél metszi, így a keresett terület:

$$T = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} = \frac{1}{4}.$$

5.9. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = 2x^2 - x^3$ függvénynek az x -tengellyel párhuzamos érintőjének egyenletét!

megoldás:

Az x -tengellyel párhuzamos érintő meredeksége 0, így meg kell oldanunk az $f'(x) = 0$ egyenletet. Mivel $f(x) = 2x^2 - x^3$, ezért $f'(x) = 4x - 3x^2$. Így a $4x - 3x^2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve x -et az $x(4 - 3x) = 0$ egyenlethez jutunk. Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$ vagy $x = \frac{4}{3}$. Mivel $f(0) = 0$ és $f(\frac{4}{3}) = \frac{32}{27}$, ezért a keresett egyenesek egyenlete $y = 0$ és $y = \frac{32}{27}$.

5.10. Feladat. Van-e olyan pontja az $f(x) = 2x^2 - x^3 - x$ függvénynek, melyhez húzott érintő párhuzamos az $y = x$ egyenletű egyenessel?

megoldás:

A keresett egyenes meredeksége 1, így azt az x -et keressük, melyre teljesül, hogy $f'(x) = 1$. Mivel

$$f'(x) = 4x - 3x^2 - 1,$$

ezért a $3x^2 - 4x + 1 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva $x = 1$, illetve $x = \frac{1}{3}$ adódik.

5.11. Feladat. Milyen x esetén lesz párhuzamos az $f(x) = 2 + x - x^2$ függvény érintője az első síknegyed szögfelezőjével?

megoldás:

Az első síknegyed szögfelezője az $y = x$ egyenletű egyenes, amelynek meredeksége 1, így az $f'(x) = 1$ egyenlet megoldását keressük. Felhasználva az

f függvény definícióját azt kapjuk, hogy $f'(x) = 1 - 2x$, ezért a megoldandó egyenlet $1 - 2x = 1$, amiből $x = 0$ adódik.

5.12. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény tetszőleges pontjába húzott érintő egyenese állandó területű háromszögeket metsz ki a koordináta-tengelyekből!

megoldás:

Az f függvény tetszőleges x_0 -beli érintő egyenesének egyenlete

$$y = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2} \cdot (x - x_0).$$

Felbontva a zárójelet, és elvégezve az egyszerűsítést

$$y = \frac{2}{x_0} - \frac{x}{x_0^2}$$

adódik. Ennek az egyenesnek a koordináta-tengelyekkel való metszéspontja

$$P_1 \left(0, \frac{2}{x_0} \right), P_2 (2x_0, 0).$$

Derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának a fele, így

$$T = \frac{\frac{2}{x_0} \cdot 2x_0}{2} = 2,$$

amivel igazoltuk az állítást.

5.13. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{x+2}$ függvény $(-1; f(-1))$ pontbeli normális egyenesének egyenletét!

megoldás:

Az $(x_0, f(x_0))$ pontba húzott normális egyenes egyenlete

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

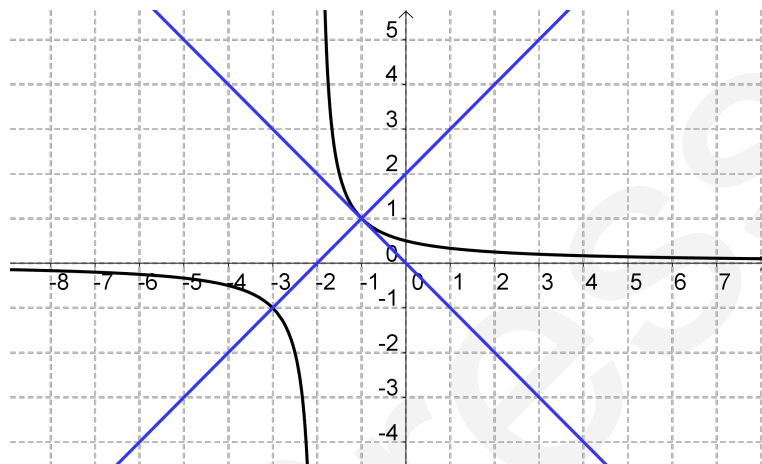
Jelen esetben $f(x_0) = f(-1) = 1$. Másrészt

$$f'(x) = ((x+2)^{-1})' = -(x+2)^{-2} = -\frac{1}{(x+2)^2},$$

így $f'(x_0) = f'(-1) = -1$. Ebből a keresett egyenlet

$$y = 1 - \frac{1}{-1} \cdot (x + 1).$$

Elvégezve a zárójel felbontását és az összevonást $y = x + 2$ adódik.



5.14. Feladat. Írjuk fel az

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 8}}$$

függvény $(-1, f(-1))$ pontba húzott érintő egyenesének és normális egyenesének egyenletét!

megoldás:

Az f függvény $x_0 = -1$ helyen vett helyettesítési értéke: $f(x_0) = -\frac{1}{3}$. Deriváljuk a függvényt, majd kiszámoljuk annak x_0 -beli helyettesítési értékét:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + 8} - (2x + 1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}}}{x^2 + 8} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = \frac{17}{27}.$$

Az $(x_0, f(x_0))$ pontba húzott érintő egyenes egyenlete

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{17}{27} \cdot (x + 1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8}{27} + \frac{17}{27}x.$$

A normális egyenes egyenlete

$$y = -\frac{1}{3} - \frac{27}{17} \cdot (x + 1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{98}{51} - \frac{27}{17}x.$$

5.15. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó simulókörének, érintő egyenesének és normális egyenesének egyenletét! Számoljuk ki a szubtangens és szubnormális szakaszok, valamint a tangens szakasz és normális szakasz hosszát!

megoldás:

A függvény deriváltja $f'(x) = 2x$, második deriváltja $f''(x) = 2$. Kiszámolva a függvényértéket, a derivált értékét és a második derivált értékét az x_0 helyen,

$$f(x_0) = f(1) = 1, \quad f'(x_0) = f'(1) = 2, \quad f''(x_0) = f''(1) = 2$$

adódik. Ebből az érintő egyenes egyenlete

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1.$$

A normális egyenes egyenlete

$$y = 1 - \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x.$$

A simulókör középpontjának koordinátái

$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}, \quad v = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

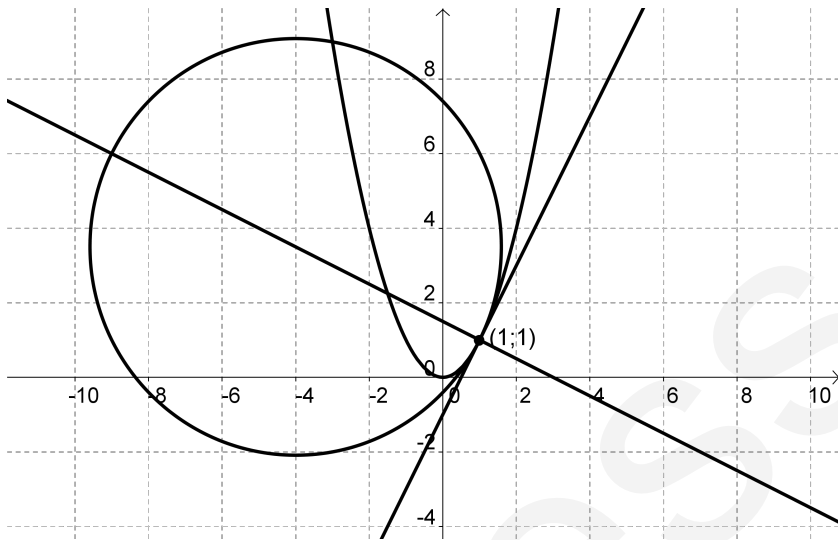
$$u = 1 - 2 \cdot \frac{1 + 4}{2} = -4, \quad v = 1 + \frac{1 + 4}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

adódik. A simulókör sugara

$$r = \frac{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)} = \frac{\sqrt{125}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

A simulókör egyenlete tehát

$$(x + 4)^2 + (y - 3,5)^2 = \frac{125}{4}.$$



A tangens szakasz hossza

$$T = \left| f(x_0) \cdot \frac{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}{f'(x_0)} \right| = \left| 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

a normális szakasz hossza

$$N = \left| f(x_0) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \right| = \left| 1 \cdot \sqrt{5} \right| = \sqrt{5}.$$

A szubtangens szakasz hossza

$$S_T = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2},$$

a szubnormális szakasz hossza

$$S_N = |f(x_0) \cdot f'(x_0)| = 1 \cdot 2 = 2.$$

5.16. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyhez tartozó simulókérenek, érintő egyenesének és normális egyenesének egyenletét! Számoljuk ki a szubtangens és szubnormális szakaszok, valamint a tangens szakasz és normális szakasz hosszát!

megoldás:

A függvény deriváltja $f'(x) = e^x$, második deriváltja $f''(x) = e^x$. Kiszámolva a függvényértéket, a derivált értékét és a második derivált értékét az x_0 helyen

$$f(x_0) = f(0) = 1, \quad f'(x_0) = f'(0) = 1, \quad f''(x_0) = f''(0) = 1.$$

Az érintő egyenes egyenlete

$$y = 1 + 1 \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = x + 1.$$

A normális egyenes egyenlete

$$y = 1 - 1 \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x.$$

A simulókör középpontjának koordinátái

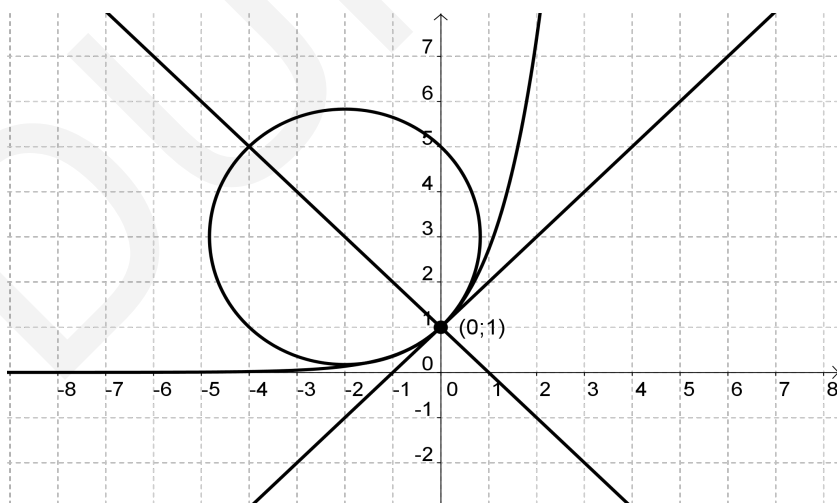
$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} = -2, \quad v = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} = 3.$$

A simulókör sugara

$$r = \frac{(1 + (f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)} = \frac{(1 + 1^2)^{\frac{3}{2}}}{1} = \sqrt{8}.$$

A simulókör egyenlete tehát

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8.$$



A tangens szakasz hossza

$$T = \left| f(x_0) \cdot \frac{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}{f'(x_0)} \right| = |1 \cdot \sqrt{8}| = \sqrt{2},$$

a normális szakasz hossza

$$N = \left| f(x_0) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \right| = \sqrt{2}.$$

A szubtangens szakasz hossza

$$S_T = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{1}{1} \right| = 1,$$

a szubnormális szakasz hossza

$$S_N = |f(x_0) \cdot f'(x_0)| = 1 \cdot 1 = 1.$$

5.17. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \ln(2x)$ függvénynek az $x_0 = \frac{1}{2}$ helyhez tartozó simulókérenek, érintő egyenesének és normális egyenesének egyenletét! Számoljuk ki a szubtangens és szubnormális, valamint a tangens szakasz és normális szakasz hosszát!

megoldás:

A függvény deriváltja $f'(x) = \frac{1}{x}$, második deriváltja $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Kiszámolva a függvényértéket, a derivált értékét és a második derivált értékét az x_0 helyen

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad f''(x_0) = f''\left(\frac{1}{2}\right) = -4.$$

Ebből az érintő egyenes egyenlete:

$$y = 0 + 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1.$$

A normális egyenes egyenlete

$$y = 0 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

A simulókör középpontjának koordinátái

$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}, \quad v = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}.$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat

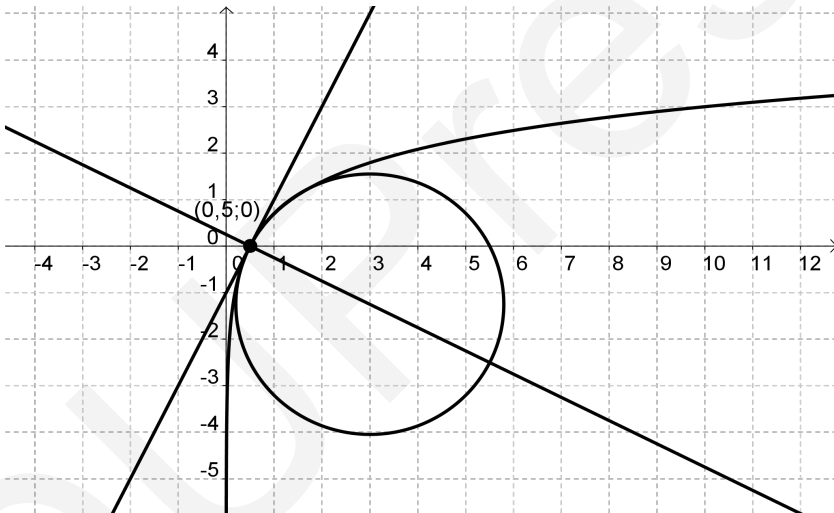
$$u = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1+4}{-4} = 3, \quad v = 0 + \frac{1+2^2}{-4} = -\frac{5}{4}$$

adódik. A simuló kör sugara

$$r = \frac{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)} = \left| \frac{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}}{-4} \right| = \frac{5^{\frac{3}{2}}}{4} = \frac{5\sqrt{5}}{4}.$$

A simuló kör egyenlete

$$(x-3)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}.$$



A tangens szakasz hossza

$$T = \left| f(x_0) \cdot \frac{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}{f''(x_0)} \right| = \left| 0 \cdot \frac{5}{2} \right| = 0,$$

a normális szakasz hossza

$$N = \left| f(x_0) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \right| = \left| 0 \cdot \sqrt{5} \right| = 0.$$

A szubtangens szakasz hossza

$$S_T = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{0}{2} \right| = 0,$$

a szubnormális szakasz hossza

$$S_N = |f(x_0) \cdot f'(x_0)| = 0 \cdot 2 = 0.$$

Megjegyezzük, hogy mivel $x = \frac{1}{2}$ zérushelye a függvénynek, ezért nyilvánvaló, hogy a tangens szakasz, a normális szakasz, a szubtangens szakasz és a szubnormális szakasz hossza nulla.

5.18. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvénynek az $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pontjához tartozó simulókörének egyenletét!

megoldás:

A függvény deriváltja $f'(x) = \cos x$, második deriváltja $f''(x) = -\sin x$. Kiszámolva a függvényértéket, a derivált értékét és a második derivált értékét az x_0 helyen

$$f(x_0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad f'(x_0) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad f''(x_0) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1.$$

A simulókör középpontjának koordinátái

$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}, \quad v = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

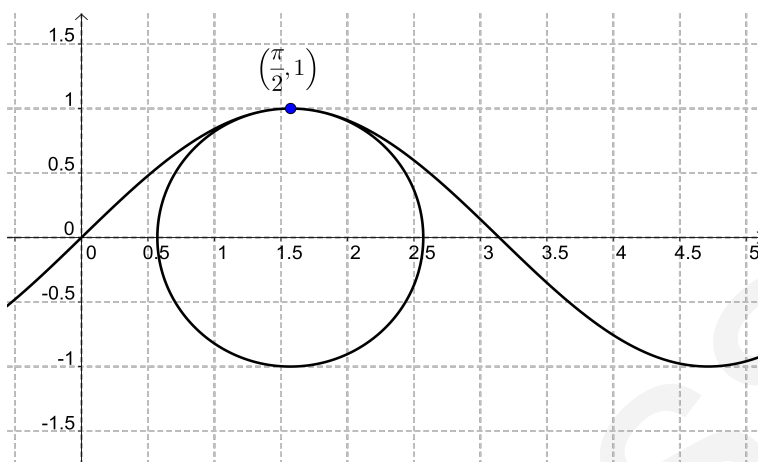
$$u = \frac{\pi}{2}, \quad v = 1 + \frac{1 + 0^2}{-1} = 0$$

adódik. A simulókör sugara

$$r = \frac{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)} = \left| \frac{(1 + 0^2)^{\frac{3}{2}}}{-1} \right| = 1.$$

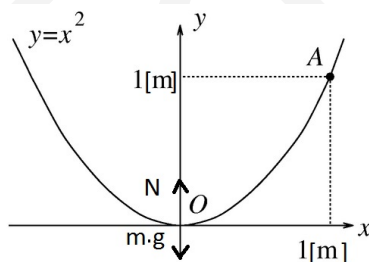
A simulókör egyenlete

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = 1.$$



5.19. Feladat. [13] ★ Az ábrán látható, parabola alakú vajat A pontjából kezdősebesség nélkül indul egy pontszerűnek tekinthető, $0,1 \text{ [kg]}$ tömegű test. (A súrlódás elhanyagolható.) Mekkora erővel nyomja a test az O pontban a vajat?

megoldás:



Az $m = 0,1 \text{ [kg]}$ tömegű test az A pontból, $h = 1 \text{ [m]}$ magasságból indul. Az O pontban a sebessége vízszintes, nagysága (a munkatétel alapján) $v = \sqrt{2gh}$. A test centripetális gyorsulása v^2/r , ahol r az O pontbeli simulókör sugara. A mozgásegyenlet:

$$N - m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad N = m \cdot g + \frac{2mgh}{r},$$

ahol N a keresett nyomóerő ellenereje. A feladatunk tehát r meghatározása. Egy kétszer differenciálható függvény simulókörének sugarát az

$$r = \frac{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}$$

formulával számíthatjuk ki. Mivel $f(x) = x^2$, ezért $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$. Ezeket behelyettesítve

$$r = \frac{[1 + (2 \cdot 0)^2]^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{1}{2},$$

azaz a simulókör sugara $r = 0,5$ [m]. Így

$$N = m \cdot g + \frac{2m \cdot g \cdot h}{r} = 0,1 \cdot 10 + \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 1}{0,5} = 5 \text{ [N]}$$

nagyságú erővel nyomja a vajat a test az O pontban. Megjegyezzük, hogy a kapott 5 [N] az erő nagysága. A test valójában -5 [N] erővel nyomja a vajat.

5.20. Feladat. Melyik pontban érinti az $f(x) = 0,5x^2 - x + 2,5$ függvényt az $y = 2x - 2$ egyenletű egyenes?

megoldás:

A függvény deriváltja $f'(x) = x - 1$. Az érintő egyenes meredeksége 2. Keressük tehát azt az x értéket, melyre teljesül az $x - 1 = 2$ egyenlet. Az egyenlet megoldása $x = 3$, így az érintési pont x koordinátája 3. Az y koordinátát például az egyenes egyenletéből kapjuk meg, ugyanis az érintési pont illeszkedik az egyenesre, így teljesülnie kell az $y = 2 \cdot 3 - 2$ összefüggésnek, tehát $y = 4$. Következésképpen az érintési pont $E(3; 4)$.

5.21. Feladat. Határozzuk meg a k valós számot úgy, hogy az $f(x) = \frac{k}{x^2 - 1}$ függvénynek az $x = 3$ helyhez húzott érintője az x -tengellyel 60° -os szöget zárjon be!

megoldás:

Mivel az irányszög 60° , ezért a meredekség

$$m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Tehát keressük azt a k valós számot, amelyre $f'(3) = \sqrt{3}$ teljesül. Mivel

$$f'(x) = \frac{-2kx}{(x^2 - 1)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(3) = \frac{-6k}{64} = \frac{-3k}{32},$$

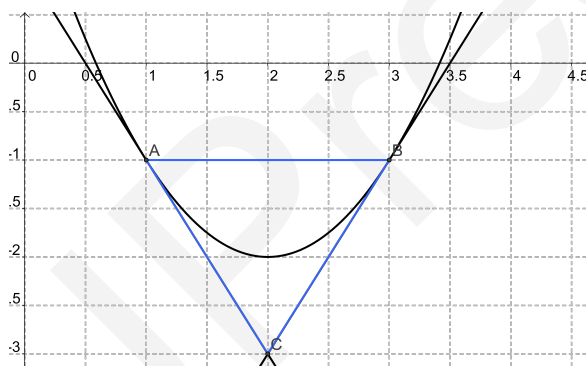
ezért $-3k/32 = \sqrt{3}$ kell, hogy teljesüljön. Az egyenlet megoldásából

$$k = -\frac{32\sqrt{3}}{3} = -\frac{32}{\sqrt{3}}$$

adódik.

5.22. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2 - 4x + 2$ függvényt és az $A(1; -1)$, $B(3; -1)$ pontokat! Jelölje C az f függvény A és B pontjaiba húzott érintő egyenesének metszéspontját! Határozzuk meg az ABC háromszög területét!

megoldás:



A függvény deriváltja $f'(x) = 2x - 4$, így $f'(1) = -2$ és $f'(3) = 2$. Ezeket felhasználva az érintő egyenesek egyenlete:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -1 - 2 \cdot (x - 1) = -2x + 1,$$

illetve

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = -1 + 2 \cdot (x - 3) = 2x - 7.$$

Az egyenesek metszéspontját a két egyenes egyenlete által alkotott egyenletrendszer megoldásából kapjuk, azaz meg kell oldanunk az

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + 1 \\ y = 2x - 7 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer. Mindkét egyenletből y ki van fejezve, így

$$2x - 7 = -2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 4x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

adódik. Ezt behelyettesítve valamelyik egyenes egyenletébe azt kapjuk, hogy

$$y = 2 \cdot 2 - 7 = -3.$$

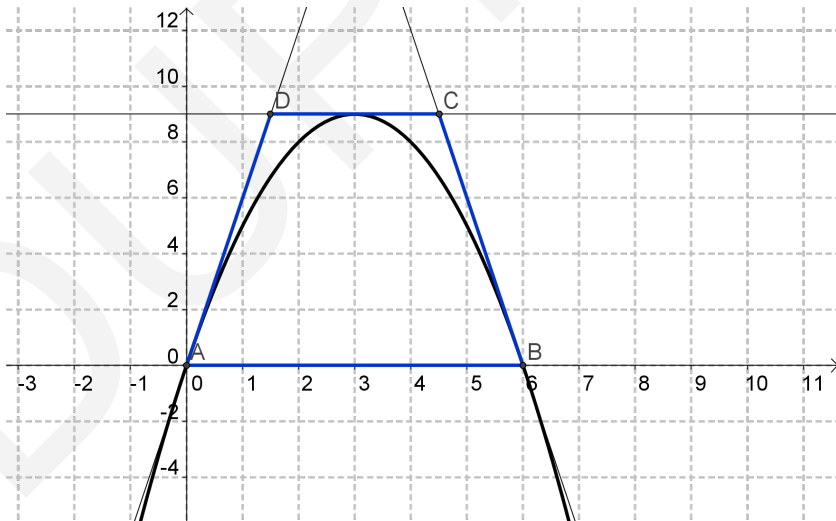
A C pont koordinátái tehát $C(2; -3)$. A háromszög AB oldalának hossza 2 egység. A háromszög egyenlő szárú, így magassága az alap felezőpontjának $F(2; -1)$ és a C csúcsnak a távolsága: 2. A háromszög területe tehát:

$$T = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

5.23. Feladat. Tekintsük az $f(x) = -x^2 + 6x$ függvényt. Jelölje A és B a függvény grafikonjának az x -tengellyel való metszéspontját! Mekkora a területe annak a trapéznek, amelynek párhuzamos oldalegyenesei az x -tengely és a függvény x -tengellyel párhuzamos érintője, szárai pedig az f függvény A és B pontjába húzott érintő egyenesekre illeszkednek.

megoldás:

A függvény grafikonjának az x -tengellyel párhuzamos érintő egyenesének meredeksége 0, azaz a keresett pontban a függvény deriváltja 0.



Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = -2x + 6,$$

amelynek zérushelye

$$-2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

Mivel

$$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = 9,$$

így a $(3; 9)$ pontba húzott érintő egyenes egyenlete $y = 9$. Másrészt az f függvény x -tengellyel való metszéspontjainak x -koordinátáit a $-x^2 + 6x = 0$ egyenlet megoldása adja. Ha x -et kiemelünk, akkor $x \cdot (-x + 6) = 0$ adódik. Egy szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, azaz $x = 0$ vagy $x = 6$. Ezt felhasználva megkapjuk az A és B pont koordinátáit: $A(0; 0)$, $B(6; 0)$. Ezen pontokban az érintő egyenesek egyenlete

$$e_1 : y = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 6x,$$

illetve

$$e_2 : y = f(6) + f'(6) \cdot (x - 6) \quad \Rightarrow \quad y = -6 \cdot (x - 6) = -6x + 36.$$

A C , illetve D pont koordinátáit az e_2 , illetve e_1 egyeneseknek az $y = 9$ egyenletű egyenessel való metszéspontja adja. A $9 = -6x + 36$ összefüggésből $x = 9/2$, a $9 = 6x$ egyenletből $x = 3/2$ adódik. Tehát a C és D pont koordinátái:

$$C\left(\frac{9}{2}; 9\right) \quad D\left(\frac{3}{2}; 9\right).$$

Az AB szakasz hossza 6, a CD szakasz hossza 3, a trapéz magassága 9 egység. Ezeket felhasználva a trapéz területe

$$T = \frac{6 + 3}{2} \cdot 9 = \frac{81}{2}.$$

5.24. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény görbületét az $x_0 = 2$ helyen! Adjuk meg az f függvény görbület függvényének határértékét $-\infty$ -ben és ∞ -ben!

megoldás:

Mivel $f'(x) = 2x$ és $f''(x) = 2$, ezért a görbületi függvény

$$g(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4x^2)^3}},$$

így

$$g(x_0) = \frac{2}{\sqrt{(1+16)^3}} = \frac{2}{\sqrt{17^3}} = \frac{2\sqrt{17}}{289}.$$

Mivel a $g(x)$ függvény nevezőjének határértéke a $-\infty$ -ben és a ∞ -ben is ∞ végtelen, a számláló pedig konstans, ezért

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

5.25. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ függvény görbületét az $x_0 = 1$ helyen!

megoldás:

Mivel $f'(x) = \frac{1}{x}$ és $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, ezért a görbületi függvény

$$g(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{(1 + \frac{1}{x^2})^3}},$$

így

$$g(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

5.26. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = e^{2x}$ függvény görbületét az $x_0 = 0$ helyen!

megoldás:

Mivel $f'(x) = 2e^{2x}$ és $f''(x) = 4e^{2x}$, ezért a görbületi függvény

$$g(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4e^{2x}}{\sqrt{(1 + 4e^{4x})^3}},$$

így

$$g(x_0) = \frac{4}{\sqrt{5^3}} = \frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{25}.$$

5.27. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény görbületét az $x_0 = 1$ helyen!

megoldás:

Mivel egyrészt

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}},$$

másrészt

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}},$$

ezért a görbületi függvény

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{4 \cdot x^{\frac{3}{2}}}}{\left(\frac{4x+1}{4x}\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{2}{(4x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{(4x+1)^3}}, \end{aligned}$$

így

$$g(x_0) = \frac{2}{\sqrt{(4 \cdot 1 + 1)^3}} = \frac{2}{\sqrt{125}}.$$

6. A differenciálszámítás középértéktételei

6.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{tg} x > x$, ha $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

megoldás:

Legyen $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tetszőleges. A $[0; x]$ intervallumon a tg függvény differenciálható, így teljesülnek a Lagrange-féle középértéktétel feltételei. Ezért létezik olyan $c \in]0; x[$ valós szám, hogy

$$\operatorname{tg}' c = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0}{x - 0} = \frac{\operatorname{tg} x}{x},$$

másrészt

$$\operatorname{tg}' c = \frac{1}{\cos^2 c}.$$

Tehát

$$\frac{1}{\cos^2 c} = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Mivel $0 < c < \frac{\pi}{2}$, ezért $0 < \cos c < 1$ miatt

$$\frac{1}{\cos c} > 1, \quad \text{így} \quad \frac{1}{\cos^2 c} > 1.$$

Tehát

$$\operatorname{tg} x > x, \quad \text{ha } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

6.2. Feladat. Mutassuk meg, hogy minden a és b valós számra igaz a

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

egyenlőtlenség.

megoldás:

Legyen $f(x) = \sin x$, $a \leq x \leq b$. Mivel az f függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonos, az $]a; b[$ intervallumon differenciálható, ezért teljesülnek a Lagrange-féle középértéktétel feltételei, azaz van olyan $c \in]a; b[$ valós szám, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

azaz

$$\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \sin' c = \cos c.$$

Mivel $-1 \leq \cos c \leq 1$, ezért

$$\left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| \leq 1.$$

A nevezővel beszorozva

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

adódik.

6.3. Feladat. Azt tapasztaltuk, hogy ha a higanyhőmérőt kivesszük a mélyhűtőből, és forró vízbe tesszük, 14 másodperc alatt melegszik fel $-19 [^{\circ}\text{C}]$ -ről $100 [^{\circ}\text{C}]$ -ra. Igazoljuk, hogy eközben valamikor a higany $8,5 [^{\circ}\text{C}/\text{s}]$ gyorsasággal melegedett.

megoldás:

Jelölje a T függvény a hőmérsékletet a t idő függvényében. Ekkor egyrészt $T(0) = -19$, másrészt $T(14) = 100$. A Lagrange-féle közéértéktétel szerint létezik olyan $t_0 \in]0; 14[$ valós szám, melyre

$$\frac{T(14) - T(0)}{14 - 0} = T'(t_0) = 8,5.$$

6.4. Feladat. Az a és b számok mértani közepe a $\sqrt{a \cdot b}$ szám. Mutassuk meg, hogy ha a és b pozitív számok, akkor az $[a; b]$ intervallumon az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény esetében a Lagrange-féle közéértéktételben szereplő c az a és b mértani közepe.

megoldás:

A Lagrange-féle közéértéktétel szerint létezik olyan $c \in]a; b[$ valós szám, melyre

$$-\frac{1}{c^2} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{a - b}{a \cdot b \cdot (b - a)} = -a \cdot b.$$

Átrendezve az egyenletet $c = \sqrt{a \cdot b}$ adódik.

6.5. Feladat. Az a és b számok számtani közepe $(a + b)/2$. Mutassuk meg, hogy bármely $[a; b]$ intervallumon az $f(x) = x^2$ függvény esetében a Lagrange-féle középértéktételben szereplő c az a és b számtani közepe.

megoldás:

A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan $c \in]a; b[$ valós szám, melyre

$$2c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a) \cdot (b + a)}{b - a} = a + b.$$

Átrendezve az egyenletet $c = \frac{a + b}{2}$ adódik.

6.6. Feladat. Legyen $f: [6; 15] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, melynek a $]6; 15[$ intervallumra való leszűkítése differenciálható, továbbá tegyük fel azt is, hogy $f(6) = -2$ és $f'(x) \leq 10$. Adjuk meg $f(15)$ maximális értékét!

megoldás:

A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan $c \in]6; 15[$ valós szám, amelyre teljesül, hogy

$$f'(c) = \frac{f(15) - f(6)}{15 - 6} = \frac{f(15) - f(6)}{9},$$

amiből azt kapjuk, hogy $f(15) = 9f'(c) + f(6)$. Azonban a feladat feltételei szerint $f(6) = -2$ és $f'(x) \leq 10$, így az előbbi összefüggésből

$$f(15) = 9f'(c) + f(6) \leq 9 \cdot 10 - 2 = 88$$

adódik, tehát $f(15)$ maximális értéke 88.

6.7. Feladat. Legyen $f: [0; 7] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és tegyük fel, hogy f differenciálható a $]0; 7[$ intervallumon. Tudjuk továbbá azt is, hogy $f(0) = -4$ és $|f'(x)| \leq 10$. Mutassuk meg, hogy

$$-74 \leq f(7) \leq 66.$$

megoldás:

A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan $c \in]0; 7[$ valós szám, hogy

$$f'(c) = \frac{f(7) - f(0)}{7 - 0}.$$

Az $|f'(x)| \leq 10$ feltétel miatt egyrészt $f'(x) \leq 10$, másrészt $f'(x) \geq -10$. A fentiekből következően egyrészt

$$\begin{aligned}\frac{f(7) - f(0)}{7} &\leq 10 \\ f(7) &\leq 70 + f(0) \\ f(7) &\leq 66,\end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned}\frac{f(7) - f(0)}{7 - 0} &\geq -10 \\ f(7) &\geq -70 + f(0) \\ f(7) &\geq -74\end{aligned}$$

adódik. Azt kaptuk tehát, hogy

$$-74 \leq f(7) \leq 66.$$

6.8. Feladat. Határozzuk meg az $f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2$ függvény esetén azon c valós számokat, amelyekre teljesül, hogy a $(c; f(c))$ pontba húzott érintő párhuzamos a $(-1; f(-1))$ és $((2; f(2)))$ pontokat összekötő szelővel!

megoldás:

A szelő meredeksége

$$m = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{8 - 8 - (-1 - 2)}{3} = 1,$$

így az érintő meredeksége is 1 kell, hogy legyen, azaz teljesülnie kell, hogy $f'(c) = 1$. Mivel $f'(c) = 3c^2 - 4c$, ezért meg kell oldanunk a

$$3c^2 - 4c = 1$$

másodfokú egyenletet, ami ekvivalens azzal, hogy $3c^2 - 4c - 1 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$c_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Mindkét érték eleme az értelmezési tartománynak, így mindkét valós szám megfelel a feladatot feltételeinek.

6.9. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek van legalább két gyöke, akkor $f'(x)$ -nek van legalább egy gyöke!

megoldás:

Tegyük fel, hogy $a, b \in I$ gyökei az f függvénynek. Ekkor $f(a) = f(b) = 0$. Mivel a függvény differenciálható, ezért $[a; b]$ -n folytonos és $]a; b[$ -n differenciálható, így alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel, ami szerint létezik olyan $c \in]a; b[$ valós szám, amelyre teljesül, hogy

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - 0}{b - a} = 0,$$

azaz a derivált függvénynek $c \in I$ zérushelye, amivel igazoltuk az állítást.

6.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = 4x^5 + x^3 + 7x - 2$ polinom függvénynek pontosan egy valós gyöke van!

megoldás:

Egy valós gyöke biztosan van a függvénynek, ugyanis egyrészt $f(0) = -2$, másrészt $f(1) = 10$, és mivel a polinomok folytonos függvények, és a folytonos függvények Darboux-tulajdonságúak, ezért bármely két függvényérték közötti közbeeső értéket is fel kell, hogy vegyen a függvény, azaz létezik olyan a valós szám, amelyre $f(a) = 0$. (A Bolzano-tételre is hivatkozhattunk volna, ami szerint intervallumon értelmezett negatív és pozitív értékeket is felvevő, folytonos függvénynek van zérushelye.) Ha azonban lenne egy b valós szám is, amelyre $f(b) = 0$, akkor a Rolle-féle középértéktétel miatt létezne olyan $c \in]a; b[$ valós szám, amelyre $f'(c) = 0$. Azonban

$$f'(c) = 20c^4 + 3c^2 + 7$$

ami mindenütt pozitív, így sehol sem lehet nulla. Tehát a Rolle-tétel garantálja, hogy egynél több valós gyök nem lehet. A feladat elején megmutattuk, hogy egy valós gyök azonban biztos van, így pontosan egy valós gyök van.

6.11. Feladat. Legyenek a, b és c pozitív, 1-től különböző valós számok. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = a^x + b^x + c^x - 3$$

függvénynek nem lehet három valós gyöke!

megoldás:

Tegyük fel, hogy f -nek három különböző valós gyöke van. Ekkor a Rolle-tétel szerint az

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a + b^x \cdot \ln b + c^x \cdot \ln c$$

függvénynek legalább két valós gyöke lenne és hasonlóan az

$$f''(x) = a^x \cdot \ln^2 a + b^x \cdot \ln^2 b + c^x \cdot \ln^2 c$$

függvénynek legalább egy valós gyöke lenne, ami ellentmondás, ugyanis $f''(x)$ nyilvánvalóan minden valós számra pozitív.

7. L'Hospital-szabály

7.1. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ határértéket!

megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

7.2. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$ határértéket!

megoldás:

A számláló határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 6) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0,$$

a nevező határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 9 - 9 = 3^2 - 9 = 0,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 5}{2x} = \frac{1}{6}.$$

7.3. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x}$ határértéket!

megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctg x = \arctg 0 = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

7.4. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x}$ határértéket!

megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x = \sin 0 = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} 5x = 5 \cdot 0 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 4x)'}{(5x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 4x}{5} = \frac{4}{5}.$$

7.5. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(\frac{x}{2})}{x-2}$ határértéket!

megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln 1 = 0, \qquad \lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 2 - 2 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(\frac{x}{2})}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

7.6. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(\frac{x}{3})}{x^2-9}$ határértéket!

megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x \rightarrow 3} \ln\left(\frac{x}{3}\right) = \ln 1 = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9 = 3^2 - 9 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{18}.$$

7.7. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$ határértéket!

megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x = \sin 0 = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x = \sin 0 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)'}{(\sin 4x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{4 \cos 4x} = \frac{1}{2}.$$

7.8. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin 3x}$ határértéket!

megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) = 1 - e^0 = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x = \sin 0 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{3 \cos 3x} = -\frac{1}{3}.$$

7.9. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$ határértéket!

megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 1) = 1 - 1 = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \cdot \ln 2}{1} = \ln 2.$$

7.10. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 7^{3x}}{x}$ határértéket!

megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 7^{3x}) = 1 - 1 = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 7^{3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cdot 7^{3x} \cdot \ln 7}{1} = -3 \ln 7.$$

7.11. Feladat. Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x}$ határértéket!

megoldás:

A számláló határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x) = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0,$$

a nevező határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos 3x = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)'}{(1 - \cos 3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{3 \sin 3x}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének szintén 0 a határértéke, így ismételtén alkalmaznunk kell a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{3 \sin 3x} = \frac{4 \cos 2x}{9 \cos 3x} = \frac{4}{9}.$$

7.12. Feladat. Számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{x^2}$$

határértéket!

megoldás:

A számláló határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x - e^x) = 1 + 0 - e^0 = 0,$$

a nevező határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^2 = 0,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének szintén 0 a határértéke, így ismételten alkalmaznunk kell a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

7.13. Feladat. Számoljuk ki az alábbi függvényhatárértékeket:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \cdot e^x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}.$

megoldás:

a) Alkalmazva a L'Hospital szabályt, valamint az összetett függvény deriválási szabályát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{e^x + x \cdot e^x} = \frac{0}{1} = 0.$$

b) Kétszer alkalmazva a L'Hospital szabályt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16 \cos 4x}{2} = 8.$$

7.14. Feladat. Számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$$

határértéket!

megoldás:

A számláló határértéke

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{3x} = \infty,$$

a nevező határértéke

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke ∞ , tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} \cdot 3}{2x}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének szintén ∞ a határértéke, így ismételtén alkalmaznunk kell a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} \cdot 3}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} \cdot 9}{2} = \infty.$$

7.15. Feladat. Számoljuk ki az alábbi függvényhatárértékeket:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x};$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x;$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x};$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x+1)}.$

megoldás:

a) Alkalmazva a L'Hospital szabályt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

b) Felhasználjuk, hogy $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, majd alkalmazzuk a L'Hospital szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

c) Felhasználjuk, hogy $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$, majd alkalmazzuk a L'Hospital szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e^{-x}} = 0.$$

d) Alkalmazva a L'Hospital szabályt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = \infty.$$

7.16. **Feladat.** Számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos(5x)}$$

határértéket!

megoldás:

A számláló határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0,$$

a nevező határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos(5x) = 1 - 1 = 0,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin(5x) \cdot 5}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének szintén 0 a határértéke, így ismételtén alkalmaznunk kell a L'Hospital-szabályt. Előtte vegyük azonban észre, hogy $2 \sin x \cdot \cos x = \sin(2x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x) \cdot 5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) \cdot 2}{\cos(5x) \cdot 25} = \frac{2}{25}.$$

7.17. **Feladat.** Számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \operatorname{tg} 5x}{x^3}$$

határértéket!

megoldás:

A számláló határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0} 5x - \operatorname{tg} 5x = 0,$$

a nevező határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \operatorname{tg} 5x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - \frac{1}{\cos^2(5x)} \cdot 5}{3x^2}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének szintén 0 a határértéke, így ismételtén alkalmaznunk kell a L'Hospital-szabályt. Előtte azonban az $\frac{1}{\cos^2(5x)}$ kifejezést írjuk át $\cos^{-2}(5x)$ -nek.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - \cos^{-2}(5x) \cdot 5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{50 \cdot \cos^{-3}(5x) \cdot (-\sin(5x))}{6x}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének a határértéke szintén 0, így ismételtén alkalmaznunk kell a L'Hospital-szabályt. Első lépésben a számláló deriváltját számoljuk ki. Ehhez legyen

$$u(x) = -50 \cdot \cos^{-3}(5x) \cdot \sin(5x).$$

Legyen továbbá $a(x) = -50 \cdot \cos^{-3}(5x)$ és $b(x) = \sin(5x)$. Ekkor

$$\begin{aligned} u'(x) &= a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x) = \\ &= 150 \cdot \cos^{-4}(5x) \cdot (-\sin(5x)) \cdot 5 \cdot \sin(5x) - \\ &- 50 \cdot \cos^{-3}(5x) \cdot \cos(5x) \cdot 5. \end{aligned}$$

Legyen továbbá $v(x) = 6x$. Ekkor $v'(x) = 6$. Felhasználva, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = 250,$$

illetve

$$\lim_{x \rightarrow 0} v'(x) = 6,$$

azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \operatorname{tg} 5x}{x^3} = \frac{250}{6} = \frac{125}{3}.$$

7.18. Feladat. Számoljuk ki az alábbi függvényhatárértékeket:

a) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x;$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x};$

megoldás:

a) Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x},$$

ezért kiszámolva a

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x$$

határértéket

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0$$

adódik, így a keresett határérték $e^0 = 1$.

b) Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln x},$$

kiszámolva a

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \cdot \ln x$$

határértéket

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\sin^{-2} x \cdot \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2 \sin x \cos x}{-x \cdot \sin x + \cos x} = 0, \end{aligned}$$

így a keresett határérték $e^0 = 1$.

c) Alkalmazva a L'Hospital szabályt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x}{\cos x - x \cdot \sin x} = 1. \end{aligned}$$

7.19. Feladat. Adjuk meg az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f(x) = \frac{9x - 3 \cdot \sin 3x}{5x^3}$$

függvény folytonos kiterjesztését!

megoldás:

A függvény minden $x \neq 0$ valós szám esetén folytonos. A L'Hospital szabály többszöri alkalmazásával kiszámoljuk a határértékét az $x = 0$ helyen:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x - 3 \cdot \sin 3x}{5x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 - 9 \cdot \cos 3x}{15x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{27 \cdot \sin 3x}{30x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cdot \sin 3x}{10x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{27 \cdot \cos 3x}{10} = \frac{27}{10}.\end{aligned}$$

A megadott függvény folytonos kiterjesztése tehát

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3 \cdot \sin 3x}{5x^3}, & \text{ha } x \neq 0 \\ \frac{27}{10}, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

8. Függvényvizsgálat

Ebben a fejezetben a következő jelölésekkel élünk:

mon.	monotonitás
konv.	konvexitás
lok. min.	lokális minimum
lok. max.	lokális maximum
lok. sz. é.	lokális szélsőérték
ip	inflexiós pont
nincs ért.	nincs értelmezve

Megállapodunk továbbá abban, hogy a továbbiakban, ha mást nem mondunk, a függvények értelmezési tartományának a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazát tekintjük. A továbbiakban „teljes függvényvizsgálat” alatt az alábbiakat fogjuk elvégezni:

1. Értelmezési tartomány meghatározása.
2. Zérushely megadása.
3. A függvény deriváltjának kiszámolása, majd annak segítségével monotonitás és lokális szélsőérték vizsgálata.
4. A függvény második deriváltjának kiszámolása, majd annak segítségével konvexitás és inflexiós hely vizsgálata.
5. Határértékek meghatározása az értelmezési határpontjaiban.
6. A függvény grafikonjának felvázolása.
7. Értékkészlet megadása.
8. Korlátosság vizsgálata.
9. Paritás meghatározása.
10. Periodikus-e a függvény?
11. Abszolút (globális) szélsőérték hely megadása.
12. Invertálhatóság vizsgálata.

8.1. Feladat. Végezzük el az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

- 1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^3 - 3x = 0,$$

amiből x -et kiemelve azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (x^2 - 3) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, vagy $x^2 - 3 = 0$, ez utóbbiból $x = \sqrt{3}$, vagy $x = -\sqrt{3}$. Így a függvénynek három zérushelye van, a 0, $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a $3x^2 - 3 = 0$ egyenletet:

$$3x^2 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 6x.$$

Ennek zérushelye, azaz a $6x = 0$ egyenlet megoldása $x = 0$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét, amiből következtethetünk a függvény konvexitására:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

Az értelmezési tartomány határpontjai $-\infty$ és ∞ . Mindkét határértéket úgy

kaphatjuk meg, hogy emeljük ki a polinom függvény legnagyobb fokszámú tagját:

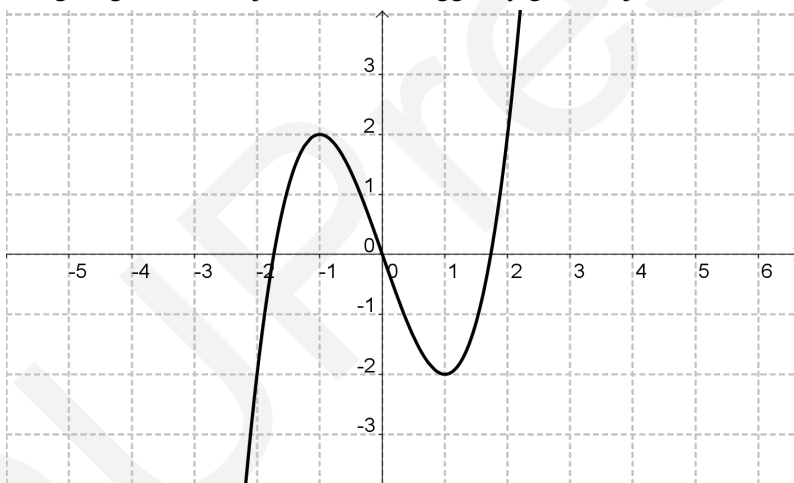
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

8) Korlátosság: nem korlátos.

9) Paritás: páratlan, mert szimmetrikus az origóra.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.

12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.2. Feladat. Végezzük el az $f(x) = x \cdot (x - 2)^2$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x \cdot (x - 2)^2 = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, vagy $(x - 2)^2 = 0$, amiből $x = 2$ adódik. Így a függvénynek kettő darab zérushelye van, a 0 és a 2.

3) Mielőtt meghatározzuk a függvény deriváltját, elvégezzük a nevezetes azonosságot és felbontjuk a zárójelet:

$$f(x) = x \cdot (x - 2)^2 = x \cdot (x^2 - 4x + 4) = x^3 - 4x^2 + 4x.$$

Ezt felhasználva

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a $3x^2 - 8x + 4 = 0$ egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6},$$

amiből azt kapjuk, hogy $x_1 = 2/3$, $x_2 = 2$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < \frac{2}{3}$	$x = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 6x - 8.$$

Ennek zérushelye, azaz a $6x - 8 = 0$ egyenlet megoldása $x = 4/3$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < \frac{4}{3}$	$x = \frac{4}{3}$	$x > \frac{4}{3}$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

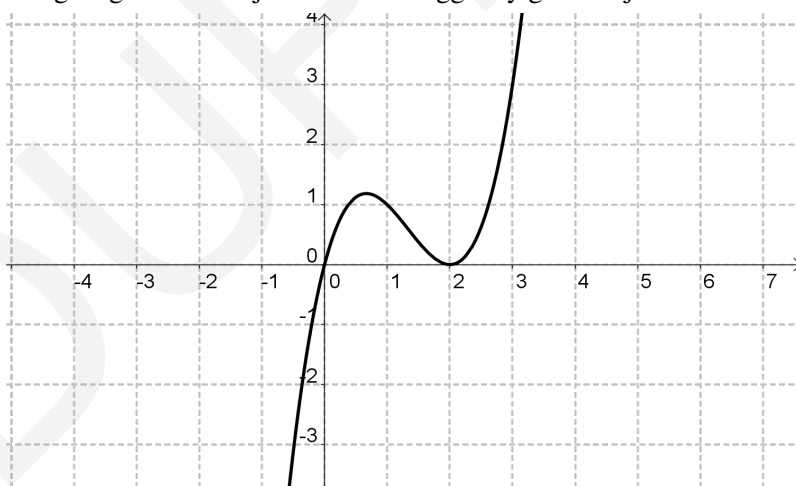
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = \infty$$

6) A függvény ábrázolásához készítettünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x < 2$	$x > 2$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

8) Korlátosság: nem korlátos.

- 9) Paritás: nem páros és nem páratlan.
 10) Periodicitás: nem periodikus.
 11) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.
 12) Invertálhatóság: nem invertálható, mert két zérushelye van.

8.3. Feladat. Végezzük el az $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 1)^2$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

- 1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
 2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$(x - 2) \cdot (x + 1)^2 = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x - 2 = 0$, amiből $x = 2$, vagy $(x + 1)^2 = 0$, amiből $x = -1$. Így a függvénynek kettő darab zérushelye van, a -1 és a 2 .

- 3) Mielőtt deriváljuk a függvényt elvégezzük a nevezetes azonosságot és felbontjuk a zárójelet:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 2) \cdot (x + 1)^2 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1) = \\ &= x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2 = x^3 - 3x - 2. \end{aligned}$$

A függvény deriváltja

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a $3x^2 - 3 = 0$ egyenletet:

$$3x^2 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

- 4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 6x.$$

Ennek zérushelye, azaz a $6x = 0$ egyenlet megoldása $x = 0$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

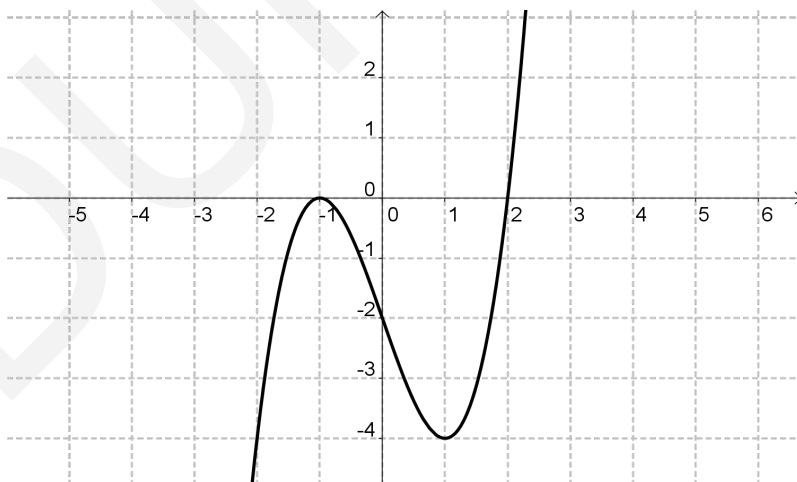
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x - 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



- 7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.
- 8) Korlátosság: nem korlátos.
- 9) Paritás: nem páros és nem páratlan.
- 10) Periodicitás: nem periodikus.
- 11) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.
- 12) Invertálhatóság: nem invertálható a függvény, mert például a -1 -hez és az 1 -hez is ugyanazt a függvényértéket rendeli.

8.4. Feladat. Végezzük el az

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$$

függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

- 1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- 2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x = 0.$$

Az egyenlet mindkét oldalát beszorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2x^3 + 3x^2 - 12x = 0.$$

Ebből x -et kiemelve $x \cdot (2x^2 + 3x - 12) = 0$ adódik. Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, vagy $2x^2 + 3x - 12 = 0$, melyet a másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4}$$

adódik. Tehát a zérushelyek:

$$x = 0; \quad x = \frac{-3 - \sqrt{105}}{4} \approx -3,31; \quad x = \frac{-3 + \sqrt{105}}{4} \approx 1,18.$$

- 3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = x^2 + x - 2.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk az $x^2 + x - 2 = 0$ egyenletet:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2},$$

amiből azt kapjuk, hogy $x_1 = 1$ és $x_2 = -2$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 2x + 1.$$

Ennek zérushelye:

$$2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$x > -\frac{1}{2}$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

A $-\infty$ -beli határérték:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2x} - \frac{2}{x^2} \right) = -\infty, \end{aligned}$$

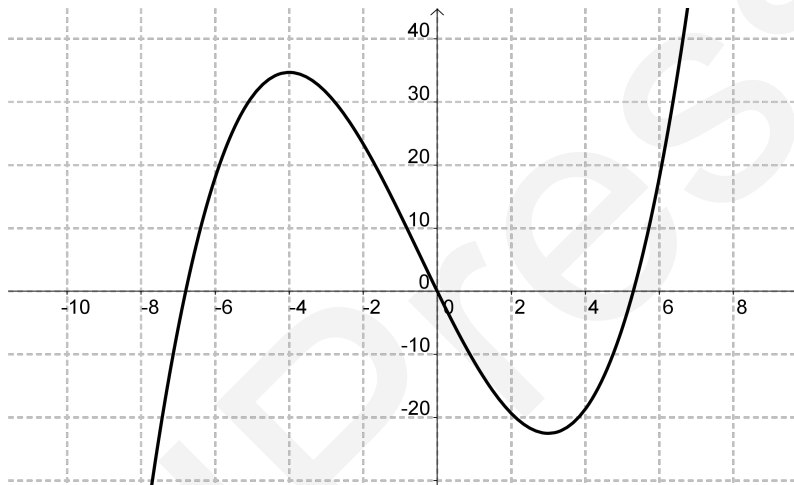
a ∞ -beli határérték:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2x} - \frac{2}{x^2} \right) = \infty. \end{aligned}$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x > 1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

8) Korlátosság: nem korlátos.

9) Paritás: nem páros és nem páratlan.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.

12) Invertálhatóság: nem invertálható a függvény, mert például a -1 -hez és az 1 -hez is ugyanazt a függvényértéket rendeli.

8.5. Feladat. Végezzük el az $f(x) = 4x^3 - 12x$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$4x^3 - 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x \cdot (x^2 - 3) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $4x = 0$, vagy $x^2 - 3 = 0$, ez utóbbiból $x = \sqrt{3}$, vagy $x = -\sqrt{3}$. A függvénynek tehát három zérushelye van: a 0, $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$.

3) A függvény deriváltja $f'(x) = 12x^2 - 12$. Ennek zérushelyei, azaz a

$$12x^2 - 12 = 0$$

egyenlet megoldásai $x = 1$, vagy $x = -1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 24x.$$

Ennek zérushelye, azaz a $24x = 0$ egyenlet megoldása $x = 0$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

5) A $-\infty$ -beli határérték

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 12x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{12}{x^2}\right) = -\infty \cdot (1 - 0) = -\infty. \end{aligned}$$

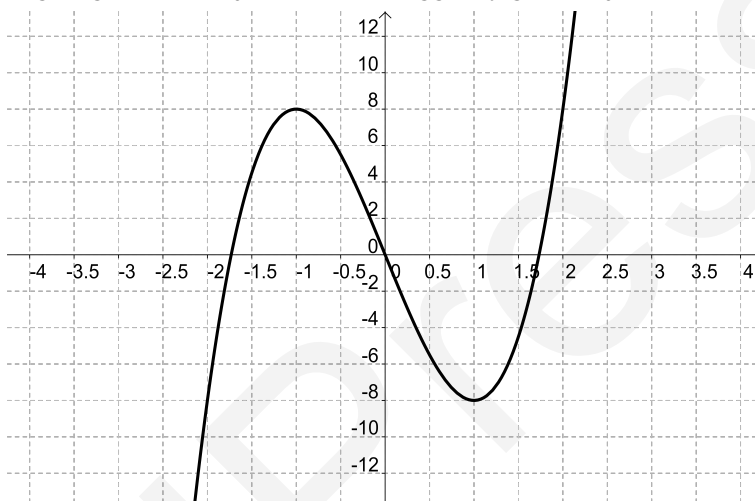
A ∞ -beli határérték

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 - 12x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{12}{x^2}\right) = \infty \cdot (1 - 0) = \infty. \end{aligned}$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

8) Korlátosság: a függvény felülről nem korlátos, alulról nem korlátos.

9) Paritás: páratlan, mert szimmetrikus az origóra.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.

12) Invertálhatóság: nem invertálható a függvény.

8.6. Feladat. Végezzük el az $f(x) = 2x^2 - x^4$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$2x^2 - x^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot (2 - x^2) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x^2 = 0$, vagy $2 - x^2 = 0$, ez utóbbiból $x = \sqrt{2}$, vagy $x = -\sqrt{2}$. Így a függvénynek három zérushelye van: $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = 4x - 4x^3.$$

Ennek zérushelyeit, azaz a $4x - 4x^3 = 0$ egyenlet megoldásait a $4x$ kiemelésével kapjuk: $4x \cdot (1 - x^2) = 0$. Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $4x = 0$, vagy $1 - x^2 = 0$. Ezeket megoldva $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ adódik. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗	lok. max.	↘

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 4 - 12x^2.$$

Ennek zérushelyei, azaz a $4 - 12x^2 = 0$ egyenlet megoldásai $x_1 = -1/\sqrt{3}$, $x_2 = 1/\sqrt{3}$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{3}}$
$f''(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	konkáv	ip	konvex	ip	konkáv

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

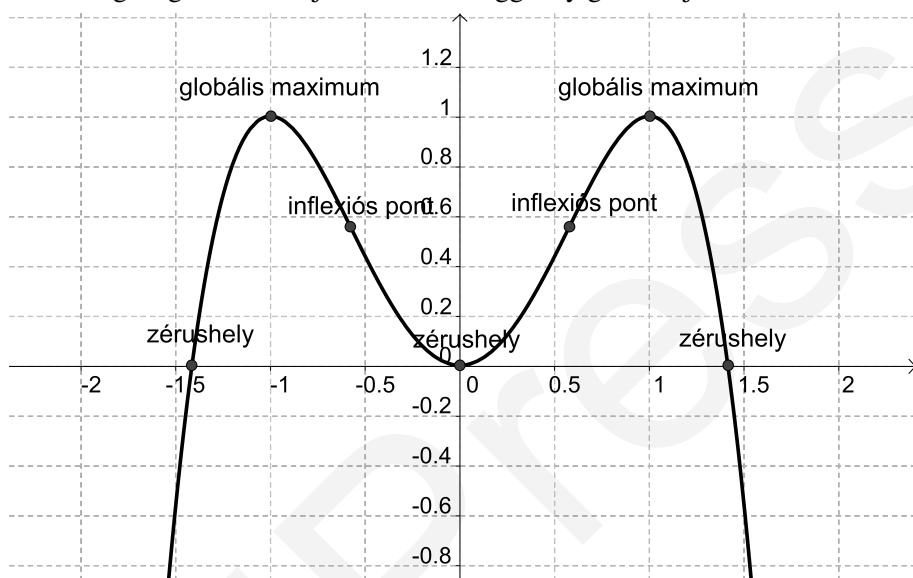
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - x^4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \left(\frac{2}{x^2} - 1 \right) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x^4) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \cdot \left(\frac{2}{x^2} - 1 \right) = -\infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}} < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 1$	$x > 1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex	konvex	konkáv	konkáv

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \leq 1$.

8) Korlátosság: a függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos.

9) Paritás: páros, mert szimmetrikus az y tengelyre.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: maximum hely: $x = -1; 1$, maximum érték: $y = 1$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható a függvény, mert például a -1 -hez és az 1 -hez is ugyanazt a függvényértéket rendeli.

8.7. Feladat. Végezzük el az $f(x) = x^4 - 4x^3$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^4 - 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 \cdot (x - 4) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, vagy $x = 4$.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a $4x^3 - 12x^2 = 0$ egyenletet. Ebből x^2 -et kiemelve

$$x^2 \cdot (4x - 12) = 0,$$

adódik, ami csak úgy lehet, ha $x^2 = 0$, azaz $x = 0$, vagy $4x - 12 = 0$, amiből $4x = 12$, így $x = 3$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	–	0	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	nincs lok. sz. é.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 12x^2 - 24x.$$

Ennek zérushelye, azaz a $12x^2 - 24x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Ha x -et kiemelünk, akkor $x \cdot (12x - 24) = 0$ adódik. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$ vagy $12x - 24 = 0$, amiből $x = 2$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	konvex	ip	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

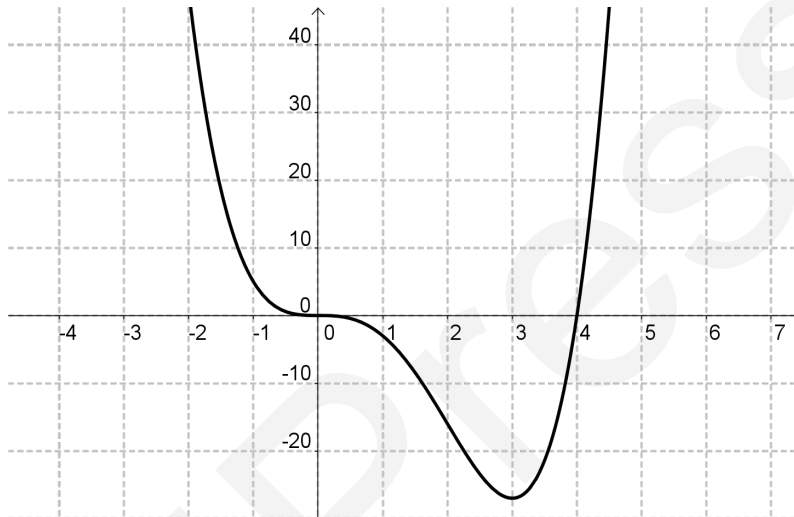
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 4x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \left(1 - \frac{4}{x}\right) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 4x^3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \cdot \left(1 - \frac{4}{x}\right) = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
Mon.	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konvex	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in [-27; \infty[$.

8) Korlátosság: alulról korlátos, felülről nem korlátos.

9) Paritás: nem páros és nem páratlan.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: minimuma van, minimum hely: $x = 3$, minimum érték: $y = -27$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható a függvény, mert két zérushelye van.

8.8. Feladat. Végezzük el az $f(x) = (x + 3) \cdot e^{-x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$(x + 3) \cdot e^{-x} = 0,$$

amiből $x = -3$, ugyanis egy szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, azonban e^{-x} sehol sem 0.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (x + 3) + e^{-x} = e^{-x} \cdot (-x - 2).$$

Ennek zérushelyeit, azaz az $e^{-x} \cdot (-x - 2) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $x = -2$, ugyanis e^{-x} sehol sem 0. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -2$	$x = -2$	$x > -2$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (-x - 2) + e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (x + 1).$$

Ennek zérushelyei, azaz a $e^{-x} \cdot (x + 1) = 0$ egyenlet megoldása $x = -1$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < -1$	$x = -1$	$x > -1$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

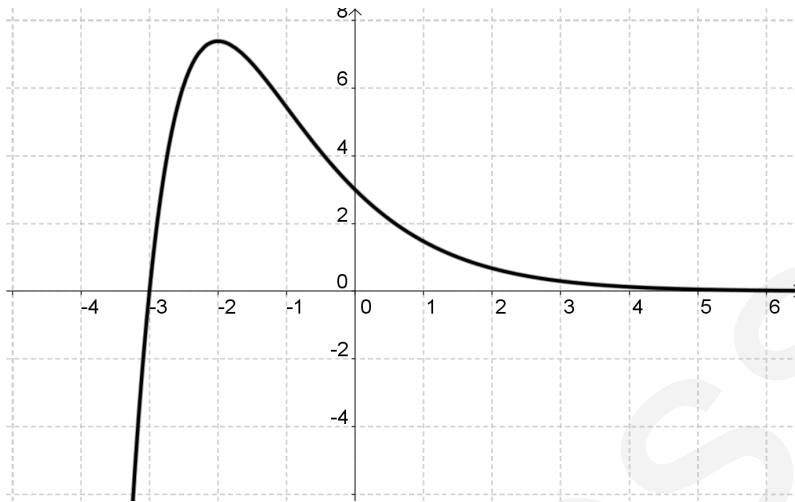
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \cdot (x + 3) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot (x + 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot az előző két táblázat alapján.

	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$x > -1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



- 7) Értékkészlet: $y \leq e^2$.
- 8) Korlátosság: a függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos.
- 9) Paritás: nem páros, nem páratlan.
- 10) Periodicitás: nem periodikus.
- 11) Abszolút (globális) szélsőérték: maximum hely: $x = -2$, maximum érték: $y = e^2$.
- 12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.9. Feladat. Végezzük el az $f(x) = e^{2x} \cdot (2 - x)$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

- 1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- 2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$e^{2x} \cdot (2 - x) = 0,$$

amiből $x = 2$ adódik, ugyanis egy szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, azonban e^{2x} sehol sem 0.

- 3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = 2e^{2x} \cdot (2 - x) + e^{2x} \cdot (-1) = e^{2x} \cdot (3 - 2x).$$

Ennek zérushelyeit, azaz az $e^{2x} \cdot (3 - 2x) = 0$ egyenlet megoldása $x = 1,5$. További megoldása nincs az egyenletnek, ugyanis e^{2x} sehol sem 0. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < 1,5$	$x = 1,5$	$x > 1,5$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 2e^{2x} \cdot (3 - 2x) + e^{2x} \cdot (-2) = e^{2x} \cdot (4 - 4x).$$

Ennek zérushelyei, azaz a $e^{2x} \cdot (4 - 4x) = 0$ egyenlet megoldása $x = 1$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f''(x)$	+	0	–
$f(x)$	konvex	ip	konkáv

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

A ∞ -beli határérték

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x} \cdot (2 - x) = -\infty.$$

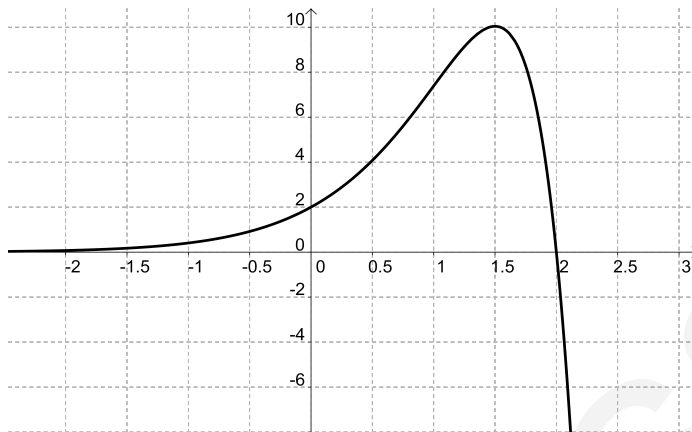
A $-\infty$ -beli határérték kiszámolásához L'Hospital-szabályt alkalmazunk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} \cdot (2 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x}{e^{-2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^{-2x} \cdot (-2)} = 0. \end{aligned}$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < 1$	$1 < x < 1,5$	$x > 1,5$
Mon.	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
Konv.	konvex	konkáv	konkáv

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \leq \frac{e^3}{2}$.

8) Korlátosság: a függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos.

9) Paritás: nem páros, nem páratlan.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: maximum hely: $x = 1, 5$, maximum érték:
 $y = \frac{e^3}{2}$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.10. Feladat. Végezzük el az $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 1)$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$e^x \cdot (x^2 - 3x + 1) = 0,$$

amiből $x^2 - 3x + 1 = 0$, ugyanis egy szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, azonban e^{2x} sehol sem 0. Az említett másodfokú egyenlet megoldásait a másodfokú egyenlet megoldóképletével kaphatjuk meg:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

tehát

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 1) + e^x \cdot (2x - 3) = e^x \cdot (x^2 - x - 2).$$

Ennek zérushelyeit, azaz az $e^x \cdot (x^2 - x - 2) = 0$ egyenlet megoldásai -1 és 2 . Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 2e^x \cdot (x^2 - x - 2) + e^x \cdot (2x - 1) = e^x \cdot (x^2 + x - 3).$$

Ennek zérushelyei, azaz a $e^x \cdot (x^2 + x - 3) = 0$ egyenlet megoldásai

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x > x_2$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	ip	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

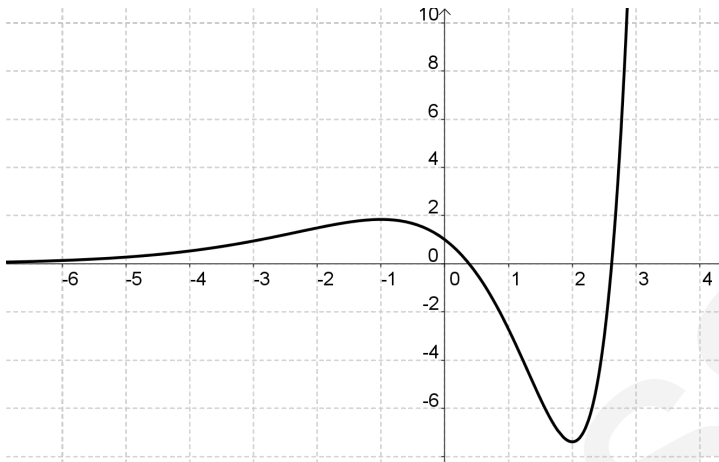
a $-\infty$ -beli határértéket a L'Hospital-szabály kétszeri alkalmazásával számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot (x^2 - x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0; \end{aligned}$$

a ∞ -beli határérték

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot (x^2 - x - 2) = \infty.$$

6) A függvény gráfja:



- 7) Értékkészlet: $y \geq -e^2$.
- 8) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos.
- 9) Paritás: nem páros, nem páratlan.
- 10) Periodicitás: nem periodikus.
- 11) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = 2$, minimum érték: $y = -e^2$.
- 12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.11. **Feladat.** Végezzük el az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

- 1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Zérushely nincs, mivel az exponenciális függvény sehol sem nulla.
- 3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ennek egyetlen zérushelye az $x = 0$, hiszen az exponenciális függvény sehol sem nulla. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	lok. max.	↘

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2),$$

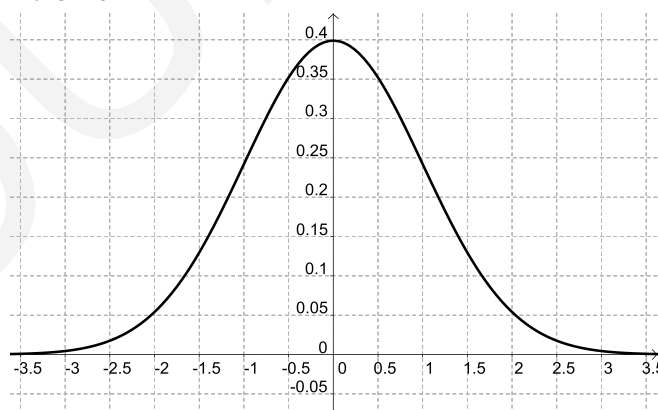
aminek zérushelyei -1 és 1 . Az második derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	konvex	ip	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

6) A függvény gráfja:



7) Értékkészlet: $0 < y \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

8) Korlátosság: a függvény alulról és felülről korlátos, így korlátos.

9) Paritás: páros.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: maximum hely: $x = 0$, maximum érték: $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.12. Feladat. Végezzük el az $f(x) = e^{x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) Zérushely nincs, mivel az exponenciális függvény sehol sem nulla.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x.$$

Ennek egyetlen zérushelye az $x = 0$, hiszen az exponenciális függvény sehol sem nulla. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

4) A függvény második deriváltja

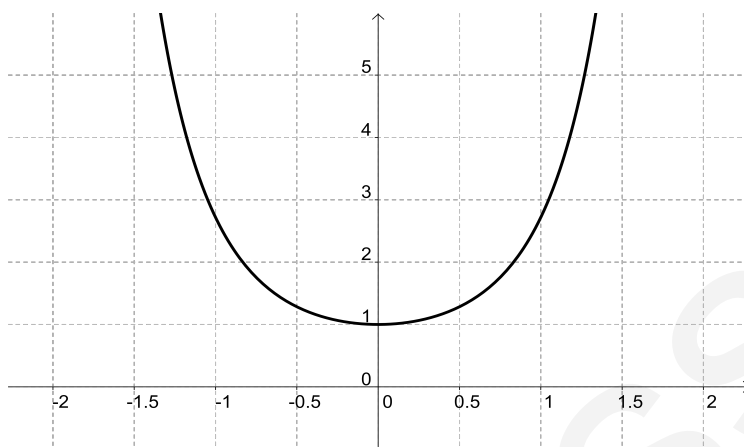
$$f''(x) = 2 \cdot e^{x^2} + 2x \cdot e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2} \cdot (2 + 4x^2).$$

Ennek a függvénynek mindkét tényezője pozitív, így minden x valós szám esetén $f''(x) > 0$ pozitív, következésképpen az f függvény mindenhol konvex.

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

6) A függvény gráfja:



7) Értékkészlet: $y \in [1; \infty[$.

8) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, de felülről nem korlátos, így nem korlátos.

9) Paritás: páros.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = 0$, minimum érték: $y = 1$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható, mert páros.

8.13. Feladat. Végezzük el az $f(x) = e^x \cdot (x - 2)^2$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$e^x \cdot (x - 2)^2 = 0,$$

amiből $(x - 2)^2 = 0$, azaz $x = 2$, ugyanis egy szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, azonban e^x sehol sem 0.

3) Mielőtt deriváljuk a függvényt elvégezzük a nevezetes azonosságot:

$$f(x) = e^x \cdot (x - 2)^2 = e^x \cdot (x^2 - 4x + 4).$$

Ezt felhasználva a függvény deriváltja

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 4x + 4) + e^x \cdot (2x - 4) = e^x \cdot (x^2 - 2x).$$

Ennek zérushelyeit, azaz az $e^x \cdot (x^2 - 2x) = 0$ egyenlet megoldásai 0 és 2. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 2e^x \cdot (x^2 - 2x) + e^x \cdot (2x - 2) = e^x \cdot (x^2 - 2).$$

Ennek zérushelyei, azaz a $e^x \cdot (x^2 - 2) = 0$ egyenlet megoldásai $\pm\sqrt{2}$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < -\sqrt{2}$	$x = -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$	$x = \sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	konvex	ip	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

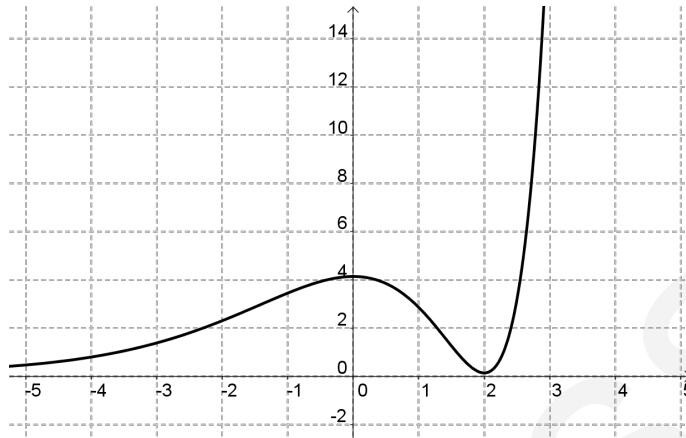
a $-\infty$ -beli határértéket a L'Hospital-szabály kétszeri alkalmazásával kapjuk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot (x^2 - 4x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x} = 0; \end{aligned}$$

a ∞ -beli határérték:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot (x^2 - 4x + 4) = \infty.$$

6) A függvény gráfja:



7) Értékkészlet: $y \geq -e^2$.

8) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos.

9) Paritás: nem páros, nem páratlan.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = 2$, minimum érték: $y = 0$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.14. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2 - x)$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \geq 0$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\sqrt{x} \cdot (2 - x) = 0,$$

amiből $x = 0$, illetve $x = 2$ adódik.

3) A függvény deriváltja

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x} \cdot (2 - x))' = (x^{\frac{1}{2}} \cdot (2 - x))' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 - x) + x^{\frac{1}{2}} \cdot (-1) = \\ &= x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Megoldjuk az

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - x = 0$$

egyenletet, amiből azt kapjuk, hogy $x = 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	lok. max.	↘

4) A függvény második deriváltja

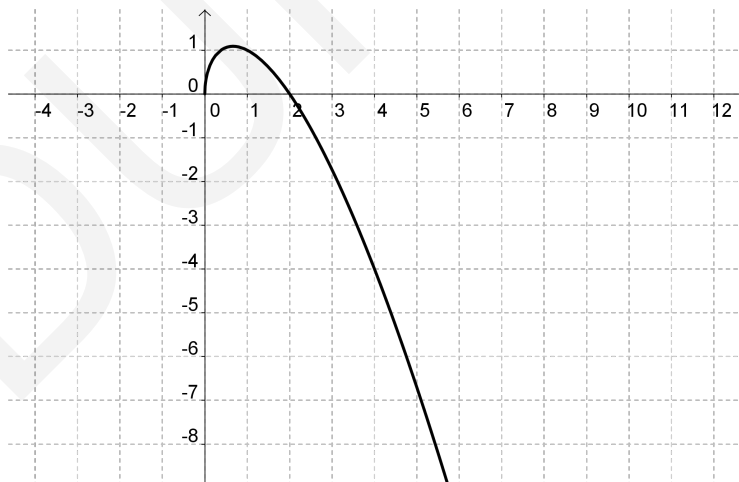
$$f''(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ami mindenhol negatív, így az f függvény értelmezési tartományának minden pontjában konkáv.

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

6) A függvény gráfja:



7) Értékkészlet: $y \leq 1$.

8) Korlátosság: a függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos.

9) Paritás: nem páros, nem páratlan.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: maximum hely: $x = 1$, maximum érték: $y = 1$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.15. Feladat. Végezzük el az $f(x) = x \cdot \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in]0, \infty[$.

2) Zérushely: az $x \cdot \ln x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$ vagy $\ln x = 0$. Azonban $x = 0$ nem eleme az értelmezési tartománynak, így csak $\ln x = 0$ teljesülhet, amiből $x = 1$ adódik.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Az $\ln x + 1 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Átrendezve $\ln x = -1$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $x = e^{-1}$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < e^{-1}$	$x = e^{-1}$	$x > e^{-1}$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{1}{x},$$

aminek nincs zérushelye, így a függvény vagy mindenhol konvex vagy mindenhol konkáv. Mivel $x > 0$, ezért $\frac{1}{x} > 0$, így f értelmezési tartományának minden pontjában konvex.

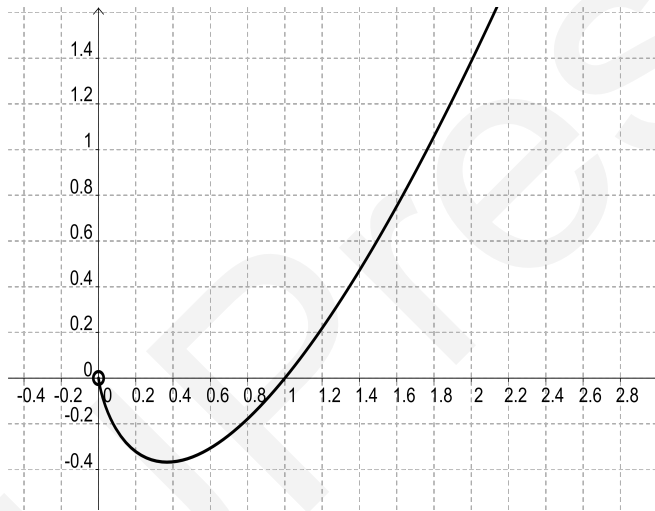
5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban: a 0 pontban a jobboldali határértéket L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{1}{x} \cdot (x^2) = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0.\end{aligned}$$

A ∞ -beli határérték

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

6) A függvény gráfja:



7) Értékkészlet: $y \in [\frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e}; \infty[= [-\frac{1}{e}, \infty[$.

8) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, de felülről nem korlátos, így nem korlátos.

9) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = \frac{1}{e}$, minimum érték: $y = -\frac{1}{e}$.

10) Invertálhatóság: invertálható, mert különböző elemekhez különböző elemeket rendel.

8.16. Feladat. Végezzük el az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in]0, \infty[$.

2) Zérushely: az $x^2 \cdot \ln x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x^2 = 0$ vagy $\ln x = 0$. Azonban $x = 0$ nem eleme az értelmezési tartománynak, így csak $\ln x = 0$ teljesülhet, amiből $x = 1$ adódik.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1).$$

Az $x \cdot (2 \ln x + 1) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, azonban $x \neq 0$ miatt $\ln x = -\frac{1}{2}$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < e^{-\frac{1}{2}}$	$x = e^{-\frac{1}{2}}$	$x > e^{-\frac{1}{2}}$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3.$$

A $2 \ln x + 3 = 0$ egyenletet kell megoldanunk:

$$2 \ln x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = e^{-\frac{3}{2}}.$$

Az második derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < e^{-\frac{3}{2}}$	$x = e^{-\frac{3}{2}}$	$x > e^{-\frac{3}{2}}$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

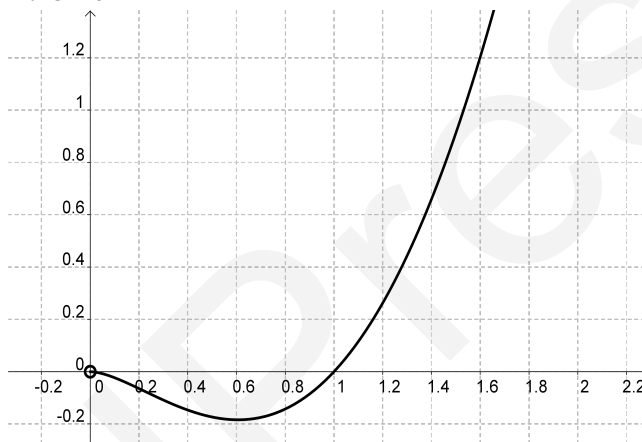
5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban: a 0 pontban a jobboldali határértéket L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{-2} = 0.\end{aligned}$$

A ∞ -beli határérték

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

6) A függvény gráfja:



7) Értékkészlet: $y \in \left[\frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{e}}; \infty \right] = \left[-\frac{1}{2e}; \infty \right]$.

8) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, de felülről nem korlátos, így nem korlátos.

9) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = e^{-\frac{1}{2}}$, minimum érték: $y = -\frac{1}{2e}$.

10) Invertálhatóság: invertálható, mert különböző elemekhez különböző elemeket rendel.

8.17. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 1 = 0,$$

amiből $x = -1$ adódik.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}.$$

Ennek zérushelyei, azaz az $1 - \frac{2}{x^3} = 0$ egyenlet megoldása:

$$1 = \frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze. (Egy függvény ott is válthat előjelet, ahol nincs értelmezve!)

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$x > \sqrt[3]{2}$
$f'(x)$	+	nincs értelmezve	–	0	+
$f(x)$	↗	nincs értelmezve	↘	lok. min.	↗

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{8}{x^4}.$$

Ennek nincs zérushelye, mert egy tört csak akkor nulla, ha a számlálója nulla, azonban $8 \neq 0$. Mivel f'' mindenhol pozitív, ezért a függvény értelmezési tartományának minden pontjában konvex. (A második derivált csak a nullában válthatna előjelet.)

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	+	nincs értelmezve	+
$f(x)$	konvex	nincs értelmezve	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{x^2} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x^2} = \infty;$$

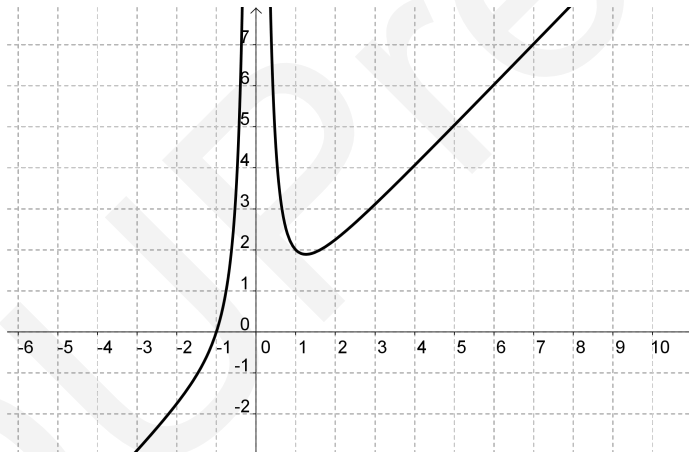
$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x + \frac{1}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + n^2 = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x + \frac{1}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + n^2 = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x > \sqrt[3]{2}$
Mon.	↗	↘	↗
Konv.	konvex	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

8) Korlátosság: a függvény felülről nem korlátos, alulról nem korlátos.

9) Paritás: nem páratlan, nem páros.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.

12) Invertálhatóság: nem invertálható a függvény.

8.18. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x + \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 1 = 0,$$

így nincs zérushelye a függvénynek.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Ennek zérushelyei, azaz az $x^2 - 1 = 0$ egyenlet megoldása:

$$1 = x^2,$$

amiből $x = -1$, $x = 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze. (Egy függvény ott is válthat előjelet, ahol nincs értelmezve!!)

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	nincs ért.	-	0	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	nincs ért.	↘	lok. min.	↗

4) A függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Ennek nincs zérushelye, mert egy tört csak akkor nulla, ha a számlálója nulla, azonban $2 \neq 0$, így a függvénynek nincs inflexiós pontja, továbbá második derivált csak $x = 0$ -ban válthat előjelet.

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	-	nincs értelmezve	+
$f(x)$	konkáv	nincs értelmezve	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x} = \infty.$$

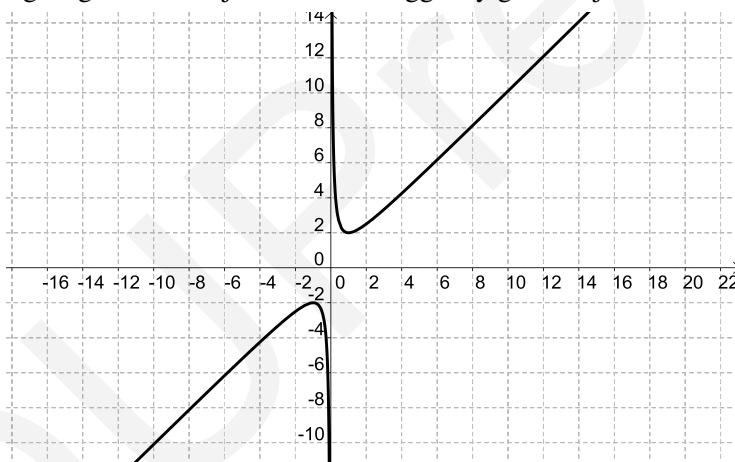
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} - n = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + n = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R} \setminus]-2; 2[$.

8) Korlátosság: a függvény felülről nem korlátos, alulról nem korlátos.

9) Paritás: páratlan.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték hely: nincs.

12) Invertálhatóság: nem invertálható a függvény.

8.19. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = \frac{2}{x^2 - 2x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk. Egy tört csak akkor nulla, ha a számlálója nulla, azonban most a számláló sosem nulla, így nincs zérushelye a függvénynek.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = -\frac{2 \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}.$$

Ennek zérushelye $x = 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze. (Egy függvény ott is válthat előjelet, ahol nincs értelmezve!!)

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	nincs ért.	+	0	−	nincs ért.	−
$f(x)$	↗	nincs ért.	↗	lok. max.	↘	nincs ért.	↘

4) A függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{4 \cdot (x^2 - 2x) - 2 \cdot (4x - 4) \cdot (x^2 - 2x) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^4} = \\ &= \frac{(2x - 1)^2}{(x^2 - 2x)^3}. \end{aligned}$$

Ennek egyetlen zérushelye az $x = 1/2$.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f''(x)$	+	nincs ért.	−	0	−	nincs ért.	+
$f(x)$	konvex	nincs ért.	konkáv	ip	konkáv	nincs ért.	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2 - 2x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 - 2x} = 0.$$

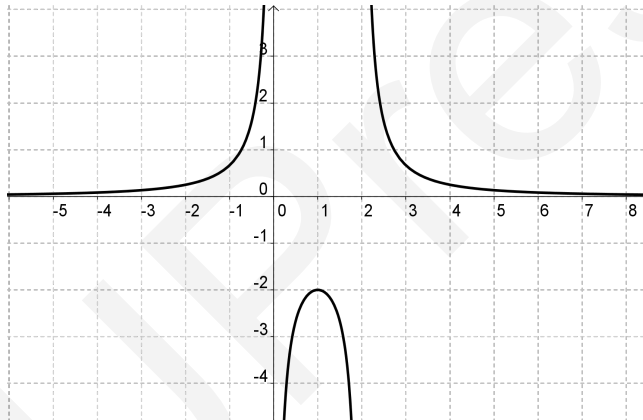
$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2}{x^2 - 2x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\frac{1}{n} + 2} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2}{x^2 - 2x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\frac{1}{n} - 2} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{2}{x^2 - 2x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{2}{x^2 - 2x} = \infty.$$

6) A függvény ábrázolása:



7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R} \setminus]-2; 0]$.

8) Korlátosság: a függvény felülről nem korlátos, alulról nem korlátos.

9) Paritás: nem páros, nem páratlan.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.

12) Invertálhatóság: nem invertálható a függvény.

8.20. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit:

$$\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

4) A függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (x^2 + 1)^2 - (-x^2 + 1) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{(x^2 + 1)(-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot (x^2 - 3) = 0,$$

ezért a második derivált zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$x = 0$
$f''(x)$	–	0	+	0
$f(x)$	konkáv	ip	konvex	ip

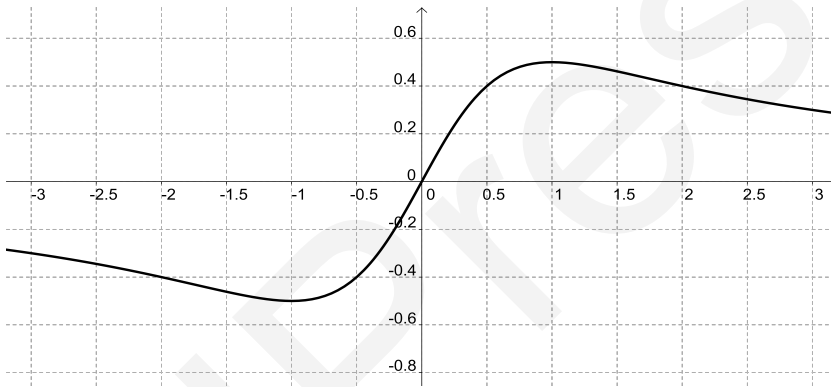
	$0 < x < \sqrt{3}$	$x < \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0.$$

6) Az előbbieket felhasználásával fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

8) Korlátosság: nem korlátos.

9) Paritás: páratlan, mert szimmetrikus az origóra.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = -1$, maximum hely: $x = 1$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.21. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 5)$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: A logaritmus mögött csak pozitív kifejezés állhat, így $x^2 - 6x + 5 > 0$. A másodfokú egyenlőtlenség megoldásához először megkeressük a másodfokú függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk az $x^2 - 6x + 5 = 0$ egyenletet, amire azt kapjuk, hogy $x = 1$, illetve $x = 5$. A másodfokú függvény grafikonja egy „felfelé nyíló” parabola, ugyanis a négyzetes tag együtthatója pozitív, így az értelmezési tartomány:

$$\mathcal{D}_f =] - \infty; 1[\cup] 5; \infty[.$$

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\ln(x^2 - 6x + 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldva a zérushelyek:

$$\frac{6 - \sqrt{20}}{2} = 3 - \sqrt{5} \approx 0,76 \quad \frac{6 + \sqrt{20}}{2} = 3 + \sqrt{5} \approx 5,24.$$

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 5} \cdot (2x - 6) = \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 5}.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit:

$$\frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 5} = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3,$$

tehát a deriválnak egyetlen zérushelye van: $x = 3$, azonban ez az érték nincs benne a függvény értelmezési tartományában. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < 1$	$x > 5$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

4) A függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \cdot (x^2 - 6x + 5) - (2x - 6)^2}{(x^2 - 6x + 5)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 12x + 10 - 4x^2 + 24x - 36}{(x^2 - 6x + 5)^2} = \frac{-2x^2 + 12x - 26}{(x^2 - 6x + 5)^2}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{-2x^2 + 12x - 26}{(x^2 - 6x + 5)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 12x - 26 = 0.$$

Azonban a másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, így az előbbi másodfokú függvény minden értéke negatív, tehát az $f''(x)$ minden értéke negatív, így a függvény értelmezési tartományának minden pontjában konkáv.

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

Határérték $-\infty$ -ben és ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 6x + 5) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 - 6x + 5) = \infty.$$

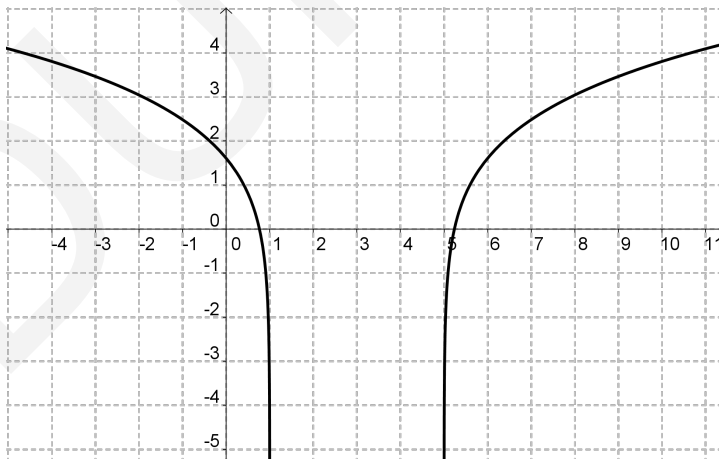
Az $x = 1$ helyen a bal oldali határérték:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 6 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 5 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{4n + 1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Az $x = 5$ helyen a jobb oldali határérték:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\left(5 + \frac{1}{n}\right)^2 - 6 \left(5 + \frac{1}{n}\right) + 5 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{4n + 1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = -\infty. \end{aligned}$$

6) Az előbbieket felhasználásával fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



- 7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.
- 8) Korlátosság: nem korlátos.
- 9) Paritás: nem páros, nem páratlan.
- 10) Periodicitás: nem periodikus.
- 11) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.
- 12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.22. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = \frac{x-3}{(x+2)^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

- 1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- 2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$f(x) = \frac{x-3}{(x+2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

- 3) A függvény deriváltja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+2)^2 - (x-3) \cdot 2 \cdot (x+2)}{(x+2)^4} = \\ &= \frac{x+2-2 \cdot (x-3)}{(x+2)^3} = \frac{-x+8}{(x+2)^3}. \end{aligned}$$

Meghatározzuk ennek zérushelyét:

$$\frac{-x+8}{(x+2)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x+8=0 \quad \Rightarrow \quad x=8.$$

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 8$	$x = 8$	$x > 8$
$f'(x)$	–	nincs ért.	+	0	–
$f(x)$	$\searrow$	nincs ért.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

4) A függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-x+8}{(x+2)^3} \right)' = \frac{-1 \cdot (x+2)^3 - (-x+8) \cdot 3 \cdot (x+2)^2}{(x+2)^6} = \\ &= \frac{-1 \cdot (x+2) - (-x+8) \cdot 3}{(x+2)^4} = \frac{-x-2+3x-24}{(x+2)^4} = \frac{2x-26}{(x+2)^4}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{2x-26}{(x+2)^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x-26 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 26,$$

ezért a második derivált zérushelye $x = 13$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 13$	$x = 13$	$x > 13$
$f''(x)$	–	nincs ért.	–	0	+
$f(x)$	konkáv	nincs ért.	konkáv	ip	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

Elsőként az f függvény $-\infty$ -beli és ∞ -beli határértékét számoljuk ki. Ehhez L'Hospital szabályt alkalmazunk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2(x+2)} = 0; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2(x+2)} = 0. \end{aligned}$$

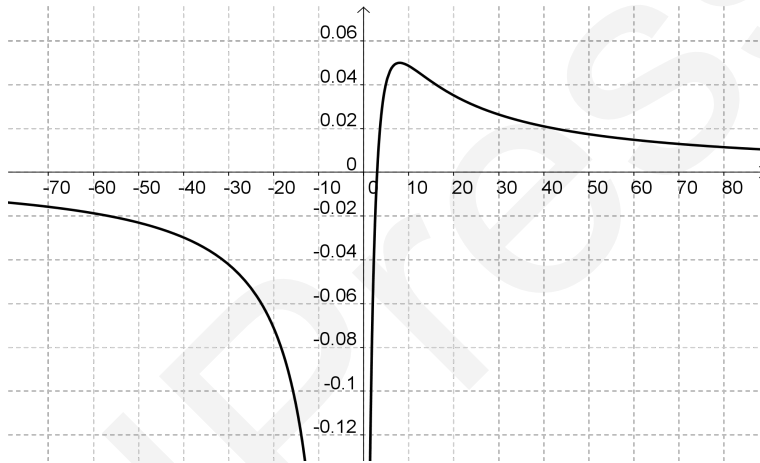
Ezután kiszámoljuk az f függvény baloldali határértékét az $x = -2$ helyen. Ehhez tekintsük az $x_n = -2 - \frac{1}{n}$ sorozatot. Ekkor

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x-3}{(x+2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 - \frac{1}{n} - 3}{\left(-2 - \frac{1}{n} + 2\right)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 - \frac{1}{n}}{\left(-\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-5 - \frac{1}{n}\right) \cdot n^2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -5n^2 - n = -\infty. \end{aligned}$$

Kiszámoljuk végül az f függvény jobboldali határértékét az $x = -2$ helyen. Ehhez tekintsük az $x_n = -2 + \frac{1}{n}$ sorozatot. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x-3}{(x+2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{1}{n} - 3}{\left(-2 + \frac{1}{n} + 2\right)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-5 + \frac{1}{n}\right) \cdot n^2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -5n^2 + n = -\infty.\end{aligned}$$

6) Az előbbiek felhasználásával fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \left[\frac{1}{20}; \infty\right)$.

8) Korlátosság: nem korlátos.

9) Paritás: nem páros és nem páratlan.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = 8$, minimum érték: $y = \frac{1}{20}$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.23. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = \frac{x+2}{(2x-1)^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: a tört nevezője nem lehet zérus, azaz

$$2x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{1}{2},$$

így a függvény értelmezési tartománya $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$f(x) = \frac{x+2}{(2x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2.$$

3) A függvény deriváltja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)^2 - (x+2) \cdot 2 \cdot (2x-1) \cdot 2}{(2x-1)^4} = \\ &= \frac{2x-1-4 \cdot (x+2)}{(2x-1)^3} = \frac{-2x-9}{(2x-1)^3}. \end{aligned}$$

Meghatározzuk ennek zérushelyét:

$$\frac{-2x-9}{(2x-1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x-9=0 \quad \Rightarrow \quad x = -4,5.$$

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < -4,5$	$x = -4,5$	$-4,5 < x < 0,5$	$x = 0,5$	$x > 0,5$
$f'(x)$	–	0	+	nincs ért.	–
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	nincs ért.	$\searrow$

4) A függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2 \cdot (2x-1)^3 - (-2x-9) \cdot 3 \cdot (2x-1)^2 \cdot 2}{(2x-1)^6} = \\ &= \frac{-2 \cdot (2x-1) - (-2x-9) \cdot 6}{(2x-1)^4} = \\ &= \frac{-4x+2+12x+54}{(2x-1)^4} = \frac{8x+56}{(2x-1)^4}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{8x+56}{(2x-1)^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x+56=0 \quad \Rightarrow \quad x = -7,$$

ezért a második derivált zérushelye $x = -7$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < -7$	$x = -7$	$-7 < x < 0,5$	$x = 0,5$	$x > 0,5$
$f''(x)$	–	0	–	nincs ért.	+
$f(x)$	konkáv	ip	konkáv	nincs ért.	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

Elsőként az f függvény $-\infty$ -beli és ∞ -beli határértékét számoljuk ki. Ehhez L'Hospital szabályt alkalmazunk:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{(2x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2 \cdot (2x-1) \cdot 2} = 0; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{(2x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot (2x-1) \cdot 2} = 0.\end{aligned}$$

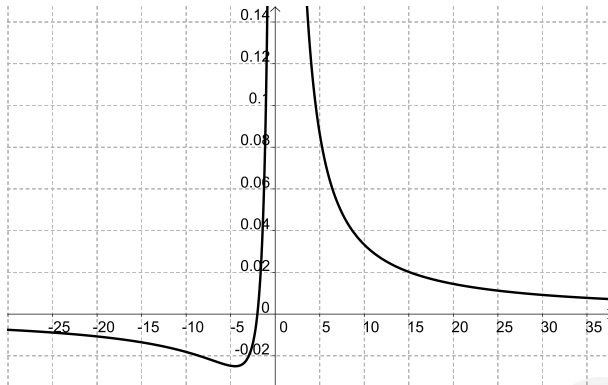
Ezután kiszámoljuk az f függvény baloldali határértékét az $x = \frac{1}{2}$ helyen. Ehhez tekintsük az $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ sorozatot. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x+2}{(2x-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + 2}{\left(2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) - 1\right)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2,5 - \frac{1}{n}}{\left(-\frac{2}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2,5 - \frac{1}{n}}{\frac{4}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2,5 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n^2}{4} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot (2,5n^2 - n) = \infty.\end{aligned}$$

Kiszámoljuk végül az f függvény jobboldali határértékét az $x = 0,5$ helyen. Ehhez tekintsük az $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ sorozatot. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x+2}{(2x-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + 2}{\left(2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) - 1\right)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2,5 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{2}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2,5 + \frac{1}{n}}{\frac{4}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2,5 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n^2}{4} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot (2,5n^2 + n) = \infty.\end{aligned}$$

6) Az előbbieket felhasználásával fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in [-0,03; \infty[$.

8) Korlátosság: nem korlátos.

9) Paritás: nem páros és nem páratlan.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = -4,5$, minimum érték: $y = -0,03$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható.

8.24. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0,$$

így a függvény egyetlen zérushelye $x = 0$.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit:

$$\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a derivált függvény egyetlen zérushelye $x = 0$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

4) A függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \right)' = \frac{2 \cdot (x^2 + 1)^2 - 2x \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{2 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

Mivel egy tört pontosan akkor nulla, ha a számlálója nulla, ezért

$$\frac{-6x^2 + 2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Rightarrow -6x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3},$$

ezért a második derivált zérushelyei:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{3}}$
$f''(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	konkáv	ip	konvex	ip	konkáv

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

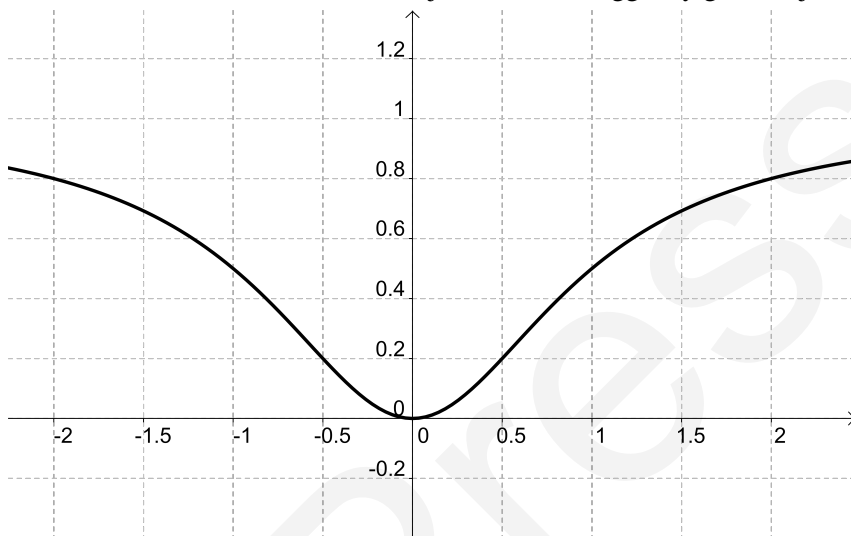
Mindkét határértéket L'Hospital szabály segítségével számoljuk ki. A $-\infty$ -beli határérték

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Az f függvény ∞ -beli határértéke

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = 1.$$

6) Az előbbieket felhasználásával fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in [0; 1[$.

8) Korlátosság: korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

9) Paritás: páros, mert szimmetrikus az y tengelyre.

10) Periodicitás: nem periodikus.

11) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = 0$, minimum érték: $y = 0$.

12) Invertálhatóság: nem invertálható.

9. Taylor–polinom, Taylor–sor

9.1. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = e^{2x}$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli negyedfokú Taylor-polinomját! Ennek segítségével számoljuk ki e közelítő értékét!

megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első négy deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 0$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	e^{2x}	1
$k = 1$	$2e^{2x}$	2
$k = 2$	$4e^{2x}$	4
$k = 3$	$8e^{2x}$	8
$k = 4$	$16e^{2x}$	16

Az f függvény x_0 pont körüli negyedfokú Taylor-polinomja

$$T_4(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot (x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{24} \cdot (x - x_0)^4.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$T_4(x) = 1 + 2 \cdot (x - 0) + \frac{4}{2} \cdot (x - 0)^2 + \frac{8}{6} \cdot (x - 0)^3 + \frac{16}{24} \cdot (x - 0)^4.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket

$$T_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4.$$

Az e közelítő értékét úgy kapjuk, ha az előbbi Taylor-polinom értékét kiszámoljuk az $x = \frac{1}{2}$ helyen:

$$\begin{aligned} e &\approx T_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24}. \end{aligned}$$

9.2. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \ln 2x$ függvény $x_0 = \frac{1}{2}$ pont körüli harmadfokú Taylor-polinomját! Ennek segítségével számoljuk ki $\ln 2$ közelítő értékét!

megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első három deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 1/2$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	$\ln 2x$	0
$k = 1$	$\frac{1}{x}$	2
$k = 2$	$-\frac{1}{x^2}$	-4
$k = 3$	$\frac{2}{x^3}$	16

Az f függvény x_0 pont körüli harmadfokú Taylor-polinomja

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot (x - x_0)^3.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$T_3(x) = 0 + 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{16}{6} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^3.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket

$$T_3(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^3.$$

Az $\ln 2$ közelítő értékét úgy kapjuk, ha az előbbi Taylor-polinom értékét kiszámoljuk az $x = 1$ helyen:

$$\ln 2 \approx T_3(1) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

9.3. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $x_0 = 4$ pont körüli másodfokú Taylor-polinomját! Ennek segítségével számoljuk ki $\sqrt{5}$ közelítő értékét!

megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első két deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 4$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	$\sqrt{x}$	2
$k = 1$	$\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$\frac{1}{4}$
$k = 2$	$-\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}}$	$-\frac{1}{32}$

Az f függvény x_0 pont körüli másodfokú Taylor-polinomja

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$T_2(x) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{64} \cdot (x - 4)^2.$$

A $\sqrt{5}$ közelítő értékét úgy kapjuk, hogy az előbbi Taylor-polinom értékét kiszámoljuk az $x = 5$ helyen:

$$\begin{aligned} \sqrt{5} \approx T_2(5) &= 2 + \frac{1}{4} \cdot (5 - 4) - \frac{1}{64} \cdot (5 - 4)^2 = \\ &= 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64} \approx 2,23. \end{aligned}$$

9.4. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \arctg x$ függvény $x_0 = 1$ pont körüli harmadfokú Taylor-polinomját! Ennek segítségével számoljuk ki $\arctg 0,9$ közelítő értékét!

megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első három deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 1$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{\pi}{4}$
$k = 1$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{2}$
$k = 2$	$-(1+x^2)^{-2} \cdot 2x$	$-\frac{1}{2}$
$k = 3$	$2 \cdot (1+x^2)^{-3} \cdot 4x^2 - (1+x^2)^{-2} \cdot 2$	$\frac{1}{2}$

Az f függvény x_0 pont körüli harmadfokú Taylor-polinomja

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot (x - x_0)^3.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$T_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (x - 1) - \frac{1}{4} \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{12} \cdot (x - 1)^3.$$

Az $\operatorname{arctg} 0,9$ közelítő értékét úgy kapjuk, ha az előbbi Taylor-polinom értékét kiszámoljuk az $x = 0,9$ helyen:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} 0,9 \approx T_3(0,9) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (0,9 - 1) - \\ &- \frac{1}{4} \cdot (0,9 - 1)^2 + \frac{1}{12} \cdot (0,9 - 1)^3 \approx 0,7374. \end{aligned}$$

9.5. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli n -edfokú Taylor-polinomját és a Lagrange-féle maradéktagot! Adjuk meg az e közelítő értékét négy tizedesjegy pontossággal!

megoldás:

Az $f(x) = e^x$ függvény minden deriváltja e^x , melynek a 0 helyen a helyettesítési értéke 1. A függvény x_0 pont körüli Taylor-polinomja

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 1 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} \cdot (x - 0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot (x - 0)^n = \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

A maradéktag

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}, \text{ ahol } \xi \in [0, 1].$$

Mivel

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

A megkövetelt pontosság azt jelenti, hogy a maradéktagra teljesülnie kell, hogy

$$\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,00009,$$

ami pontosan akkor áll fenn, ha

$$4 \leq 0,00009 \cdot (n+1)! \Rightarrow (n+1)! \geq \frac{100.000}{3}.$$

A legkisebb pozitív egész n , ami teljesíti az előbbi egyenlőtlenséget: $n = 7$. Ekkor az e szám 4 tizedesjegyre pontos értéke

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \approx 2,7182.$$

9.6. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \cos x$ függvény negyedfokú Taylor-polinomját! Adjuk meg a közelítés maximális hibáját tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén!

megoldás:

Az $f(x) = \cos x$ függvény ötödrendű deriváltja $f^{(5)}(x) = -\sin x$ és mivel azt is tudjuk, hogy $-1 \leq -\sin x \leq 1$, ezért a hiba legfeljebb

$$|f(x) - T_4(x)| = |R_5(x)| = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot (x - \pi)^5 < \frac{1}{5!} \cdot (x - \pi)^5.$$

9.7. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát (azaz a Maclaurin-sorát)!

megoldás:

Első lépésben számoljuk ki az f függvény első néhány deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 0$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	$\sin x$	0
$k = 1$	$\cos$	1
$k = 2$	$-\sin x$	0
$k = 3$	$-\cos x$	-1
$k = 4$	$\sin x$	0

Vegyük észre, hogy minden páros sorszámú derivált értéke 0, így csak a pártalan sorszámú tagok fognak szerepelni a Taylor-polinomban. Emiatt a $(2n+1)$ -edik Taylor-polinomot foguk felírni. Az f függvény x_0 pont körüli Taylor-polinomja

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$\begin{aligned} T_{2n+1}(x) &= 0 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{0}{2} \cdot (x - 0)^2 + \frac{-1}{3!} \cdot (x - 0)^3 + \dots = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}. \end{aligned}$$

A maradéktag

$$R_{2n+3}(x) = \frac{f^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!}.$$

Mivel azonban

$$|f^{(2n+3)}(\xi)| \leq 1,$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+3}(\xi) = 0,$$

így a $\sin x$ függvény Taylor-sora:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

9.8. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 3$ polinom függvényt $x = 1$ polinomjaként!

megoldás:

Mivel a megadott polinom harmadfokú, ezért a negyedik deriválttól kezdve minden további derivált már 0. Mivel $x = 1$ polinomjaként szeretnénk felírni a polinomot, ezért az $x_0 = 1$ pont körüli Taylor-polinomját írjuk föl az f függvénynek. Első lépésben kiszámoljuk a függvény első három deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 1$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	$x^3 + 5x^2 - 7x + 3$	2
$k = 1$	$3x^2 + 10x - 7$	6
$k = 2$	$6x + 10$	16
$k = 3$	6	6

Az f függvény x_0 pont körüli harmadfokú Taylor-polinomja

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot (x - x_0)^3.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$T_3(x) = 2 + 6 \cdot (x - 1) + \frac{16}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{6}{6} \cdot (x - 1)^3.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket

$$T_3(x) = 2 + 6 \cdot (x - 1) + 8 \cdot (x - 1)^2 + (x - 1)^3.$$

9.9. Feladat. Melyik az a harmadfokú $p(x)$ polinom, amelyre a következők igazak:

$$p(0) = 12, \quad p'(0) = -4, \quad p''(0) = -6, \quad p'''(0) = 6?$$

Határozzuk meg a keresett polinom zérushelyeit!

megoldás:

Mivel egy f függvény n -edrendű 0 pont körüli Taylor-sora (azaz Maclaurin-sora)

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - 0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot (x - 0)^3 + \dots,$$

továbbá egy harmadfokú polinom esetén minden negyedik és annál magasabb rendű derivált értéke zérus, ezért

$$p(x) = p(0) + p'(0) \cdot (x - 0) + \frac{p''(0)}{2!} \cdot (x - 0)^2 + \frac{p'''(0)}{3!} \cdot (x - 0)^3.$$

Behelyettesítve a megadott deriváltértékeket

$$p(x) = 12 - 4 \cdot x - \frac{6}{2!} \cdot x^2 + \frac{6}{3!} \cdot x^3.$$

adódik. Ha fokszám szerint csökkenő sorrendbe rendezzük a tagokat azt kapjuk, hogy

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12.$$

A polinom zérushelyeinek meghatározásához elsőként alakítsuk szorzattá a polinomot:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 \cdot (x - 3) - 4 \cdot (x - 3) = (x - 3) \cdot (x^2 - 4) = \\ &= (x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2). \end{aligned}$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így a keresett zérushelyek:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3.$$

10. Szélsőérték feladatok

10.1. Feladat. Határozzuk meg az $f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

megoldás:

Az f függvény zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így létezik minimuma és maximuma is, melyek helye az értelmezési tartomány határpontjaiban van, vagy ott, ahol a függvény deriváltja nulla. A függvény deriváltja

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x \cdot (x - 4),$$

ami pontosan akkor 0, ha $x = 0$ vagy $x = 4$. Kiszámoljuk a függvényértékeket az értelmezési tartomány határpontjaiban és ott, ahol a derivált zérus:

$$f(-1) = -2 \quad f(0) = 5 \quad f(2) = -11.$$

(Az $x = 4$ nincs benne az f függvény értelmezési tartományában). A függvény minimum értéke tehát: -11 , minimum helye: 2 , maximum értéke: 5 , maximum helye: 0 .

10.2. Feladat. Határozzuk meg az $f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

megoldás:

Az f függvény zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így létezik minimuma és maximuma is, melyek helye az értelmezési tartomány határpontjaiban van, vagy ott, ahol a függvény deriváltja nulla. A függvény deriváltja

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x \cdot (x^2 - 4),$$

ami pontosan akkor 0, ha $x = 0$ vagy $x = \pm 4$, azonban -4 és 4 sem eleme az f függvény értelmezési tartományának. Kiszámoljuk a függvényértékeket az értelmezési tartomány határpontjaiban és ott, ahol a derivált zérus:

$$f(-1) = -16 \quad f(0) = -9 \quad f(3) = 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az f függvény minimum értéke: -16 , minimum helye: -1 , maximum értéke: 0 , maximum helye: 3 .

10.3. Feladat. Határozzuk meg az $f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

megoldás:

Az f függvény zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így létezik minimuma és maximuma is, melyek helye az értelmezési tartomány határpontjaiban van, vagy ott, ahol a függvény deriváltja nulla. A függvény deriváltja a hányados függvény deriválási szabálya alapján

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2 + 1) - 4x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2},$$

ami pontosan akkor 0, ha $x = -1$ vagy $x = 1$. Kiszámoljuk a függvényértékeket az értelmezési tartomány határpontjaiban és ott, ahol a derivált zérus:

$$f(-1) = -2 \quad f(1) = 2 \quad f(-2) = -\frac{8}{5} \quad f(2) = \frac{8}{5}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az f függvény minimum értéke: -2 , minimum helye: -1 , maximum értéke: 2 , maximum helye: 1 .

10.4. Feladat. Két valós szám összege 10. Határozzuk meg a számokat úgy, hogy a szorzatuk a lehető legnagyobb legyen!

megoldás:

Az egyik szám legyen x , a másik y . Ekkor $x + y = 10$. Az egyik ismeretlent kifejezve $y = 10 - x$ adódik. A számok szorzata

$$x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2.$$

Tehát keressük az $f(x) = 10x - x^2$ függvény szélsőértékét. Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Mivel

$$f'(x) = 10 - 2x,$$

így ennek zérushelye $x = 5$. Az f függvény második deriváltja $f''(x) = -2$, ami egy negatív szám, így f -nek az $x = 5$ helyen lokális maximuma van, ami jelen esetben globális (abszolút) szélsőérték hely is (hiszen f grafikonja egy „lefelé nyíló” parabola). Ha $x = 5$, akkor

$$y = 10 - x = 10 - 5 = 5,$$

így a két szám szorzata akkor lesz maximális, ha mindkét szám 5. Ekkor a szorzat értéke: $5 \cdot 5 = 25$.

10.5. Feladat. Két valós szám összege 10. Határozzuk meg a számokat úgy, hogy a négyzetösszegük a lehető legkisebb legyen!

megoldás:

Az egyik szám legyen x , a másik y . Ekkor $x + y = 10$. Az egyik ismeretlent kifejezve $y = 10 - x$ adódik. A számok négyzetösszege:

$$x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100.$$

Tehát keressük az $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$ függvény szélsőértékét. Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = 4x - 20.$$

Ennek zérushelye $x = 5$. Az f függvény második deriváltja $f''(x) = 4$, ami egy pozitív szám, így f -nek az $x = 5$ helyen lokális minimuma van, ami jelen esetben globális (abszolút) szélsőérték hely is (ugyanis az f függvény grafikonja egy „felfelé nyíló” parabola). Ha $x = 5$, akkor

$$y = 10 - x = 10 - 5 = 5.$$

Tehát a keresett két szám négyzetösszege akkor lesz minimális, ha mindkét szám 5. Ekkor a négyzetösszeg értéke: $5^2 + 5^2 = 50$.

10.6. Feladat. Két valós szám összege 10. Határozzuk meg a számokat úgy, hogy a köbeik összege a lehető legkisebb legyen!

megoldás:

Az egyik szám legyen x , a másik y . Ekkor $x + y = 10$. Az egyik ismeretlent kifejezve $y = 10 - x$ adódik. A számok köbének összege:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= x^3 + (10 - x)^3 = x^3 + 1000 - 300x + 30x^2 - x^3 = \\ &= 30x^2 - 300x + 1000. \end{aligned}$$

Tehát keressük az $f(x) = 30x^2 - 300x + 1000$ függvény szélsőértékét. Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Mivel

$$f'(x) = 60x - 300,$$

ezért ennek zérushelye $x = 5$. Az f függvény második deriváltja $f''(x) = 60$, ami egy pozitív szám, így f -nek az $x = 5$ helyen lokális minimuma van, ami jelen esetben globális (abszolút) szélsőérték hely is. Ha $x = 5$, akkor

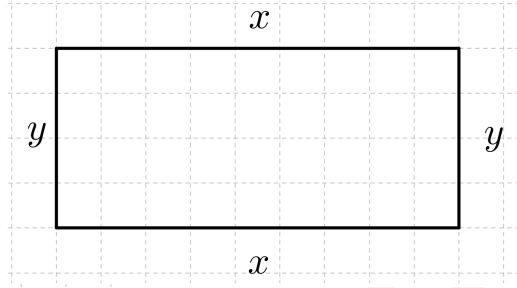
$$y = 10 - x = 10 - 5 = 5$$

így a két szám köbének összege akkor lesz minimális, ha mindkét szám 5. Ekkor a köbök összegének értéke: $5^3 + 5^3 = 250$.

10.7. Feladat. Egy téglalap kerülete 100 [m] . Határozzuk meg az oldalait úgy, hogy a területe maximális legyen!

megoldás:

Legyenek a téglalap oldalai x és y .



Ekkor a kerület:

$$K = 2x + 2y,$$

így jelen esetben

$$2x + 2y = 100 \quad \Rightarrow \quad x + y = 50 \quad \Rightarrow \quad y = 50 - x.$$

Ezt felhasználva a téglalap területe:

$$T = x \cdot y = (50 - x) \cdot x = 50x - x^2.$$

Ez egy x -től függő függvény, így jelöljük $T(x)$ -el. Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Tehát meg kell oldanunk az $T'(x) = 0$ egyenletet:

$$T'(x) = 50 - 2x,$$

ami pontosan akkor 0, ha $x = 25$. Ekkor $y = 50 - x = 50 - 25 = 25$. Számoljuk ki a T függvény második deriváltját

$$T''(x) = -2 < 0,$$

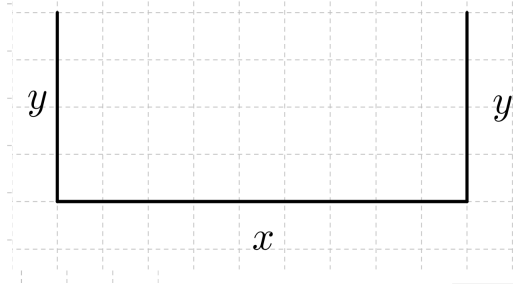
így lokális maximum hely van az $x = 25$ helyen. Mivel ez az egyetlen lokális szélsőérték hely, így egyben abszolút maximum hely is. Tehát a téglalap területe akkor maximális, ha $x = 25 \text{ [m]}$, $y = 25 \text{ [m]}$, és ekkor a maximális terület

$$T = x \cdot y = 25^2 = 625 \text{ [m}^2\text{]}.$$

10.8. Feladat. Tűzfal melletti téglalap alakú kert kerülete 400 [m]. Határozzuk meg a kert oldalait úgy, hogy a területe a lehető legnagyobb legyen!

megoldás:

Legyenek a téglalap oldalai x és y .



Ekkor a kerülete

$$K = 2y + x,$$

így jelen esetben

$$2y + x = 400 \quad \Rightarrow \quad x = 400 - 2y.$$

Ezt felhasználva a téglalap területe:

$$T = x \cdot y = (400 - 2y) \cdot y = 400y - 2y^2.$$

Ez egy y -től függő függvény, ezért jelöljük $T(y)$ -val. Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Tehát meg kell oldanunk az $T'(y) = 0$ egyenletet:

$$T'(y) = 400 - 4y,$$

ami pontosan akkor 0, ha $y = 100$. Ekkor $x = 400 - 2y = 400 - 200 = 200$. Számoljuk ki az T függvény második deriváltját

$$T''(y) = -4 < 0,$$

így $y = 100$ lokális maximum hely, azonban ez az egyetlen lokális szélsőérték helye a függvénynek, így ez egyben abszolút maximum hely is. Tehát a téglalap területe akkor maximális, ha $y = 100$ [m], $x = 200$ [m], és ekkor a maximális terület

$$T = x \cdot y = 100 \cdot 200 = 20.000 \text{ [m}^2\text{]}.$$

10.9. Feladat. Egy téglalap alakú kert területe $400 \text{ [m}^2\text{]}$. Határozzuk meg az oldalait úgy, hogy a kerülete a lehető legkisebb legyen!

megoldás:

Legyenek a téglalap oldalai x és y . Ekkor a területe $T = x \cdot y$, ami jelen esetben 400 m^2 . Ebből kifejezve az egyik ismeretlent

$$y = \frac{400}{x}.$$

Ezt behelyettesítve a kerületbe

$$K = 2x + 2y = 2x + \frac{800}{x},$$

aminek a deriváltja

$$K'(x) = 2 - \frac{800}{x^2}.$$

Szélsőérték ott lehet, ahol az első deriválnak zérushelye van:

$$2 - \frac{800}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 800 = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 20.$$

A geometriai tartalom miatt csak az $x = 20$ -at értelmezzük. A második derivált

$$K''(x) = \frac{1600}{x^3},$$

ami $x = 20$ esetén pozitív, így a K függvénynek lokális minimum van az adott helyen, azonban mivel ez az egyetlen lokális szélsőérték hely, egyben abszolút szélsőérték hely is. Tehát a minimális kerület: $K = 2x + 2y = 80 \text{ [m]}$.

10.10. Feladat. Felül nyitott négyzet alapú egyenes hasáb felszíne $75 \text{ [dm}^2\text{]}$. Határozzuk meg az éleit úgy, hogy a térfogata a lehető legnagyobb legyen!

megoldás:

Jelöljük a hasáb alapéleit a -val, oldaléleit b -vel. Ekkor a felszíne

$$A = a^2 + 4ab = 75 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{75 - a^2}{4a}.$$

Ezt behelyettesítjük a térfogatba

$$V = a^2 \cdot b = a^2 \cdot \frac{75 - a^2}{4a} = \frac{75a - a^3}{4},$$

amit lederiválva

$$V'(a) = \frac{75 - 3a^2}{4}$$

adódik. Ennek zérushelye $a = \pm 5$, de a geometriai tartalom miatt -5 nem megoldás, így $a = 5$ dm. Ekkor

$$b = \frac{75 - 5^2}{4 \cdot 5} = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ [dm]}.$$

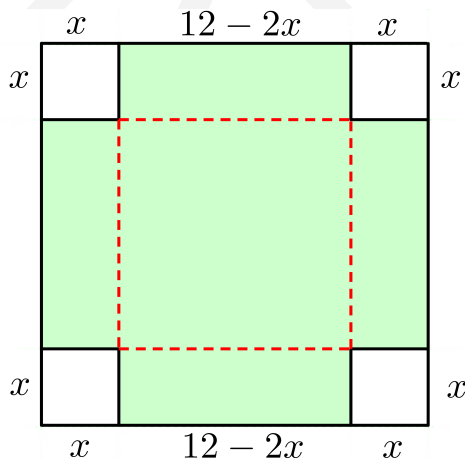
A V függvény második deriváltja $V''(a) = -\frac{3a}{2}$, ami $a = 5$ esetén negatív, így valóban maximum van az adott helyen. Ekkor a maximális térfogat

$$V = a^2 \cdot b = 25 \cdot 2,5 = 62,5 \text{ [dm}^3\text{]}.$$

10.11. Feladat. Egy 12 centiméter oldalhosszúságú bádog lemezből nyitott te-tejű dobozt kell készítenünk úgy, hogy sarkaiból négyzeteket vágunk ki, az oldalakat pedig felhajtjuk. Mekkora négyzeteket vágunk ki a sarkokból, hogy a doboz űrtartalma a lehető legnagyobb legyen?

megoldás:

Tegyük fel, hogy a négyzet sarkaiból x centimétert vágunk le.



A kapott test térfogata

$$V(x) = (12 - 2x)^2 \cdot x = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

A V függvény értelmezési tartománya a $[0, 6]$ zárt intervallum. Szélsőérték a határpontokban lehet, vagy ott, ahol a függvény deriváltja 0. Mivel

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144,$$

ezért a $12x^2 - 96x + 144 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletet 12-vel végigosztva $x^2 - 8x + 12 = 0$ adódik. Az egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2},$$

azaz $x_1 = 6$ és $x_2 = 2$ adódik. A V függvény második deriváltja

$$V''(x) = 24x - 96 \quad \Rightarrow \quad V''(2) = -48 < 0, \quad V''(6) = 48 > 0.$$

Tehát az $x = 2$ helyen lokális maximum van, az $x = 6$ helyen lokális minimum van a V függvénynek. Továbbá $V(0) = 0$, $V(2) = 32 - 192 + 288 = 128$, $V(6) = 0$. Azt kaptuk tehát, hogy az $x = 2$ helyen van globális maximum hely, melynek értéke 128. Azaz ahhoz, hogy a keletkezett doboz térfogata maximális legyen, a széleitől 2 cm-re kell felhajtani a bádoglemezt. Ekkor a maximális térfogat $V = 128 \text{ [cm}^3\text{]}$.

10.12. Feladat. Egy trapéz rövidebbik alapja és szárai 1 [m] hosszúak. Hogyan válasszuk meg a hiányzó oldal hosszát úgy, hogy a trapéz területe a lehető legnagyobb legyen?

megoldás:

Legyen a hosszabbik alapon fekvő hegyesszög x . Ekkor a trapéz magassága

$$m = \frac{\sin x}{1} = \sin x.$$

A hosszabbik alap $a = 1 + 2 \cos x$. Ekkor a trapéz területe

$$T = \frac{a + c}{2} \cdot m = \frac{2 + 2 \cos x}{2} \cdot \sin x = (1 + \cos x) \cdot \sin x.$$

A T függvény deriváltja

$$\begin{aligned} T'(x) &= (1 + \cos x)' \cdot \sin x + (1 + \cos x) \cdot (\sin x)' = \\ &= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x. \end{aligned}$$

Meghatározzuk ennek a zérushelyét. Felhasználjuk, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, amiből $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Így a

$$-1 + \cos^2 x + \cos x + \cos^2 x = 0$$

egyenletet kell megoldani. Bevezetve a $\cos x = a$ jelölést a

$$2a^2 + a - 1 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ezt megoldva a megoldóképlet segítségével

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

amiből $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -1$ adódik. Következésképpen

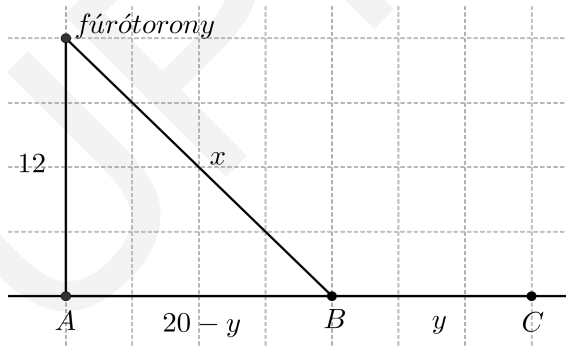
$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad \cos x = -1.$$

Mivel x hegyesszöget jelöl, ezért $x = 60^\circ$.

10.13. Feladat. Csővezetékét kell lefektetni a tengeri fúrótorony és a parti finomító között. A torony 12 kilométerre van a parttól. A finomító a part mentén 20 kilométerre, délre található. A víz alatt futó vezeték költsége 500.000 dollár/kilométer, míg a szárazföldön futó vezetéké 300.000 dollár/kilométer. Mi a legkevésbé költséges megoldás?

megoldás:

Legyen a víz alatti vezetékszakasz hossza x , a szárazföldön futóé pedig y .



Az x és az y közötti kapcsolathoz a fúrótoronnyal szemközti derékszög adja a kulcsot. Pitagorasz tétele szerint:

$$x^2 = 12^2 + (20 - y)^2.$$

Ebből gyökök vonva

$$x = \sqrt{144 + (20 - y)^2}.$$

Ebben a modellben csak a pozitív gyöknek van értelme. A csővezeték költsége dollárban számítva

$$c = 500.000x + 300.000y,$$

amibe behelyettesítve az előbbi x -et:

$$c(y) = 500.000 \cdot \sqrt{144 + (20 - y)^2} + 300.000y$$

adódik. A gyökös kifejezést átírva törtkitevőjű hatvány alakra:

$$c(y) = 500.000 \cdot (144 + (20 - y)^2)^{\frac{1}{2}} + 300.000y.$$

Ezt deriválva, az összetett függvény deriválási szabályát is alkalmazva

$$c'(y) = 500.000 \cdot \frac{1}{2} (144 + (20 - y)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(20 - y) \cdot (-1) + 300.000.$$

Elvégezve az egyszerűsítést

$$c'(y) = -500.000 \cdot \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300.000$$

adódik. Ennek zérushelye az

$$-500.000 \cdot \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300.000 = 0$$

egyenlet megoldása:

$$500.000 \cdot (20 - y) = 300.000 \sqrt{144 + (20 - y)^2}$$

$$\frac{5}{3} \cdot (20 - y) = \sqrt{144 + (20 - y)^2}$$

$$\frac{25}{9} \cdot (20 - y)^2 = 144 + (20 - y)^2$$

$$\frac{16}{9} \cdot (20 - y)^2 = 144,$$

amiből $y_1 = 11$, $y_2 = 29$. Az $y = 29$ nem megoldás, mert nem eleme a c függvény értelmezési tartományának, így $y = 11$. Kiszámolva $[0, 20]$ intervallum határpontjaiban és a stacionárius helyen függvényértéket,

$$c(0) = 11.661.900, \quad c(11) = 10.800.000, \quad c(20) = 12.000.000$$

adódik, így a legolcsóbb megoldás költsége 10.800.000 dollár. Ezt úgy érjük el, hogy a vezeték a finomítótól 11 kilométerre ér partot.

10.14. **Feladat.** Egy 1 literes henger alakú hordó méreteit hogyan válasszuk meg ahhoz, hogy a felszíne a lehető legkisebb legyen!

megoldás:

A henger alapkörének a sugarát jelöljük r -el, a henger magasságát M -el. Ekkor a térfogata

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot M.$$

Jelen esetben $V = 1000 \text{ cm}^3$, azaz

$$1000 = r^2 \cdot \pi \cdot M \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1000}{\pi \cdot r^2}.$$

A henger felszíne

$$A = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot M.$$

Ebbe behelyettesítve az M -et:

$$A(r) = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{1000}{\pi \cdot r^2} = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + \frac{2000}{r}.$$

A függvény értelmezési tartománya $r > 0$. Az A deriváltja

$$A'(r) = 4 \cdot r \cdot \pi - \frac{2000}{r^2}.$$

Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Ezért megoldjuk az

$$4 \cdot r \cdot \pi - \frac{2000}{r^2} = 0$$

egyenletet. Mindkét oldalt r^2 -el szorozva, majd r -et kifejezve

$$4r^3 \cdot \pi - 2000 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42$$

adódik. Az A második deriváltja

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3},$$

ami minden pozitív r esetén pozitív, így a függvény mindenhol konvex, tehát globális minimuma van az $r \approx 5,42$ helyen. Másrészt

$$M = \frac{1000}{\pi \cdot r^2} \approx \frac{1000}{\pi \cdot 5,42^2} = 10,84 [\text{cm}].$$

10.15. **Feladat.** Egy egyenes pálya mentén mozgó részecske helyét az

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9$$

függvény írja le, ahol az elmozdulást méterben, az eltelt időt másodpercben mérjük. Mekkora a test maximális sebességének nagysága az $[1; 10]$ intervallumban?

megoldás:

Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát: vagy az intervallumon belsejében lokális szélsőérték formájában, vagy az intervallum határán. A sebesség-idő függvényt a hely-idő függvény deriváltja adja meg:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t.$$

Lokális szélsőérték ott lehet, ahol az első derivált értéke 0. A $v(t)$ függvény deriváltja

$$v'(t) = 6t - 12,$$

ami pontosan akkor 0, ha $t = 2$. Mivel $v''(t) = 6 > 0$, ezért v -nek a $t = 0$ helyen lokális minimuma van. Mivel azonban a kérdés a sebesség nagyságára vonatkozott, ezért

$$|v(2)| = |3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2| = 12.$$

Tehát az intervallum belsejében a sebesség maximális nagysága 12. A függvényértékek az intervallum határain:

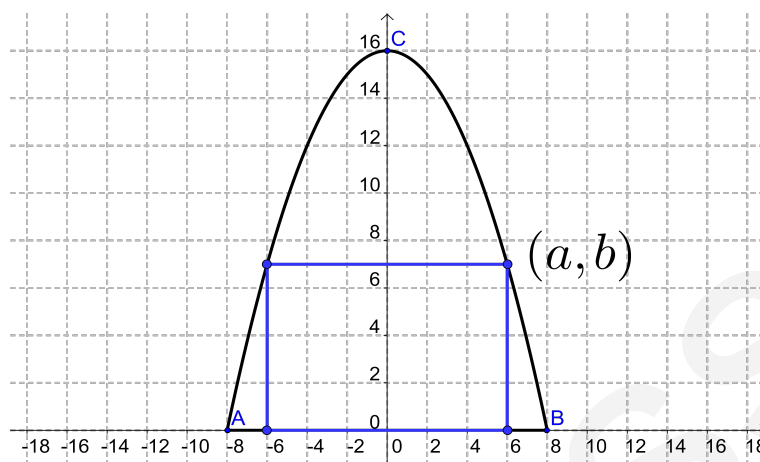
$$|v(1)| = |3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1| = 9 \quad |v(10)| = |3 \cdot 10^2 - 12 \cdot 10| = 180,$$

így a megadott intervallumon a legnagyobb sebesség 180.

10.16. **Feladat.** Egy parabolaszélet alakú ablak szélessége és magassága egyaránt 16 [dm]. Mekkora az a legnagyobb területű téglalap alakú mozaiklap, amely elhelyezhető úgy, hogy szimmetriatengelyük azonos legyen?

megoldás:

Helyezzük el az ablakot és a mozaiklapot koordináta-rendszerben:



A parabolát

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

alakban keressük. Erre illeszkednek a $(-8, 0)$, $(8, 0)$, $(0, 16)$ pontok. Ennek megfelelően teljesülnie kell az

$$0 = a \cdot (-8)^2 + b \cdot (-8) + c$$

$$0 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c$$

$$16 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

egyenletrendszernek. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $c = 16$. Ezt behelyettesítve az első és második egyenletbe

$$-16 = 64a - 8b$$

$$-16 = 64a + 8b$$

adódik. A két egyenletet összeadva $128a = -32$, így $a = -1/4$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $b = 0$. Így

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 16.$$

Az ábrán látható téglalap területe $T = 2 \cdot a \cdot b$. Mivel az (a, b) pont illeszkedik a parabolára, ezért

$$b = -\frac{1}{4}a^2 + 16.$$

Ezt felhasználva

$$T(a) = 2 \cdot a \cdot b = 2a \cdot \left(-\frac{1}{4}a^2 + 16\right) = 32a - \frac{a^3}{3} \quad (0 \leq a \leq 8).$$

Ekkor

$$T'(a) = 32 - \frac{3}{2}a^2.$$

Mivel

$$32 - \frac{3}{2}a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 32 = \frac{3}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{64}{3},$$

ezért

$$a = \pm \sqrt{\frac{64}{3}} = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

A két eredmény közül csak a pozitív esik az értelmezési tartományba. A második derivált

$$T''(a) = -3 \quad \Rightarrow \quad T''\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{24}{\sqrt{3}} < 0,$$

ami azt jelenti, hogy a $8/\sqrt{3}$ helyen lokális maximum helye van a T függvénynek, ami egyben globális is a vizsgált tartományon. Ekkor

$$b = -\frac{1}{4}a^2 + 16 = -\frac{1}{4}\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + 16 = \frac{32}{3}.$$

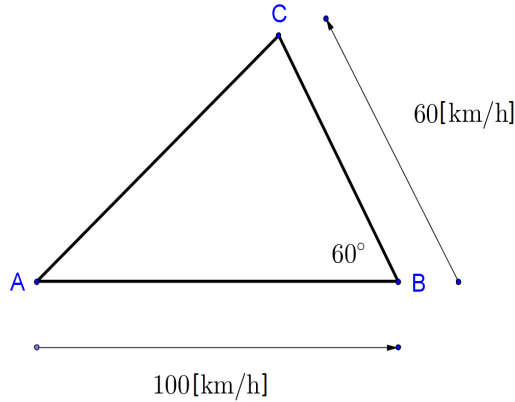
A maximális terület

$$T = 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{32}{3} \approx 98,53 [\text{dm}^2].$$

10.17. Feladat. Az A , B és C városok egy háromszög csúcsaiban helyezkednek el. A B városnál lévő szög 60° -os. A városokat egyenes utak kötik össze. Az A városból elindul egy gépkocsi B felé $100 [\text{km/h}]$ sebességgel. A sebességét végig tartani tudja. A gépkocsival egy időben indul egy vonat B városból C felé $60 [\text{km/h}]$ sebességgel. Az utat megállás nélkül teszi meg, sebességét végig megtartja. Számítsuk ki mennyi idő múlva lesz a gépkocsi és a vonat közötti távolság (légvonalban) a legkisebb, ha az A és B városok egymástól való távolsága $400 [\text{km}]$.

megoldás:

Legyen 100 km/h egy egység a számolás megkönnyítése érdekében.



A feladat adatai alapján t óra alatt a gépkocsi t kilométer utat tesz meg a B város irányába, míg a vonat a B városból indulva t óra alatt $0,6$ kilométer utat tesz meg. A gépkocsi egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, így a sebesség a megtett út és az eltelt idő hányadosa, amiből a megtett út a sebesség és az idő szorzata. A koszinusz tétel alapján

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ.$$

Tehát a B pontot tekintve kiindulási helynek, a vonat hely–idő függvénye

$$s_1(t) = 0,6t,$$

a gépkocsi hely–idő függvénye

$$s_2(t) = 4 - t.$$

Ezt és a koszinusz tételt felhasználva a járművek távolságának négyzetét leíró függvény

$$\begin{aligned} f^2(t) &= (4 - t)^2 + (0,6t)^2 - 2 \cdot (4 - t) \cdot 0,6t \cdot \cos 60^\circ = \\ &= 16 - 8t + t^2 + 0,36t^2 - 2,4t + 0,6t^2 = 1,96t^2 - 10,4t + 16. \end{aligned}$$

Ennek a függvény a deriváltja

$$(f^2(t))' = 3,92t - 10,4,$$

amelynek zérushelye a $3,92t - 10,4 = 0$ egyenlet megoldása, azaz $t = 2,653$.

A függvény második deriváltja $(f^2(t))'' = 3,92 > 0$, így a függvénynek lokális minimuma van, és mivel ez az egyetlen lokális minimum hely, így az

abszolút minimum hely is. Egy függvény négyzetének ugyanott van minimum helye, mint a függvénynek, így az f függvénynek is a minimum helye $t = 2,653$. Következésképpen a gépkocsi és a vonat közötti távolság az indulástól számított 2,653 óra múlva lesz a lehető legkisebb.

10.18. Feladat. A P pont koordinátái $P(1+x; 3+2x; 1-x)$. Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy a P pont a lehető legközelebb legyen az origóhoz!

megoldás:

A P pontnak az origótól való távolsága

$$d(x) = \sqrt{(1+x)^2 + (3+2x)^2 + (1-x)^2}.$$

Végezzük el a zárójelek felbontását, majd az összevonásokat:

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{1+2x+x^2+9+12x+4x^2+1-2x+x^2} = \\ &= \sqrt{6x^2+12x+11}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a d függvény deriváltja

$$d'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{6x^2+12x+11}} \cdot (12x+12) = \frac{6x+6}{\sqrt{6x^2+12x+11}},$$

melynek zérushelye: $x = -1$.

	$x < -1$	$x = -1$	$x > -1$
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Tehát $x = -1$ -nél lokális minimum hely van. Mivel $x = -1$ az egyetlen lokális szélsőérték hely, így az egyben globális minimum hely is. A minimum érték, azaz a P pontnak az origótól való lehető legkisebb távolsága: $d(-1) = \sqrt{5}$ egység.

10.19. Feladat. Egy bizonyos nyugtatószer esetén a

$$C(t) = \frac{2t}{3+t^2} \quad (t \geq 0)$$

függvénnyel jól modellezhető a véráramban lévő koncentráció, ahol t az injekció beadásától eltelt idő percben mérve, a $C(t)$ koncentrációt pedig [mg/l]-ben értjük. Határozzuk meg azt az időpillanatot, amikor a legnagyobb koncentrációban van jelen a nyugtatószer a véráramban!

megoldás:

A függvény deriváltja

$$C'(t) = \frac{2(3+t^2) - 2t \cdot 2t}{(3+t^2)^2} = \frac{-2t^2 + 6}{(3+t^2)^2}.$$

Ennek zérushelyei $t = \pm\sqrt{3}$. Mivel t az időt jelöli, ezért $t > 0$ miatt $t = \sqrt{3}$ a megoldás. (Könnyen látható, hogy $\sqrt{3}$ -ban a derivált előjele negatívból pozitívba vált, így ott valóban maximum van.) A maximális koncentráció

$$C(\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3+3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\frac{\text{mg}}{\text{l}} \right].$$

10.20. Feladat. Tekintsük az ABC háromszöget, melyben a szokásos jelölések mellett $\alpha = 30^\circ$, $c = x + 2$ [cm], $b = (5-x)^2$ [cm], ahol $-2 \leq x \leq 5$. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy a háromszög területe maximális legyen! Adjuk meg a háromszög hiányzó oldalát abban az esetben, amikor a terület maximális!

megoldás:

A háromszög területe

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{(5-x)^2 \cdot (x+2)}{4} = \frac{(25-10x+x^2) \cdot (x+2)}{4} = \\ &= \frac{x^3 - 8x^2 + 5x + 50}{4} = \frac{1}{4} \cdot (x^3 - 8x^2 + 5x + 50). \end{aligned}$$

Ennek deriváltja

$$T'(x) = \frac{dT}{dx} = \frac{1}{4} \cdot (3x^2 - 16x + 5),$$

amely pontosan akkor 0, ha $3x^2 - 16x + 5 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 60}}{6} = \frac{16 \pm 14}{6}$$

adódik, így $x_1 = 1/3$, $x_2 = 5$. A $T(x)$ függvény második deriváltja

$$T''(x) = \frac{1}{4} \cdot (6x - 16) = \frac{3}{2}x - 4.$$

Mivel $T''(5) = 3,5 > 0$, ezért $x = 5$ lokális minimum helye van T -nek, $T''(1/3) = -3,5 < 0$, ezért $x = 1/3$ lokális maximuma van T -nek. Az

értelmezési tartomány határpontjain a T függvény érték 0, tehát a háromszög területe $x = 1/3$ esetén lesz maximális. Ekkor a maximális terület

$$T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{27} - 8 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 50\right) = \frac{343}{27} [\text{cm}^2].$$

Ha $x = 1/3$, akkor $c = 7/3$ [cm], $b = 196/9$ [cm]. A koszinusz tétel alapján

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha,$$

azaz

$$a^2 = \frac{49}{9} + \frac{38416}{81} - 2 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{196}{9} \cdot \cos 30^\circ \approx 391,702,$$

amiből $a \approx 19,8$ [cm].

10.21. Feladat. Határozzuk meg a 60 [cm] kerületű egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyiknek az oldalaira rajzolt négyzetek területeinek összege minimális!

megoldás:

Legyen a háromszög alapja a , szárai b hosszúságúak. Ekkor $a + 2b = 60$, amiből $a = 60 - 2b$. Az oldalakra rajzolt négyzetek területének négyzetösszege

$$f(b) = a^2 + 2b^2 = (60 - 2b)^2 + 2b^2 = 6b^2 - 240b + 3600.$$

Ennek deriváltja $f'(b) = 12b - 240$, amelynek egyetlen zérushelye $b = 20$. Az f függvény grafikonja egy „felfelé nyíló” parabola, amelynek globális minimuma van, így $b = 20$ valóban minimum hely. Ekkor $a = 20$, így a keresett háromszög a 20 [cm] oldalú szabályos háromszög.

10.22. Feladat. Egy téglalap egyik csúcsa a koordináta-rendszer origója, két másik csúcsa illeszkedik az x -tengelyre és az y -tengelyre. A negyedik csúcs a $3x + 4y = 24$ egyenletű egyenesen van. Határozzuk meg a negyedik csúcsot úgy, hogy a téglalap területe a lehető legnagyobb legyen!

megoldás:

A téglalap egyik csúcsa az origó. Legyen $A(0; 0)$, másik csúcsa $B(x; 0)$, harmadik csúcsa $C(0; y)$. A megadott egyenes egyenletéből $y = 6 - \frac{3}{4}x$. Ezt felhasználva a negyedik csúcs

$$D\left(x; 6 - \frac{3}{4}x\right),$$

így a téglalap területe

$$T(x) = x \cdot \left(6 - \frac{3}{4}x\right) = 6x - \frac{3}{4}x^2.$$

Ennek deriváltja $T'(x) = 6 - \frac{3}{2}x$, amelynek zérushelye $x = 4$, ami maximum hely, ugyanis a $T(x)$ függvény grafikonja egy „lefelé nyíló” parabola. Tudjuk, hogy $x = 4$. Ekkor

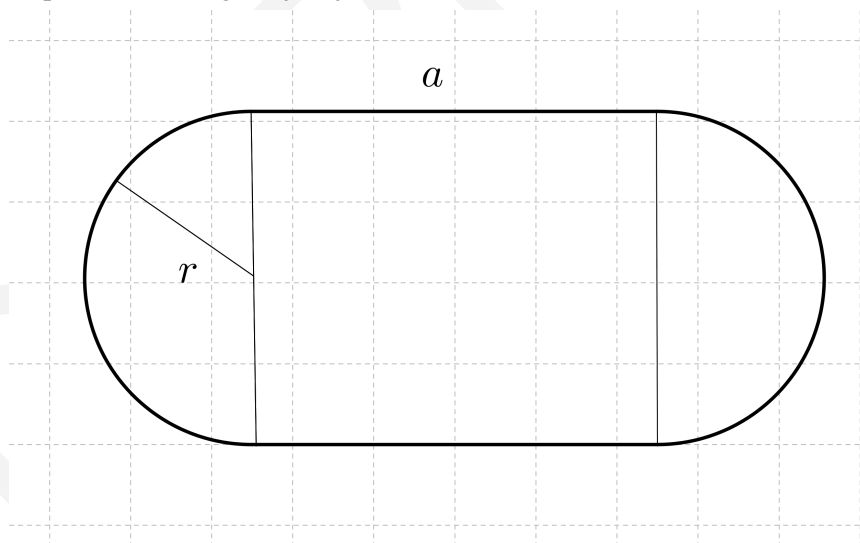
$$y = 6 - \frac{3}{4} \cdot 4 = 3,$$

így a téglalap negyedik csúcsa $D(4; 3)$, területe: $T = 12$.

10.23. Feladat. [12] Egy épülő atlétika pályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az azokat összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400 méter legyen és az atlétika pálya belsejében a téglalap alakú rész a lehető legnagyobb területű legyen?

megoldás:

A párhuzamos egyenes szakaszok hosszát egyenként jelölje a , míg a feladatban szereplő félkörök sugarát jelölje r .



A atlétika pálya kerülete

$$K = 2 \cdot r \cdot \pi + 2 \cdot a.$$

Tudjuk azonban, hogy a kerület 400 méter, így a

$$400 = 2 \cdot r \cdot \pi + 2 \cdot a$$

egyenlethez jutunk, amiből $a = 200 - r \cdot \pi$ adódik. Ezt behelyettesítve a téglalap területébe azt kapjuk, hogy

$$T(r) = 2 \cdot r \cdot a = 2 \cdot r \cdot (200 - r \cdot \pi) = 400r - 2 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

A T függvény deriváltja

$$T'(r) = 400 - 4 \cdot r \cdot \pi,$$

ami pontosan akkor zérus, ha $r = \frac{100}{\pi}$. A T függvény második deriváltja

$$T''(r) = -4\pi < 0,$$

így T -nek lokális maximum helyen van az $r = \frac{100}{\pi}$ helyen, ami egyben globális maximum hely is. Ekkor

$$a = 200 - r \cdot \pi = 200 - \frac{100}{\pi} \cdot \pi = 100.$$

10.24. Feladat. [10] Határozzuk meg az

$$f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$$

függvény legkisebb és legnagyobb értékét! (A függvény értelmezési tartománya legyen a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmaza.)

megoldás:

A függvény értelmezési tartománya a $[3; 7]$ zárt intervallum. A függvény folytonos, így biztosan van abszolút minimuma és abszolút maximuma. A függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-3)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot (7-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-3}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{7-x}}.$$

A derivált függvény zérushelyét kell megkeresnünk, azaz meg kell oldanunk az

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-3}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{7-x}} = 0$$

egyenletet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-3}} &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{7-x}} \\ \sqrt{7-x} &= \sqrt{x-3} \\ 7-x &= x-3 \\ x &= 5.\end{aligned}$$

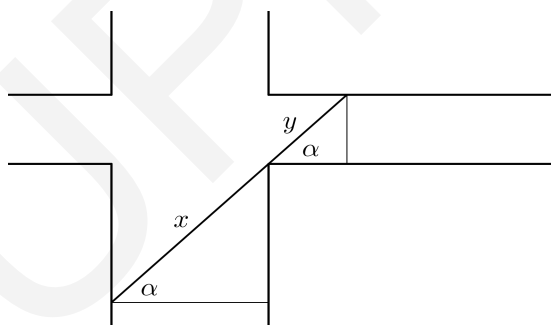
A derivált függvény zérushelye tehát $x = 5$. Ki kell számolnunk az f függvény értékét az $x = 5$ helyen, valamint az értelmezési tartományának határpontjaiban:

$$f(3) = 4 \quad f(5) = 2 \cdot \sqrt{2} \quad f(7) = 2.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a minimum helye $x = 3$ és $x = 7$, minimum értéke 2, maximum helye $x = 5$, maximum értéke $2 \cdot \sqrt{2}$.

10.25. Feladat. Két, egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége 2,4 méter és 1,6 méter. Mekkora hosszúságú az a létra, amelyet az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?

megoldás:



Az ábra jelölései mellett

$$x = \frac{2,4}{\cos \alpha} \quad y = \frac{1,6}{\sin \alpha}.$$

A létra hossza tehát:

$$d(\alpha) = x + y = \frac{2,4}{\cos \alpha} + \frac{1,6}{\sin \alpha} \quad \left(\alpha \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\right).$$

A függvény deriváltja

$$\begin{aligned} d'(\alpha) &= \frac{2,4 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{1,6 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2,4 \sin^3 \alpha - 1,6 \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

A $d'(\alpha)$ függvény pontosan akkor zérus, ha

$$2,4 \sin^3 \alpha - 1,6 \cos^3 \alpha = 0.$$

Az egyik tagot átvisszük a másik oldalra, majd osztjuk az egyenlet mindkét oldalát $\cos^3 \alpha$ -val. Ezután felhasználjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

végül kifejezzük $\operatorname{tg} \alpha$ -t:

$$\begin{aligned} 2,4 \sin^3 \alpha - 1,6 \cos^3 \alpha &= 0 \\ 2,4 \sin^3 \alpha &= 1,6 \cos^3 \alpha \\ \operatorname{tg}^3 \alpha &= \frac{2}{3} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

amiből azt kapjuk, hogy $\alpha \approx 41^\circ$. Ezt felhasználva

$$x + y = \frac{2,4}{\cos 41^\circ} + \frac{1,6}{\sin 41^\circ} \approx 3,2 + 2,4 \text{ [m]},$$

azaz a legnagyobb hosszúságú létra, ami átvihető a folyosón 5,6 méter hosszú.

10.26. Feladat. [15] Valamely mennyiséget n -szer megmérünk. A mérési eredményeket rögzítjük, legyenek ezek: $x_1, x_2, \dots, x_n$. A mennyiség valódi értéke legjobb becslésének azt az x számot tekintjük, amelytől a mérési eltérések négyzetösszege minimális. Adjuk meg ezt az x értéket.

megoldás:

Tekintsük az

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$$

függvényt. Ennek a deriváltja

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot (x - x_1) + 2 \cdot (x - x_2) + \dots + 2 \cdot (x - x_n) = \\ &= 2 \cdot n \cdot x - 2 \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n). \end{aligned}$$

A derivált függvény a zérushelye:

$$\begin{aligned} 2 \cdot n \cdot x - 2 \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= n \cdot x \end{aligned}$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Másrészt az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = 2n > 0,$$

így f -nek valóban minimuma van. Azt kaptuk tehát, hogy a megadott feltétel mellett a mért mennyiség valódi értékére a mérési eredmények átlaga adja a legjobb becslést.

10.27. Feladat. Milyen magasra repül az a labda, amelyet $v_0 = 19,6 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ kezdősebességgel rúgunk függőlegesen felfelé? A labda magasságát t másodperc elteltével a jól ismert

$$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

függvény írja le, ahol $g \approx 9,8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$ a gravitációs gyorsulás.

megoldás:

Behelyettesítve v_0 és g értékét, a

$$h(t) = 19,6t - 4,9t^2$$

függvényt kapjuk. A függvény zérushelyei $t = 0$ és $t = 4$, így egyszerűen meggondolható, hogy értelmezési tartománya $t \in [0; 4]$. Zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek van szélsőértéke, mégpedig az intervallum határpontjaiban vagy ott, ahol a deriváltja zérus. A határpontokban a függvényérték 0, így ott nem lesz maximuma a függvénynek. A h függvény deriváltja

$$h'(t) = 19,6 - 9,8t.$$

A derivált függvény zérushelye (azaz a stacionárius hely):

$$19,6 - 9,8t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

Mivel $h''(t) = -9,8 < 0$, ezért $t = 2$ maximum hely, melynek értéke:

$$h(2) = 39,2 - 4,9 \cdot 4 = 19,6 \text{ [m]}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a labda $t = 2$ másodperc múlva lesz a legmagasabban, és ez a magasság 19,6 méter.

11. Implicit függvények deriválása

11.1. Feladat. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 1$ implicit függvény esetén az $y' = \frac{dy}{dx}$ függvényt!

megoldás:

Az y -t egy x -től függő függvénynek tekintjük, azaz valójában a pontos jelölés $y = y(x)$ lenne. Deriváljuk a megadott egyenlet mindkét oldalát. Figyeljünk arra, hogy y^2 valójában $y^2(x)$, azaz egy összetett függvény, ahol a külső függvény a „négyzetre emelés”, a belső függvény az $y(x)$. A differenciálás után azt kapjuk, hogy

$$2x + 2y \cdot y' = 0.$$

Kifejezve az egyenletből y' -t azt kapjuk, hogy

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Megjegyezzük, hogy a feladatban szereplő implicit egyenlet egy origó középpontú, egység sugarú kör egyenlete és azt kaptuk a feladat megoldásával, hogy a kör minden olyan $(x; y)$ koordinátájú pontjában, ahol $y \neq 0$, az érintő egyenes meredeksége $-\frac{x}{y}$.

11.2. Feladat. Határozzuk meg az $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ implicit függvény esetén y' -t!

megoldás:

Az y -t egy x -től függő függvénynek tekintjük, így y^3 -t összetett függvényként, $x \cdot y$ -t szorzat függvényként kell deriválnunk. Differenciálva a megadott egyenlet mindkét oldalát

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 9 \cdot (y + xy') = 0$$

adódik. Az egyenletet úgy rendezzük, hogy bal oldalon szerepeljenek azok a tagok, amelyek tartalmazzák az y' -t, jobb oldalon pedig azok, amelyek nem tartalmazzák azt. Ezt követően kifejezzük az egyenletből y' -t:

$$y' \cdot (3y^2 - 9x) = 9y - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}.$$

11.3. Feladat. Határozzuk meg az $y^2 - x^2 = \sin(xy) + 1$ implicit függvény érintő egyenesének meredekségét és az egyenes egyenletét a $(0; 1)$ pontban!

megoldás:

Azonnal látható, hogy a $(0; 1)$ pont valóban illeszkedik a függvény grafikonjára:

$$1^2 - 0^2 = \sin 0 + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1.$$

Differenciálva a megadott implicit egyenlet mindkét oldalát

$$2y \cdot y' - 2x = \cos(xy) \cdot (y + xy')$$

adódik. Bontsuk fel a zárójelet

$$2y \cdot y' - 2x = y \cdot \cos(xy) + xy' \cdot \cos(xy).$$

Rendezzük az y' tagot tartalmazó kifejezéseket egy oldalra:

$$2y \cdot y' - xy' \cdot \cos(xy) = y \cdot \cos(xy) + 2x.$$

Emeljünk ki a bal oldalon y' -t:

$$y' \cdot (2y - x \cdot \cos(xy)) = y \cdot \cos(xy) + 2x.$$

Végül a kapott egyenletből fejezzük ki y' -t

$$y' = \frac{y \cdot \cos(xy) + 2x}{2y - x \cdot \cos(xy)}.$$

Behelyettesítve a $(0; 1)$ koordinátájú pontot azt kapjuk, hogy az érintő egyenes meredeksége

$$m = y' = \frac{1 \cdot \cos 0 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Az érintő egyenes egyenletét $y = mx + b$ alakban keressük, ami jelen esetben $y = \frac{1}{2}x + b$. Azonban az egyenesre illeszkedik a $(0; 1)$ koordinátájú pont, így $1 = 0 + b$ adódik, amiből $b = 1$. Az érintő egyenes egyenlete tehát $y = \frac{1}{2}x + 1$.

11.4. Feladat. Tekintsük az $x^3y^2 + x^3 - y^3 + 9y = 0$ implicit egyenletet! Határozzuk meg azon pontokat, melyekre $y' = 0$ teljesül.

megoldás:

Deriválva az egyenlet mindkét oldalát

$$3x^2y^2 + 2x^3y \cdot y' + 3x^2 - 3y^2 \cdot y' + 9y' = 0.$$

Az egyenlet bal oldalán az y' kifejezést kiemelve, illetve az egyenletet átrendezve

$$y' \cdot (2x^3y - 3y^2 + 9) = -3x^2 - 3x^2y^2$$

adódik. A kapott egyenletből y' -t kifejezve

$$y' = \frac{-3x^2 - 3x^2y^2}{2x^3y - 3y^2 + 9},$$

ami pontosan akkor 0, ha

$$-3x^2 - 3x^2y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 \cdot (1 + y^2) = 0.$$

Mivel $1 + y^2 \neq 0$, így $x = 0$. Az $x = 0$ értéket behelyettesítve az eredeti egyenletbe

$$-y^3 + 9y = 0 \quad \Rightarrow \quad y \cdot (-y^2 + 9) = 0$$

adódik. Egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, így $y = 0$, $y = 3$ vagy $y = -3$. Tehát a feladat feltételeinek eleget tevő pontok: $(0; 0)$, $(0; 3)$, $(0; -3)$.

11.5. Feladat. Tekintsük az

$$\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg} y^2 = \frac{\pi}{4}$$

egyenletet. Határozzuk meg a $\frac{dy}{dx}$ deriváltat, majd annak felhasználásával számoljuk ki az $y'(x)$ értéket, abban az esetben, ha $x = 1/\sqrt{2}$ és $y < 0$.

megoldás:

Deriválva a megadott egyenlet mindkét oldalát

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \cdot 2y \cdot y' = 0$$

adódik. Ebből y' -t kifejezve:

$$y' = -\frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{y}{1+y^2}.$$

Másrészt, ha $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor az eredeti egyenletből

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arctg} y^2 = \frac{\pi}{4}$$

adódik, amit átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg} y^2 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \right),$$

azaz

$$y^2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \right) \right).$$

Felhasználva a

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

trigonometrikus azonosságot azt kapjuk, hogy

$$y^2 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

így $y < 0$ miatt $y \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Behelyettesítve az y' -ra korábban megkapott kifejezésbe

$$y' = -\frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}.$$

11.6. Feladat. Egyenes pályán mozgó részecske s méterre van a kiindulás helyétől. Sebességét a

$$v(s(t)) = -\frac{1}{s^2(t)}$$

függvény írja le. Határozzuk meg a gyorsulását abban az időpillanatban, amikor a kiindulási helytől 50 [cm] távolságra van a részecske.

megoldás:

A gyorsulás–idő függvény a sebesség–idő függvény deriváltja, a sebesség–idő függvény a hely–idő függvény deriváltja. Ezeket felhasználva:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d(v(s(t)))}{dt} = \frac{dv}{dt}(s(t)) \cdot \frac{ds(t)}{dt} = \frac{dv}{dt}(s(t)) \cdot v(t) = \\ &= \frac{2}{s^3(t)} \cdot \left(-\frac{1}{s^2(t)} \right) = -\frac{2}{s^5(t)}. \end{aligned}$$

Mivel $s = 30$ [cm] = 0,5 [m], ezért a keresett gyorsulás:

$$a = -\frac{2}{(0,5)^5} = -64 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right].$$

11.7. Feladat. Határozzuk meg az

$$e^{xy} + \ln(y^2) + e^y = 1 + e$$

implicit függvény $(0; 1)$ koordinátájú pontjába húzott érintő egyenesének meredekségét!

megoldás:

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a $(0; 1)$ pont valóban illeszkedik a függvény grafikonjára ugyanis, ha behelyettesítjük a megadott implicit egyenletbe a pontot

$$e^0 + \ln 1 + e = 1 + e$$

egyenlőséghez jutunk, ami azonosság. A feladatban megadott egyenlet mindkét oldalát differenciáljuk. Kihhasználjuk, hogy a logaritmus azonosságai alapján $\ln(y^2) = 2 \ln y$, továbbá figyeljünk arra, hogy $y = y(x)$ egy függvény:

$$e^{xy} \cdot (y + xy') + \frac{2}{y} \cdot y' + e^y \cdot y' = 0.$$

Az y' tagot tartalmazó kifejezést egy oldalra rendezzük, majd emeljük ki az y' -t:

$$y' \cdot \left(\frac{2}{y} + e^y + e^{xy} \cdot x \right) = -e^{xy} \cdot y.$$

Kifejezzük az y' -t:

$$y' = \frac{e^{xy} \cdot y}{\frac{2}{y} + e^y + e^{xy} \cdot x}.$$

Behelyettesítjük a $(0; 1)$ koordinátájú pontot:

$$y' = \frac{e^0 \cdot 1}{\frac{2}{1} + e^1} = \frac{1}{2 + e}.$$

11.8. Feladat. Határozzuk meg az

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

implicit függvény azon pontjait, ahol a függvény érintő egyenesének meredeksége 0.

megoldás:

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$2x + 2y \cdot y' - 6 - 8y' = 0.$$

Ha a bal oldalon csak az y' -t tartalmazó tagokat hagyjuk és kiemelünk y' -t, akkor

$$y' \cdot (2y - 8) = -2x + 6 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{6 - 2x}{2y - 8}$$

adódik, ami pontosan akkor zérus, ha $x = 3$. Ekkor az eredeti implicit egyenletből azt kapjuk, hogy

$$9 + y^2 - 18 - 8y = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 8y - 9 = 0.$$

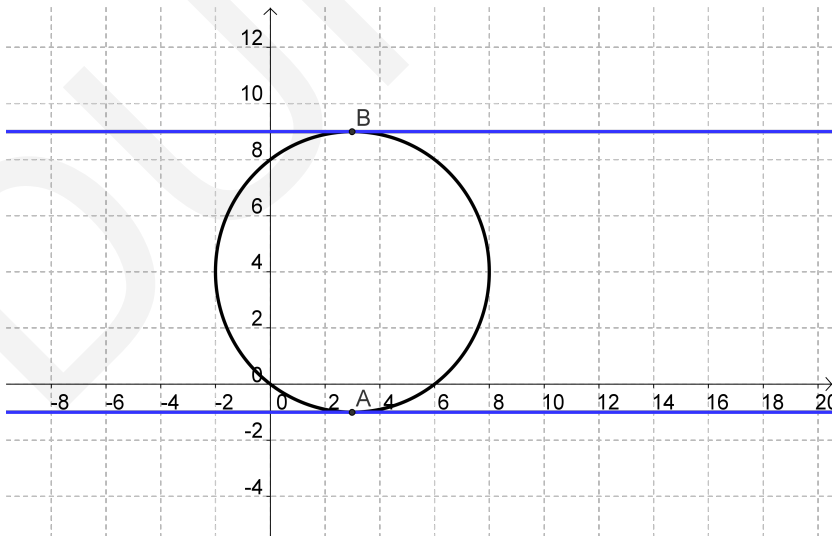
A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával

$$y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2},$$

azaz $y = -1$, illetve $y = 9$. A keresett pontok tehát $(3; -1)$, illetve $(3; 9)$. Megjegyezzük, hogy a feladatban megadott egyenlet valójában egy kör egyenlete, mely átalakítható úgy, hogy

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2,$$

amiből azonnal leolvasható, hogy a kör középpontja $(3; 4)$, sugara 5. A feladatban említett érintő egyenes meredeksége 0, így az egyenes párhuzamos az x -tengellyel, tehát egy normál vektora $(1; 0)$ vektor. Ha felírjuk az ezen normál vektorral rendelkező, középponton áthaladó egyenes egyenletét, akkor az éppen a keresett pontokat metszi ki a körből, így a feladat elemi eszközökkel is megoldható.



11.9. Feladat. Határozzuk meg a $3x^2y + 2xy^2 = 2$ egyenlettel definiált implicit függvény normális egyenesének meredekségét az $(1; -2)$ pontban.

megoldás:

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát, figyelve arra, hogy $y = y(x)$ egy x -től függő függvény:

$$6xy + 3x^2 \cdot y' + 2xy^2 + 4xy \cdot y' = 0.$$

Rendezzük az egyenletet úgy, hogy a bal oldalon csak azok a tagok szerepeljenek, amelyek tartalmazzák az y' -t:

$$y' \cdot (3x^2 + 4xy) = -6xy - 2xy^2.$$

Fejezzük ki az egyenletből az y' -t:

$$y' = -\frac{6xy + 2xy^2}{3x^2 + 4xy} = -\frac{6y + 2y^2}{3x + 4y}.$$

A derivált függvényt értékeljük ki az $(1; -2)$ helyen, ezáltal megkapjuk az érintő egyenes meredekségét:

$$m_e = y' = -\frac{-12 + 8}{3 - 8} = -\frac{-4}{-5} = -\frac{4}{5}.$$

Az érintő egyenes és normális egyenes merőleges egymásra, így a meredekségeik szorzata -1 . Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy a normális egyenes meredeksége:

$$m_n = \frac{5}{4}.$$

11.10. Feladat. Határozzuk meg az $y^x = x^y$ implicit függvény esetén az $y' = \frac{dy}{dx}$ függvényt!

megoldás:

Deriváljuk a megadott egyenlet mindkét oldalát. Figyeljünk arra, hogy y valójában $y(x)$. Elsőként végezzük el az alábbi átalakítást:

$$e^{x \cdot \ln y} = e^{y \cdot \ln x}.$$

Az így kapott egyenlet mindkét oldalát differenciálva azt kapjuk, hogy

$$e^{x \cdot \ln y} \cdot \left(\ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y' \right) = e^{y \cdot \ln x} \cdot \left(y' \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x} \right).$$

Egyrészt kihasználjuk ismét, hogy

$$y^x = e^{x \cdot \ln y}$$

és

$$x^y = e^{y \cdot \ln x},$$

másrészt átrendezzük a deriválás után kapott egyenletet. Ekkor az

$$y^x \cdot \ln y - x^y \cdot \frac{y}{x} = y' \cdot \left(x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \right)$$

egyenlet adódik. Ebből kifejezve azt y' függvényt azt kapjuk, hogy

$$y' = \frac{y^x \cdot \ln y - x^{y-1} \cdot y}{x^y \cdot \ln x - y^{x-1} \cdot x}.$$

12. Newton–Raphson módszer

12.1. Feladat. Határozzuk meg a $\sqrt{2}$ közelítő értékét az $x_0 = 1$ kezdeti értéket használva úgy, hogy a Newton–Raphson módszert kétszer alkalmazzuk!

megoldás:

Tekintsük az $f(x) = x^2 - 2$ függvényt. Ennek egyik gyöke $\sqrt{2}$. A függvény deriváltja $f'(x) = 2x$. A közelítő érték kiszámításához az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} \quad (k = 1, 2)$$

sorozatot kell tekintenünk. Mivel $x_0 = 1$, ezért

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 1 - \frac{1^2 - 2}{2} = \frac{3}{2}.$$

A második lépésben

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 1,5 - \frac{1,5^2 - 2}{3} = 1,41\bar{6}.$$

12.2. Feladat. A Newton–Raphson módszert alkalmazva határozzuk meg az

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

egyenlet valós megoldásának közelítő értékét az $x_0 = 0$ kezdeti értéket használva úgy, hogy az iterációt kétszer végezzük el!

megoldás:

Legyen $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Ekkor a függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2 + 3$. A közelítő érték kiszámításához az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 + 3x_k + 1}{3x_k^2 + 3} \quad (k = 1, 2)$$

sorozatot kell tekintenünk. Mivel $x_0 = 0$, ezért

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + 3x_0 + 1}{3 \cdot x_0^2 + 3} = 0 - \frac{0^3 + 3 \cdot 0 + 1}{3 \cdot 0^2 + 3} = -\frac{1}{3}$$

A második lépésben

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{x_1^3 + 3x_1 + 1}{3 \cdot x_1^2 + 3} = \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1}{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3} = -\frac{29}{90} = -0,3\bar{2}. \end{aligned}$$

12.3. Feladat. A Newton–Raphson módszert alkalmazva határozzuk meg az

$$e^{2x} = -x$$

egyenlet valós megoldásának közelítő értékét az $x_0 = -1$ kezdeti értéket használva úgy, hogy az iterációt kétszer végezzük el!

megoldás:

Legyen $f(x) = e^{2x} + x$. Ekkor a függvény deriváltja

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} + 1.$$

A közelítő érték kiszámításához az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{2x_k} + x_k}{2 \cdot e^{2x_k} + 1} \quad (k = 1, 2)$$

sorozatot kell tekintenünk. Mivel $x_0 = -1$, ezért

$$x_1 = x_0 - \frac{e^{2x_0} + x_0}{2 \cdot e^{2x_0} + 1} = -1 - \frac{e^{-2} - 1}{2 \cdot e^{-2} + 1} \approx -0,3195.$$

A második lépésben

$$x_2 = x_1 - \frac{e^{2x_1} + x_1}{2 \cdot e^{2x_1} + 1} = -0,3195 - \frac{e^{-0,6390} - 1}{2 \cdot e^{-0,6390} + 1} \approx -0,4208.$$

12.4. Feladat. Határozzuk meg a $\cos x = x$ egyenlet megoldásának közelítő értékét Newton–Raphson módszer segítségével úgy, hogy az $x_0 = 1$ kezdeti értéket használjuk és kétszer alkalmazzuk az iterációt!

megoldás:

A Newton–Raphson módszer az $f(x) = 0$ egyenlet közelítő értékének meghatározására szolgál, így ahhoz, hogy a feladatban szereplő egyenlethez jussunk, tekintsük az $f(x) = \cos x - x$ függvényt. Az f függvény deriváltja

$f'(x) = -\sin x - 1$, így az iterációt megadó sorozat

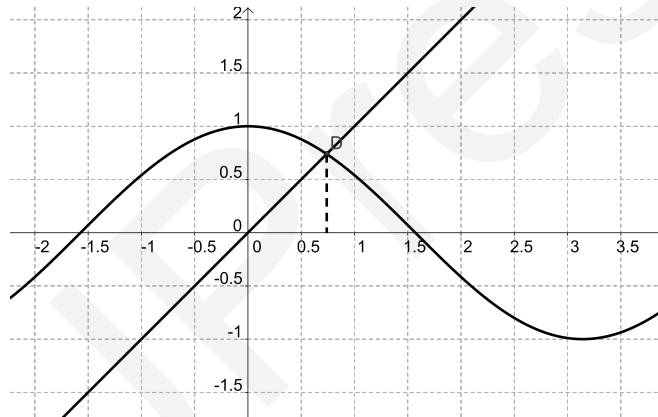
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\cos x_k - x_k}{-\sin x_k - 1} = \\ &= x_k + \frac{\cos x_k - x_k}{\sin x_k + 1} \quad (k = 1, 2). \end{aligned}$$

A kezdeti értékünk $x_0 = 1$, így

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos x_0 - x_0}{\sin x_0 + 1} = 1 + \frac{\cos 1 - 1}{\sin 1 + 1} \approx 0,7504.$$

A második lépésben

$$x_2 = x_1 + \frac{\cos x_1 - x_1}{\sin x_1 + 1} = 0,7504 + \frac{\cos 0,7504 - 0,7504}{\sin 0,7504 + 0,7504} \approx 0,7391.$$



12.5. Feladat. [28] A tengeralattjárók helyzetének meghatározásakor gyakran előforduló probléma annak meghatározása, hogy mikor esik a hangbója (hangdetektor) legközelebb a hajóhoz. Tegyük fel, hogy a tengeralattjáró (jó közelítéssel) az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának megfelelő parabolapályán mozog, a bója pedig a $P(2, -1)$ pontban van. Adjuk meg annak az x értéknek a közelítő értékét Newton–Raphson módszerrel, amelyik minimalizálja a bója és a tengeralattjáró közötti távolságot!

megoldás:

A $(2, -1)$ pontnak a távolsága a sík egy (x, y) koordinátájú pontjától

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2},$$

azonban mivel az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának szeretnénk meghatározni a lehető legkisebb távolságát a P ponttól, ezért $y = x^2$, így a távolságot leíró

$$d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (x^2+1)^2} = \sqrt{x^4 + 3x^2 - 4x + 5}$$

függvény minimumát keressük. Szélsőérték hely ott lehet, ahol a függvény deriváltja zérus, azonban egyszerűen átgondolható, hogy a

$$h(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 5$$

függvénynek pontosan azon a helyen van szélsőértéke, ahol a $d(x)$ függvénynek, így elegendő a $h(x)$ függvény szélsőérték helyét megkeresnünk. A $h(x)$ függvény deriváltja

$$h'(x) = 4x^3 + 6x - 4.$$

Ennek a függvénynek a zérushelyét keressük, azaz a $h'(x) = 0$ egyenlet megoldását kell meghatároznunk. A megoldandó egyenlet ekvivalens a

$$2x^3 + 3x - 2 = 0$$

egyenlettel, így tekintsük a $g(x) = 2x^3 + 3x - 2$ függvényt, valamint az $x_0 = 1$ kezdeti értéket és alkalmazzuk a Newton–Raphson módszert. Mivel a g függvény deriváltja $g'(x) = 6x^2 + 3$, ezért az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{2x_k^3 + 3x_k - 2}{6x_k^2 + 3} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

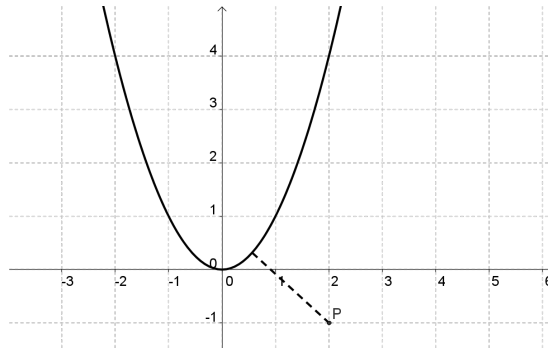
A kezdeti értéket felhasználva

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 1 - \frac{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1 - 2}{6 \cdot 1^2 + 3} = \frac{2}{3}.$$

A második lépésben

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{2}{3} - \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \cdot \frac{2}{3} - 2}{6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3} = \frac{86}{153} \approx 0,5621.$$

Tehát a keresett közelítő érték $x \approx 0,5621$.



12.6. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ függvénynek azt a $P(x; y)$ pontját, amelyik a lehető legközelebb van a $Q(2; 3)$ ponthoz!

megoldás:

A P és Q pont távolsága

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}.$$

Tudjuk azonban azt is, hogy a P pont illeszkedik az f függvény grafikonjára, így teljesülnie kell az $y = \sqrt{x}$ összefüggésnek. Ezt felhasználva az előbbi távolság

$$d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x}-3)^2} = \sqrt{x^2 - 3x - 6 \cdot \sqrt{x} + 13}.$$

Ennek a függvénynek ugyanott van szélsőérték helye, ahol a

$$h(x) = x^2 - 3x - 6 \cdot \sqrt{x} + 13$$

függvénynek. Ennek a deriváltja

$$h'(x) = 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} - 3.$$

Meg kell most oldanunk a $h'(x) = 0$ egyenletet. Elemi eszközökkel ezt nem tudjuk megtenni, ezért a megoldás egy közelítő értékét fogjuk meghatározni Newton–Raphson módszerrel (2 lépést alkalmazva). Könnyen ellenőrizhető, hogy a $h'(x)$ függvény az $[1; 4]$ intervallumban előjelet vált és ezen az intervallumon folytonos is, ezért ott biztosan van zérushelye. Tekintsük az $x_0 = 1$ kezdő értékét és a jelölések egyszerűsítése miatt vezessük be a $g(x) = h'(x)$ függvényt. A g függvény deriváltja

$$g'(x) = 2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = 2 + \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x^3}}.$$

Ezt felhasználva az iterációs sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{2x_k - \frac{3}{\sqrt{x_k}} - 3}{\frac{3}{\sqrt{x_k^3}} + 2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

A kezdeti értéket felhasználva

$$x_1 = x_0 - \frac{2x_0 - \frac{3}{\sqrt{x_0}} - 3}{\frac{3}{\sqrt{x_0^3}} + 2} = \frac{1 - 2 \cdot 1 - 3 - 3}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{15}{7} \approx 2,14.$$

A második lépésben

$$x_2 = x_1 - \frac{2x_1 - \frac{3}{\sqrt{x_1}} - 3}{\frac{3}{\sqrt{x_1^3}} + 2} = \frac{15}{7} - \frac{2 \cdot \frac{15}{7} - \frac{3}{\sqrt{\frac{15}{7}}} - 3}{\frac{3}{2 \cdot \sqrt{(\frac{15}{7})^3}} + 2} \approx 2,41.$$

Tehát az x közelítő értéke $x \approx 2,41$. Így a keresett pont

$$P(2,41; \sqrt{2,41}) = (2,41; 1,55).$$

13. Elaszticitás

13.1. Feladat. Egy árucikk iránti keresletet az x ártól függően az

$$f(x) = \frac{100}{x+5}$$

függvény adja meg. Írjuk fel az elaszticitás függvényt! Hány százalékkal változik a kereslet, ha az áru 5 Ft-os árát 1%-kal emelik, illetve 3%-kal csökkentik?

megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk az f függvény deriváltját:

$$f'(x) = \frac{-100}{(x+5)^2}.$$

Ezt felhasználva felírjuk az elaszticitás függvényt:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{\frac{100}{x+5}} \cdot \frac{-100}{(x+5)^2} = x \cdot \frac{x+5}{100} \cdot \frac{-100}{(x+5)^2} = \frac{-x}{x+5}.$$

Mivel a termék ára 5 Ft, ezért kiszámoljuk az $E(5)$ értéket:

$$E(5) = \frac{-5}{5+5} = -\frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha 1%-kal nő az ár, akkor várhatóan fél százalékkal csökken a termék iránti kereslet. Másrészt, ha 3%-kal csökken az ár, akkor várhatóan $3 \cdot 0,5\% = 1,5\%$ -kal nő a termék iránti kereslet.

13.2. Feladat. Egy termékből eladott mennyiség az

$$f(x) = 10 + \frac{5000}{x}$$

függvénnyel adható meg, ahol x a termék ára. Hány százalékkal változna az eladott mennyiség, ha a termék 1000 Ft-os árát 3%-kal növelik?

megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk az f függvény deriváltját:

$$f'(x) = \frac{-5000}{x^2}.$$

Ezt felhasználva felírjuk az elaszticitás függvényt:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{10 + \frac{5000}{x}} \cdot \frac{-5000}{x^2} = \frac{x}{\frac{10x+5000}{x}} \cdot \frac{-5000}{x^2} = \\ &= x \cdot \frac{x}{10x + 5000} \cdot \frac{-5000}{x^2} = -\frac{5000}{10x + 5000}. \end{aligned}$$

A termék ára 1000 Ft, ezért kiszámoljuk az $E(1000)$ értéket:

$$E(1000) = -\frac{5000}{10000 + 5000} = -\frac{1}{3}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha 3%-kal növeljük a termék árát, akkor várhatóan $3 \cdot \frac{1}{3}\%$ -kal, azaz 1%-kal fog csökkenni a termék iránti kereslet.

13.3. Feladat. A raktározási költség a raktározott mennyiség (x) és egy állandó költség függvénye az $f(x) = 40x + 8000$ képlet szerint. Hány százalékkal változik a raktározási költség, ha 200 termék helyett 2%-kal kevesebb terméket tárolnak?

megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk az f függvény deriváltját:

$$f'(x) = 40.$$

Ezt felhasználva az elaszticitás függvény

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{40x + 8000} \cdot 40 = \frac{40x}{40x + 8000}.$$

Kiszámoljuk az $E(200)$ értéket

$$E(200) = \frac{40 \cdot 200}{40 \cdot 200 + 8000} = \frac{1}{2}.$$

Így ha 2%-kal kevesebb terméket raktározunk, akkor $2 \cdot \frac{1}{2} = 1\%$ -kal csökken a raktározási költség.

13.4. Feladat. Tegyük föl, hogy egy termék keresletét az

$$f(x) = 800 \cdot x^{-1,5}$$

függvény írja le. Határozzuk meg az f elaszticitását!

megoldás:

Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = 800 \cdot (-1,5) \cdot x^{-2,5} = -12.000 \cdot x^{-2,5}.$$

Így az elaszticitás

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{800 \cdot x^{-1,5}} \cdot (-12.000 \cdot x^{-2,5}) = -1,5.$$

Tehát az elaszticitás $-1,5$, vagyis az ár 1%-os növekedése várhatóan a kereslet nagyságának 1,5%-os csökkentését eredményezi.

13.5. Feladat. Egy üzlet költségeinek alakulását az

$$f(x) = 10,6 + 0,03x - 0,925 \cdot 10^{-4}x^2 + 2 \cdot 10^7x^3$$

függvény írja le, ahol x a vállalat forgalmát jelenti ezer Ft-ban. Írjuk fel az f költségfüggvényhez tartozó elaszticitás függvényt!

megoldás:

A függvény deriváltja

$$f'(x) = 0,03 + 1,85 \cdot 10^{-5}x + 6 \cdot 10^7x^2.$$

Így az elaszticitás függvény

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x \cdot (0,03 + 1,85 \cdot 10^{-5}x + 6 \cdot 10^7x^2)}{10,6 + 0,03x - 0,925 \cdot 10^{-4}x^2 + 2 \cdot 10^7x^3}.$$

13.6. Feladat. Valamely áru iránti kereslet az

$$f(x) = 4 \cdot e^{-0,2x+8}$$

keresleti függvénnyel írható le, ahol x az egységárat (ezer Ft/kg), $f(x)$ pedig a hozzá tartozó keresletet jelenti (kg). Hogyan változik a kereslet, ha az egységárat a 9.000 Ft/kg egységárról 1%-kal növeljük?

megoldás:

Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = 4 \cdot e^{-0,2x+8} \cdot (-0,2) = -0,8 \cdot e^{-0,2x+8}.$$

Az elaszticitás függvény

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{4 \cdot e^{-0,2x+8}} \cdot (-0,8 \cdot e^{-0,2x+8}) = -0,2x.$$

Ezen függvény helyettesítési értéke az $x = 90$ helyen:

$$E(9) = -9 \cdot 0,2 = -1,8.$$

Azaz ha a termék egységárát 1%-kal növeljük, akkor a termék iránti kereslet várhatóan 1,8%-kal fog csökkenni.

13.7. Feladat. Egy étteremben egy új étel specialitást vezetnek be. Az előzetes számítások alapján a keresletet leíró függvény képlete:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2},$$

ahol x az egységárát jelenti ezer Ft-ban, $f(x)$ pedig a havonta ebből a specialitásból várhatóan értékesítendő adagok számát ezer darabban megadva. Számoljuk ki a keresleti függvénynek az $x = 2$ pontjához tartozó elaszticitását, és értelmezzük a kapott eredményt!

megoldás:

Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot (2x - 2x^3).$$

Az elaszticitás függvény

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{x^2 \cdot e^{-x^2}} \cdot e^{-x^2} \cdot (2x - 2x^3) = \\ &= \frac{2x - 2x^3}{x} = 2 - 2x^2. \end{aligned}$$

A függvény helyettesítési értéke az $x = 2$ helyen

$$E(2) = 2 - 2 \cdot 2^2 = -6.$$

A kapott eredmény azt jelenti, hogy ha az adagok egységárát 1%-kal növelik, akkor az irántuk való kereslet várhatóan 6%-kal fog csökkenni.

13.8. Feladat. Valamely áru iránti kereslet az

$$f(x) = \frac{300}{x} + e^{-\frac{x}{5}+2}$$

függvénnyel írható le, ahol x az egységárát jelenti ezer forintban, $f(x)$ pedig a hozzá tartozó keresletet 1.000 darabban. Hogyan változik az árbevétel, ha az egységárát 10.000 forintról 1%-kal növeljük?

megoldás:

A bevételi függvény

$$B(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \left(\frac{300}{x} + e^{-\frac{x}{5}+2} \right) = 300 + x \cdot e^{-\frac{x}{5}+2}.$$

Ezen függvény deriváltja

$$B'(x) = e^{-\frac{x}{5}+2} + x \cdot e^{-\frac{x}{5}+2} \cdot \left(-\frac{1}{5} \right) = e^{-\frac{x}{5}+2} \cdot \left(1 - \frac{x}{5} \right).$$

Az elaszticitás függvény

$$E(x) = \frac{x}{B(x)} \cdot B'(x) = \frac{x}{300 + x \cdot e^{-\frac{x}{5}+2}} \cdot e^{-\frac{x}{5}+2} \cdot \left(1 - \frac{x}{5} \right).$$

Ezen függvény helyettesítési értéke az $x = 10$ helyen

$$E(10) = \frac{10}{300 + 10} \cdot (-1) = \frac{-10}{310} = -\frac{1}{31}.$$

Ha az árat 1%-kal növeljük, akkor a bevétel várhatóan $\frac{1}{31}\%$ -kal csökken.

13.9. Feladat. Egy árucikk iránti keresletet az x ártól függően az

$$f(x) = \frac{50}{x + 50}$$

függvény ad meg. Írjuk föl az elaszticitás függvényt! Hány százalékkal változik a kereslet, ha az áru 50 Ft-os árát 1%-kal emelik, illetve 3%-kal csökkentik?

megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk az f függvény deriváltját:

$$f'(x) = \frac{-50}{(x + 50)^2}.$$

Ezt felhasználva felírjuk az elaszticitás függvényt:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{\frac{50}{x+50}} \cdot \frac{-50}{(x+50)^2} = \\ &= x \cdot \frac{x+50}{50} \cdot \frac{-50}{(x+50)^2} = \frac{-x}{x+50}. \end{aligned}$$

Mivel a termék ára 50 Ft, ezért kiszámoljuk az $E(50)$ értéket:

$$E(50) = \frac{-50}{50 + 50} = -\frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha 1%-kal nő az ár, akkor várhatóan fél százalékkal csökken a termék iránti kereslet. Másrészt, ha 3%-kal csökken az ár, akkor várhatóan $3 \cdot 0,5\% = 1,5\%$ -kal nő a termék iránti kereslet.

14. Differenciálszámítás a fizikában és a műszaki tudományokban

14.1. **Feladat.** Egy egyenes pályán mozgó részecske t másodperc elteltével a megfigyelés helyétől

$$s(t) = t^3 - 7t^2 + 11t - 3$$

méter távolságra van.

- Határozzuk meg a sebesség–idő és gyorsulás–idő függvényeket!
- Adjuk meg azt az időpillanatot, amikor a részecske sebessége nulla!
- Határozzuk meg azok az időintervallumokat, amikor a részecske sebességének nagysága nő, illetve azokat, amikor csökken!
- Adjuk meg azokat az időpillanatok, amikor megváltozik a részecske mozgásának iránya!
- Számoljuk ki, hogy az első 3 másodpercben összesen mennyi utat tett meg a részecske!

megoldás:

- a) A hely–idő függvény deriváltja a sebesség–idő függvény

$$v(t) = 3t^2 - 14t + 11.$$

A gyorsulás–idő függvény a sebesség–idő függvény deriváltja

$$a(t) = 6t - 14.$$

- b) A részecske sebessége azon időpillanat(ok)ban zérus, amikor a $v(t) = 0$ egyenlet teljesül:

$$3t^2 - 14t + 11 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletet felhasználva

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 132}}{6} = \frac{14 \pm 8}{6}$$

adódik, azaz a $t = 1$ és a $t = 11/3$ lesz a részecske sebessége nulla.

- c) A $v(t)$ függvény monotonitását kell megvizsgálnunk:

	$t < 1$	$t = 1$	$1 < t < 11/3$	$t = 11/3$	$t > 11/3$
$v'(t)$	+	0	–	0	+
$v(t)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

d) A részecske mozgásának iránya a $t = 1$ és $t = 11/3$ időpillanatban változott meg.

e) A részecske az első 3 másodperceben

$$s = [s(1) - s(0)] + [s(3) - s(1)]$$

utat tesz meg. Mivel

$$s(1) - s(0) = 2 - (-3) = 5,$$

ezért 5 méter utat tett meg az első másodpercen a részecske. Ezt követően megfordult, és az eredetivel ellentétes irányba haladt és mivel

$$s(3) - s(1) = -6 - 2 = -8,$$

ezért 8 méter utat tett meg. Összesen tehát $5 + 8 = 13$ méter utat tett meg a részecske az első 3 másodpercben.

14.2. Feladat. Függőlegesen feldobunk egy labdát. A feldobás után t másodperccel a labda helyét méterben mérve a

$$h(t) = -16t^2 + 40t + 1$$

függvény írja le. Határozzuk meg azt az időpillanatot, amikor a labda a legmagasabban lesz?

megoldás:

Mivel $h'(t) = -32t + 40$ és szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja zérus, ezért

$$-32t + 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1,25,$$

így a feldobás után $t = 1,25$ másodperc múlva lesz legmagasabban a labda, azaz ekkor kezd el „lefelé esni”.

14.3. Feladat. Egy egyenes pályán mozgó részecske hely–idő függvénye

$$s(t) = \frac{t}{e^t},$$

ahol az időt másodperccel, a helyet méterben mérjük. Határozzuk meg azt az időpillanatot, amikor a részecske sebessége nulla!

megoldás:

Azt az időpillanatot keressük, amikor a sebesség zérus. Mivel

$$v(t) = \frac{e^t - t \cdot e^t}{e^{2t}} = \frac{e^t \cdot (1 - t)}{e^{2t}} = \frac{1 - t}{e^t},$$

ezért

$$\frac{1-t}{e^t} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-t = 0,$$

tehát a $t = 1$ időpillanatban lesz zérus a sebesség, azaz ekkor lesz a részecske sebessége zérus.

14.4. Feladat. Egy egyenes pályán mozgó részecske hely-idő függvénye

$$s(t) = \sqrt{1+4t},$$

ahol a megtett utat méterben, az eltelt időt másodpercben mérjük. Határozzuk meg a részecske sebességét és gyorsulását a $t = 6$ [s] időpillanatban!

megoldás:

A sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja. Az $s(t)$ függvény deriváltja

$$s'(t) = \frac{1}{2} \cdot (1+4t)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{1+4t}},$$

tehát

$$v(t) = \frac{2}{\sqrt{1+4t}} \quad \Rightarrow \quad v(6) = \frac{2}{5} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

A gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény deriváltja. A $v(t)$ függvény deriváltja

$$v'(t) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+4t)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4 = -\frac{4}{\sqrt{(1+4t)^3}},$$

így azt kapjuk, hogy

$$a(t) = -\frac{4}{\sqrt{(1+4t)^3}} \quad \Rightarrow \quad a(6) = -\frac{4}{125} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

14.5. Feladat. Egy zuhanó test sebességének nagysága abban az időpillanatban, amikor a kiindulóponttól s méter utat tett meg: $v(s) = k \cdot \sqrt{s}$ [m/s], ahol k konstans. Igazoljuk, hogy a test gyorsulása állandó.

megoldás:

A sebesség függ az időtől, így valójában a megadott függvényre a precíz jelölés

$$v(s(t)) = k \cdot \sqrt{s(t)}$$

lenne. A gyorsulás–idő függvény a sebesség–idő függvény deriváltja, így

$$a(t) = v'(s(t)) = k \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{s(t)}} \cdot s'(t).$$

Azonban azt is tudjuk, hogy $s'(t) = v(t)$, így azt kapjuk, hogy

$$a(t) = k \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{s(t)}} \cdot k \cdot \sqrt{s(t)} = \frac{k^2}{2}.$$

Ezzel igazoltuk a feladatban megfogalmazott állítást.

14.6. Feladat. Egy egyenes pályán mozgó részecske sebessége a hely függvényében

$$v(s) = \frac{3s + 2}{2s - 1} \quad (s > 1).$$

Adjuk meg a gyorsulását abban az időpillanatban, amikor $s = 2$.

megoldás:

A gyorsulás–idő függvény a sebesség–idő függvény deriváltja, azonban most a sebességet a hely függvényében ismerjük, ahol a hely az időtől függ, így valójában a $v(s(t))$ összetett függvényt kell deriválnunk, azaz

$$a(t) = (v(s(t)))' = v'(s(t)) \cdot s'(t) = v'(s(t)) \cdot v(t).$$

Tehát

$$a(t) = \frac{3 \cdot (2s(t) - 1) - (3s(t) + 2) \cdot 2}{(2s(t) - 1)^2} \cdot \frac{3s(t) + 2}{2s(t) - 1}.$$

Ezt felhasználva $s = 2$ esetén a gyorsulás

$$\frac{3 \cdot (4 - 1) - (3 \cdot 2 + 2) \cdot 2}{(2 \cdot 2 - 1)^2} \cdot \frac{3 \cdot 2 + 2}{2 \cdot 2 - 1} = -\frac{56}{27}.$$

14.7. Feladat. Egy szabadon eső test helyét a t idő függvényében a

$$h(t) = \frac{c^2}{2} \cdot \ln \operatorname{ch} \left(\frac{g \cdot t}{c} \right)$$

képlet írja le, ahol g a nehézségi gyorsulás, c pedig a légellenállási tényező (Hallgatólagosan $\downarrow_{\oplus}$ irányfelvételt feltételezünk.) Bizonyítsuk be, hogy „kis” t értéknél

$$h(t) \approx \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

megoldás:

Írjuk fel a $h(t)$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli másodrendű Taylor–polinomját!
A $h(t)$ függvény deriváltja

$$h'(t) = \frac{c^2}{g} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{g \cdot t}{c}\right)} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{g \cdot t}{c}\right) \cdot \frac{g}{c} = c \cdot \operatorname{th}\left(\frac{g \cdot t}{c}\right).$$

A $h(t)$ függvény második deriváltja

$$h''(t) = c \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{g \cdot t}{c}\right)} \cdot \frac{g}{c} = g \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{g \cdot t}{c}\right)}.$$

Felhasználva az előbbi eredményeket is azt kapjuk, hogy $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = g$. A keresett Taylor–polinom

$$T_2(t) = h(0) + h'(0) \cdot (t - 0) + \frac{h''(0)}{2!} \cdot (t - 0)^2 = \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha t értéke „kicsi”, akkor

$$h(t) \approx \frac{g}{2} \cdot t^2,$$

amit igazolnunk kellett.

14.8. Feladat. Egy téglalap keresztmetszetű gerenda teherbírása egyenesen arányos a keresztmetszet magasságával és szélességének négyzetével. Határozzuk meg a $d = 30$ centiméter átmérőjű hengeres fatörzsből készíthető legnagyobb teherbírású, téglalap keresztmetszetű gerenda méreteit!

megoldás:

Legyen a gerenda keresztmetszete a és b oldalhosszúságú téglalap úgy, hogy b a hosszúság, a a szélesség. Ekkor egyrészt a Pitagorasz–tétel szerint

$$a^2 + b^2 = d^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = d^2 - b^2,$$

másrészt a gerenda szilárdsága arányos az

$$a^2 \cdot b = (d^2 - b^2) \cdot b = 900b - b^3$$

értékkel. A feladatunk tehát az $f(b) = 900b - b^3$ függvény maximum helyének meghatározása. A függvény deriváltja

$$f'(b) = 900 - 3b^2.$$

A stacionárius hely a $900 - 3b^2 = 0$ egyenlet megoldása. Mivel $b > 0$, ezért $b = \sqrt{300} \approx 17,32$. Mivel

$$f''(b) = -6b < 0,$$

ezért a kapott szélsőérték hely lokális maximum, mivel azonban $b \approx 17,32$ az egyetlen szélsőérték hely az értelmezési tartományban, ezért az egyben globális maximum hely is. Mivel $b \approx 17,32$, ezért

$$a = \sqrt{900 - 300} = \sqrt{600} \approx 24,49.$$

A maximális szilárdságú gerenda keresztmetszete tehát olyan téglalap, amelynek oldalai 17,32 és 24,49 centiméter hosszúságúak.

14.9. Feladat. Egy forma 1-es versenypálya egyik kanyarjának ívét jó közelítéssel az $f(x) = x^2 + 2x$ függvény grafikonja írja le. Ha a pályán haladó autó $x = 1$ -nél a pálya érintője mentén kisodródik, akkor nekiütközik-e a $P(2; 5)$ koordinátájú pontban álló oszlopnak?

megoldás:

Mivel $x = 1$, ezért $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$, ezért a versenyautó a $Q(1; 3)$ pontban hagyja el a versenypályát. Az f függvény deriváltja $f'(x) = 2x + 2$ és $f'(1) = 4$, következésképpen az érintőegyenese Q pontban

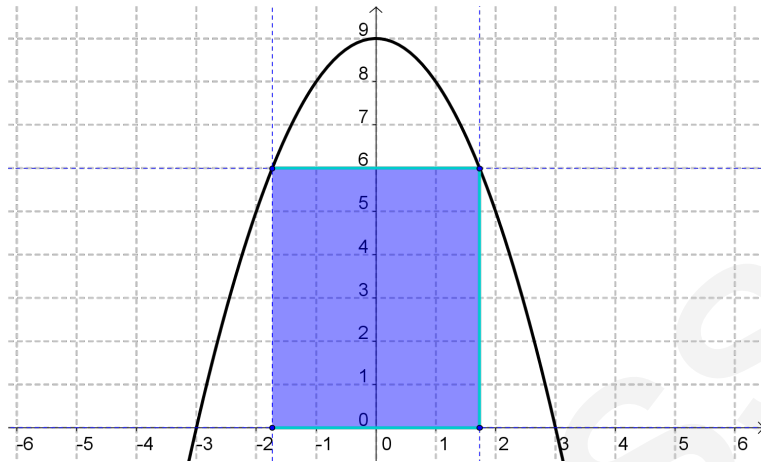
$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 3 + 4 \cdot (x - 1),$$

azaz $y = 4x - 1$. Mivel a $P(2; 5)$ pont nem illeszkedik erre az egyenesre, ugyanis $5 \neq 4 \cdot 2 - 1$, ezért a versenyautó nem ütközik neki az oszlopnak.

14.10. Feladat. Egy hegy alá a mérnökök fordított parabola keresztmetszetű, egyenes alagutat terveznek. Az alagút 9 méter magas és a legalján 6 méter széles. Mekkora lehet annak a kamionnak a legnagyobb téglalap alakú keresztmetszete (szélessége és magassága), amely még éppen át tud hajtani az alagúton!

megoldás:

Tekintsük a feladat feltételeinek megfelelő $f(x) = -ax^2 + 9$ ($a > 0$) függvényt úgy, hogy zérushelyei -3 és 3 legyenek!



Mivel $x = 3$ zérushely, ezért $0 = -9a + 9$, azaz $a = 1$, így $f(x) = -x^2 + 9$. Ha a kamion szélességének fele x , magassága $-x^2 + 9$. Tehát a $2x$ szélességű, $-x^2 + 9$ magasságú téglalap területe:

$$T(x) = -2x^3 + 18x.$$

Ennek deriváltja

$$T'(x) = -6x^2 + 18,$$

amelynek zérushelyei: $\pm\sqrt{3}$. Mivel

$$T''(x) = -12x \quad \Rightarrow \quad T''(\sqrt{3}) < 0,$$

ezért a $\sqrt{3}$ helyen lesz T -nek lokális maximum helye, ami egyben globális maximum hely is. A kamion szélessége tehát $2x \approx 3,46$ [m], magassága $f(\sqrt{3}) = -3 + 9 = 6$ [m].

14.11. Feladat. Egy csatornából kifolyó vizet egy 100 literes hordóban gyűjtik össze. Az összegyűlt víz egy részét öntözésre használják, így a hordóból tovább vezetik egy kis kert földjére. A hordóban lévő folyadék mennyisége az idő függvényében a $Q(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t$ függvény szerint alakul a $[0; 6]$ időintervallumban, ahol t a megfigyelés óta eltelt napok számát jelenti.

- Mennyi folyadék volt a hordóban a megfigyelés kezdetén és mennyi volt a megfigyelés végén?
- Adjuk meg, hogy a megfigyelés után 1 nappal hány liter folyadék volt a hordóban?
- Adjuk meg a változási gyorsaságot az idő függvényében!

- d) Mennyi a folyadék szintjének változási gyorsasága a folyamat kezdete után 1, illetve 2 nappal?
- e) Melyik időintervallumban növekszik, illetve csökken a folyadék szintje?
- f) Mikor maximális, illetve minimális a tárolt folyadék mennyisége a megfigyelés során, illetve mennyi a hordóban lévő maximális és a minimális mennyiségű folyadék?
- g) Vázoljuk fel az $Q(t)$ függvény grafikonját a megfigyelés teljes időintervallumában!

megoldás:

- a) Mivel

$$Q(0) = 2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 + 60 \cdot 0 = 0,$$

ezért a megfigyelés kezdetén a hordó üres volt. A megfigyelés végén

$$Q(6) = 2 \cdot 6^3 - 21 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6 = 36$$

liter folyadék volt a hordóban.

- b) A megfigyelés után 1 nappal

$$Q(1) = 2 \cdot 1^3 - 21 \cdot 1^2 + 60 \cdot 1 = 2 - 21 + 60 = 41$$

liter folyadék volt a hordóban.

- c) A változási gyorsaság az idő függvényében

$$Q'(t) = 6t^2 - 42t + 60.$$

- d) A folyadék szintjének változási gyorsasága a folyamat kezdete után 1 nappal

$$Q'(1) = 6 \cdot 1^2 - 42 \cdot 1 + 60 = 6 - 42 + 60 = 24,$$

illetve 2 nappal

$$Q'(2) = 6 \cdot 2^2 - 42 \cdot 2 + 60 = 24 - 84 + 60 = 0.$$

- e) Megkeressük a derivált függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk a

$$6t^2 - 42t + 60 = 0$$

egyenletet, aminek mindkét oldalát 6-al oszthatjuk, így

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

egyenlethez jutunk. A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

amiből az adódik, hogy $t = 2$, illetve $t = 5$. Az első derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

	$t < 2$	$t = 2$	$2 < t < 5$	$t = 5$	$x > 5$
$Q'(t)$	+	0	−	0	+
$Q(t)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

A megfigyelés kezdetétől 2 napon keresztül növekedett a hordóban lévő folyadék mennyisége, majd a következő 3 napban csökkent, ezt követően a megfigyelés végig ismét növekedett a folyadék szintje.

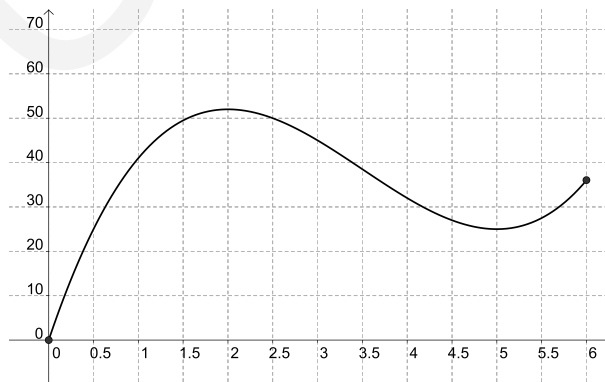
- f) Az előző táblázatban láthatjuk, hogy a stacionárius helyek $t = 2$, illetve $t = 5$. Kiszámoljuk ezeken a helyeken a függvény értékeket

$$Q(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 = 52$$

$$Q(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 = 25.$$

Figyelembe véve, hogy a megfigyelés kezdetén 0, a megfigyelés végén 36 liter folyadék volt a hordóban azt kaptuk, hogy a legkevesebb folyadék a megfigyelés kezdetén volt (ekkor üres volt a hordó), a legtöbb folyadék (52 liter) a megfigyelés utáni 2. nap volt a hordóban.

- g) A $Q(t)$ függvény grafikonja:



14.12. Feladat. Tegyük fel, hogy az x és az y közötti függvény kapcsolat lineáris, azaz $y = m \cdot x$. Négy mérést végzünk, a mérési eredmények az alábbiak:

$$\begin{aligned} A(x_1; y_1) &= (1; 3) & B(x_2; y_2) &= (2; 6) \\ C(x_3; y_3) &= (3; 12) & D(x_4; y_4) &= (4; 14). \end{aligned}$$

Határozzuk meg az m értékét úgy, hogy az eltérések négyzetösszege a lehető legkisebb legyen, azaz keressük meg, hogy milyen m valós szám esetén lesz a

$$H(m) = \sum_{k=1}^4 (y_k - m \cdot x_k)^2$$

függvény értéke minimális.

megoldás:

Behelyettesítve az adatokat a H függvény:

$$H(m) = (3 - m)^2 + (6 - 2m)^2 + (12 - 3m)^2 + (14 - 4m)^2.$$

A H függvény deriváltja

$$\begin{aligned} H'(m) &= 2 \cdot (3 - m) \cdot (-1) + 2 \cdot (6 - 2m) \cdot (-2) + \\ &\quad + 2 \cdot (12 - 3m) \cdot (-3) + 2 \cdot (14 - 4m) \cdot (-4). \end{aligned}$$

Ha elvégezzük az összevonást, akkor azt kapjuk, hogy

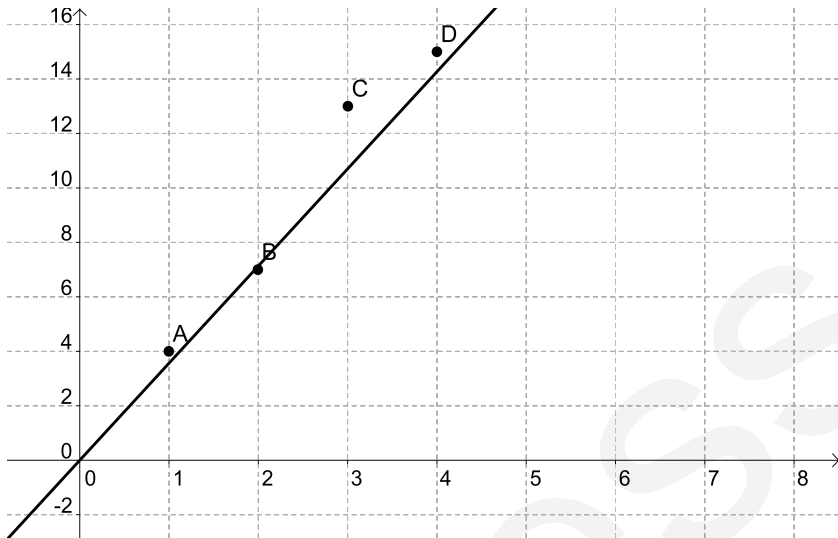
$$H'(m) = 60m - 214.$$

Ennek a zérushelye

$$60m - 214 = 0 \quad \Rightarrow \quad 60m = 214 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{214}{60} = \frac{107}{30},$$

így a keresett ismeretlen paraméter $m = \frac{107}{30}$, az egyenes egyenlete

$$y = \frac{107}{30} \cdot x.$$



14.13. **Feladat.** Az f fókusz távolságú lencsétől t távolságra lévő tárgy k képtávolsága kielégíti az

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

egyenletet. Ha f adott, akkor mennyi a képtávolság és a tárgytávolság összegének minimuma?

megoldás:

Az

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$t \cdot k = f \cdot k + f \cdot t.$$

A kapott összefüggésből fejezzük ki t -t:

$$t \cdot k - f \cdot t = f \cdot k \Rightarrow t \cdot (k - f) = f \cdot k \Rightarrow t = \frac{f \cdot k}{k - f}.$$

A $t + k$ érték minimumát keressük. Ehhez felhasználva az előbb kapott eredményt azt kapjuk, hogy

$$t + k = \frac{f \cdot k}{k - f} + k.$$

Ne feledkezzünk meg arról, hogy f értékét ismertnek tekintjük, így egy k -tól függő függvényt kaptunk. Vezessük be az

$$a(k) = \frac{f \cdot k}{k - f} + k$$

jelölést. Az a függvény deriváltja

$$\begin{aligned} a'(k) &= \frac{f \cdot (k - f) - f \cdot k}{(k - f)^2} + 1 = \frac{f \cdot k - f^2 - f \cdot k + (k - f)^2}{(k - f)^2} = \\ &= \frac{-f^2 + k^2 - 2 \cdot k \cdot f + f^2}{(k - f)^2} = \frac{k^2 - 2 \cdot k \cdot f}{(k - f)^2}. \end{aligned}$$

Az $a'(k)$ zérushelye:

$$\frac{k^2 - 2 \cdot k \cdot f}{(k - f)^2} = 0 \Rightarrow k^2 - 2 \cdot k \cdot f = 0 \Rightarrow k \cdot (k - 2f) = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy $k = 0$ vagy $k = 2f$. Az $a(k)$ függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} a''(k) &= \frac{(2k - 2f) \cdot (k - f)^2 - (k^2 - 2kf) \cdot 2 \cdot (k - f)}{(k - f)^4} = \\ &= \frac{2k^2 - 2kf - 2kf + 2f^2 - 2k^2 + 4kf}{(k - f)^3} = \frac{2f^2}{(k - f)^3}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$a''(k) = \frac{2f^2}{f^3} = \frac{2}{f} > 0,$$

így $a(k)$ -nak valóban minimuma van $2f$ -ben. Ekkor a tárgy- és képtávolság összegének minimuma

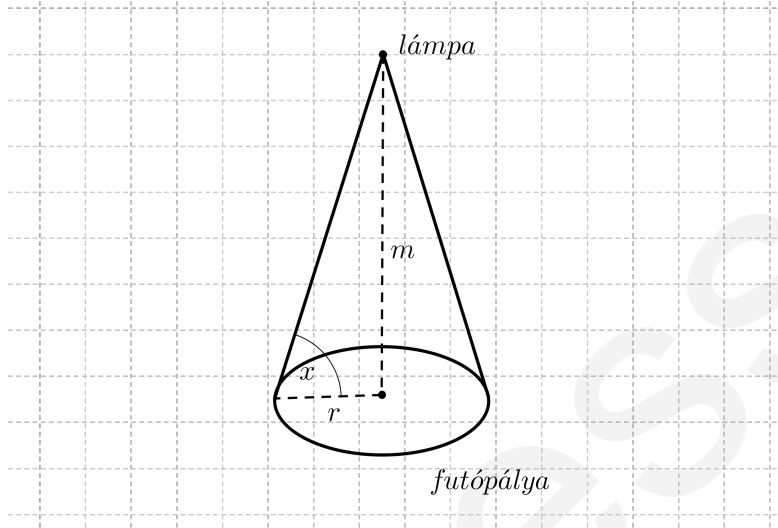
$$t + k = \frac{f \cdot k}{k - f} + k = \frac{2f^2}{f} + 2f = 4f,$$

azaz a keresett távolság a fókusz-távolság négyszerese.

14.14. Feladat. [2] Milyen magasan kell elhelyezni valamely kör alakú futópálya közepén a lámpát, ha azt akarjuk, hogy a futópálya megvilágítása a lehető legnagyobb legyen? A megvilágítás erőssége tetszőleges P pontban egyenesen arányos a beeső fénysugár és a pálya síkja hajlásszögének szinuszával és fordítottan arányos a fényforrás és a P pont távolságának négyzetével.

megoldás:

Jelöljük x -el a beeső fénysugárnak és a pálya síkjának hajlásszögét.



A keresett magasság

$$m = r \cdot \operatorname{tg} x.$$

A megvilágítás erőssége a P pontban arányos a

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{h^2} &= \frac{\sin x}{\left(\frac{r}{\cos x}\right)^2} = \frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{r^2} = \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot (\sin x \cdot (1 - \sin^2 x)) = \frac{1}{r^2} \cdot (\sin x - \sin^3 x) \end{aligned}$$

értékkel. Így tehát akkor a legerősebb a világítás, ha az

$$f: \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x - \sin^3 x$$

függvény maximális értéket vesz fel. Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = \cos x - 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x = \cos x \cdot (1 - 3 \sin^2 x).$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Azonban $\cos x \neq 0$, ugyanis ellenkező esetben $x = 90^\circ$, ami nem lehetséges. Így tehát

$$1 - 3 \sin^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

amiből $\sin x \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ugyanis ellenkező esetben x tompaszög lenne), így

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

kell, hogy teljesüljön, amiből azt kapjuk, hogy az egyetlen, az értelmezési tartományba eső gyök $x \approx 0,1959\pi$. Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = -\sin x \cdot (1 - 3\sin^2 x) + \cos x \cdot (-6 \cdot \sin x \cdot \cos x).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$f''(0,1959\pi) < 0,$$

így f -nek valóban maximuma van. Ekkor

$$\begin{aligned} m &= r \cdot \operatorname{tg} x = r \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = r \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \\ &= r \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

15. A differenciálszámítás gazdasági alkalmazásai

15.1. Feladat. Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől. Az összefüggést az $A = 0,03v^3$ képlet adja meg, ahol v a sebesség km/h-ban mérve. Az egyéb kiadások óránként 480 forintot tesznek ki. Milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen?

megoldás:

Ha a hajó sebessége v km/h, akkor 1 óra alatt v kilométert tesz meg és ekkor a költség $A + 480$ forint. Ekkor 1 kilométer út költsége

$$C(v) = \frac{A + 480}{v} = \frac{0,03v^3 + 480}{v}.$$

A függvény deriváltja

$$C'(v) = \frac{0,09v^3 - (0,03v^3 + 480)}{v^2} = \frac{0,06v^3 - 480}{v^2} = 0,06v - \frac{480}{v^2},$$

ami pontosan akkor zérus, ha $0,06v^3 - 480 = 0$, azaz $v^3 = 8000$, amiből $v = 20$ adódik. Mivel

$$C''(v) = 0,06 + \frac{960}{v^3} \quad \Rightarrow \quad C''(20) > 0,$$

ezért C -nek lokális minimum helye van a $v = 20$ helyen, ami egyben globális minimum hely is.

15.2. Feladat. Egy horgászbot gyártásának költsége jól modellezhető a

$$C(x) = x^3 - 10x^2 + 20x \quad (0 \leq x \leq 10)$$

függvénnyel, ahol x a legyártott horgászbotok darabszámát jelenti ezer darabban. Határozzuk meg, hogy hány darab horgászbotot gyártsunk ahhoz, hogy az átlagköltség a lehető legkisebb legyen!

megoldás:

Az átlagköltség

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = x^2 - 10x + 20.$$

Ennek a deriváltja

$$A'(x) = 2x - 10,$$

amely pontosan akkor zérus, ha $x = 5$. Mivel az átlagköltség függvény grafikonja egy „felfelé nyíló” parabola, ezért a kapott stacionárius hely globális minimum hely is egyben, tehát 5 ezer darab horgászbót esetén lesz minimális az átlagköltség.

15.3. Feladat. Egy termék eladásából származó bevétel a darabszám függvényében (a darabszámot ezer darabban értjük) $B(x) = 4\sqrt{x}$. A termék előállításához tartozó költségfüggvény $C(x) = 2x^2$. Hány darabot gyártunk a termékből, ha azt szeretnénk, hogy a nyereség a lehető legnagyobb legyen? Adjuk meg a maximális profitot is! (Az árat mindenhol ezer euróban értjük.)

megoldás:

A nyereségfüggvény

$$P(x) = B(x) - C(x) = 4\sqrt{x} - 2x^2.$$

A függvénynek ott lehet szélsőérték helye, ahol a deriváltja zérus. A $P(x)$ függvény deriváltja

$$P'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 4x = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4x.$$

Meghatározzuk a $P'(x)$ függvény zérushelyét:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = 4x \cdot \sqrt{x}.$$

Emeljük négyzetre a kapott egyenlet mindkét oldalát, majd fejezzük ki az x -et. Ekkor

$$4 = 16x^3 \quad \Rightarrow \quad x \approx 0,63.$$

Mivel

$$P''(x) = -x^{-\frac{3}{2}} - 4 < 0$$

és $x \approx 0,63$ az egyetlen stacionárius hely, ezért egyben globális maximum hely is. Azt kaptuk tehát, hogy 630 terméket kell gyártanunk ahhoz, hogy a lehető legnagyobb profitot érjük el. Ekkor

$$P(0,63) \approx 2,38,$$

tehát 2.380 euró lesz a (maximális) nyereségünk.

15.4. Feladat. [28] Egy termék bevételi függvénye $B(x) = 9x$, költségfüggvénye $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, ahol x -et ezer darabban értjük. Van-e olyan termelési szint, amely maximalizálja a nyereséget?

megoldás:

Vezessük be a nyereségfüggvényt:

$$P(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x.$$

A $P(x)$ függvény deriváltja

$$P'(x) = -3x^2 + 12x - 6.$$

Ennek zérushelye, azaz a $-3x^2 + 12x - 6 = 0$ egyenlet megoldása:

$$x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,586 \quad x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,414.$$

A P függvény második deriváltja

$$P''(x) = -6x + 12,$$

így egyrészt

$$P(2 - \sqrt{2}) = -6 \cdot (2 - \sqrt{2}) + 12 > 0,$$

másrészt

$$P(2 + \sqrt{2}) = -6 \cdot (2 + \sqrt{2}) + 12 < 0,$$

így a $2 - \sqrt{2}$ helyen minimum, a $2 + \sqrt{2}$ helyen maximum van. Azt kaptuk tehát, hogy 3.414 darab termék esetén lesz maximális a nyereség.

15.5. Feladat. Egy tűzfal melletti téglalap alakú kertet körbe szeretnénk keríteni. A tűzfallal párhuzamos oldal kerítési költsége méterenként 6.000 forint, míg a tűzfalra merőleges oldalak kerítési költsége méterenként 3.000. A kert területet $100 \text{ [m}^2\text{]}$. Határozzuk meg az oldalakat úgy, hogy a kerítési költség a lehető legkisebb legyen!

megoldás:

Jelöljük a tűzfallal párhuzamos oldal hosszát a -val, a tűzfalra merőleges oldal hosszát b -bel. Ekkor a terület $T = a \cdot b$, amiből azt kapjuk, hogy

$$100 = a \cdot b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{100}{a}.$$

A kerítési költség

$$C(a) = 6a + 6b = 6a + \frac{600}{a}.$$

Ennek a deriváltja

$$C'(a) = 6 - \frac{600}{a^2},$$

aminek a zérushelye

$$6 - \frac{600}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6a^2 = 600 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 10.$$

Mivel $a > 0$, ezért $a = 10$. A C függvény második deriváltja

$$C''(a) = \frac{1.200}{a^2} \quad \Rightarrow \quad C''(10) = 12 > 0,$$

ezért az $a = 10$ helyen valóban minimuma van a C függvénynek. Ekkor

$$b = \frac{100}{10} = 10,$$

továbbá mivel

$$C = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 10 = 120,$$

ezért a minimális költség 120.000 forint.

15.6. Feladat. [6] Valamely termék nyereségfüggvénye

$$P(x) = -4x^2 + 250x - 270,$$

költségfüggvénye

$$C(x) = 70x + 2,$$

ahol x az előállított termékek számát jelenti. Határozzuk meg, hogy x mely értéke esetén lesz a bevétel maximális?

megoldás:

Jelöljük a bevételi függvényt $B(x)$ -el. Ekkor

$$P(x) = B(x) - C(x) \quad \Rightarrow \quad B(x) = P(x) + C(x).$$

Behelyettesítve a megfelelő függvényeket azt kapjuk, hogy

$$B(x) = -4x^2 + 320x - 268.$$

A $B(x)$ függvény deriváltja

$$B'(x) = -8x + 320,$$

aminek az egyetlen zérushelye $x = 40$. Mivel $B''(x) = -8 < 0$, ezért az $x = 40$ helyen valóban maximuma van a $B(x)$ függvénynek. Azt kaptuk tehát,

hogy 40 darab termék esetén lesz maximális a bevétel. Ekkor a maximális bevétel

$$B(40) = -4 \cdot 40^2 + 320 \cdot 40 - 268 = 6.132.$$

15.7. Feladat. [6] Egy termék árbevételi függvénye

$$B(x) = x \cdot \sqrt{6.900 - 0,2x},$$

ahol x a gyártott termék darabszámát jelenti, a bevételt pedig forintban értjük. Állapítsuk meg, hogy milyen x érték esetén lesz a bevételi függvény értéke maximális!

megoldás:

A $B(x)$ függvény deriváltja

$$\begin{aligned} B'(x) &= \sqrt{6.900 - 0,2x} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (6.900 - 0,2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-0,2) = \\ &= \sqrt{6.900 - 0,2x} - \frac{0,1x}{\sqrt{6.900 - 0,2x}}. \end{aligned}$$

A $B'(x)$ függvény zérushelyét kell megkeresnünk, azaz meg kell oldanunk a

$$\sqrt{6.900 - 0,2x} - \frac{0,1x}{\sqrt{6.900 - 0,2x}} = 0$$

egyenletet. Ha mindkét oldalt beszorozzuk a nevezővel, akkor azt kapjuk, hogy

$$6.900 - 0,3x = 0,$$

így $x = 23.000$. Az első derivált előjeleit táblázatban foglaljuk össze:

	$0 < x < 23.000$	$x = 23.000$	$x > 23.000$
$B'(x)$	+	0	–
$B(x)$	↗	lok. max.	↘

Azonban $x = 23.000$ az egyetlen szélsőérték, így az globális maximum hely is egyben. Azt kaptuk tehát, hogy 23.000 darab terméket kell gyártanunk ahhoz, hogy a bevétel maximális legyen. Ekkor a maximális bevétel

$$B(23.000) = \sqrt{6.900 - 0,2 \cdot 23.000} \approx 1.102.041 \text{ Ft.}$$

15.8. Feladat. [6] Egy termék árának alakulását a kínált x mennyiség függvényében a

$$p(x) = 60 - 0,015x$$

függvény írja le. Hány darab terméket gyártsunk ahhoz, hogy a bevételi függvény értéke maximális legyen? A bevételt forintban értjük.

megoldás:

A bevételi függvény

$$B(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (60 - 0,015x) = 60x - 0,015x^2.$$

A $B(x)$ függvény deriváltja

$$B'(x) = 60 - 0,03x.$$

A $B'(x)$ függvény zérushelye

$$60 - 0,03x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.000.$$

Mivel $B''(x) = -0,03 < 0$, így az $x = 2.000$ helyen valóban maximuma van a $B(x)$ függvénynek. Azt kaptuk tehát, hogy 2.000 darab termék esetén lesz maximális a bevétel. Ekkor a maximális bevétel

$$B(x) = 60 \cdot 2.000 - 0,015 \cdot 2.000^2 = 60.000 \text{ Ft.}$$

15.9. Feladat. [11] Egy cég nyereségének függvénye

$$P(x) = -2x^3 + 216x^2 - 4.320x - 20.000$$

dollárban, ahol x a legyártott és értékesített termékek darabszámát jelenti. Adjuk meg, hogy milyen x érték esetén lesz maximális a bevétel!

megoldás:

A P függvény deriváltja

$$P'(x) = -6x^2 + 432x - 4.320.$$

A $P'(x)$ függvény zérushelyének megkeresése az első feladatunk:

$$-6x^2 + 432x - 4.320 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 72x + 720 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{72 \pm \sqrt{72^2 - 2.880}}{2} = \frac{72 \pm 48}{2},$$

így $x_1 = 12$, illetve $x_2 = 60$. A $P(x)$ függvény második deriváltja

$$P''(x) = -12x + 432,$$

így egyrészt $P''(12) > 0$, másrészt $P''(60) < 0$, így P -nek az $x = 60$ helyen van maximuma. Azt kaptuk tehát, hogy 60 darab termék értékesítése esetén lesz maximális a nyereség. Ekkor a maximális nyereség

$$P(60) = -2 \cdot 60^3 + 216 \cdot 60^2 - 4.320 \cdot 60 - 20.000 = 66.400.$$

15.10. Feladat. [11] Egy új illatszer esetén a szakemberek a

$$Q(p) = \frac{10p}{16 + p^2}$$

keresleti függvényt valószínűsítik, ahol p az eladási árat jelenti euróban, $Q(p)$ pedig az eladott mennyiséget ezer flakonban. Adjuk meg a keresleti függvény monotonitását! Határozzuk meg, hogy hány euró esetén lesz maximális a kereslet? Mekkora ez a maximális kereslet?

megoldás:

A $Q(p)$ függvény deriváltja

$$Q'(p) = \frac{10 \cdot (16 + p^2) - 10p \cdot 2p}{(16 + p^2)^2} = \frac{160 - 10p^2}{(16 + p^2)^2}.$$

A $Q'(p)$ függvény pontosan akkor zérus, ha $160 - 10p^2 = 0$. Figyelembe véve, hogy $p > 0$ kell, hogy teljesüljön azt kapjuk, hogy $p = 4$. Az első derivált előjelét táblázatba foglalva azt kapjuk, hogy

	$0 < p < 4$	$p = 4$	$p > 4$
$Q'(p)$	+	0	-
$Q(p)$	↗	lok. max.	↘

Az értelmezési tartományban $p = 4$ az egyetlen lokális szélsőérték és mivel $Q(0) = 0$, így $p = 4$ globális maximum hely is egyben. Azt kaptuk tehát, hogy $p = 4$ eurós ár esetén lesz maximális a kereslet, és ekkor az elérhető legnagyobb kereslet

$$Q(4) = \frac{10 \cdot 4}{16 + 4^2} = 1,25,$$

azaz 1.250 flakon.

15.11. Feladat. [11] Egy mosógépeket gyártó cég termelésének összköltsége dollárban kifejezve

$$C(d) = d^2 + 750d + 2.500,$$

ahol d a napi termelést jelenti. Hány darab termék esetén lesz a mosógépenkénti átlagköltség minimális?

megoldás:

Az átlagköltség függvény

$$A(d) = \frac{C(d)}{d} = d + 750 + \frac{2.500}{d}.$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát. Az $A(d)$ függvény deriváltja

$$A'(d) = 1 - \frac{2500}{d^2}.$$

Ennek a zérushelye $d > 0$ miatt $d = 50$. Az $A'(d)$ előjeleit táblázatban foglaljuk:

	$0 < d < 50$	$d = 50$	$d > 50$
$A'(d)$	–	0	+
$A(d)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Azt kaptuk tehát, hogy $d = 50$ darab termék értékesítése esetén lesz a legkisebb az átlagköltség.

15.12. Feladat. Valamely termék iránti keresletet az $f(x) = e^{1-0,02x}$ függvény ad meg, ahol x a termék árát jelenti (euróban), $f(x)$ a hozzá tartozó keresletet jelenti (darabban). Milyen ár esetén lesz maximális a bevétel?

megoldás:

A bevételi függvény

$$B(x) = x \cdot f(x) = x \cdot e^{1-0,02x}.$$

A $B(x)$ függvény deriváltja

$$B'(x) = e^{1-0,02x} + x \cdot e^{1-0,02x} \cdot (-0,02) = e^{1-0,02x} \cdot (1 - 0,02x),$$

ami pontosan akkor zérus, ha $x = 50$. A $B'(x)$ előjeleit táblázatban foglaljuk:

	$0 < x < 50$	$x = 50$	$x > 50$
$B'(x)$	+	0	–
$B(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Azt kaptuk tehát, hogy 50 eurós egységár esetén lesz a bevétel a lehető legnagyobb.

16. Differenciálszámítás alkalmazása a biológiában és a kémiában

16.1. Feladat. [28] Az 1830-as évek végén fedezte fel Jean Poiseuille francia fiziológus azt a képletet, amelyet ma is használunk, ha meg akarjuk tudni, mennyire kell kitágítanunk egy részlegesen elzáródott artériát ahhoz, hogy a normális vérátfolyást biztosítani tudjuk. Eszerint egy vékony csövön (adott nyomás esetén, egységnyi idő alatt) átáramló V térfogatmennyiség a cső r sugara negyedik hatványának konstansszorosával egyenlő:

$$V(r(t)) = k \cdot r^4(t).$$

Állapítsuk meg, hogy hogyan hat V -re az r 10%-os növekedése?

megoldás:

A V függvény deriváltja

$$\left(V(r(t))\right)' = 4k \cdot r^3(t) \cdot r'(t),$$

így a V relatív változása

$$\frac{V'(r(t))}{V(r(t))} = \frac{4k \cdot r^3(t) \cdot r'(t)}{k \cdot r^4(t)} = 4 \cdot \frac{r'(t)}{r(t)},$$

így azt kaptuk, hogy V relatív változása az r relatív változásának 4-szerese. Tehát az r 10%-os növekedése az átáramló vér mennyiségét 40%-kal növeli.

16.2. Feladat. Epidemiológusok azt tapasztalták, hogy egy bizonyos városban egy bizonyos fertőző betegség esetén t nap elteltével ($0 \leq t \leq 20$) megközelítőleg a lakosság

$$p(t) = \frac{20t^3 - t^4}{1.000}$$

százaléka fertőződik meg. Határozzuk meg, hogy a betegség, a megjelenést követően hány nappal „tetőzik”, azaz hány nap elteltével számíthatunk a legtöbb megbetegedett személyre? Ekkor a város hány százaléka lesz fertőzött?

megoldás:

A p függvény deriváltja

$$p'(t) = \frac{1}{1.000} \cdot (60t^2 - 4t^3).$$

Ennek a zérushelye:

$$\frac{1}{1.000} \cdot (60t^2 - 4t^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1.000} \cdot (120t - 12t^2) = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy $t = 0$ vagy $120 - 12t = 0$. Ezen utóbbi egyenletből $t = 10$ adódik. A p függvény második deriváltja

$$p''(t) = \frac{1}{1.000} \cdot (120 - 24t).$$

Ezt felhasználva

$$p''(0) = \frac{3}{25} > 0 \quad \text{és} \quad p''(10) = -\frac{3}{25} < 0,$$

így p -nek a $t = 10$ helyen lokális maximuma helye van. Másrészt, mivel a függvényérték az értelmezési tartomány határpontjaiban

$$p(0) = 0 \quad \text{és} \quad p(20) = 0,$$

ezért a $p = 10$ helyen globális maximum helye van a p függvénynek. Azt kaptuk tehát, hogy 10 nap elteltével számíthatunk a legtöbb megbetegedésre. Ekkor

$$p(10) = \frac{20 \cdot 10^3 - 10^4}{1000} = 10,$$

így 10 nap elteltével várhatóan a város lakóinak 10 %-a lesz beteg.

16.3. Feladat. Egy szennyezett tó vizét antibakteriális szerekkel tisztítják. Azt tapasztalták, hogy t nap elteltével a baktériumok száma milliliterenként

$$N(t) = 20 \cdot \left(\frac{t}{12} - \ln \left(\frac{t}{12} \right) \right) \quad (1 \leq t \leq 15).$$

A megfigyelés időtartama alatt

- a) mikor lesz a legkevesebb baktérium a tóban?
- b) mennyi lesz a legkevesebb baktérium (egy milliliter vízben)?
- c) mikor lesz a legtöbb baktérium?
- d) mennyi lesz a legtöbb baktérium (egy milliliter vízben)?

megoldás: Az N függvény deriváltja

$$N'(t) = 20 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{12}{t} \cdot \frac{1}{12} \right) = 20 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{t} \right).$$

Az N' függvény zérushelye

$$20 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 12.$$

Ekkor

$$N(12) = 20 \cdot \left(\frac{12}{12} - \ln \left(\frac{12}{12} \right) \right) \approx 20.$$

Másrészt a függvényérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$N(1) = 20 \cdot \left(\frac{1}{12} - \ln \left(\frac{1}{12} \right) \right) \approx 81,37,$$

valamint

$$N(15) = 20 \cdot \left(\frac{15}{12} - \ln \left(\frac{15}{12} \right) \right) \approx 20,54,$$

Azt kaptuk tehát, hogy

- a) a legkevesebb baktérium 12 nap elteltével lesz;
- b) ekkor 20 baktérium lesz a vízben milliliterenként;
- c) a legtöbb baktérium 1 nappal a megfigyelés kezdete után volt a vízben;
- d) ekkor 81 baktérium volt a vízben milliliterenként.

16.4. Feladat. [28] Egy magnéziumhidroxid telített $3,6 \cdot 10^{-4}$ mólós sósav oldat $[OH^-]$ hidroxid ionkoncentrációjának meghatározásakor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{3,6 \cdot 10^{-11}}{[OH^-]^2} = [OH^-] + 3,6 \cdot 10^{-4}.$$

Határozzuk meg $[OH^-]$ közelítő értékét Newton–Raphson módszerrel!

megoldás:

Vezessük be az $x = 10^4 \cdot [OH^-]$ jelölést. Ekkor a megadott egyenlet átrendezés után

$$x^3 + 3,6x^2 - 36,4 = 0$$

alakú lesz. Tekintsük az

$$f(x) = x^3 + 3,6x^2 - 36,4$$

függvényt! Ennek a deriváltja

$$f'(x) = 3x^2 + 7,2x,$$

így a Newton–Raphson módszerben szereplő iterációs sorozat az alábbi lesz:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 + 3,6x_k^2 - 36,4}{3x_k^2 + 7,2x_k} \quad (k = 1, 2).$$

Tekintsük az $x_0 = 2$ kezdeti értéket. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 + 3,6x_0^2 - 36,4}{3x_0^2 + 7,2x_0} = \\ &= 2 - \frac{2^3 + 3,6 \cdot 2^2 - 36,4}{3 \cdot 2^2 + 7,2 \cdot 2} \approx 2,5303. \end{aligned}$$

Következő lépésben

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^3 + 3,6x_1^2 - 36,4}{3x_1^2 + 7,2x_1} = \\ &= 2 - \frac{2,5303^3 + 3,6 \cdot 2,5303^2 - 36,4}{3 \cdot 2,5303^2 + 7,2 \cdot 2,5303} \approx 2,4541. \end{aligned}$$

Mivel

$$x = 10^4 \cdot [\text{OH}^-] \Rightarrow x \cdot 10^{-4} = [\text{OH}^-],$$

ezért $[\text{OH}^-] \approx 0,00024541$.

16.5. Feladat. Egy szervezetünkbe juttatott filmtabletta esetén a véráramban lévő koncentráció t órával a bevétel után

$$C(t) = 247,3 \cdot e^{-0,1t} - 172,8 \cdot e^{-2,8t} \left[\frac{\mu\text{g}}{\text{mL}} \right].$$

Állapítsuk meg, hogy a bevételt követően, mennyi idő múlva lesz a legnagyobb koncentrációban jelen a szervezetünkben a gyógyszer! Mennyi a maximális koncentráció? Mikor lesz a legkisebb koncentrációban a szervezetünkben a gyógyszer és mennyi ez a koncentráció? Adjuk meg, hogy 12 órával a bevételt követően, milyen koncentrációban lesz jelen a szervezetünkben a gyógyszer?

megoldás:

A C függvény deriváltja

$$\begin{aligned} C'(t) &= -247,3 \cdot e^{-0,1t} \cdot (-0,1) - 172,8 \cdot e^{-2,8t} \cdot (-2,8) = \\ &= -24,73 \cdot e^{-0,1t} + 483,83 \cdot e^{-2,8t} = \\ &= e^{-0,1t} \cdot (-24,73 + 483,83 \cdot e^{-2,7t}). \end{aligned}$$

Mivel $e^{-0,1t}$ sehol sem zérus, ezért a derivált függvény zérushelyét a

$$-24,73 + 483,83 \cdot e^{-2,7t} = 0$$

egyenlet megoldása adja. Első lépésben rendezzük az egyenletet:

$$-24,73 + 483,83 \cdot e^{-2,7t} = 0$$

$$483,83 \cdot e^{-2,7t} = 24,73$$

$$e^{-2,7t} = \frac{24,73}{483,83}$$

Vegyük most mindkét oldal természetes alapú logaritmusát, majd fejezzük ki a t ismeretlent:

$$-2,7t = \ln \left(\frac{24,73}{483,83} \right)$$

$$t = \frac{\ln \left(\frac{24,73}{483,83} \right)}{-2,7} \approx 1,1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a bevételt követően 1,1 óra múlva lesz a legnagyobb koncentrációban jelen a gyógyszer, ekkor a maximális koncentráció

$$C(1,1) = 247,3 \cdot e^{-0,1 \cdot 1,1} - 172,8 \cdot e^{-2,8 \cdot 1,1} \approx 2,14 \left[\frac{\mu\text{g}}{\text{mL}} \right].$$

A gyógyszer bevételekor lesz minimális a koncentrációja

$$C(0) = 247,3 \cdot e^{-0,1 \cdot 0} - 172,8 \cdot e^{-2,8 \cdot 0} = 74,5 \left[\frac{\mu\text{g}}{\text{mL}} \right].$$

A gyógyszer bevétele után 12 órával a koncentráció

$$C(12) = 247,3 \cdot e^{-0,1 \cdot 12} - 172,8 \cdot e^{-2,8 \cdot 12} \approx 74,5 \left[\frac{\mu\text{g}}{\text{mL}} \right],$$

így ekkor kell bevennünk az újabb adagot.

16.6. Feladat. Egy bizonyos fájdalomcsillapító esetén a

$$C(t) = \frac{t^2}{2t^3 + 1} \quad (0 \leq t \leq 4)$$

függvénnyel jól modellezhető a véráramban lévő koncentráció, ahol t az injekció beadásától eltelt idő órában mérve, a $C(t)$ koncentrációt pedig $[\text{mg/l}]$ -ben értjük. Határozzuk meg azt az időpillanatot, amikor a legnagyobb koncentrációban van jelen a nyugtatószer a véráramban!

megoldás:

A C függvény deriváltja

$$C'(t) = \frac{2t \cdot (2t^3 + 1) - t^2 \cdot 6t^2}{(2t^3 + 3)^2} = \frac{-2t^4 + 2t}{(2t^3 + 3)^2}.$$

A derivált függvény pontosan akkor zérus, ha

$$-2t^4 + 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t \cdot (-t^3 + 1) = 0,$$

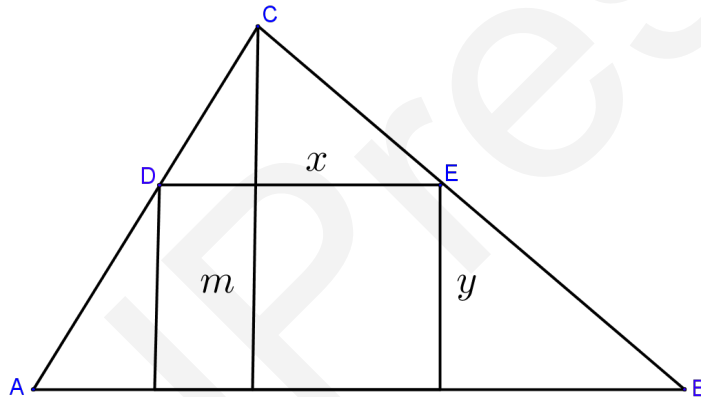
ami csak akkor nulla, ha $t = 0$ vagy $t = 1$. Mivel $C(0) = 0$, $C(1) = \frac{1}{3}$ és $C(4) = \frac{16}{129}$, ezért a függvénynek a $t = 1$ helyen van maximuma, azaz a beadást követően 1 óra múlva lesz a legnagyobb koncentrációban jelen a szérum.

17. Válogatott emelt szintű érettségi feladatok

17.1. Feladat. Az ABC háromszög oldalai $AB = 42$, $BC = 40$ és $CA = 26$. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög AB oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög CA , illetve BC oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkora ennek a téglalapnak az oldalai?

megoldás:

Legyen $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.



Elsőként a háromszög területét kiszámoljuk Héron-képlettel. Ehhez a kerület:

$$K = 108 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{K}{2} = 54.$$

Ezt felhasználva a háromszög területe

$$T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} = \sqrt{54 \cdot 14 \cdot 28 \cdot 12} = 504.$$

A háromszög területe $T = \frac{c \cdot m}{2}$ alakban is felírható, amiből az adatok behelyettesítésével $1008 = 42 \cdot m$ következik, azaz $m = 24$. Jelöljük a háromszögbe írt legnagyobb területű téglalap vízszintes oldalának hosszát x -el, függőleges

oldalának hosszát y -al. Az ABC háromszög hasonló a DEC háromszöghöz, hiszen a szögei megegyeznek, így felírható a

$$\frac{c}{m} = \frac{x}{m-y} \Rightarrow \frac{42}{24} = \frac{x}{24-y}.$$

összefüggés, amit átrendezve $1,75 \cdot (24-y) = x$ adódik, azaz $x = 42 - 1,75y$. A téglalap területe

$$T(y) = x \cdot y = (42 - 1,75y) \cdot y = 42y - 1,75y^2.$$

A függvény értelmezési tartománya: $y \in [0; 21]$. A T függvény deriváltja

$$T'(y) = 42 - 3,5y,$$

aminek zérushelye

$$42 - 3,5y = 0 \Rightarrow 42 = 3,5y \Rightarrow y = 12.$$

Itt valóban globális maximum hely van, hiszen az intervallum végpontjaiban 0 a függvényérték. Az y értékét már ismerjük, így

$$x = 42 - 1,75 \cdot 12 = 21.$$

Tehát a legnagyobb területű téglalap oldalai 12 és 24 egység, területe

$$T = 12 \cdot 24 = 288.$$

17.2. Feladat. Tekintsük az $f: [-2, 5; 2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ függvényt.

- Határozzuk meg az f zérushelyeit!
- Vizsgáljuk meg az f függvényt monotonitás szempontjából!
- Adjuk meg az f függvény legkisebb és legnagyobb értékét!

megoldás:

- Az $x^3 - 3x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve az x szorzótényezőt

$$x \cdot (x^2 - 3) = 0$$

adódik. Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így az előbbi egyenletből azt kapjuk, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$. Valamennyi gyök benne van az f függvény értelmezési tartományában.

- b) Az f függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ennek zérushelyei: $x = \pm 1$. A derivált előjeleit tartalmazó táblázat:

	$-2, 5 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2, 5$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

- c) Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi az extrémumait: az intervallum határpontjaiban vagy ott, ahol a deriváltja eltűnik. Ezek az értékek: $-2, 5$; -1 ; 1 ; $2, 5$. Ezen helyeken a függvényértékek: $f(-2, 5) = -8, 125$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(2, 5) = 8, 125$. Tehát a legkisebb érték: $-8, 125$, a legnagyobb érték $8, 125$.

17.3. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = -x^2 + 10x - 22 \quad \text{és a} \quad g(x) = -x + 6$$

függvények közös pontjaiban az f függvény grafikonjához húzható érintő egyenesek egyenletét!

megoldás:

Első lépésben megoldjuk a

$$-x^2 + 10x - 22 = -x + 6$$

egyenletet. Nullára redukálva $x^2 - 11x + 28 = 0$ adódik. Ennek megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 28}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2},$$

így $x_1 = 4$, $x_2 = 7$. Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = -2x + 10.$$

Mivel $f(4) = 2$ és $f'(4) = 2$, ezért az egyik érintő egyenes egyenlete

$$y = 2 + 2 \cdot (x - 4) = 2x - 6.$$

Másrészt $f(7) = -1$ és $f'(7) = -4$, ezért a másik érintő egyenes egyenlete

$$y = -1 - 4 \cdot (x - 7) = -4x + 27.$$

17.4. **Feladat.** Egy arborétumban 1969 óta figyelik a fák természetes növekedését. Úgy tapasztalták, hogy a mandzsu fűzfa magasságát közelítően jól írja le az $m(t) = 12 - \frac{10}{t+1}$ függvény, a hegyi mamutfenyő magasságát pedig jó

közelítéssel a $h(t) = 5 \cdot \sqrt{0,4t + 1} + 0,4$ függvény adja meg. Mindkét formulában t az 1969 óta eltelt időt jelöli években $t \geq 1$, és a magasságot méterben számolják.

- a) Szemléltessük a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását, olyan közös oszlopdiagramon, amely a magasság értékeket az 1970 és 2000 közötti időszakban 10 évenként mutatja! A diagramon tüntessük fel a számított magasságértékeket!
- b) A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot?
- c) Indokoljuk meg, hogy nem lehet olyan fa az arborétumban, amelynek magasságát a $g(t) = t^3 - 16,5t^2 + 72t + 60$, ($t \geq 1$) függvény írja le! A magasságot centiméterben számolják, t az 1985 óta eltelt időt jelöli években.

megoldás:

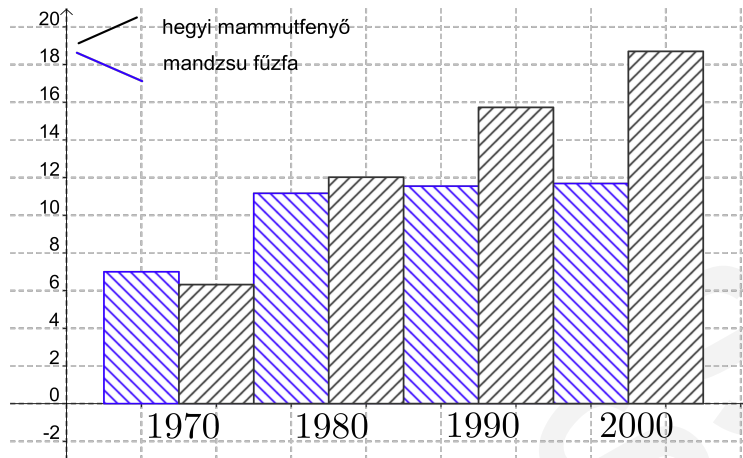
- a) Mivel egyrészt

$$\begin{aligned} m(1) &= 12 - \frac{10}{1+1} = 12 - 5 = 7 \\ m(11) &= 12 - \frac{10}{11+1} = 12 - \frac{5}{6} = \frac{67}{6} \approx 11,17 \\ m(21) &= 12 - \frac{10}{21+1} = 12 - \frac{10}{22} = 12,71 \approx 11,55 \\ m(31) &= 12 - \frac{10}{31+1} = 12 - \frac{10}{32} = 12,6875 \approx 11,6875, \end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned} h(1) &= 5 \cdot \sqrt{0,4 \cdot 1 + 1} + 0,4 \approx 6,32 \\ h(11) &= 5 \cdot \sqrt{0,4 \cdot 11 + 1} + 0,4 \approx 12,02 \\ h(21) &= 5 \cdot \sqrt{0,4 \cdot 21 + 1} + 0,4 \approx 15,73 \\ h(31) &= 5 \cdot \sqrt{0,4 \cdot 31 + 1} + 0,4 \approx 18,7, \end{aligned}$$

ezért az oszlopdiagram:



- b) Keressük azt a t értéket, amelyre $5 \cdot \sqrt{0,4t + 1} + 0,4 = 10,5$. Kivonunk $0,4$ -et mindkét oldalból, majd az egyenletet osztjuk 5 -el, ezután négyzetre emeljük, kivonunk mindkét oldalból 1 -et, végül osztjuk az egyenletet $0,4$ -el:

$$5 \cdot \sqrt{0,4t + 1} + 0,4 = 10,5$$

$$5 \cdot \sqrt{0,4t + 1} = 10,1$$

$$\sqrt{0,4t + 1} = 2,02$$

$$0,4t + 1 = 4,0804$$

$$t = 7,701.$$

Tehát 1977-ben érte el a kívánt magasságot a fenyő.

- c) Mivel $g'(t) = 3t^2 - 33t + 72$, melynek zérushelyei a $t^2 - 11t + 24 = 0$ egyenlet megoldásai. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 24}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2},$$

azaz $t_1 = 3$, illetve $t_2 = 8$ adódik. Az első derivált előjeleit tartalmazó táblázat:

	$0 < t < 3$	$t = 3$	$3 < t < 8$	$t = 8$	$8 < t$
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

Azt kaptuk tehát, hogy 1988 és 1994 között a fa magassága csökkenne, ami lehetetlen, így a fa magasságának növekedését nem jellemezheti a g függvény.

17.5. Feladat. Igazoljuk, hogy az $f:]1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$ függvénynek nincs szélsőértéke!

megoldás:

A hányados függvény és összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1) - (x-1)^2 \cdot (2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{3x^2-3}{(x^2+x+1)^2},$$

ami pontosan akkor zérus, ha $3x^2-3=0$, azaz a stacionárius helyek: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, melyek egyike sem eleme az értelmezési tartománynak, így f -nek nincs szélsőértéke.

17.6. Feladat. Értelmezzük a valós számok halmazán az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ függvényt. (A k paraméter valós számot jelöl.) Számoljuk ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x = 1$ lokális szélsőérték helye az f függvénynek! Állapítsuk meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvénynek lokális maximum helye, vagy lokális minimum helye! Igazoljuk, hogy k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték helye is!

megoldás:

Lokális szélsőérték helye ott lehet a függvénynek, ahol a deriváltja zérus. Mivel

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 9$$

és $x = 1$ lokális szélsőérték hely, ezért $f'(1) = 0$, azaz

$$3 + 2k + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -6.$$

Ekkor a függvény második deriváltja, illetve annak a helyettesítési értéke az $x = 1$ helyen:

$$f''(x) = 6x + 2k = 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -6 < 0,$$

így f -nek $x = 1$ -ben lokális maximum helye van.

A feladat második része annak igazolása, hogy $k = -6$ esetén létezik másik lokális szélsőértéke is az f függvénynek. Mivel $k = -6$, ezért a

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

egyenlet diszkriminánsa

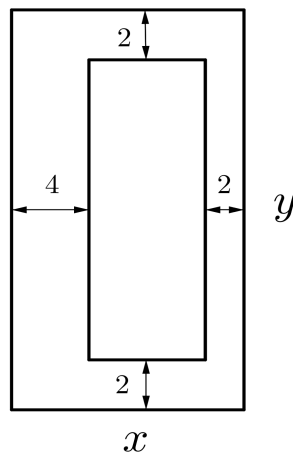
$$D = 144 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 144 - 108 = 36 > 0,$$

így a másodfokú egyenletnek két megoldása van. A másodfokú függvény grafikonjából következően mindkét megoldásnál megváltozik a derivált függvény előjele, így az f függvénynek két lokális szélsőértéke van.

17.7. Feladat. A könyvkiadó szerkesztője egy könyv nyomtatási formáját tervezi. Minden lap alsó, felső és külső szélén kettő centiméteres margót szeretne hagyni, a belső szélén a kötés miatt négy centiméterest. A teljes lap területe 600 [cm]^2 . Mekkorák legyenek a lap méretei, ha a szerkesztő a lehető legnagyobb nyomtatási területet szeretné elérni a lapokon?

megoldás:

Legyen egy lap két szomszédos oldalának hossza x és y .



A teljes lap területe $x \cdot y = 600$, amiből $y = \frac{600}{x}$ következik. A hasznos terület

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 6) \cdot (y - 4) = xy - 4x - 6y + 24 = \\ &= 600 - 4x - \frac{3600}{x} + 24 = 624 - 4x - \frac{3600}{x}. \end{aligned}$$

A függvény értelmezési tartománya: $x \in [6; 150]$. A függvény deriváltja

$$f'(x) = -4 + \frac{3600}{x^2}.$$

Ennek zérushelyei:

$$-4 + \frac{3600}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3600}{x^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 900,$$

így $x = \pm 30$. Az értelmezési tartományba eső egyetlen megoldás: $x = 30$.

$$f''(x) = -\frac{7200}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f''(30) = -\frac{7200}{30^3} < 0,$$

és az f függvény értéke az értelmezési tartomány határain zérus, ezért $x = 30$ -ban maximuma van f -nek. Ekkor

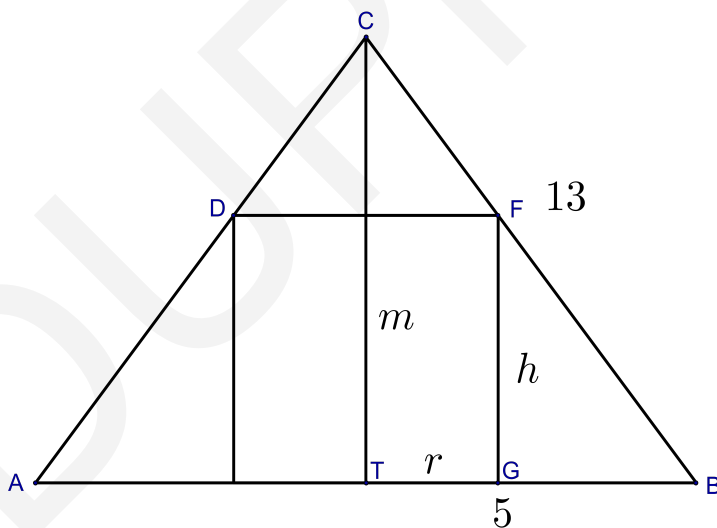
$$y = \frac{600}{30} = 20.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a lap oldalait 20 [cm]-nek és 30 [cm]-nek kell választani.

17.8. Feladat. Egy forgáskúp alapkörének átmérője 10 [cm], alkotója 13 [cm]. Írjunk ebbe olyan, a kúppal közös szimmetriatengelyű forgáshengert, melynek alaplappja a kúp alaplappjára illeszkedik, és térfogata maximális! Mekkora ennek a hengernek a sugara?

megoldás:

Jelölje a kúp magasságát m , a kúpra írható maximális térfogatú henger alapkörének sugarát r , magasságát h .



Az m értékét azonnal kiszámolhatjuk a Pitagorasz-tétel felhasználásával:

$$5^2 + m^2 = 13^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 169 - 25,$$

így $m = 12$ cm. A BTC háromszög hasonló a BGF háromszöghöz, mert a szögei megegyeznek. Ezt felhasználva

$$\frac{5-r}{h} = \frac{5}{12}.$$

Az egyenletet átrendezve $12 \cdot (5-r) = 5h$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $h = 12 - 2,4r$. A henger térfogata

$$\begin{aligned} V(r) &= r^2 \cdot \pi \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot (12 - 2,4r) = \\ &= 12 \cdot r^2 \cdot \pi - 2,4 \cdot r^3 \cdot \pi \quad (r \in [0; 5]). \end{aligned}$$

A V függvény deriváltja

$$V'(r) = 24 \cdot r \cdot \pi - 7,2 \cdot r^2 \cdot \pi = r \cdot \pi \cdot (24 - 7,2r).$$

ami pontosan akkor zérus, ha $r = 0$, vagy $24 = 7,2r$, amiből $r = 10/3$ adódik. Mivel

$$V''(r) = 24 \cdot \pi - 14,4 \cdot r \cdot \pi,$$

így

$$V''\left(\frac{10}{3}\right) = 24 \cdot \pi - 14,4 \cdot \frac{10}{3} \cdot \pi \approx -75,36 < 0,$$

továbbá a V függvény értelmezési tartományának határpontjaiban a függvényérték 0, ezért $r = \frac{10}{3}$ -ban a függvénynek maximum helye van. A henger alapkörének sugara tehát $\frac{10}{3}$ [cm].

17.9. Feladat. Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet; 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára annyszor 400 Ft-tal csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat. Adjuk meg annak a B függvénynek az a hozzárendelési utasítását, amelynél x az utasok számát, $B(x)$ pedig a társaság bevételeit jelöli x utassal indított járat esetén! Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát! Adjuk meg, hogy hány utas esetén lesz a repülő-társaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

megoldás:

Ha $10 \leq x \leq 20$ és x egész szám, akkor $B(x) = 16.000x$.

Ha $20 < x \leq 36$ és x egész szám, akkor

$$B(x) = 16.000x - 400 \cdot (x - 20) \cdot x = -400x^2 + 24.000x.$$

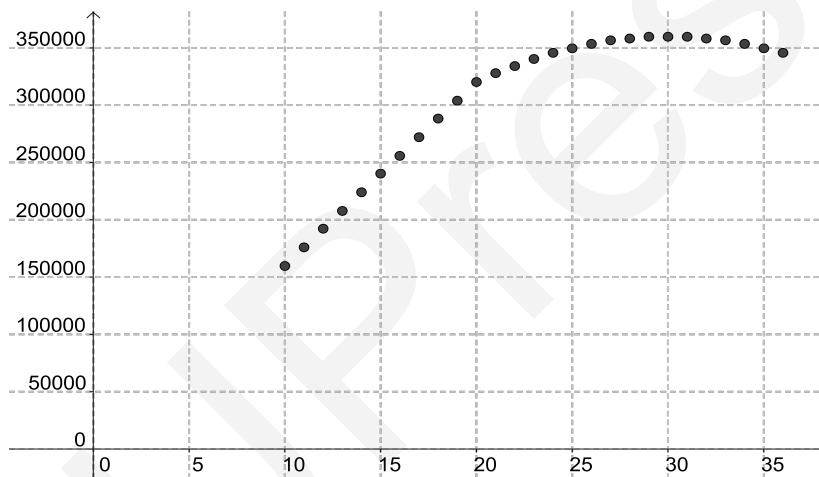
Vezessük be az U és V halmazokat az alábbi definícióval:

$$U = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 20\}$$

$$V = \{x \in \mathbb{N} \mid 21 \leq x \leq 36\}.$$

Ennek megfelelően a függvény leképezési szabálya

$$B(x) = \begin{cases} 16.000x, & \text{ha } x \in U \\ -400x^2 + 24.000x, & \text{ha } x \in V \end{cases}.$$



Az így kapott bevételi függvény nem differenciálható, pontosabban mivel az értelmezési tartományának nincs belső pontja, ezért nincs értelme differenciálhatóságról beszélni. Ezért vezessük be az

$$U^* = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 20\}$$

$$V^* = \{x \in \mathbb{R} \mid 20 < x \leq 36\}.$$

halmazokat és tekintsük a

$$B^*(x) = \begin{cases} 16.000x, & \text{ha } x \in U^* \\ -400x^2 + 24.000x, & \text{ha } x \in V^* \end{cases}$$

függvényt! Ekkor $B^*(x)$ már differenciálható függvény. Az U^* tartományon a maximumérték az U^* halmaz egyik határpontjában van: $16.000 \cdot 20 = 320.000$.

A V^* tartományon a deriváltfüggvény $-800x + 24.000$, amelynek zérushelye $x = 30$ -nál van. Itt a függvényérték

$$B(30) = -400 \cdot 30^3 + 24.000 \cdot 30 = 360.000.$$

A globális maximum hely tehát $x = 30$, továbbá mivel

$$B(20) = 320.000 < 360.000 = B(30),$$

ezért a B függvénynek is maximum helye az $x = 30$. Következésképpen, azt kaptuk, hogy 30 utas esetén lesz maximális a bevétel, és az elérhető legnagyobb bevétel 360.000 Ft.

17.10. Feladat. Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi mennyisége (x kilogramm) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36 - 0,03x)$ euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) az $x \mapsto 0,0001x^3 - 30,12x + 13.000$ függvény adja meg, szintén euróban. Számoljuk ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel? Adjuk meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg?

megoldás:

Az eladásból származó havi bevétel:

$$B(x) = x \cdot (36 - 0,03x) = -0,03x^2 + 36x.$$

Ennek a deriváltja $B'(x) = -0,06x + 36$, amelynek zérushelye $x = 600$, s mivel $B(x)$ egy „lefelé nyíló” parabola, ezért stacionárius pontja globális maximum hely, következésképpen a legnagyobb bevételt 600 kg termék értékesítése esetén lehet elérni. Ekkor a legnagyobb bevétel:

$$B(600) = -0,03 \cdot 600^2 + 36 \cdot 600 = 10.800 \text{ euró.}$$

A havi nyereség a havi bevétel és havi kiadás különbségével egyenlő, ennek megfelelően a nyereségfüggvény

$$\begin{aligned} N(x) &= -0,03x^2 + 36x - (0,0001x^3 - 30,12x + 13.000) = \\ &= -0,0001x^3 - 0,03x^2 + 66,12x - 13.000. \end{aligned}$$

A függvény értelmezési tartománya: $[100; 700]$. Az $N(x)$ függvény deriváltja

$$N'(x) = -0,0003x^2 - 0,06x + 66,12,$$

melynek zérushelye az $-0,0003x^2 - 0,06x + 66,12 = 0$ egyenlet megoldása, amely ekvivalens az $x^2 + 200x - 220.400 = 0$ egyenlet megoldásával. A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával

$$x_{1,2} = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4 \cdot (-220.400)}}{2} = \frac{-200 \pm 960}{2}$$

adódik, amiből $x_1 = -580$ és $x_2 = 380$. Az $N(x)$ függvény zárt intervallumon értelmezett valós értékű függvény, s mint ilyennek létezik globális szélsőértéke az intervallum határpontjaiban vagy a stacionárius pontokban. Ezeken a helyeken a függvényértékek:

$$N(0) = -13.000 \quad N(380) = 2306,4 \quad N(700) = -15.716,$$

így a maximum hely 380, a maximum érték 2306,4. Azt kaptuk tehát, hogy a legnagyobb havi nyereség 380 kg termék eladása esetén keletkezik, ekkor a nyereség értéke 2306,4 euró.

17.11. Feladat. A nyomda egy plakátot 14.400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2.500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40.000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos. A 14.400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?

megoldás:

Ha a nyomda x darab nyomólemezt alkalmaz, akkor ennek költsége $2500x$ forint. Az x darab lemezzel óránként $100x$ darab plakát készül el, ezért a 14.400 darab kinyomtatása

$$\frac{14.400}{100x} = \frac{144}{x}$$

órát vesz igénybe és ez további $\frac{5.760.000}{x}$ forint költséget jelent. A két költség összege:

$$K(x) = 2.500x + \frac{5.760.000}{x}$$

forint, ahol az x pozitív egész. A függvény értelmezési tartományát átmenetileg terjesszük ki a nemnegatív valós számok halmazára. Az így értelmezett függvény differenciálható és

$$K'(x) = 2.500 - \frac{5.760.000}{x^2}.$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy $K'(x) = 0$ teljesüljön, azaz, hogy fennálljon az

$$2.500 - \frac{5.760.000}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.500x^2 - 5.760.000 = 0$$

egyenlet, amiből $x^2 = 2.304$ adódik, ami $x > 0$ miatt azt jelenti, hogy $x = 48$. Mivel $48 \in \mathbb{Z}$, ezért ez az eredetileg az egész számok halmazán értelmezett $K(x)$ értelmezési tartományának is eleme. Ha $x < 48$, akkor $K'(x) < 0$, ha $x > 48$, akkor $K'(x) > 0$, ezért $K(x)$ -nek $x = 48$ -ban lokális minimum helye van, de tekintve, hogy ez az egyetlen lokális szélsőérték hely, ezért $x = 48$ globális minimum helye is a $K(x)$ függvénynek. Következésképpen 48 darab nyomólemez alkalmazása esetén lesz minimális a költség. Ekkor a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege:

$$K(48) = 2.500 \cdot 48 + \frac{5.760.000}{48} = 240.000$$

forint.

17.12. Feladat. Egy játéküzemben fa elemekből álló építőkészletet gyártanak. Ha x darab készletet gyártanak naponta, akkor a teljes gyártási költség

$$C(x) = \frac{x^{1,5}}{5} + 12x + 300$$

euró. Egy készletet 18 euróért tudnak értékesíteni. Naponta hány készletet gyártson az üzem, hogy a haszon a lehető legnagyobb legyen? Mennyi ez a maximális haszon?

megoldás:

Ha x darab terméket állítanak elő, akkor a haszon

$$N(x) = 18x - \frac{x^{1,5}}{5} - 12x - 300 = 6x - \frac{x^{1,5}}{5} - 300,$$

ahol a függvény értelmezési tartománya a nemnegatív egész számok halmaza. Terjesszük ki a függvény értelmezési tartományát a nemnegatív valós számok halmazára. Ekkor az $N(x)$ függvény differenciálható, deriváltja

$$N'(x) = 6 - 1,5 \cdot \frac{x^{0,5}}{5} = 6 - 0,3 \cdot x^{0,5}.$$

A függvény zérushelye:

$$6 - 0,3 \cdot x^{0,5} = 0$$

$$0,3 \cdot \sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = 20,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = 400$. Mivel

$$N''(x) = -0,15x^{-0,5} = -\frac{0,15}{\sqrt{x}} < 0,$$

így f -nek $x = 400$ lokális maximum helye. Mivel azonban $x = 400$ az egyetlen lokális szélsőérték hely, így az globális maximum hely is egyben, továbbá $x = 400$ az eredetileg a nemnegatív egész számok halmazán értelmezett függvény értelmezési tartományának is eleme, így a keresett szélsőérték hely $x = 400$, tehát 400 darab termék gyártása esetén lesz a nyereség maximális. Ekkor a maximális nyereség értéke

$$N(400) = 6 \cdot 400 - \frac{400^{1,5}}{5} - 300 = 500 \text{ euró}.$$

17.13. Feladat. Legyen p valós paraméter. Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$$

függvényt. Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen.

megoldás:

Mivel az f függvény deriváltja

$$f'(x) = -9x^2 + 2(p-3)x + p^2$$

, ezért a derivált helyettesítése értéke az $x = 1$ helyen

$$f'(1) = -9 + 2p - 6 + p^2 = p^2 + 2p - 15.$$

A feltétele szerint azokat a p értékeket keressük, melyre teljesül az $f'(1) > 0$ egyenlőtlenség. Tehát meg kell oldanunk a

$$p^2 + 2p - 15 > 0$$

másodfokú egyenlőtlenséget. Ehhez tekintsük a

$$g(p) = p^2 + 2p - 15$$

függvényt. Ennek zérushelyei

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-15)}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2},$$

azaz $p_1 = -5$ és $p_2 = 3$. Mivel $g(p)$ grafikonja olyan „felfelé nyíló” parabola, melynek zérushelyei -5 és 3 , ezért a függvény grafikonja a

$$p \in]-\infty; -5[\cup]3; \infty[$$

halmazon pozitív, így ezekre a p számokra lesz pozitív $f'(1)$ értéke.

17.14. Feladat. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a $(2; 6)$ pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x -tengely és az egyenes metszéspontját P , az y -tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q . Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számoljuk ki ezt a területet (O a koordináta-rendszer origóját jelöli).

megoldás:

Legyen a P pont első koordinátája x , a Q pont második koordinátája y . Ekkor a keresett háromszög területe:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= 12 + \frac{6 \cdot (x - 2)}{2} + \frac{2 \cdot (y - 6)}{2} = \\ &= 12 + 3x - 6 + y - 6 = 3x + y. \end{aligned}$$

A háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{x - 2}{6} = \frac{2}{y - 6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{y - 6} + 2.$$

Ezt felhasználva

$$T(y) = 3x + y = \frac{36}{y - 6} + 6 + y \quad (y \in]6; \infty[).$$

A T függvény deriváltja

$$T'(y) = \frac{-36}{(y-6)^2} + 1.$$

Ennek zérushelyét kell meghatároznunk. Ha megszorozzuk a kapott egyenlet mindkét oldalát a közös nevezővel, majd rendezzük az egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{-36}{(y-6)^2} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y-6)^2 = 36.$$

Ez azt jelenti, hogy $y - 6 = -6$ vagy $y - 6 = 6$. Az első egyenletből $y = 0$ adódik, ami nem eleme a T függvény értelmezési tartományának. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $y = 12$, ami eleme a T függvény értelmezési tartományának. Mivel

$$T''(y) = \frac{72}{(y-6)^3} \quad \Rightarrow \quad T''(12) = \frac{72}{6^3} > 0,$$

így T -nek $y = 12$ lokális minimum helye, azonban mivel T -nek ez az egyetlen stacionárius helye van, így az globális minimum hely is. Ha $y = 12$, akkor

$$x = \frac{12}{12-6} + 2 = 4,$$

így a P és Q pontok koordinátái: $P(4; 0)$ és $Q(0; 12)$, amiből a PQ egyenes meredeksége

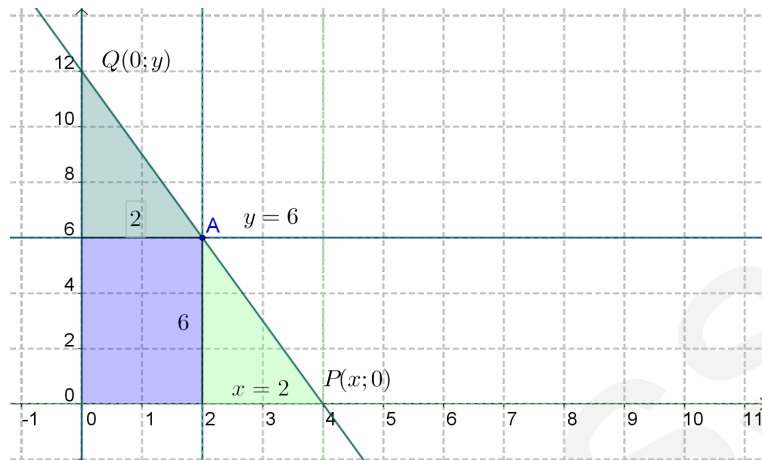
$$m = \frac{12-0}{0-4} = -3.$$

A keresett egyenes egyenlete tehát $y = -3x + b$. Az egyenesre azonban illeszkedik a $(2; 6)$ pont, így teljesülnie kell a

$$6 = -6 + b$$

egyenletnek, amiből azt kapjuk, hogy $b = 12$. Ezt felhasználva a keresett egyenes egyenlete

$$y = -3x + 12.$$



17.15. Feladat. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonjának tengelypontja $T(4; 2)$ és a $P(2; 0)$ pont illeszkedik a függvény grafikonjára. Határozzuk meg az a, b, c együtthatók értékét, továbbá írjuk fel az f függvény 3 abszcisszájú pontjába húzható érintőjének egyenletét!

megoldás:

A másodfokú függvényt tekintsük

$$f(x) = a \cdot (x - u)^2 + v$$

alakban. Mivel $T(4; 2)$ a parabola tengelypontja, ezért $u = 4$ és $v = 2$, továbbá mivel a $P(2; 0)$ pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért teljesül a

$$0 = a \cdot (2 - 4)^2 + 2$$

összefüggés, amiből azt kapjuk, hogy $a = -\frac{1}{2}$. Ezt felhasználva

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $b = 4$ és $c = -6$. Mivel

$$f'(x) = -x + 4,$$

továbbá $f(3) = 1$, 5 és $f'(3) = 1$, ezért a keresett érintő egyenes egyenlete

$$y = 1, 5 + x - 3 \quad \Rightarrow \quad y = x - 1, 5.$$

17.16. **Feladat.** Egy üzemben $4000 \text{ [cm}^3\text{]}$ térfogatú, négyzet alapú egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütő edények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékekkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.) Az üzemben úgy határozzák meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsuk ki a gyártott edények alapélének hosszát!

megoldás:

Legyen a hasáb alapéle x , oldaléle y . Ekkor a térfogata

$$V = x^2 \cdot y \quad \Rightarrow \quad 4000 = x^2 \cdot y.$$

Az egyenletből kifejezzük y -t:

$$y = \frac{4000}{x^2}.$$

Az edény felszíne

$$A(x) = x^2 + 4 \cdot x \cdot y = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{4000}{x^2} = x^2 + \frac{16.000}{x}.$$

Az A függvény deriváltja

$$A'(x) = 2x - \frac{16.000}{x^2},$$

ami pontosan akkor nulla, ha

$$2x^3 - 16.000 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8.000$$

azaz $x = 20$. Mivel az A függvény második deriváltja

$$A''(x) = 2 + \frac{32.000}{x^3},$$

ezért

$$A''(20) = 2 + \frac{32.000}{20^3} > 0$$

és mivel $x = 20$ az egyetlen stacionárius hely, ezért A -nak az $x = 20$ helyen globális minimum helye van, azaz az edény alapélének hosszát $x = 20 \text{ [cm]}$ -esnek kell választani.

17.17. Feladat. Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdni, amelynek térfogata $1000 \text{ [cm}^3\text{]}$. A doboz aljának és tetejének anyagköltsége $0,2 \left[\frac{\text{Ft}}{\text{m}^2} \right]$, míg oldalának anyagköltsége $0,1 \left[\frac{\text{Ft}}{\text{m}^2} \right]$. Mekkora legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarjuk? A választ $[\text{cm}]$ -ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsuk ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve!

megoldás:

Legyen a doboz alapkörének sugara r , magassága m . Ekkor a doboz térfogata

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m \quad \Rightarrow \quad 1000 = r^2 \cdot \pi \cdot m,$$

amiből kifejezzük az m -et:

$$m = \frac{1000}{r^2 \cdot \pi}.$$

Ezt felhasználva a doboz anyagköltsége

$$\begin{aligned} C(r) &= 2r^2 \cdot \pi \cdot 0,2 + 2r \cdot \pi \cdot m \cdot 0,1 = \\ &= 2r^2 \cdot \pi \cdot 0,2 + 2r \cdot \pi \cdot \frac{1000}{r^2 \pi} \cdot 0,1 = 0,4r^2 \cdot \pi + \frac{200}{r}. \end{aligned}$$

A függvény deriváltja

$$C'(r) = 0,8r \cdot \pi - \frac{200}{r^2},$$

ami pontosan akkor nulla, ha

$$0,8r^3 \cdot \pi - 200 = 0,$$

amiből $r \approx 4,3 \text{ [cm]}$. Mivel

$$C''(r) = 0,8\pi + \frac{400}{r^3},$$

ezért

$$C''(4,3) = 0,8\pi + \frac{400}{4,3^3} > 0,$$

így C -nek $r = 4,3$ lokális minimum helye. Mivel azonban $4,3$ az egyetlen stacionárius hely, ezért az globális minimum hely is. A minimális anyagköltséghez tartozó magasság $m \approx 17,2 \text{ [cm]}$. A minimális anyagköltség:

$$C(4,3) \approx 0,4 \cdot 4,3^2 \cdot \pi + \frac{200}{4,3} \approx 70 \text{ Ft}.$$

17.18. Feladat. Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze: az üzemeltetési költség x [km/h] átlagsebesség esetén $400 + 0,8x$ Ft kilométerenként, továbbá a gépkocsivezető alkalmazása 2.200 Ft óránként. Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsikilométerenkénti működtetési költsége? A választ [km/h]-ban, egészre kerekítve adjuk meg!

megoldás:

Ha x [km/h] a sebesség, akkor 1 óra alatt x kilométert teszünk meg, ez esetben a gépkocsivezető díja 2.200 Ft, így 1 kilométer alatt a gépkocsivezető díja $\frac{2.200}{x}$ Ft, tehát az összköltség

$$C(x) = 400 + 0,8x + \frac{2.200}{x}.$$

A $C(x)$ függvény deriváltja

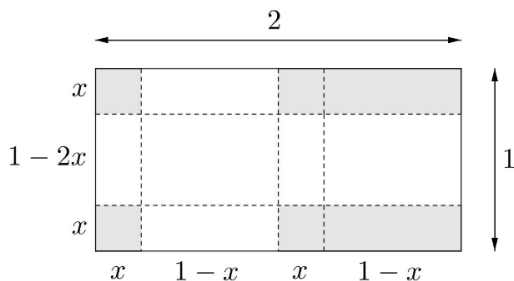
$$C'(x) = 0,8 - \frac{2.200}{x^2},$$

amelynek zérushelye a $0,8x^2 - 2.200 = 0$ egyenlet megoldása, amiből $x > 0$ miatt $x \approx 52$ adódik. Mivel

$$C''(x) = \frac{4400}{x^3}$$

és $C''(52) > 0$, ezért C -nek 52-ben lokális minimum helye van, mivel azonban ez az egyetlen stacionárius pontja C -nek, ezért $x \approx 52$ globális minimum hely is. Tehát (egészre kerekítve) 52 [km/h] átlagsebesség esetén minimális a kocsikilométerenkénti működtetési költsége.

17.19. Feladat. Egy üzemben egyforma, nagyméretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglatest alakú doboz hálózatát egy 2×1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon.



A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagvesztéssel.) Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit ahhoz, hogy a térfogata maximális legyen? A választ centiméterben, egészre kerekítve adjuk meg!

megoldás:

A doboz térfogata

$$V(x) = x \cdot (1 - x) \cdot (1 - 2x) = 2x^3 - 3x^2 + x \quad (x \in [0; 0,5]).$$

A $V(x)$ függvény deriváltja

$$V'(x) = 6x^2 - 6x + 1.$$

Ennek a zérushelyei, azaz a $6x^2 - 6x + 1 = 0$ egyenlet megoldásai

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \approx 0,211, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \approx 0,789 \notin \mathcal{D}_V.$$

Mivel a V függvény második deriváltja

$$V''(x) = 12x - 6,$$

továbbá $V''(x_1) < 0$, így x_1 -ben maximuma van V -nek. A maximális térfogatú doboz méretei: 21, 79 és 58 [cm].

17.20. Feladat. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ és a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2$ függvényeket! Mutassuk meg, hogy a $h:] - 0,5; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ függvény szigorúan monoton növekvő!

megoldás:

Mivel

$$h'(x) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

és $g'(x) = 2x$, $f'(x) = 2$, ezért

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2x \cdot (2x + 1) - (x^2 - 2) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 + 4}{(2x + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 4}{(2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

A kapott tört nevezője mindig pozitív. A számláló diszkriminánsa

$$D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -28 < 0,$$

így a másodfokú polinomnak nincs zérushelye, tehát (mivel a másodfokú tag együtthatója pozitív) minden x esetén pozitív az értéke. Azt kaptuk tehát, hogy minden $x \in]-0,5; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ esetén $f'(x) > 0$, így f szigorúan monoton növekvő.

18. További feladatok a differenciálszámítás témaköréből

18.1. **Feladat.** Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 3$$

függvényt!

megoldás:

A függvény a teljes valós számok halmazán értelmezve van, így a monotonitása ott változhat meg, ahol a deriváltja 0. Mivel $f'(x) = 3x^2 - 8x + 6$, ezért a $3x^2 - 8x + 6 = 0$ egyenlet megoldását keressük:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 72}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{-8}}{6}.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa tehát negatív, így a valós számok halmazán nincs megoldása, azaz a derivált függvénynek nincs zérushelye, így a függvény monotonitása sehol sem változik meg. Számoljuk ki egy tetszőleges helyen a derivált értékét: $f'(0) = 6 > 0$. Tehát az $x = 0$ helyen a derivált függvény pozitív előjelű, így mindenhol pozitív előjelű, vagyis az f függvény értelmezési tartományának minden pontjában szigorúan monoton növekvő.

18.2. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = 2x - x^2$ függvénynek azt a pontját, amelyhez húzott érintő egyenes párhuzamos az $A(1; 1)$ és a $B(3; -3)$ pontokon áthaladó szelővel.

megoldás:

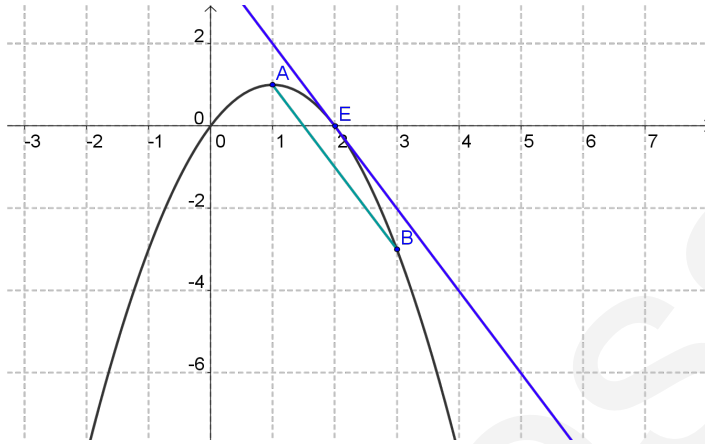
A Lagrange-féle középérték tétel garantálja, hogy létezik a megadott szelővel párhuzamos érintő egyenes. A szelő meredeksége az A és B pontokhoz tartozó differenciáhányados:

$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 1}{3 - 1} = -2.$$

Mivel a keresett érintő egyenes párhuzamos a szelővel, ezért az érintő egyenes meredeksége szintén -2 . Az érintő egyenes meredeksége megegyezik a függvény megfelelő helyen vett deriváltjával, azaz keressük azt az x valós számot, amelyre $f'(x) = -2$ teljesül. Mivel $f'(x) = 2 - 2x$, ezért

$$2 - 2x = -2 \quad \Rightarrow \quad 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

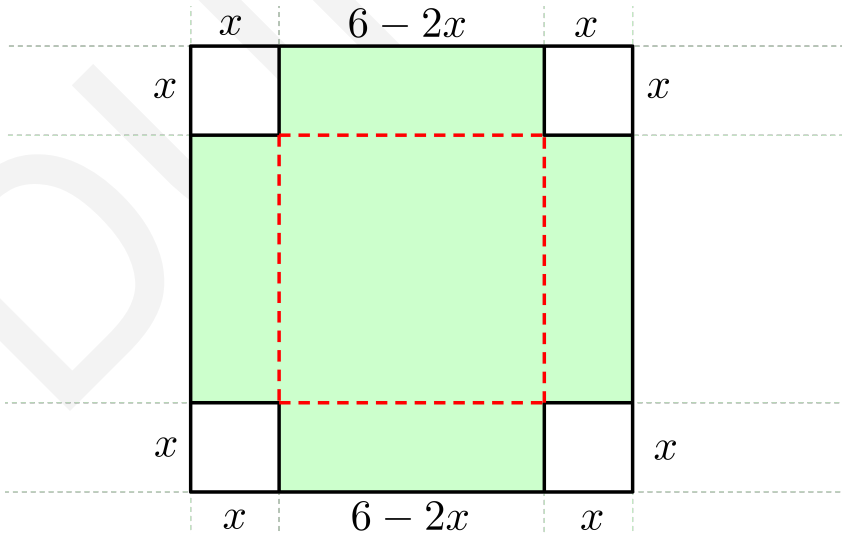
Másrészt a függvényérték a 2 helyen $f(2) = 0$, így a keresett érintési pont $E(2; 0)$.



18.3. Feladat. Egy 6 [dm] oldalú, négyzet alakú kartonpapír sarkaiból négy egybevágó négyzetet vágunk le, majd felhajtjuk az oldallapokat. Mekkorák legyenek a levágott négyzetek oldalai, ha azt szeretnénk, hogy a kapott doboz (felül nyitott négyzet alapú egyenes hasáb) térfogata a lehető legnagyobb legyen? Határozzuk meg a maximális térfogat értékét is!

megoldás:

A kivágott négyzetek oldala legyen x . Ekkor nyilván $x \in [0; 3]$.



A doboz térfogata az alapterület és magasság szorzata. Az alaplap négyzet, melynek oldalai: $6 - 2x$, magassága: x , így a doboz térfogata

$$V(x) = (6 - 2x)^2 \cdot x = 36x - 24x^2 + 4x^3.$$

Ennek a függvények keressük a szélsőértékét. Szélsőérték az értelmezési tartomány határpontjaiban, vagy annak belső pontjaiban lehet. A határpontokban (0-ban és 3-ban) a térfogat értéke 0, így ott biztosan nem lesz maximális a térfogat. A belső pontokban szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Mivel

$$V'(x) = 12x^2 - 48x + 36,$$

ezért ott lehet szélsőérték, ahol $12x^2 - 48x + 36 = 0$ teljesül. Az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk 12-vel, így $x^2 - 4x + 3 = 0$ adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

azaz $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Az $x_1 = 3$ értéket korábban már kizártuk a lehetséges maximum helyek közül, így a maximum hely $x = 1$. Ellenőrizzük, hogy valóban maximumot kaptunk-e. A szélsőérték létezésének másodrendű elegendő feltételével dolgozunk:

$$V''(x) = 24x - 48 \quad \Rightarrow \quad V''(1) = 24 - 48 < 0,$$

így valóban maximumot kaptunk. A maximális térfogat értéke:

$$V(1) = 36 - 24 + 4 = 16 \text{ [dm}^3\text{]}.$$

18.4. Feladat. Tekintsük az $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ függvényt!

- Adjuk meg a függvény zérushelyét, jelöljük ezt a pontot a függvény grafikonján A -val!
- Határozzuk meg az $f'(x)$ függvényt!
- Írjuk fel az f függvény A -beli érintőegyenésének egyenletét!
- Adjuk meg az f függvény lokális maximumának helyét és értékét!
- Határozzuk meg az $f''(x)$ függvényt!
- Számoljuk ki az f inflexiós pontját!

megoldás:

- a) Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldását keressük. Egy tört pontosan akkor 0, ha a számlálója 0, így $\ln x = 0$, amiből $x = 1$ adódik, így $A(1, 0)$.
- b) A hányados függvény deriválási szabályát használva

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

- c) Az érintő egyenes egyenlete:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 0 + (x - 1),$$

így a keresett egyenes egyenlete $y = x - 1$.

- d) Az első derivált zérushelye: $1 - \ln x = 0$, azaz $\ln x = 1$, tehát $x = e$.

	$x < e$	$x = e$	$x > e$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Tehát a lokális maximum helye e , értéke $\frac{1}{e}$.

- e) Mivel $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, ezért

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \cdot \ln x}{x^4} = \\ &= \frac{x \cdot (-3 + 2 \ln x)}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}. \end{aligned}$$

- f) A második derivált zérushelye a $-3 + 2 \ln x = 0$ egyenlet megoldása, amire $x = e^{\frac{3}{2}}$ adódik.

	$x < e^{\frac{3}{2}}$	$x = e^{\frac{3}{2}}$	$x > e^{\frac{3}{2}}$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

Az inflexiós pont $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

18.5. Feladat. Végezzük el az $f(x) = \frac{e^x}{x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

A függvény értelmezési tartománya: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zérushelye nincs, mivel az e^x függvény sehol sem 0. A függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x - 1)}{x^2},$$

ami pontosan akkor 0, ha $x = 1$. A derivált előjeleiből készített táblázat:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	–	nincs értelmezve	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	nincs értelmezve	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

A függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{(e^x \cdot (x - 1) + e^x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

Ennek a függvénynek nincs zérushelye. A második derivált előjeltáblázata:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	–	nincs értelmezve	+
$f(x)$	konkáv	nincs értelmezve	konvex

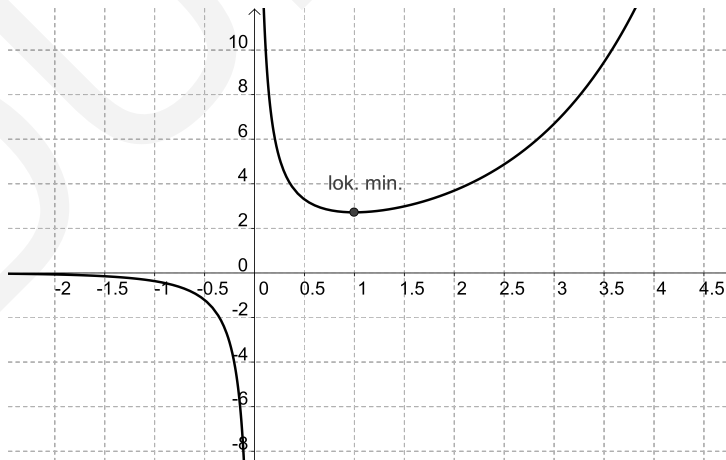
A $-\infty$ -beli határérték $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$, a ∞ -beli határérték a L'Hospital-szabály felhasználásával:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

A 0-ban a bal oldali, illetve a jobb oldali határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^x}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

A fentiek figyelembevételével a függvény grafikonja:



18.6. Feladat. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol az

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$$

függvény értelmezhető! Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az f függvényt! Adjuk meg az f függvény lokális szélsőérték helyeit!

megoldás:

A függvény nevezője nem lehet zérus, így $x^2 - x - 2 \neq 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $x \neq -1$, illetve $x \neq 2$, azaz

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}.$$

Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-2x + 1}{(x^2 - x - 2)^2}.$$

A derivált függvény zérushelye:

$$\frac{-2x + 1}{(x^2 - x - 2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

A függvény monotonitása ott változhat meg, ahol a függvény deriváltja 0 vagy ahol nincs értelmezve. Ezek figyelembevételével elkészítjük az alábbi táblázatot:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	n. é.	+	0	–	n. é.	–
$f(x)$	$\nearrow$	n. é.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	n. é.	$\searrow$

(n. é. : nincs értelmezve)

Tehát, ha $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; \frac{1}{2}[$, akkor f szigorúan monoton növekvő, ha $x \in [\frac{1}{2}; 2[\cup]2; \infty[$, akkor f szigorúan monoton csökkenő. A függvénynek az $x = \frac{1}{2}$ helyen lokális maximum helye van.

18.7. Feladat. Határozzuk meg a b valós számot úgy, hogy az

$$f(x) = (x + 1) \cdot (x + b) \cdot (x + 8)$$

függvény második deriváltja a -4 helyen 0 legyen!

megoldás:

Ha felbontjuk a zárójeleket, és fokszám szerinti csökkenő sorrendben írjuk fel a tagokat, akkor

$$f(x) = x^3 + (9 + b) \cdot x^2 + (8 + 9b) \cdot x + 8b$$

adódik. Ennek a deriváltja:

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot (9 + b) \cdot x + (8 + 9b),$$

amiből a második derivált:

$$f''(x) = 6x + 2 \cdot (9 + b) = 6x + 18 + 2b.$$

A feladat feltételei szerint teljesülnie kell, hogy $f''(-4) = 0$, azaz

$$0 = -24 + 18 + 2b \quad \Rightarrow \quad b = 3.$$

18.8. Feladat. Egy kisállatkereskedésből elhozott kiskutya tömegét (kg-ban mérve) jól modellezhetjük a

$$w(t) = \begin{cases} 2 + ct, & \text{ha } 0 \leq t \leq 5 \\ 16 - \frac{35}{t}, & \text{ha } t > 5 \end{cases}$$

függvény segítségével, ahol t azon hetek száma, ami azóta telt el, mióta elhoztuk házi kedvencüket a kereskedésből.

- Adjuk meg c értékét úgy, hogy a w függvény folytonos legyen!
- Vázoljuk fel a kapott c érték ismerete mellett a $w(x)$ függvény grafikonját!
- Hány kilós volt a kiskutya, amikor megvásároltuk?
- A megadott modellt használva határozzuk meg, hogy mekkora lehet háziállatunk maximális tömege?
- Mutassuk meg, hogy a w függvény differenciálható a $t = 5$ helyen!

megoldás:

a) A w függvény bal oldali határértéke a $t = 5$ helyen

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} w(t) = \lim_{t \rightarrow 5} 2 + ct = 2 + 5c.$$

A w függvény jobb oldali határértéke a $t = 5$ helyen

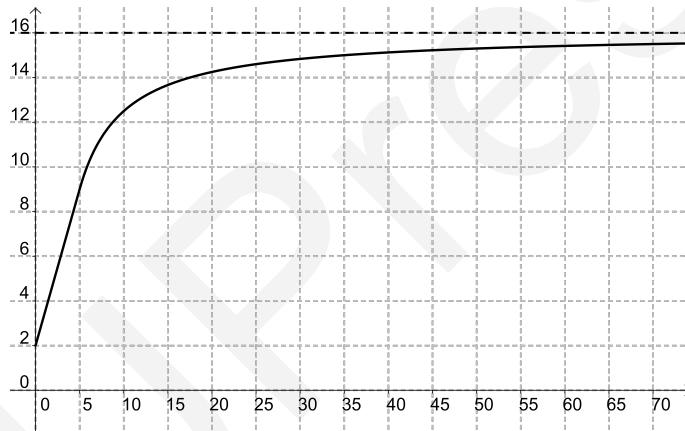
$$\lim_{t \rightarrow 5^+} w(t) = \lim_{t \rightarrow 5} 16 - \frac{35}{t} = 16 - \frac{35}{5} = 9.$$

Ahhoz, hogy a függvény folytonos legyen teljesülnie kell, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} w(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} w(t),$$

azaz $2 + 5c = 9$, így $c = 7/5$.

b) A w függvény grafikonja:



c) A vásárláskor $w(0) = 2$ kg volt a tömege.

d) A kutya maximális tömege

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 16 \text{ kg.}$$

e) A bal oldali derivált:

$$w'_-(t) = \frac{7}{5} \quad \Rightarrow \quad w'_-(5) = \frac{7}{5},$$

a jobb oldali derivált

$$w'_+(t) = \frac{35}{t^2} \quad \Rightarrow \quad w'_+(5) = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}.$$

Mivel $w'_-(5) = w'_+(5)$, ezért w differenciálható a $t = 5$ helyen. (Megjegyezzük, hogy w minden pontban differenciálható, ugyanis ha $t \neq 5$, akkor w elsőfokú polinom, ami differenciálható.)

18.9. Feladat. Határozzuk meg az

$$x^2 + (p + 2) \cdot x + 4p - 2 = 0$$

másodfokú egyenletben szereplő p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege minimális legyen!

megoldás:

A gyökök összegére és szorzatára vonatkozó Viéte-formulák alapján

$$x_1 + x_2 = -(p + 2) \quad x_1 \cdot x_2 = 4p - 2.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = (-(p + 2))^2 - 2 \cdot (4p - 2) = \\ &= p^2 + 4p + 4 - 8p + 4 = p^2 - 4p + 8. \end{aligned}$$

A feladatunk az

$$f(p) = p^2 - 4p + 8$$

függvény minimumának megkeresése. A függvény deriváltja

$$f'(p) = 2p - 4,$$

aminek az egyetlen zérushelye $p = 2$. Mivel $f''(p) > 0$, ezért a függvény minden p valós szám esetén konvex, így a $p = 2$ helyen valóban globális minimuma van.

18.10. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

függvényt!

- Határozzuk meg az $f'(x)$ függvényt!
- Adjuk meg azokat az intervallumokat, ahol az f függvény monoton növekvő, illetve azokat, ahol f monoton csökkenő!
- Adjuk meg az $f''(x)$ függvényt!
- Határozzuk meg az f függvény inflexiós pontjait!
- Legyen x^* az az érték, amelyre $f'(x^*) = 0$ és $f''(x^*) < 0$. Adjuk meg x^* értékét!

- f) Határozzuk meg az f függvénynek $(x^*, f(x^*))$ pontjába húzott normális egyenesének egyenletét!

megoldás:

- a) Elsőként a $\sqrt{x}$ -et írjuk át $x^{\frac{1}{2}}$ -nek. Ezt követően alkalmazzuk a hányados függvény deriválási szabályát:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \ln x \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

- b) Az $f'(x)$ függvény zérushelye

$$\frac{2 - \ln x}{x^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^2.$$

Az derivált függvény előjeleit táblázatba foglaljuk:

	$x < e^2$	$x = e^2$	$x > e^2$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

- c) Az f függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot 2x^{\frac{3}{2}} - (2 - \ln x) \cdot 3 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^3} = \\ &= \frac{-2x^{\frac{1}{2}} - (2 - \ln x) \cdot 3 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^3} = \frac{\sqrt{x} \cdot (3 \ln x - 8)}{x^3}. \end{aligned}$$

- d) A második derivált zérushelye:

$$\frac{\sqrt{x} \cdot (3 \ln x - 8)}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \ln x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = e^{\frac{8}{3}}.$$

A második derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

	$x < e^{\frac{8}{3}}$	$x = e^{\frac{8}{3}}$	$x > e^{\frac{8}{3}}$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex

- e) A függvény egyetlen inflexiós pontja $\left(e^{\frac{8}{3}}; \frac{8}{3} \cdot e^{-\frac{4}{3}}\right)$

- f) A derivált függvény egyetlen zérushelye: e^2 . Ezen a helyen a második derivált értéke biztosan negatív, hiszen az e^2 helyen lokális maximum helye van az f függvénynek, így $x^* = e^2$.
- g) Mivel azon a helyen keressük a normális egyenes egyenletét, ahol a derivált értéke zérus, ezért a keresett egyenes párhuzamos az y -tengellyel. A keresett egyenes egyenlete $x = e^2$.

18.11. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ függvényt!

- a) Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható!
- b) Határozzuk meg az f függvény inverzének deriváltját!

megoldás:

- a) Mivel $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{3}}$, ezért

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (1-x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-1) = \frac{-1}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) < 0$, így az f függvény szigorúan monoton, másrészt pedig folytonos is, így invertálható.

- b) Az f függvény inverze az az $f^{-1}(x)$ függvény, melyre

$$f \circ f^{-1}(x) = x \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{1-f^{-1}(x)} = x$$

teljesül, amiből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 - f^{-1}(x) &= x^3 \\ f^{-1}(x) &= 1 - x^3. \end{aligned}$$

Az inverz függvény deriváltja:

$$(f^{-1}(x))' = -3x^2.$$

18.12. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

függvényt!

- a) Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az f függvény értelmezhető!
- b) Adjuk meg az f függvény zérushelyét!
- c) Adjuk meg az $f'(x)$ függvényt!
- d) Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet!

- e) Vizsgáljuk meg az f függvényt monotonitás és lokális szélsőérték szerint!
- f) Adjuk meg az $f''(x)$ függvényt!
- g) Oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet!
- h) Vizsgáljuk meg az f függvényt konvexitás és inflexiós pont szerint!
- i) Határozzuk meg az f függvény határértékeit az értelmezési tartományának határpontjaiban!
- j) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját!
- k) Adjuk meg az f függvény értékkészletét!
- l) Írjuk fel az f függvény érintő egyenesének egyenletét az $x_0 = -1$ helyen!
- m) Határozzuk meg az $x_0 = -1$ helyen az f függvény normális egyenesének egyenletét!
- n) Írjuk fel az f függvény $x_0 = -1$ pont körüli másodrendű Taylor-polinomját!

megoldás:

- a) A tört nevezője nem lehet zérus, így $x \neq 0$, tehát

$$\mathcal{D}_f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- b) Az

$$\operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$$

egyenlet megoldásához első lépésben vegyük mindkét oldal tg-ét, majd szorozzuk a kapott egyenlet mindkét oldalát x -el. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$1 + \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 0,$$

így $x = -1$ az f függvény egyetlen zérushelye.

- c) Az f függvény külső függvénye $\operatorname{arctg} x$, belső függvénye $1 + \frac{1}{x}$. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= \frac{1}{1 + 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2 + 2x + 1} \end{aligned}$$

- d) Mivel az $f'(x)$ számlálója sehol sem nulla, ezért az $f'(x)$ függvénynek nincs zérushelye.

e) Mivel $f'(x) \neq 0$, ezért f -nek nincs szélsőértéke. Másrészt a

$$2x^2 + 2x + 1$$

másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 4 - 8 = -4 < 0$, ezért azt kaptuk, hogy a $2x^2 + 2x + 1$ polinom minden értéke pozitív, így az $f'(x)$ függvény értéke minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén negatív, azaz f szigorúan monoton csökkenő.

f) Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{4x + 2}{(2x^2 + 2x + 1)^2}.$$

g) Az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldása

$$\frac{4x + 2}{(2x^2 + 2x + 1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$$

h) A függvény konvexitásának vizsgálatát a második derivált előjeleit tartalmazó táblázat segítségével végezzük el:

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	–	0	+	+	+
$f(x)$	konkáv	ip	konvex	nincs értelmezve	konvex

i) Az f függvény $-\infty$ -beli határértéke

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4},$$

a ∞ -beli határértéke

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

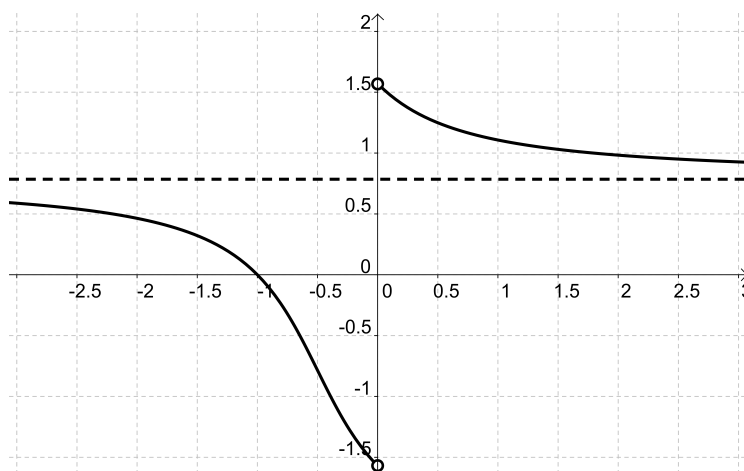
Az $x = 0$ helyen a bal oldali határérték

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(1 - n) = -\frac{\pi}{2}$$

Az $x = 0$ helyen a jobb oldali határérték

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(1 + n) = \frac{\pi}{2}$$

j) A függvény grafikonja:



k) A függvény grafikonja alapján az értékkészlet

$$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

l) Az érintő egyenes egyenlete

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

A korábbi eredményeket felhasználva, egyrészt

$$f(x_0) = f(-1) = 0,$$

másrészt

$$f'(x_0) = f'(-1) = -\frac{1}{2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Azt kapjuk tehát, hogy

$$y = 0 - 1 \cdot (x + 1) \quad \Rightarrow \quad y = -x - 1.$$

m) Az normális egyenes egyenlete

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$y = 0 - \frac{1}{-1} \cdot (x + 1) \quad \Rightarrow \quad y = x + 1.$$

n) Az f függvény x_0 -körüli másodrendű Taylor-polinomja

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

A korábbi eredményeket felhasználva egyrészt $f(x_0) = f(-1) = 0$, illetve $f'(x_0) = f'(-1) = -1$, másrészt

$$f''(-1) = \frac{4 \cdot (-1) + 2}{(2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1)^2} = -2$$

A keresett másodfokú polinom

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 0 - 1 \cdot (x + 1) - \frac{2}{2} \cdot (x + 1)^2 = \\ &= -(x + 1) - (x + 1)^2 = -x^2 - 3x - 2. \end{aligned}$$

18.13. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = e^x$ függvény azon pontját, amelyben a függvény görbületének értéke maximális!

megoldás:

Mivel $f'(x) = e^x$ és $f''(x) = e^x$, ezért a görbületi függvény

$$g(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^x}{\sqrt{(1 + \frac{1}{e^{x^2}})^3}} = \frac{e^x}{\sqrt{(1 + e^{2x})^3}}.$$

Ennek a függvénynek keressük a szélsőértékét, amihez először meghatározzuk a függvény deriváltját. Egyszerűbb azonban a $g^2(x)$ függvénynek a deriváltját meghatározni, ugyanis egyszerűen átgondolható, hogy szélsőérték helye ugyanott lesz a $g(x)$ -nek, ahol a $g^2(x)$ -nek. Legyen $h(x) = g^2(x)$. Ekkor

$$h'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot (1 + e^{2x})^3 - e^{2x} \cdot 3 \cdot (1 + e^{2x})^2 \cdot 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^6}.$$

Az összevonások és lehetséges egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy

$$h'(x) = -2 \cdot \frac{e^{2x} \cdot (-1 + 2e^{2x})}{(1 + e^{2x})^4}.$$

Ennek a függvénynek a zérushelyét a $2e^{2x} - 1 = 0$ egyenlet megoldása adja:

$$\begin{aligned} 2e^{2x} - 1 &= 0 \\ e^{2x} &= \frac{1}{2} \\ 2x &= \ln \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

A derivált függvény előjelét tartalmazó táblázat:

	$x < -\frac{1}{2} \ln 2$	$x = -\frac{1}{2} \ln 2$	$x > -\frac{1}{2} \ln 2$
$h'(x)$	–	0	+
$h(x)$	↗	lok. max.	↘

Azt kaptuk tehát, hogy az

$$x = -\frac{1}{2} \ln 2 = -\ln \sqrt{2} = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

helyen lesz maximális az $f(x) = e^x$ függvény görbülete.

18.14. Feladat. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ függvényt!

- Határozzuk meg az $f'(x)$ függvényt!
- Adjuk meg azokat az x értékeket, melyekre az f függvény $(x, f(x))$ pontjába húzott érintője párhuzamos az x -tengellyel!
- Adjuk meg az $f''(x)$ függvényt $\frac{p(x)}{(x^2+1)^3}$ alakban, ahol $p(x)$ egy harmadfokú polinom!
- Határozzuk meg az f függvény inflexiós pontjait!

megoldás:

a) A hányados függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

- b) A feladat feltételeinek azon x értékek felelnek meg, melyekre $f'(x) = 0$ teljesül, azaz a

$$\frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Egy tört csak akkor 0, ha a számlálója 0, így

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = \frac{2 \cdot (1 \pm \sqrt{2})}{-2},$$

azaz $x_1 = -1 - \sqrt{2}$, illetve $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.

- c) A hányados függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f''(x) = \frac{(-2x - 2) \cdot (x^2 + 1)^2 - (-x^2 - 2x + 1) \cdot 4x \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

adódik. A számlálóból kiemelhető $x^2 + 1$, majd azzal egyszerűsíthetünk, így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x - 2) \cdot (x^2 + 1) - 4x \cdot (-x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)^3} = \\ &= \frac{2x^3 + 6x^2 - 6x - 2}{(x^2 + 1)^3}, \end{aligned}$$

így a feladatban szereplő $p(x)$ polinom:

$$p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 6x - 2.$$

- d) Meg kell oldanunk az $f''(x) = 0$ egyenletet, ami csak akkor lehet 0, ha $p(x) = 0$. Könnyen látható, hogy $x = 1$ gyöke a polinomnak, így az osztható $(x - 1)$ -el:

$$\begin{aligned} (2x^3 + 6x^2 - 6x - 2) : (x - 1) &= 2x^2 + 8x + 2 \\ -(2x^3 - 2x^2) & \\ 8x^2 - 6x - 2 & \\ -(8x^2 - 8x) & \\ 2x - 2 & \\ -(2x - 2) & \\ 0 & \end{aligned}$$

Így azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} 2x^3 + 6x^2 - 6x - 2 &= (x - 1) \cdot (2x^2 + 8x + 2) = \\ &= 2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 4x + 1). \end{aligned}$$

Mivel egy szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért $x_1 = 1$ vagy $x^2 + 4x + 1 = 0$ kell, hogy teljesüljön. A másodfokú egyenletet megoldjuk a megoldóképlet segítségével

$$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

A második derivált előjelet vált x_1 -ben, x_2 -ben és x_3 -ban is, tehát valamennyi inflexiós hely.

Megjegyezzük, hogy a

$$p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 6x - 2$$

polinomot az alábbi módon is szorzattá alakíthatjuk:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 + 6x^2 - 6x - 2 = \\ &= 2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) + 6x \cdot (x - 1) = \\ &= 2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1 + 3x) = \\ &= 2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 4x + 1). \end{aligned}$$

18.15. Feladat. ★ Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 2}$ függvényt!

- Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az f függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ határértéket!
- Adjuk meg az $f'(x)$ függvényt!
- Mutassuk meg, hogy f -nek egyetlen lokális szélsőértéke van!
- Írjuk fel az f függvény normális egyenesének egyenletét az $x = 0$ helyen!
- Írjuk fel az f függvény azon érintő egyenesének egyenletét, amely párhuzamos az előbbi normális egyenessel!

megoldás:

- a) Egy tört nevezője nem lehet nulla, így

$$e^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 2,$$

azaz $x = \ln 2$ esetén nincs értelmezve a függvény, tehát

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \ln 2\}$$

az f értelmezési tartománya.

- b) Mivel $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, ezért az f függvény $-\infty$ -beli határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

- c) Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot (e^x - 2) - (e^{2x} + 1) \cdot e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{e^{3x} - 4e^{2x} - e^x}{(e^x - 2)^2}.$$

- d) Elsőként megoldjuk az $f'(x) = 0$ egyenletet. Egy tört csak úgy lehet 0, ha a számlálója 0, azaz $e^{3x} - 4e^{2x} - e^x = 0$. Kiemelve e^x -et:

$$e^x \cdot (e^{2x} - 4e^x - 1) = 0$$

adódik. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, de $e^x \neq 0$, így $2e^{2x} - 4e^x - 1 = 0$. Vezessük be az $u = e^x$ jelölést. Ekkor az

$$u^2 - 4u - 1 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ezt megoldva

$$u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Mivel $u = e^x$, ezért $u > 0$ kell, hogy teljesüljön, így $u = 2 - \sqrt{5} < 0$ nem megoldás, tehát csak $u = 2 + \sqrt{5}$ lehetséges, amiből

$$x = \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1,44.$$

Ezen a helyen megváltozik a derivált függvény előjele, így itt lokális szélsőérték helye van f -nek.

- e) Mivel $f(0) = -2$ és $f'(0) = -4$, azért a normális egyenes egyenlete

$$y = -2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x - 2.$$

- f) Keressük azt az egyenest, amelynek a meredeksége $\frac{1}{4}$, azaz $f'(x) = \frac{1}{4}$. Meg kell oldanunk az

$$\frac{e^{3x} - 4e^{2x} - e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{1}{4}$$

egyenletet. Átrendezve („keresztbe szorozva”) az egyenletet, majd 0-ra redukálva azt

$$4e^{3x} - 17e^{2x} - 4 = 0$$

adódik. Vezessük be a $v = e^x$ jelölést. Ekkor a

$$4v^3 - 17v^2 - 4 = 0$$

egyenlethez jutunk, amit azonban elemi úton nem tudunk megoldani. Azonnal látható ugyanis, hogy nincs racionális gyöke az egyenletnek, hiszen az 1; 4; -1; -4 számok egyike sem megoldás. Az egyenlet valós gyökének közelítő megoldását Newton-módszerrel fogjuk meghatározni. Ehhez tekintsük a

$$g(v) = 4v^3 - 17v^2 - 4$$

függvényt. Mivel $g(4) < 0$ és $g(5) > 0$, ezért a $[4; 5]$ intervallumban van gyöke a g függvénynek. Induljunk ki az $x_0 = 4$ kezdeti értékből. Ekkor

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 + \frac{20}{56} \approx 4,36.$$

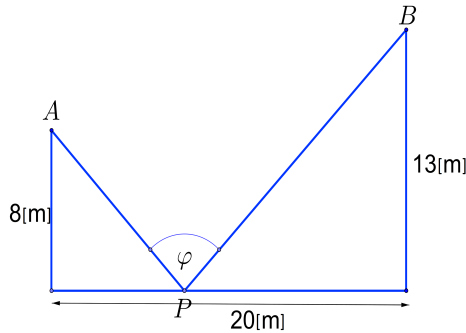
A Newton-iteráció következő lépésében:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 4,36 - \frac{4,364224}{79,8752} \approx 4,305.$$

Mivel $g(4,305) \approx 0,077$, ezért $v = 4,305$ már elfogadható a g gyökének közelítő értékeként, azaz a $4v^3 - 17v^2 - 4 = 0$ egyenlet közelítő megoldásaként, tehát $e^x \approx 4,305$, amiből $x \approx 1,46$. Ugyanakkor $f(1,46) = 8,47$, így

$$y = 8,47 + \frac{1}{4} \cdot (x - 1,46) \quad \Rightarrow \quad y = 8,11 + \frac{1}{4}x.$$

18.16. Feladat. ★ Egy 20 méter szélességű utcán egymással szemben két villanyoszlopot helyeztek el. Az egyik 8 méter, a másik 13 méter magas. Feltételezzük, hogy az oszlopok között az utca P pontjában a fény intenzitása arányos a φ szöggel.



- Adjuk meg φ -t az x függvényében, ahol x a P pontnak a 8 méteres oszloptól való távolsága!
- Adjuk meg φ értékeket, ha $x = 0$!
- Adjuk meg φ értékeket, ha $x = 20$!
- Mutassuk meg, hogy

$$\varphi'(x) = \frac{5 \cdot (744 - 64x - x^2)}{(x^2 + 64) \cdot (x^2 - 40x + 569)}.$$

- Adjuk meg azt a helyet, ahol a fényerősség maximális, valamint határozzuk meg a maximális fényerősség nagyságát!
- Vázoljuk fel a φ függvény grafikonját ($0 \leq x \leq 20$).

megoldás:

- Jelölje α a háromszög PA átfogójának a vízszintes befogóval bezárt szögét, továbbá jelölje β a PB átfogónak a vízszintes befogóval bezárt szögét. Ekkor $\varphi = \pi - \alpha - \beta$, ahol

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{x} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{13}{20 - x}.$$

A fentieket felhasználva

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{8}{x} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{13}{20 - x} \right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{8}{x} \right) \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{13}{20 - x} \right) \right). \end{aligned}$$

Alkalmazva az

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

trigonometrikus azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{8}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{13-x}{20}\right).$$

- b) Ha $x = 0$, akkor $\varphi \approx 56,98^\circ (\approx 0,9939 \text{ rad})$.
 c) Ha $x = 20$, akkor $\varphi \approx 68,2^\circ (\approx 1,1897 \text{ rad})$.
 d) Felhasználva az összetett függvény deriválási szabályát

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{64}} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{1 + \frac{400-40x+x^2}{169}} \cdot \left(-\frac{1}{13}\right).$$

Az „emeletes” törtet közösleges törtté alakítjuk, majd közös nevezőre hozzuk a kapott két törtet:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{8 + \frac{x^2}{8}} - \frac{1}{13 + \frac{400-40x+x^2}{13}} = \frac{8}{64 + x^2} - \frac{13}{569 - 40x + x^2} = \\ &= \frac{-5x^2 - 320x + 3720}{(64 + x^2) \cdot (569 - 40x + x^2)} = \frac{5 \cdot (744 - 64x - x^2)}{(x^2 + 64) \cdot (x^2 - 40x + 569)}. \end{aligned}$$

- e) Meg kell oldanunk a $\varphi'(x) = 0$ egyenletet. Egy tört csak akkor 0, ha a számlálója 0, így

$$\frac{5 \cdot (744 - 64x - x^2)}{(x^2 + 64) \cdot (x^2 - 40x + 569)} \Rightarrow -x^2 - 64x + 744 = 0.$$

Megoldva a másodfokú egyenletet

$$x_{1,2} = \frac{64 \pm \sqrt{64^2 - 4 \cdot 744}}{-2} = \frac{64 \pm 84,1}{-2},$$

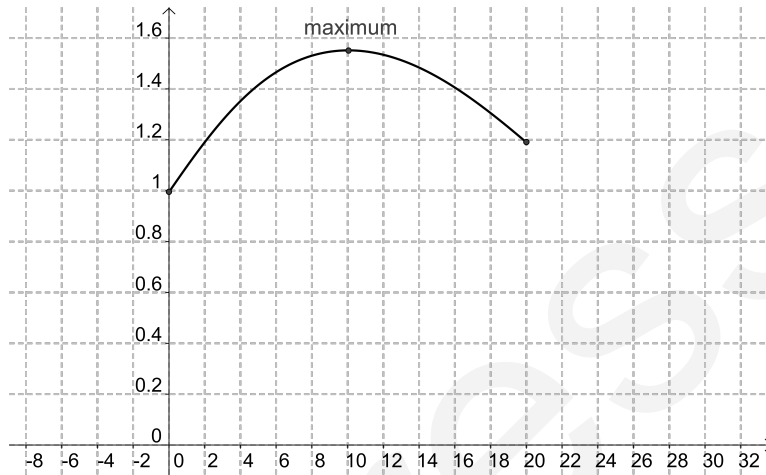
így $x > 0$ miatt $x \approx 10,05$ adódik. A $\varphi'(x)$ függvény nevezője minden x -re pozitív, ugyanis egyrészt $x^2 + 64 > 0$, mert az összeg mindkét tagja pozitív, másrészt az $x^2 - 40x + 569$ polinom diszkriminánsa

$$D = 40^2 - 4 \cdot 569 = 1.600 - 2.276 = -676 < 0$$

és a négyzetes tag együtthatója pozitív, így az minden x valós szám esetén $x^2 - 40x + 56 > 0$. A $\varphi'(x)$ függvény számlálója „lefelé nyíló” parabola, amelynek „második” zérushelye 10,05, így ott a derivált függvény előjele pozitívból negatívba vált, tehát ott lokális maximum helye van $\varphi(x)$ -nek. A maximális intenzitás

$$\varphi(10,05) \approx 51,48^\circ + 37,43^\circ = 88,91^\circ \approx 1,51 \text{ rad}.$$

- f) A fentiekben már kiszámoltuk a $[0; 20]$ intervallum kezdő- és végpontjában a függvényértékeket, valamint ismerjük a maximum helyet és értékét. Ezek alapján felvázolhatjuk a φ függvény grafikonját:



18.17. Feladat. ★ Legyen I egy rögzített, nyílt intervallum! Bizonyítsuk be, hogy ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ páros függvény és $f'(0)$ létezik, akkor $f'(0) = 0$.

megoldás:

Definiáljuk a

$$g(x) = f(x) - f(0)$$

függvényt! Ekkor $g(0) = 0$ és $g'(0) = f'(0)$. Azt is tudjuk továbbá, hogy g is páros, mert f párossága miatt

$$g(-x) = f(-x) - f(0) = f(x) - f(0) = g(x).$$

Másképp a g függvény bal oldali differenciálhányadosa az $x_0 = 0$ helyen

$$g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)}{x} = a,$$

illetve a g függvény jobb oldali differenciálhányadosa az $x_0 = 0$ helyen

$$\begin{aligned} g'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(-x)}{-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)}{-x} = - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)}{x} = -a. \end{aligned}$$

Mivel g differenciálható az $x_0 = 0$ helyen, ezért ott a bal oldali és jobb oldali deriváltja megegyezik, így

$$g'_-(0) = g'_+(0) \quad \Rightarrow \quad -a = a \quad \Rightarrow \quad 2a = 0,$$

amiből az következik, hogy $a = 0$, tehát $f'(0) = 0$, amivel igazoltuk az állítást.

Irodalomjegyzék

- [1] Babcsányi István – Gyurmánczi János – Szabó Lajos – Wettl Ferenc, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetemi Kiadó, 2009.
- [2] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- [3] Bárczy Barnabás, *Differenciálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994.
- [4] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II*, Műegyetemi Kiadó, 2002.
- [5] Csikós Pajor Gizella – Péics Hajnalka, *Analízis elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.
- [6] Farkas István, *Differenciálszámítás gyakorlati jegyzet*, Debreceni Egyetem, 2005.
- [7] Dr. Gerőcs László–Juhász István–Orosz Gyula– Paróczay József–Számadó László–Szászné Dr. Simon Judit, *Matematika emelt szintű tananyag*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2013.
- [8] Gilbert János – Sólyom András – Kocsányi László, *Fizika mérnököknek I-II.*, Egyetemi Tankönyv, Műegyetemi Kiadó, 1999.
- [9] J. Harcet – L. Heinrichs – P. M. Seiler – M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.
- [10] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Piroska – Róka Sándor – Tassy Gergely, *Tehetséggondozás a matematikában*, <http://users.itk.ppke.hu/adorjan/matematika/list.html>, 2011.
- [11] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.
- [12] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf>, 2011.
- [13] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1996. január, 51. oldal, 2869. fizika feladat, <http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=41005>
- [14] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv Áron, *Matematika eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2011.
- [15] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [16] Kovács István – Trembeczki Csaba, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, az analízis elemei 11–12, emelt szint*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.
- [17] Lengyel Csilla Mária, *Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei*, ELTE, szakdolgozat, 2012.
- [18] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
- [19] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.

- [20] Nándori Frigyes – Szirbik Sándor, *Statika oktatási segédlet a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére*, Mechanikai Tanszék, Miskolc-Egyetemváros, 2008.
- [21] Pintér Lajos, *Analízis I*, Typotex, 1998.
- [22] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.
- [23] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet, tankonyvtar.ttk.bme.hu, 2013.
- [24] Simon Anita, *Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2009.
- [25] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.
- [26] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.
- [27] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial, Life and Social Sciences*, Brooks/Cole, 1999.
- [28] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék

1. A differencia- és differenciálhányados fogalma	5
2. A differenciálhatóság és a folytonosság közötti kapcsolat	22
3. Deriválási szabályok	30
4. Magasabb rendű deriváltak	52
5. Érintő és normális egyenes egyenlete, érintési paraméterek	58
6. A differenciálszámítás középértéktételei	78
7. L'Hospital-szabály	84
8. Függvényvizsgálat	94
9. Taylor-polinom, Taylor-sor	144
10. Szélsőérték feladatok	152
11. Implicit függvények deriválása	176
12. Newton–Raphson módszer	184
13. Elaszticitás	190
14. Differenciálszámítás a fizikában és a műszaki tudományokban	196
15. A differenciálszámítás gazdasági alkalmazásai	210
16. Differenciálszámítás alkalmazása a biológiában és a kémiában	218
17. Válogatott emelt szintű érettségi feladatok	224
18. További feladatok a differenciálszámítás témaköréből	246
Irodalomjegyzék	271

