



**KISISKOLÁSOK
TÉRBELI TÁJÉKOZÓDÓ KÉPESSÉGÉNEK
FEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEI**

**THE DEVELOPMENT POSSIBILITIES OF
SPATIAL ORIENTATION COMPETENCE IN
PRIMARY SCHOOL**

PhD értekezés tézisei

Herendiné Kónya Eszter

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2007

A dolgozat a térbeli tájékozódásról, a tájékozódó képesség fejlesztéséről szól. A fejlesztésre nagyon sok lehetőség kínálkozik az élet számtalan területén, mi a matematikatanítás keretein belül vizsgáljuk ezeket. Megfigyeléseink, elemzéseink az általános iskola alsó tagozatos tanulóit érintetik.

A tájékozódó képesség kulcsát az irányfogalom jelenti. Ez egy topológiai, geometriai jellegű fogalom, mely egyszerűen megjeleníthető az emberi agyban, megértéséhez nincs feltétlenül szükség matematikai értelemben vett fogalmi precizitásra, éppen ezért nehéz tanítási anyagként kezelni.

A tanulási zavarokkal, iránytévesztéssel küzdő gyerekek növekvő száma mégis azt jelzi, hogy nem elégedhetünk meg azokkal a tapasztalatokkal, melyeket a tanulók a mindennapi életben spontán módon szereznek. Ezért tartjuk fontosnak, hogy a tanítás, taníthatóság kérdéseivel foglalkozzunk.

Kutatási kérdések:

1. Milyen fogalmi, tevékenységi tartalmak tartoznak a térbeli tájékozódás témakörébe?
2. Milyen meglévő ismeretekkel rendelkeznek az egyes évfolyamok tanulói?
3. Milyen tipikus gondolkodási hibákat vétene?
4. Melyek azok a tevékenységi formák, amelyekkel bővíthetjük meglévő ismereteiket, javíthatjuk a feltárt gondolkodási hibákat?
5. Hol a helye a meglévő tananyagstruktúrában ennek a témakörnek?

Hipotézisek:

2. A tanulók térbeli tájékozódó képességének fejlesztéséhez nem elegendők a hétköznapi életben, spontán módon szerzett tapasztalatok.
3. Az irányítással összefüggő problémák megoldását nehezíti, hogy a térbeli viszonyzavakat a hétköznapi életben gyakran használjuk következtlenül.
4. A térbeli tájékozódó képesség fejlesztésében az első lépést a megfelelően választott tárgyi tevékenységek jelentik. A tárgyi tevékenységekhez kötődően igen fontos a helyes verbális kifejezőmód elsajátítása.
5. A témakör szisztematikus és spirális tárgyalásmódja hozzájárul a térbeli tájékozódó képesség fejlesztéséhez.

Az **1. fejezetben** a kutatás elméleti hátterét ismertetjük.

A térszemlélet, ezen belül a térbeli tájékozódás fogalmának értelmezésében a Guilford-féle felosztásra támaszkodunk, azaz a térszemléletet két fő komponensre, a vizualizációra és a térbeli tájékozódásra bontjuk. A térbeli tájékozódáson az ún. Thurstone-féle $S(3)$ faktoron túl a térbeli relációk felismerésének, a térbeli észlelésnek, saját mozgásunk elképzelésének, valamint a mentális forgatás elvégzésének képességét értjük.

Témakörünk tananyaggá formálásának fő irányvonalait a fogalmakat keletkezésükben vizsgáló genetikai matematika didaktika elmélete ill. Freudenthal didaktikai fenomenológiája jelöli ki.

A tanítás kérdéseinek vizsgálatában egyaránt támaszkodunk a magyar komplex matematikatanítási kísérlet, a holland realiztikus matematikatanítás, valamint a német aktív-felfedeztető tanulási koncepció alapelveire.

Ezek a didaktikai elképzelések a matematika különböző területeinek egységes szemléletű tanítását, a tanulók önállóságának, a tapasztalatszerzésnek a fontosságát, a szociális kontextus szerepét hangsúlyozzák.

Az ún. kutatáson alapuló tantervfejlesztés (*research-based curriculum development*) fázisait tekintettük irányadónak a térbeli tájékozódás témakörének a meglévő tananyagstruktúrába történő beillesztéséhez. Tekintettel a kutatás körülményeire és lehetőségeire, a fő hangsúlyt egy hipotetikus tanulási trajektória megalkotására valamint az egyéni tesztekre s az osztálytermi kipróbálásra helyezzük. Az elsődleges visszatekintést és felülvizsgálatot követő további ciklusok és a tanterv szélesebb körű kipróbálása újabb kutatások témája lehet.

A **2. fejezet** a térbeli tájékozódás tanításának jelenlegi magyarországi helyzetét mutatja be a Nemzeti Alaptanterv, a különböző kerettantervek és a tankönyvek alapján.

Míg a NAT fontos szerepet szán témakörünk tanításának, s ezt nem elszigetelten az alsó tagozatra, hanem az első hat évfolyamra teszi, addig a legtöbb kerettantervben ez nem tükröződik. Jóval kisebb terjedelemben, helyenként következtetetlenül, ellentmondásosan jelenik meg a térbeli tájékozódás. A kerettantervek nem sugallják sem a szisztematikus, sem a spirális tárgyalásmódot.

A tankönyvcsaládok elemzése megerősíti azt a hipotézisünket, hogy az 1. évfolyam kivételével a témakör gyakorlatilag nem szerepel a tanítási anyagban, a fejlesztés jelenlegi iskolai gyakorlata kellően nem átgondolt, esetleges.

A **3. fejezetben** matematikai és matematikatörténeti szempontból tekintetjük át az irányítás fogalomkörét. Az irányfogalom matematikai struktúrájának, történeti fejlődésének tanulmányozása a célul kitűzött tananyag kialakítását szolgálja.

Az irányítás olyan komplex geometriai és topológiai fogalom, mely a matematika története során csak egészen későn vált szükséges eszközzé. Az irányított egyenes és sík első egzakt definícióját Hilbert adta meg a XIX. század végén. Ez a tény arra figyelmeztet, hogy olyan területről van szó, mely a hétköznapi élet szituációiból származtatható, ugyanakkor a precíz definíciók megfogalmazása és a kérdéskör alapos megértése egészen nehéz.

A fogalmak megjelenésének sorrendje a matematika történetben, ill. az axiomatikus tárgyalásmódban segítségünkre van abban, hogy a hozzájuk kapcsolódó feladatok nehézségi szintjét meghatározzuk.

A feladatok, tevékenységek tervezésénél érdemes figyelembe venni a különböző elméleti megközelítéseket, valamint az axiomatikus felépítésből megismert logikai kapcsolatokat.

A matematikai elemzést az euklideszi geometria három különböző felépítésmódját összehasonlítva végezzük el. (Hilbert, Kerékjártó, Weyl).

A lényeges vonások és a kapcsolódó fogalmak rövid áttekintése:

Hilbert

- A kiindulópont az egyenes lineáris rendezése, valamint az irányított egyenes *jobb* és *bal* oldalának meghatározása.
- Az irányfogalmat megelőző fogalmak és relációk: között, megelőzés, lineáris rendezés, irányított egyenes, irányított egyenes két oldala, irányított sík, irányított sík két oldala, a tér irányítása.
- Fogalmak, melyek vagy az irányfogalmon alapulnak, vagy kapcsolatban vannak azzal: geometriai transzformációk iránytartó tulajdonsága.

Hilbert a háromszög körüljárási irányát az irányított egyenes bal oldalának fogalmán keresztül definiálta. A körüljárási irány fogalmára épül a sík irányításának fogalma, valamint a geometriai transzformációk fontos tulajdonsága, az iránytartás.

Kerékjártó

- A kiindulópontot nem a lineáris, hanem a ciklikus rendezés jelenti.
- Az irányfogalmat megelőző fogalmak és relációk: permutáció, ciklikus rendezés, közös pontból induló félegyenesek ciklikus irányítása, a sík pontjaihoz rendelt forgási irány, a tér irányított egyeneseihez rendelt forgási irány.

- Fogalmak, melyek vagy az irányfogalmon alapulnak, vagy kapcsolatban vannak azzal: geometriai transzformációk (eltolás, forgatás, tükrözés), irányított szög.

Keréjkártó munkája rávilágít a ciklikus permutáció és az irányítás közötti kapcsolatra. Ezzel összefüggésben érdemes elgondolkozni azon, hogy a ciklikus rendezés az egyén tanulási folyamatában valószínűleg korábban megjelenő tevékenység, mint a lineáris. Olyan tevékenységekre ill. jelenségekre gondolunk, mint elhelyezkedés az asztal körül, körjátékok, körtáncok, kiszámolós játékok, az évszakok váltakozása.

Weyl

- A kiindulópont a vektorfogalom, melyet intuitíve célszerű egy mozgási utasításnak tekinteni. Az irányítás fogalma ekkor vektorhoz vektort rendelő operációként definiálható.
- Az irányfogalmat megelőző fogalmak és relációk: skaláris szorzat, vektoriális szorzat.
- Fogalmak, melyek vagy az irányfogalmon alapulnak, vagy kapcsolatban vannak azzal: jobb- és balsodrású bázis, irányított szög, a távolságtartó transzformációk osztályozása.

A vektorgeometriai megközelítés az irányfogalom dinamikus vonásait hangsúlyozza. Amennyiben a vektort nem mint helyvektort, hanem mint mozgási utasítást tekintjük, párhuzamba állíthatjuk a sík tetszőleges helyzetű egyenesét, valamint görbéin kijelölt haladási irány mentális fogalmával.

Az irányítás fogalmához vezető lehetséges utakat megvizsgálva úgy látjuk, hogy célszerű a tanítás során tekintettel lenni ezek mindegyikére, mert bármelyikük hozzásegíthet a fogalomkör alaposabb megértéséhez. Nem felejtkezhetünk el arról a tanulásról sem, hogy miként a matematikusok is saját felfogásuknak megfelelően más-más jellemző vonást emeltek ki, a gyerekek sem egyformák, ezért van, akit az egyik megközelítés, van, akit a másik segít hozzá a könnyebb megértéshez.

A **4. fejezetben** a térbeli tájékozódó képességgel összefüggő matematika didaktikai kutatások eredményeit foglaljuk össze. Elsősorban Freudenthal és Piaget munkáira támaszkodunk.

Igyekszünk megtalálni azokat a tanulás-tanítás szempontjából kritikus pontokat, melyek a fogalom szerkezetéből, a hétköznapi élettel való kapcsolatából adódnak, majd áttekintjük az irányfogalom - tágabb értelemben a téri tájékozódás - fejlődésének jellemző vonásait.

Következtetések:

- A térbeli tájékozódás előfeltétele, hogy képesek legyünk saját testünkön, ill. saját testünkhöz viszonyítva tájékozódni.

- A térbeli viszonyiszavak (lineáris polarítások) használatának egyértelműségét a vonatkoztatási rendszer megadása biztosíthatja. Egy objektum helyzetét viszonyíthatjuk saját magunkhoz (a megfigyelőhöz), vagy egy másik objektumhoz.

- Az irányt jelölő fogalompárok (*jobboldal-baloldal, eleje-háta, aljateje*) megismerésénél bonyolultabb feladat az ezeknek megfelelő relációpárok (*jobbra-balra, előtte-mögötte, alatta-felette*) használata.
- Környezetünk térbeli viszonyait egy mentális térkép segítségével értjük meg. A megfelelő mentális térkép kialakítása előfeltétele a navigációs képességek fejlődésének. Az útvonalak leírásával a térbeli viszonyiszavak használatát dinamikus szituációkban gyakorolhatjuk.
- A lineáris irányításból a ciklikus irányítás fogalma közvetlenül nem vezethető le, így a tanítás során célszerű külön foglalkozni vele.
- A tájékozódás a helymeghatározáson keresztül elvezethet a koordinátarendszerek használatához.
- Egy térbeli helyzet síkban történő ábrázolása a viszonyiszavak értelmének módosulásához vezet (pl. az *alatta* és az *előtte* helyzetek egybeeshetnek).
- A térbeli helyzetek, útvonalak verbális kifejezése további nehézséget jelenthet.
- Az első osztályos gyerekek az írás-olvasás tevékenységén keresztül a korábbiaknál sokkal többször kerülnek olyan szituációkba, melyekben fontos az irányok ismerete.

A matematikai, történeti és didaktikai elemzéssel választ kapunk

1. kutatási kérdéseinkre:

Milyen fogalmi, tevékenységi tartalmak tartoznak a térbeli tájékozódás témakörébe?

A térbeli tájékozódás képességét fejlesztő tananyagot hat témakör köré csoportosítjuk:

1. Térbeli viszonyiszavak használata
2. Útvonalak leírása
3. Ciklikus rendezés
4. Tájékozódás a koordinátarendszerben
5. Geometriai transzformációk
6. Objektumok képe különböző nézőpontokból

A fenti témakörökhöz kapcsolódóan olyan feladatokat, tevékenységeket tervezünk, melyek figyelembe veszik az elemzésekből levont következtetéseket.

Ezek a témakörök szoros kapcsolatban állnak egymással, így a kidolgozásra kerülő feladatok szükségszerűen komplexek lesznek, s nem

csupán a térbeli tájékozódást fejleszthetik, hanem más, matematikai és nem matematikai képességet is.

Az **5. fejezet** a kutatás módszertanát ismerteti.

Kutatásunkban három fő rész különíthető el:

I. Tájékozódó felmérés

- a. Első írásbeli teszt
- b. Interjúk
- c. Második írásbeli teszt

II. Tanítási kísérlet

III. Utó- és késleltetett teszt

I. Elsőként tájékozódó felméréseket terveztünk, melyek az alsó tagozatos tanulók meglévő tudásának feltérképezését szolgálták. Az iskolák kiválasztásának fő szempontja az volt, hogy a résztvevő gyerekek összessége lehetőség szerint reprezentálja egy nagyváros kisiskoláskéregének tényleges összetételét. A felméréseket 2005 tavaszán, három debreceni iskolában mind a négy évfolyamon egy-egy osztályban végeztük. A kiválasztott osztályok egyike sem volt speciális képzési rendszerű, mindegyik saját iskolájának normál tanterve szerint haladt.

I.a. Az írásbeli feladatlap elsődlegesen annak felmérésére szolgált, hogy a különböző évfolyamokon milyen nehézséget jelentenek a kidolgozott tájékozódási feladatok.

I.b. A tájékozódás kifejezése erősen összefügg a kommunikációval, a testmozgással, a gesztikulációval, ezért a vizsgált osztályokban interjúk készítésével tovább finomítottuk az első teszt értékelése után kialakult képet. Minden osztályból 2-2 tanulót választottunk ki.

I. c. A 2. írásbeli feladatlap összeállításakor figyelembe vettük az első teszttel és az interjúkkal szerzett tapasztalatainkat, ezért abban az esetben, ha a probléma egyszerűnek bizonyult, nehezítettünk rajta, ha viszont a tanulók jelentős része nem tudott vele megbirkózni, igyekeztünk egyszerűsíteni, ill. csak egy-egy részaspektusra rákérdezni. Arra is törekedtünk, hogy olyan résztémakörökkel is foglalkozzunk, amelyekkel az első tesztben még nem volt módunk.

II. 2. osztályosok számára megterveztünk és megvalósítottunk egy 10 hetes tanítási kísérletet, melynek célja a tájékozódó felmérés tapasztalatai alapján összeállított tananyag kipróbálása, finomítása volt.

III. A kísérleti tanítás során szerzett tapasztalatainkat 2006 januárjában és áprilisában utó- és késleltetett tesztek felvételével egészítettük ki. Egyrészt a kísérlet eredményességét vizsgáltuk, másrészt a spontán fejlődés mértékére is kíváncsiak voltunk.

A **6. fejezet** a kutatás eredményeinek részletes bemutatását és elemzését tartalmazza. Ezt a munkát a 4. fejezet végén meghatározott 6 résztémakör köré csoportosítva végezzük el. A gondolkodás jellegzetességeit konkrét problémák bemutatásán ill. a tanulói válaszok elemzésén keresztül vizsgáljuk.

A tájékozódó felmérés eredményeinek értékeléséhez kvantitatív, és kvalitatív módszereket egyaránt használunk. Arra törekszünk, hogy megismerjük a tipikus gondolkodási hibákat, s a jellemző megoldási stratégiákat. Az évfolyamok teljesítményének összehasonlítása segít abban, hogy egy-egy konkrét probléma nehézségi szintjét meghatározzuk.

Elképzeléseink gyakorlati megvalósítását elemezzük, az elméletileg meghatározott fejlődési lépések egy részét kísérletileg alátámasztjuk, más részét módosítjuk, utalva a továbblépés lehetőségeire.

A tanítási kísérlet célja elsősorban a gondolkodás jellegzetességeinek további feltárása, s nem a tanítási program hatékonyságának vizsgálata.

Az alábbiakban összefoglaljuk az egyes témakörökhöz köthető eredményeinket. A kutatási kérdésekkel összhangban beszélünk a gondolkodás jellegzetességeiről, tipikus hibáiról. Utalunk a hétköznapi tapasztalatok szerepére, valamint az eredményesnek bizonyuló tevékenységi formákra.

1. Térbeli viszonyiszavak használata

- *A között és az alatt-felett* relációk megadása könnyebb, mint az *előtt-mögött*, vagy a *jobbra-balra*.
- A *jobb-bal* megkülönböztetés képessége 2. osztályban még nem stabil. A tévesztések száma akkor a legkisebb, ha saját testhez kell viszonyítani. Nagyobb, ha más személyhez, s még nagyobb, ha élettelen tárgyhoz. Utóbbi esetben a tanulók szembekerülnek a hétköznapi életből ismert hallgatólagos megállapodások következtelenségeivel. Ekkor a hibák nagy része abból ered, hogy nem tudják, mihez viszonyítsanak: magukhoz, vagy az ábrázolt tárgyhoz.
- A tárgymeghatározás az irány ismeretében könnyebb feladat, mint fordítva, annak megadása, hogy egy adott tárgy milyen irányban helyezkedik el.
- Érthetőbbek azok az utasítások, melyekben elől áll az a tárgy, amihez viszonyítani akarunk, s csak ezt követi a másik tárgy megnevezése (Pl. *A háromszög jobb oldalán van a kör.*).
- A síkbeli tájékozódást az írás-olvasás tevékenysége egyértelműen fejleszti.
- A *jobb-bal* megkülönböztetés saját testen vagy más személyhez viszonyítva, a hétköznapi élet kontextusaiban spontán módon is jól fejlődik.

- Amennyiben valamely élettelen tárgyhoz kell viszonyítani, mindig meg kell állapodni a nézőpontban. Ez az információ csak akkor segíti a tanulókat, ha képesek azt értelmezni, vagyis gyakorlás és tudatosítás előzi meg.
- A fejlesztés során a térbeli szituációk értelmezését az enaktív síkon végeztük, így nem kellett a képi ábrázolásmódból eredő nehézségekkel foglalkozni. Az utó és a késleltetett teszt azt mutatta, hogy kellő gyakorlás után az enaktív síkról visszatérve az ikonikusra a tanulók eredményesebben birkóznak meg a kitűzött feladatokkal.
- Egy adott térbeli elrendezés verbalizálása 2. osztályban még sok nehézséget okoz, azonban fejleszthető. Már kisszámú, következetes, időben folyamatos gyakorlással is látható eredményt tudunk elérni.

2. Útvonalleírások

- Eredményeink alátámasztották azt a feltételezésünket, hogy a térbeli viszonzyszavak használata rögzített elrendezés (statikus szituáció) esetén egyszerűbb, mint akkor, ha az iránymeghatározást a tanulók mozgásos (dinamikus) szituációban végzik. Utóbbi feltételezi a statikus szituációra kidolgozott feladatokban szerzett jártasságot.
- A *jobb-bal* fogalomról a *jobbfordulat-balfordulat* fogalomra való áttérés 2. osztályban sok nehézséget vet fel.
- A tanulók útvonalleírásaiban gyakran találkozunk hétköznapi életből átvett, pontatlan szóhasználattal.
- Minthogy az útvonalak leírására a hétköznapi életben számos lehetőség kínálkozik, ez a témakör spontán módon is fejlődik. Elengedhetetlen azonban a verbális kifejezőmód szabályainak megismertetése. A gyakorlásnak nagy szerepe van abban, hogy a gyerekek megértsék és megszokják a pontos utasítások használatát. A késleltetett teszt tapasztalata szerint a megfelelő szófordulatok, kifejezőmódok elsajátítása viszonylag tartósan bizonyul.

3. Ciklikus rendezés

- Noha a hétköznapi életben többször támaszkodunk a ciklikus rendezés és irányítás fogalmára, a hozzájuk köthető problémaszituációk jórészt ismeretlenek a tanulók előtt.
- A ciklikus irányítás - természetéből adódóan - dinamikus szituációt feltételez, elsősorban a forgatás ismeretét. A mentális forgatás nehéz, különösen diszkrét elemekből álló elrendezések esetén, míg eszközzel végezve egyszerűen megérthető.
- A saját testen végzett forgási tapasztalatok vagy ezek átvitele más testre, hasznosak a ciklikus irányítás természetének megértéséhez.
- Jóval egyszerűbb feladat egy elforgatott kép megkonstruálása, mint annak eldöntése, hogy egy adott kép elforgatottja-e egy másiknak.

- A ciklikus rendezés fogalma eszközhasználat nélkül, tényleges tevékenységekkel eredményesen fejleszthető, de néhány alkalom kevés ahhoz, hogy a tanulók stabil ismeretekre tegyenek szert.
- Az óra működését a 2. osztályosok közül igen kevesen értik. Ezért mindaddig nem használható más fogalmak kialakításához szemléltető- ill. munkaeszközként, míg működési elvét készségi szinten el nem sajátítják.
- A ciklikus irányítással lehetőség nyílik a térbeli és időbeli viszonyok összekapcsolására, ám ez a vizsgált életkorban még korai.

4. Tájékozódás a koordináta-rendszerben

- A táblázat celláinak vizuális azonosítására már az első osztályosok is képesek, ám a szimbólumhasználat még 3. osztályban is okoz problémát.
- A szimbólumhasználatból eredő kódolási-dekódolási feladatok közül a dekódolás, azaz a hely ismeretében a cella megkeresése a könnyebb, nem pedig fordítva, a cella helyének megadása.
- A táblázatos elrendezést, a négyzet rácson való mozgást a másodikosok kevés magyarázattal megértik.
- A síkbeli főirányok szerinti tájékozódás spontán módon is fejlődik, bár célzott fejlesztéssel a folyamat felgyorsítható.

5. Geometriai transzformációk

Két transzformációval foglalkoztunk, a forgatással és a tükrözéssel.

- Egy elrendezés mentális tükröképének megalkotására a második osztályosok készségi szinten még nem képesek. A zsebtükör segítségével - amennyiben gyakorolták annak helyes használatát - azonban nem okoz nehézséget a tükrökép megrajzolása.
- Egy elrendezés tükröképének megalkotása nehezebb, mint az elforgatottjéé.
- A különálló pontokból alkotott elrendezések transzformált képeinek azonosítása nehezebb, mint a globálisan értelmezhető képeké (fénykép).
- A tükrözött ill. forgatott képek azonosítása annál nehezebb, minél nagyobb szögben fordítjuk el azokat a tanulók saját helyzetéhez képest.
- Az eredményes mentális tükrözést ill. forgatást nagyon sok tényleges tevékenységnek kell megelőznie.

6. Objektumok képe különböző nézőpontokból

- A tanulók a négy évfolyam egyikén sem találtak még a *Milyenek látjuk ebből az irányból?* típusú kérdéssel, ezért a tájékozódó felmérés tesztfeladata nehéz és összetett problémát jelentett.
- A tanítási kísérlet során azt tapasztaltuk, hogy egyszerű (2-3 elemből álló) elrendezés nézeti képeinek megalkotása már 2. osztályban elkezdhető.
- Az enaktív és az ikonikus síkon párhuzamosan zajló tevékenység hozzájárul a térbeli viszonyok megértéséhez, a viszonzyszavak használatának pontosításához.

- A tanulók nagy részének nem az irányok megkülönböztetése jelentett problémát, hanem más, a tevékenység során felmerülő gyakorlati kérdések (pl. a tárgy és a megfigyelési helyzet elmozdítása egymáshoz képest). A kérdések sokfélesége azt mutatja, hogy a frontális és önálló munkaforma mellett célszerű egyéni fejlesztést alkalmazni.
- A tanulók megértették az ábrázolási mód lényegét, azonban az ábrázolás és a tényleges megépíthetőség sok esetben nem kapcsolódik össze, s a többféle lehetőség felismerése sem várható el.
- Az objektumok nézeti képeinek megalkotása spontán módon nem fejlődik, a tanórai fejlesztést a második évben meg lehet kezdeni, de célszerű a következő két évben tovább folytatni.

A kutatási kérdések és a hozzájuk tartozó hipotézisek áttekintése:

2. Milyen meglévő ismeretekkel rendelkeznek az egyes évfolyamok tanulói?

Hipotézis:

A tanulók térbeli tájékozódó képességének fejlesztéséhez nem elegendők a hétköznapi életben, spontán módon szerzett tapasztalatok.

A spontán fejlődés szerepe az egyes témakörökben eltérő. A *jobb-bal* megkülönböztetés saját testen vagy más személyhez viszonyítva spontán módon is fejlődik, csakúgy, mint az útvonalak leírásának képessége ill. a négyzetrácsban való tájékozódás.

Az útvonalak verbalizálása, a ciklikus rendezés, az elforgatott ill. tükrözött kép természetének megismerése tudatos fejlesztőmunkát igényel, hasonlóan az objektumok nézeti képeinek megalkotásához.

3. Milyen tipikus gondolkodási hibákat vétenek?

Hipotézis:

Az irányítással összefüggő problémák megoldását nehezíti, hogy a térbeli viszonzyszavakat a hétköznapi életben gyakran használjuk következtelenül.

Két témakörnél talákoztunk hétköznapi szóhasználatból eredő problémával.

Egyrészt, ha a *jobb-bal* megkülönböztetést valamely élettelen tárgyhoz viszonyítva végezzük, nem hagyatkozhatunk a hétköznapi életben megszokott konvenciókhoz, mindig konkretizálnunk kell a megfigyelő helyét.

Másrészt ügyelnünk kell arra, hogy az útvonalleírásokban kerüljük a hétköznapi életből átvett pontatlan szóhasználatot (pl. „A második utcánál menj *fel*...”).

4. Melyek azok a tevékenységi formák, amelyekkel bővíthetjük meglévő ismereteiket, javíthatjuk a feltárt gondolkodási hibákat?

Hipotézis:

A térbeli tájékozódó képesség fejlesztésében az első lépést a megfelelően választott tárgyi tevékenységek jelentik. A tárgyi tevékenységekhez kötődően igen fontos a helyes verbális kifejezőmód elsajátítása.

Kutatásunk ezt a hipotézist mind a hat témakörön belül igazolta. A tárgyi tevékenységek lehetővé teszik, hogy a tanulók ne kerüljenek szembe a térbeli szituáció síkba transzformálásának nehézségével mindaddig, míg a térben felmerülő kérdések nem tisztázódnak. A verbális kifejezőmód elsajátítása ennek megfelelően először szóban történik.

A pontos kifejezőmód elsajátítása jól megtervezett gyakorlást igényel, különben állandóan visszatérnek a hétköznapi életből vett pontatlanságok.

5. Hol a helye a meglévő tananyagstruktúrában ennek a témakörnek?

Hipotézis:

A témakör szisztematikus és spirális tárgyalásmódja hozzájárul a térbeli tájékozódó képesség fejlesztéséhez.

A témakörnek a meglévő tananyagstruktúrában történő elhelyezéséhez, a hat résztémakör közötti összefüggésekből indultunk ki.

Az első két témakör egyaránt a térbeli viszonzyszavak használatával foglalkozik. Előbbi statikus, utóbbi dinamikus szituációkat vizsgál.

A harmadik a kanyarodás fogalmán keresztül összefüggésbe hozható az útvonalleírásokkal, s ezért a *jobb-bal* fogalommal is. A ciklikus irányítás fogalma a forgatási kontextusokban érthető meg, s így közvetlen kapcsolatban áll a geometriai transzformációk témakörével.

A koordináta-rendszer fogalmának előkészítése a síkbeli tájékozódás gyakorlásának terepe.

Az objektumok nézeti képeinek megalkotásához lineáris irányok természetéről szerzünk tapasztalatokat.

A térbeli tájékozódás témakörét kapcsolatba hoztuk más tantárgyakkal (pl. testnevelés, vizuális kultúra, anyanyelv stb.), ill. a matematika más területeivel (pl. geometria, kombinatorika, számtan-algebra stb.).

Ez azt mutatja, hogy témakörünk tanítása lehetőséget nyújt mind a matematikán belüli, mind az azon kívüli koncentrációra.

Tapasztalataink szerint a szisztematikus és spirális tárgyalásmód nem csak a tájékozódással összefüggő ismeretek megszerzésében és felszínen tartásában segít, hanem más témakörök fejlesztését is szolgálja.

A **7. fejezetben** összefoglaljuk az egyes témakörökhöz köthető legfontosabb eredményeinket, tapasztalatainkat, majd felvázolunk néhány további kutatási lehetőséget.

A további kutatások egyik lehetséges irányának a kísérleti tanítás folytatása látszik, mind a második, mind a többi évfolyamon (ideértve az óvodai nagycsoportot, és az 5-6. évfolyamot is).

A másik érdekes terület a téri tájékozódás témakörének tantárgyközi jellegéből adódik. Sok lehetőség rejlik a tantárgyak közötti koncentrációban, csakúgy, mint a hétköznapi életben előforduló szituációk felhasználásában.

További kutatás tárgyát képezheti a térbeli tájékozódó képesség és az ún. matematikai képességek (logikus gondolkodás, számolás, stb.) közötti összefüggések keresése és elemzése.

A dolgozatban bemutatásra kerülő feladatokat elsődlegesen a tananyag szempontjából osztályozzuk, s nem a tevékenységek oldaláról közelítjük meg. Folyamatosan törekszünk arra, hogy a spontán fejlődés eredményeit a tudatos fejlesztéstől különválasszuk, amennyiben és amilyen mértékben ez lehetséges. A tudatos fejlesztést a hagyományos iskolai keretek közé helyezzük, s a kiválasztott feladatokat a jelenleg tanított matematikai témakörökhöz illesztjük.

A felölelt témakör szélesebbnek bizonyult az eredetileg elképzelnél. Ez okozta azt, hogy nem állt módunkban egy-egy felismert probléma mélyebb elemzése. Mind a terjedelem, mind az idő korlátozta az összes résztémakör szükséges mélységű kidolgozását.

Úgy véljük, hogy - az említett problémák ellenére - kutatási eredményeink hozzájárulnak a kisiskolások térbeli tájékozódó képességének fejlesztéséhez, a „*Tájékozódás térben*” tananyag ill. fejlesztési feladat kidolgozására és elemzésére bemutatott módszer pedig alkalmazható más, a matematika tanításához kapcsolható részképesség fejlesztési programjának kialakításában is.

In this work we deal with the spatial orientation and with the development of pupils' competence on spatial orientation. The problem of orientation has a rich context in everyday life, so they learn about it not only in different school subjects, but they learn this topic spontaneously and directly too. We investigate pupils' competence in primary school.

The concept of orientation has a topological and geometrical feature. It turns up spontaneously in one's mind, and since there is little need for conceptual precision, it is not easily seen from the point of view of teaching material.

Weak spatial orientation often leads to different learning disabilities, e.g. dyscalculia, dyslexia, disgraphia. The increasing number of such children justifies the importance of our topic.

Research questions:

1. What kind of concepts and activities belong to the topic of spatial orientation?
2. What kind of existing knowledge do pupils of primary school have?
3. What types of difficulties can we find studying the thinking processes of pupils of grade 1-4?
4. Which are the activities we can enlarge pupils' knowledge or correct their recognized faults of thinking?
5. How can we successfully insert the topic in the recent structure of school-work?

Hypothesis:

2. Experiences gained in everyday life spontaneously are not enough to develop pupil's competence of spatial orientation.
3. There are many inconsequent situations in everyday life, and they might be the reason of confusion in problem solving.
4. The first step in the developmental process of pupils' ability of spatial orientation is to choose adequate activities. In connection with activities the use of correct verbal expressions is very important.
5. The systematic and spiral treatment of this topic helps to develop pupils' competence in spatial orientation.

In Chapter 1 we present the theoretical background of our research.

We use Guilford's interpretation of spatial ability especially spatial orientation: Spatial ability has two main components: visualization and spatial orientation. The spatial orientation contains five components: factor

S3 of Thurstone, spatial relations, spatial perception, mental rotation and kinesthetic imagery.

In the work of curriculum development we use two basic mathematic didactical theories: the genetic approach of mathematics education and Freudenthal's didactical phenomenology.

Our investigation of teaching spatial orientation as a topic is based on principles of the conceptions of Hungarian complex experiment of mathematics teaching, of the Holland realistic mathematics education (RME) and of the German active-discovery learning.

These didactical theories emphasize an integrated way of teaching different mathematical topics, the importance of the social context, pupils' autonomy and experience.

Inserting the topic of spatial orientation in the recent structure of school-work is based on the phases of research-based curriculum development theory. With respect to circumstances and possibilities of our research we emphasize the construction of a hypothesized learning trajectory, the individual tests and the classroom-based teaching experiment. The phases and cycles of revisions and field tests in multiple classrooms may be the topic of further research.

Chapter 2 shows the recent Hungarian situation in teaching spatial orientation with help of different curricula and textbooks.

Whereas the development of spatial orientation is an important part in the National Fundamental Curriculum (NAT), in other curricula it is not. The NAT systematically deals with our topic in Grade 1-6., but the other curricula mentions it only in Grade 1-4. We can't realize either the systematic or the spiral treatment.

Studying recent textbooks and curricula in Hungary, and speaking to teachers in primary schools, we established that there are only a few tasks in this topic. Pupils only learn about the orientation at the beginning of the first school year, and never more.

In **Chapter 3** we give a mathematical and historical analysis of the concept of orientation. The study of mathematical structure of the concept served as the design of the subject matter.

Studying the theory of orientation we can see, that this is a very complex concept, which was formed quite late in the history of mathematics. Hilbert was the first who gave the exact definition of oriented line and plane at the end of the 19th century. It follows that orientation is such a geometrical and topological concept which arises from everyday situations, but the precise definition as well as the thorough understanding is quite difficult.

The order of appearance of concepts in the history of mathematics or in the axiomatic treatment helps us to determine the difficulty level of a task related to these concepts.

The logical links that are known from the axiomatic treatment may help the children better understand the difficulties of the questions in this topic.

The starting point of our investigation was the axiomatic structure of Euclidean geometry.

We referred to 3 different works (works of Hilbert, Kerékjártó and Weyl), 3 possibilities to build up the concept of orientation. We emphasize not only the differences between the basic approaches of these studies, but the similarities between them as well, which brings us closer to the core of the concept.

Studying the three different ways of introducing the concept of orientation we can see, that they emphasize different properties as fundamental. These properties are:

Hilbert

- The starting point is the *linear order of the line*, and the *left-right side of the oriented line*.
- Concepts and relations preceding the concept of orientation: *between*, "*precede*", linear order, oriented line, and oriented plane, two sides of an oriented line or a plane.
- Concepts based on or linked to orientation: *geometrical transformations* that preserve orientation or not.

Hilbert introduce the circulation sense of a triangle by the help of the concept of the left sides of oriented lines. The circulation sense is the basis of the orientation on a plane, furthermore of the transformation property preserving orientation or not.

Kerékjártó:

- The starting point is that he assigns a *direction of rotation* to every point of the plane.
- Concepts and relations preceding the concept of orientation: the concept of *permutation* and *cyclic order*. He introduced the term of the clockwise and anticlockwise directions.
- Concepts based on or linked to orientation: geometrical transformations, the concept of *oriented angle*.

The study of Kerékjártó's work highlights the link between cyclic permutation and orientation. It is worth thinking about that cyclic orders are probably early mental objects and arranging cyclically is an early mental activity in the individual learning process then linear order and arranging linearly. We refer to such kind of activities as sitting around a table, standing or dancing in a circle, counting out, etc.

Weyl

- The starting point in the vector geometry is naturally the *vector*. It is understandable as a motional instruction. The orientation of the plane is an *operation* which assigns a vector to the other vector.
- Concepts and relations preceding the concept of orientation: *dot product, vector product*. We can introduce the concepts of *left- and right-handed basis*.
- Concepts based on or linked to orientation: *Oriented angles, classification of isometries* of a plane.

The vector geometrical approach suggests turning attention to the dynamic feature of the orientation. Following the instruction of a vector we can mentally travel on a line or curve. By traveling in our own minds, we have to imagine the position of the traveler, so we have to relate to the other person who is moving.

The three kinds of treatments of the same topic help as to solve problems which are arisen from the individual differences of pupils. If one of the approaches is inappropriate for a child, we can choose another.

In **Chapter 4** we summarize the results of mathematic didactical theories connected to the ability of spatial orientation. Our analysis is based mainly on the works of Freudenthal and Piaget.

We try to find the crucial points arising from the structure of the concept and from the connection with everyday life, and then give a survey of characteristics of the developmental process of spatial orientation.

Conclusions:

- The precondition of spatial orientation is that we are able to orientate on our body and in relation to our own body.
- Using words of spatial relations (linear polarities) is unambiguous if we determine the relating point. We can relate the position of an object to our body (to the observer) or to another object.
- Learning of concepts of directions (*left side-right side, front-back, bottom-top*) is less difficult than learning the analogous relations (*left-right, in front of-behind, below-above*).
- We can understand the spatial relations in our environment with the help of a mental map. Creating an adequate mental map develops competence of navigation. By describing routes we can learn using words of spatial relations in dynamic situations.
- Cyclic orientation is not deducible from linear orientation directly, so it is worth teaching it separated.
- Orientation through localization, leads us to the use of the coordinate systems.

- If we draw a spatial situation in the plane the meaning of words of spatial relation can be modified (e.g. *below* and *in front of* can be the same).
- Verbalizing of spatial situations and describing routes cause further difficulties.
- First graders – because of activities of reading and writing – are often confronted with situations where the knowledge of directions is important.

On the basis of mathematical and historical analysis we give answer for the first research question:

1. What kind of concepts and activities belong to the topic of spatial orientation?

We divide the relevant mathematics curriculum regarding the topic of spatial orientation into 6 subtopics:

1. Using words to describe spatial relations
2. Describing routes (using simple maps)
3. Ordering cyclically
4. The coordinate system
5. Geometrical transformations
6. The front-, side-, and top-view of an object

These subtopics are in close connection with each other, so the tasks elaborated for primary school pupils are complex and appear in every year in various manners, we think that learning more about concepts relating to the term of orientation enhance not only the ability of spatial orientation, but other mathematical and nonmathematical abilities too.

Chapter 5 describes the research methodology.

Our investigation consists of the following phases.

- I. An exploratory study
 - a. The first paper-pencil test
 - b. Interviews
 - c. The second paper-pencil test
- II. A teaching experiment
- III. A post-test
 - I. We planed an exploratory study with pupils of grade 1-4. Our aim was to estimate the problems of elementary school-pupils in different ages in order to adjust the actual knowledge with the farther experience. We chose three elementary schools in Debrecen, in Hungary (In spring 2005). We also chose three classes from every grade. The classes were without any specification; their learning is based on the normal curriculum of their school. With the composition of the pupils participating in our experiment, we tried to represent the real situation in grades 1-4 in Hungary.

I. a. We made a paper-pencil test for these pupils.

I. b. We chose pairs of pupils from every class and made interviews with them after the evaluation of the first test. We wanted to refine our estimates, because the paper-pencil test is not the best way to know more about spatial orientations ability. This topic requires communication and different forms of expressions, like body movement and gesticulation.

I. c. We finished the exploratory study with a second paper-pencil test. By composing of items we took the results of the first test and the interviews into consideration, furthermore we expanded the area of orientation problems.

II. After this exploratory study we carried out a classroom experiment with pupils of Grade 2. (In autumn 2005) Our aim was to try our conception and ideas to develop pupil's ability in the field of spatial orientation. Grade 2 seemed good decision in the following aspect: pupils are already familiar with school life, reading and writing; we can see the remained orientation problems, which asks for our special attention. The results of the exploratory study in Grades 3 and 4 were useful because of identification of problems which remained and knowledge that was getting in every day life in this age.

III. In January 2005 we prepared a post-test for our second graders. The post-test was solved by other second graders too. We were interested in the development of "our" pupils comparing their results with other pupils' results. We wanted to know also about the spontaneous development of pupils who didn't pay special attention to the topic of orientation.

In **Chapter 6** we present and analyze the results of our research. The results and experiences are classified by the 6 subtopics defined at the end of Chapter 4.

By the evaluation of results of the exploratory study we use quantitative and qualitative methods too. Our goal is to know the typical faults of thinking process and solving strategies. The comparison of achievement of different graders serves to define the level of a concrete problem.

We analyze the realization of our ideas and confirm or modify the developmental levels elaborated by the theory.

The goal of the teaching experience is to know more about the specialty of thinking process and not to investigate the efficiency of the teaching program.

We summarize our results connected to the subtopics. In accordance with the research questions we discuss the specialty of thinking process and typical difficulties. We refer to experiences of everyday life and effective activities.

1. Using words to describe spatial relations

- Determination of relations between and below-above is easier than in front of-behind or left-right.
- The ability of the distinction between *left-right* is not stable in Grade 2. The easier case is to relate to our own body. To relate to other people's body is more difficult and to other nonliving objects is the most difficult. In this case pupils confront with inconsequence of everyday life. The main problem is not that they cannot distinguish *left* and *right* side, but they do not know which object or person to relate to.
- Determining the object if we know the direction is an easier task than contrarily determining the direction of a given object.
- One can better understand instructions in which the first word is the object we relate to, followed by the name of the related object (e.g. On the *left* side of a triangle is a circle).
- Orientation in the plane develops by activities of reading and writing.
- The competence of left-right distinction related to our body or to other person's body develops well in everyday situations spontaneously.
- In the case of relating to non-living objects we shall tell the relating point, but this information helps pupils only if they have practice in understanding it.
- By teaching experiment we solved spatial orientation problems by way of enactive representation, so we did not take care of the difficulties of iconic representation. The post and delayed test showed that after practicing in real activities pupils are more successful in solving paper-pencil tasks.
- Verbalizing a given spatial situation causes lots of difficulties in Grade 2, but this competence is developable. We are able to obtain visible result already through few, coherent, consecutive practices.

2. Describing routes

- Our results justified the assumption that using words to describe spatial relations in static situation is simpler than in the dynamic one. Before solving dynamic problems pupils must be familiar with solving tasks elaborated for static situations.
- Passing on from *left-right* concept to the concept of *left turn -right turn* presents new difficulties in Grade 2.
- In describing routes of pupils we often read inaccurate expressions used in everyday life.
- There are many possibilities in everyday life to describe routes, so this topic develops spontaneously too, but learning the rules of verbalization is necessary. The role of practice is important in understanding and getting accustomed to using exact verbal expressions. By experiences of the delayed

test the acquirement of right words and expressions seems to be relatively lasting.

3. Ordering cyclically

- Whereas in everyday life we use the cyclic order and cyclic orientation several times, the problem situations linking to them are almost unknown for pupils.
- Cyclic orientation assumes a dynamic situation, a rotation. Mental rotation especially in discrete case is quite difficult, while rotation with some concrete instrument is not.
- The experiences gained by rotation of our own body are useful in understanding the nature of cyclic orientation.
- Construction of a rotated image is a simpler task than deciding whether an image is the rotated image of the others.
- The concept of cyclic order with different instruments and activities is developable effectively, but it has a long-term period.
- Only a few second graders understand how a watch or a clock works. So we can not use it as instrument until they are familiar with it.
- There are possibilities to join spatial and temporal relations but in the investigated age it is untimely.

4. The coordinate system

- The first graders are also able to identify the cells of a table, but the use of symbols cause problems between third graders too.
- The use of symbols is easier if the task is decoding, i. e.: finding cells if we know the positions, than contrarily to give the location of a cell.
- Second graders are able to understand the arrangement of a table or the orientation in a grid after a few explanations very quickly.
- The orientation in the plan by the four main directions develops mainly spontaneously. An adequate development can make the process shorter.

5. Geometrical transformations

We deal with two transformations, rotation and reflection.

- The second graders are not familiar with construction of a mirror image of an arrangement. If they are experienced in using mirror, it can help draw the mirror image.
- The construction of the mirror image of an arrangement is more difficult than of the rotated image.
- Identifying the transformed image of an arrangement of discrete components is more difficult than the image of a photo.
- By identifying of rotated and/or reflected images the bigger angle of rotation related to the position of pupils are the more difficult.
- Lots of different activities are preconditions of successful mental rotation and reflection.

6. The front-, side-, and top-view of an object

- Pupils of Grade 1-4. did not deal with such kind of questions as How does an object from a certain point of view look like?
- In case of simple arrangements (2-3 elements) we can start to teach the constructions of the front-, side- and top-view already in Grade 2.
- These activities happened parallel on the enactive and iconic plane and contribute to understand spatial relations, to use linear polarities in an appropriate way.
- Most pupils did not have problems distinguishing directions, but other questions arising by practice (e.g. the object and the observer move related to each other). The many questions suggest that it is worth using the method of individual development instead of methods of frontal or isolated teaching.
- Pupils understood the essence of the drawing method, but they recognized only one possibility of building up a certain arrangement.
- The construction of views of an object does not develop spontaneously. We can start the developmental process in Grade 2, but we must go on through the following years.

We summarize our research questions and hypothesis:

2. What kind of existing knowledge do pupils of primary school have?

Hypothesis:

Experiences gained in everyday life spontaneously are not enough to develop pupil's competence of spatial orientation.

The importance of spontaneous development is different in each subtopic. The development of *left-right* distinction related to our own body has a spontaneous feature. Describing routes and orienting in grid develop mainly spontaneously too.

Verbalizing routes, ordering cyclically, creating different views of an object and recognizing the nature of a mirror image or a rotated image require a conscious developmental project.

3. What types of difficulties can we find studying the thinking processes of pupils of grade 1-4?

Hypothesis:

There are many inconsequent situations in everyday life, and they might be the reason of confusion in problem solving.

We found this reason in two subtopics.

By left-right distinction related to a non-living object the different conventions known from everyday life cause confusions in problem solving.

We must determine the position of the observer in every case if we want to get an unambiguous answer.

By describing routes we should not use such inaccurate expression as “At the second street turn up...” instead of “...turn left...”.

4. Which are the activities we can enlarge pupils’ knowledge with or correct their recognized faults of thinking?

Hypothesis:

The first step in the developmental process of pupils’ ability of spatial orientation is to choose adequate activities. In connection with activities the use of correct verbal expressions is very important.

Our research justified this hypothesis in all the 6 subtopics.

In primary school the enactive phase of thinking process is very important. If pupils have enough experience in real situations then we can deal with the way of the iconic representation.

In this way pupils learn to use verbal means of expressions at first orally then in writing. Acquirement of exact expressions requires well-designed practice otherwise inaccuracies arising from everyday life appear again.

5. How can we successfully insert the topic in the recent structure of school-work?

Hypothesis:

The systematic and spiral treatment of this topic helps to develop pupils’ competence in spatial orientation.

We analyzed connections between the 6 subtopics.

The first two deal with using words to describe spatial relations in static and dynamic situations.

The third is in connection with describing routes and with the concept of *left-right* too through the concept of *turning*. The cyclic orientation can be understood in turning contexts and so it is associated with geometrical transformations.

The preliminary study of coordinate-systems gives the possibility of practice in planar orientation.

When we construct different views of an object we experience the nature of linear order and linear directions.

The topic of spatial orientation is in close connection with other school subjects (art, grammar, physical education) and other fields of mathematics (geometry, combinatorics, arithmetic and algebra). It shows that teaching of our topic provide an opportunity for us to achieve concentration as in mathematics as out of them.

The systematic and spiral treatment helps not to get and maintain knowledge in spatial orientation but serve the development of other topics too.

In **Chapter 7** we summarize our results and experiences then sketched some further research possibilities.

One of the possibilities is to continue the teaching experiment in Grade 2, just as in other Grades.

Another interesting field is the question, how can we use the different school subjects and everyday life situations to develop pupils’ spatial orientation competence.

It would be worth to find and analyze the connection between spatial orientation and other mathematical competences (e.g. logical thinking, counting).

Tasks showed in our thesis are classified mainly from the point of view of the subject matter, and not the activities.

We continuously try to separate the results of spontaneous and, if it is possible. The conscious development happens in classroom practice, and we join our tasks to traditional topics of teaching of mathematics.

It turned out that the topic of spatial orientation is more expansive than we thought before. This is the reason why we could not give deeper analysis of our experiences.

We think even so that our research results assist the development of spatial orientation competence in primary school, and the way of elaborating of a teaching material connected with a certain competence, may be useful to design other developmental programs of other mathematical competences.

IRODALOMJEGYZÉK REFERENCES

1. Aman, C, J, Roberts, R, J: Developmental Differences in Giving Directions: Spatial Frames of Reference and Mental Rotation, *Child Development*, 64, 1993, (1258-1270).
2. Ambrus A: Bevezetés a matematikadidaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995.
3. Bartolini Bussi, M,G, Boni, M, Ferri, F, Garuti, R: Early Approach to Theoretical Thinking: Gears in Primary School, *Educational Studies in Mathematics*, 39, 1999, (67-87).
4. Besuden, H: Räumliche Orientierung: Die rechts/links Beziehung, *Math. Schule*, 28, 7/8, 1990, (461-474).
5. Bruner, J, S: Új utak az oktatás elméletéhez, Gondolat, Budapest, 1974.
6. Clements, D, H: Geometric and Spatial Thinking in Young Children, in J. V. Copley (ed.): *Mathematics in the Early Years*, Reston, VA: NCTM, 1999, (66-79).
7. Clements, D, H: Linking Research and Curriculum Development, In: L. D. English (ed.): *Handbook of National Research in Mathematics Education*, Laurence Erlbaum Associates, London, 2002, (599-630).
8. C. Neményi, E: Geometria tananyag és a geometria tanítása az alsó tagozaton, *Matematika tantárgypedagógiai füzetek*, Budapest, 1999, (64-89).
9. C. Neményi, E: Az alsó tagozatos matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai, *Új Pedagógiai Szemle*, 2002. december, (89-98).
10. C, Neményi, E, Wéber, A: *Matematika munkafüzet 3. osztály*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.
11. De Lange, J: Geometry for all or: no geometry at all? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 3, 1984, (90-97).
12. De Villiers, M: The Role of axiomatisation in mathematics and mathematics teaching, RUMEUS Univ. Stellenbosh, 1986.
13. De Villiers, M: To teach definitions in geometry or teach to define? In *PME 22 Proceedings*, 1998.
14. Dékány, J: Kézikönyv a diszkalkulia felismeréséhez és terápiájához, BGGYTF, Budapest, 1995.
15. Dienes, Z: Építjük fel a matematikát, Gondolat Kiadó, Budapest, 1973.
16. Franke, M: *Didaktik der Geometrie*, Spektrum Akademische Verlag, Heidelberg, Berlin, 2000.
17. Freudenthal, H: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.
18. Freudenthal, H: *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel, Dordrecht, 1973.
19. Furinghetti, F, Radford, L: Historical Conceptual Developments and the Teaching of mathematics: from Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice, In: L. D. English (Ed.): *Handbook of National Research in Mathematics Education*, Laurence Erlbaum Associates, London, 2002, (631-654).
20. Hasemann, K: *Anfangsunterricht Mathematik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2003.
21. Herendiné Kónya, E: Keréjkjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról, *Polygon*, XII. köt. 1-2. szám, 2003, (23-34).
22. Herendiné Kónya, E: Az alsó tagozatos geometriatanítás helyzetének elemzése, *Apáczai-Napok Tanulmánykötet*, Győr, 2004.
23. Hilbert, D: *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1956.
24. Jegorov, I. P. *Geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
25. Jones, G., A., Langrall, C, W, Thornton, C, A, Nisbet, S: Elementary Student's Access to Powerful Mathematical Ideas, In: L. D. English (Ed.): *Handbook of National Research in Mathematics Education*, Laurence Erlbaum Associates, London, 2002, (113-142).
26. Keréjkjártó, B: *A geometriai alapjairól I.*, Szeged, 1937.
27. Keréjkjártó, B: *A geometriai alapjairól II.*, Budapest, 1944.
28. Klein Sándor: *A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata*, Akadémia Kiadó, Budapest, 1980.
29. Kónya, E: On the fundamental theorem of compact and noncompact surfaces, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 32, 2005, (211-224).
30. Kónya, E: A mathematical and didactical analysis of the concept of orientation, *Teaching Mathematics and Computer Science*, 4/1, 2006, (111-130).
31. Krüll, K, E: *A diszkalkuliás (számolásgyenge) gyerekek*, Akkord Kiadó, 2000.
32. Lakatos, Imre: *Bizonyítások és cáfolatok*, Typotex Kft, Budapest, 1998.

33. Láncoz, K: A geometriai térfogalom fejlődése, Gondolat kiadó, Budapest, 1976.
34. Levelt, W. J. M: Nézőpontválasztás és ellipszis a téri leírásokban, In: Lukács, Király, Racsmány, Pléh (szerk.): A téri megismerés és a nyelv, Gondolat, Budapest, 2003, (129-158).
35. Maier, P,H:Raumliches Vorstellungsvermögen, Auer Verlag, Donauwörth, 1999.
36. Meissner, H, Pinkernel, G: Spatial Abilities in Primary Schools, PME-24 Proceedings, Japan, 2000.
37. Mérei F, Binét, Á: Gyermeklélektan, Gondolat, Budapest, 1983.
38. Nagy J, Józsa K, Vidákovich T, Fazekasné Fenyvesi M: DIFER - Diagnosztikus fejlődésvizsgáló rendszer 4-9 évesek számára. OKÉV, KÁOKSZI, Budapest, 2002.
39. Nahalka, I: A tanulás, In: Falus Iván (szerk.): Didaktika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998, (117-155).
40. Nahalka, I: A természettudományi szakos pedagógusok képzése és a NAT, Pedagógusképzés, 2 (31), 2004, 1. (11-27).
41. Perry, B, Dockett, S: Young Children's Access to Powerful Mathematical Ideas, In: L. D. English (Ed.): Handbook of National Research in Mathematics Education, Laurence Erlbaum Associates, London, 2002, (81-112).
42. Piaget, J: Az észleleti tér, a képzetes tér és az alaklás (a sztereognosztikus észlelés), in. Válogatott tanulmányok, Gondolat, Budapest, 1970, (76-131).
43. Piaget, J, Inhelder, B: Gyermeklélektan, Osiris, Budapest, 1999.
44. Pléh, Cs: Hozzájárulhatnak-e az empirikus pszichológiai kutatások a nyelv-gondolkodás viszony filozófiai problémájának megoldásához? In: Neumer, K. (szerk.): Nyelv, gondolkodás, relativizmus, Osiris, Budapest, 1999, (35-165).
45. Pléh, Cs, Király, I, Lukács, Á, Racsmány, M: A tér a szavak világában, In: Lukács, Király, Racsmány, Pléh (szerk.): A téri megismerés és a nyelv, Gondolat, Budapest, 2003, (7-26).
46. Pusztai, F. (szerk.): Magyar Értelmező Kéziszótár, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2003.
47. Reinhold, S: Topology in Elementary School Mathematics – A Contribution to the Improvement of Children's Spatial Ability? YERME Sommer School, Klagenfurt, 2002.
48. Rényi, A: Ars mathematica, Magvető Kiadó, Budapest, 1973.
49. Roe, J.: Elementary Geometry, Oxford University Press, Oxford, 1993.

50. Selter, Christoph: Genetischer Mathematikunterricht: Offenheit mit Konzept, Mathematik Lernen, Heft 83, 1997, (4-8).
51. Seng, S,Chan, B: Spatial Ability and Mathematical Performance: Gender Differences in an Elementary School, 2000.
52. Séra, L,Kárpáti, A, Gulyás, J: A térszemlélet, Comenius Bt, Pécs, 2002.
53. Sfard, A:On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22, , 1991, (1-36).
54. Sfard, A: On real Life and School Mathematics – can they help each other? Talk given at Mathematikbiennalen, Norrköping, 2002.
55. Skemp, R, R: A matematikatanulás pszichológiája, Gondolat, Budapest, 1975.
56. Szendrei, J: Gondolod, hogy egyre megy? Typotex Kiadó, Budapest, 2005.
57. Weyl, H: Szimmetria, Gondolat, Budapest, 1982.
58. Zsámboki, Kné, Horváthné Szigligeti, A: Matematika kézzel, fejjel, szívvel, OKKER, Budapest, 1999.

PUBLIKÁCIÓK PUBLICATIONS

Referált folyóiratban, konferencia kiadványban megjelent idegen nyelvű publikációk:

- *The Concept of orientation*, Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Pisa University Press, Italy, 2004, (TG7_HerendineKonya_cerme3).
- *On the fundamental theorem of compact and noncompact surfaces*, Annales Mathematicae et Informaticae, 32, 2005, (p. 211-224)
- *A mathematical and didactical analysis of the concept of orientation*, Teaching Mathematics and Computer Science, 4(2006)1, (p. 111-130)
- *Difficulties of using words of spatial relations*, Proceedings of the 58th Conference of the International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education, University of West Bohemia, Pilsen, 2006, (p. 51-57).

Referált folyóiratban, konferencia kiadványban megjelent magyar nyelvű publikáció:

- *Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról*, Polygon, XII. köt. 1-2, 2003, (p. 23-34).

Nem referált folyóiratban, konferencia kiadványban megjelent publikációk:

- *Érdekes felületek topológiája*, Tanulmányok 2000, KFRTKF, Debrecen, 2000, (p. 167-173).
- *Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek osztályozásáról*, Tanulmányok, KFRTKF, Debrecen, 2000, (p. 161-166).
- *Everyday Mathematics- Új módszer az amerikai matematikatanításban*, Tanulmányok, KFRTKF, Debrecen, 2002, (p. 86-89).
- *Kreatív tulajdonságok megjelenése a matematikaórákon*, A tanítóképzés jelene – Tanulmányok, KFRTKF, Debrecen, 2002, (p. 147-166).
- *A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei*, Iskolakultúra, XIII. évf. 1-2. 2003, (p. 51-56).
- *Az alsó tagozatos geometriatanítás helyzetének elemzése*, Apáczai-Napok – Tanulmánykötet, Győr, 2004, (p.242-247).

Előadások nemzetközi konferencián:

- *Kerékjártó's Theorem on Open Surfaces*, Varga Tamás Módszertani Napok, Budapest, 2001.

- *Some remarks to books of Béla Kerékjártó*, ERME Sommer School, Klagenfurt, Austria, 2002.
 - *Geometric Thought of undergraduate preservice teacher*, Varga Tamás Módszertani Napok, Budapest, 2003.
 - *Az irányítás, irányíthatóság fogalma*, I. Felvidéki Matematika Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Rév-Komárom, Szlovákia, 2003.
 - *The history of the classification theorem of surfaces*, History of Mathematics & Teaching of Mathematics Conference, Miskolc 2004.
 - *Az irányítás fogalmának vizsgálata*, II. Felvidéki Matematika Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Rév-Komárom, Szlovákia, 2004.
 - *A térbeli tájékozódó képesség fejlesztése kisiskolás korban*, III. Közép-Európai Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Rév-Komárom, Szlovákia, 2005.
 - *Difficulties of using words of spatial relations*, 58th Conference of the International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education (CIEAEM), Srní, Csehország, 2006.
- Előadások hazai konferencián:**
- *Érdekes felületek topológiája*, Tudományos Felolvasóülés, KFRTKF, Debrecen, 1999.
 - *Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek osztályozásáról*, Tudományos Felolvasóülés, KFRTKF, Debrecen, 2000.
 - *Everyday mathematics- Új módszer az amerikai matematikatanításban*, Tudományos Felolvasóülés, KFRTKF, Debrecen, 2001.
 - *Kreatív tulajdonságok megjelenése a matematikaórákon*, Tanítóképző Főiskolák Tudományos Konferenciája, Debrecen, 2001.
 - *Az irányítás fogalma és a geometriai gondolkodás szintjei*, Tudományos Felolvasóülés, KFRTKF, Debrecen, 2003.
 - *Az alsó tagozatos geometriatanítás helyzetének elemzése*, Apáczai Napok, Győr, 2003.
 - *Sajátos nevelési igényű gyerekek inklúziója*, (Girasek Jánossal), Tudományos Felolvasóülés, KFRTKF, Debrecen, 2004.
 - *A felületek topológiai osztályozásának történeti mozzanatai*, Apáczai Napok, Győr, 2004.
 - *A térbeli tájékozódó képesség fejlesztésének lehetőségei a kisiskolások matematikaoktatásában*, V. Országos Neveléstudományi Konferencia, Budapest, 2005.
 - *Gondolkodási típushibák a térbeli tájékozódással összefüggésben*, 150 éves az önálló debreceni tanítóképzés – Tudományos Konferencia, Debrecen, KFRTKF, 2005.