Metrikus és permetstruktúrák geometriai vektormezői

Geometric vector fields of spray and metric structures

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Lovas Rezső László

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar

Debrecen, 2005

1. Bevezetés

Az értekezés címében szereplő mindkét differenciálgeometriai struktúra a Finsler-struktúra általánosítása. A Finsler-geometria alapeszméje már Riemann híres habilitációs előadásában megtalálható, amelyben olyan geometriai terek vizsgálatát vetette fel, ahol „a metrika az iránytól is függ". Ezek rendszeres tanulmányozását Paul Finsler kezdte el 1918-as disszertációjában [8], Riemann előadásától minden bizonnyal teljesen függetlenül és egészen más motivációval. A mi megközelítésünkben a Finsler-sokaság az általánosított metrikákkal ellátott sokaságok speciális eseteként adódik, a részleteket az értekezés 5.1. szakasza tartalmazza; lásd még a jelen tézisek 4. szakaszát.

A differenciálgeometria főbb területei egy differenciálható sokaságon megadott különféle objektumok (struktúrák) által különíthetők el egymástól. Két differenciálható sokaság közötti diffeomorfizmus teljesen „átviszi" a differenciálható struktúrát az elsőről a másodikra. Így, ha az első sokaságon megadunk bármilyen differenciálgeometriai objektumot vagy struktúrát, akkor a diffeomorfizmus révén egyértelműen megfeleltethetünk ennek egy ugyanolyan fajta objektumot a második sokaságon. Ha tehát meg van adva valamilyen struktúrával ellátott sokaság, akkor értelmes az a kérdés, hogy a sokaságnak egy önmagára való diffeomorfizmusa önmagába viszi-e át a struktúrát vagy sem. Ha igen, akkor *(globális) szimmetriá*nak mondjuk. A differenciálgeometria egy bizonyos ágát úgy tekinthetjük, mint az ilyen szimmetriák invariánsainak az elméletét. Ha a sokaság két nyílt részhalmaza közötti diffeomorfizmusról van szó, akkor *lokális szimmetriá*ról beszélünk. Egy sokaságon adott vektormező folyama a vektormezőnek mint közönséges elsőrendű differenciálegyenletnek az integrálgörbéiből áll. (A precíz definíciót lásd az értekezés 2.3. szakaszában.) A folyam paraméterének rögzített értéke mellett két nyílt részsokaság közti diffeomorfizmust kapunk. Ha ez lokális szimmetria, akkor a vektormezőt *geometriai vektormező*nek vagy *infinitezimális szimmetriá*nak nevezzük.

2. Jelölések

Az értekezésben egy n-dimenziós összefüggő M sokaságon dolgozunk. Ha $\widetilde{TM} \subset TM$ olyan nyílt részhalmaz, amelyre $\tau\left(\widetilde{TM}\right) = M$ teljesül, akkor a τ érintőnyaláb-projekció $\widetilde{TM}$-ra való leszűkítését π-vel jelöljük. A τ-nak a π általi visszahúzottja $\pi^*\tau$. Ezen nyaláb metszeteinek a $C^\infty\left(\widetilde{TM}\right)$-modulusát (amelyeket *$\pi$-menti vektormezők*nek is nevezünk) $\mathfrak{X}(\pi)$ jelöli. A legfontosabb speciális eset: $\widetilde{TM} = \overset{\circ}{T}M$, vagyis az M sokaság nemnulla érintővektorainak nyílt halmaza. A τ projekció $\overset{\circ}{T}M$-re való leszűkítését $\overset{\circ}{\tau}$ jelöli.

Rendelkezésünkre áll a következő rövid egzakt sor $\widetilde{TM}$ fölött:

$$0 \to \pi^*TM \xrightarrow{\mathbf{i}} T\widetilde{TM} \xrightarrow{\mathbf{j}} \pi^*TM \to 0.$$

Egy M-en adott sima f függvény vertikális és teljes liftjét f^v, ill. f^c jelöli. Egy M-en adott X vektormező vertikális liftje $X^v = \mathbf{i}\hat{X}$, teljes liftje pedig X^c. A $\pi^*\tau$ *kanonikus metszet*ét, a $\widetilde{TM}$ fölötti *Liouville-vektormező*t és a *vertikális endomorfizmus*t rendre a

$$\delta(v) := (v,v) \quad \left(v \in \widetilde{TM}\right), \quad C := \mathbf{i}\delta \quad \text{és} \quad J := \mathbf{i} \circ \mathbf{j}$$

összefüggések definiálják. Ha f sima függvény $\widetilde{TM}$-on, akkor $d^v f$-et a következő képlettel definiáljuk:

$$\left(d^v f\right)\left(\tilde{X}\right) := \left(\mathbf{i}\tilde{X}\right) f \quad \left(\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\pi)\right).$$

Ehresmann-konnexión egy hasított rövid egzakt sort értünk:

$$0 \rightleftharpoons \pi^* TM \underset{\mathcal{V}}{\overset{\mathbf{i}}{\rightleftharpoons}} T\widetilde{TM} \underset{\mathcal{H}}{\overset{\mathbf{j}}{\rightleftharpoons}} \pi^* TM \rightleftharpoons 0.$$

A *horizontális* és *vertikális projektor* $\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j}$, ill. $\mathbf{v} := \mathbf{i} \circ \mathcal{V}$. Az $\mathfrak{X}^h\left(\widetilde{TM}\right)$ *horizontális résznyaláb* a $\mathcal{H}$ képtere.

A $\pi^*\tau$ nyaláb menti *kovariáns deriválás* olyan $D : \mathfrak{X}\left(\widetilde{TM}\right) \times \mathfrak{X}(\pi) \to \mathfrak{X}(\pi)$ leképezés, amely kielégíti a szokásos Koszul-axiómákat. *Deflexió*ja a δ kovariáns differenciálja, amelyet μ-vel jelölünk. A μ^v vertikális deflexió, durván szólva, a μ-nek a vertikális résznyalábra való leszűkítése. A D kovariáns deriválást *reguláris*nak mondjuk, ha μ^v a $\widetilde{TM}$ minden pontjában n rangú. Egy Ehresmann-konnexiót *D-hez csatolt*nak nevezünk, ha $\mathfrak{X}^h\left(\widetilde{TM}\right) = \operatorname{Ker} \mu$. Egy Ehresmann-konnexióból származó Berwald-féle kovariáns deriválást ∇ jelöli. Tetszőleges kovariáns deriválás horizontális és vegyes görbületének a jele $\mathbf{R}$, ill. $\mathbf{P}$, míg egy Berwald-féle deriválás görbületeié $\overset{\circ}{\mathbf{R}}$ és $\overset{\circ}{\mathbf{P}}$.

Egy $\tilde{Y}$ π-menti vektormező $X \in \mathfrak{X}(M)$ szerinti Lie-deriváltját az $\mathcal{L}_X \tilde{Y} = \mathbf{i}^{-1}\left[X^c, \mathbf{i}\tilde{Y}\right]$ előírással adhatjuk meg. Egy π-menti D kovariáns deriválás X szerinti Lie-deriváltját az

$$(\mathcal{L}_X D)\left(\eta, \tilde{Y}\right) := \mathcal{L}_X D_\eta \tilde{Y} - D_{[X^c, \eta]}\tilde{Y} - D_\eta \mathcal{L}_X \tilde{Y}$$

formula értelmezi.

Egy végesdimenziós valós V vektortéren adott *Finsler – Minkowski-normán* olyan $\varphi : V \to \mathbb{R}$ függvényt értünk, amely eleget tesz az alábbi axiómáknak:

(1) $\varphi(v) > 0$, ha $v \neq 0$;

(2) ha $\lambda > 0$, akkor $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ minden $v \in V$ esetén;

(3) φ sima $V \setminus \{0\}$ fölött;

(4) ha $E := \frac{1}{2}\varphi^2$, akkor a $g_p := E''(p)$ szimmetrikus bilineáris forma minden $p \in V \setminus \{0\}$ esetén nemelfajuló.

2.1. Állítás. *Bármely Finsler – Minkowski-norma metrikus tenzora pozitív definit, tehát* $(V \setminus \{0\}, g)$ *Riemann-sokaság.*

3. Affin és projektív vektormezők

Minden Finsler-struktúrából kanonikus módon származik az érintősokaságon egy ún. másodrendű vektormező, amelynek az együtthatói másodfokú pozitív homogén függvények. Természetes geometriai probléma az ilyen jellegű vektormezők Finsler-struktúrától független önálló vizsgálata. Ezeket a vektormezőket manapság *spray*nek hívják, magyarul a *permet* elnevezést használjuk. A permetet egyértelműen meghatározzák a parametrizált integrálgörbéi, ezért a permetgeometriát a klasszikus irodalomban *pályageometria*ként említették.

A permetgeometria az 1930-as években élte első aranykorát. Több kiváló matematikus dolgozott ezen a területen, többek között Ludwig Berwald, Élie Cartan, Jesse Douglas, T. Y. Thomas és J. H. C. Whitehead. A 60-as években, viszonylagos elszigeteltségben, Rapcsák András is jelentős permetgeometriai eredményeket ért el ([19], lásd még [26]). A permetgeometria reneszánsza a 70-es években kezdődött, részben a Lagrange-mechanika geometriai megalapozásával összefüggésben [3, 4], részben annak a felfedezésnek a révén, hogy a permet milyen fontos szerepet játszik a Finsler-geometriában [7]. A Finsler-geometria és különböző általánosításai adtak ismét új lendületet ezeknek a vizsgálatoknak, főleg Zhongmin Shen tevékenységének köszönhetően [22] és Grifone elméletének a továbbfejlesztése révén [25, 26], de a kutatás egyéb irányain keresztül is [17, 21].

A permetgeometria ezen újjászületése során azonban egy igen fontos kérdést eléggé elhanyagoltak: nem alapozták meg modern módon a permetsokaságok transzformációinak elméletét, főleg az infinitezimális transzformációkét; bár Juszef [33] dolgozata és a [25, 26] dolgozatok határozott lépéseket jelentenek a permetsokaságok projektív elméletének a kidolgozása felé. Habár számos szerző foglalkozott már Finsler-sokaságok projektív transzformációival [1, 13, 14, 29], alig lelhető fel valami az irodalomban a permetsokaságok infinitezimális affin és projektív transzformációiról, eltekintve Jano klasszikus [32] könyvétől, amely viszont a mai olvasó számára meglehetősen nehéz. Az értekezés 3. fejezetében szándékoztuk megtenni az első néhány lépést ezen a fontos területen. Megjegyezzük, hogy nagyjából az értekezés megírásával egyidőben jutott a tudomásunkra két fontosnak ígérkező munka a projektív konnexiókról [5, 6].

A fentebb vázolt elméleti motivációktól eltekintve a fizikai interpretáció szempontjából is érdekesnek tartjuk ezeket a problémákat. Mivel a permet az érintősokaságon adott vektormező, az integrálgörbéi is az érintősokaságban futnak. Az alapsokaságra való vetületüket a permet *geodetikusai*nak hívjuk. Két permetsokaság közti diffeomorfizmust *affin leképezésnek* mondunk, ha a (parametrizált) geodetikusokat geodetikusokba viszi. Általánosabban, ha a geodetikusokat pregeodetikusokba viszi, akkor *projektív leképezés*ről szólunk. Pregeodetikuson itt olyan görbét értünk, amely növekvő (irányítástartó) paramétertranszformációval geodetikussá paraméterezhető át. Egy affin (projektív) vektormező egy permetsokaságon olyan vektormező, amelynek a folyama lokális affin (projektív) transzformációkból áll. Az affin vektormezők éppen a permetsokaság geometriai vektormezői az 1. szakaszban leírt értelemben. A projektív vektormezők akkor lesznek ugyanilyen értelemben geometriai vektormezők, ha bevezetjük a permetek projektív ekvivalenciájának a fogalmát. Durván szólva, egy közös alapsokaság fölötti két permet akkor projektíven ekvivalens, ha geodetikusaik növekvő paramétertranszformáció erejéig megegyeznek. (Ugyanezt fogalmaztuk meg pontosan az értekezés 3.3.1. definíciójában.) Ekkor egy projektív vektormező az adott permettel projektíven ekvivalens összes permetből álló ekvivalenciaosztály által meghatározott struktúrának infinitezimális szimmetriája lesz.

Az időtől független klasszikus mechanikai rendszerek geometriai interpretációjában az alapsokaság a konfigurációs tér. A pályák paraméterének nagyon fontos fizikai jelentése van: az idő. Az általános relativitáselméletben az alapsokaság a téridő, egy négydimenziós Lorentz-sokaság. Itt az alapsokaság struktúrája magában hordozza az időt, így a tömegpontok pályaparaméterének nincs igazi fizikai jelentése. Ezért a klasszikus mechanikában az affin transzformációk alkotják a pályák fizikai interpretációját invariánsan hagyó transzformációk csoportját, az általános relativitáselméletben pedig a projektív transzformációk.

3.1. Definíció. *Egy olyan* $\xi : TM \to TTM$ C^1*-osztályú vektormezőt, amely sima* $\overset{\circ}{T}M$*-en,* M *fölötti* permet*nek nevezünk, ha* $J\xi = C$*, és* $[C, \xi] = \xi$*. Egy* $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ *sima görbét* ξ geodetikusá*nak mondunk, ha* $\ddot{c} = \xi \circ \dot{c}$*.*

Az ezen szakaszban összefoglalt eredmények tárgyalásában a ξ permetből a Crampin – Grifone-féle konstrukcióval származó Ehresmann-konnexiót használjuk.

Az M sokaság két nyílt részhalmaza közti diffeomorfizmust *lokális affin transzformáció*, ha érintőleképezése ξ-t invariánsan hagyja. Ha X olyan vektormező M-en, amelynek a folyama lokális affin transzformációkból áll, akkor X-et *affin vektormező*nek mondjuk. Az affin vektormezőket jellemzi az alábbi

3.2. Tétel. *Legyen* X *vektormező* M*-en. A következő kijelentések ekvivalensek:*

(1) X *affin vektormező;*

(2) $[X^c, \xi] = 0$*;*

(3) $\mathcal{L}_X \nabla = 0$*;*

(4) $\mathcal{L}_{X^c}\mathbf{h} = 0$*;*

(5) $\left(\nabla^h\nabla^h\hat{X}\right)\left(\tilde{Y},\tilde{Z}\right) = -\mathring{\mathbf{R}}\left(\hat{X},\tilde{Y}\right)\tilde{Z} + \mathring{\mathbf{P}}\left(\mathcal{V}X^c,\tilde{Y}\right)\tilde{Z}$ *bármely* $\tilde{Y},\tilde{Z}\in\mathfrak{X}(\mathring{\tau})$ *esetén* (általánosított Killing-egyenlet).

A ξ által indukált *Jano-féle kovariáns deriválás*t a következő összefüggés értelmezi:

$$D_\eta\tilde{X} := \nabla_\eta\tilde{X} + \frac{1}{n+1}\operatorname{tr}\mathring{\mathbf{P}}\left(\mathbf{j}\eta,\tilde{X}\right)\cdot\delta.$$

Két permet, mint mondtuk, *projektíven ekvivalens*, ha geodetikusaik legfeljebb csak növekvő paramétertranszformáció erejéig különböznek egymástól. Az M sokaság két nyílt részhalmaza közti diffeomorfizmus *lokális projektív transzformáció*, ha érintőleképezése ξ-t vele projektíven ekvivalens permetbe viszi. Ha $X\in\mathfrak{X}(M)$ folyama lokális projektív transzformációkból áll, akkor X *projektív vektormező*. A projektív vektormezőknek az alábbi jellemzését adtuk:

3.3. Tétel. *Ha* $X\in\mathfrak{X}(M)$*, akkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

(1) X *projektív vektormező;*

(2) *létezik olyan folytonos* F *függvény* TM*-en, amely sima* $\mathring{T}M$*-en, és amelyre* $[X^c,\xi] = FC$ *teljesül;*

(3) *létezik olyan elsőfokú pozitív homogén sima* F *függvény* $\mathring{T}M$*-en, hogy*

$$(\mathcal{L}_{X^c}\mathbf{h})(\eta) = \frac{1}{2}(FJ\eta + (J\eta)F\cdot C),\ \eta\in\mathfrak{X}\left(\mathring{T}M\right);$$

(4) *létezik olyan sima F függvény $\overset{\circ}{T}M$-en, hogy*

$$(\mathcal{L}_X D)\left(\eta, \tilde{Z}\right) = -\frac{1}{2}\left((J\eta)F \cdot \tilde{Z} + \left(\mathbf{i}\tilde{Z}\right) F \cdot \mathbf{j}\eta\right).$$

4. Általánosított metrikák

Finsler-sokaságon dolgozva, a Finsler-energia Hesse-formája szimmetrikus, nemelfajuló (0,2)-típusú tenzor a $\overset{\circ}{\tau}{}^*\tau$ visszahúzott nyalábon. Ezt a tenzort általában a Finsler-sokaság Finsler- (vagy Riemann−Finsler-)metrikájának nevezik. Általánosított metrikán ennek a fogalomnak a kézenfekvő általánosítását fogjuk érteni: egy olyan szimmetrikus, nemelfajuló $(0, 2)$-típusú tenzort a $\pi^*\tau$ nyalábon, amely nem feltétlenül származik Finsler-struktúrából. (Technikai okokból nem tesszük fel, hogy ez a metrikus tenzor az egész érintősokaságon értelmezve van, hanem csak azt, hogy valamely nyílt részhalmazán.)

Az ilyen jellegű metrikák vizsgálata az 1950-es évekre nyúlik vissza. A debreceni iskola úttörő munkával járult hozzá ehhez az elmélethez [18], amellyel további vizsgálatokat is ösztönzött [30]. Később a román differenciálgeometriai iskola ért el fontos eredményeket az általánosított metrikákkal kapcsolatban [2, 16, 17]. A közelmúltban jelent meg egy részleges új osztályozásuk [15]. Már Moór Artúr felhívta a figyelmet némely jellegzetes tulajdonságaikra, amelyekben eltérnek a Finsler-struktúráktól [18]; például, hogy az autoparalell és az extremális görbéik nem feltétlenül esnek egybe, még a felhasznált kovariáns deriválás természetes megválasztása mellett sem.

Ezek a metrikák fizikai szempontból is érdekesek lehetnek, hiszen, mint azt Horváth János és Moór Artúr észrevette [11], természetes geometriai leírását adják az úgynevezett bilokális térelméleteknek, amelyeket Jukava vezetett be az 1940-es években. Jukava fő célja a tömegkvantálás megmagyarázása és a kvantumtérelméletben fellépő bizonyos fajta divergenciák kiküszöbölése volt. A bilokális térelméletek általánosításaiként kifejlesztett multilokális térelméleteknek egy áttekintését lásd a [20] dolgozatban. Az értekezésben az általánosított metrikáknak csak a geometriai vonatkozásaira szorítkozunk.

Legyen tehát g szimmetrikus nemelfajuló (0,2)-típusú tenzor a $\pi^*\tau$ nyalábon. Ekkor g-t *(általánosított) metrikának* nevezzük. A nemelfajultságot felhasználva, egy g általánosított metrika $\mathcal{C}$ *első Cartan-tenzorát* és $\mathcal{C}_\flat$ *leszállított első Cartan-tenzorát* az alábbi összefüggésekkel értelmezzük:

$$g\left(\mathcal{C}\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right),\tilde{Z}\right) := \mathcal{C}_\flat\left(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\right) := \left(\nabla^v_{\tilde{X}} g\right)\left(\tilde{Y},\tilde{Z}\right).$$

A π-menti $\vartheta_g : \tilde{X} \mapsto g\left(\tilde{X},\delta\right)$ 1-formát a g metrika *Lagrange-1-formájának* nevezzük. A metrikához tartozó *abszolút energia* az $E := \frac{1}{2}g(\delta,\delta)$ függvény.

A π-menti g metrikát *variációsnak* mondjuk, ha $\mathcal{C}$ első Cartan-tenzora szimmetrikus; *gyengén variációsnak*, ha $\mathcal{C}_\flat\left(\tilde{X},\tilde{Y},\delta\right) = \mathcal{C}_\flat\left(\tilde{Y},\tilde{X},\delta\right)$ minden $\tilde{X},\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\pi)$ esetén; *normálisnak*, ha $\mathcal{C}\left(\tilde{X},\delta\right) = 0$ minden $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\pi)$ esetén; és *gyengén normálisnak*, ha $\mathcal{C}_\flat\left(\tilde{X},\delta,\delta\right) = 0$ minden $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\pi)$ esetén. A metrika *Miron-reguláris* [16], ha az $A : \tilde{X} \mapsto \tilde{X} + \mathcal{C}\left(\tilde{X},\delta\right)$ tenzor

$\widetilde{TM}$ minden pontjában maximális rangú. Ha $\gamma := \nabla^v\nabla^v E$ szintén nemelfajuló, akkor g-t *energiareguláris*nak nevezzük. Egy energiareguláris és homogén ($\nabla^v_\delta g = 0$) metrikát *Moór – Vanstone-metrika*ként is említünk.

A következő észrevételek lényeges szerepet játszanak meggondolásainkban (bizonyításuk a [15] dolgozatban található). Ha $\widetilde{T_pM}$ minden $p \in M$ esetén egyszeresen összefüggő, akkor g variációssága ekvivalens egy olyan L sima függvény létezésével $\widetilde{TM}$-on, amelynek a Hesse-formája g, pontosabban: $g = \nabla^v\nabla^v L$. Ebben az esetben L-et *Lagrange-függvény*nek nevezzük. Ha $\widetilde{T_pM}$ egyszeresen összefüggő minden $p \in M$ esetén, akkor g gyengén variációs volta ekvivalens egy olyan L sima függvény létezésével $\widetilde{TM}$-on, amelyre $\vartheta_g = d^v L$ teljesül. Ha $\widetilde{TM} = \overset{\circ}{T}M$, g pedig gyengén normális és Miron-reguláris, akkor E (esetleg indefinit) Finsler-energia (a szokásos értelemben), továbbá $\vartheta_g = d^v E$. Végül, ha $\widetilde{TM} = \overset{\circ}{T}M$, és g normális, akkor maga a g Finsler-metrika.

5. Természetes metrikus kovariáns deriválások

1987-ben Macumoto Makoto a következőket írta: „A szerző nagyszámú tapasztalata során arra a meggyőződésre jutott, hogy a Finsler-terek minden elméletében van egy *legjobb* Finsler-konnexió.” Az értekezésben megpróbáltuk Macumotónak ezt az elvét az általánosított metrikák meglehetősen különös világára alkalmazni, és megvizsgáltuk, hogy az általánosított metrikák különféle speciális osztályainál van-e „legjobb”, vagy legalábbis „jó” metrikus deriválás.

Azt mondjuk, hogy egy metrikus deriválás „jó”, ha van olyan hozzá csatolt Ehresmann-konnexió, amelyet maga a metrika határoz meg. Moór – Vanstone-metrika esetén rendelkezésünkre áll egy természetes Ehresmann-konnexió: az E Finsler-energia által meghatározott $\mathcal{H}_E$ Barthel-konnexió. Másrészt, ha adva van $\overset{\circ}{T}M$-en egy Ehresmann-konnexió, akkor egyértelműen létezik olyan metrikus kovariáns deriválás a $\overset{\circ}{\tau}{}^*\tau$ nyalábon, amelynek a vertikális torziója eltűnik, horizontális torziója pedig megegyezik az adott Ehresmann-konnexió torziójával. A $\mathcal{H}_E$-ből származó metrikus deriválás azonban „nem jó” a fenti értelemben. Tehát $\mathcal{H}_E$-nél alkalmasabb Ehresmann-konnexiót kell találnunk, hogy jó metrikus deriváltat kapjunk.

5.1. Tétel. *Legyen g gyengén normális Moór – Vanstone-metrika, ξ az E Finsler-energiához tartozó permet, $\mathcal{H}_E$ a Barthel-konnexió és $\overset{E}{\nabla}$ a $\mathcal{H}_E$-ből származó Berwald-féle deriválás. Legyen $P \in \mathcal{T}^1_1(\overset{\circ}{\tau})$ tetszőleges tenzor. Tekintsük a $\mathcal{H} := \mathcal{H}_E - \mathbf{i} \circ P$ Ehresmann-konnexiót $\overset{\circ}{T}M$-en és azt az egyértelműen létező D kovariáns deriválást $\overset{\circ}{\tau}$ mentén, amelynek a vertikális torziója eltűnik, és a horizontális torziója megegyezik $\mathcal{H}$ torziójával. A $\mathcal{H}$ horizonzális leképezés akkor és csak akkor elégíti ki az*

(I) $\mathcal{H}\delta = \xi$,

(II) *$\mathcal{H}$ konzervatív E-re nézve* $\left(\mathfrak{X}^h\left(\overset{\circ}{T}M\right) \subset \operatorname{Ker} dE\right)$,

(III) *$\mathcal{H}$ csatolva van D-hez*

feltételeket, ha $P_s, P_a \in \mathcal{T}^1_1(\overset{\circ}{\tau})$ tenzorok, hogy

$$P\tilde{X} = -\frac{1}{2}\Big(i_{\tilde{X}}\overset{E}{\nabla}_{\xi} g\Big)^{\sharp} + P_s\tilde{X} + P_a\tilde{X} \quad \Big(\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{\tau})\Big),$$

ahol $P_s, P_a \in \mathcal{T}^1_1(\overset{\circ}{\tau})$ olyan tenzorok, hogy P_s önadjungált (g-re nézve) és nulladfokú homogén, P_a ferdeszimmetrikus (g-re nézve), és mind P_s, mind P_a képhalmaza benne van a δ kanonikus metszet g-re vonatkozó ortogonális komplementerében.

5.2. Tétel. *Legyen g pozitív definit és gyengén normális metrika $\overset{\circ}{\tau}$ mentén. Tegyük fel, hogy az $A : \tilde{X} \mapsto \tilde{X} + \mathcal{C}\Big(\tilde{X}, \delta\Big)$ tenzor rendelkezik a következő tulajdonsággal: rögzített $v \in \overset{\circ}{T}M$ esetén az A_v önadjungált lineáris transzformációnak nincsenek olyan $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$ (nem feltétlenül különböző) sajátértékei, hogy $\lambda_i + \lambda_j = 0$. Akkor egyértelműen létezik olyan $D : \mathfrak{X}\Big(\overset{\circ}{T}M\Big) \times \mathfrak{X}(\overset{\circ}{\tau}) \to \mathfrak{X}(\overset{\circ}{\tau})$ kovariáns deriválás és olyan $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió $\overset{\circ}{T}M$-en, hogy*

(1) *D metrikus,*

(2) *D vertikális torziója eltűnik,*

(3) *D-nek $\mathcal{H}$-ra vonatkozó horizontális torziója eltűnik,*

(4) *D deflexiójának a magtere tartalmazza a horizontális résznyalábot.*

Speciálisan, ha D reguláris, akkor $\mathcal{H}$ csatolva van hozzá.

Abban az esetben, amikor g Finsler-metrika, ez a tétel elvezet a Cartan-deriválás egy axiomatikus jellemzéséhez:

5.3. Állítás. *Ha $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió egy Finsler-sokaságon, és $D : \mathfrak{X}\left(\overset{\circ}{T}M\right) \times \mathfrak{X}(\overset{\circ}{\tau}) \to \mathfrak{X}(\overset{\circ}{\tau})$ olyan kovariáns deriválás, amelyre az alábbiak teljesülnek:*

(1) *D metrikus,*

(2) *a vertikális torziója eltűnik,*

(3) *a $\mathcal{H}$-ra vonatkozó horizontális torziója eltűnik,*

(4) *$\mathcal{H}$ csatolva van hozzá;*

akkor D megegyezik a Cartan-féle kovariáns deriválással, $\mathcal{H}$ pedig a Finsler-sokaság Barthel-konnexiója.

6. Killing-vektormezők

Egy általánosított metrikával ellátott sokaság geometriai vektormezői vagy infinitezimális szimmetriái az úgynevezett Killing-vektormezők. Az általános relativitáselméletben ezek fejezik ki a téridő infinitezimális szimmetriáit, ezért fontos probléma az általánosított metrikák különféle osztályai esetén is a Killing-vektormezők meghatározása.

Legyen g általánosított metrika π mentén. Az M két nyílt részhalmaza közti diffeomorfizmust *lokális izometriá*nak nevezzük, ha érintőleképezése g-t invariánsan hagyja. Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$

vektormezőt *infinitezimális izometriá*nak mondunk, ha folyama lokális izometriákból áll. Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező *Killing-vektormező*, ha $\mathcal{L}_X g = 0$.

6.1. Állítás. *Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező akkor és csak akkor infinitezimális izometriája g-nek, ha Killing-vektormező.*

A Riemann-geometriában egy Killing-mező kovariáns differenciálja ferdeszimmetrikus. Ez az eredmény a következőképpen általánosítható:

6.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy adva van $\widetilde{TM}$-on egy torziómentes Ehresmann-konnexió, D pedig az az egyértelműen létező metrikus kovariáns deriválás, amelynek a vertikális és a horizontális torziója eltűnik. Legyen X Killing-vektormező M-en. Akkor*

$$g\left(D_{\mathcal{H}\tilde{Y}}\hat{X}, \tilde{Z}\right) + g\left(\tilde{Y}, D_{\mathcal{H}\tilde{Z}}\hat{X}\right) + g\left(\mathcal{C}\left(\mathcal{V}X^c, \tilde{Y}\right), \tilde{Z}\right) = 0$$

bármely $\tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathfrak{X}(\pi)$ esetén.

Tetszőleges g metrika esetén bevezetjük a $\overset{*}{\mathcal{C}}$ (1,1)-típusú tenzort π mentén a $\overset{*}{\mathcal{C}} : \tilde{X} \mapsto \mathcal{C}\left(\tilde{X}, \delta\right)$ előírással.

6.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\widetilde{T_pM}$ minden $p \in M$ esetén összefüggő. Legyen g gyengén variációs Miron-reguláris metrika $\widetilde{TM}$-on, amelynél $\vartheta_g = d^v L$. Az M sokaság egy X vektormezője akkor és csak akkor Killing-vektormezője g-nek, ha az $X^c L$ függvény vertikális lift, és $\mathcal{L}_X \overset{*}{\mathcal{C}} = 0$.*

A g metrika nem határozza meg egyértelműen L-et, hiszen L-hez hozzáadhatunk egy vertikális liftet, anélkül hogy $d^v L$ megváltozna. Fennáll azonban az alábbi

6.4. Következmény. *Változatlan feltételek mellett, ha g ráadásul az egész TM-en értelmezve van, és X Killing-vektormező M-en, akkor L megválasztható úgy, hogy $X^c L = 0$ teljesüljön.*

6.5. Tétel. *Legyen g az egész TM-en definiált variációs metrika. Az M egy X vektormezője akkor és csak akkor Killing-vektormező, ha létezik olyan L Lagrange-függvény g számára, amelyre $X^c L = 0$ teljesül.*

6.6. Következmény. *Amennyiben (M, g) Finsler-sokaság, úgy az M-en adott X vektormező akkor és csak akkor Killing-vektormezője g-nek, ha $X^c E = 0$.*

Euklideszi térben a transzlációkat az különbözteti meg a többi izometriától, hogy orbitjaik egyenesek. Ezt használjuk fel a transzláció fogalmának az általánosítására: ha g gyengén normális és Miron-reguláris, akkor g-nek egy X Killing-vektormezőjét *transzláció*nak nevezzük, ha minden integrálgörbéje egyúttal geodetikusa az (M, E) Finsler-sokaságnak.

6.7. Állítás. *Ha $X \in \mathfrak{X}(M)$ Killing-vektormező, és $c : I \to M$ geodetikusa E-nek, akkor a $t \in I \mapsto g_{\dot{c}(t)}(X(c(t)), \dot{c}(t))$ függvény konstans.*

A következő állításban a transzlációkat jellemezzük:

6.8. Állítás. *Amennyiben X a g metrika Killing-vektormezője, úgy X akkor és csak akkor transzláció, ha a $p \in M \mapsto E(X_p)$ függvény konstans.*

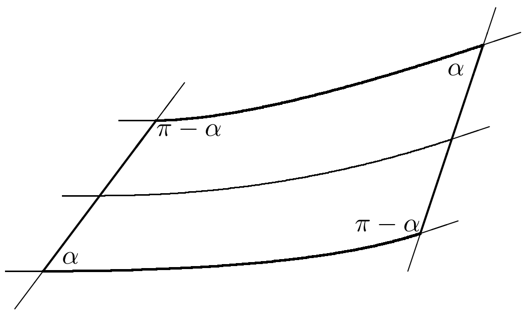
A metrikák egy széles osztályának egyáltalán nincs triviálistól különböző transzlációja. A Riemann-struktúrák közül ilyen például a hiperbolikus sík. A Poincaré-féle felsőfélsík-modellben a Killing-mezők a következő alakúak:

$$X = \left[\alpha\left((u^1)^2 - (u^2)^2\right) + \beta u^1 + \gamma\right]\frac{\partial}{\partial u^1} + \left(2\alpha u^1 + \beta\right)u^2\frac{\partial}{\partial u^2}$$

valamely $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ számokkal. A felső félsík megegyezik a pozitív képzetes részű komplex számok halmazával. Tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$, és vezessük be a $k := \sqrt{|\beta^2/4 - \alpha\gamma|}$ jelölést. Ekkor X integrálgörbéit a következő alakú görbék szolgáltatják:

$$\begin{aligned}
z(t) &= -\frac{k}{\alpha}\frac{c\,\mathrm{ch}\,kt - \mathrm{sh}\,kt}{c\,\mathrm{sh}\,kt - \mathrm{ch}\,kt} - \frac{\beta}{2\alpha}, && \text{ha } \frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma > 0;\\
z(t) &= -\frac{k}{\alpha}\frac{c\cos kt + \sin kt}{c\sin kt - \cos kt} - \frac{\beta}{2\alpha}, && \text{ha } \frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma < 0;\\
z(t) &= -\frac{1}{\alpha t + c} - \frac{\beta}{2\alpha}, && \text{ha } \frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma = 0;
\end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{C}$, és $\operatorname{Im} c > 0$. Ezek a görbék nem geodetikusok. Ez nem is meglepő, hiszen ha a hiperbolikus síknak volna triviálistól különböző transzlációja, akkor konstruálni tudnánk rajta egy olyan geodetikus négyszöget, amelynek a belső szögösszege 2π, ami ellentmondana a Gauss–Bonnet-tételnek (lásd az 1. ábrát).

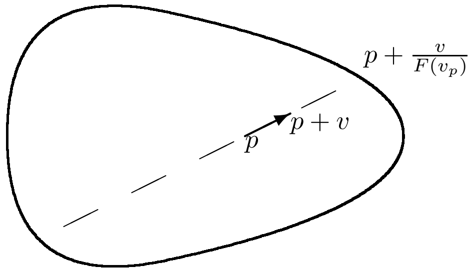


1. ábra. A hiperbolikus síkon nincsenek transzlációk

Legyen (M, α) Riemann-sokaság, és β olyan 1-forma M-en, hogy a vele metrikusan ekvivalens $\beta^\sharp$ vektormezőre $\|\beta^\sharp\| < 1$ teljesül. Ekkor – jól ismert módon – az α Riemann-metrika által származtatott F_α Finsler-féle alapfüggvény β-val való „perturbálásával" egy valódi F Finsler-struktúrát kapunk, és ilyenkor (M, F)-et *Randers-sokaság*nak nevezzük.

Macumoto [12] dolgozatában bebizonyította, hogy $\beta^\sharp$ akkor és csak akkor Killing-mezője a Randers-sokaságnak, ha Killing-mezője az eredeti (M, α) Riemann-sokaságnak is. Az értekezésben új bizonyítást adtunk ezen feltétel elegendő voltára:

6.9. Állítás. *Legyen (M, α) Riemann-sokaság és X az (M, α)-nak olyan Killing-vektormezője, amelyre $\|X\| < 1$ teljesül. Legyen továbbá $\beta := X^\flat$. Ekkor X az (M, α) β-val való perturbálásával keletkező Randers-sokaságnak is Killing-vektormezője.*



2. ábra. Funk-metrika az Ω egységgömbön

Tegyük fel, hogy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Finsler – Minkowski-norma, és tekintsük az $\Omega := \varphi^{-1}\,[0,1[$ egységgömböt. Jelölje pr_1 és pr_2 a $T\Omega$ természetes projekcióját Ω-ra, ill. $\mathbb{R}^n$-re. Az Ω fölött egyértelműen meghatároz egy F Finsler-féle alapfüggvényt az alábbi összefüggés:

$$\varphi \circ \left(\mathrm{pr}_1 + \frac{\mathrm{pr}_2}{F}\right) = 1 \quad \overset{\circ}{T}\Omega \text{ fölött.}$$

Az F által meghatározott Finsler-struktúrát hagyományosan az Ω-n adott *Funk-metrikának* nevezzük (2. ábra). A következő állítás ennek a Killing-vektormezőit jellemzi.

6.10. Állítás. *Egy Ω-n adott X vektormező akkor és csak akkor Killing-vektormező, ha minden olyan $p \in \Omega$ pont és $v \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén, amelyekre $p + v \in \partial\Omega$ teljesül, az $X(p) + D_vX(p)$ vektor párhuzamos $\partial\Omega$-nak a $p + v$ pontbeli érintő-hipersíkjával.*

1 Introduction

The two kinds of differential geometric structures in the title of the thesis are both generalizations of Finsler structures. The basic idea of Finsler geometry may be found already in Riemann's famous Habilitationsvortrag, where he suggested the study of geometric spaces where 'the metric depends also on the direction'. It was Paul Finsler who started the systematic study of these spaces in 1918 in his dissertation [8], most probably independently of Riemann's talk and motivated by completely different ideas. In our approach, a Finsler manifold will be a special case of a manifold endowed with a generalized metric. The details are described in section 5.1 of the thesis; see also section 4 of the present comprised thesis.

The main domains of differential geometry can be characterized by certain objects specified on a differentiable manifold. A diffeomorphism between two differentiable manifolds completely 'carries' the differentiable structure from the first one to the second. Therefore, given any differential geometric object or structure on the first manifold, we may construct a corresponding object of the same type on the second one with the help of the diffeomorphism. Hence, given a manifold endowed with a structure, it is a meaningful question to ask whether a diffeomorphism of our manifold onto itself preserves the structure or not. If it does, it is said to be a (global) *symmetry*. A certain branch of differential geometry may be regarded as the theory of the invariants of these symmetries. In the case of a diffeomorphism between two open subsets of the manifold we speak of a *local symmetry*. The flow of a vector field on a manifold consists of the integral curves of the vector field as a first order ordinary differential equation. (We presented a precise definition of flows in section 2.3. of the thesis.) With a fixed value of the parameter, a flow yields a diffeomorphism between two open submanifolds. If it is a local symmetry, the vector field is a *geometric vector field* or an *infinitesimal symmetry.*

2 Notations

In the thesis we work on an n-dimensional connected manifold M. If $\widetilde{TM} \subset TM$ is an open set such that $\tau\left(\widetilde{TM}\right) = M$, then the restriction of the tangent bundle projection τ to $\widetilde{TM}$ is denoted by π. The pull-back bundle of τ by π is $\pi^*\tau$. The $C^\infty\left(\widetilde{TM}\right)$-module of its sections (also called *vector fields along* π) is denoted by $\mathfrak{X}(\pi)$. The most important special case is $\widetilde{TM} = \overset{\circ}{T}M$, the open subset of non-zero tangent vectors to the manifold M. The restriction of τ to $\overset{\circ}{T}M$ is $\overset{\circ}{\tau}$.

We have the following short exact sequenc on $\widetilde{TM}$:

$$0 \to \pi^*TM \xrightarrow{\mathbf{i}} T\widetilde{TM} \xrightarrow{\mathbf{j}} \pi^*TM \to 0.$$

The vertical and the complete lift of a smooth function f on M are denoted by f^v and f^c, respectively. The vertical lift of a vector field X on M is $X^v = \mathbf{i}\hat{X}$, and its complete lift is X^c. The *canonical section of* $\pi^*\tau$, the *Liouville vector field* on $\widetilde{TM}$ and the *vertical endomorphism* are given by

$$\delta(v) := (v, v) \quad \left(v \in \widetilde{TM}\right), \quad C := \mathbf{i}\delta \quad \text{and} \quad J := \mathbf{i} \circ \mathbf{j},$$

respectively. If f is a smooth function on $\widetilde{TM}$, $d^v f$ is defined by the formula

$$(d^v f)\left(\tilde{X}\right) := \left(\mathbf{i}\tilde{X}\right) f \quad \left(\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\pi)\right).$$

By an *Ehresmann connection* we mean a split short exact sequence:

$$0 \rightleftharpoons \pi^* TM \underset{\mathcal{V}}{\overset{\mathbf{i}}{\rightleftharpoons}} T\widetilde{TM} \underset{\mathcal{H}}{\overset{\mathbf{j}}{\rightleftharpoons}} \pi^* TM \rightleftharpoons 0.$$

The *horizontal* and *vertical projectors*: $\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j}$ and $\mathbf{v} := 1 - \mathbf{h}$.

A *covariant derivative operator* in $\pi^*\tau$ is a map D : $\mathfrak{X}\left(\widetilde{TM}\right) \times \mathfrak{X}(\pi) \to \mathfrak{X}(\pi)$ satisfying Koszul's familiar axioms. Its *deflection* μ is the covariant differential of δ. The vertical deflection μ^v is, roughly speaking, the restriction of μ to the vertical subbundle. The covariant derivative D is said to be *regular* if μ^v has rank n at every point of $\widetilde{TM}$. We say that an Ehresmann connection is *attached to* D if $\mathfrak{X}^h\left(\widetilde{TM}\right) = \operatorname{Ker}\mu$.

We denote by ∇ Berwald's covariant derivative arising from an Ehresmann connection. The horizontal and mixed curvatures of an arbitrary covariant derivative are $\mathbf{R}$ and $\mathbf{P}$, respectively, whereas those of Berwald's derivative are $\overset{\circ}{\mathbf{R}}$ and $\overset{\circ}{\mathbf{P}}$.

The Lie derivative of a vector field $\tilde{Y}$ along π with respect to $X \in \mathfrak{X}(M)$ may be given by $\mathcal{L}_X \tilde{Y} = \mathbf{i}^{-1}\left[X^c, \mathbf{i}\tilde{Y}\right]$.

A *Finsler – Minkowski norm* on a finite-dimensional real vector space V is a function $\varphi : V \to \mathbb{R}$ that satisfies the following axioms:

(1) $\varphi(v) > 0$ if $v \neq 0$;

(2) if $\lambda > 0$, then $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ for all $v \in V$;

(3) φ is smooth over $V \setminus \{0\}$;

(4) if $E := \frac{1}{2}\varphi^2$, then for all $p \in V \setminus \{0\}$ the symmetric bilinear form $g_p := E''(p)$ is non-degenerate.

Proposition 2.1 *The metric tensor g is positive definite, thus $(V \setminus \{0\}, g)$ is a Riemannian manifold.*

3 Affine and projective vector fields

In the case of a Finsler manifold there is a natural second-order vector field on the tangent manifold whose coefficients are positively homogeneous functions of degree 2. It is a natural geometric problem to study vector fields of this type independently of Finsler structures. These vector fields are nowadays called *sprays*. A spray is uniquely determined by its parametrized integral curves, therefore the geometry of sprays is called *the geometry of paths* in classical literature.

Spray geometry had its first golden age in the 1930's. Several outstanding mathematicians worked in this field, e.g., L. Berwald, É. Cartan, J. Douglas, T. Y. Thomas and J. H. C. Whitehead, among many others. In the 1960's, in relative isolation, A. Rapcsák also obtained important results in spray geometry ([19], see also [26]). Its renaissance began in the 1970's, partly by the geometric foundation of Lagrangian mechanics [3, 4] and partly by the discovery of the fundamental role of sprays in Finsler geometry [7, 9, 10]. Finsler geometry and its generalizations gave a new impulse to these studies in the late 1990's, mainly due to the activity of Zhongmin Shen [22] and the development of Grifone's theory [25, 26], but also through other lines of research [17, 21].

In this renaissance of spray theory, however, an important field has been rather neglected: the modern foundation of the theory of transformations of spray manifolds, mainly the infinitesimal ones, although Youssef's paper [33] and the above mentioned papers [25, 26] represent a definite progress towards the projective theory of spray manifolds. In spite of the fact that several authors have dealt with projective transformations of Finsler manifolds [1, 13, 14, 29], there is hardly any literature available about infinitesimal affine and projective transformations of spray manifolds, save Yano's classical book [32], which is, however, rather laborious to read for the present-day reader. Chapter 3 of the thesis is intended to take the first few steps to cover this important field. We note that two important works on projective connections [5, 6] became available roughly simultaneously with the writing of the thesis.

Apart from the general theoretical motivations outlined above, we find these problems interesting also from the point of view of physical interpretation. Since a spray is a vector field on the tangent manifold, its integral curves run in the tangent manifold. Their projections onto the base manifold are called the *geodesics* of the spray. A diffeomorphism between two spray manifolds is said to be an *affine map* if it takes (parametrized) geodesic curves to geodesic curves. More generally, if it takes geodesics to pregeodesics, then it is called a *projective map*. Here, by a pregeodesic we mean a curve which can be reparametrized to be a geodesic by a strictly increasing parameter transformation. An affine (projective) vector field on a spray manifold is a vector field whose flow consists of local affine (projective) transformations. Affine vector fields are geometric vector fields of spray manifolds in the sense described in section 1. Projective vector fields become geometric vector fields in the same sense if we introduce the notion of projective equivalence of sprays. Roughly speaking, two sprays over the same base manifold are projectively equivalent if their geodesics are the same up to a strictly increasing parameter transformations. (The same idea is formulated in 3.3.1 of the thesis in a precise manner.) Then a projective vector field becomes an infinitesimal symmetry of the structure determined by the equivalence class of all sprays projectively equivalent to the given one.

In the geometric interpretation of time-independent classical mechanical systems the base manifold is the configuration space, which is the space of all possible positions of the objects in the mechanical system. The parameter of the paths has a very important physical meaning, namely, the time. In general relativity, the base manifold is the space-time, which is a 4-dimensional Lorentz manifold. Here, time is included in the structure of the base manifold, hence the parameter of the paths of point particles has no real physical relevance. Therefore, the group of transformations leaving the physical interpretation of paths invariant in classical mechanics is the group of affine transformations, whereas in general relativity it is the group of projective transformations.

Definition 3.1 *A vector field* $\xi : TM \to TTM$ *on* TM *of class* C^1*, smooth on* $\overset{\circ}{T}M$ *is said to be a* spray *over* M *if* $J\xi = C$ *and* ξ *is positively homogeneous of degree 2, i.e.,* $[C, \xi] = \xi$*. A smooth curve* $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ *is called a* geodesic *of* ξ *if* $\ddot{c} = \xi \circ \dot{c}$*.*

The Ehresmann connection obtained from the spray ξ according to Crampin and Grifone's construction is used in the results summarized in this section.

A diffeomorphism between two open subsets of M is said to be a *local affine transformation* if its tangent map leaves ξ invariant. If X is a vector field on M whose flow consists of local affine transformations, then X is called an *affine vector field* for ξ. The affine vector fields are characterized by the following

Theorem 3.2 *Let* X *be a vector field on* M*. The following statements are equivalent:*

(1) X *is an affine vector field;*

(2) $[X^c, \xi] = 0$*;*

(3) $\mathcal{L}_X \nabla = 0$*;*

(4) $\mathcal{L}_{X^c} \mathbf{h} = 0$*;*

(5) $\left(\nabla^h \nabla^h \hat{X}\right)\left(\tilde{Y}, \tilde{Z}\right) = -\overset{\circ}{\mathbf{R}}\left(\hat{X}, \tilde{Y}\right)\tilde{Z} + \overset{\circ}{\mathbf{P}}\left(\mathcal{V}X^c, \tilde{Y}\right)\tilde{Z}$ *for any* $\tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{\tau})$ (generalized Killing equation).

Yano's covariant derivative D induced by ξ in $\overset{\circ}{\tau}{}^*\tau$ is defined by the formula

$$D_\eta \tilde{X} := \nabla_\eta \tilde{X} + \frac{1}{n+1} \operatorname{tr} \overset{\circ}{\mathbf{P}}\left(\mathbf{j}\eta, \tilde{X}\right) \cdot \delta.$$

As we have already said, to sprays are *projectively equivalent* if their geodesics differ only in an increasing parameter transformation. A diffeomorphism between two open subsets of the manifold M is a *local projective transformation* if its tangent map takes ξ to a spray projectively equivalent to it. If the flow of $X \in \mathfrak{X}(M)$ consists of local projective transformations, then X is a *projective vector field*. We have characterized projective vector fields as follows:

Theorem 3.3 *If $X \in \mathfrak{X}(M)$, the following statements are equivalent:*

(1) *X is a projective vector field;*

(2) *there is a continuous function F on TM, smooth on $\overset{\circ}{T}M$, such that $[X^c, \xi] = FC$;*

(3) *there is a smooth function F on $\overset{\circ}{T}M$, positively homogeneous of degree 1, such that*

$$(\mathcal{L}_{X^c}\mathbf{h})(\eta) = \frac{1}{2}(FJ\eta + (J\eta)F \cdot C), \ \ \eta \in \mathfrak{X}\left(\overset{\circ}{T}M\right);$$

(4) *there is a smooth function F on $\overset{\circ}{T}M$ such that*

$$(\mathcal{L}_X D)\left(\eta, \tilde{Z}\right) = -\frac{1}{2}\left((J\eta)F \cdot \tilde{Z} + \left(\mathbf{i}\tilde{Z}\right) F \cdot \mathbf{j}\eta\right).$$

4 Generalized metrics

Working on a Finsler manifold, the Hessian of the Finsler energy is a symmetric, non-degenerate $(0, 2)$ tensor in $\overset{\circ}{\tau}{}^*\tau$. This tensor is usually known as the Finsler (or Riemann – Finsler) metric of the Finsler manifold. By a generalized metric we shall mean a straightforward generalization of this notion: a symmetric non-degenerate $(0, 2)$ tensor in $\pi^*\tau$ which does not necessarily arise from a Finsler structure. (For technical reasons, we shall not assume that this metric tensor is defined on the whole tangent manifold, but only on some open subset of it.)

The study of metrics of this type dates back to the 1950's. The Debrecen school contributed to this theory with a pioneering work [18], which inspired further studies [30]. Later, the Romanian differential geometric school achieved important results on generalized metrics [2, 16, 17]. A new partial classification for them has been published recently [15]. Some of their characteristic properties in which they differ from Finsler structures were already pointed out in [18], e.g., the fact that their autoparallel and extremal curves do not necessarily coincide, even with a natural choice of a covariant derivative. These metrics may be interesting not only from a geometrical, but also from a physical viewpoint, since, as noticed by J. I. Horváth and A. Moór [11], they furnish a natural geometric description of the so-called bilocal field theories introduced by Yukawa in the 1940's. Yukawa's main goal was to explain mass quantization and to eliminate certain types of divergences in quantum field theory. For a review on multi-local field theories, which were developed as generalizations of bilocal field theories, we refer to [20]. In this thesis, however, we restrict ourselves to the geometric aspects of generalized metrics.

Thus, let g be a symmetric and non-degenerate tensor of type (0,2) in the bundle $\pi^*\tau$. Then g is said to be a *(generalized) metric*. Using non-degeneracy, the *first Cartan tensor* $\mathcal{C}$ and the *lowered first Cartan tensor* $\mathcal{C}_\flat$ of a generalized metric g are defined by the following formulae:

$$g\left(\mathcal{C}\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right),\tilde{Z}\right) := \mathcal{C}_\flat\left(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\right) := \left(\nabla^v_{\tilde{X}} g\right)\left(\tilde{Y},\tilde{Z}\right).$$

The one-form $\vartheta_g : \tilde{X} \mapsto g\left(\tilde{X},\delta\right)$ along π is called the *Lagrange one-form* associated to g. The *absolute energy* of g is $E := \frac{1}{2}g(\delta,\delta)$.

A metric g along π is said to be *variational* if its first Cartan tensor $\mathcal{C}$ is symmetric, *weakly variational* if $\mathcal{C}_\flat\left(\tilde{X},\tilde{Y},\delta\right) = \mathcal{C}_\flat\left(\tilde{Y},\tilde{X},\delta\right)$ for every $\tilde{X},\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\pi)$, *normal* if $\mathcal{C}\left(\tilde{X},\delta\right) = 0$ for every $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tau)$, and *weakly normal* if $\mathcal{C}_\flat\left(\tilde{X},\delta,\delta\right) = 0$ for every $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\pi)$. The metric is *Miron regular* [16] if the tensor $A : \tilde{X} \mapsto \tilde{X} + \mathcal{C}\left(\tilde{X},\delta\right)$ has maximal rank at every point of $\widetilde{TM}$. If $\gamma := \nabla^v\nabla^v E$ is also non-degenerate, g is called *energy-regular*. An energy-regular and homogeneous ($\nabla^v_\delta g = 0$) metric is also mentioned as a *Moór – Vanstone metric*.

The following observations play an important role in our investigations (their proof may be found in [15]). If $\widetilde{T_pM}$ is simply connected for every $p \in M$, then g is variational if and only if there is a smooth function L on $\widetilde{TM}$ whose Hessian is g, more precisely, $g = \nabla^v \nabla^v L$. In this case, we call L a *Lagrangian*. If $\widetilde{T_pM}$ is simply connected for every $p \in M$, then g is weakly variational if and only if there is a smooth function L on $\widetilde{TM}$ such that $\vartheta_g = d^v L$. If $\widetilde{TM} = \overset{\circ}{T}M$, and g is weakly normal and Miron regular, then E is a possibly indefinite Finsler energy (in the usual sense). Furthermore, $\vartheta_g = d^v E$. Finally, if $\widetilde{TM} = \overset{\circ}{T}M$, and g is normal, then g is itself a Finsler metric.

5 Natural metric covariant derivatives

In 1987, Makoto Matsumoto wrote the following: 'Through the author's several experiences the author became convinced that there should exist the *best* Finsler connection for every theory of Finsler spaces.' In the thesis we tried to extend Matsumoto's principle to the quite strange world of generalized metrics, and to study the following heuristically formulated problem: find the 'best' or, at least, a 'good' metric derivative for the different special classes of generalized metrics.

We say, informally, that a metric derivative is 'good' if there is an Ehresmann connection attached to it determined by the metric alone. In the case of a Moór – Vanstone metric, we have a natural Ehresmann connection: the Barthel connection $\mathcal{H}_E$ determined by the (Finslerian) absolute energy. On the other hand, given an Ehresmann connection on $\overset{\circ}{T}M$, there is a unique metric covariant derivative in $\overset{\circ}{\tau}{}^*\tau$ whose vertical torsion vanishes and whose horizontal torsion coincides with the torsion of the given Ehresmann connection. However, the metric derivative arising from $\mathcal{H}_E$ is not 'good' in the sense above. Thus, to obtain a 'good' metric derivative, we have to look for a more suitable Ehresmann connection than $\mathcal{H}_E$.

Theorem 5.1 *Let g be a weakly normal Moór – Vanstone metric on $\overset{\circ}{T}M$, ξ the canonical spray belonging to the Finsler energy E, $\mathcal{H}_E$ the Barthel connection, and $\overset{E}{\nabla}$ Berwald's derivative arising from $\mathcal{H}_E$. Let $P \in \mathcal{T}_1^1(\overset{\circ}{\tau})$ be an arbitrary tensor. Consider the Ehresmann connection $\mathcal{H} := \mathcal{H}_E - \mathbf{i} \circ P$ on $\overset{\circ}{T}M$ and the unique metric covariant derivative D along $\overset{\circ}{\tau}$ whose vertical torsion vanishes, and whose horizontal torsion coincides with the torsion of $\mathcal{H}$. The horizontal map $\mathcal{H}$ satisfies the conditions*

(i) $\mathcal{H}\delta = \xi$,

(ii) *$\mathcal{H}$ is conservative with respect to E,*

(iii) *$\mathcal{H}$ is attached to D*

if and only if

$$P\tilde{X} = -\frac{1}{2}\left(i_{\tilde{X}}\overset{E}{\nabla}_{\xi} g\right)^{\sharp} + P_s\tilde{X} + P_a\tilde{X} \quad \left(\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{\tau})\right),$$

where $P_s, P_a \in \mathcal{T}_1^1(\overset{\circ}{\tau})$ are tensors such that P_s is self-adjoint (with respect to g) and homogeneous of degree 0, P_a is skew-symmetric (with respect to g), and the image of both P_s and P_a is contained in the orthogonal complement of the canonical section δ.

Theorem 5.2 *Let g be a positive definite weakly normal metric along $\overset{\circ}{\tau}$. Suppose that the tensor $A : \tilde{X} \mapsto \tilde{X} + \mathcal{C}\left(\tilde{X}, \delta\right)$ has the following property: for a fixed $v \in \overset{\circ}{T}M$, the self-adjoint linear transformation A_v has no (not necessarily different) eigenvalues $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$ such that $\lambda_i + \lambda_j = 0$. Then there is a unique covariant derivative operator $D : \mathfrak{X}\left(\overset{\circ}{T}M\right) \times \mathfrak{X}(\overset{\circ}{\tau}) \to \mathfrak{X}(\overset{\circ}{\tau})$ and a unique Ehresmann connection $\mathcal{H}$ on $\overset{\circ}{T}M$ such that*

(1) *D is metric,*

(2) *its vertical torsion vanishes,*

(3) *its horizontal torsion with respect to $\mathcal{H}$ vanishes,*

(4) *the horizontal subbundle is contained in the kernel of the deflection of D.*

In particular, if D is regular, then $\mathcal{H}$ is attached to it.

In the special case of a Finsler manifold, this theorem gives an axiomatic characterization of Cartan's covariant derivative:

Proposition 5.3 *If $\mathcal{H}$ is an Ehresmann connection on a Finsler manifold and $D : \mathfrak{X}\left(\overset{\circ}{T}M\right) \times \mathfrak{X}\left(\overset{\circ}{\tau}\right) \to \mathfrak{X}\left(\overset{\circ}{\tau}\right)$ is a covariant derivative such that*

(1) *D is metric,*

(2) *its vertical torsion vanishes,*

(3) *its horizontal torsion with respect to $\mathcal{H}$ vanishes,*

(4) *$\mathcal{H}$ is attached to it,*

then D is Cartan's covariant derivative, and $\mathcal{H}$ is the Barthel connection of the Finsler manifold.

6 Killing vector fields

The geometric vector fields or infinitesimal symmetries of a manifold endowed with a generalized metric are the so-called Killing vector fields. In general relativity, they express the infinitesimal symmetries of space-time. Therefore, it is an important problem to determine the Killing vector fields of different classes of generalized metrics.

Let g be a generalized metric along π. A diffeomorphism between two open subsets of M is a *local isometry* of g if its tangent map leaves g invariant. A vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ is said to be an *infinitesimal isometry* of g if its flow consists of local isometries. A vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ is a *Killing vector field* if $\mathcal{L}_X g = 0$.

Proposition 6.1 *Let $X \in \mathfrak{X}(M)$ be a vector field. Then X is an infinitesimal isometry of g if and only if it is a Killing vector field.*

In Riemannian geometry, the covariant differential of a Killing field is skew-symmetric. This result is generalized as follows:

Proposition 6.2 *Suppose that an Ehresmann connection is specified on $\widetilde{TM}$ whose torsion vanishes, and D is the unique metric covariant derivative operator whose vertical and horizontal torsions vanish. Let X be a Killing vector field on M. Then*

$$g\left(D_{\mathcal{H}\tilde{Y}}\hat{X},\tilde{Z}\right)+g\left(\tilde{Y},D_{\mathcal{H}\tilde{Z}}\hat{X}\right)+g\left(\mathcal{C}\left(\mathcal{V}X^c,\tilde{Y}\right),\tilde{Z}\right)=0$$

for any $\tilde{Y},\tilde{Z}\in\mathfrak{X}(\pi)$.

For any metric g, we introduce the (1,1) tensor $\overset{*}{\mathcal{C}}$ along π by the prescription $\overset{*}{\mathcal{C}}:\tilde{X}\mapsto\mathcal{C}\left(\tilde{X},\delta\right)$, where $\mathcal{C}$ is the first Cartan tensor of the metric.

Theorem 6.3 *Suppose that $\widetilde{T_pM}$ is connected for all $p\in M$. Let g be a weakly variatonal and Miron regular metric on $\widetilde{TM}$ with $\vartheta_g=d^vL$. A vector field X on M is a Killing vector field for g if and only if the function X^cL is a vertical lift and $\mathcal{L}_X\overset{*}{\mathcal{C}}=0$.*

The metric g does not determine L uniquely, since a vertical lift can be added to L without changing d^vL. Moreover, we have

Corollary 6.4 *With conditions similar to those in the theorem, if g is defined on the whole TM, and X is a Killing vector field on M, L can be chosen such that $X^cL=0$.*

Theorem 6.5 *Let g be a variational metric defined on the whole TM. A vector field X on M is a Killing vector field if and only if there is a Lagrangian L for g such that $X^cL=0$.*

Corollary 6.6 *If (M, g) is a Finsler manifold, then a vector field X on M is a Killing vector field of g if and only if $X^c E = 0$.*

In a Euclidean space, translations are distinguished from other types of isometries by the property that their orbits are straight lines. This property is used to generalize the notion of translations to more general classes of metrics: if g is weakly normal and Miron regular, then a Killing vector field X of g is called a *translation* if every integral curve of X is a geodesic of the Finsler manifold (M, E).

Proposition 6.7 *If $X \in \mathfrak{X}(M)$ is a Killing vector field, and $c : I \to M$ is a geodesic of E, then the function*

$$t \in I \mapsto g_{\dot{c}(t)}(X(c(t)), \dot{c}(t))$$

is constant.

The next proposition gives a characterization of translations.

Proposition 6.8 *Let X be a Killing vector field of g. Then X is a translation if and only if the function $p \in M \mapsto E(X_p)$ is constant.*

There is a broad class of (even Riemannian) metrics that have no non-trivial translations at all. For example, the hyperbolic plane does not have any. The Killing fields of Poincaré's upper half plane model have the form

$$X = \left[\alpha\left((u^1)^2 - (u^2)^2\right) + \beta u^1 + \gamma\right] \frac{\partial}{\partial u^1} + \left(2\alpha u^1 + \beta\right) u^2 \frac{\partial}{\partial u^2}$$

with some $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. The upper half-plane coincides with the set of complex numbers with positive imaginary part. Suppose that $\alpha \neq 0$, and introduce the notation $k := \sqrt{|\beta^2/4 - \alpha\gamma|}$. Then the integral curves of X are given by

$$
\begin{aligned}
z(t) &= -\frac{k}{\alpha}\frac{c\cosh kt - \sinh kt}{c\sinh kt - \cosh kt} - \frac{\beta}{2\alpha} && \text{if } \frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma > 0, \\
z(t) &= -\frac{k}{\alpha}\frac{c\cos kt + \sin kt}{c\sin kt - \cos kt} - \frac{\beta}{2\alpha} && \text{if } \frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma < 0, \\
z(t) &= -\frac{1}{\alpha t + c} - \frac{\beta}{2\alpha} && \text{if } \frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma = 0
\end{aligned}
$$

with $c \in \mathbb{C}$ such that $\operatorname{Im} c > 0$, which are no geodesics. That is, however, not surprising, since, if the hyperbolic plane had a non-trivial translation, a geodesic quadrangle with angle sum 2π could be constructed, in contradiction with the Gauss – Bonnet theorem (cf. Figure 1).

Let (M, α) be a Riemannian manifold and β a one-form on M such that the vector field $\beta^\sharp$ metrically equivalent to it satisfies $\|\beta^\sharp\| < 1$. As it is well-known, with the 'perturbation' by β of the Finslerian fundamental function F_α arising from the Riemannian metric α, we obtain a genuine Finsler structure F. Then (M, F) is called a *Randers manifold*.

In his paper [12], M. Matsumoto proved that $\beta^\sharp$ is a Killing vector field of the Randers manifold if and only if it is a Killing vector field of the original Riemannian manifold (M, α) as well. In the thesis we gave a new proof of the sufficiency of this condition:

Proposition 6.9 *Suppose that (M, α) is a Riemannian man-*

ifold, $X \in \mathfrak{X}(M)$ is a Killing vector field of (M, α) such that $\|X\| < 1$, and $\beta := X^\flat$. Then X is a Killing vector field of the Randers manifold arising from (M, α) by the perturbation with β.

Suppose that $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a Finsler – Minkowski norm, and consider the unit ball $\Omega := \varphi^{-1}\,[0, 1[$. Let us denote by pr_1 and pr_2 the natural projection of $T\Omega$ onto Ω and $\mathbb{R}^n$, respectively. A unique Finslerian fundamental function F over Ω is determined by the relation

$$\varphi \circ \left(\mathrm{pr}_1 + \frac{\mathrm{pr}_2}{F}\right) = 1 \quad \text{on } \overset{\circ}{T}\Omega.$$

The Finsler structure determined by F is traditionally called the *Funk metric* on Ω (cf. Figure 2). The following proposition gives a description of its Killing vector fields:

Proposition 6.10 *For a vector field X on Ω the following conditions are equivalent:*

(1) *X is a Killing vector field;*

(2) *for every point $p \in \Omega$ and vector $v \in \mathbb{R}^n$ such that $p + v \in \partial\Omega$, the vector $X(p) + D_v X(p)$ is parallel to the tangent hyperplane of $\partial\Omega$ in $p + v$.*

Referált kiadványokban megjelent és közlésre elfogadott dolgozatok

(1) R. L. Lovas, Lie derivatives and Killing vector fields in Finsler geometry, *Proc. Non-Euclidean Geometry in Modern Physics* (2002) 35–50.

(2) R. L. Lovas, Affine and projective vector fields on spray manifolds, *Periodica Mathematica Hungarica* **48** (2004) 165–179.

(3) R. L. Lovas, On the Killing vector fields of generalized metrics, *SUT Journal of Mathematics* Vol. 40, No. 2 (2004) 133–156.

(4) R. L. Lovas, Infinitesimal isometries of generalized metrics, Вестник Нижегородского университета, megjelenés előtt.

Egyéb helyen megjelenő dolgozat

(1) J. Szilasi and R. L. Lovas, Good metric derivatives for generalized metrics, *Proc. 4th Symposium on Finsler Geometry* (2005), megjelenés előtt.

Előadások

(1) Lie derivatives and Killing vector fields in Finsler geometry, Non-Euclidean Geometry in Modern Physics, Maros-

vásárhely (Tîrgu Mureş, Románia), 2002. július 3–6.

(2) Affine and projective vector fields on spray manifolds, workshop on Finsler Geometry and its Applications, Debrecen, 2003. augusztus 11–15.

(3) The affine and projective vector fields of Funk metrics, Olomouc (Csehország), 2003. október 16–18.

(4) Infinitesimal isometries of generalized metrics, Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics, Nyizsnyij-Novgorod (Oroszország), 2004. szeptember 7–11.

(5) Metrikus kovariáns deriválások általánosított Finsler-sokaságokon, geometriai tanszéki szeminárium, Debrecen, 2005. március 4.

Hivatkozások

[1] H. Akbar-Zadeh, Champs de vecteurs projectifs sur le fibré unitaire, *J. Math. pures et appl.* **65** (1986) 47–79.

[2] M. Anastasiei, A class of generalized Lagrange spaces, *Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Al. I. Cuza" Iaşi* **42** (1996) 259–264.

[3] M. Crampin, On the differential geometry of the Euler−Lagrange equations, and the inverse problem of Lagrangian dynamics, *J. Phys. A* **14** (1981) 2567–2575.

[4] M. Crampin, Tangent bundle geometry for Lagrangian dynamics, *J. Phys. A* **16** (1983) 3755–3772.

[5] M. Crampin and D. J. Saunders, On projective connections: the general case, http://maphyast.ugent.be, preprint.

[6] M. Crampin and D. J. Saunders, On projective connections: the affine case, http://maphyast.ugent.be, preprint.

[7] P. Dazord, Propriétés globales des géodésiques des Espaces de Finsler, Thèse (575), *Publ. Dep. Math*, Lyon (1969).

[8] P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Dissertation, Göttingen, 1918 (Birkhäuser Verlag, Basel, 1951).

[9] J. Grifone, Structure presque tangente et connexions I., *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **22** (1972) 1, 287–334.

[10] J. Grifone, Structure presque tangente et connexions II., *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **22** (1972) 3, 291–338.

[11] J. I. Horváth und A. Moór, Entwicklung einer Feldtheorie begründet auf einen allgemeinen metrischen Linienelementraum, *Indagationes Math.* **17** (1955) 421–429, 581–587.

[12] M. Matsumoto, On C-reducible Finsler spaces, *Tensor* (N.S.) **24** (1972) 29–37.

[13] M. Matsumoto, Theory of extended point transformations of Finsler spaces I., *Tensor* (N.S.) **45** (1987) 109–115.

[14] M. Matsumoto, Theory of extended point transformations of Finsler spaces II., *Tensor* (N.S.) **47** (1988) 203–214.

[15] T. Mestdag, J. Szilasi and V. Tóth, On the geometry of generalized metrics, *Publ. Math. Debrecen* **62/3–4** (2003) 511–545.

[16] R. Miron, Metrical Finsler structures and metrical Finsler connections, *J. Math. Kyōto Univ.* **23** (2) (1983) 219–224.

[17] R. Miron and M. Anastasiei, The geometry of Lagrange spaces: Theory and applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[18] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956) 85–120.

[19] A. Rapcsák, Über die Metrisierbarkeit affinzusammenhängender Bahnräume, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (IV) **57** (1962) 233–238.

[20] J. Rayski, Search for generalized, quantizable dynamical models, *Reports on Mat. Phys.* **25** (3) (1988) 255–274.

[21] L. del Riego and P. E. Parker, Generalized Sprays and Nonlinear Connections, arXiv:math.DG/0304067 v1.

[22] Z. Shen, Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[23] J. Szilasi, A Setting for Spray and Finsler Geometry, in: Handbook of Finsler Geometry Vol. 2, ed. P. L. Antonelli, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[24] J. Szilasi and Á. Győry, A generalization of a theorem of H. Weyl, *Reports on Math. Phys.* **53** (2) (2004) 261–273.

[25] J. Szilasi and Sz. Vattamány, On the projective geometry of sprays, *Differential Geometry and its Applications* **13** (2000) 95–118.

[26] J. Szilasi and Sz. Vattamány, On the Finsler-metrizabilities of spray manifolds, *Periodica Mathematica Hungarica* **44** (2002) 81–100.

[27] J. Szilasi and Cs. Vincze, On conformal equivalence of Riemann–Finsler metrics, *Publ. Math. Debrecen* **52/1–2** (1998) 167–185.

[28] J. Szilasi and Cs. Vincze, A new look at Finsler connections and special Finsler manifolds, *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis* **16** (2000) 33–63, http://www.emis.de/journals.

[29] A. A. Tamim, Infinitesimal transformations in Finsler geometry, *Afrika Math. J.* **3** (1990).

[30] J. R. Vanstone, A generalization of Finsler geometry, *Canad. J. Math.* **14** (1962) 87–112.

[31] Cs. Vincze, On the curvature of the indicatrix surface in three-dimensional Minkowski spaces, *Periodica Mathematica Hungarica* **48** (2004) 69–76.

[32] K. Yano, The theory of Lie derivatives and its applications, North-Holland, Amsterdam, 1957.

[33] Nabil L. Youssef, Semi-projective changes, *Tensor (N.S.)* **55** (1994) 131–141.