



**Zsugorodás által indukált repedési folyamatok vizsgálata
diszkrét elem modellezéssel**

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szatmári Roland
Témavezető: Dr. Kun Ferenc

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács
Fizikai Tudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2025

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács, Fizikai Tudományok Doktori Iskola Fizikai módszerek interdiszciplináris kutatásokban programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 20.

.....

Szatmári Roland
doktorjelölt

Tanúsítom, hogy Szatmári Roland doktorjelölt 2020-2025 között a fent megnevezett Doktori Iskola Fizikai módszerek interdiszciplináris kutatásokban programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 20..

.....

Dr. Kun Ferenc
témavezető

**Zsugorodás által indukált repedési folyamatok vizsgálata
diszkrét elem modellezéssel**

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a Fizika tudományágban

Írta: Szatmári Roland okleveles fizikus

Készült a Debreceni Egyetem Fizikai Tudományok Doktori Iskolája
Fizikai módszerek interdiszciplináris kutatásokban programja keretében

Témavezető: Dr. Kun Ferenc

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök:

Dr.

tagok:

Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20...

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Törési jelenségek skálatörvényei	5
2.1. Heterogén anyagok fragmentációs jelenségei	5
2.2. Zsugorodás által okozott repedezés	9
2.3. Repedési mintázatok kontrollja	13
2.4. Repedési zaj	16
3. Vékonyréteg repedezési folyamatainak diszkrét elem modellezése	20
3.1. Zsugorodás által okozott repedezés diszkrét elem modellje .	21
4. Anizotróp repedési mintázatok fejlődése és szerkezeti jellemzői	30
4.1. Lokális teherbíróképesség szögfüggése	30
4.2. Repedezési folyamat különböző anizotrópia értékek mellett .	31
4.3. A fragmentáció három fázisa	35
4.3.1. Repedések szögeloszlása	36
4.3.2. Átmenet a szegmentáció fázisába	39
4.3.3. Összefüggő repedési hálózat	41
4.3.4. A repedési szerkezet fejlődésének fázisdiagramja . . .	43
4.4. Bináris fragmentáció	45
4.4.1. Fragmensek alakjának időfejlődése	45
4.4.2. Fragmensek tömegeloszlása	48

4.5. Konklúziók	50
5. Diszkrét elem modell irányfüggő diszkretizációval	52
5.1. Véletlen poligon rács geometriai transzformációja	52
5.2. A modell mechanikai válasza	55
5.3. Zsugorodás okozta repedésképződés az új modellben	60
5.4. Makrorepedések orientációja	64
5.5. A fragmensek alakjának és tömegének fejlődése	67
5.6. Konklúziók	72
6. Skálafüggetlen repedési zaj zsugorodás által indukált repedezésben	75
6.1. Repedési zaj zsugorodó vékonyrétegekben	75
6.2. Lokális lavinák időbeli szuperpozíciója	79
6.3. Konklúziók	83
7. Összefoglalás	85
8. Summary	92
9. Köszönetnyilvánítás	99

1. fejezet

Bevezetés

A kiszáradt tómedrek alján megjelenő poligonális repedési mintáktól [1–4] a Föld és a Mars permafroszt régiójában megfigyelhető, sokszor méteres átmérőjű felszíni fragmenseken át [5] egészen a három dimenziós oszlopos lávaelválásokig [6–10] a természetben számos, zsugorodás által okozott repedési mintával találkozhatunk. A jelenségekört laboratóriumi körülmények között leggyakrabban úgy vizsgálják, hogy sűrű paszta hordozóra felvitt rétegét szárítják [11]. A paszta száradás és megszilárdulás közben zsugorodik, ami mechanikai feszültséget kelt az anyagban és ezen feszültségek feloldására jönnek létre a repedések. Kísérleti vizsgálatok rámutattak, hogy az anyag rendezetlensége miatt a zsugorodás során létrejövő repedési mintázat celluláris szerkezettel rendelkezik [2–4, 11–13]. A repedező rendszer dinamikai és statisztikai jellemzőit elemezve kiderült, hogy a repedések által határolt fragmensek területének/tömegének eloszlása jól közelíthető lognormális eloszlással [14].

Ipari alkalmazások során a hordozóra felvitt vékonyrétegek (például festékrétegek) repedezése általában elkerülendő, mert minőség-romláshoz vezet. Ugyanakkor a közelmúlt vizsgálatai rámutattak, hogy számos lehetőségünk van az egyedi repedések [15–17], illetve a teljes repedési mintázat szerkezetének [11, 18] kontrolljára. Az egyik ilyen vizsgálatban sűrű kalcium-karbonát és magnézium-hidroxid-karbonát pasztákat mechanikai-

lag gerjesztettek, majd azt tapasztalták, hogy a paszta "emlékszik" a gerjesztés (pl. rázás) irányára [11, 19]. A paszta - szemcsés szerkezetéből adódóan - egy rendezetlen rendszer, amely száradás során a celluláris repedési mintázatot preferálja. Ám a kezdeti mechanikai perturbáció által okozott plasztikus deformáció a lokális teherbíróképességben irányfüggést okoz, s ennek hatása felülmúlja a rendezetlenségét, így a fragmentáció kezdeti fázisában a gerjesztés irányára merőlegesen indultak meg repedések [20, 21]. Az idő előrehaladtával újabb, a már meglévő repedésekkel párhuzamos repedések jelentek meg mindaddig, míg a repedések közötti térrész a paszta rétegvastagságának nagyságába nem esett. Ezek után másodlagos repedések szegmentálták a hosszú, téglalap alakú fragmenseket kisebb darabokra. Tehát a tapasztalat azt mutatja, hogy anizotrópia bevitele az anyagi jellemzőkbe lehetőséget ad repedési mintázatok szerkezetének kontrolljára, ami kiaknázható a mikroelektronikai gyártástechnológiában [15–17].

A lítium-ion akkumulátorok (LIB) kritikus szerepet játszanak a globális CO₂-kibocsátás csökkentésére irányuló erőfeszítésekben, így a kapacitásuk és élettartamuk növelése az energetikai iparág egyik fontos kihívása [22–26]. A Li-ion akkumulátorok élettartamát korlátozó tényezők között az egyik legjelentősebb az elektródák anyagának repedezése [27]. A töltés-kisütés folyamata során a lítium be-, illetve kivándorlása térfogatváltozást idéz elő az elektródák felületi rétegeiben, ami inhomogén feszültségteret hoz létre [28, 29]. Ez a mechanikai feszültség repedések keltésével relaxálódik, ami kezdetben az akkumulátor energiatárolási kapacitásának csökkenéséhez vezet, de később az akkumulátor végleges tönkremenetelét is okozhatja [30].

A közelmúlt laboratóriumi vizsgálatai rámutattak, hogy az akkumulátorok elektródáinak repedezését akusztikus zaj kibocsátása kíséri, így a degradációs folyamat az akusztikus jelek sorozatának mérésével nyomon követhető. Az akusztikus emissziós technika [31, 32] egy ígéretes roncsolásmentes vizsgálati módszer, amely valós idejű információt szolgáltat a degradációs folyamatról. A technológia megalapozásához a repedésképződés mikroszkopikus folyamatainak mélyreható megértése elengedhetetlen.

Doktori munkám során hordozóra felvitt vékonyrétegek zsugorodás által indukált repedési folyamatát elemeztem. Vizsgálataimhoz létrehoztam a kétdimenziós zsugorodó vékonyrétegek egy Diszkrét Elem Modelljét, amelynek számítógépes szimulációja során széles tartományon tudtam változtatni a legfontosabb anyagi és dinamikai paramétereket. Munkám célja kettős volt; egyrészt tisztázni szerettem volna, hogy a kezdeti mechanikai perturbációval az anyag lokális jellemzőiben létrehozott anizotrópia hogyan befolyásolja a repedezés időfejlődését és a végállapotban előálló repedési hálózat struktúráját; másrészt szerettem volna értelmezését adni a zsugorodó vékonyrétegek repedezését kísérő akusztikus zaj statisztikus jellemzőinek. Eredményeimet három tézispontban foglaltam össze.

Az első tézispontban a szabályozott repedéskeltés lehetőségeinek feltárása érdekében megvizsgáltam egy hordozóhoz tapadt vékonyréteg zsugorodás okozta repedezését, amelynek mechanikai tulajdonságai anizotrópiát mutatnak. A számolásaim azt mutatták, hogy ha az anizotrópia kellően erős, akkor a repedési mintázat időfejlődése három jól elkülönülő fázison keresztül történik. A repedési hálózat szerkezetének elemzésével azt találtam, hogy a réteg kezdeti anizotrópiája jelentősen befolyásolja a keletkező fragmensek geometria jellemzőit, ám azok tömegének statisztikája univerzális viselkedést mutatott [P1].

A második tézispontban az anizotróp tulajdonságokkal rendelkező vékonyrétegek mechanikai viselkedésének és repedési folyamatainak számítógépes modellezésére bevezettem egy újszerű módszert, ahol az anizotrópiát a réteg diszkretizációján keresztül vettem figyelembe. A rendszer mechanikai válaszának jellemzéséhez egy négyszög alakú próbatest egytengelyű nyújtását vizsgáltam a geometriai transzformáció irányában és arra merőlegesen, valamint meghatároztam a réteg Young-modulusának és Poisson-számának anizotrópia- és rendezetlenség-függését. Részletesen elemeztem a repedési mintázat és a keletkező fragmensek jellemzőit, amelyeket összehasonlítottam a korábban kidolgozott modellel kapott eredményeimmel [P2].

A harmadik tézispontban a zsugorodó vékonyréteg törési folyamatát kísérő akusztikus zaj jellemzőinek megértésére számítógépes szimulációkkal vizsgáltam a fokozatos repedezés időbeli lefolyását. Megmutattam, hogy az aktivitás pulzusok méret- és időtartam-eloszlása hatványfüggvény viselkedést mutat, de az exponenseik nem univerzálisak. A számolásaim rámutattak, hogy a lokális lavinák méretének és időtartamának valószínűség eloszlása szintén hatványfüggvény viselkedést mutat, ám univerzális exponensekkel. Numerikus eredményeim alapján lineáris kapcsolatot állapítottam meg a pulzusok hatványfüggvény exponense és a lokális lavinák nukleációs rátája között. Kis rendszerméret és lassú zsugorodás határesetében a pulzusok jellemző exponensei megegyeznek a lokális lavinák exponenseivel [P3].

Kutatómunkám során a statisztikus fizika, a fázisátalakulások és kritikus jelenségek, illetve a komplex rendszerek fizikájának eszköztárát használtam a jelenségkör vizsgálatára. Disszertációmban először bemutatom a kutatómunka motivációjául szolgáló legfontosabb szakirodalmi eredményeket, majd a modellezési módszer diszkutálása után három önálló fejezetben ismertetem az eredményeimet.

2. fejezet

Törési jelenségek skálatörvényei

A fejezet rövid áttekintést ad doktori munkám szakirodalmi előzményeiről. A vizsgált jelenség bemutatása után rátérek a legfontosabb kísérleti és elméleti eredmények tárgyalására.

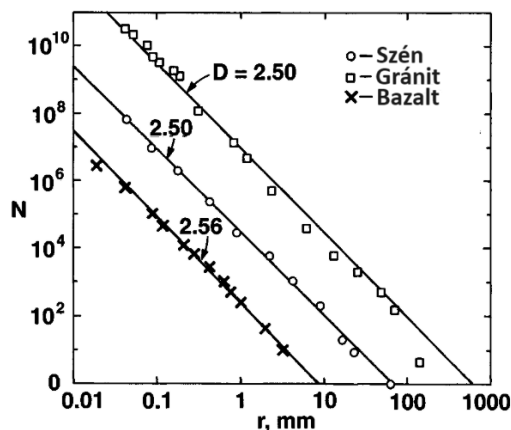
2.1. Heterogén anyagok fragmentációs jelenségei

A szilárdtestek törési jelenségei nagyban függnek a terhelés alkalmazásának módjától. Ha rövid idő alatt nagy mennyiségű energiát közlünk egy szilárdtesttel (pl. úgy, hogy felrobbantjuk vagy lövedéket lövünk bele), akkor egy nagyon gyors folyamatban hatalmas számú darabra fog szétesni. A terhelés alkalmazásának egy másik határesete, amikor hosszú időn keresztül állandó nagyságú vagy lassan változó terhelést alkalmazunk úgy, hogy a terhelés mindvégig a test teherbíró képessége alatt maradjon. Épületek szerkezeti elemei általában ilyen szubkritikus terhelésnek vannak kitéve, és valóban tapasztaljuk, hogy ebben az esetben is megjelenhetnek törések, amelyeknek sokszor katasztrófális következményei vannak. A két határeset között számos más jelenség található, például a dinamikus törés esete. Ilyenkor a terhelés gyorsan, impulzusszerűen kerül alkalmazásra, de

a határfeltételek biztosítják azt, hogy csupán egyetlen, nagy sebességgel terjedő repedés keletkezzen.

A terhelés alkalmazásának módja mellett nagyon fontos szerepet játszik az anyagi tulajdonságok közül a heterogenitás, azaz az anyag belső rendezetlenségének mértéke. Ez a rendezetlenség méretskálától függően változatos formában jelenhet meg. Például az épületek szerkezeti anyagaként használt betonban a cement mátrixba ágyazott kavicsok véletlen mérete és alakja hozza létre a heterogenitást. Nagyon népszerű mesterséges anyagok a szálerősítéses kompozitok, itt a mátrixba ágyazott szálak teherbíró képességének a véletlenszerűsége az, amely néhány tíz mikrométeres skálán okozza a rendezetlenséget. Pontosán tudjuk, hogy akármilyen módon is jelenik meg a heterogenitás, mindig alapvetően befolyásolja a repedések keletkezését és terjedését. A rendezetlenség következménye például, hogy makroskálán a szilárdtestek teherbíró képessége egy sztochasztikus mennyiség, amely csak egy valószínűségi eloszlással jellemezhető, mikroskálán pedig a repedések terjedése válik intermittenssé. A repedési jelenségek ezen tulajdonsága az oka elsősorban annak, hogy a jelenségkör mélyebb megértéséhez statisztikus fizikai leírásra van szükségünk, és így a szilárdtestek törésének megértése nem csak a mérnökök, hanem a fizikusok számára is érdekes kihívást jelent.

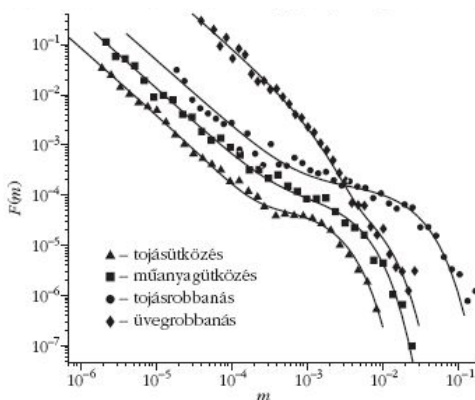
A legegyszerűbb fragmentációs kísérlet az, amikor egy rendezetlen anyaggal gyorsan nagy mennyiségű energiát közlünk. A kísérlet eredménye egy törmelékhalmoz, amelyben ha meghatározzuk a fragmensek méretének a statisztikáját, érdekes eredményre bukkanhatunk. A 2.1. ábrán fragmensek méreteloszlását láthatjuk három különböző anyagra három különböző energiabetáplálás mellett. Kétszer logaritmikus skálán mindhárom esetben egyenesek figyelhetők meg, ráadásul ezek párhuzamosak egymással. Ez azt jelenti, hogy a fragmensek méreteloszlása hatványfüggvény-viselkedést mutat, függetlenül az anyagi minőségtől, az energiabetáplálás módjától és a releváns hosszúságskálától:



2.1. ábra. Fragmensek méreteloszlása három különböző anyagra, amelyek három különböző módon lettek fragmentálva [33]: a legalsó görbe bazalt, amelybe lövedéket lőttek, a középső bányában robbantott szén, a felső pedig gránit, amit földalatti atomrobbantásban fragmentáltak. Kétszer logaritmikus skálán közel párhuzamos egyeneseket látunk, tehát hatványfüggvény-viselkedést tapasztalunk közel azonos kitevővel.

$$N(r) \sim r^{-\tau}, \quad (2.1)$$

ahol r a fragmensek lineáris mérete, $N(r)$ az r nagyságú fragmensek száma, τ pedig a méreteloszlás exponense. Ezt a jelenséget hívjuk a fragmentációs jelenségek *univerzalitásának*. A szakterületen az univerzalitás háttérének megértése volt évtizedeken keresztül a vizsgálatok egyik legfontosabb hajtóereje. Az egyik legfontosabb ilyen kérdés az volt, hogy az univerzalitásnak hol vannak a határai? A vizsgálatok rámutattak, hogy hatványfüggvény viselkedés akkor jön létre, ha rendezetlen, rideg anyagokat törünk. Azt is sikerült megmutatni, hogy az exponensek értékét elsősorban a beágyazó tér dimenziója szabja meg: egy dimenzióban, vékony üvegrudakkal végzett mérések $\tau \approx 1.5$ eredményre vezettek [34]; két dimenzióban, kvázi kétdimenziós korongokkal $\tau \approx 1.5 - 2.0$ adódott [35–37]; három dimenziós tömbi anyagokra pedig $\tau \approx 2.3 - 2.7$ a mért exponens [38, 39].



2.2. ábra. Zárt héjak robbanása során keletkező fragmensek tömegeloszlása különböző anyagokra [40].

További vizsgálatokból kiderült, hogy a héjszerkezetek fragmentációja különösen érdekes: ha energiát közlünk zárt héjakkal, akkor ők három dimenzióban fognak deformálódni, ám - szemben a tömbi anyagokkal - a repedési mintázat lokálisan kétdimenziós lesz. Gyakorlati jelentőségét a problémának az adja, hogy az űrszemét fő forrását a Föld körüli pályán keringő zárt héjszerű objektumok felrobbanása adja, és ezek a nagy energiával mozgó fragmensek óriási károkat tudnak okozni a műholdakban. A műholdakat pályára állító rakéták üzemanyagtartálya - miután a műhold lecsatolódott a rakéta utolsó fokozatáról is - szintén Föld körüli pályára áll, bennük némi maradék üzemanyaggal, ami jellemzően folyékony hidrogén és oxigén keveréke. Amennyiben ezt a tartályt eltalálja egy mikrometeoroid, akkor az felrobbanhat, hatalmas számú fragmenst létrehozva, melyek szétkenődnek Föld körüli pályákon. A probléma annyira jelentős, hogy az űrszemét nagyobb darabjait a NASA és az ESA megfigyelik és követik, és ha szükséges, akkor módosítják a műholdak pályáját. Radarral vagy egyéb optikai eszközökkel a 10 centiméternél nagyobb fragmenseket lehet követni, ám az ennél kisebb szemétdarabok esetén modellszámításokra és laboratóriumi mérésekre vagyunk utalva. Kísérleti vizsgálatok [41, 42] rámutattak,

hogy kis fragmenstömegek esetén a héjak darabjai anyagi minőségtől és az energia betáplálásának módjától függetlenül hatványfüggvény tömegeloszlást követnek egy unikális, korábban nem ismert $\tau \approx 1.35$ exponenssel (2.2. ábra). Tehát a héjak fragmentációja önálló univerzalitási osztállyal rendelkezik.

Annak megértéséhez, hogy hogyan jön létre ez a hatványfüggvény viselkedés, a kutatók megnézték nagy sebességű kamerán, hogyan zajlik le a robbanása egy ilyen héjnak. Azt tapasztalták, hogy kezdetben véletlen repedés nukleáció zajlik a rendszerben, ezek a repedések utána nagy sebességgel haladnak tovább. A terjedés során a repedések hegye instabillá válik, ezért elágazik. A tágulás miatt a mellékágak ismét felgyorsulnak, majd ismét elágaznak, és ennek a folyamatnak az ismétlődésével egy hierarchikus elágazás megy végbe a rendszerben, a fragmensek pedig az elágazó repedési fa ágainak összeolvadásából jönnek létre. Ennek az információnak a tudatában már analitikusan is meg lehetett érteni a görbék függvényalakját [39, 43, 44]:

$$p(m) = Am^{-\tau}e^{-m/m_1} + Be^{-m/m_2}. \quad (2.2)$$

A robbanás kezdetén repedés nukleáció zajlik, jó közelítéssel véletlen módon, ami tisztán exponenciális tömegeloszlásra vezet, melyet a 2.2. egyenlet második tagja ír le. Mikor a nagy repedések elágaznak, akkor az ágak összeolvadásával kisebb fragmensek keletkeznek. Ezt a hierarchikus folyamatot írja le az egyenlet első, hatványfüggvény tagja. Fontos, hogy ez a hierarchikus elágazás nem mehet minden határon túl az energia disszipáció miatt, ezért a hatványfüggvény viselkedést limitálja az exponenciális tag.

2.2. Zsugorodás által okozott repedezés

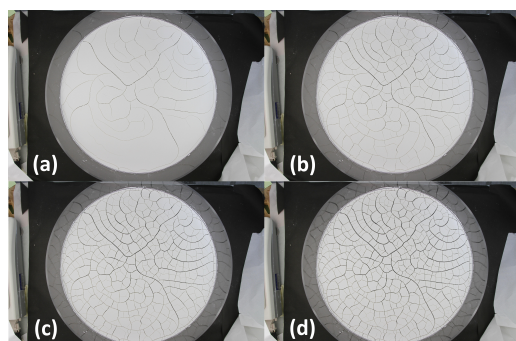
A törési jelenségek egy másik, nagyon izgalmas területe a zsugorodás által okozott repedési folyamat, amely az eddig tárgyalt dinamikus fragmentációval szemben lassan játszódik le. A következőkben a témakör leg-



2.3. ábra. The Giant's Causeway, Észak-Írország. Jól megfigyelhetők a szabályos, poligonális keresztmetszetű lávaoszlopok. (Forrás: Perspectives)

fontosabb eredményeit fogom tárgyalni.

Az utóbbi években egyre gyakrabban találkozhatunk a szomorú látványt nyújtó kiszáradt tómedrekkel, amelyekben poligonális repedési mintákat fedezhetünk fel [1–4]. A száradás során a sárréteg elkezd zsugorodni, mechanikai feszültség lép fel az anyagban, és ennek feloldására jönnek létre a repedések. Térfogatváltozást, és ennek eredményeként mechanikai feszültség felépülését azonban nem csak száradás okozhatja. Az észak-írországi Bushmills városától nem messze, az Atlanti-óceán partján járva érdekes geológiai képződménnyel találhatjuk magunkat szemben: szabályos szerkezetű bazaltoszlopok ékesítik a tájat. Az ún. *Giant's Causeway*-ként ismert terület vulkáni tevékenység és az azt követő erózió eredményeképp nyerte el a mai formáját (2.3. ábra). A lassan hűlő lávában a repedések a felszínen indulnak meg, amelyeket a haladó hőmérsékleti gradiens hajt a mélyebb rétegek felé. A felszínen kezdetben T alakú elágazási pontok jönnek létre, ám ahogy a repedések mélyebbre hatolnak, energetikai szempontból kedvezőbb Y alakú elágazási pontok jelennek meg, és ennek lesz az eredménye a szabályos oszlopszerkezet [6–10]. A lávaréteg legfelső, poligonális szerkezetű része az évmilliók során erodálódott, emiatt látjuk ennyire szabályosnak a repedési képet.

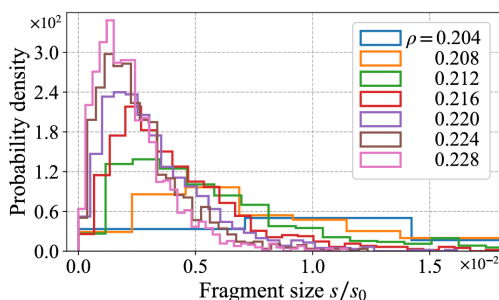


2.4. ábra. Repedési mintázat időfejlődése zsugorodó vékonyrétegben (Akio Nakahara felvétele)

Hordozó felületéhez tapadt vékonyréteg esetén az inhomogén feszültségtér felépülését tovább erősíti, hogy a réteg szabad, felszíni tartománya könnyen elmozdul, míg a letapadt alján közel mozdulatlan marad. Ilyen vékonyrétegek a festmények is. A festékréteg száradása során a hordozó felületéhez kapcsolt anyagdarabok nem tudnak elmozdulni, ezért mechanikai feszültség lép fel, és ennek feloldására repedés nukleáció és terjedés zajlik az anyagban. Később ezek a repedések (az ún. *craquelé*-k) nagyon hasznosnak bizonyulnak pl. eredetiségvizsgálatoknál [45]. A réteg zsugorodása során a σ_c kritikus feszültséget a

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{G_c E}{\pi a}} \quad (2.3)$$

összefüggéssel jellemezhetjük [1], ahol G_c a repedések létrehozásához szükséges energia, E a Young-modulus, a pedig a repedések hosszának nagyságrendjébe eső karakterisztikus hossz. G_c értékének becsléséhez figyelembe vesszük, hogy a repedések létrejötte atomi szinten néhány elektronvoltnyi ($\sim 10^{-19} J$) energiát igényel. Mivel a legtöbb szilárdtestben az atomi kötések sűrűsége $\sim 10^{19} 1/m^2$, ezért a repedések létrehozásához szükséges minimális energia $G_c \sim 0.1 - 10 J/m^2$ -nek adódik. Ez egy józan becslés rideg, illetve szemcsés, porózus anyagokra is.

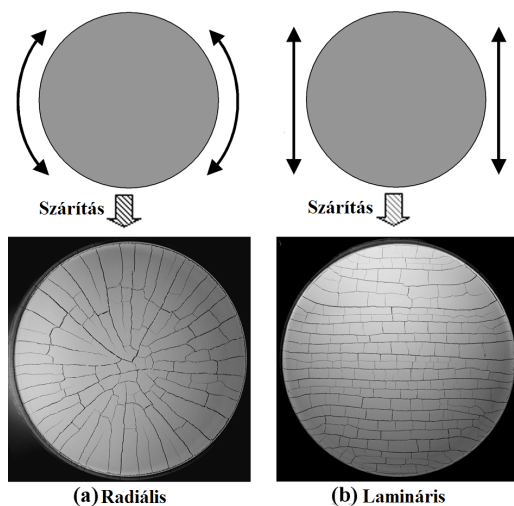


2.5. ábra. Sűrű paszta száradó vékonyrétegében létrejövő fragmensek tömegének eloszlása a szilárd anyag ρ térfogati hányadának különböző értékeinél [14].

Laboratóriumi mérések segítségével lehetőségünk van kvantitatív módon is jellemezni a repedési mintázatokat. A vizsgálatok azt mutatják, hogy a repedések leggyakrabban az energetikailag legkedvezőbb 90° -os szögben találkoznak egymással [12], a fragmensek sarokpontjainak átlagos száma négy közelébe esik [46], valamint a fragmensek végállapoti mérete a rétegvastagsággal lineárisan változik [12]. A kísérletek [14] és elméleti számolások [47] arra is rámutattak, hogy a fragmensek tömegeloszlása lognormális függvényalakkal jellemezhető (lásd 2.5. ábra). Ennek háttérében a vékonyrétegek repedezésének dinamikája áll: a repedezés kezdeti szakaszán véletlenszerű repedés nukleáció és terjedés zajlik a rendszerben, majd az összefüggő repedési hálózat megjelenése után átlépünk a bináris fragmentáció fázisába és a fragmensek elkezdenek két darabra törni. A fragmensek bináris törése egy multiplikatív folyamat, amely a *Gibrat-törvény* szerint lognormális eloszlásra vezet. A vizsgálatok arra is rámutattak, hogy a vékonyrétegek repedezésének késői szakaszában a fragmensek életideje mérettől függő lesz a talajtól való elválás miatt, ekkor a tömegeloszlás az általános gamma eloszlással lesz leírható.

2.3. Repedési mintázatok kontrollja

A repedések megjelenése és terjedése egy zsugorodó vékonyrétegben, az anyag belső heterogenitása miatt, általában sztochasztikus folyamat, nem tudjuk előre megmondani, hol jelenik meg egy adott repedés és milyen irányban növekedik tovább. Ezen véletlenszerűség miatt a vékonyrétegek fragmentációja általában elkerülendő, hiszen a repedések megjelenésével romlik a termék minősége, illetve csökken az élettartama. Ugyanakkor az elmúlt évek kísérleti vizsgálatai rámutattak, hogy lehetőségünk van a repedési mintázat szerkezetének kontrolljára, ami felvetette a repedési mechanizmus litográfiai módszerekben történő alkalmazásának lehetőségét. Az egyik ilyen vizsgálat [15] során egykristály szilícium szubsztrát felszínébe mikrométeres távolságban karcoltak különböző alakzatokat, majd alacsony nyomású kémiai gőzleválasztó technológiával ugyancsak mikrométeres vastagságú szilícium-nitrid (Si_3N_4) filmréteget hoztak rajta létre. A réteg lerakódása után a hordozórétegbe karcolt mintázatnak megfelelően jelentek meg repedések a szubsztrát és a film között fellépő feszültség miatt. Egy másik vizsgálatban [17] a hordozóréteg speciális kialakításával mesterségesen hoztak létre mechanikailag gyengébb régiókat a nikkel-oxid/nikkel-hidroxid ($\text{NiO}/\text{Ni}(\text{OH})_2$) vékonyrétegben, a hőkezelés során ezen régiók mentén alakultak ki a repedések az anyagban. Makroszkopikus skálán is lehetőségünk van a repedések kontrolljára. Egy ilyen vizsgálatban [16] azt találták, hogy amennyiben 3D nyomtatott műanyag felületekre dimetilpolisziloxán (PDMS) réteget feszítünk és egy kezdeti vágással létrehozunk egy Griffith-repedést, akkor a megfeszített rétegben a felület görbületének megfelelően terjed tovább a károsodás. Más vizsgálatokban nem az egyedi repedéseket, hanem a repedési mintázat szerkezetét kontrollálták: az egyik ilyen vizsgálatban [18] vékony poliuretán (PU) habrétegre szubmikron vastagságú aranyfilmet párologtattak, majd megnyújtották ezt a rendszert egy irányban. A nyújtás hatására ráncok és repedések keletkeztek az aranyrétegben, de a film összefüggő maradt. Az eredményül kapott,



2.6. ábra. Anizotróp repedési mintázatok [11]. (a) Sugárirányú repedési kép alakul ki, ha a paszta az edény tengelye körül lett gerjesztve. (b) Lamelláris repedési kép jelenik meg, amennyiben a kezdeti gerjesztés egy irányban történt.

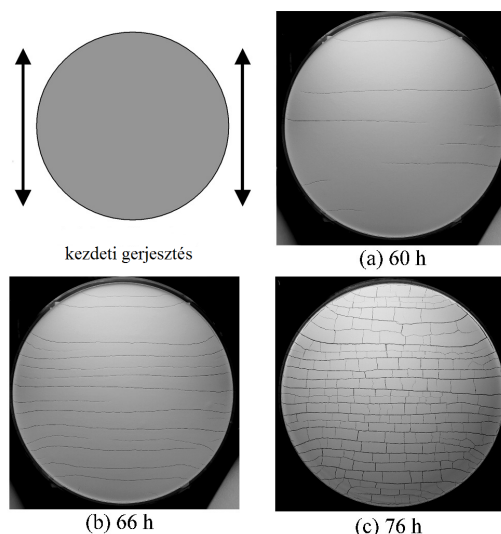
repedéseket tartalmazó fémréteg ezek után drámai alakváltozásokra volt képes anélkül, hogy a vezetőképessége sérült volna.

A doktori munkám egyik motivációjául szolgáló kísérletben [11] is a repedési mintázat szerkezetét sikerült kontrollálni. A kísérlet során sűrű kalcium-karbonát (CaCO_3) pasztát kör alakú, 500 mm átmérőjű plexi edénybe helyeztek, majd a paszta nagy plaszticitása miatt a rendszert a tároló tengelye mentén 1 percen keresztül oda-vissza forgatták (2.6(a) ábra), hogy az kitöltse a rendelkezésre álló teret. A forgatás után a paszta rétegvastagsága 13 mm volt. Ezután a rendszert 30%-os relatív páratartalom mellett, 25 °C-os hőmérsékleten szárították. A szárítás után azt tapasztalták, hogy radiális repedési mintázat jött létre az anyagban. A kutatók először azt gondolták, hogy a mintázat az edény alakjának köszönhetően alakult ki. A következő vizsgálatban (2.6(b) ábra) megnézték, mi történik akkor, ha a mintát vízszintesen rezgetik egy irányban, 10 másodpercen keresztül, $f = 1$ Hz frekvencia és $r = 15$ mm amplitúdó mellett. A szárítás

után azt tapasztalták, hogy ebben az esetben a gerjesztés irányára merőlegesen hosszanti irányú repedések jöttek létre, amelyek felosztották a vékonyréteget téglalap alakú fragmensekre. Ez felvetette a lehetőségét annak, hogy az alkalmazott gerjesztés iránya az, ami befolyásolja a repedések terjedését.

A vizsgálatok során felmerült a kérdés, hogy létezik-e valamilyen időbeli korlát az alkalmazott gerjesztés hatására vonatkozóan. Ennek kiderítésére egy hasonlóan előkészített mintát egy dobozba zártak 1 hónap erejéig. A doboz hermetikusan zárt, így a páratartalom hamar telítődött, leállt a száradási folyamat, nem zsugorodott a réteg, így nem jelentek meg repedések a pasztában ez idő alatt. 1 hónap letelte után ismét elkezdték a mintát szárítani, és azt tapasztalták, hogy ismét lamelláris repedési kép alakult ki. Tehát az alkalmazott kezdeti gerjesztés hatása megmaradt a pasztában. További vizsgálatok arra is rámutattak, hogy a repedéseknek csupán az irányát lehet megszabni az alkalmazott gerjesztéssel, azok pontos térbeli helyzete véletlenszerűen alakul ki a száradás kezdeti fázisában.

A gerjesztés által a pasztában létrehozott hatás kétségtelenül fontos szerepet játszik ezen speciális repedési kép kialakulásában. Ám azt is lehet látni, hogy ez nem vezérli a repedési szerkezetet teljes egészében, hiszen az első repedések nukleációja véletlenszerűen zajlik a rendszerben. A jelenség megértéséhez meg kell vizsgálni a paszta mikrostruktúráját. A paszta egy kolloid, az őt alkotó részecskék a vonzó jellegű van der Waals-kölcsönhatáson keresztül lépnek egymással kapcsolatba. Amikor ezen sűrűn pakolt kolloid részecskéket rezgéssel gerjesztjük, akkor rugalmatlan ütközések révén sűrűségfluktuációk jönnek létre az anyagban a gerjesztés irányában. Emiatt a paszta lokális teherbíróképessége megváltozik, és a száradás során a kevésbé sűrű régiókban a gyengébb kötések hamarabb felszakadnak. A repedési minta időbeli kialakulására vonatkozó vizsgálatok rámutattak, hogy kezdetben a repedések a gerjesztés irányára merőlegesen indulnak meg (2.7(a) ábra). Az idő előrehaladtával újabb repedések jelennek meg, párhuzamosan a már meglévő repedésekkel (2.7(b) ábra)

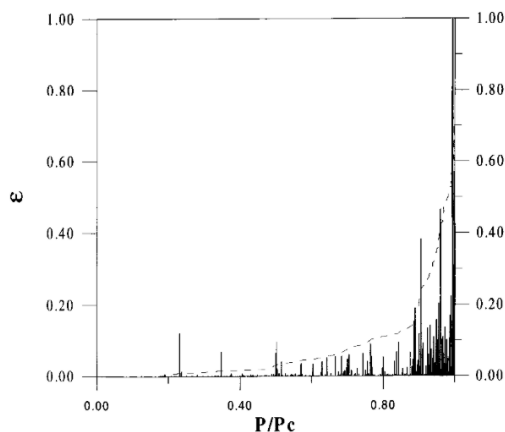


2.7. ábra. Lamelláris repedési mintázat időfejlődése [11]. A bal felső sarok ábrája a gerjesztés irányát illusztrálja. (a) A repedezés kezdeti fázisában véletlen nukleáció, utána pedig irányított repedezés zajlik a rendszerben. (b) Az idő előrehaladtával a már meglévő repedésekkel párhuzamosan újabb repedések jelennek meg a rétegben. (c) Amikor a repedések közötti távolság a paszta vastagságának nagyságrendjébe esik, másodlagos repedések szegmentálják a fragmenseket.

mindaddig, míg a közöttük lévő távolság a paszta rétegvastagságának nagyságrendjébe nem esik. Ezek után a már meglévő repedésekre merőleges, másodlagos repedések szegmentálják a hosszú, téglalap alakú fragmenseket kisebb darabokra (2.7(c) ábra).

2.4. Repedési zaj

Egy papírdarab összegyűrésétől [48, 49] a szilárdtestekben végbemennő fázisátalakulásokon át [50–54] a földrengésekig [55, 56] számos helyen találkozhatunk repedési zajjal. Ezek az akár füllel is hallható mechanikai hullámok a repedések keletkezése, illetve lavinákban történő terjedése során alakulnak ki a lokálisan felhalmozódott elasztikus energia felszaba-



2.8. ábra. Az akusztikus emissziós események normált energiája a terhelés függvényében hasáb alakú próbatest kvázisztatikus nyújtása során [60]. A spektrum különálló zajcsomagokból áll, melyek átlagos amplitúdója a terhelés növelésével nő.

dulása révén. Renormálási csoport módszerek [57] azt jósolják, hogy a legkülönbözőbb, repedési zajt kibocsájtó rendszerek fixpontokhoz tartanak, ami univerzális skálázási viselkedést eredményez. Az univerzalitási osztályok azonosítása az anyagok tulajdonságainak hatékony előrejelzését teszi lehetővé az alkalmazások széles körében [58]. Akusztikus emissziós vizsgálatok során piezoelektromos mikrofonok segítségével monitorozzák a törés mikroszkópikus folyamatát. A mikrorepedési események által emittált zaj nagyon alacsony intenzitású, így hatékony érzékelésük fejlett erősítő és zajszűrő technikát igényel. Amennyiben a repedező rendszer felületének több pontján is mikrofonokat helyezünk el, úgy a minta környezetéből származó zajok szűrésén túl a törési folyamat térbeli és időbeli fejlődéséről is információt kaphatunk [59, 60].

A méréssel kapott zaj idősor általában jól elkülönülő zajcsomagokból áll (2.8. ábra), amelyek egy-egy törési eseménynek feleltethetők meg. Ezen események E_i^a energiája arányos a repedés által felszabadított energiával. Fontos mennyiség az esemény időtartama, továbbá az egymást követő tö-

rési események között eltelt t_W^i várakozási idő is. Az akusztikus események $P(E^a)$ energia eloszlása és $P(\Delta t)$ időtartam eloszlása a legkülönbözőbb-féle heterogén anyagokon végzett kísérletek [60–69] alapján a földrengések sorozatait jellemző skálatörvények szerint viselkedik:

$$P(E^a) \sim (E^a)^{-b}, \quad (2.4)$$

$$P(\Delta t) \sim \Delta t^{-\alpha}, \quad (2.5)$$

ahol az exponensek értéke $b = 1.0–2.0$ és $\alpha = 1.0–1.5$ az energiabetáplálás módjától és az anyagi minőségtől függően.

A 2.8. ábrán jól látható, hogy a terhelés növelésével a repedési események egyre sűrűbben jelennek meg, azok amplitúdója pedig egyre nagyobb lesz, azaz a σ_c kritikus terhelés felé haladva a károsodási folyamat gyorsul. Kísérleti vizsgálatok [60] rámutattak, hogy az akusztikus jeleket jellemző paraméterek és azok integrált kumulatív értékei hatványfüggvény divergenciát mutatnak a kritikus ponttól mért távolság függvényeként, így például a kumulatív energia

$$\langle E^a \rangle \sim (\sigma_c - \sigma)^{-\phi} \quad (2.6)$$

módon skálázódik. Ez a skálaviselkedés erős analógiát mutat a folytonos fázisátalakulások jellemzőivel, ami felvetette annak a lehetőségét, hogy heterogén anyagok törési folyamata folytonos fázisátalakulásként írható le.

A zsugorodás okozta repedézzel kapcsolatos akusztikus emissziós vizsgálatok száma meglehetősen korlátozott az irodalomban. A száradás és megszilárdulás közben zsugorodó betonon végzett akusztikus emissziós mérések [70, 71] nem univerzális, a száradás előrehaladtával növekedő hatványkitevőket mutattak ki. A zsugorodás okozta repedések intermittens növekedését megfigyelték [72] az oszlopos lávaelválások kialakulása során is, pl. a Kilaue-i lávatavak esetén a rengéshullámok detektálása révén. A repedési események statisztikáiról azonban nem állnak rendelkezésre szisztematikus adatok. Általánosságban elmondható, hogy a bazaltoszlopok

felületén gyakran megfigyelhető, különös, vésésszerű nyomok, az úgynevezett *striák*, a repedési front gyors előrehaladásának nyomai, amelyet a lassú zsugorodás vált ki [73, 74]. A repedési zaj nem-univerzális viselkedését figyelték meg a Barkhausen-zaj esetében is, ahol a mágneses doménfalak mozgása lokális lavináinak szuperpozíciója volt felelős a repedési zaj exponenseinek rátafüggéséért. A mágneses tér rátájának változtatásával a méret- és időtartam exponensek lineáris viselkedését találták [51]. A töltési-kisütési ciklusok során pl. a lítium-ion akkumulátorok delithiációs folyamata az elektróda anyagának térfogatváltozását okozza, ami végül akusztikus kitörésekkel járó repedéseket hoz létre [31, 32]. A repedezést kísérő akusztikus zaj mélyebb fizikai megértése segíthetne a különböző töltési-kisütési rátáknál mért akusztikus eseménysorokban kódolt információ megfejtésében, ami alapjául szolgálhat új technológiák kifejlesztésének akkumulátorok állapotának akusztikus monitorozására.

3. fejezet

Vékonyréteg repedezési folyamatainak diszkrét elem modellezése

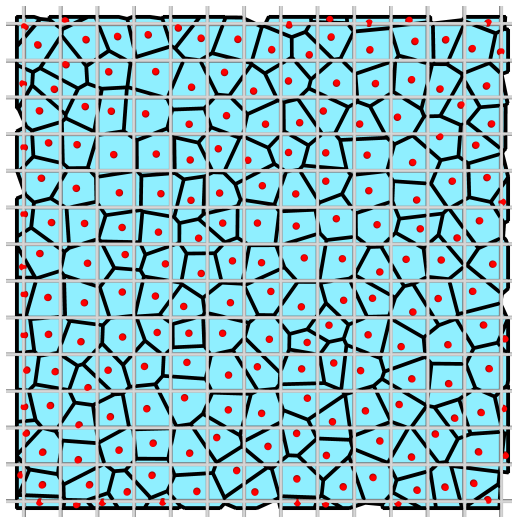
A heterogén anyagok elméleti vizsgálata a releváns hosszúság skálától függően más-más modellezési megközelítést igényel. A mérnöki munka során az elméleti leírás tipikusan a kontinuumok mechanikájára épül: ekkor a vizsgált anyag pontos részleteit egy homogenizációs eljárás keretén belül elkenik, majd a rendszer terhelés alatti viselkedését végeelem módszerrel írják le [75]. A módszer a kontinuumok mechanikájának parciális differenciál egyenleteit oldja meg rácson diszkrétizálva a próbatestet. A módszer előnye, hogy segítségével nagyméretű struktúrák (épületek, járművek) diszkrétizálhatók, és a kialakuló feszültségtér jó pontossággal reprezentálható. Hátránya, hogy a heterogenitás ezekben a modellekben csupán kis perturbációk formájában vehető figyelembe, ráadásul egy repedés megjelenése diszkontinuitást eredményez, ami további speciális kezelést igényel. Ám a legfejlettebb megközelítési módok sem tudnak néhány repedésnél többet kezelni, így nyilvánvalóan nem ez a legmegfelelőbb eljárás heterogén anyagok törési jelenségeinek vizsgálatára, ahol nagyszámú repedés szimultán terjedését kell kielégítő pontossággal kezelni.

A törési jelenségek modellezésénél a kihívás az, hogy képesek legyünk megragadni a lokális fizikai jellemzők részleteit úgy, hogy a hosszú hatótávolságú kölcsönhatás révén felépülő inhomogén feszültségteret is figyelembe vegyünk, illetve képesek legyünk kezelni több repedés szimultán megjelenését is. Emiatt a statisztikus fizikai megközelítés elsősorban az ún. sztochasztikus modellekre épül [76]. A modellek általában nagy számú részecskéből állnak, amelyek egymással kölcsönhatnak, ezért analitikus megoldásra csupán egyszerűsítő feltevések mellett van lehetőség. Így elsősorban számítógépes szimulációkra vagyunk utalva, ahol a szimuláció alapját képező méretskála tipikusan a mezoszkopikus tartományra terjed ki.

A sztochasztikus modellek egyik legfontosabb típusát a Diszkrét Elem Modellek (DEM) alkotják. A modellben a szilárdtestnek először elvégzik a fizikai *diszkrétizációját*, utána meghatározzák az így előállított diszkrét elemek *kölcsönhatásait*, majd a *mozgásegységet-rendszer* numerikus megoldásával előállítják a rendszer időfejlődését. A következőkben ismertetem a kutatócsoportunk által korábban kidolgozott diszkrét elem modellezési eljárást [77], amelynek saját munkám során két kiterjesztését vezettem be.

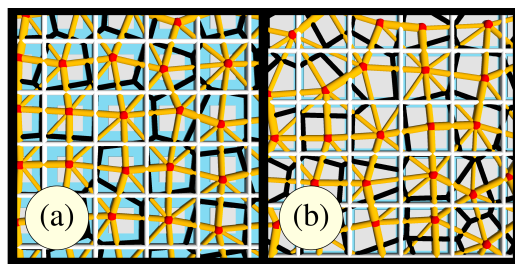
3.1. Zsugorodás által okozott repedezés diszkrét elem modellje

Doktori munkám során egy merev hordozóra felvitt vékonyréteg zsugorodás által okozott repedezési folyamatait vizsgáltam diszkrét elem módszerrel [78], melynek Molekuláris Dinamika (MD) szimulációja [79–81] a kölcsönható részecskerendszer időfejlődését a részecskék klasszikus mechanikai mozgásegységet-rendszerének numerikus megoldásával állítja elő. A modellkonstrukció első lépéseként a vékonyréteget mezoszkopikus méretű poligonokra bontjuk egy regularizált *Voronoi-konstrukció* [82–85] segítségével. A módszerrel a d dimenziós tér egy véges tartományát véletlen alakú konvex poligonokkal vagy poliéderekkel fedhetjük le hézagmentesen. Az eljárás magasfokú izotrópiát és jól kontrollálható rendezetlenséget nyújt. A



3.1. ábra. Egy 15×15 méretű rendszer Voronoi-konstrukciója $a = 0.8$ mellett: egy négyzet alakú próbatestet egységnyi rácállandójú négyzetrácsal fedünk le, majd a rács plakettjein belül, a középpont köré egy újabb, a oldalélű négyzetet helyezünk. Végül minden a oldalélű négyzetben véletlenszerűen elhelyezünk egy pontot, amellyel elvégezzük a Voronoi-konstrukciót.

módszer két dimenzióban mindig egy négyzetből indul ki, amelyre egységnyi oldalélű négyzetrácsot illesztünk (3.1. ábra). Ezután a rács plakettjeinek középpontja köré egy kisebb, a oldalélű ($0 < a < 1$) négyzet kerül. Végül minden egyes a oldalélű négyzetbe véletlenszerűen elhelyezünk egy pontot, amelyek segítségével elvégezzük a Voronoi-konstrukciót. Az eljárás minden ponthoz hozzárendel egy ún. Voronoi-cellát, amelyek a modell diszkrét elemeit alkotják. Az a paraméter változtatásával kontrollálható a diszkretizáció rendezetlenségének mértéke: $a \rightarrow 0$ határesetben egy majdnem tökéletes négyzetrácsot kapunk, míg a növelésével az eljárás magas fokú izotrópiával rendelkező véletlen rácsot eredményez. A poligonok a modellben a rendszer legkisebb részecskéi, amelyek az anyag szemcséit reprezentálják. Belső szabadsági fokokkal nem rendelkeznek; őket három folytonos szabadsági fokkal, a tömegközéppont x és y térkoordinátájával,



3.2. ábra. A részecskék közötti kohézív kontaktusok reprezentálása érdekében a szomszédos poligonok tömegközéppontját rugalmas, törhető rúdelemekkel kötjük össze. A Voronoi-konstrukció eredményét a fenti ábra szemlélteti (a) $a = 0.5$ és (b) $a = 0.8$ esetekre. Minél vastagabb és rövidebb egy rúdelem, annál nehezebben törnek el.

valamint a tömegközéppont körüli elfordulás θ szögével jellemezhetjük. A vizsgálatainkhoz a négyzet alakú, diszkrétizált rétegből kivágtunk egy kör alakú próbatestet és azon folytattuk tovább a modellkonstrukciót.

A modellkonstrukció második lépésében olyan kölcsönhatásokat vezetünk be a poligonok között, amellyel a számolások reprodukálni tudják a vizsgált anyag elvárt makroszkopikus mechanikai válaszát. A zsugorodó rétegben lezajló folyamatok reprezentálása érdekében a szomszédos poligonok tömegközéppontját rúdelemekkel kapcsoljuk össze (3.2. ábra). A rúdelemek szerepe kettős: egyrésztől törhetőek, ami lehetővé teszi a repedések keletkezését a rendszerben; másrésztől pedig rugalmas visszatérítő erőt és forgatónyomatékokat biztosítanak a poligonok között a test deformációja közben. A Voronoi-konstrukció miatt a rudak alkotta háromszögrács is véletlenszerű, ami egyben a Voronoi-lefedés duális Delaunay-háromszögrácsát adja [82, 86]. A rúdelemek anyagi jellemzői a szemcsék közötti határfelület fizikai tulajdonságait reprezentálják, így azok paramétereit a rendszer lokális geometriai struktúrájától is függnek: az i és j poligonokat összekötő rúd l_0^{ij} nyugalmi hossza a két poligon tömegközéppontjának távolsága, míg a rúd S_0^{ij} keresztmetszete a poligonok közös oldalának hossza a kezdeti konfigurációban. Ezen geometriai jellemzők-

kel nem csupán hosszirányú deformációt, hanem nyírást és hajlítást is le tudunk írni. Ezeket a következő konstansokkal jellemezhetjük:

$$a^{ij} = \frac{l_0^{ij}}{ES_0^{ij}}, \quad (3.1)$$

$$b^{ij} = \frac{l_0^{ij}}{GS_0^{ij}}, \quad (3.2)$$

$$c^{ij} = \frac{(l_0^{ij})^3}{EI^{ij}}, \quad (3.3)$$

ahol E és G a rúdelemek Young- és nyírási rugalmassági modulusza, I^{ij} pedig az i és j poligonokat összekötő rúd tehetetlenségi nyomatéka. Minden rúdelemet ugyanolyan E jellemez, míg G értéke úgy lett megválasztva, hogy fennálljon a $b^{ij} = 2a^{ij}$ egyenlőség. A rúd lokális koordinátarendszerében minden poligon középpontot három folytonos változó jellemez: az i poligon \vec{u}^i elmozdulásának két komponense (u_n^i, u_t^i) és a θ^i forgási szög. Az i és j poligonokat összekötő rúdelem által az i végpontra kifejtett longitudinális és nyíró erő rendre

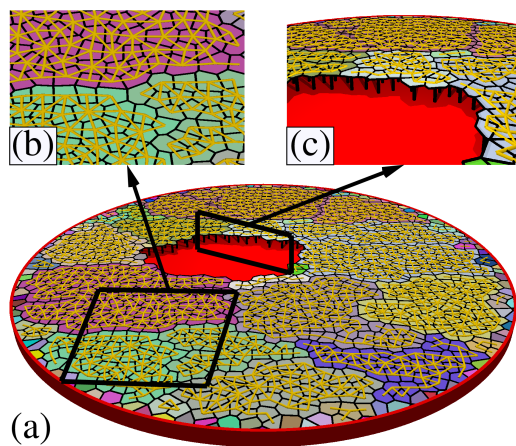
$$F_n^{ij} = D_b^{ij}(u_n^j - u_n^i), \quad (3.4)$$

$$F_t^{ij} = \beta^{ij}(u_t^j - u_t^i) - \frac{\beta^{ij}l_0^{ij}}{2}(\theta^i + \theta^j), \quad (3.5)$$

míg a forgatónyomaték

$$M_z^i = \frac{\beta^{ij}l_0^{ij}}{2}(u_t^j - u_t^i + l_0^{ij}\theta^j) + g^{ij}(l_0^{ij})^2(\theta^j - \theta^i), \quad (3.6)$$

ahol $D_b^{ij} = \frac{1}{a^{ij}}$, $\beta^{ij} = \frac{1}{b^{ij} + \frac{1}{12}c^{ij}}$ és $g^{ij} = \beta^{ij} \left(\frac{b^{ij}}{c^{ij}} + \frac{1}{3} \right)$. Bebizonyítható, hogy a rudak ily módon történő parametrizációja a rugalmasságtan



3.3. ábra. A modellkonstrukció főbb komponensei: (a) a zsugorodó vékonyréteg diszkrétizációja konvex poligonok halmazaként. A kör alakú próbatestet egy négyzetből vágtuk ki. (b) A poligonok mezoszkopikus méretű anyagdarabokat, míg az őket összekötő rudak (sárgával) azok kohézív, törhető kontaktusait reprezentálják. (c) A hordozóréteggel történő adhézió úgy jelenik meg a modellben, hogy a rudak tömegközéppontja rugalmas, törhetetlen rugókkal van az azok alatti síkkal összekapcsolva. A kör szélén lévő poligonok rögzítve vannak a konténer falához (pirossal). Két poligon közötti rúdelem törése egy mikrorepedés megjelenését jelenti a rendszerben. A rúdelemekkel összekapcsolt poligonok összefüggő klasztere alkot egy fragmenst (különböző színekkel jelölve (b)).

Cosserat-egyenleteinek diszkrétizációját adja, amely a *Lamé-Navier egyenletek* helyett írja le a szemcsés szerkezetű szilárdtestek rugalmas viselkedését [76, 87]. A szimulációk elején a kezdeti konfigurációban a rudak deformálatlanok, a minta teljesen feszültségmentes.

A modellben a hordozóréteggel történő adhéziót úgy vettük figyelembe, hogy a poligonokat törhetetlen rugókkal kötöttük össze az alattuk lévő síkkal. Kezdetben ezek a rugók feszültségmentesek, ám a poligonok elmozdulásával egy rugalmas visszatérítő erőt fejtenek ki

$$\vec{F}_i^s = -D_s(\vec{r}_i - \vec{r}_i^0), \quad (3.7)$$

ahol a D_s rugóállandó jellemzi az adhézió erősségét, $\vec{r}_i^0 = (x_i^0, y_i^0)$ az i po-

ligon kezdeti pozíciója, $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ pedig a poligon aktuális pozíciója. D_s értéke minden rugóelemre ugyanakkora. A modellkonstrukció főbb lépéseit a 3.3. ábra illusztrálja.

Feltesszük, hogy a vékonyréteg izotróp zsugorodásnak van kitéve a modellben. A zsugorodás folyamatát úgy reprezentáljuk, hogy csökkentjük a tömegközéppontokat összekötő rudak nyugalmi hosszát az

$$l^{ij} = l_0^{ij}(1 - st) \quad (3.8)$$

módon, ahol s a deformációs ráta, t pedig az eltelt idő. A rendszer ily módon történő fejlődése révén időben lineárisan növekvő fajlagos deformációt kapunk:

$$\varepsilon = \frac{l_0^{ij} - l^{ij}}{l_0^{ij}} = st. \quad (3.9)$$

Ennek eredményeként az első rúdelem töréséig a rendszerben homogén deformációs tér alakul ki, ami később inhomogénná válik a töredezés hatására. Mivel a poligonok a hordozó felületéhez vannak kapcsolva, nem tudnak szabadon elmozdulni, így a rudak törését a zsugorodás miatt növekvő deformációjuk okozza.

A repedési folyamatok leírása érdekében elengedhetetlen a modell kiegészítése a rácsecske-részecske kontaktusok törési feltételével, amely meghatározza, hogy mely túlfeszített rudakat törjük el, azaz távolítjuk el a rendszerből. Nem túl gyors deformáció esetén a rúdelemek törését azok túlzott longitudinális deformációja vagy elhajlása okozhatja. Ezt a kétféle törési módot veszi figyelembe a

$$\left(\frac{\varepsilon_{ij}^b}{\varepsilon_{th}}\right)^2 + \frac{\max(|\theta^i|, |\theta^j|)}{\theta_{th}} \geq 1 \quad (3.10)$$

feltétel, ahol ε_{th} és θ_{th} a rudak teherbíró képességét jellemző törési küszöbök, értékük minden rúdelemre ugyanakkora izotróp rendszer esetén. Ez azt jelenti, hogy nincs rendezetlenség a rudak erősségében, a modellben a

rendezetlenség egyetlen forrását a poligonális tér véletlen struktúrája jelenti, ami a 3.1., 3.2. és 3.3. egyenleteken keresztül épül be a dinamikai egyenletekbe. A 3.10. egyenlet a képlékeny deformációs határra von Mises által bevezetett feltétel analogonja [76, 84, 85, 88]. A kritérium csak a nyújtott rudakra ad feltételt, így a modell jól reprezentálja, hogy a szilárdtestek elsődleges repedési mechanizmusa a húzófeszültség okozta törés megjelenés.

A modellkonstrukció harmadik lépésében a kölcsönhatások birtokában felírjuk a részecskerendszer klasszikus mozgásegyenlet rendszerét:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1 \neq i}^N \vec{F}^{ij}, \\ I_i \ddot{\theta}_i &= \sum_{j=1 \neq i}^N M_z^{ij}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

ahol m_i az i poligon tömege, N a részecskék teljes száma, F_{ij} és M_{ij} pedig a j poligon által i -re kifejtett erőt és forgatónyomatéket jelentik. Ezután ezt az egyenletrendszert numerikusan megoldjuk, azaz molekuláris dinamika szimulációt végzünk [79–81]. Az egyenleteket ötödrendű *Prediktor-Korrektor módszerrel* oldottuk meg, amely nagy pontosságot és stabilitást biztosít a számolásokhoz. A módszer iterációs lépésenként az erőt csupán egyszer értékeli ki, viszont a pontosság javítása érdekében egy hibaminimalizációs eljárást is tartalmaz. Iterációs lépésenként három művelet hajtódik végre, az ún. *Prediktor lépés*, a *Kiértékelési lépés*, illetve a *Korrektor lépés*. A módszer mélyebb megértése érdekében tekintsük a harmadrendű Gear prediktor-korrektor módszert [81]. A prediktor lépésben a helykoordinátát, a sebességet, a gyorsulást és a magasabb deriváltakat a Taylor-sorukkal

becsüljük

$$\begin{aligned}
 x^p(t + \delta t) &= x(t) + v(t)\delta t + \frac{1}{2}a(t)\delta t^2 + \frac{1}{6}b(t)\delta t^3, \\
 v^p(t + \delta t) &= v(t) + a(t)\delta t + \frac{1}{2}b(t)\delta t^2, \\
 a^p(t + \delta t) &= a(t) + b(t)\delta t, \\
 b^p(t + \delta t) &= b(t).
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

A következő lépésben kiértékeljük a kapott eredményt, azaz a becsült mennyiségek segítségével kiszámítjuk a részecskékre ható erőt (és forgatónyomatékokat):

$$F^p = F(x^p, y^p) \quad \longrightarrow \quad a^c(t + \delta t) = \frac{F^p}{m}. \tag{3.13}$$

Végül a korrektor lépésben a kiértékeléssel kapott $a^c(t + \delta t)$ mennyiséget felhasználva korrigáljuk a prediktált értékeket. Ehhez meghatározzuk az a^p és a^c gyorsulások különbségét a

$$\Delta a(t + \delta t) = a^c(t + \delta t) - a^p(t + \delta t) \tag{3.14}$$

módon és elvégezzük a korrekciót az alábbi lineáris egyenletek alapján:

$$\begin{pmatrix} x^c(t + \delta t) \\ v^c(t + \delta t) \\ a^c(t + \delta t) \\ b^c(t + \delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^p(t + \delta t) \\ v^p(t + \delta t) \\ a^p(t + \delta t) \\ b^p(t + \delta t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Delta a(t + \delta t). \tag{3.15}$$

A (c_0, c_1, c_2, c_3) konstans együtthatók értékét úgy állítjuk be, hogy a kívánt pontosságot érjük el. Másodrendű differenciálegyenletek ötödrendű Prediktor-Korrektor módszere esetén az értékük $c_0 = \frac{3}{16}$, $c_1 = \frac{251}{360}$, $c_2 = 1$, $c_3 = \frac{11}{18}$, $c_4 = \frac{1}{6}$ és $c_5 = \frac{1}{60}$ [81].

A 3.1. táblázat tartalmazza a modell legfontosabb paramétereit. Az így megalkotott modellel számítógépes szimulációkat végeztem, széles tartományon változtatva a rendszer anyagi és dinamikai paramétereit. Az

elsődleges célom az volt, hogy a szimulációimmal jó minőségű numerikus eredményeket érjek el, ám a jelentős futási idők miatt sokszor kompromisszumot kellett kötnöm, így munkám során a próbatestek darabszámát ezen két peremfeltétel határozta meg.

3.1.táblázat: A modellt jellemző paraméterek.

Paraméter neve	Jele	Értéke
Rendszer sugara	R	60 cm
Poligonok átlagos darabszáma	N	11500
Rúdelemek átlagos darabszáma	N_B	33700
Részecskék átlagos lineáris mérete		1 cm
Szemcse Young-modulusa	Y	$1 \cdot 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$
Rúdelem Young-modulusa	E	$5 \cdot 10^9 \text{ dyn/cm}^2$
Időlépés	δt	$3 \cdot 10^{-7} \text{ s}$
Sűrűség	ρ	5 g/cm^3
Küszöb megnyúlás minimuma	ε_{th}^0	0.015
Küszöb elfordulási szög minimuma	Θ_{th}^0	3.0
Zsugorodási együttható	s	0.005 s^{-1}
Rugóállandó	D_s	$6 \cdot 10^8 \text{ dyn/cm}$

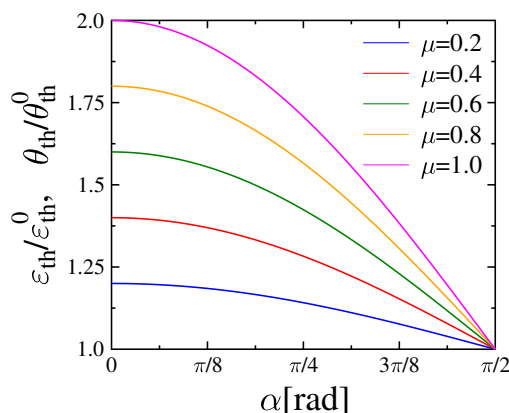
4. fejezet

Anizotróp repedési mintázatok fejlődése és szerkezeti jellemzői

A szabályozott repedéskeltésnek egy ígéretes módszere a réteg zsugorodás előtti mechanikai perturbációja, amelynek kísérleti megvalósítása a 2.3. fejezetben került ismertetésre. A módszer hátterének feltárása érdekében számítógépes szimulációval vizsgáltam egy anizotróp réteg repedési folyamatát. A heterogén vékonyrétegek korábban bemutatott diszkrét elem modelljéből indultam ki, amelyben az anizotrópiát a kohézív kontaktusok erősségének irányfüggésével vettem figyelembe. Számítógépes szimulációkat végeztem széles tartományon változtatva az anizotrópia erősségét és elemeztem a repedési mintázat időfejlődésének fázisait, valamint a repedések és a fragmensek statisztikus jellemzőit. A fejezetben bemutatott eredmények a [P1] publikáción alapszanak.

4.1. Lokális teherbíróképesség szögfüggése

Laboratóriumi vizsgálatok rámutattak, hogy a sűrű paszta kezdeti rázásával képlékeny alakváltozás jön létre az anyagban, amely nagy mérték-



4.1. ábra. Az ε_{th} és θ_{th} törési paraméterek szögfüggése különböző μ anizotrópia értékek mellett. Az α szöget a vízszintes tengelyhez képest mérjük.

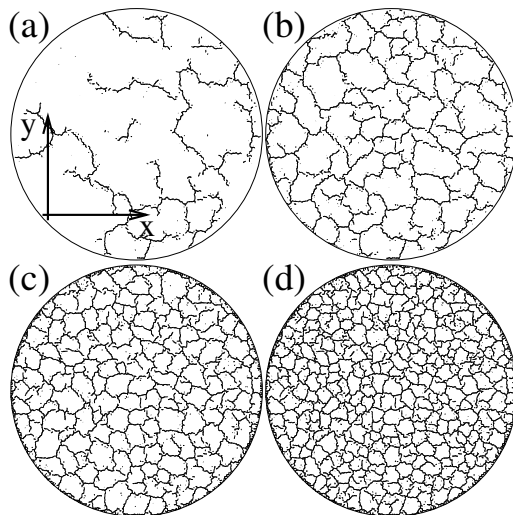
ben befolyásolja a megszilárduló anyag lokális erősségét. Ezt a kezdeti anizotrópiát úgy vettem figyelembe a 3. fejezetben bemutatott modellünkben, hogy a kohéziót biztosító rúdelemek törési küszöb értékeinek irányfüggést adtam a

$$\begin{aligned}\varepsilon_{th}(\alpha) &= \varepsilon_{th}^0(1 + \mu \cdot \cos \alpha), \\ \theta_{th}(\alpha) &= \theta_{th}^0(1 + \mu \cdot \cos \alpha)\end{aligned}\tag{4.1}$$

módon, ahol α a rúdelem vízszintes tengellyel bezárt szöge ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$), ε_{th}^0 és θ_{th}^0 pedig a rúdelemeket jellemző törési küszöbök minimális értékei (4.1. ábra). A kezdeti anizotrópia erősségét a szögfüggő tag μ szorzófaktorával kontrolláltam, amelynek értékét 0 és 5 között változtattam.

4.2. Repedezési folyamat különböző anizotrópia értékek mellett

Vizsgálataimhoz nagyszámú számítógépes szimulációt végeztem a fenti módon kiegészített diszkrét elem modellel széles tartományon változtatva a μ kezdeti anizotrópia értékét, hogy feltárjam, hogyan befolyásolja az

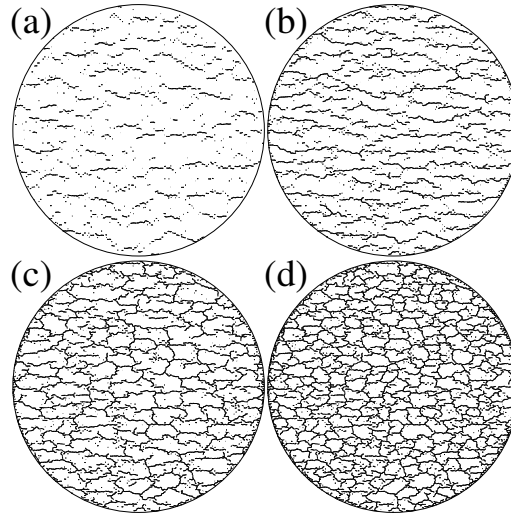


4.2. ábra. Izotróp ($\mu = 0$) vékonyréteg törési folyamatának időfejlődése. A pillanatfelvételek a d károsodás különböző értékeinél mutatják a rendszer állapotát: (a) $d = 0.06$, (b) $d = 0.14$, (c) $d = 0.22$, (d) $d = 0.30$. A repedések véletlenszerű helyeken keletkeznek és fokozatosan nőnek (a, b). A fragmensek akkor alakulnak ki, amikor létrejön az összefüggő repedési hálózat, ami (c) és (d) között következik be. A további zsugorodás a fragmensek bináris fragmentációját eredményezi (d), amely fokozatosan csökkenti a méretüket. Az (a) ábra az eredmények bemutatása során használt koordinátarendszert is szemlélteti.

anizotrópia a törési folyamat időfejlődését és a kialakuló repedési hálózat szerkezetét a réteg fokozatos zsugorodásával. A törési folyamat során a réteg által elszennvedett teljes károsodás számszerűsítésére bevezettem a törött rúdelemek $d(t)$ hányadát a $d(t) = N_b(t)/N_B$ módon, ahol N_b a t időpontig eltört rúdelemek száma, N_B pedig a kezdeti állapotban a rétegben lévő rúdelemek teljes száma. A modell nagyon fontos jellemzője, hogy rendezetlenségnek csupán egyetlen forrása van, a poligonok véletlen alakja, amely irányfügges nélküli szerkezeti rendezetlenséget vezet be a rétegben. Emiatt a törési küszöbértékek nulla anizotrópiája esetén ($\mu = 0$) - ami a kísérletek során a kezdeti mechanikai gerjesztés hiányát jelenti - celluláris repedési mintázat várható, a repedések orientációjának nagyfokú izotrópi-

ájával. Ezt szemlélteti a 4.2. ábra, ahol a repedési mintázat fejlődésének pillanatfelvételei láthatók $\mu = 0$ -nál a d károsodási paraméter 4 különböző értékére. A rúdelemek törésének elkezdődése előtt a réteg zsugorodása homogén feszültségmezőt eredményez, emiatt a repedések véletlenszerű helyeken indulnak meg. A korábbi vizsgálatokkal összhangban [1, 77, 89], a repedések növekedése során a repedések hegye instabillá válik és elágazás következhet be, ahogy az a 4.2(a) ábrán megfigyelhető. A zsugorodás előrehaladtával a növekvő repedések összeolvadnak, és fokozatosan összefüggő repedési hálózatot alkotnak, amely mentén a réteg darabokra esik szét. Ezt a pontot valahol a 4.2(c) és (d) ábrák között érjük el, körülbelül a $d_c \approx 0.28$ károsodásnál. A további zsugorodás hatására feszültség halmozódik fel a fragmensek belsejében, ami egy idő után repedést hoz létre a fragmensek közepéből kiindulva, két részre bontva őket, fokozatosan csökkentve ezzel a méretüket (4.2(c,d) ábra).

A szimulációk rámutattak, hogy az anizotrópia $\mu > 0$ jelenléte erős hatást gyakorol mind a repedések keletkezésére, mind pedig a terjedésére, ami viszont a repedési mintázat szerkezetében és a fragmensek geometriai jellemzőiben is megmutatkozik. Ezt szemlélteti a 4.3. ábra $\mu = 1$ esetén, amely 4 pillanatfelvételt mutat be a törési folyamat különböző d károsodási szakaszaiban bekövetkező fejlődésről. Az anyag ε_{th} és θ_{th} lokális erősségének irányfüggése miatt a törési folyamat kezdeti szakaszában azok a rúdelemek törnek el, amelyek a vízszintes iránnyal nagyobb ($\alpha \approx \pi/2$) szöget zárnak be. A rúdelemek eltávolítása a poligonok szélei mentén mikro-repedéseket hoz létre, amelyek közel merőlegesek a rudak irányára. Ennek következtében az elsődleges repedések főként a vízszintes irányban nőnek, amint az a 4.3(a) ábrán megfigyelhető. Ahogy a zsugorodással a rétegben a feszültség növekszik, a vízszintes irányhoz képest kisebb szögben elhelyezkedő erősebb rúdelemek is törni kezdenek, és még a függőleges irányban is keletkezhetnek repedések (4.3(b) ábra). Amikor létrejön az összefüggő repedési hálózat, a fenti repedési mechanizmus a keletkező fragmensek erős anizotrópiáját eredményezi (4.3(c) ábra). Érdekes megfigyelni, hogy



4.3. ábra. A repedező vékonyréteg időbeli fejlődése $\mu = 1$ anizotrópia jelenlétében. A pillanatképek a törött rudak d arányának különböző értékeinél mutatják be a rendszer állapotát: (a) $d = 0.06$, (b) $d = 0.14$, (c) $d = 0.22$, (d) $d = 0.30$. Az elsődleges repedések a vízszintes irányhoz (a, b) igazodnak. Az összefüggő repedéshálózat akkor alakul ki, amikor a másodlagos repedések függőlegesen csatlakoznak az elsődlegesekhez (c). Kezdetben a fragmensek erős anizotrópiával rendelkeznek (c), amely aztán a bináris fragmentációval (d) fokozatosan csökken.

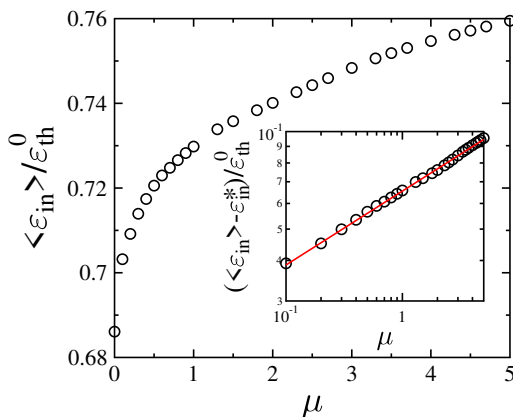
a zsugorodás előrehaladtával - összhangban a korábbi kísérleti és elméleti vizsgálatokkal [1, 47, 89, 90] - a legnagyobb feszültségkoncentráció a fragmensek közepe körül alakul ki, ami a fragmensek leghosszabb kiterjedésére merőleges irányú repedésképződésnek kedvez. Ez a mechanizmus a fragmensek két közel azonos méretű darabra való felhasadását eredményezi, fokozatosan csökkentve a fragmensek anizotrópiáját (4.3(d) ábra). A következőkben az eddig ismertett kvalitatív megfigyelések kvantitatív jellemzését fogom bemutatni.

4.3. A fragmentáció három fázisa

Mielőtt a rúdelemek törése megindulna, a rétegben homogén feszültségmező alakul ki, így az első repedés egy olyan rúdelemnél keletkezik, amely nagy deformációval és alacsony törési küszöbvel rendelkezik. A szerkezeti rendezetlenségnek az a következménye, hogy a hosszabb és vékonyabb rudak nagyobb lokális deformációt szenvednek el, és a legkorábban azok kezdenek el törni, amelyek a vízszintes irányhoz képest nagy $\alpha \approx \pi/2$ szöget zárnak be. Annak jellemzésére, hogy a repedések megindulását hogyan befolyásolja az anizotrópia jelenléte, meghatároztam az első mikrorepedés megjelenéséhez tartozó ε_{in} zsugorodási deformáció $\langle \varepsilon_{in} \rangle$ átlagértékét a rendszerben. A 4.4. ábrán megfigyelhető, hogy a repedések megindulásakor az $\langle \varepsilon_{in} \rangle$ deformáció már a legkisebb anizotrópiáknál ($0 \lesssim \mu$) meredeken növekszik, és monoton viselkedést mutat a vizsgált μ paraméter teljes tartományán. Annak számszerűsítésére, hogy az $\langle \varepsilon_{in} \rangle$ eltérése az $\langle \varepsilon_{in} \rangle$ ($\mu = 0$) izotróp esettől hogyan növekszik az anizotrópia növekedésével, a 4.4. ábra belső ábráján az $\langle \varepsilon_{in} \rangle - \varepsilon_{in}^*$ különbségét ábrázoltam újra μ függvényében. Itt ε_{in}^* egy paraméter, amelynek értékét addig változtattam, amíg kétszer logaritmikus skálát használva a legjobb minőségű egyenest, azaz hatványfüggvényt nem kaptam. Az ábrán látható egyenes megerősíti, hogy a repedés megjelenéséhez tartozó deformáció hatványfüggvény viselkedést mutat az anizotrópia függvényében

$$\langle \varepsilon_{in} \rangle = \varepsilon_{in}^* + B\mu^\beta. \quad (4.2)$$

A β exponens $\beta = 0.22 \pm 0.01$ értékét illesztéssel kaptam, míg az additív konstans $\varepsilon_{in}^*/\varepsilon_{th}^0 = 0.664$ -nek adódott. Az $\langle \varepsilon_{in} \rangle$ értékére becslést kaphatunk, ha feltételezzük, hogy minden rúdelem azonos deformációval rendelkezik, és az első mikrorepedés bekövetkeztéig egyetlen poligon sem szenved elfordulást. Ebben az esetben annak a rúdelemnek kell először el-törnie, amelynek a vízszintessel a legnagyobb α_{max} szöge van. A mintákra átlagolva az α_{max} értéket, a kapott $\langle \alpha_{max} \rangle$ érték közel van a $\pi/2$ értékhez,

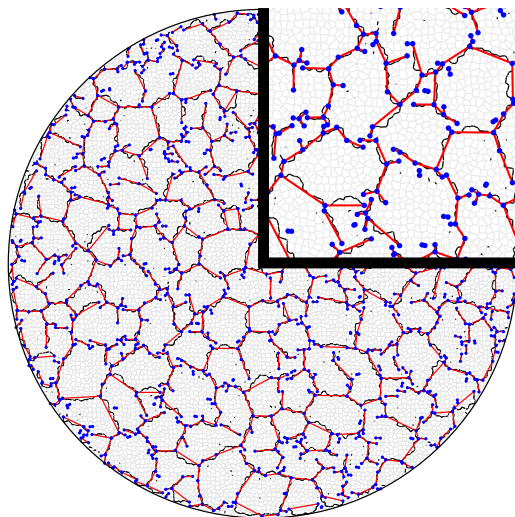


4.4. ábra. Az $\langle \varepsilon_{in} \rangle$ deformáció átlagértéke az első mikrorepedés megjelenésekor az ε_{th}^0 törési paraméterrel skálázva az anizotrópia mértékének függvényében. A belső kis ábra azt mutatja, hogy egy megfelelő ε_{in}^* konstans levonásával az eredeti görbéből egy hatványfüggvény viselkedést kapunk a μ függvényében.

de nem egyenlő azzal. A koszinusz függvény $\pi/2$ körüli Taylor-sorával a 4.1. egyenletből megkaphatjuk az első repedés megjelenésekor jelenlévő deformáció közelítő kifejezését az $\langle \varepsilon_{in} \rangle \approx \varepsilon_{th}^0 (1 + \mu(\pi/2 - \langle \alpha_{max} \rangle))$ módon, amely összhangban van a 4.2. egyenletben foglaltakkal. Az analitikus számolások szerint azonban a μ anizotrópia exponense $\beta = 1$, ami nagyobb a szimulációkban kapottnál. A számítógépes szimulációkkal kapott alacsonyabb β érték a minta belső szerkezeti rendezetlensége által okozott lokális deformáció fluktuációknak köszönhető.

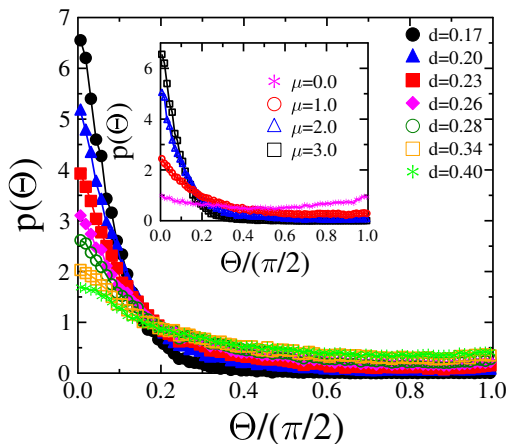
4.3.1. Repedések szögeloszlása

Amikor egy rúdelem eltörik, akkor az általa korábban összekötött két poligon közös éle mentén egy mikrorepedés keletkezik. A zsugorodás előrehaladtával további mikrorepedések jönnek létre, amelyek a szomszédos rúdelemek törésével fokozatosan növekednek, és így kiterjedt makrorepedésekké válnak. Hogy világos képet kapjunk a fejlődő repedési mintázat szerkezetéről, kidolgoztam egy algoritmust, amely az egyes mikrorepedésekből



4.5. ábra. Csomópontok (kék pontok) és makrorepedések azonosítása a zsugorodó rétegről készült pillanatfelvételen $\mu = 0$ izotróp esetben. Az áttekinthetőség kedvéért az alapul szolgáló poligonális szerkezet is látható, azonban az egyetlen poligonélből álló makrorepedéseket nem vettem figyelembe a számolások során. Az egyenes vonalak a makrorepedések két végpontját kötik össze. A jobb felső sarokban a rendszer egy kinagyított részlete látható.

kiindulva konstruálja meg a réteg makrorepedéseit. Egy makrorepedést a repedési hálózat két csomópontja között húzódó, törött rúdelemek által meghatározott poligon-élekből álló folyamatos útvonal definiál. A repedéshálózat csomópontja egy olyan poligonsarok, ahonnan egy vagy három mikrorepedés indul ki. Azokat a poligonsarkokat, ahol két mikrorepedés találkozik, a makrorepedések belső pontjainak tekintetem, míg az egy és három fokszerű csomópontok a makrorepedések végpontjai, illetve a független repedések találkozási pontjai. Az algoritmus az egy és három fokszerű csomópontok azonosításával kezdődik. Ezután az algoritmus a csomópontot egy makrorepedés kezdetének tekintve követi a mikrorepedések útját, amíg el nem ér egy másik csomópontot, amely a makrorepedés másik végét határozza meg. Az algoritmust és a felépített repedési hálózat-



4.6. ábra. A makrorepedések Θ szögének $p(\Theta)$ valószínűségi eloszlása $\mu = 3$ anizotrópia esetén a d károsodás különböző értékeire. Kis d esetén az eloszlás erősen csúcsosodik $\Theta \approx 0$ -nál, azonban a törés előrehaladtával a görbék fokozatosan ellaposodnak. Belső ábra: a $p(\Theta)$ eloszlás különböző μ anizotrópia értékekre ugyanannál a $d = 0.17$ károsodásnál. Megfigyelhető, hogy a μ növekedésével a görbe csúcsosodása $\Theta \approx 0$ -nál fokozatosan hangsúlyosabbá válik.

tot a 4.5. ábra demonstrálja. A poligonális rács véletlenszerűsége miatt a makrorepedések útja soha nem egyenes, hanem cikk-cakkos szerkezetű. A makrorepedéseket az l hosszúságukkal és az orientációjukkal jellemezzük, amelyeket a repedés útvonala mentén lévő poligonélek hosszának összegként, valamint az x tengely és a makrorepedés két végpontját összekötő egyenes közötti Θ szöggként határozunk meg. A fejlődő rendszerben a repedéseket mindig pillanatfelvételeken azonosítjuk, aminek az a következménye, hogy egy fiatalabb repedésnek egy régebbivel való egyesülése a repedés hosszának csökkenését eredményezi, mivel a találkozáskor egy új csomópont jön létre a repedés belsejében.

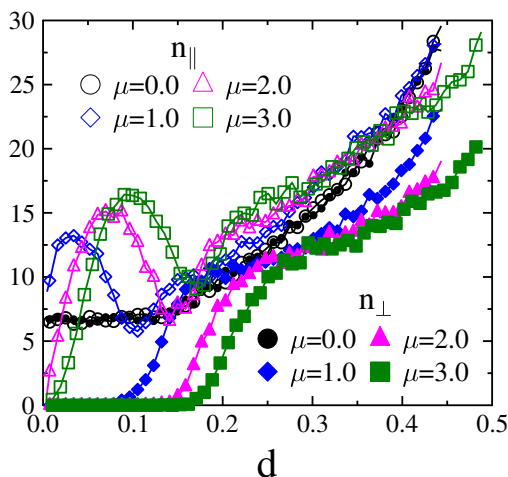
Az 4.6. ábra a repedések Θ szögének $p(\Theta)$ valószínűségi eloszlását mutatja be a $\mu = 3$ anizotrópiájú rendszerre a d károsodás különböző értékeinél. Megfigyelhető, hogy a törési folyamat korai szakaszában az eloszlás erősen csúcsosodik $\Theta \approx 0$ körül, ami azt mutatja, hogy az elsődleges repe-

dések a vízszintes irányhoz igazodnak. A törési folyamat előrehaladtával a repedések nagyobb Θ szögben is megjelennek, így az irányított repedezés hatása fokozatosan csökken, amit a $p(\Theta)$ eloszlás ellaposodása jelez. A különböző μ anizotrópia értékeknél kapott szögeloszlásokat az ábra belső kis ábráján hasonlítom össze a károsodás $d = 0.17$ azonos értékénél, a törés korai szakaszában. Látható az anizotrópia erős hatása a repedések orientációjára: izotróp rendszerben ($\mu = 0$) az eloszlás közel egyenletes, azonban a μ növelése elnyomja a vízszintes tengellyel nagy szöget bezáró repedéseket, pl. $\mu = 3$ esetén $\Theta > 0.3$ szöggel jellemzett repedések nincsenek is a rétegben ezen d értéknél.

4.3.2. Átmenet a szegmentáció fázisába

Az eredmények azt mutatják, hogy a törési folyamat kezdetén keletkező elsődleges repedések a vízszintes (erős) irányhoz igazodnak. A repedező rétegben kialakuló deformációs tér sajátosságai miatt azonban a később kialakuló másodlagos repedések nagyobb szöget zárnak be az elsődleges repedésekkel. Annak megértéséhez, hogy hogyan megy végbe az átmenet a repedések domináns orientációjában, először meghatároztam a vízszintes irányhoz képest $\pi/4$ -nél nagyobb (N_{\perp}) és kisebb (N_{\parallel}) szöget bezáró repedések számát a rendszer egymást követő pillanatfelvételein. Az elemzéshez használt egymást követő pillanatfelvételek között a károsodás-különbség $\Delta d = 2.8 \times 10^{-3}$ rögzített. Ezután meghatároztam a repedésszámok növekményeit az $n_{\perp} = N_{\perp}(d + \Delta d) - N_{\perp}(d)$ és $n_{\parallel} = N_{\parallel}(d + \Delta d) - N_{\parallel}(d)$ módon. A 4.7 ábra mindkét mennyiséget a d károsodás függvényében mutatja. Megfigyelhető, hogy a $\mu = 0$ izotróp esetben az $n_{\perp}(d)$ és $n_{\parallel}(d)$ görbék gyakorlatilag egybeesnek a d teljes tartományában, ami azt mutatja, hogy nincs preferált irány a repedések kialakulásának.

A $\mu > 0$ anizotrópia azonban a növekmények egyértelmű szétválását eredményezi ($n_{\perp} \ll n_{\parallel}$) kis károsodás esetén, azaz a törési folyamat kezdetén a vízszintes iránnyal párhuzamos repedések kialakulása és növekedése dominál, amit a növekvő n_{\parallel} arány jelez; míg a vízszinteshez képest nagy



4.7. ábra. A különböző orientációjú repedések számának növekménye a d károsodás függvényében különböző anizotrópiák esetén. Az n_{\parallel} és n_{\perp} megfelelő görbéit üres, illetve telt szimbólumok ábrázolják. Az n_{\perp} növekedésének $d_{ps}(\mu)$ kezdőpontja az időfejlődés azon pontját jelöli, ahol az erős irányra merőleges másodlagos repedések megjelennek a rendszerben. Az eredmények azt mutatják, hogy minél nagyobb az anizotrópia, annál élesebb az átmenet, és egyre nagyobb károsodásoknál kezdenek megjelenni a másodlagos repedések.

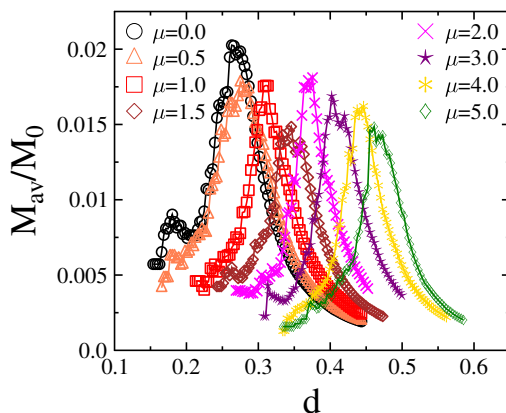
szögben alig keletkezik repedés ($n_{\perp} \approx 0$). A d károsodás növekedésével az n_{\parallel} növekmény áthalad a maximumán, majd ezt követően gyakorlatilag ugyanannál a d értéknél éri el a lokális minimumát, ahol az n_{\perp} növekedésével a repedések a merőleges irányban megindulnak. A μ anizotrópia növekedésével a repedések mechanizmusának ezen jellemzője egyre hangsúlyosabbá válik oly módon, hogy $\mu > 0.4$ esetén el kell érni egy küszöb károsodást ahhoz, hogy az első $\Theta > \pi/4$ szöggel jellemzett repedés megjelenjen a rendszerben. Ebben az anizotrópia-tartományban a repedésterjedés két jól elkülönülő fázisa azonosítható, amelyeket egy d_{ps} karakterisztikus károsodási hányad választ el egymástól: alacsony károsodásnál ($d < d_{ps}$) az elsődleges repedezés fázisát $n_{\perp} \approx 0$ és $n_{\parallel} > 0$ jellemzi, ami a repedések erős vízszintes irányú igazodását jelenti, míg $d > d_{ps}$ esetén a másodla-

gos repedezés fázisában $n_{\perp} \approx n_{\parallel}$ érvényesül, és mindkét növekmény a d értékével növekszik. A szimulációk megmutatták, hogy minél erősebb az anizotropia, annál élesebbé válik az átmenet, és a d_{ps} küszöbérték is a nagyobb károsodások irányába tolódik el. Ez jól megfigyelhető a 4.3. ábrán bemutatott pillanatfelvételeken is $\mu = 1$ esetén.

4.3.3. Összefüggő repedési hálózat

A rendszer fejlődésének fontos jellemzője, hogy az elsődleges repedések a zsugorodó réteget hosszú, vékony szeletekre törlik, melyeket aztán a másodlagos repedések merőleges irányban szegmentálnak. Az elsődleges repedésekről a másodlagos repedésekre való átmenet d_{ps} pontján túl a fejlődő repedéshálózatnak van egy második kritikus pontja, ahol a rendszer viselkedése minőségi változáson megy keresztül. Ez a d_c kritikus károsodás, ahol az elsődleges és másodlagos repedések összeolvadása egy összefüggő repedési hálózat kialakulásához vezet, amely mentén a réteg nagyszámú fragmensre esik szét. Ez a kritikus pont meghatározható a fragmensek fejlődésének tanulmányozásával, melyeket adott zsugorodási deformáció mellett a megmaradt ép rúdelemek által összekötött poligonok halmazaként definiálunk. Mivel a fragmenseket repedések zárják körül, ezek először a d_c kritikus pontban jelennek meg nagy mennyiségben a rétegben. Az összefüggő repedési hálózat kialakulása előtt a réteg a repedezés hatására károsodik, azonban gyakorlatilag megőrzi integritását.

Annak jellemzésére, hogy hogyan történik az átmenet a károsodott állapotból a széttöredezett állapotba a zsugorodási folyamat során, meghatároztam az M_{av} átlagos fragmenstömeget a d károsodás függvényében. A fragmensek azonosítása után egy-egy minta esetében az átlagos fragmenstömeget az m_i , $i = 1, \dots, K$ egyedi fragmenstömegek M_2 második és M_1 első momentumának hányadosaként számítottam ki, ahol K a rétegben lévő fragmensek teljes számát jelöli adott d értéknél. A fragmensek



4.8. ábra. Az M_{av} átlagos fragmenstömeg a d károsodás függvényében a μ anizotrópia különböző értékei esetén. M_{av} a rendszer M_0 össztömegével van skálázva. A maximum $d_c(\mu)$ helye a fejlődés azon pontját jelöli, ahol a repedési hálózat globálisan összefüggővé válik. Az elsődleges repedések erősebb irányítottsága nagyobb anizotrópiák esetén azzal a következménnyel jár, hogy a maximum helye a károsodás nagyobb értékei felé tolódik.

tömegének q -adik momentumát a

$$M_q = \sum_{i=1}^K ' m_i^q \quad (4.3)$$

módon lehet meghatározni, ahol a $'$ azt jelzi, hogy az M_{max} legnagyobb fragmenstömeget kihagyjuk az összegzésből. Ezután M_{av} -t úgy kaptam meg, hogy az M_2/M_1 értékét átlagoltam 40 próbatestre az anizotrópia minden értékénél

$$M_{av} = \langle M_2/M_1 \rangle. \quad (4.4)$$

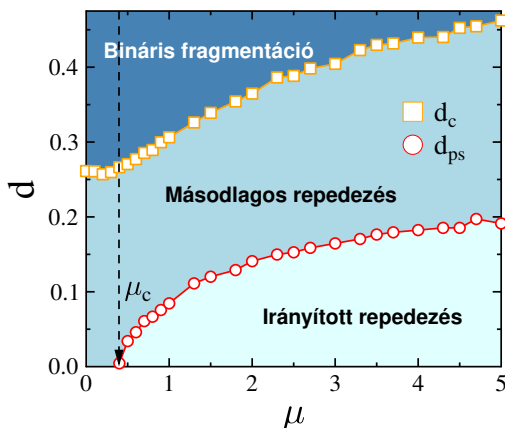
A 4.8. ábrán megfigyelhető, hogy az $M_{av}(d)$ görbéknek jól meghatározott maximuma van, amelynek d_c helye a μ anizotrópia mértékétől függ. A fragmenképződés a $d > d_{ps}$ másodlagos repedési tartományban kezdődik, az eltérő orientációjú repedések összeolvadása révén. Nagyobb μ anizotrópia esetén a szegmentáció nagyobb d_{ps} károsodásnál indul be, aminek az a

következménye, hogy a fragmensképződéshez a törött rúdelemek nagyobb hányada szükséges. Ezek a korai fragmensok azonban jóval kisebbek, mint a rendszer teljes mérete, a réteg többi része viszont egyetlen domináns fragmenst alkot, amely összemérhető a rendszermérettel. Mivel a legnagyobb fragmens mindig kimarad az M_q momentumok számításánál, a d_c maximum helye jelzi azt a pontot, ahol a repedési hálózat összekapcsolódik és átfogja a teljes rendszert, azaz amikor a domináns fragmens hirtelen nagyszámú darabra törik [91, 92]. A maximumon túl már nincs domináns fragmens, és a zsugorodás előrehaladtával minden fragmens fokozatosan kisebb darabokra törik. Ebből következik, hogy a d károsodás értékétől függően a másodlagos repedések $d > d_{ps}$ rezsimje károsodott és töredezett (fragmentált) fázisokra osztható, egy d_c -nél bekövetkező fázisátalakulással, ahol a repedési hálózat összefüggővé válik. Természetesen a d_c kritikus pont az anizotrópiával monoton növekszik.

4.3.4. A repedési szerkezet fejlődésének fázisdiagramja

A repedések orientációjának és a kialakuló repedéshálózat átfogó szerkezetének elemzése alapján arra a következtetésre jutottam, hogy a vékonyréteg zsugorodás okozta repedési mintájának fejlődése alapvetően három fázisra bontható: *(I)* Az elsődleges repedésképződés fázisában a kezdeti mechanikai gerjesztés által meghatározott irányhoz igazodó hosszú repedések kialakulása dominál. *(II)* A másodlagos repedezés akkor indul be, amikor az elsődleges repedésekre merőleges irányban is megindul a repedések keletkezése. *(III)* A zsugorodás előrehaladtával az elsődleges és másodlagos repedések összeolvadnak, ami az egész rendszert átfogó, összefüggő repedési hálózat kialakulásához és a réteg teljes fragmentációjához vezet.

Számítógépes szimulációk alapján meghatároztam az átmenet d_{ps} és d_c pontjait nagyszámú μ anizotrópia esetén, és feltérképeztem a rendszer fázisdiagramját a károsodás-anizotrópia paramétersíkon, amelyet a 4.9. ábra szemléltet. A szimulációk megmutatták, hogy alacsony anizotrópiák esetén



4.9. ábra. A zsugorodás okozta repedezés időfejlődésének három fázisa a károsodás-anizotrópia paramétersíkon. A függőleges szaggatott vonal azt jelzi, hogy $\mu < \mu_c$ alacsony anizotrópiáknál az irányított repedéskeltés effektusa gyenge, így már kis károsodásnál is kialakulhatnak tetszőleges orientációjú repedések. A $\mu > \mu_c$ küszöb anizotrópia felett a törési folyamat kezdetén az irányított repedések dominálnak, így a fragmenseket szegmentáló másodlagos repedések a d_{ps} fázishatár felett kezdenek kialakulni. Ahogy a d károsodás tovább növekszik, a repedések összeolvadása összefüggő repedési hálózat kialakulásához vezet a d_c pontban és beindul a bináris fragmentáció.

csak gyengén irányított repedezés következik be, így kis károsodás esetén is bármilyen orientációjú repedések keletkezhetnek a rendszerben. A 4.9 ábrán függőleges szaggatott vonallal jelzett $\mu_c \approx 0.4$ küszöbanizotrópián túl erősen irányított repedések dominálják a mintát a repedési folyamat $d < d_{ps}$ kezdetén. A károsodásnak meg kell haladnia a d_{ps} küszöbértéket ahhoz, hogy a hosszú szeleteket merőleges irányban szegmentáló másodlagos repedések megjelenjenek a rendszerben. A törés dinamikája a d_c károsodásnál változik meg, ahol kialakul az összefüggő repedési hálózat és megindul a bináris fragmentáció. A fázisdiagramon megfigyelhető, hogy a d_{ps} és d_c küszöbkárosodások a μ anizotrópiával növekednek. Fontos, hogy a $\mu < \mu_c$ küszöbanizotrópia alatt a repedési folyamatnak csak két fázisa van, azaz az elsődleges és a másodlagos rezsím nem választható szét. Ezt

a minta szerkezeti rendezetlensége okozza, amely kedvez a repedések véletlenszerű izotróp orientációjának. A μ értékének meg kell haladnia az anizotrópia μ_c küszöbértékét ahhoz, hogy a rendezetlenség hatását legyőzzük.

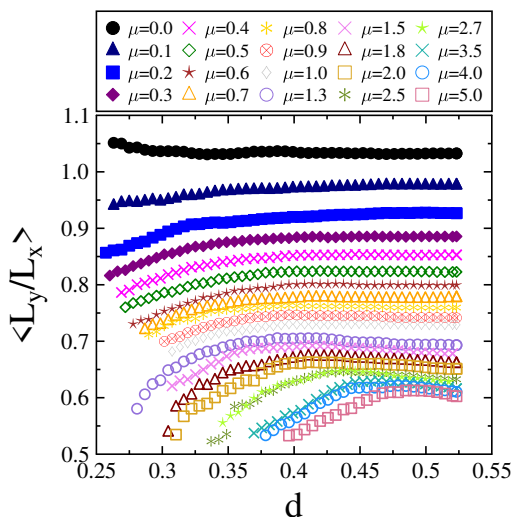
4.4. Bináris fragmentáció

A teljes rendszert átfogó, összefüggő repedési hálózat kialakulásának az a következménye, hogy a réteg nagyszámú fragmensre bomlik. A zsugorodás előrehaladtával a fragmensek belsejében ismét feszültség halmozódik fel, ami jellemzően a fragmensek közepétől kiinduló repedések kialakulását eredményezi (lásd 4.2. és 4.3. ábrák). Ennek következtében a fragmensek bináris törési események sorozatán mennek keresztül, amelyek fokozatosan csökkentik a tömegüket (méretüket).

4.4.1. Fragmensek alakjának időfejlődése

A repedési hálózat szerkezete erősen függ az anizotrópia mértékétől, ezért várható, hogy az anizotrópia a fragmentációs folyamat alakulását is befolyásolja. Az elsődleges repedések hosszú egyenes repedései hosszúkás szeleteket hoznak létre a rétegben, amelyeket aztán a másodlagos repedések kisebb darabokra szegmentálnak. Ez a mechanizmus olyan fragmenseket eredményez, amelyek hosszúkás alakja a d_c kritikus károsodásnál kialakuló összefüggő repedési hálózat struktúrájából ered.

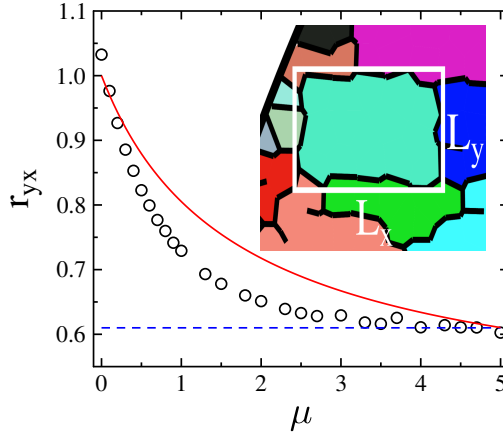
A fragmensek alakjának jellemzésére meghatároztam az egyes darabok L_x és L_y oldalhosszúságú, a kezdeti koordinátarendszer x , illetve y tengelye mentén irányított határoló dobozát (lásd 4.11 ábra). A fragmensek alakjának jellemzésére az L_y/L_x dimenziótlan arányt átlagoltam a fragmensekre egy adott d károsodásnál [46, 93]. A 4.10. ábrán megfigyelhető, hogy kezdeti anizotrópia hiányában ($\mu = 0$) a fragmensek a rendszer fejlődése során bármely d károsodásnál izotróp alakúak, azaz $\langle L_y/L_x \rangle \approx 1$ jellemzi őket. A lokális teherbíróképesség $\mu > 0$ anizotrópiája azonban



4.10. ábra. A fragmensek $\langle L_y/L_x \rangle$ átlagos oldalaránya a d károsodás függvényében különböző μ anizotrópiák esetén. Az ábrán látható, hogy a méretarány r_{yx} aszimptotikus értéke a μ értékével csökken és tart az $r_{yx} \approx 0.62$ határértékhez.

a fragmensek $\langle L_y/L_x \rangle < 1$ hosszúkas alakját eredményezi, így minél nagyobb a μ , annál inkább megnyúlnak a fragmensek. Érdekes megfigyelni, hogy az alaki anizotrópia mértéke a d_c fragmentációs kritikus pontban a legnagyobb (azaz $\langle L_y/L_x \rangle$ ekkor a legkisebb), ahol a fragmensek többsége először keletkezik. A bináris fragmentáció során a repedések nagyobb valószínűséggel osztják két részre a fragmensek hosszabbik oldalát, ami fokozatosan növeli az oldalarányt (azaz csökkenti az alaki anizotrópiát). A szimulációk megmutatták, hogy a bináris fragmentáció fokozatosan csökkenti a fragmensek méretét, ugyanakkor a rendszer fejlődése során egy stabil fragmensalakhoz tartunk a $\mu > 0$ kezdeti anizotrópia minden értékére, amelyet az $\langle L_y/L_x \rangle \rightarrow r_{yx}$ oldalarány aszimptotikus értéke jellemez. A 4.11. ábrán látható, hogy az r_{yx} aszimptotikus oldalarány a μ kezdeti anizotrópia növekedésével csökken, de tart az $r_{yx} \approx 0.62$ határértékhez.

A végállapotban a fragmensek átlagos alakját a felhalmozódó E_{el} rugal-

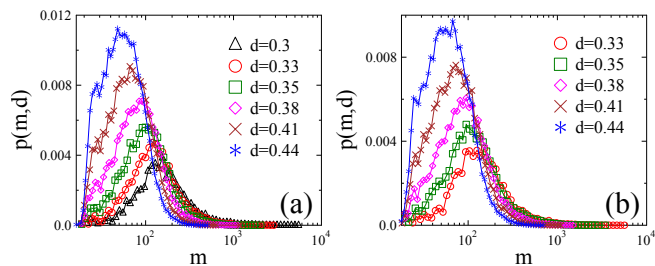


4.11. ábra. Az $\langle L_y/L_x \rangle$ oldalarány r_{yx} aszimptotikus értéke a μ anizotrópia függvényében. A szaggatott egyenes az $r_{yx} \approx 0.62$ határértéket jelöli, amely a fragmensek stabil alakját jellemzi. A folytonos piros vonal az r_{yx} analitikus közelítése, amelyet a 4.5. egyenletből kapunk a $\xi = 0.64$ paraméterértékkel. A belső kis ábra a minta egy kis területének nagyított nézete, ahol a fragmensek különböző színekkel vannak kiemelve. Az ábrán egy L_x és L_y oldalhosszúságú határoló doboz felépítése látható egy fragmens esetén.

mas energia minimalizálása határozza meg [1]. Feltételezve, hogy a stabil fragmensek lineáris kiterjedése a deformációs tér karakterisztikus hossza alá esik, az E_{el} minimalizálásából megkaphatjuk az r_{yx} aszimptotikus oldalarányt a μ anizotrópia erősségének függvényében az

$$r_{yx} \approx \sqrt{\frac{2 + \mu(1 - \xi)}{2 + \mu(1 + \xi)}} \quad (4.5)$$

módon, ahol a ξ paraméter a réteg ν Poisson-számához a következőképpen kapcsolódik: $\nu = (1 - \xi)/(1 + \xi)$. A 4.11. ábrán látszódik, hogy ez az analitikus kifejezés elfogadható közelítést adja a numerikus eredményeknek $\xi = 0.64$ esetén. A 4.5. egyenletből következik, hogy nagyon nagy $\mu \rightarrow \infty$ anizotrópiák esetén az r_{yx} stabil oldalarány az $r_{yx} \rightarrow \sqrt{(1 - \xi)/(1 + \xi)} = \sqrt{\nu}$ határértékhez tart. Az $r_{yx} = 0.62$ határértéket behelyettesítve $\nu \approx 0.38$



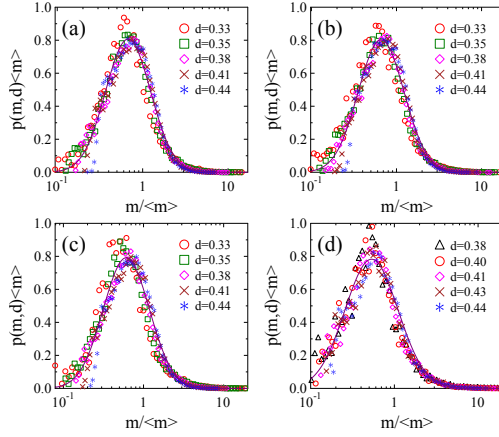
4.12. ábra. Tömegeloszlások különböző d károsodásoknál az anizotrópia (a) $\mu = 0$ és (b) $\mu = 1$ értéke esetén. d növekedésével a görbék függvényalakja gyakorlatilag változatlan marad, csak a fragmensek átlagos mérete csökken.

értéket kapunk, ami valamivel magasabb, mint a szimulációkból kapott $\nu \approx 0.2$ Poisson-szám.

4.4.2. Fragmensek tömegeloszlása

Számítógépes szimulációk megmutatták, hogy a fragmensek alakjának komplex fejlődése ellenére az m tömegek statisztikája nagyfokú robusztuságot mutat. A 4.12. ábra a $d > d_c$ fragmentációs kritikus pont felett különböző d károsodások esetén kapott $p(m, d)$ tömegeloszlásokat mutatja $\mu = 0$ és $\mu = 1$ anizotrópiák esetén. A vízszintes tengelyen logaritmikus skálát használva az eloszlások mindkét anizotrópia esetén közel szimmetrikusak minden d károsodásra, azonban d növekedésével mind a fragmensek $\langle m \rangle$ átlagos tömege, mind az eloszlások m_{max} felső határa csökken. Azt is lehet látni, hogy a fragmenstömegek m_{min} alsó határa körül az eloszlások alakja némileg torzul, ami nagyobb d károsodásoknál még hangsúlyosabbá válik. Ezt a viselkedést a törhetetlen poligonok jelenléte okozza, ami nem engedi, hogy a kis fragmensek mérete tovább csökkentjen, és így módosítja a statisztikát az alacsony tömegtartományban.

A 4.13. ábrán azt lehet látni, hogy a $p(m, d)$ tömegeloszlásokat a fragmensek $\langle m \rangle$ átlagos tömegével átskálázva a különböző d károsodásoknál



4.13. ábra. A $p(m, d)$ eloszlásokat az $\langle m \rangle$ átlagos fragmenstömeeggel átskálázva a különböző $d > d_c$ károsodásoknál kapott görbék egymásra ejtethők. Az ábra négy különböző anizotrópia értékre mutatja a skálázás eredményét: (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, (d) $\mu = 2$. A folytonos vonalak a 4.7. lognormális eloszlással történt illesztést mutatják.

kapott görbék egymásra ejtethők. A görbék ilyen jó minőségben történő egymásra esése a

$$p(m, d) = \langle m \rangle^{-1} \Psi(m / \langle m \rangle) \quad (4.6)$$

skálarelációt implikálja, ahol a d -függés a jobb oldalon csak a fragmenstömegek $\langle m \rangle$ (d) átlagán keresztül jelentkezik. Fontos hangsúlyozni, hogy a 4.6. skálázási szerkezet minden μ anizotrópiára érvényes. Ez az eredmény ismét a fragmenstömegek (méretek) statisztikájának robusztusságát mutatja, ami a bináris fragmentációs mechanizmusnak tulajdonítható [47, 77, 94].

A $\Psi(x)$ skálafüggvény nagyon jól leírható a lognormális eloszlással:

$$\Psi(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(\ln(x) - \langle m \rangle)^2 / 2\sigma^2], \quad (4.7)$$

ahol $\langle m \rangle$ és σ a logaritmikus átlagot, illetve a szórást jelöli. A 4.13. ábra folytonos vonalai a numerikus adatoknak a 4.7. egyenlettel való illesztését

mutatják. A kis fragmenstömegek tartományában eltérések figyelhetők meg a 4.7. egyenlettől a törhetetlen (egyetlen poligonból álló) fragmensek létezése miatt.

A lognormális eloszlás összhangban van azzal, amit vártunk, hiszen a fragmensek bináris szétválása egy Gibrat folyamat, mely a fragmensek keletkezésének kaszkád folyamatát eredményezi [14, 43, 47, 77, 94].

4.5. Konklúziók

A repedési folyamatok kontrollálási lehetőségeinek feltárása érdekében megvizsgáltam egy hordozóhoz tapadt vékonyréteg zsugorodás okozta repedezését, amelyben az anizotrópiát a réteg kezdeti mechanikai perturbációja (például rezgés) okozza. Heterogén vékonyrétegek egy korábban bevezetett diszkrét elem modelljéből indultam ki, amelyben az anizotrópiát a kohézív kontaktusok erősségének irányfüggésével vettem figyelembe.

A repedési mintázat szerkezetének elemzésével meghatároztam a rendszer időfejlődésének fázisait, és feltérképeztem a rendszer időfejlődésének fázisdiagramját az anizotrópia - károsodás síkon. Azt tapasztaltam, hogy ha az anizotrópia kellően magas, a repedési mintázat fejlődése három jól elkülönülő fázison keresztül történik: a folyamat kezdetén erősen rendezett, párhuzamos repedések dominálnak, amelyek felszeletelik a réteget kisebb darabokra. A keresztirányú repedésképződés egy kritikus károsodási érték-nél kezdődik meg, ami a szeletelt területek szegmentálódását eredményezi. A repedések összeolvadásával pedig egy teljesen összefüggő repedési hálózat alakul ki, amely mentén a réteg nagyszámú darabra esik szét. Ezek után a további zsugorodás bináris fragmentációhoz vezet, tovább darabolva a fragmenseket.

A repedési hálózat szerkezetének elemzésével feltártam, hogy a réteg kezdeti anizotrópiája jelentősen befolyásolja a keletkező fragmensek alakját: az anizotrópia erősségével a fragmensek egyre elnyúltabbá válnak. A fragmensek alakját határoló téglalapok segítségével közelítettem. Azt ta-

láltam, hogy az alaki anizotrópia az összefüggő repedéshálózat kialakulásának kritikus pontjánál a legnagyobb, majd az ezt követő bináris fragmentáció fokozatosan csökkenti az elnyúltság mértékét. Az elemzések arra is rávilágítottak, hogy a repedezési folyamat fejlődésével a rendszer egy stabil fragmensalakhoz tart, amelyet a határoló téglalap egy aszimptotikus oldalaránya jellemez. Megmutattam, hogy az aszimptotikus oldalarány az anizotrópia növelésével csökken és egy, a réteg anyagának Poisson-számától függő konstanshoz tart.

Arra az eredményre jutottam, hogy ugyan az anizotrópia hatása kvantitatív módon érezhető volt a fragmensek alakján, azok tömegének statisztikája univerzális viselkedést mutatott. Az anizotrópia változtatásával szemben a tömegeloszlások robusztusan viselkedtek, a görbék alakja változatlan maradt, csupán az átlaguk függött a károsodás mértékétől. Az átlagos fragmenstömeggel átskálázva a különböző károsodásoknál kapott tömegeloszlásokat a görbék egymásra ejthetők voltak, a skálafüggvény pedig lognormális eloszlással volt jellemezhető.

Numerikus eredményeim kiváló kvalitatív egyezést mutatnak sűrű paszták száradásos repedési folyamatának jellemzőivel, amelyekben a kezdeti anizotrópiát mechanikai rázással hozták létre [11]. Az általam használt modell jól megragadta az anizotrópia hatását mind a repedési mintázat szerkezetére, mind pedig a keletkezett fragmensek tömegének statisztikájára [14] vonatkozóan. Az aszimptotikus fragmensalak anyagi paramétereiktől való függésének ellenőrzéséhez további laboratóriumi kísérletekre van szükség.

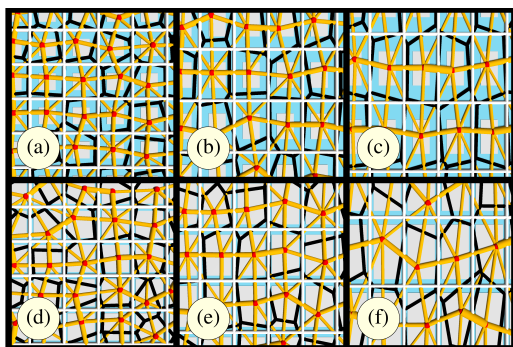
5. fejezet

Diszkrét elem modell irányfüggő diszkretizációval

Az anizotróp tulajdonságokkal rendelkező vékonyrétegek mechanikai viselkedésének és repedési folyamatainak számítógépes modellezésére bevezettünk egy újszerű módszert, ahol az anizotrópiát a réteg diszkretizációján keresztül vesszük figyelembe. Analitikus számításokkal és számítógépes szimulációkkal elemeztem a modell makroszkopikus válaszát, valamint a zsugorodás közben keletkező repedési mintázatát. Eredményeimet összevetettem laboratóriumi mérésekkel és az előzőleg tárgyalt, irányfüggő lokális teherbíróképességre épülő modelltől kapottakkal. A fejezetben bemutatott eredmények a [P2] publikáción alapszanak.

5.1. Véletlen poligon rács geometriai transzformációja

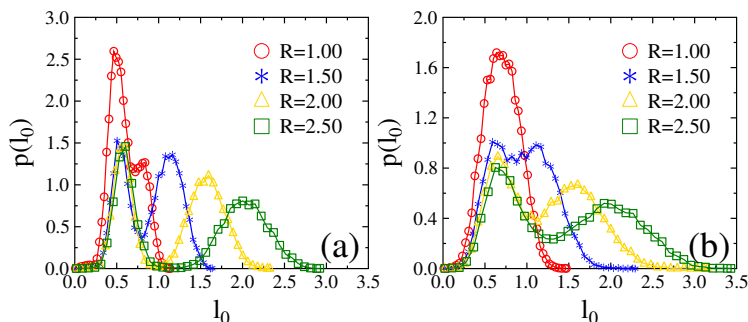
Kísérleti vizsgálatok kimutatták, hogy a vékonyréteg kezdeti mechanikai perturbációja (pl. a paszta egy irányban történő rázása) anizotrópiát visz be a réteg anyagi tulajdonságaiba. A 3. fejezetben bemutattam, hogy az általunk használt diszkrét elem modell egy rendezetlen szerkezetű poligonális rácson történő diszkretizációra épül, amelynek előnye a reguláris



5.1. ábra. Anizotrópia implementálása a modellben. A poligonális rács R faktortal történő y irányú megnyújtása vagy összenyomása strukturális anizotrópiát vezet be a vékonyrétegbe. Az eredményeket az $a = 0.5$ (a,b,c) és $a = 0.8$ (d,e,f) rendezetlenségi paraméter két különböző értékére mutatja be az ábra az anizotrópia három különböző esetére: (a,d) $R = 1$, (b,e) $R = 1.5$ és (c,f) $R = 2$.

rácsokkal szemben a nagyfokú izotrópia. Ilyenkor a kohéziót biztosító rúdelemek mechanikai jellemzői függenek a poligonális rács lokális geometriájától, ezért az ötletünk az, hogy az anyag kezdeti mechanikai anizotrópiáját a Voronoi-konstrukció segítségével már a diszkretizáció során építsük be a modellünkbe.

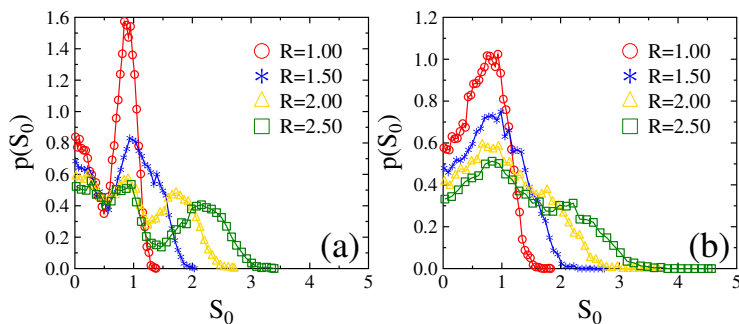
A módszer megvalósításához a diszkretizációt követően egy nyújtási-zsugorítási transzformációt alkalmaztam a poligon rácsra. Mivel a regularizált Voronoi-konstrukcióhoz használt négyzetrács bal alsó sarka a koordináta-rendszerünk origója, a transzformáció egyszerűen úgy történik, hogy a poligonok minden egyes sarokpontjának y koordinátáját megszoroztam egy R faktortal. Az R anizotrópia paraméter értéke lehet egynél kisebb és nagyobb, ami a konstrukció y tengely mentén történő nyújtásának, illetve összenyomásának felel meg. Ezt a transzformációt az 5.1. ábra szemlélteti, ahol a (c)-(d), illetve (f)-(g) ábrákat a (b) és (e) ábrák transzformálásával kapjuk $R = 1.5$, illetve $R = 2.0$ anizotrópia faktortal. Megjegyzem, hogy az (a) és (d) izotróp rendszerek két különböző, $a = 0.8$ és $a = 0.5$ rendezetlenséggel lettek generálva. A 3. fejezetben ismertetett modellkonstrukció



5.2. ábra. A rúdelemek l_0 hosszának $p(l_0)$ valószínűségi eloszlása az R anizotrópia paraméter különböző értékei mellett az (a) $a = 0.5$ és (b) $a = 0.8$ szerkezeti rendezetlenség két értéke esetén.

alapján a sokszögek geometriai transzformációja a rúdelemek hosszának és keresztmetszetének változását eredményezi, ami viszont mind az x , mind pedig az y irányban módosítja a rács mechanikai tulajdonságait.

Az 5.2. és 5.3. ábrák a rúdelemek l_0 kezdeti hosszának és S_0 keresztmetszetének $p(l_0)$ és $p(S_0)$ valószínűségi eloszlásait mutatják, amelyek a modell 3.4.-3.6. dinamikai egyenleteinek 3.1.-3.3. paramétereit befolyásolják. Az ábrákon látható, hogy mind az a paraméter, amely a Voronoi-konstrukció bázispontjainak térbeli helyzetén keresztül szabályozza a szerkezeti rendezetlenséget, mind az anizotrópia R erőssége nagy hatással van a minta végső geometriai paramétereinek statisztikus jellemzőire. Összehasonlítva az $R = 1$ izotróp eseteket két különböző rendezetlenség mellett, megállapítható, hogy $a = 0.8$ esetén (5.2(b) ábra és 5.3(b) ábra) mindkét eloszlás egyetlen csúcsot mutat az átlagukhoz közel, míg az alacsonyabb $a = 0.5$ rendezetlenség esetén egy második csúcs is kialakul a négyzetes rács domináns hatása miatt. Az anizotrópia R növelésével történő bevezetésével a hatás minden a rendezetlenségi erősnél azonos, azaz mind a rúdelemek l_0 hossza, mind az S_0 keresztmetszete szélesebb tartományokat ölel fel, ráadásul a valószínűségi eloszlásoknak egy második csúcsa is kialakul, míg az eredeti gyakorlatilag ugyanott marad. Az eredmények azt



5.3. ábra. A rúdelemek S_0 keresztmetszetének $p(S_0)$ valószínűségi eloszlása az R anizotrópia paraméter különböző értékei mellett az (a) $a = 0.5$ és (b) $a = 0.8$ szerkezeti rendezetlenség két értéke esetén.

mutatják, hogy a mögöttes négyzetes rács hatásának elnyomásához kellően nagy szerkezeti véletlenszerűségre van szükség. Ezt igazolták az izotróp modell korábbi alkalmazásai is rendezetlen anyagok törésének és fragmentációjának vizsgálatára [78, 85, 92, 95–97]. Az anizotrópia bevezetése a véletlen rács transzformációjával nagy szerkezeti véletlenszerűség esetén bimodálissá teszi a hossz- és keresztmetszeti eloszlásokat, ahol a második csúcs helyét és erősségét is az R anizotrópia paraméter határozza meg.

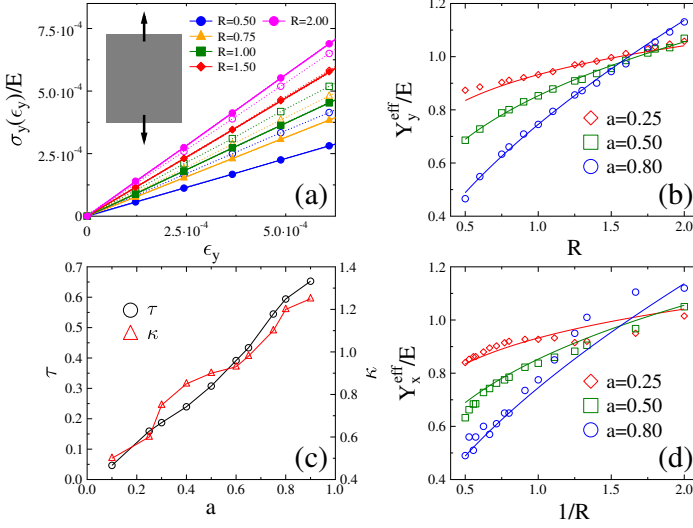
5.2. A modell mechanikai válasza

Annak vizsgálatára, hogy az anizotrópia és a szerkezeti rendezetlenség hogyan határozza meg a modell mechanikai válaszat, első lépésként számítógépes szimulációkat végeztem n_x és n_y kiterjedésű téglalap alakú minták egytengelyű húzóterhelésére, változtatva az R anizotrópia és az a rendezetlenség mértékét. Ezekben a mérésekben a rúdelemeknek nem engedtem, hogy eltörjenek, és emellett a számolások során nem vettem figyelembe a hordozóhoz történő tapadást, ami egyenértékű az adhéziós rugók merevségének nullára állításával. A szimulációkat deformáció kontrollált módon végeztem el, amihez a minta két ellentétes határán egy poligonréteget me-

reven befogtam, majd a mintát lassan, kis sebességgel, a minta oldalára merőleges irányban elmozdítottam. Két mérésorozatot végeztem az effektív Young-modulus és a Poisson-szám meghatározására: egyet a geometriai transzformáció irányában (y -tengely), egyet pedig az arra merőleges irány (x -tengely) mentén. (A numerikus mérési elrendezést az 5.4. ábra belső kis ábrája szemlélteti.) A minta feszültség-alakváltozás görbéit úgy kaptam meg, hogy a két terhelési esetben a Δn_x vagy Δn_y alakváltozás fenntartásához szükséges erő F_x vagy F_y komponensét mértem a határpoligonokon. A minta mechanikai válaszát az a paraméter többféle értéke és az R anizotrópia erősség $0.5 \leq R \leq 2.0$ tartományon történő változtatása mellett a $\sigma_y = F_y/n_x$ és $\sigma_x = F_x/n_y$ feszültségek $\varepsilon_y = \Delta n_y/n_y$ és $\varepsilon_x = \Delta n_x/n_x$ alakváltozás függvényében történő elemzése révén a határoztam meg.

Az 5.4(a) ábra a minta geometriai transzformáció iránya mentén történő terhelésére mutat példát. Megfigyelhető, hogy a rendszer minden paraméterkészlet esetén lineárisan rugalmas viselkedést mutat, azonban a $\sigma_y(\varepsilon_y)$ görbék meredeksége, azaz az Y_y^{eff} effektív Young-modulus ebben az irányban függ mind az R anizotrópia, mind pedig az a rendezetlenség mértékétől. Ahogy a poligon rács az $R > 1$ geometriai transzformáció által megnyúlik, a transzformáció y irányával kis szöget bezáró rúdelemek hossza nagyobb, szélessége pedig kisebb lesz; a merőleges irányhoz közeli rúdelemek azonban gyakorlatilag változatlanok maradnak. A rendszer $R < 1$ zsugorítása ellenkező hatást vált ki, így a rudak vastagabbak és rövidebbek lesznek a transzformáció iránya mentén. A rúdelemek geometriájának megváltozása a merevségi paramétereiket a 3.1.-3.3. egyenleteken keresztül befolyásolja. Az 5.4(b) ábra azt mutatja, hogy az Y_y^{eff} effektív Young-modulus, amelyet az 5.4(a) ábra feszültség-deformáció görbéire illesztett egyenesek meredekségeként kapunk, az R anizotrópia paraméter növekvő függvénye a minden értékénél.

A minta geometriai transzformációjának hatása nagyobb a szerkezeti rendezetlenség esetén hangsúlyosabb, azaz az $Y_y^{eff}(R)$ görbék szélesebb tartományt fednek le ugyanazon az R intervallumon, ahogy a közelít az 1-



5.4. ábra. (a) A transzformált minta y tengely mentén mért feszültség-megnyúlás görbéi az R anizotrópia paraméter különböző értékei mellett, az a szerkezeti rendezetlenség két esetében (a szaggatott vonalak nyitott szimbólumokkal az $a = 0.5$, a folytonos vonalak kitöltött szimbólumokkal az $a = 0.8$ értékekre vonatkozó eredményeket mutatják). A rendszer lineárisan rugalmas viselkedést mutat, azonban az egyenesek meredeksége, azaz az Y_y^{eff} effektív Young-modulus egyaránt függ R -től és a -tól. (b) A geometriai transzformáció y iránya mentén mért Y_y^{eff} effektív Young-modulus az R anizotrópia erősségének függvényében az a rendezetlenség három értéke mellett. Az Y_y^{eff} értéke monoton nő az anizotrópia növekedésével, azonban a hatás erősebb a nagyobb a rendezetlenség esetén. A folytonos vonalak az 5.1. egyenlet segítségével kapott illesztések. (c) Az effektív Young-modulus és a Poisson-szám függését az R anizotrópia paramétertől megadó τ (bal oldali y -tengely) és κ (jobb oldali y -tengely) exponensek értéke az a rendezetlenség függvényében. (d) A minta effektív Young-modulusa a geometriai transzformációra merőleges irányban mérve, az $1/R$ függvényében ábrázolva. A folytonos vonalak megegyeznek a (b) ábra görbéivel.

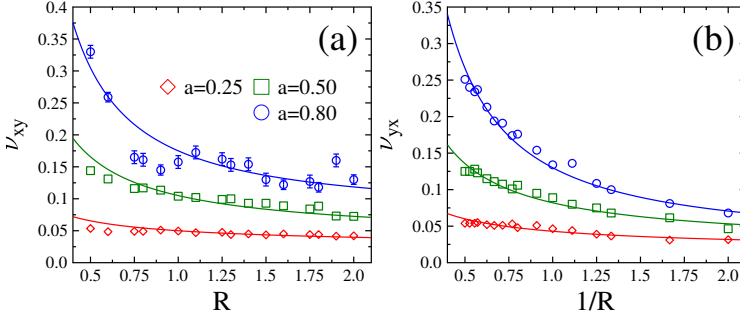
hez. Fontos, hogy az Y_y^{eff} Young-modulust a rúdelemek E merevsége és a konstrukció struktúrája együttesen határozza meg. Az a kisebb értéke rendezettebb rácsot jelent, ahol a nagy vastagságú rúdelemek párhuzamosak az alapul szolgáló négyzetes rács x és y tengelyével. A 3.1. egyenletből kiin-

dulva könnyen megmutatható, hogy $a \rightarrow 0$ határértékben, amikor a függőleges rúdelemek dominálnak a rendszer makroszkopikus válaszában a geometriai transzformáció iránya mentén, az Y_y^{eff} effektív Young-modulusnak egyenlőnek kell lennie a rúdelemek Young-modulusával ($Y_y^{eff} \approx E$) az R bármely értékénél (az analitikus bizonyítást lásd a függelékben). Nagyobb a értékek esetén a részletes numerikus analízis kimutatta, hogy a rendszer effektív Young-modulusának R függése jól leírható egy hatványfüggvényvel

$$Y_y^{eff} = Y_y^{eff}(R = 1)R^\tau. \quad (5.1)$$

Az 5.4(b) ábra azt mutatja, hogy az 5.1. egyenlet minden a rendezetlenség esetén kielégítő leírást ad a numerikus eredményekre, azonban a τ exponens értéke függ az a értékétől. Számos szimulációt végeztem, hogy meghatározzuk a τ exponens értékét az a rendezetlenségi paraméter függvényében. Az 5.4(c) ábrán látható, hogy a fenti érveléssel összhangban a τ értéke az a rendezetlenségi paraméter $a \approx 0$ határértékében $\tau \approx 0$ -tól kezdődően növekszik. Megjegyzendő, hogy $a = 0$ és $a = 1$ esetén nem végeztem szimulációkat, mivel ezekben a határesetekben a poligonális rácson nagyon vékony rúdelemek is megjelenhetnek, amelyek már numerikus problémákat okoznak. A függelékben analitikusan igazoljuk, hogy $a \rightarrow 1$ nagy rendezetlenség esetén az $R = 1$ izotróp rendszer effektív Young-modulusa $Y_y^{eff} \approx (2/3)E$ értékű, ami kielégítően egyezik az 5.4(b) ábra $a = 0.8$ görbéjének megfelelő adataival.

Független numerikus méréseket végeztem az Y_x^{eff} effektív Young-modulus meghatározására a poligonális rács geometriai transzformációjára merőleges x irányban, a fenti R és a értékek mellett. Mivel a rendszer anizotrópiáját az R skálafaktor szabályozza, amely a diszkrét elemek kiterjedésének aránya a két, egymásra merőleges x és y irányban, várható, hogy ahogy a rendszer R növelésével merevebbé válik az y irányban, úgy csökken a merevsége a rá merőleges irányban, ami csökkenő Y_x^{eff} effektív Young-modulusszal jár. A geometriai transzformációból az is következik, hogy ha Y_x^{eff} -t ábrázoljuk R helyett $1/R$ függvényében, akkor ugyanazt a



5.5. ábra. A Poisson-szám a mintát a geometriai transzformációra (a) merőlegesen és azzal (b) párhuzamosan húzóterhelés hatására megnyújtva. Az adatokat az R anizotrópia függvényében mutatja be a két ábra ugyanazokra az a rendezetlenségi paraméterekre, mint amiket az effektív Young-modulus esetén láttunk. A folytonos vonalak az 5.3. egyenlet szerinti illesztéseket mutatják, a két ábrán a κ exponens azonos értékeinek felhasználásával.

viselkedést kell megfigyelnünk, mint Y_y^{eff} esetében, azaz az Y_x^{eff} numerikusan kapott értékeinek meg kell egyezniük Y_y^{eff} megfelelő értékeivel. Ezt mutatja az 5.4(d) ábra, ahol a folytonos vonalak pontosan megegyeznek az 5.4(b) ábrán láthatóakkal. Az eredmények azt mutatják, hogy a geometriai transzformációra merőlegesen az Y_x^{eff} effektív Young-modulus az R anizotrópia paraméter csökkenő hatványfüggvényével írható le

$$Y_x^{eff} = Y_x^{eff}(R=1)R^{-\tau}, \quad (5.2)$$

ahol $Y_x^{eff}(R=1) = Y_y^{eff}(R=1)$, és a τ exponens ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint Y_y^{eff} esetében (lásd 5.4(d) ábra).

A ν_{xy} és ν_{yx} Poisson-számokat numerikusan határoztam meg ugyanazokban a húzóterhelési kísérletekben, mint a Young-modulusokat, kiszámítva a keresztirányú alakváltozás és az alkalmazott alakváltozás arányát ($\nu_{xy} = -\varepsilon_y/\varepsilon_x$ és $\nu_{yx} = -\varepsilon_x/\varepsilon_y$) a minta x és y irányú terhelésével. A zérus rendezetlenség $a \rightarrow 0$ határértékében a nagy rendezettségű négyzetes rácsszerkezet miatt a terhelésre merőleges irányban nem következhet be deformáció, így $\nu_{xy} \rightarrow 0$ és $\nu_{yx} \rightarrow 0$ várható bármilyen R anizotrópia ese-

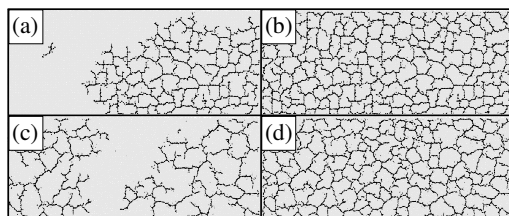
tén. Az a rendezetlenség növekedése nagyobb Poisson-számot eredményez, amely szélesebb intervallumot fed le, amikor az R anizotropia változik. Ez a viselkedés az 5.5(a) ábrán ν_{xy} esetében látható R változtatásával, ugyanolyan a rendezetlenségi értékek mellett, mint az effektív Young-modulus esetében. Megfigyelhető, hogy az adatokra jól illeszthető a

$$\nu_{yx} = \nu_{yx}(R = 1)R^{-\kappa} \quad (5.3)$$

hatványfüggvény, hasonlóan az effektív Young-modulus viselkedésénél tapasztaltakkal. A Poisson-szám csökkenésének mértékét szabályozó κ exponens értéke az a rendezetlenség mértékétől függ. Az illesztéssel kapott κ numerikus értékeit az 5.4(c) ábra mutatja be az effektív Young-modulus τ exponensével együtt. Megfigyelhető, hogy a κ a τ -hoz hasonlóan növekvő tendenciát mutat a rendezetlenség növekedésével, azonban egy rögzített a értéknél a κ értéke mindig nagyobb, mint a megfelelő τ , ami a Poisson-szám nagyobb érzékenységét jelzi a geometriai transzformációra. A merőleges irány mentén ellentétes tendenciát figyelhetünk meg, azaz ν_{yx} növekvő értékét kapjuk oly módon, hogy az eredményeket $1/R$ függvényében ábrázolva a két irány adatai ismét egybeesnek egymással (lásd 5.5(b) ábra). Az effektív Young-modulushoz hasonlóan a növekvő hatványfüggvény κ exponense egybeesik az 5.3. egyenletben szereplő csökkenő hatványfüggvény exponensével (lásd 5.5 ábra). A függelékben szereplő analitikus számítások $\nu_{yx}(R = 1) = \nu_{xy}(R = 1) = 1/3$ -ot jósolnak a nagy $a \rightarrow 1$ rendezetlenség határán. Az 5.5(a,b) ábra megfelelő pontjainak értékei $a = 0.8$ esetén ettől némileg eltérnek, a Poisson-számnak a rácsszerkezetre való erősebb érzékenysége miatt.

5.3. Zsugorodás okozta repedésképződés az új modellben

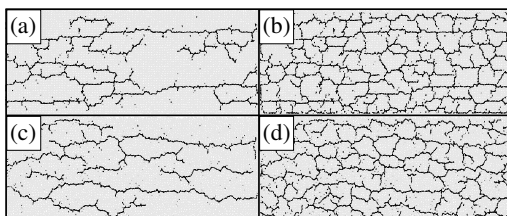
Annak érdekében, hogy teszteljem a modell képességeit egy vékonyréteg zsugorodás okozta repedezésének leírására, számítógépes szimulációkat



5.6. ábra. $R = 1$ izotróp rendszer repedési folyamatának időbeli alakulása. A pillanatképek az $a = 0.5$ (felső sor) és $a = 0.8$ (alsó sor) rendezetlenségi paraméterek esetén láthatók a törött rudak részarányának (a,c) $d = 0.1$ és (b,d) $d = 0.2$ értékére. (a,c) Kezdetben a repedések véletlenszerű helyeken keletkeznek és fokozatosan nőnek. (b,d) Fragmensek akkor keletkeznek a rendszerben, amikor a repedési hálózat összefüggővé válik.

végeztem az R anizotrópia erősségének változtatásával a $0.5 \leq R \leq 2.5$ tartományon, az $a = 0.5$ és $a = 0.8$ rendezetlenségi paraméter két különböző értéke mellett. A réteg globális károsodásának kvantitatív jellemzésére az előző fejezetben bevezetett $d(t)$ károsodást használtam a $d(t) = N_b(t)/N_B$ definícióval, ahol N_b és N_B a t időpontig törött rúdelemek számát, illetve a kezdeti állapotban a rétegben lévő rúdelemek teljes számát jelöli.

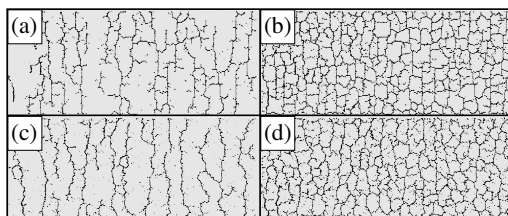
Anizotrópia hiányában ($R = 1$) celluláris repedési képnek kell kialakulnia, ahol a repedések a minta leggyengébb kötéseinél keletkeznek. Az 5.6. ábrán látható, hogy a károsodás felhalmozódásával a repedések növekednek, összeolvadnak, és végül összefüggő repedési hálózatot alkotnak. $a = 0.5$ alacsonyabb rendezetlenség (lásd 5.6(a,b) ábra) esetén a repedések hajlamosabbak az alapul szolgáló négyzetes rács fő irányait követni. Ezzel szemben $a = 0.8$ nagyobb szerkezeti rendezetlenség esetén az 5.6(c,d) ábrákon a repedések iránya, és következésképpen a kialakuló repedéshálózat szerkezete nagyobb véletlenszerűséggel rendelkezik, ahol a négyzetes rács két tengelye mentén semmilyen rendeződés jele nem mutatható ki. Az ábrán látható, hogy a celluláris repedési hálózat poligonális fragmenseket eredményez, amelyek területe enyhe fluktuációt mutat egy jól meghatározott átlag körül. A repedések növekedésével a repedési csúcsok elágazása



5.7. ábra. Vékonyréteg repedési folyamatának időbeli alakulása $R = 1.5$ anizotrópia jelenlétében a rendezetlenség $a = 0.5$ (felső sor) és $a = 0.8$ (alsó sor) értékére. A fejlődés pillanatképeit a törött rúdelemek d részarányának két különböző értéke mellett mutatja be az ábra: (a,c) $d = 0.1$ és (b,d) $d = 0.2$.

következhethet be, amint azt az 5.6(a,c) ábrák szemléltetik. Ahogy a réteg zsugorodik, a növekvő repedések összeolvadnak és összefüggő hálózatot hoznak létre, így a réteg ennek következtében darabokra esik szét. A korábban tapasztaltakhoz hasonlóan a további zsugorodás általában a fragmensek közepén történő repedésképződéshez vezet, amely a fragmenseket két részre bontja, tovább csökkentve a méretüket.

A szimulációk azt mutatták, hogy az $R \neq 1$ anizotrópia jelenlétében mind a repedések keletkezése, mind a terjedése jelentősen megváltozik, ami viszont befolyásolja a repedési mintázat szerkezetét és a fragmensek geometriáját. Ezt szemlélteti az 5.7. ábra $R = 1.5$ esetén, ahol a törési folyamat különböző szakaszaiban 2 pillanatfelvétel látható a fejlődésről az a rendezetlenségi paraméter két értéke mellett (hasonlóan az 5.6. ábrához). Az anizotrópia $R > 1$ értéke azt jelenti, hogy azok a rúdelemek, amelyek a vízszintes tengellyel $\alpha \approx \pi/2$ nagy szöget zárnak be, hosszabbak és vékonyabbak, és emiatt könnyebben törnek. Ezeknek a rudaknak a fokozatos eltávolítása repedéseket hoz létre a poligonok szélei mentén, amelyek majdnem merőlegesek a rúdelemekre. Következésképpen a törés kezdeti fázisában kialakuló repedések a vízszintes irányhoz igazodnak, ahogy az 5.7(a,c) ábrákon látható. A károsodás felhalmozódásával a vízszintes irányban fekvő erősebb rudak is törni kezdenek, ami függőleges irányú repedéseket eredményez, amelyek összekötik az elsődleges töréseket egymással. A



5.8. ábra. A repedező réteg időfejlődése az anizotrópia $R = 2/3$ értéke mellett az $a = 0.5$ (felső sor) és $a = 0.8$ (alsó sor) rendezetlenség esetén. A fejlődés pillanatképeit ugyanazoknál a d károsodási értékeknél mutatja be az ábra, mint az 5.6. és 5.7. ábrák: (a,c) $d = 0.1$, (b,d) $d = 0.2$.

teljesen összefüggő repedési hálózatban, amelyet az 5.7(b,d) ábrák szemléltetnek, a repedések erősen a réteg mechanikai perturbációjának irányába mentén és arra merőlegesen rendeződnek. A repedési hálózat szerkezetének anizotrópiája a fragmensek alakjában is megmutatkozik, amelyek az izotróp esethez képest megnyúltak (lásd 5.6(b,d) ábra). Az a rendezetlenségi paraméter ugyanolyan hatással van a repedésszerkezetre, mint az izotróp esetben, azaz alacsony rendezetlenség esetén a repedések irányát az alapul szolgáló négyzetes rács befolyásolja, míg magas rendezetlenség esetén a repedések útja elágazóvá válik.

Természetesen a poligon rács $R < 1$ paraméterértékkel történő összenyomása a minta erős és gyenge irányát felcseréli. Az 5.8. ábrán látható, hogy az 5.7. ábra R paraméterértékének az $R = 2/3$ inverz értékét véve, kvalitatíve ugyanazt a repedésszerkezetet kapjuk, mint nyújtás esetén, csak az elsődleges repedések iránya függőlegesre fordult.

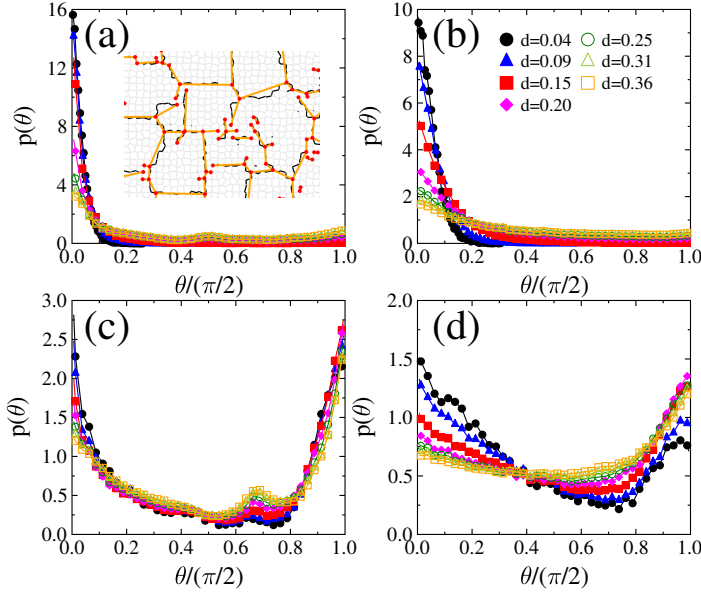
Fontos hangsúlyozni, hogy a repedési mintázatok fejlődésének fent bemutatott kvalitatív jellemzői nagyon jó összhangban vannak a korábbi, irányfüggő törési küszöbértékeket alkalmazó modellezési megközelítésünk eredményeivel [P1], valamint a laboratóriumi kísérletek eredményeivel [1, 47, 89, 90, 98]. A rendszer fejlődésének részletes elemzése kimutatta, hogy a modell reprodukálja a vékonyrétegekre jellemző törési folyamat három fázisát [P1] anizotrópia jelenlétében: $R \neq 1$ paraméterértékek esetén az

elsődleges repedések egyenesen nőnek és hosszú darabokra szeletelik a mintát. A másodlagos repedések az elsődleges repedésekre merőlegesen nőnek és kisebb darabokra vágják a szeleteket. Ahogy a rétegben halmozódik a károsodás, az elsődleges és másodlagos repedések összeolvadnak, ami összefüggő repedési hálózat kialakulását eredményezi, és a réteg nagyszámú darabra törik szét. A fragmensek további zsugorodása feszültséget generál, amely a darabok közepén a legnagyobb. Következésképpen a repedések ott keletkeznek, és a felszín felé futnak, kettéhasítva a fragmenst. A következőkben a repedések orientációjának, továbbá a fragmensek alakjának és tömegük statisztikájának mennyiségi jellemzését adom meg az anizotrópia és a rendszerben lévő rendezetlenség mértékét változtatva.

5.4. Makrorepedések orientációja

Egy rúdelem törése mikrorepedést hoz létre a szomszédos poligonok közös pereme mentén. A réteg zsugorodásával a mikrorepedések fokozatosan kiterjedt repedésekké alakulnak, összeolvadhatnak vagy keresztezhetnek egymást. A kialakuló repedési mintázat szerkezete erősen függ az alkalmazott anizotrópia mértékétől. A repedési hálózat anizotróp szerkezetének jellemzésére alkalmas legfontosabb mennyiség a repedések Θ orientációs szöge egy rögzített irányhoz képest, amelyet itt a koordinátarendszer x -tengelye határoz meg, hasonlóan az előző fejezetben tárgyaltakhoz. Ahhoz, hogy a repedések orientációját jellemezni tudjam, először a rendszer szomszédos mikrorepedéseiből álló makrorepedéseket konstruáltam meg az előző fejezetben bemutatott algoritmus segítségével.

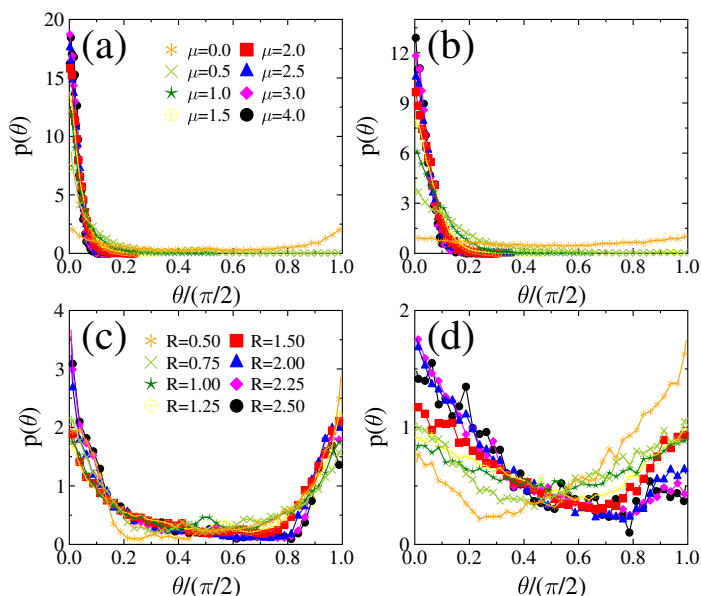
A makrorepedések Θ orientációs szögének $p(\Theta)$ valószínűségi eloszlása az 5.9. ábrán látható több d károsodásnál, ahogy a zsugorodó réteg fejlődik. A két modellezési megközelítés, azaz a poligonális rács geometriai transzformációjával és a törési küszöbértékek irányfüggésével kapott eredményeket hasonlítom össze az $a = 0.5$ és $a = 0.8$ rendezetlenségi paraméter két értékénél a $\mu = 2$ és $R = 1.75$ anizotrópiák mellett. Megfigyelhető,



5.9. ábra. A makrorepedések Θ orientációs szögének valószínűségi eloszlása különböző d károsodásoknál a két modellezési megközelítés $\mu = 2$ (felső sor) és $R = 1.75$ (alsó sor) rögzített anizotrópia paraméterei esetén két rendezetlenségi paraméter $a = 0.5$ (bal oldali oszlop) és $a = 0.8$ (jobb oldali oszlop) mellett. Az (a) belső kis ábráján az elágazási pontok azonosítása és a mikrorepedésekből álló makrorepedések konstrukciója látható.

hogyan a törési folyamat kezdetén mindkét modellben a $p(\Theta)$ eloszlásoknak erős csúcsa van $\Theta = 0$ -nál, ami az elsődleges repedések erős rendeződését mutatja (lásd 5.7. és 4.3. ábrák pillanatfelvételei).

Miután az elsődleges repedések hosszú szeletekre vágják a réteget, a rájuk merőleges irányban másodlagos repedések alakulnak ki, amelyeket némi véletlenszerű repedezés kísér. Bár mindkét modellezési megközelítés reprodukálta a $p(\Theta)$ csúcsát $\Theta \approx 0$ -nál, amelyet az elsődleges repedések okoztak; a másodlagos repedések csúcsát $\Theta \approx \pi/2$ -nél jobban megragadja az új modell, amelyben a réteg mechanikai tulajdonságaiban van az anizotrópia beágyazva. Ha az anizotrópia a törési küszöbértékek irányfüggésében van kódolva (4.1. egyenlet), akkor a diszkretizáció mögöttes izotróp



5.10. ábra. A makrorepedések x tengellyel bezárt Θ szögének $p(\Theta)$ valószínűségi eloszlása a két modellezési megközelítésben különböző anizotrópiák mellett (felső sor: irányfüggő törési küszöbök μ értékének változtatásával, alsó sor: a véletlen rács transzformációja változó R értékekkel). Az eredményeket $a = 0.5$ (bal oldali oszlop) és $a = 0.8$ (jobb oldali oszlop) rendezetlenség esetén mutatja be az ábra. A makrorepedéseket minden esetben azonos $d = 0.04$ károsodásnál határoztam meg. Megfigyelhető, hogy az anizotrópia növekedésével az eloszlások egyre jobban csúcsosodnak $\Theta \approx 0$ és $\Theta \approx \pi/2$ értékeknél.

véletlenszerűsége képes legyőzni az elsődleges repedésekre merőleges irányú anizotrópia hatását. Megjegyzendő, hogy alacsony $a = 0.5$ szerkezeti rendezetlenség esetén (5.9(a,c) ábra) mindkét modellben megjelenik egy további csúcs a $\Theta/(\pi/2) \approx 0.68$ szög körül, bár ez az új modellben hangsúlyosabb (5.9(c) ábra). Ez a csúcs a mögöttes négyzetes rácsszerkezet mellékhatása, amely akkor dominál a repedés dinamikájában, ha az a rendezetlenségi paraméter túl alacsony. Ahogy a zsugorodás a bináris fragmentációs fázisban folytatódik, az elsődleges és másodlagos repedések mellett véletlenszerű irányítással is keletkeznek repedések, amelyeket a ré-

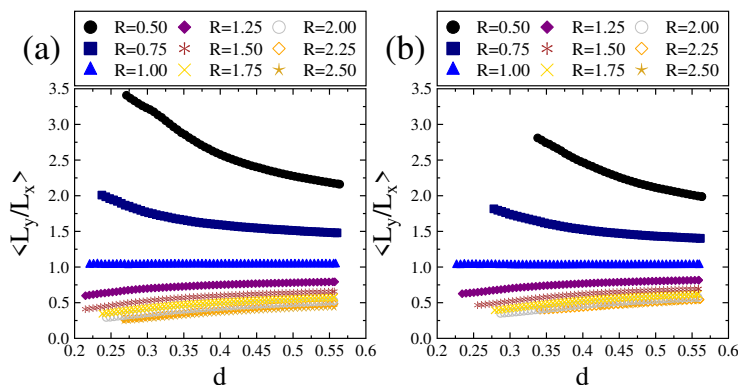
teg rendezetlensége kontrollál. Következésképpen d növekedésével a csúcs fokozatosan ellaposodik, és $p(\Theta)$ egyenletes eloszlás felé fejlődik. Az eredmények ismét azt mutatják, hogy a strukturális rendezetlenség mértékének kellően nagyoknak kell lennie ahhoz, hogy fizikailag értelmes eredményeket kapjunk a diszkrét elem szimulációkkal. Az $a = 0.8$, vagy ennél nagyobb értékek elég magasnak bizonyultak a kísérleti eredmények reprodukálásához.

Az 5.10. ábra összehasonlítja a μ és R anizotrópia paraméterek különböző értékei mellett kapott szögeloszlásokat a két modellben azonos $d = 0.04$ károsodás mellett, de ismét két különböző a szerkezeti rendezetlenség esetén. A μ és R anizotrópia növekedésével a $p(\Theta)$ eloszlás csúcsa a várakozásoknak megfelelően $\Theta \approx 0$ -nál válik hangsúlyosabbá, azonban csak az új modell reprodukálja helyesen a $\Theta \approx \pi/2$ függőleges irányú csúcsot. Emellett ismét nyilvánvaló, hogy a mögöttes négyzetes rácsszerkezet mellékhatásának elnyomásához kellően nagy szerkezeti rendezetlenségre van szükség.

5.5. A fragmensek alakjának és tömegének fejlődése

Ahogy arról korábban már volt szó, a növekvő repedések összeolvadásával létrejön az összefüggő repedési hálózat és a réteg darabokra esik szét. A további zsugorodás a fragmenseken belül feszültségek felhalmozódásához vezet, ami viszont repedések kialakulását és a darabok további töredezését eredményezi. Ez a bináris fragmentációs folyamat a fragmensek méretének fokozatos csökkenéséhez vezet, ami alakváltozással jár, ahogy az az 5.6., 5.7. és 5.8. ábrákon megfigyelhető.

A fragmensek alakját a repedési hálózat szerkezete határozza meg, ezért továbbra is várható, hogy anizotrópia hiányában a kialakuló celluláris minta izotróp, poligonális alakú fragmenseket eredményez. Az $R \neq 1$ kezdeti anizotrópia növekedésével az elsődleges repedések egyre dominánsabbá



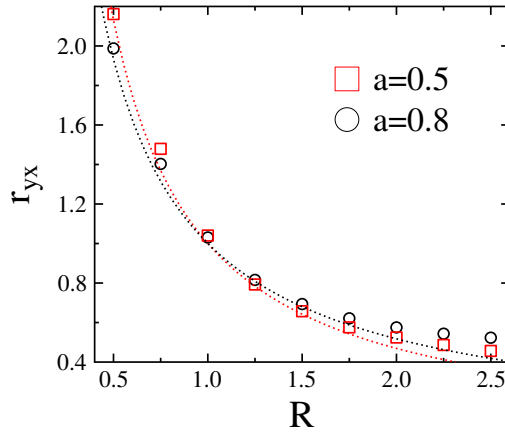
5.11. ábra. A fragmensek $\langle L_y/L_x \rangle$ átlagos oldalarányának alakulása a d károsodás növekedésével az R anizotrópia számos értékénél (a) $a = 0.5$ és (b) $a = 0.8$ szerkezeti rendezetlenség esetén.

válnak, és a réteget hosszú szeletekre vágják. Az elsődleges repedésekre merőleges szegmentációs repedések olyan alakú fragmenseket hoznak létre, amelyek vagy a vízszintes ($R > 1$), vagy a függőleges ($R < 1$) irányban megnyúltak. A korábbiakhoz hasonlóan a fragmensek alakjának kvantitatív leírásához az egyes darabok határoló dobozát konstruáltam meg, amelyek kiterjedése L_x és L_y a koordinátarendszer x és y irányában. Az L_y/L_x dimenziótlan arányt használtam alakjellemzőként, amelyet a fejlődő rendszer különböző d károsodásainál nagyszámú minta fragmenseire átlagoltam [46, 93]. Az 5.11. ábra azt mutatja, hogy az $R = 1$ izotróp esetben az átlagos oldalarány a teljes károsodási folyamat során állandó $\langle L_y/L_x \rangle \approx 1$ értéket vesz fel, míg $R \neq 1$ anizotrópia jelenlétében erős eltérést kapunk az 1-től. Megjegyzendő, hogy $R < 1$ és $R > 1$ esetén a $\langle L_y/L_x \rangle$ kezdőértéke nagyobb és kisebb, mint 1, ami azt fejezi ki, hogy a fragmensek a függőleges, illetve a vízszintes irányban megnyúlnak. A fragmensek alakjának legerősebb megnyúlása annál a d károsodásnál várható, ahol a repedési hálózat összefüggővé válik és először alakulnak ki fragmensek nagy számban, azaz az 5.11. ábra görbéinek kezdőpontjánál. A bináris fragmentáció so-

rán a hosszúkás fragmensekben kialakuló repedések általában a hosszabbik tengelyükre merőlegesen darabolják fel azokat, csökkentve az alaki anizotrópiát a fragmensmérettel együtt. Ennek következtében az 5.11. ábrán megfigyelhető, hogy az $R \neq 1$ kezdeti anizotrópia bármely értéke esetén az oldalarány az $\langle L_y/L_x \rangle \rightarrow r_{yx}$ határérték felé fejlődik a növekvő d károsodással, közeledve az egyhez, azaz $R < 1$ esetén csökken és $R > 1$ esetén pedig növekszik az $\langle L_y/L_x \rangle$ arány, megközelítve egy jól definiált aszimptotikus értéket. Ez a viselkedés megerősíti, hogy a repedések túlnyomórészt a határoló doboz hosszabbik oldalára merőleges irányban keletkeznek, ami fokozatosan izotrópabb alak felé tereli a fragmenseket. A nagy d károsodás határesetében azonban stabil anizotróp alakot érünk el, amelyet az $\langle L_y/L_x \rangle$ oldalarány R függő $r_{yx} \neq 1$ aszimptotikus értékével számszerűsíthetünk. Az 5.11(a,b) ábrákon a fragmensek alakjának alakulását hasonlítom össze két különböző értékű a szerkezeti rendezetlenség esetén. A két esetben ugyanaz a kvalitatív viselkedés figyelhető meg. Ráadásul az azonos R anizotrópiáknak megfelelő görbék értékei különböző rendezetlenségek esetén meglehetősen közel esnek egymáshoz. Ez azt mutatja, hogy a szerkezeti rendezetlenségnek csekély hatása van a fragmensek alakjára, a rendezetlenség elsősorban azt a kritikus d_c károsodást befolyásolja, ahol az összefüggő repedési hálózat kialakul (a görbék d kezdő károsodási értékei). Az 5.12. ábra azt mutatja, hogy az oldalarány r_{yx} aszimptotikus értéke csökken, ahogy a réteg R kezdeti anizotrópiája nő. A fenti eredményekkel összhangban a különböző a szerkezeti rendezetlenségeknél kapott két görbe úgy esik közel egymáshoz, hogy a viselkedésüket jól leírja az

$$\langle L_y/L_x \rangle (R) \approx \frac{\langle L_y/L_x \rangle (R = 1)}{R^\gamma} \quad (5.4)$$

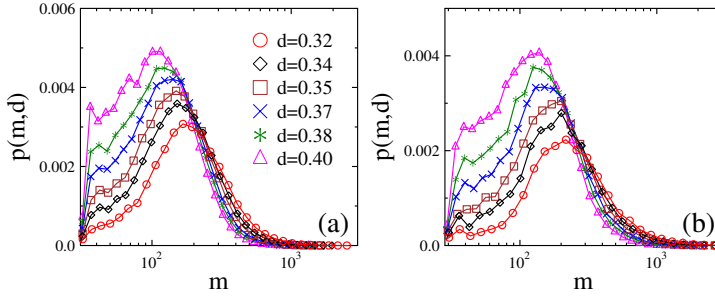
függvényalak. Az 5.4. összefüggésnek a numerikus adatokra való illesztésével a γ exponens értéke $\gamma = 1.09 \pm 0.04$ és $\gamma = 0.95 \pm 0.05$ lett, rendre az a rendezetlenségi paraméter 0.5 és 0.8 értékére. Az eredmények azt mutatják, hogy a fragmensek végső stabil alakját elsősorban a vékonyréteg mechanikai tulajdonságaiba beépült anizotrópia szabályozza, a rendezet-



5.12. ábra. A fragmensek átlagos oldalarányának r_{yx} aszimptotikus értéke az R anizotrópia erősségének függvényében kétféle a szerkezeti rendezetlenség esetén.

lenség kisebb szerepet játszik az alakfejlődésben. Megjegyzem, hogy az 5.12. ábrán bemutatott fragmensek alakjának anizotrópiával történő változása jó kvalitatív egyezést mutat a másik modellel, ahol az anizotrópiát a törési küszöbértékek irányfüggésével vettem figyelembe [P1].

A fragmensek alakjának komplex fejlődésével ellentétben a tömegük statisztikai jellemzői továbbra is rendkívül robusztus viselkedést mutatnak. Az 5.13. ábra a $p(m, d)$ fragmensméret-eloszlásokat mutatja, amelyeket egy $R = 1.5$ anizotróp rendszerben kaptam több d károsodási értéknél a d_c kritikus károsodás fölött. Megállapítható, hogy a károsodás növekedésével mind a legnagyobb fragmens tömege, mind az átlagos fragmenstömeg csökken, azonban az eloszlások függvényalakja gyakorlatilag változatlan marad. Az eloszlások a kis tömegtartományban némileg torzulnak, ami nagy károsodásoknál még hangsúlyosabb. Ez a minta diszkretizálásának mellékhatása, azaz a modell törhetetlen legkisebb darabjai (a poligonok) miatt a repedezés előrehaladtával ezeknek a kis daraboknak a tömege túlréprezentálttá válik a statisztikában.

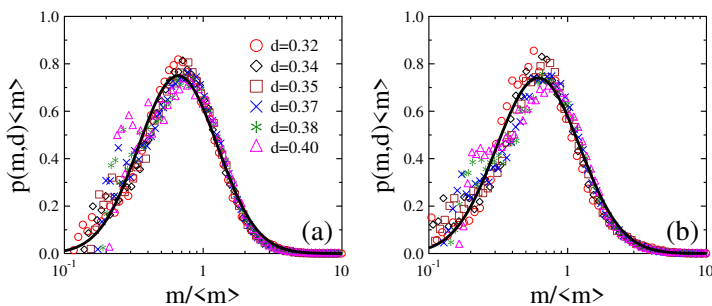


5.13. ábra. A fragmensek tömegeloszlása különböző d károsodásoknál a rendezetlenségi paraméter (a) $a = 0.5$ és (b) $a = 0.8$ értékei esetén, az anizotrópia $R = 1.5$ azonos értéke mellett. d növelésével a fragmensek átlagos tömege csökken, azonban az eloszlások függvényalakja közel azonos marad.

Az 5.14. ábra azt mutatja, hogy a $p(m, d)$ tömegeloszlásokat az $\langle m \rangle$ átlagos fragmenstömeggel átskálázva a különböző d károsodásoknál kapott görbék ismét egymásra ejthetők. Ez a viselkedés megerősíti az eloszlások függvényalakjának robusztusságát, és feltételezi a

$$p(m, d) = \langle m \rangle^{-1} \Psi(m / \langle m \rangle) \quad (5.5)$$

skálázási struktúrát, ahol $\Psi(x)$ a skálafüggvényt jelöli. A jobb oldalon a d károsodás hatása ismét csak implicit módon, az $\langle m \rangle$ átlagos fragmenstömeg károsodásfüggésén keresztül jelentkezik. A számítógépes szimulációk kimutatták, hogy az 5.5. skálázási viselkedés minden R anizotrópia esetén érvényes, beleértve az $R = 1$ izotróp esetet is. Az a rendezetlenségi paraméter két különböző értékére vonatkozó eredményeket összehasonlítva az 5.14(a,b) ábrákon, ismét megállapítható, hogy a szerkezeti rendezetlenségnek nincs releváns hatása a fragmenstömeg statisztikájára. A tömegeloszlásoknál megfigyelhető erős univerzalitás a bináris fragmentációs folyamatok határeloszlásának robusztusságából következik [77, 94]. A tömegeloszlás $p(m)$ függvényalakja és kvalitatív viselkedése a károsodás növekedésével jó összhangban van a korábbi modellel [P1], valamint a sűrű paszták száradásos repedezése során kapott kísérleti eredményekkel [47].



5.14. ábra. A $p(m, d)$ fragmenstömeg-eloszlások skálaanalízise különböző d károsodási értékekre a repedező rendszerben $R = 1.5$ anizotrópia mellett, a rendezetlenségi paraméter két különböző értékénél: (a) $a = 0.5$, (b) $a = 0.8$. Az adatokat a fragmensek $\langle m \rangle$ átlagos tömegével átskálázva a különböző d károsodási értékekre kapott eloszlások egymásra esnek. A folytonos vonalak az 5.6. lognormális eloszlással való legjobb illesztést jelzik.

Számolásaim kimutatták, hogy a $\Psi(x)$ skálafüggvény jól közelíthető a

$$\Psi(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(\ln(x) - \langle m \rangle)^2 / 2\sigma^2\right] \quad (5.6)$$

lognormális eloszlással, ahol $\langle m \rangle$ és σ a fragmenstömegek logaritmikus átlagát, illetve szórását jelöli. Az 5.14. ábrán a folytonos vonalakat a numerikus adatoknak az 5.6. kifejezéssel való illesztésével kaptam. Megfigyelhető, hogy az 5.6. egyenlet kielégítő leírást ad az adatokra, a görbétől való erősebb eltérések csak a kis fragmensek tartományán tapasztalhatók. Eredményeim összhangban vannak a bináris kaszkádfolyamatok során keletkező darabok tömegeloszlásával kapcsolatos legújabb eredményekkel [14, 43, 47, 77, 94].

5.6. Konklúziók

Az anizotróp anyagi jellemzőkkel rendelkező vékonyrétegek mechanikai viselkedésének és repedési folyamatainak vizsgálatára bevezettünk egy újszerű számítógépes modellt, ahol az anizotrópiát a kezdeti poligon rács egy

irány menti nyújtásán, vagy zsugorításán keresztül vettük figyelembe. Az anizotrópia erősségét a nyújtási (zsugorítási) aránnyal, míg a poligon rács rendezetlenségét a Voronoi-konstrukció egy paraméterével kontrolláltuk.

A rendszer anyagi paramétereinek jellemzéséhez téglalap alakú próbatestek egytengelyű nyújtását vizsgáltam a geometriai transzformáció irányában és arra merőlegesen. Számítógépes szimulációkkal és analitikus számolásokkal meghatároztam a réteg Young-modulusának és Poisson-számának anizotrópia- és rendezetlenség-függését: a rendezetlenség nulla határértékében az effektív Young-modulus megegyezett a rúdelemek Young-modulusával, nagyobb rendezetlenségi értékeknél pedig az effektív Young-modulus az anizotrópia erősségének hatványfüggvényeként növekedett. Megállapítottam, hogy a geometriai transzformációra merőleges irányú terhelés esetén az effektív Young-modulus az anizotrópia paraméter csökkenő hatványfüggvénye, ahol az exponens megegyezett a másik irányban kapott eredményekkel. A Poisson-szám a geometriai transzformációra merőleges irányban csökkenő, azzal párhuzamosan pedig növekvő hatványfüggvénnyel volt leírható az anizotrópia függvényében. Ebben az esetben is a két irány exponensei megegyeztek egymással.

A repedési mintázat és a keletkező fragmensek statisztikáit összevettem a korábban kidolgozott modellel. Megmutattam, hogy mindkét modell esetén a makrorepedések szögeloszlása erős csúccsal rendelkezik a károsodás kezdeti értékeinél az erős irány mentén, ám a másodlagos repedések csúcsát nagy szögek esetében jobban megragadta az új modell. Az eredmény alapján azt a következtetést vontuk le, hogy törésmechanikai vizsgálatokra előnyösebb a poligonális rács geometriai transzformációjára épülő eljárás. Azt is megmutattam, hogy a poligonális rács geometriai transzformációjával bevezetett anizotrópia a korábbi modellhez hasonlóan elnyúlt fragmensalakokat eredményez, ahol az oldalarányt a nyújtási faktoralakkal kontrollálhatjuk. A fragmenstömegre vonatkozó vizsgálataim arra is rámutattak, hogy hasonlóan a korábban tapasztaltakhoz, a tömegeloszlás robusztusan viselkedik és lognormális eloszlással jellemezhető.

Össességében azt a következtetést vontam le, hogy a véletlen szerkezetű, poligonális rács transzformációjára épülő eljárás kiválóan megragadja azt az anizotrópiát, amit sűrű pasztákba mechanikai gerjesztéssel építettek be. A repedések szögeloszlását az új modell pontosabban reprodukálja, mint a törési küszöbök irányfüggését használó eljárás, ezért az új modell használata javasolt zsugorodás által indukált repedezés vizsgálatához.

6. fejezet

Skálafüggetlen repedési zaj zsugorodás által indukált repedezésben

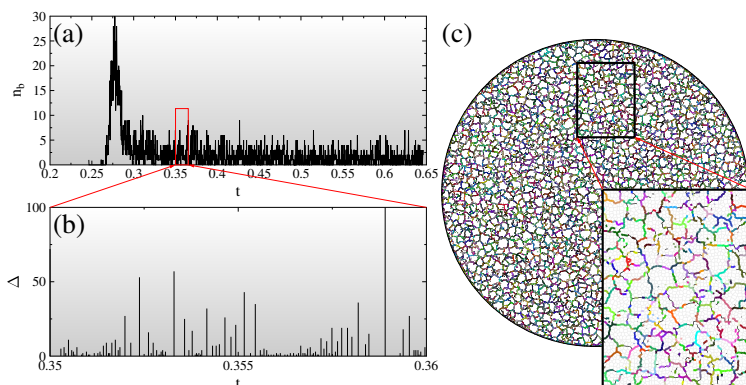
Az elmúlt évtizedek kísérleti és elméleti vizsgálatai elsősorban a kialakuló repedési mintázat [1, 6, 9, 46] szerkezetére összpontosítottak, azonban a zsugorodás okozta repedési zaj kialakulásának, valamint statisztikai és dinamikai tulajdonságainak megértése továbbra is alapvető fontosságú nyitott probléma maradt. A 2.4. fejezetben bemutattam, hogy a közelmúltban végzett akusztikus emissziós mérések szerint a zsugorodás által indukált repedezést kísérő zaj nem univerzális skálaexponensekkel jellemezhető [70, 71]. A munkám során arra kerestem a választ, hogy mi okozhatja a repedési zajnak ezen különös viselkedését, valamint tisztázni akartam, nincs-e valamilyen rejtett univerzalitás a jelenségkör hátterében. A fejezetben bemutatott eredmények a [P3] publikáción alapszanak.

6.1. Repedési zaj zsugorodó vékonyrétegekben

Vizsgálataimhoz ismét a 3. fejezetben bemutatott diszkrét elem modellt használtam, amellyel szimulációkat végeztem a repedezés intermittens

időfejlődésének megértésére izotróp vékonyrétegekben, széles tartományon változtatva a rendszer méretét és a deformáció sebességét. Ahogy arról már korábban szó volt, a réteg zsugorodása során a poligonok közötti rúdelemek fokozatosan eltörnek, és a szomszédos poligonok között mikrorepedések jelennek meg a rúdelemek helyén. A repedési folyamat időbeli fejlődésének jellemzésére minden egyes mikrorepedés esetében rögzítettem annak \vec{r}_i^b pozícióját és t_i^b megjelenési idejét, amelyből rekonstruálható a teljes réteg károsodásának időfejlődése. A kísérletek során az akusztikus emissziós (AE) érzékelők a minta kiterjedt térbeli régióiból, vagy akár az egész rendszerből gyűjtik be az egyidejű repedések által keltett rugalmas hullámok hatását [99]. Ezért a zsugorodó réteg törési folyamatának általános alakulását az egyenlő nagyságú időintervallumokban bekövetkezett mikrorepedések n_b számával jellemeztem, amelyet a 6.1(a) ábrán lehet látni a t idő függvényében.

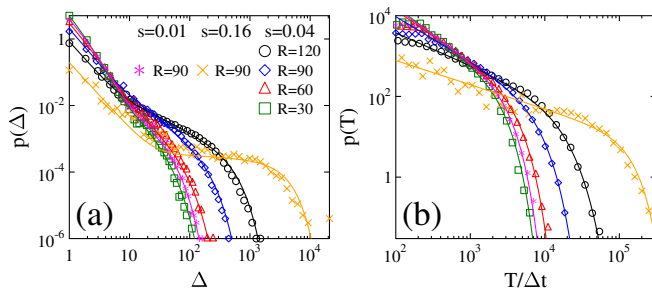
Az $n_b(t)$ görbe hirtelen emelkedése és domináns kezdeti csúcsa jelzi a dinamika azon pontját, ahol a deformáció elég nagyvá válik ahhoz, hogy meginduljon a repedések nukleációja, majd növekedése. A növekvő repedések fokozatosan összeolvadnak és összefüggő repedési hálózatot alkotnak, amely mentén a réteg nagyszámú darabra esik szét. A további zsugorodás eredményeként a fragmenseken belül megjelenő repedések két részre darabolják azokat. A 6.1(c) ábra azt mutatja, hogy a kialakuló repedési hálózat izotróp celluláris szerkezettel rendelkezik, amely a fragmensek közel poligonális alakját eredményezi, összhangban a különböző zsugorodásos repedési jelenségekre vonatkozó mérésekkel [21, 100]. A 6.1(a) ábra $n_b(t)$ görbéjének sztochasztikus jellege azt jelzi, hogy a réteg deformációjának lassú, homogén növekedése ellenére a károsodás halmozódása szakaszosan zajlik. A törési aktivitás jellemzése érdekében bevezettem egy t_c korrelációs időt, és feltételeztem, hogy két egymást követő t_i^b és t_{i+1}^b idejű mikrorepedés (rúdtörés) ugyanahhoz a töréssorozathoz tartozik, ha t_c időn belül követik egymást, azaz ha a $t_{i+1}^b - t_i^b < t_c$ feltétel teljesül. Ily módon a mikrorepedések időbeli sorozata a repedési aktivitás nagyszámú törést tartalmazó



6.1. ábra. (a,b) A zsugorodás okozta repedések számának időbeli alakulása és (c) térbeli eloszlása egy $R = 120$ sugarú rendszerre (az l_0 átlagos poligonméret egységében). (a) Az eltört rúdelemek n_b száma a t idő függvényében. (b) Az idősor egy kis szakaszán lehet látni, hogy a rendszer törési aktivitása különálló pulzusokra bontható, amelyek Δ mérete van ábrázolva a bekövetkezésük időpontjában. (c) A repedező réteg pillanatfelvétele az összefüggő repedési hálózat kialakulása után. A mikrorepedések aszerint vannak színezve, hogy melyik lokális töréslavinához tartoznak. A jobb alsó sarokban lévő nagyított nézetből látható, hogy a lokális lavinák a repedések növekedésének intermittens lépései.

pulzusaira bomlik, amelyeket "csendes" időszakok választanak el egymástól, amikor nem történik törés. Ezt szemlélteti a 6.1(b) ábra, ahol a 6.1(a) ábra idősorának egy kis szegmensében azonosított pulzusokat ábrázoltam. A pulzus Δ nagysága a törési események sorozatában eltört rúdelemek száma, a pulzus T időtartama a t_{last}^b utolsó és a t_{first}^b első rúdtörés ideje közötti $T = t_{last}^b - t_{first}^b$ különbség, míg az egymást követő pulzusok közötti t_W várakozási idő a közöttük lévő csendes időszak időtartama.

A globális repedési aktivitás így azonosított pulzusai a valós zsugorodással végzett kísérletek akusztikus eseményeinek feleltethetők meg, így a pulzussűrűségek statisztikája összehasonlítható az AE mérések megfelelő eredményeivel [31, 32, 70, 71]. A 6.2(a) ábra a pulzusnagyságok $p(\Delta)$ valószínűségi eloszlását mutatja be négy különböző R rendszerméretre, az s zsugorodási ráta rögzített értéke mellett, valamint két további adatsort



6.2. ábra. A pulzusok (a) $p(\Delta)$ méretének és (b) $p(T)$ időtartamának valószínűségi eloszlása különböző R rendszerméret és s deformációs ráta esetén. A folytonos vonalak (a) a 6.1. egyenlet és (b) a 6.2. egyenlet szerinti illesztéseket mutatják. (b)-ben Δt a DEM-szimulációk időlépését jelöli.

az s egy alacsonyabb és magasabb értékénél $R = 90$ esetén. A $p(\Delta)$ komplex viselkedése figyelhető meg: a legkisebb, $R = 30$ rendszerméretnél a $p(\Delta)$ méreteloszlás hatványfüggvény csökkenést mutat, amelyet egy exponenciális levágás követ. Nagyobb rendszerek esetén azonban a pulzusok nagyobb méretűvé nőnek, és egy átmenet következik be egy második, alacsonyabb exponenssel jellemzett hatványfüggvény tartományba, miközben a görbe meredeksége gyakorlatilag állandó marad a kis Δ értékek esetén. Az s zsugorodási ráta növelése rögzített R rendszerméret mellett hasonló hatással jár, azaz nagyobb s esetén nagyobb pulzusok keletkeznek, és ezzel párhuzamosan létrejön egy átmenet egy alacsonyabb exponensű második hatványfüggvénybe. A $p(\Delta)$ pulzusméret-eloszlás alakjának kvantitatív jellemzésére a

$$p(\Delta) = A\Delta^{-\tau_l}e^{-\Delta/\Delta_l} + B\Delta^{-\tau_h}e^{-(\Delta/\Delta_h)^\delta} \quad (6.1)$$

függvényt alkalmaztam. A 6.1. egyenletben feltételeztem, hogy a $p(\Delta)$ méreteloszlás két, exponenciális levágással rendelkező hatványfüggvény összege, ahol τ_l és τ_h az alacsony és magas pulzusméretek tartományának exponensei, a levágási pulzusméretek pedig rendre Δ_l és Δ_h jelöli, míg az A és B paraméterek a két tag relatív járulékát szabályozzák az eloszlásban.

A 6.2(a) ábrán a folytonos vonalak a 6.1. egyenlet szerinti illesztéseket jelölik, amelyeket úgy kaptam, hogy τ_l -t rögzítettem azon az értéken, amelyet az $R = 30$ sugarú, egymódusú rendszerben $\tau_l = 1.95 \pm 0.05$ illesztéssel kaptam, a másik τ_h exponenst pedig illesztési paraméterként használtam. Megfigyelhető, hogy R és s növelésével a τ_h exponens a $\tau_h = 1.95 \pm 0.06$ értékről indulva 0 felé közelít. A δ exponens szabályozza a $p(\Delta)$ levágásának alakját, amelynek értéke minden esetben ugyanaz: $\delta = 1.50 \pm 0.06$. A 6.2(b) ábra azt mutatja, hogy az időtartam $p(T)$ valószínűségi eloszlása hasonló fejlődésen megy keresztül, azaz a nagy időtartamok tartományán $p(T)$ mindig egy hatványfüggvénnyel közelíthető, amelyet egy exponenciális levágás követ

$$p(T) \sim T^{-\alpha} e^{-(T/T_0)^\delta}, \quad (6.2)$$

azonban R és s növekedésével a T_0 levágási paraméter nagyobb értékek felé tolódik, míg az α hatványfüggvény exponens fokozatosan csökken $\alpha = 1.4 \pm 0.06$ -ról $\alpha = 0.8 \pm 0.04$ -ra a vizsgált paramétertartományon. A δ levágási-exponens értéke 1.5 és 2.0 között változott.

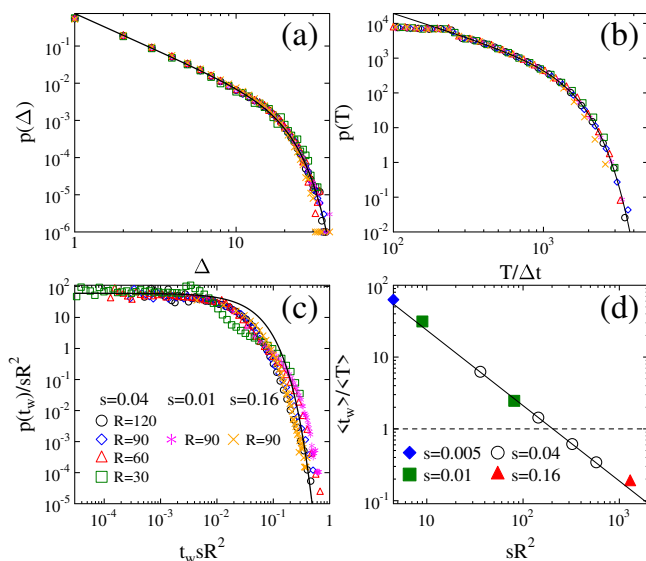
6.2. Lokális lavinák időbeli szuperpozíciója

Annak érdekében, hogy megértsük a pulzusstatistikák összetett fejlődésének eredetét az R rendszerméret és az s deformációs ráta változtatásakor, fontos hangsúlyozni, hogy a mikrorepedések eseményeinek pulzusokká való rendezése szigorúan a mikrorepedések időbeli sorrendjén alapul. Ez azt az effektust reprezentálja, hogy a valós kísérletekben az akusztikus érzékelők a keletkező és terjedő repedések által keltett jelet kiterjedt térbeli régiókban felintegrálják, s ez akár a teljes próbatestet is érintheti [99, 101, 102]. Ezért hipotézisünk az, hogy a zsugorodó rétegben megfigyelt aktivitás pulzusok a minta egészén véletlenszerűen elhelyezkedő, nagyszámú, korrelálatlan, lokális mikrorepedések lavináinak szuperpozíciójaként jönnek létre. Annak bizonyítására, hogy valóban ez a mechanizmus felelős a megfigyelt nem univerzális viselkedésért, a lokális

lavinákat a mikrorepedések időben és térben korrelált sorozataként azonosítottam, amelyeket szigorúan meg kell különböztetni a globális aktivitás pulzusaitól. A lokális lavinák mindig egyetlen rúdelem töréséből indulnak ki, és térben összefüggő mikrorepedések halmazaként fejlődnek, amelyek egymást követik a t_c korrelációs időn és l_c hosszon belül, a $t_{i+1}^b - t_i^b < t_c$ és $|\bar{r}_{i+1}^b - \bar{r}_i^b| < l_c$ feltételeknek megfelelően. A számításokban l_c a diszkretizáció l_0 átlagos poligonméretének kétszerese, míg t_c a terhelés újraelosztásának a réteg anyagi tulajdonságai által meghatározott jellemző időskálája. A számítógépes szimulációk megmutatták, hogy az algoritmus által azonosított lokális lavinák a repedési hálózat csomópontjai között húzódó növekvő repedések intermittens lépései (ezt illusztrálja a 6.1(c) ábra).

A 6.3(a,b) ábrán megfigyelhető, hogy a lokális lavinák Δ mérete és T időtartama egyaránt hatványfüggvény eloszlású, exponenciális levágással. Fontos hangsúlyozni, hogy a lokális lavinák nagyfokú robusztusságot mutatnak, azaz mind a $p(\Delta)$, mind a $p(T)$ eloszlások esetében a különböző R rendszerméreték és s zsugorodási ráták esetén kapott eredmények egymásra esnek. Bár a Δ és a T által felölelt tartományok kisebbek, azaz a Δ_0 levágási lavinaméret és a T_0 időtartam kisebb, mint a pulzusok megfelelői, a görbék nagyon jól illeszthetők a 6.2. egyenlet függvényalakjával a $\tau_l = 1.95 \pm 0.06$ és $\alpha_l = 1.4 \pm 0.04$ hatványfüggvény-exponensekkel. A lokális lavinákat a zsugorodó réteg anyagi tulajdonságai határozzák meg, mint például az adhéziós rugók és a rúdelemek merevségének D_s/E aránya, amely a rendszerben lévő feszültségheterogenitások jellegzetes hosszskáláját szabályozza.

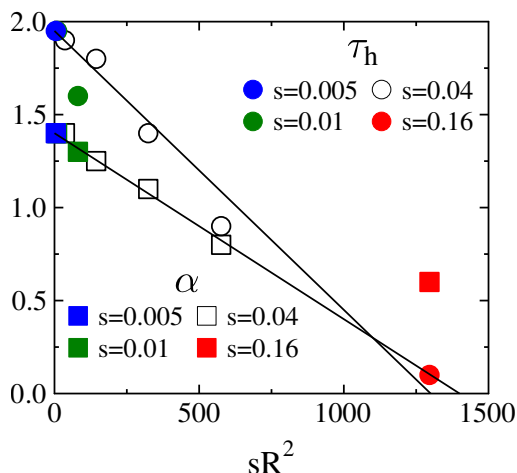
Az anyagban lévő szerkezeti rendezetlenség miatt a homogén deformációs tér a réteg zsugorodásával véletlenszerűen, időbeli korreláció nélkül felbukkanó helyi lavinákat eredményez. Ebből következik, hogy a lokális lavinák időbeli előfordulása Poisson-folyamattal közelíthető, ahol az R rendszerméret és az s zsugorodási ráta hatása az, hogy nagyobb rendszerben nagyobb számú nukleációs pont áll rendelkezésre, ahol a repedések megjelenhetnek, illetve nagyobb s deformációs rátánál gyorsabban elér-



6.3. ábra. A lokális lavinák (a) $p(\Delta)$ méretének, (b) $p(T)$ időtartamának és (c) $p(t_w)$ várakozási idejének valószínűségi eloszlása több R rendszerméret és s zsugorodási ráta esetén. A (c) ábrán látszódik, hogy az sR^2 szorzófaktorral átskálázott $p(t_w)$ várakozási idő eloszlások egymásra esnek. A folytonos vonal egy közelítő exponenciális függvényt jelöl. (d) A $\langle t_w \rangle$ átlagos várakozási idő és a lokális lavinák $\langle T \rangle$ átlagos időtartamának hányadosa sR^2 függvényében. A különböző R és s értékek mellett kapott eredmények ugyanarra az 1 exponensű csökkenő hatványfüggvényre esnek, amelyet a folytonos vonal jelez.

hetők a következő lokális lavina kiváltásához szükséges $s \cdot \delta t$ deformációs növekmények. Ennek következtében egy homogén rendszerben a lavinák átlagos $\langle r \rangle$ nukleációs sebességének arányosnak kell lennie a rendszer R^2 térfogatával (itt a területével), és az s zsugorodási rátával, azaz $\langle r \rangle \sim sR^2$ teljesül. Ennek megerősítéseként a 6.3(c) ábra azt mutatja, hogy a lokális lavinák $p(t_w)$ várakozási idő-eloszlásait sR^2 -vel átskálázva a különböző R rendszerméreték és s zsugorodási ráták mellett kapott eloszlások egymásra ejthetők. A skálafüggvény jól közelíthető exponenciális függvényvel, ahogy az Poisson-folyamatok esetén várható.

Az eredmények arra utalnak, hogy a globális aktivitási pulzusok nem



6.4. ábra. A pulzusok $p(\Delta)$ és $p(T)$ valószínűségi eloszlásainak τ_h és α exponensei az sR^2 függvényében. Az sR^2 nukleációs ráta függvényeként mindkét exponens lineáris alakkal közelíthető. Fontos megjegyezni, hogy a pulzusok száma az sR^2 nukleációs ráta növekedésével csökken. Ennek következtében az exponensek hibasávjai 0.04-ről 0.15-re nőnek az sR^2 legkisebb és legnagyobb értékei között.

univerzális statisztikáját az időben átfedő lokális lavinák szuperpozíciója okozza, amelyek véletlenszerűen, korreláció nélkül bukkannak fel a rendszerben. Az átfedés erősségét a $\langle t_W \rangle$ átlagos várakozási idő és a lokális lavinák $\langle T \rangle$ átlagos időtartamának arányával lehet számszerűsíteni. A 6.3(d) ábra mutatja, hogy a $\langle t_W \rangle / \langle T \rangle$ arányt a sR^2 szorzat függvényében ábrázolva a szimuláció eredményei egy csökkenő hatványfüggvényre esnek, melynek exponense 1. Ez azt jelenti, hogy $\langle t_W \rangle \sim 1/sR^2 \sim 1/\langle r \rangle$, ami megerősíti a lokális lavinák időbeli előfordulásának homogén Poisson-statisztikáját. Az ábrából az is kikövetkeztethető, hogy kellően kis R rendszerméretű és s deformációs ráták esetén az átlagos várakozási idő jelentősen nagyobb lehet, mint a lavina időtartama ($\langle t_W \rangle / \langle T \rangle \gg 1$), ami azt jelenti, hogy a lokális lavinák jól elkülönülő események sorozatát alkotják, időbeni átfedésnek alig van lehetősége. A $\langle t_W \rangle / \langle T \rangle \ll 1$ érték azonban nagy R és s esetén a lokális események erős időbeli átfedésére utal. A

sR^2 szorzat nagyon nagy értékei esetén ez az átfedés annyira domináns lehet, hogy gyakorlatilag az összes lokális lavina egyetlen vagy csak néhány pulzusba kerülhet. Numerikus eredményeink alapján feltételezzük, hogy a pulzuszmenyiségek eloszlásának τ_h és α exponensei lineárisan függenek a lokális lavinák $\langle r \rangle$ nukleációs rátájától:

$$\tau_h = \tau_l - a \langle r \rangle, \quad (6.3)$$

$$\alpha = \alpha_l - b \langle r \rangle, \quad (6.4)$$

ahol a és b konstansok, amelyeket illesztéssel kaphatunk meg. Fontos, hogy a 6.3.-6.4. egyenletek azt a tényt rögzítik, hogy az $\langle r \rangle \rightarrow 0$ határesetben a τ_h és α exponenseknek a lokális lavinák megfelelő τ_l és α_l exponenseihez kell konvergálniuk. Az 6.4. ábra azt mutatja, hogy a 6.3.-6.4. lineáris összefüggések jó minőségű leírást adnak az R rendszerméret és az s zsugorodási ráta együttes hatásáról az integrált jel exponensére $a = 0.0015 \pm 0.0003$ és $b = 0.0010 \pm 0.0004$ mellett. Az a és b paraméterek aránya $a/b \approx 1.5$.

6.3. Konklúziók

A zsugorodó vékonyréteg repedési folyamatát kísérő akusztikus zaj tulajdonságainak megértésére számítógépes szimulációkkal vizsgáltam a fokozatos repedezés időbeli lefolyását.

Szimulációimmal megmutattam, hogy a réteg repedezése nem sima, hanem egy szakaszosan lejátszódó intermittens folyamat. A modellben a mikrorepedések időbeli korrelációjával definiáltam a globális repedési aktivitás pulzusait, amelyek megfeleltethetők a laboratóriumi mérések akusztikus eseményeinek. Megmutattam, hogy az aktivitás pulzusok méret- és időtartam-eloszlása hatványfüggvény viselkedést mutat, de az exponenseik nem univerzálisak: növelve a rendszer méretét vagy a zsugorodás sebességét a nagyméretű pulzusokat jellemző exponensek csökkentek, míg a kis pulzusok tartományát jellemző exponens állandó maradt.

A mikrorepedések térbeli és időbeli korrelációjának figyelembe vételével mikrorepedések lokális lavináit azonosítottam. A szimulációval nyert adatok feldolgozásával megmutattam, hogy a lokális lavinák méretének és időtartamának valószínűség eloszlása hatványfüggvény viselkedést mutat univerzális exponensekkel, amelyek nem függenek sem a rendszer méretétől, sem a zsugorodási rátától. Arra a következtetésre jutottam, hogy a homogén, izotróp réteg zsugorodása közben a lokális lavinák kipattanását az anyag belső rendezetlensége határozza meg, így időbeli előfordulásuk Poisson-folyamatként írható le, ahol a rendszerméret és a zsugorodás sebessége a lavinák nukleációs rátáját kontrollálja.

Elemeztem a lokális lavinák közötti várakozási idő statisztikáját, valamint a várakozási idő és a lavinák időtartamának viszonyát. Megmutattam, hogy a globális aktivitás pulzusok változó statisztikáját és csökkenő exponenseit az időben átfedő lokális lavinák szuperpozíciója okozza. Numerikus eredményeim alapján lineáris kapcsolatot állapítottam meg a pulzusok hatványfüggvény exponense és a lokális lavinák nukleációs rátája között. Kis rendszerméret és lassú zsugorodás határesetében a pulzusok jellemző exponensei megegyeznek a lokális lavinák exponenseivel, összhangban az eltűnő átlapolódással.

Beton száradása közben azt tapasztalták, hogy a folyamat előrehaladtával a repedési zaj jellemző exponensei növekednek [70, 71]. Számításaim alapján ennek magyarázata, hogy a száradás folyamatosan lassul, ami csökkenti a zsugorodási rátát. Alacsonyabb zsugorodási sebesség mellett a lokális repedési lavinák átfedése csökken, ezért a hatványfüggvény exponensek növekednek.

7. fejezet

Összefoglalás

A természetben gyakran találkozhatunk hordozófelülethez tapadt vékonyrétegek zsugorodás okozta repedezésével, ami látványos, sokszöges repedési minták kialakulásához vezet. A példák széles méretskálán említhetők a kiszáradt tómedrek poligonális repedési mintázataitól [1–4], a Földön és a Marson található permafroszt régiókban megfigyelhető négy- és hatszöges mintákon át [5], a kihűlő vulkáni lávában megjelenő hatszöges keresztmetszetű lávaoszlopokig [6–10]. Az ilyen repedési mintázatok legegyszerűbb megvalósítása laboratóriumban sűrű szuszpenziók, például kávé [12], agyag [2–4] vagy kalcium-karbonát [11] vékonyrétegeinek szárításával érhető el egy merev hordozón, ahol a fokozatos megszilárdulást zsugorodás kíséri, ami mechanikai feszültségekhez és repedések létrejöttéhez vezet. A kialakuló repedési minták nagyon fontos jellemzője a celluláris szerkezet [2–4, 11–13], amely a repedések orientációjában nagyfokú izotrópiát mutat.

A vékonyrétegek irányított repedezése, beleértve a repedések előre meghatározott útvonalak mentén történő vezetését [15–17] és a repedési mintázat szerkezetének kontrollját [11, 18], jelentős ipari potenciállal rendelkezik, különösen a mikroelektronikai gyártástechnológia számára. A közelmúltban kidolgoztak egy ígéretes módszert repedési mintázatok irányított létrehozására, amely sűrű szuszpenziók szárítás előtti mechanikai gerjesztésére

épül. Kalcium-karbonát és magnézium-hidroxid-karbonát paszták esetén kísérletileg megmutatták, hogy a paszta mechanikai perturbációját követően a száradás során kialakuló repedési mintázat a gerjesztés irányának megfelelően alakul ki [11, 19, 20].

A legváltozatosabb rendezetlen rendszerekre jellemző, hogy állandó, vagy lassan változó külső hajtás mellett létrejövő folyamataik intermitens módon játszódnak le, amit zaj kibocsátása kísér. Széles méretskálán találkozhatunk példákkal egy papírdarab összegyűrésétől [48, 49], a szilárdtestekben végbemenő fázisátalakulásokon és törési jelenségeken át [50–54], egészen a földrengésekig [55, 56]. Kísérleti és elméleti vizsgálatok a repedési zaj skálafüggetlen viselkedését mutatták ki, amely nagyfokú robusztussággal rendelkezik a hosszúságskálák széles tartományában [57]. Ipari alkalmazások során a repedések megjelenése termékekben nem kívánatos minőségromlást eredményezhet. A közelmúltban akusztikus emissziós mérésekkel [70, 71] kimutatták, hogy a száradó betonban a zsugorodás miatt keletkező repedési zaj skálafüggetlen statisztikával rendelkezik, amelynek hatványfüggvény exponense a zsugorodás előrehaladtával változik. Az akkumulátorok elektródáinak anyagában fellépő hasonló repedési mechanizmusról megállapították, hogy az ismételt töltési-kisütési ciklusok során fellépő kapacitáscsökkenésért felelős [30]. Az elektródák repedésének akusztikus monitorozása ígéretes roncsolásmentes technikának bizonyult az elektromechanikai degradációs folyamat követésére [31, 32].

Doktori munkám során hordozóra felvitt vékonyrétegek zsugorodás által indukált repedezési folyamatait vizsgáltam elméleti eszközökkel. Vizsgálataim során arra voltam kíváncsi, hogy a kezdeti anizotrópiával rendelkező vékonyrétegekben a lamelláris repedési mintázat időfejlődése milyen fázisokon keresztül történik az anizotrópia különböző erőssége mellett, illetve ennek milyen hatása van a fragmensek alakjára és méretének statisztikájára. Célom volt a vékonyrétegben keletkező repedések terjedési mechanizmusának megértése és ezen keresztül a repedési sokaság zajos időfejlődésének mennyiségi jellemzése is. Számítógépes szimulációimmal

széles skálán változtatva a rendszerméretet és a zsugorodás sebességét, szerettem volna megérteni a repedési zaj nem univerzális viselkedésének hátterét. Vizsgálataimhoz diszkrét elem modellezést használtam, amely képes nagyszámú, szimultán terjedő repedés hatékony kezelésére. A számítógépes modellezés fontos kihívása a vizsgált réteg anizotróp mechanikai és törési jellemzőinek reprezentációja. Célom volt annak részletes elemzése, hogy a modellünkben a diszkretizációhoz használt véletlen rács geometriai transzformációjával hogyan kontrollálható a mechanikai anizotrópia.

A kontrollált repedési mintázatok vizsgálatához első lépésként az anizotrópiát a kohézív kontaktusok erősségének irányfüggésével vettem figyelembe [P1]. Számítógépes szimulációkat végeztem széles tartományon változtatva az így bevezetett anizotrópia erősségét. A szimulációim során kapott mikrorepedések időbeli és térbeli sorozatának feldolgozására egy algoritmust dolgoztam ki, amellyel azonosítottam a rendszerben kialakuló makrorepedéseket. A repedési mintázat szerkezetének elemzésével meghatároztam a rendszer időfejlődésének fázisait, és feltérképeztem a rendszer fázisdiagramját az anizotrópia - károsodás síkon. Vizsgálataink megmutatták, hogy létezik egy küszöb anizotrópia, amely alatt az anyag rendezetlensége dominálja a repedések keletkezését és növekedését, ami egy sejtes repedésmintázatot eredményez, hasonlóan a teljesen izotróp esethez. Ha az anizotrópia megfelelően magas, a repedési mintázat fejlődése három jól elkülönülő fázison keresztül történik: a folyamat kezdetén erősen rendezett, párhuzamos repedések dominálnak, amelyek felszeletelik a réteget. A keresztirányú repedésképződés egy kritikus károsodási értéknél kezdődik meg, ami a szeletelt területek szegmentálódását eredményezi. A repedések összeolvadása egy teljesen összefüggő repedéshálózat kialakulásához vezet, amely mentén a réteg nagyszámú darabra esik szét. Ez egy második kritikus károsodási értéknél következik be, amely után a további zsugorodás bináris fragmentációhoz vezet, tovább darabolva a fragmenseket. Megállapítottam, hogy a kezdeti anizotrópia növelésével, az egyes fázisok közötti átmenethez tartozó kritikus károsodások magasabb értékek felé tolódnak.

A repedési hálózat szerkezetének elemzésével azt találtam, hogy a réteg kezdeti anizotrópiája jelentősen befolyásolja a keletkező fragmensek geometria jellemzőit. Az anizotrópia erősségével a fragmensek egyre elnyúltabbá válnak, így alakjuk egy határoló téglalappal jól közelíthető. Az alaki anizotrópia az összefüggő repedéshálózat kialakulásának kritikus pontjánál a legnagyobb, majd az ezt követő bináris fragmentáció fokozatosan csökkenti az elnyúltság mértékét. Az elemzések arra is rávilágítottak, hogy a repedezési folyamat fejlődésével a rendszer egy stabil fragmensalakhoz tart, amelyet a határoló téglalap egy aszimptotikus oldaláránya jellemez. Megmutattam, hogy az aszimptotikus oldalárány az anizotrópia növelésével csökken és egy, a réteg anyagának Poisson-számától függő konstanshoz tart. Arra az eredményre jutottam, hogy ugyan az anizotrópia erősen befolyásolja a fragmensek alakját, azok tömegének statisztikája nagyfokú robusztusságot mutat: vizsgálva a fragmensek tömegének eloszlását az anizotrópia és károsodás széles tartományán, univerzális viselkedést tapasztaltam. A különböző károsodásoknál kapott tömegeloszlások a fragmensek átlagos tömegével egymásra skálázhatók, az így kapott skálafüggvény pedig jól leírható a lognormális eloszlással a kezdeti anizotrópia teljes tartományán. A lognormális tömegeloszlás összhangban van a fragmensek kaszkádszerűen lejátszódó bináris darabolódásával. Elméleti eredményeim nagyon jó kvalitatív egyezést mutatnak a kezdeti mechanikai gerjesztésnek kitett sűrű paszták szárítása során megfigyelt repedési folyamat jellemzőivel. A modell nemcsak a végállapotú repedési mintázat szerkezetét, az anizotróp fragmensalakot és a fragmenstömeg statisztikáját reprodukálja, de a repedési sokaság időfejlődésének sajátosságait is. Szimulációim jelentősen kiterjesztették az anizotróp repedezés kísérletileg eddig vizsgált paramétertartományát. Japán együttműködő partnereink dolgoznak azon, hogy a paszta szilárd szemcséinek méreteloszlását kontrollálva a rendezetlenség különböző értékeinél végezzenek méréseket, követve elméleti jóslatainkat.

Ezek után az anizotróp tulajdonságokkal rendelkező vékonyrétegek mechanikai viselkedésének és repedési folyamatainak számítógépes modellezé-

sére bevezettünk egy másik módszert, ahol az anizotrópiát a réteg diszkretizációján keresztül, a rács egy irány menti nyújtásával vagy zsugorításával vesszük figyelembe [P2]. A rendszer mechanikai válaszána jellemzéséhez a rendszer egytengelyű nyújtását vizsgáltam a geometriai transzformáció irányában és arra merőlegesen. Meghatároztam a réteg Young-modulusának és Poisson-számának anizotrópia- és rendezetlenség-függését. Analitikus számításaim kimutatták, hogy a rendezetlenség nulla határértékében az effektív Young-modulus megegyezik a rúdelemek Young-modulusával. Nagyobb rendezetlenségi értékeknél az effektív Young-modulus az anizotrópia erősségének hatványfüggvényeként növekszik. Megállapítottam, hogy a geometriai transzformációra merőleges irányú terhelés esetén az effektív Young-modulus az anizotrópia paraméter csökkenő hatványfüggvénye, ahol az exponens megegyezik a másik irányban kapott eredményekkel. A Poisson-szám a geometriai transzformációra merőleges irányban csökkenő, azzal párhuzamosan pedig növekvő hatványfüggvénnyel írható le az anizotrópia függvényében. Ebben az esetben is a két irány exponensei megegyeznek egymással. A repedési mintázat és a keletkező fragmensek jellemzőit összevettem a korábban kidolgozott modellünkkel, ahol az anizotrópia a kohézív kontaktusok teherbíró képességébe van beépítve. Megmutattam, hogy az anizotrópia implementálásának mindkét megközelítése esetén a makrorepedések szögeloszlása erős csúccsal rendelkezik a károsodás kezdeti értékeinél az erős irány mentén, ám a másodlagos repedések csúcsát nagy szögek esetében jobban megragadta az új modell. Az eredmény alapján azt a következtetést vontam le, hogy törésmechanikai vizsgálatokra előnyösebb a poligonális rács geometriai transzformációjára épülő eljárás. Részletesen elemeztem az új modellben a zsugorodás által keltett repedési mintázat struktúráját, valamint a fragmensek jellemzőit, amelyeket összevettem a korábbi modellben kapott eredményekkel. Megmutattam, hogy a poligonális rács geometriai transzformációjával bevezetett anizotrópia a korábbi modellhez hasonlóan elnyúlt fragmensalakokat eredményez, ahol az oldalarányt a nyújtási faktoriallhatjuk. A fragmenstömege

vonatkozó vizsgálataim arra is rámutattak, hogy hasonlóan a korábban tapasztaltakhoz, a tömegeloszlás robusztusan viselkedik és lognormális eloszlással jellemezhető. Analitikus és numerikus számolásaim alapján megmutattam, hogy az izotróp, rendezetlen rács geometriai transzformációja egy jól kontrollálható, hatékony módszer anizotróp anyagi tulajdonságok beépítésére diszkrét modellekbe, amely túlmutat a zsugorodásos repedezés vizsgálatán.

A zsugorodó vékonyréteg törési folyamatát kísérő akusztikus zaj jellemzőinek megértésére számítógépes szimulációkkal vizsgáltam a fokozatos repedezés időbeli lefolyását [P3]. Vizsgálataimmal megmutattam, hogy a repedezés nem sima, hanem egy intermittens folyamat. A modellben a mikrorepedések időbeli korrelációja alapján definiáltam a globális repedési aktivitás úgynevezett pulzusait, amelyek megfeleltethetők a laboratóriumi mérések akusztikus eseményeinek. Megmutattam, hogy az aktivitás pulzusok méret- és időtartam-eloszlása hatványfüggvény viselkedést mutat, de az exponenseik nem univerzálisak: növelve a rendszer méretét vagy a zsugorodás sebességét, a nagyméretű pulzusokat jellemző exponensek csökkennek, míg a kis pulzusok tartományát jellemző exponens állandó marad. A mikrorepedések térbeli korrelációjának figyelembevételével mikrorepedések lokális lavináit azonosítottam, amelyek a makrorepedések intermittens növekedési lépései. A szimulációval nyert adatok feldolgozásával megmutattam, hogy a lokális lavinák méretének és időtartamának valószínűség eloszlása hatványfüggvény viselkedést mutat univerzális exponensekkel, amelyek nem függenek sem a rendszer méretétől, sem a zsugorodási rátától. Arra a következtetésre jutottam, hogy a homogén, izotróp réteg zsugorodása közben a lokális lavinák kipattanását az anyag belső rendezetlensége határozza meg, így időbeli előfordulásuk Poisson-folyamatként írható le, ahol a rendszerméret és a zsugorodás sebessége a lavinák nukleációs rátáját kontrollálja. Elemezve a lokális lavinák közötti várakozási idő statisztikáját, valamint a várakozási idő és a lavinák időtartamának viszonyát megmutattam, hogy a globális aktivitás pulzusok változó statisztiká-

ját és csökkenő exponenseit az időben átfedő lokális lavinák szuperpozíciója okozza. Numerikus eredményeim alapján lineáris kapcsolatot állapítottam meg a pulzusok hatványfüggvény exponense és a lokális lavinák nukleációs rátája között. Kis rendszerméret és lassú zsugorodás határesetében a pulzusok jellemző exponensei megegyeznek a lokális lavinák exponenseivel, összhangban az eltűnő átlapolódással. Elméleti eredményeim alapján sikerült értelmezni a betonon végzett akusztikus emissziós mérések nem univerzális exponenseit: a beton száradásának előrehaladásával a zsugorodás lassul, ami növeli a lokális lavinák időbeli szeparációját, ezért növeli a skálafüggetlen eloszlások exponenseit. A repedési zaj további elemzésének nagyon fontos lépése az egyedi lokális lavinák és aktivitás pulzusok időbeli lefutásának, az úgynevezett lavina profiloknak a megértése. A kutatómunkát ebben az irányban folytatjuk jelenleg is, hogy elméleti leírását tudjuk adni az akkumulátorokon mért akusztikus zaj jellemzőinek is.

8. fejezet

Summary

Shrinkage induced cracking of thin layers attached to a substrate material is copious in nature giving rise to the formation of spectacular crack patterns. Examples range in size from polygonal crack patterns in dried lake beds [1–4], to permafrost regions on Earth and Mars [5], to hexagonal lava columns in cooling volcanic lavas [6–10]. The simplest realisation of such crack patterns can be achieved in the laboratory by drying thin layers of dense suspensions such as coffee [12], clay [2–4] or calcium carbonate [11] on a rigid substrate, where gradual solidification is accompanied by shrinkage, leading to mechanical stresses and cracking. A very important characteristic of the formed crack patterns is the cellular structure [2–4, 11–13], which shows a high degree of isotropy in the orientation of the cracks.

Controlled cracking of thin layers, including the guidance of cracks along predefined paths [15–17] and the control of the crack pattern structure [11, 18], has significant industrial potential, especially for microelectronics manufacturing technology. Recently, a promising method for the controlled generation of crack patterns based on the mechanical excitation of dense suspensions before drying has been developed. For calcium carbonate and magnesium hydroxide carbonate pastes, it has been experimentally shown that after mechanical perturbation of the paste, the crack pattern

formed during drying is in accordance with the direction of the excitation [11, 19, 20].

The disordered systems are characterised by intermittent processes under constant or slowly changing external forcing, accompanied by the emission of noise. Examples range from the crumpling of a piece of paper [48, 49], through phase transitions and fracture phenomena in solids [50–54], to earthquakes [55, 56]. Experimental and theoretical studies have shown scale-free behaviour of cracking noise with a high degree of robustness over a wide range of length scales [57]. In industrial applications, the appearance of cracks in devices can lead to undesirable degradation of quality. Recently, acoustic emission measurements [70, 71] have shown that cracking noise due to shrinkage in drying concrete has scale-free statistics, with the exponent of the power function varying with shrinkage. A similar cracking mechanism in the material of battery electrodes was found to be responsible for the reduction in capacity during repeated charge-discharge cycles [30]. Acoustic monitoring of electrode cracking has been shown to be a promising non-destructive technique for monitoring the electromechanical degradation process [31, 32].

During my PhD studies, I investigated the shrinkage induced cracking processes of thin layers on substrates using theoretical approach. I investigated the time evolution of the lamellar cracking pattern in thin films with initial anisotropy, through which phases the anisotropy occurs at different strengths, and what effect this has on the shape and size statistics of the fragments. My aim was also to understand the propagation mechanism of cracks in the thin film and, through this, to quantify the intermittent time evolution of the cracking process. By varying the system size and the shrinkage rate over a wide range of parameters in my computer simulations, I wanted to understand the background of the non-universal behaviour of cracking noise. For my investigations, I used discrete element modelling, which is capable of efficiently handling a large number of simultaneously propagating cracks. An important challenge of computer modeling is the

representation of the anisotropic mechanical and fracture properties of the investigated layer. My aim was to analyse in detail how the geometric transformation of the random grid used for discretisation in our model can control the mechanical anisotropy.

To investigate controlled crack patterns, I first considered anisotropy as a function of the direction of the strength of cohesive contacts [P1]. Computer simulations were performed varying the strength of the anisotropy over a wide range. I developed an algorithm to process the time and space series of microcracks obtained from my simulations to identify the macrocracks that form in the system. By analyzing the crack pattern structure, I determined the phases of the system's time evolution and constructed a phase diagram of the system in the anisotropy-damage plane. Our studies have shown that there exists a threshold anisotropy below which material disorder dominates crack initiation and growth, resulting in a cellular crack pattern similar to the fully isotropic case. When the anisotropy is sufficiently high, the crack pattern development occurs through three distinct phases: at the beginning of the process, highly ordered parallel cracks dominate, which slice the layer. Transverse crack formation starts at a critical damage value, resulting in segmentation of the sliced areas. The merging of the cracks leads to the formation of a fully connected crack network along which the layer breaks up into a large number of fragments. This occurs at a second critical damage value, after which further shrinkage leads to binary fragmentation, further fragmenting the fragments. It is found that as the initial anisotropy increases, the critical damage values associated with the transition between each phase are shifted towards higher values. By analyzing the structure of the fracture network, I found that the initial anisotropy of the layer significantly influences the geometric characteristics of the resulting fragments. As the anisotropy increases, the fragments become more elongated, so that their shape can be well approximated by a bounding box. The anisotropy of shape is greatest at the critical point of the formation of a connected

crack network, and subsequent binary fragmentation gradually reduces the degree of elongation. The analyses have also shown that as the cracking process evolves, the system converges to a stable fragment shape characterized by an asymptotic aspect ratio of the bounding box. I have shown that the asymptotic aspect ratio decreases with increasing anisotropy and converges to a constant that depends on the Poisson's ratio of the layer material. I found the surprising result that, although anisotropy strongly influences the shape of fragments, their mass statistics show a high degree of robustness: by examining the distribution of fragment mass over a wide range of anisotropy and damage, I found universal behaviour. The mass distributions obtained at different damage levels can be scaled by the average mass of the fragments, and the resulting scale function can be well described by the lognormal distribution over the full range of initial anisotropy. The lognormal mass distribution is consistent with the binary splitting of the fragments which gives rise to a cascade process of fragment creation. My theoretical results show a very good qualitative agreement with the cracking process observed during the drying of dense pastes subjected to initial mechanical excitation. The model reproduces not only the structure of the end-state cracking pattern, the anisotropic fragment shape and the statistics of the fragment mass, but also the peculiarities of the time evolution of the crack manifold. My simulations have significantly extended the range of parameters of anisotropic cracking that have been experimentally investigated so far. Our Japanese collaborators are working on measurements controlling the size distribution of the paste solid grains at different values of disorder, following our theoretical predictions.

Subsequently, another method for computer modelling of the mechanical behaviour and cracking processes of thin layers with anisotropic properties was introduced, where anisotropy is considered through the discretisation of the layer by stretching or shrinking the lattice in one direction [P2]. To characterise the mechanical response of the system, uniaxial stretching of the system in the direction of and perpendicular to the geometric

transformation was examined. I determined the anisotropy and disorder dependence of the Young's modulus and Poisson's ratio of the layer. My analytical calculations have shown that in the zero disorder limit, the effective Young's modulus is equal to the Young's modulus of the beam elements. At higher disorder values, the effective Young's modulus increases as a power law of the anisotropy strength. It is found that, for loading in the direction perpendicular to the geometric transformation, the effective Young's modulus is a decreasing power law of the anisotropy parameter, where the exponent is the same as the results obtained in the other direction. The Poisson's ratio can be described by a decreasing power law in the direction perpendicular to the geometric transformation and an increasing power function in the anisotropy direction. Here again, the exponents of the two directions are equal. The crack pattern and the resulting fragment characteristics were compared with a previously developed model where anisotropy is introduced in the breaking threshold of cohesive contacts. I showed that for both approaches to implementing anisotropy, the angular distribution of macrocracks has a strong peak at the initial values of damage along the strong direction, but the peak of secondary cracks is better captured by the new model for large angles. Based on the results, it is concluded that the method based on the geometric transformation of the polygonal lattice is preferable for fracture mechanics studies. I have analysed in detail the structure of the shrinkage-induced crack pattern in the new model and the characteristics of the fragments, which I have compared with the results obtained in the previous model. I have shown that the anisotropy introduced by the geometric transformation of the polygonal lattice results in elongated fragment shapes similar to the previous model, where the aspect ratio can be controlled by the stretching factor. My studies on fragment mass also showed that, similar to what was observed previously, the mass distribution behaves robustly and is characterized by a lognormal distribution. Based on analytical and numerical calculations, I have shown that the geometric transformation

of an isotropic disordered lattice is a well-controlled, efficient method for incorporating anisotropic material properties into discrete models, going beyond the study of shrinkage cracking.

To understand the acoustic noise characteristics accompanying the fracture process of a shrinking thin film, I have used computer simulations to investigate the time evolution of gradual cracking [P3]. My investigations have shown that cracking is not a smooth but an intermittent process. Based on the temporal correlation of microcracks in the model, I defined so-called pulses of global cracking activity, which correspond to acoustic events in laboratory measurements. I have shown that the size and duration distributions of the activity pulses exhibit power law behaviour, but that their exponents are not universal: as the system size or shrinkage rate increases, the exponents characterizing the large pulses decrease, while the exponent characterizing the range of small pulses remains constant. By considering the spatial correlation of microcracks, I identified local avalanches of microcracks, which are intermittent growth steps of macrocracks. By processing simulated data, I show that the probability distribution of the size and duration of local avalanches exhibits power law behavior with universal exponents that do not depend on either the system size or the shrinkage rate. I concluded that the bursting of local avalanches during the shrinkage of a homogeneous isotropic layer is determined by the internal disorder of the material, so that their temporal occurrence can be described as a Poisson process, where the size of the system and the shrinkage rate control the nucleation rate of the avalanches. By analyzing the statistics of the waiting time between local avalanches and the relationship between waiting time and avalanche duration, I show that the changing statistics and decreasing exponents of global activity pulses are caused by the superposition of temporally overlapping local avalanches. Based on my numerical results, I found a linear relationship between the power law exponent of pulses and the nucleation rate of local avalanches. In the limiting case of small system size and slow shrinkage, the characte-

istic exponents of pulses are equal to the exponents of local avalanches, consistent with vanishing overlap. Based on my theoretical results, I have been able to understand the non-universal exponents of acoustic emission measurements on concrete: as concrete dries, shrinkage slows down, which increases the temporal separation of local avalanches, and therefore increases the exponents of scale-free distributions. A very important step in the further analysis of cracking noise is to understand the temporal course of individual local avalanches and activity pulses, the so-called avalanche profiles. Research in this direction is currently ongoing in order to provide a theoretical description of the acoustic noise characteristics measured on batteries.

9. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Kun Ferencnek a sokéves támogatásáért, a konzultációkért, valamint a közben kialakult jó személyes kapcsolatért. A közös munkánk során rengeteget fejlődtem szakmailag, amiért nagyon hálás vagyok.

Köszönettel tartozom a Szüleimnek a folyamatos támogatásukért, amivel elősegítették azt, hogy azzal foglalkozhassak, amit igazán szeretek.

Publikációs jegyzék

Publikációk a disszertáció tárgyköréből

Referált folyóirat cikkek

- P1** R. Szatmári, Z. Halász, A. Nakahara, S. Kitsunezaki and F. Kun, *Evolution of anisotropic crack patterns in shrinking material layers*, Soft Matter **17**, 10005-10015 (2021). **IF: 4.046⁽²⁰²¹⁾**, **SJR: Q1⁽²⁰²¹⁾**
- P2** R. Szatmári, Z. Halász, A. Nakahara, S. Kitsunezaki and F. Kun, *Discrete element model for the anisotropic cracking of shrinking material layers*, International Journal of Solids and Structures **299**, **IF: 3.4⁽²⁰²³⁾**, **SJR: Q1⁽²⁰²³⁾**
- P3** R. Szatmári, A. Nakahara, S. Kitsunezaki and F. Kun, *Scale-free bursting activity in shrinkage induced cracking*, Scientific Reports **14**, 7101 (2024). **IF: 3.8⁽²⁰²³⁾**, **SJR: D1⁽²⁰²³⁾**

Egyéb folyóirat cikkek

- F1** F. Kun, R. Szatmári, *Repedési zaj zsugorodó vékonyrétegekben*, Fizikai Szemle **75**, 4 (2025).

Poszterek

- PT1** R. Szatmári, Z. Halász, and F. Kun, *Anisotropic crack patterns induced by shrinkage in thin layers*, 45th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (MECO45), Kolozsvár, Románia, 2020.09.14-16.
- PT2** R. Szatmári and F. Kun, *Controlled crack patterns in thin brittle layers*, 46th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (MECO46), Riga, Lettország, 2021.05.11-13.

Előadások

- E1** R. Szatmári, *Anizotróp repedési mintázatok vizsgálata zsugorodó vékonyrétegekben*, 35. Országos Tudományos Diákköri Konferencia, Fizika, Földtudományok és Matematika Szekció, Szeged, 2021.04.06-09.
- E2** R. Szatmári, *Anisotropic fragmentation of shrinking thin layers on a substrate*, EGU General Assembly 2021, Bécs, Ausztria, 2021.04.19-30.
- E3** R. Szatmári, *Anizotróp repedési mintázatok szerkezetének vizsgálata diszkrét elem módszerrel*, Fizikus Doktoranduszok Országos Konferenciája, Balatonvilágos, 2021.09.16-18.
- E4** R. Szatmári, *Discrete element modelling of anisotropic crack patterns in shrinking thin layers*, VII International Conference on Particle-Based Methods (PARTICLES2021), Hamburg, Németország, 2021.10.04-06.
- E5** R. Szatmári, *Radiális repedési mintázatok szerkezetének vizsgálata*, Új Nemzeti Kiválóság Program intézményi konferencia, Debrecen, 2022.01.31.
- E6** R. Szatmári, *Anizotróp repedezés vékonyrétegekben*, Statisztikus Fizika Nap, MTA Székház, Budapest, 2022.11.25.

- E7** R. Szatmári, *Körszimmetrikus és spirális repedési mintázatok vizsgálata*, Új Nemzeti Kiválóság Program intézményi konferencia, Debrecen, 2023.06.12.
- E8** R. Szatmári, *Crackling noise in a discrete element model of shrinkage induced cracking*, VII International Conference on Computational Modeling of Fracture and Failure of Materials and Structures (CFRAC2023), Prága, Csehország, 2023.06.21-23.
- E9** R. Szatmári, *Rupture cascades in a discrete element model of shrinkage induced cracking*, VIII International Conference on Particle-Based Methods (PARTICLES2023), Milánó, Olaszország, 2023.10.09-11.
- E10** R. Szatmári, *Törési jelenségek skálatörvényei*, XVII. Dr. Szegedi Ervin Megyei Fizikaverseny, DE Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma és Általános Iskolája, Debrecen, 2024.03.23.
- E11** R. Szatmári, *Scale-free bursting activity in shrinkage induced cracking*, Avalanche 2024, Helsinki, Finnország, 2024.06.10-12.
- E12** R. Szatmári, *Repedési zaj zsugorodás által okozott törésben*, Új Nemzeti Kiválóság Program intézményi konferencia, Debrecen, 2024.06.17.
- E13** R. Szatmári, *Discrete element modelling of shrinkage induced cracking*, Japan-Hungary Bilateral Workshop on Quantum computing and Statistical Physics of Breakdown Phenomena, HUN-REN Atomki, Debrecen, 2025.01.13.

Irodalomjegyzék

- [1] Goehring, L., Nakahara, A., Dutta, T., Kitsunozaki, S. & Tarafdar, S. *Desiccation Cracks and their Patterns: Formation and Modelling in Science and Nature* (John Wiley & Sons, 2015).
- [2] Nahlawi, H. & Kodikara, J. Laboratory experiments on desiccation cracking of thin soil layers. *Geotechnical and Geological Engineering* **24**, 1641 – 1664 (2006).
- [3] Nag, S., Sinha, S., Sadhukhan, S., Dutta, T. & Tarafdar, S. Crack patterns in desiccating clay–polymer mixtures with varying composition. *Journal of Physics: Condensed Matter* **22**, 015402 (2010).
- [4] Goehring, L., Conroy, R., Akhter, A., Clegg, W. J. & Routh, A. F. Evolution of mud-crack patterns during repeated drying cycles. *Soft Matter* **6**, 3562–3567 (2010).
- [5] Forte, E., French, H., Raffi, R., Santin, I. & Guglielmin, M. Investigations of polygonal patterned ground in continuous antarctic permafrost by means of ground penetrating radar and electrical resistivity tomography: Some unexpected correlations. *Permafrost and Periglacial Processes* **33** (2022).
- [6] Aydin, A. & Degraff, J. Evolution of polygonal fracture patterns in lava flows. *Science (New York, N.Y.)* **239**, 471–476 (1988).

-
- [7] Lamur, A. *et al.* Disclosing the temperature of columnar jointing in lavas. *Nature Communications* **9** (2018).
- [8] Bourdin, B., Marigo, J.-J., Maurini, C. & Sicsic, P. Morphogenesis and propagation of complex cracks induced by thermal shocks. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 014301 (2014).
- [9] Hofmann, M., Anderssohn, R., Bahr, H.-A., Weiß, H.-J. & Nellesen, J. Why hexagonal basalt columns? *Phys. Rev. Lett.* **115**, 154301 (2015).
- [10] Goehring, L. & Morris, S. W. Cracking mud, freezing dirt, and breaking rocks. *Physics Today* **67**, 39–44 (2014).
- [11] Nakahara, A. & Matsuo, Y. Imprinting memory into paste to control crack formation in drying process. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2006**, P07016 (2006).
- [12] Groisman, A. & Kaplan, E. An experimental study of cracking induced by desiccation. *Europhysics Letters* **25**, 415 (1994).
- [13] Lazarus, V. & Pauchard, L. From craquelures to spiral crack patterns: influence of layer thickness on the crack patterns induced by desiccation. *Soft Matter* **7**, 2552–2559 (2011).
- [14] Ito, S., Nakahara, A. & Yukawa, S. Transition properties in dynamical and statistical features of drying crack patterns (2020). 2009.13691.
- [15] Nam, K., Park, I. & Ko, S. H. Patterning by controlled cracking. *Nature* **485**, 221–224 (2012).
- [16] Mitchell, N., Koning, V., Vitelli, V. & Irvine, W. Fracture in sheets draped on curved surfaces. *Nature materials* **16** (2015).

-
- [17] Guo, L., Ren, Y., Kong, L. Y., Chim, W. K. & Chiam, S. Y. Ordered fragmentation of oxide thin films at submicron scale. *Nature Communications* **7**, 13148 (2016).
- [18] Vandeparre, H., Liu, Q., Mineev, I., Suo, Z. & Lacour, S. Localization of folds and cracks in thin metal films coated on flexible elastomer foams. *Advanced materials (Deerfield Beach, Fla.)* **25** (2013).
- [19] Nakahara, A. & Matsuo, Y. Transition in the pattern of cracks resulting from memory effects in paste. *Phys. Rev. E* **74**, 045102 (2006).
- [20] Nakayama, H., Matsuo, Y., Takeshi, O. & Nakahara, A. Position control of desiccation cracks by memory effect and Faraday waves. *The European Physical Journal E* **36** (2013).
- [21] Kitsunozaki, S., Nakahara, A. & Matsuo, Y. Shaking-induced stress anisotropy in the memory effect of paste. *Europhysics Letters* **114**, 64002 (2016).
- [22] Midilli, A., Dincer, I. & Ay, M. Green energy strategies for sustainable development. *Energy Policy* **34**, 3623–3633 (2006).
- [23] Hoffert, M. I. *et al.* Advanced technology paths to global climate stability: Energy for a greenhouse planet. *Science* **298**, 981–987 (2002).
- [24] Caldeira, K., Jain, A. K. & Hoffert, M. I. Climate sensitivity uncertainty and the need for energy without CO₂ emission. *Science* **299**, 2052–2054 (2003).
- [25] Thackeray, M. M., Wolverton, C. & Isaacs, E. D. Electrical energy storage for transportation—approaching the limits of, and going beyond, lithium-ion batteries. *Energy Environ. Sci.* **5**, 7854–7863 (2012).

- [26] Goodenough, J. B. Evolution of strategies for modern rechargeable batteries. *Accounts of Chemical Research* **46**, 1053–1061 (2013).
- [27] Mukhopadhyay, A. & Sheldon, B. W. Deformation and stress in electrode materials for Li-ion batteries. *Progress in Materials Science* **63**, 58–116 (2014).
- [28] Sethuraman, V. A., Chon, M. J., Shimshak, M., Srinivasan, V. & Guduru, P. R. In situ measurements of stress evolution in silicon thin films during electrochemical lithiation and delithiation. *Journal of Power Sources* **195**, 5062–5066 (2010).
- [29] Soni, S. K., Sheldon, B. W., Xiao, X., Bower, A. F. & Verbrugge, M. W. Diffusion mediated lithiation stresses in Si thin film electrodes. *Journal of The Electrochemical Society* **159**, A1520 (2012).
- [30] Christensen, J. & Newman, J. Stress generation and fracture in lithium insertion materials. *Journal of Solid State Electrochemistry* **10**, 293–319 (2006).
- [31] Schweidler, S., Dreyer, S., Breitung, B. & Brezesinski, T. Operando acoustic emission monitoring of degradation processes in lithium-ion batteries with a high-entropy oxide anode. *Scientific Reports* **11**, 23381 (2021).
- [32] Lee, S.-M., Kim, J.-Y., Lee, J. & Byeon, J.-W. Evaluation of cracking damage in electrode materials of a LMO/Al-Lix lithium-ion battery through analysis of acoustic emission signals. *Journal of Materials Research and Technology* **24**, 5235–5249 (2023).
- [33] Turcotte, D. L. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics* (Cambridge University Press, 1997), 2 edn.
- [34] Ishii, T. & Matsushita, M. Fragmentation of long thin glass rods. *Journal of the Physical Society of Japan* **61**, 3474–3477 (1992).

- [35] Kadono, T. Fragment mass distribution of platelike objects. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1444–1447 (1997).
- [36] Kadono, T. & Arakawa, M. Crack propagation in thin glass plates caused by high velocity impact. *Phys. Rev. E* **65**, 035107 (2002).
- [37] Katsuragi, H., Sugino, D. & Honjo, H. Crossover of weighted mean fragment mass scaling in two-dimensional brittle fragmentation. *Phys. Rev. E* **70**, 065103 (2004).
- [38] Åström, J. A., Linna, R. P., Timonen, J., Møller, P. F. & Oddershede, L. Exponential and power-law mass distributions in brittle fragmentation. *Phys. Rev. E* **70**, 026104 (2004).
- [39] Åström, J. A., Ouchterlony, F., Linna, R. P. & Timonen, J. Universal dynamic fragmentation in d dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 245506 (2004).
- [40] Kun, F. Fragmentációs folyamatok univerzalitási osztályai. *Fizikai Szemle* **58**, 221 (2008).
- [41] Wittel, F., Kun, F., Herrmann, H. J. & Kröplin, B. H. Fragmentation of shells. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 035504 (2004).
- [42] Kun, F., Wittel, F. K., Herrmann, H. J., Kröplin, B. H. & Måløy, K. J. Scaling behavior of fragment shapes. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 025504 (2006).
- [43] Åström, J. A. Statistical models of brittle fragmentation. *Advances in Physics* **55**, 247–278 (2006).
- [44] Kekäläinen, P., Åström, J. A. & Timonen, J. Solution for the fragment-size distribution in a crack-branching model of fragmentation. *Phys. Rev. E* **76**, 026112 (2007).

- [45] Bucklow, S. L. A stylometric analysis of craquelure. *Computers and the Humanities* **31**, 503–521 (1997).
- [46] Domokos, G., Jerolmack, D. J., Kun, F. & Török, J. Plato’s cube and the natural geometry of fragmentation. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **117**, 18178–18185 (2020).
- [47] Ito, S. & Yukawa, S. Dynamical scaling of fragment distribution in drying paste. *Phys. Rev. E* **90**, 042909 (2014).
- [48] Houle, P. A. & Sethna, J. P. Acoustic emission from crumpling paper. *Phys. Rev. E* **54**, 278–283 (1996).
- [49] Shohat, D., Friedman, Y. & Lahini, Y. Logarithmic aging via instability cascades in disordered systems. *Nature Physics* **19**, 1890–1895 (2023).
- [50] Nataf, G. F. & Salje, E. K. H. Avalanches in ferroelectric, ferroelastic and coelastic materials: phase transition, domain switching and propagation. *Ferroelectrics* **569**, 82–107 (2020).
- [51] White, R. A. & Dahmen, K. A. Driving rate effects on crackling noise. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 085702 (2003).
- [52] Zapperi, S. *Crackling Noise: Statistical Physics of Avalanche Phenomena* (Oxford University Press, 2022).
- [53] Spasojević, D., Bukvić, S., Milošević, S. & Stanley, H. E. Barkhausen noise: Elementary signals, power laws, and scaling relations. *Phys. Rev. E* **54**, 2531–2546 (1996).
- [54] Casals, B., Nataf, G. F. & Salje, E. K. H. Avalanche criticality during ferroelectric/ferroelastic switching. *Nature Communications* **12**, 345 (2021).

- [55] Frohlich, C. & Davis, S. D. Teleseismic b values; or, much ado about 1.0. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* **98**, 631–644 (1993).
- [56] Utsu, T., Ogata, Y., S. R. & Matsu'ura. The centenary of the Omori formula for a decay law of aftershock activity. *Journal of Physics of the Earth* **43**, 1–33 (1995).
- [57] Sethna, P. J., Dahmen, K. A. & Myers, C. R. Crackling noise. *Nature* **410**, 242–250 (2001).
- [58] Friedman, N. *et al.* Statistics of dislocation slip avalanches in nanosized single crystals show tuned critical behavior predicted by a simple mean field model. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 095507 (2012).
- [59] Grosse, C. & Ohtsu, M. *Acoustic emission testing: Basics for Research-Applications in Civil Engineering* (Springer, 2008).
- [60] Guarino, A., Garcimartin, A. & Ciliberto, S. An experimental test of the critical behaviour of fracture precursors. *Eur. Phys. J. B* **6**, 13–24 (1998).
- [61] Petri, A., Paparo, G., Vespignani, A., Alippi, A. & Costantini, M. Experimental evidence for critical dynamics in microfracturing processes. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3423–3426 (1994).
- [62] Davidsen, J., Stanchits, S. & Dresen, G. Scaling and universality in rock fracture. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 125502 (2007).
- [63] Salminen, L. I., Pulakka, J. M., Rosti, J., Alava, M. J. & Niskanen, K. J. Crackling noise in paper peeling. *Europhysics Letters* **73**, 55 (2005).
- [64] Tsai, S.-T. *et al.* Acoustic emission from breaking a bamboo chopstick. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 035501 (2016).

- [65] Cannelli, G., Cantelli, R. & Cordero, F. Self-organized criticality of the fracture processes associated with hydrogen precipitation in niobium by acoustic emission. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3923–3926 (1993).
- [66] Garcimartín, A., Guarino, A., Bellon, L. & Ciliberto, S. Statistical properties of fracture precursors. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3202–3205 (1997).
- [67] Deschanel, S., Vanel, L., Vigier, G., Godin, N. & Ciliberto, S. Statistical properties of microcracking in polyurethane foams under tensile test, influence of temperature and density. *International Journal of Fracture* **140**, 87–98 (2006).
- [68] Meinders, M. B. J. & van Vliet, T. Scaling of sound emission energy and fracture behavior of cellular solid foods. *Phys. Rev. E* **77**, 036116 (2008).
- [69] Salje, E. & Xiang, J. Crackling noise and avalanches in minerals. *Physics and Chemistry of Minerals* **48** (2021).
- [70] Bacharz, M., Bacharz, K. & Trąmpczyński, W. The correlation between shrinkage and acoustic emission signals in early age concrete. *Materials* **15** (2022).
- [71] Xia, Q. *et al.* Cracking behaviour of restrained cementitious materials with expansive agent by comprehensive analysis of residual stress and acoustic emission signals. *Advances in Cement Research* **29**, 81–90 (2017).
- [72] Peck, D. L. & Minakami, T. The Formation of Columnar Joints in the Upper Part of Kilauean Lava Lakes, Hawaii. *GSA Bulletin* **79**, 1151–1166 (1968).
- [73] Goehring, L. & Morris, S. W. Scaling of columnar joints in basalt. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* **113** (2008).

-
- [74] Sakaguchi, Hidetsugu, Yamada, Kazuki & Shimokawa, Michiko. Observation and a simple model of plumose pattern on fracture surfaces of drying pastes. *EPL* **138**, 16002 (2022).
- [75] Liu, G. & Quek, S. *The Finite Element Method - A practical course* (Butterworth-Heinemann, 2003).
- [76] Herrmann, H. J. & Roux, S. *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media* (North-Holland, 1990).
- [77] Halász, Z., Nakahara, A., Kitsunezaki, S. & Kun, F. Effect of disorder on shrinkage-induced fragmentation of a thin brittle layer. *Phys. Rev. E* **96**, 033006 (2017).
- [78] Kun, F. & Herrmann, H. J. A study of fragmentation processes using a discrete element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **138**, 3–18 (1996).
- [79] Rapaport, D. C. *The Art of Molecular Dynamics Simulation* (Cambridge University Press, 2004).
- [80] Pöschel, T. & Schwager, T. *Computational Granular Dynamics: Models and Algorithms* (Springer Berlin, 2005).
- [81] Allen, M. P. & Tildesley, D. J. *Computer Simulation of Liquids* (Oxford University Press, 2017).
- [82] Lauritsen, K. B., Puhl, H. & Tillemans, H.-J. Performance of random lattice algorithms. *International Journal of Modern Physics C* **5**, 909–922 (1994).
- [83] Tillemans, H.-J. & Herrmann, H. J. Simulating deformations of granular solids under shear. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **217**, 261–288 (1995).

- [84] Kun, F., D’Addetta, G., Herrmann, H. & Ramm, E. Two-dimensional dynamic simulation of fracture and fragmentation of solids. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* **6**, 385–402 (1999).
- [85] D’Addetta, G., Kun, F. & Ramm, E. On the application of a discrete model to the fracture process of cohesive granular materials. *Granular Matter* **4**, 77–90 (2002).
- [86] Potapov, A. V., Hopkins, M. A. & Campbell, C. S. A two-dimensional dynamic simulation of solid fracture part I: Description of the model. *International Journal of Modern Physics C* **06**, 371–398 (1995).
- [87] Herrmann, H. J., Hansen, A. & Roux, S. Fracture of disordered, elastic lattices in two dimensions. *Phys. Rev. B* **39**, 637–648 (1989).
- [88] de Arcangelis, L., Hansen, A., Herrmann, H. J. & Roux, S. Scaling laws in fracture. *Phys. Rev. B* **40**, 877–880 (1989).
- [89] Kitsunozaki, S. Fracture patterns induced by desiccation in a thin layer. *Phys. Rev. E* **60**, 6449–6464 (1999).
- [90] Hornig, T., Sokolov, I. M. & Blumen, A. Patterns and scaling in surface fragmentation processes. *Phys. Rev. E* **54**, 4293–4298 (1996).
- [91] Stauffer, D. *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, London, 1985).
- [92] Kun, F. & Herrmann, H. J. Transition from damage to fragmentation in collision of solids. *Phys. Rev. E* **59**, 2623–2632 (1999).
- [93] Domokos, G., Kun, F., Sipos, A. A. & Szabó, T. Universality of fragment shapes. *Scientific Reports* **5**, 9147 (2015).

- [94] Ito, S. & Yukawa, S. Stochastic modeling on fragmentation process over lifetime and its dynamical scaling law of fragment distribution. *Journal of the Physical Society of Japan* **83**, 124005 (2014).
- [95] Carmona, H. A., Kun, F., Andrade, J. S. & Herrmann, H. J. Computer simulation of fatigue under diametrical compression. *Phys. Rev. E* **75**, 046115 (2007).
- [96] Behera, B., Kun, F., McNamara, S. & Herrmann, H. J. Fragmentation of a circular disc by impact on a frictionless plate. *Journal of Physics: Condensed Matter* **17**, S2439 (2005).
- [97] Kun, F. & Herrmann, H. J. Fragmentation of colliding discs. *International Journal of Modern Physics C* **07**, 837–855 (1996).
- [98] Kitsunozaki, S., Nishimoto, A., Mizuguchi, T., Matsuo, Y. & Nakahara, A. X-ray computerized tomography observation of lycopodium paste incorporating memory of shaking. *Phys. Rev. E* **105**, 044902 (2022).
- [99] Stojanova, M., Santucci, S., Vanel, L. & Ramos, O. High frequency monitoring reveals aftershocks in subcritical crack growth. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 115502 (2014).
- [100] Nakahara, A., Hiraoka, T., Hayashi, R., Matsuo, Y. & Kitsunozaki, S. Mechanism of memory effect of paste which dominates desiccation crack patterns. *Phil. Trans. R. Soc. A.* **377**, 20170395 (2019).
- [101] Måløy, K. J., Santucci, S., Schmittbuhl, J. & Toussaint, R. Local waiting time fluctuations along a randomly pinned crack front. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 045501 (2006).
- [102] Mair, K., Main, I. & Elphick, S. Sequential growth of deformation bands in the laboratory. *Journal of Structural Geology* **22**, 25–42 (2000).

Függelék

Az effektív rugalmassági állandók analitikus levezetése

Munkám során megmutattam, hogy modellünk mechanikai tulajdonságai anizotrópák, numerikusan meghatározva négy, a vizsgált rendszer szempontjából releváns rugalmas állandó értékét: az effektív Young-modulust és a Poisson-számot a geometriai transzformáció iránya mentén és arra merőlegesen.

Bár a modell teljes analitikus vizsgálata nem végezhető el, bizonyos paraméterértékek mellett az effektív Young-modulus és a Poisson-szám zárt analitikus formába önthető. Tegyük fel, hogy az n_x és n_y kiterjedésű téglalap alakú mintában k_x és k_y darab poligon van az x és y irányok mentén. Az $a \rightarrow 0$ határesetben a rácsszerkezet teljesen rendezett, így a rúdelemek párhuzamosak az x és y tengelyekkel. Ha a mintát y irányban terheljük, akkor a Δn_y megnyúlásnál az alakváltozás fenntartásához szükséges F_y összerő hat a felületi poligonokra. Ezért az egyetlen rúdra ható erő F_y/k_x , és mindegyiknek $\Delta n_y/k_y$ alakváltozással kell rendelkeznie. A Hook-törvény egyetlen rúdra a következőképpen írható fel

$$\frac{F_y}{k_x} = D_b \frac{\Delta n_y}{k_y}. \quad (1)$$

Felhasználva a 3.1. egyenletet és azt, hogy $D_b^{ij} = 1/a^{ij}$ kapjuk, hogy

$$\frac{F_y}{k_x S_0} = E \frac{\Delta n_y}{k_y l_0}, \quad (2)$$

ahol az $n_x = k_x S_0$ és $n_y = k_y l_0$ nevezők a minta kezdeti keresztmetszetét, illetve hosszát adják meg. (Mivel a rendezett rácsban minden rúdelem azonos tulajdonságokkal rendelkezik, az l_0 , S_0 és D_b mennyiségekről a felső indexeket elhagytam). Következésképpen a $\sigma_y = F_y/n_x$ feszültség és az $\varepsilon_y = \Delta n_y/n_y$ deformáció összefüggésére a $\sigma_y = E\varepsilon_y$ kifejezést kapjuk, ami azt jelenti, hogy abban a speciális esetben, amikor a rendezetlenség nulla, az effektív Young-modulus egyenlő a rúdelem Young-modulusával ($Y_y^{eff} = E$). $R = 1$ izotrópia esetén ugyanez következik a merőleges irányra is ($Y_x^{eff} = E$).

Ha a geometriai transzformációt az $a = 0$ szabályos rácson alkalmazzuk, akkor az csak a rúdelemek hosszát változtatja y mentén Rl_0 -ra, miközben a keresztmetszetük változatlan marad. Következésképpen a 2. egyenlet a következőre változik:

$$\frac{F_y}{k_x S_0} = E \frac{\Delta n_y}{k_y Rl_0}, \quad (3)$$

ahol a jobb oldali nevező a transzformált minta $n_x = k_y Rl_0$ kezdeti hosszát adja meg. Ebből következik, hogy a geometriai transzformáció nem változtatja meg a rácsrendszer Young-modulusát, ha az teljesen szabályos ($a = 0$), ami összhangban van az 5.2. alfejezetben bemutatott numerikus számításokkal.

Az $a > 0$ rendezetlenségi paraméter véges értékeinél a regularizált Voronoi-konstrukció egy véletlen szerkezetű poligonális rácsot eredményez. Az analitikus számítások kedvéért a szomszédos i és j poligonokat összekötő rúdelem az \vec{l}_0^{ij} és \vec{S}_0^{ij} vektorral jellemezhető, amelyek a kezdeti rácsban a rúd mentén, illetve arra merőlegesen mutatnak. A számításokhoz az \vec{l}_0^{ij} vektor ekvivalensen reprezentálható az x és y komponenseivel:

$$\vec{l}_0^{ij} \equiv (x, y), \quad (4)$$

ami tovább írható az

$$\vec{l}_0^{ij} = l_0^{ij} (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (5)$$

formába, ahol $l_0^{ij} = \sqrt{x^2 + y^2}$ a rúdelem kezdeti hosszát jelöli, α pedig a rúdelem és az x tengely közötti szög. Az \vec{S}_0^{ij} vektorra felírhatjuk, hogy

$$\vec{S}_0^{ij} = S_0^{ij} (-y, x) / l_0^{ij}, \quad (6)$$

ahol S_0^{ij} a kezdeti rúdkeresztmetszet. A poligonrács geometriai transzformációja a poligonokat y irányban R faktossal skálázza, ami a rudakat jellemző \vec{l}_0^{ij} és \vec{S}_0^{ij} vektorokat az

$$\vec{l}^{ij} = (x, Ry), \quad \text{és} \quad l^{ij} = \sqrt{x^2 + R^2 y^2}, \quad (7)$$

$$\vec{S}^{ij} = \frac{S_0^{ij}}{l_0^{ij}} (-y, Rx), \quad \text{és} \quad S^{ij} = \frac{S_0^{ij}}{l_0^{ij}} \sqrt{y^2 + R^2 x^2}, \quad (8)$$

szerint alakítja át. Következésképpen a rúdelem

$$A_0^{ij} = 1/2 l_0^{ij} S_0^{ij} \quad (9)$$

eredeti területe az

$$A^{ij} = 1/2 R l_0^{ij} S_0^{ij} \quad (10)$$

módon transzformálódik. A fenti eredményeket behelyettesítve a rugóállandó D_b^{ij} kifejezésébe, azt kapjuk, hogy

$$D_b^{ij} = E \frac{S_0^{ij}}{l_0^{ij}} \sqrt{\frac{R^2 x^2 + y^2}{x^2 + R^2 y^2}}. \quad (11)$$

Az y irányban történő egytengelyű terhelés esetén az ε_y és ε_x anizotróp alakváltozás komponensei pozitív, illetve negatív előjelűek. A modell mechanikai válaszához meghatározásához az egyszerűség kedvéért a rudakat

rugókként közelítjük, így a rúdelem alakváltozásában tárolt U_{ij} rugalmas energia a következő formában írható fel:

$$U_{ij} = \frac{1}{2} D_b^{ij} \left[\sqrt{(1 + \varepsilon_x)^2 x^2 + (1 + \varepsilon_y)^2 R^2 y^2} - \sqrt{x^2 + R^2 y^2} \right]^2 \quad (12)$$

$$\approx \frac{1}{2} D_b^{ij} \frac{1}{x^2 + R^2 y^2} (\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y R^2 y^2)^2. \quad (13)$$

A D_b^{ij} rugóállandó 11. és az A^{ij} terület 10. kifejezéseit felhasználva az u_{ij} energiasűrűség felírható az

$$u_{ij} = \frac{U_{ij}}{A^{ij}} = \frac{E}{R \left(l_0^{ij} \right)^2} \frac{(R^2 x^2 + y^2)^{1/2}}{(x^2 + R^2 y^2)^{3/2}} (\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y R^2 y^2)^2 \quad (14)$$

alakban. A rudak \bar{u} átlagos energiasűrűsége a síkban az α orientációs szögük $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ intervallumra vonatkozó átlagával kapható. Nagy $a \rightarrow 1$ rendezetlenség esetén az α orientációs szöget egyenletes eloszlásúnak lehet feltételezni a $p(\alpha) = 1/(2\pi)$ valószínűségi sűrűségfüggvénnyel. Általánoságban véve az \bar{u} átlagos energiasűrűség az R anizotrópia bármely értékénél az

$$\bar{u} = E(A\varepsilon_x^2 + 2B\varepsilon_x\varepsilon_y + C\varepsilon_y^2) \quad (15)$$

alakot veszi fel, ahol az A , B , C szorzótényezőket α feletti átlagolással kapjuk. Például C kifejezése

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{(R^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^{1/2}}{(\cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} R^3 \sin^4 \alpha \quad (16)$$

alakú. Az $R = 1$ izotróp esetben ez az átlagolás explicit módon elvégezhető, ami az $A = \overline{x^4} = 3/8$, $B = \overline{x^2 y^2} = 1/8$ és $C = \overline{y^4} = 3/8$ paraméterértékeket eredményezi. Az \bar{u} átlagos energiasűrűség minimalizálása rögzített

ε_y alakváltozás esetén az

$$\varepsilon_x = -\frac{B}{A}\varepsilon_y, \quad \text{és} \quad (17)$$

$$\bar{u} = E \left(C - \frac{B^2}{A} \right) \varepsilon_y^2 \quad (18)$$

összefüggéseket eredményezi. Így az Y_y^{eff} effektív Young-modulus kifejezhető az

$$Y_y^{eff} = 2E \left(C - \frac{B^2}{A} \right) \quad (19)$$

módon, a Poisson-szám pedig

$$\nu_{yx} = \frac{B}{A} \quad (20)$$

alakú. Az A , B és C értékeit behelyettesítve az $a \rightarrow 1$ és $R = 1$ izotróp esetben a 19. és 20. egyenletek $Y_y^{eff} = 2/3E$ és $\nu_{yx} = 1/3$ értékeket adnak, amelyek összehasonlíthatók az 5.2. alfejezet $a = 0.8$ legnagyobb rendezetlenségi paraméter esetén kapott numerikus mérésével $R = 1$ geometriai transzformáció nélkül. Az effektív Young-modulusra vonatkozóan kielégítő egyezés állapítható meg, a Poisson-szám analitikus és numerikus értékei közötti nagyobb eltérés pedig a levezetések során tett egyszerűsítő feltételezéseknek tulajdonítható. A levezetésekben az is következik, hogy $a \rightarrow 1$ és $R = 1$ izotróp körülmények között az effektív Young-modulus és a Poisson-szám nem függ az iránytól, így $Y_x^{eff} = Y_y^{eff}$ és $\nu_{yx} = \nu_{xy}$ egyenleteknek kell teljesülniük.

R tetszőleges értékeire az integrálok átlagolása az α orientációs szög felett nem végezhető el explicit módon, ezért nem tudunk zárt analitikus formulát adni a modell rugalmassági állandóinak R függésére. Az 5.2. alfejezetben bemutatott numerikus eredmények jó egyezése az analitikusan követhető speciális paraméterkészlettel megerősíti az effektív Young-modulusnak és a Poisson-számnak a modellünk által numerikusan előre jelzett hatványfüggvény viselkedését az R anizotropia paraméterrel.