



# Dilatív stabilitás

doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Iglói Endre

DEBRECENI EGYETEM  
INFORMATIKAI KAR

Debrecen, 2008

# 1. Bevezetés

A doktori értekezés téziseiben összefoglaljuk a „*Dilative stability*” című disszertáció legfontosabb eredményeit.

A disszertáció sztochasztikus folyamatok egy dilatív stabilitásnak nevezett skálázási tulajdonságával foglalkozik. Ez a tulajdonság a jól ismert önhasonlósággal állítható párhuzamba, és azon folyamatok esetén, ahol mindkét tulajdonság definiálva van, a dilatív stabilitás az önhasonlóság általánosítása. A fő különbség közöttük az, hogy a dilatív stabilitás kifejezi a folyamat eloszlásának „elágazó ill. összefutó” jellegét, az önhasonlóságnak viszont ehhez semmi köze.

A disszertáció öt részből áll. Az első fejezet a bevezetés. A 2. fejezet összehasonlítja az önhasonlóságot és a dilatív stabilitást. A 3. és a 4. fejezet stacionárius Ornstein–Uhlenbeck (OU) típusú folyamatok ill. stacionárius, folytonos állapotterű, elágazó immigrációs (CBI) folyamatok szuperpozíciójával és az ún. LISOU ill. LISCBI (speciálisan LISDLG) határfolyamatot előállító dilatív stabil renormalizációs funkcionális határeloszlás-tétellel foglalkozik. Ezek a dilatív stabil, stacionárius növekményű folyamatok új lehetőséget adnak nem Gauss, hosszú memóriájú folyamatok modellezésére is. Az 5. fejezetben a Cox-folyamatra vonatkozó dilatív stabil renormalizációs funkcionális határeloszlás-tételt mondjuk ki.

A következőkben használt néhány speciális jelölés:

$\sim, \overset{1d}{\sim}, \overset{vd}{\sim}$  : az eloszlások, az 1-dimenziós eloszlások,

ill. a véges dimenziós eloszlások megegyezése

$\otimes, \otimes^c, \otimes^f$  : konvolúció,  $c$  rendű ill.  $f$  függvény rendű konvolúcióhatvány

$\xrightarrow{w}$  : eloszlások (valószínűségi mértékek) gyenge konvergenciája

$\xrightarrow{vd}$  : véges dimenziós eloszlások gyenge konvergenciája

$\text{cum}, \text{cum}_n$  : (együttes) kumuláns,  $n$  rendű kumuláns

$(t_1^*, \dots, t_m^*)$  :  $(t_1, \dots, t_m)$  komponensei nemcsökkenő sorrendben

$C[0, \infty)$  : a  $[0, \infty)$ -en folytonos függvények a lokálisan egyenletes konvergenciához tartozó topológiával és a Borel- (cilinder)  $\sigma$ -algebrával  
 $D[0, \infty)$  : a  $[0, \infty)$ -en càdlàg függvények halmaza a kiterjesztett Szkorohod-topológiával és a Borel- (cilinder)  $\sigma$ -algebrával  
 $\Gamma$  : a Gamma függvény

## 2. Ön hasonlóság és dilatív stabilitás

Legyen  $\mathcal{S} \doteq \{\{X(t), t \geq 0\} \text{ sztochasztikus folyamat} : X(0) = 0, \\ \{X(t), t \geq 0\} \neq 0 \text{ és eloszlásban jobbról folytonos}\}$ ,

$\mathcal{I} \doteq \{\{X(t), t \geq 0\} \in \mathcal{S} : X(1) \text{ nem Gauss, a véges dimenziós eloszlásai korlátlanul oszthatók és a } c_n(t) \doteq \text{cum}_n(X(t)), \\ t \geq 0, n \geq 2, \text{ függvények léteznek és jobbról folytonosak}\}$

és  $f, g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ . Az  $\{X(t), t \geq 0\} \in \mathcal{I}$  sztochasztikus folyamatot  $(f, g)$ -dilatív stabilnak nevezzük, ha

$$\forall T > 0 : X(Tt) \stackrel{\text{vd}}{\approx} \frac{f(T)}{\sqrt{g(T)}} X^{\otimes g(T)}(t).$$

Lamperti [7] hívta fel a figyelmet az ön hasonlóságnak nevezett tulajdonság fontosságára. Megadjuk Lamperti tételeinek dilatív stabil megfelelőit, és megmutatjuk, hogy az ön hasonlósóságra vonatkozó állítások nagy része átvihető a dilatív stabil esetre is. Az erről szóló legfontosabb eredményeink a következők.

**Tétel.** *Ha az  $\{X(t), t \geq 0\}$  folyamat  $(f, g)$ -dilatív stabil, akkor létezik pontosan egy  $(\alpha, \delta)$  amelyre  $\alpha > 0$ ,  $\delta \leq 2\alpha$  (az ilyen  $(\alpha, \delta)$ -t megengedhetőnek nevezzük) és  $f(t) = t^\alpha$ ,  $g(t) = t^\delta$ . Így a „ $(t^\alpha, t^\delta)$ -dilatív stabil” kifejezés helyett egyszerűen az „ $(\alpha, \delta)$ -dilatív stabil” kifejezést fogjuk használni. Továbbá bármely megengedhető  $(\alpha, \delta)$  esetén létezik  $(\alpha, \delta)$ -dilatív stabil folyamat.*

Bevezetve az

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\alpha\text{ss}} &\doteq \{\alpha\text{-önhasználó folyamatok}\}, \\ \mathcal{I}_{(\alpha,\delta)\text{ds}} &\doteq \{(\alpha,\delta)\text{-dilatív stabil folyamatok}\}\end{aligned}$$

jelöléseket,  $\mathcal{I}_{(\alpha,0)\text{ds}} = \mathcal{S}_{\alpha\text{ss}} \cap \mathcal{I}$ ,  $\alpha > 0$ , így  $\mathcal{I}$ -beli folyamatok esetén a dilatív stabilitás az önhasznalóság általánosítása. A következő tétel szerint azon  $\mathcal{I}$ -beli folyamatok, amelyek renormalizációs határfolyamatok, pontosan a dilatív stabil folyamatok.

**Tétel.** *Ha  $\{X(t), t \geq 0\} \in \mathcal{I}$  úgy, hogy létezik egy korlátlanul osztható  $\{Y(t), t \geq 0\}$  folyamat, amelynek az összes momentuma véges, továbbá  $f, g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  függvények, amelyekre*

$$\frac{\sqrt{g(T)}}{f(T)} Y^{\otimes \frac{1}{g(T)}}(Tt) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{vd} X(t), \quad (1)$$

és az (1)-nek megfelelő konvergencia érvényes az egydimenziós eloszlások összes kumulánsaira is, akkor létezik egy megengedhető  $(\alpha, \delta)$  úgy, hogy az  $\{X(t), t \geq 0\}$  folyamat  $(\alpha, \delta)$ -dilatív stabil, és  $f$  és  $g$   $\alpha$  ill.  $\delta$  rendű regulárisan változó függvények. Fordítva, minden  $\{X(t), t \geq 0\}$  dilatív stabil folyamat határfolyamat az előző értelemben.

A fenti két tétel bizonyításában a kumuláns függvényeket használjuk. Az első tétel bizonyításánál a kulcs a Cauchy-féle függvényegyenlet, a másodikénál pedig egy, a határfüggvény regulárisan változó voltáról szóló tétel (ld. Bingham et al. [1]).

A következő téma az önhasznalóság és a dilatív stabilitás viszonya. Az önhasznaló és a dilatív stabil folyamatok közötti kapcsolatot az ún. függvény rendű konvolúcióhatvány művelet segítségével adjuk meg. Ezen műveletet használva (amely egy külön lemmában van megalapozva) az önhasznaló–dilatív stabil kapcsolat a következő:

**Tétel.** *Legyen  $(\alpha, \delta)$  megengedhető paraméter és*

$$\begin{aligned}T_S : \mathcal{S}_{(\alpha-\frac{\delta}{2})\text{ss}} \cap \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{I}_{(\alpha,\delta)\text{ds}}, & T_S(\{Y(t), t \geq 0\}) &\doteq \{Y(t), t \geq 0\}^{\otimes t^\delta}, \\ T_D : \mathcal{I}_{(\alpha,\delta)\text{ds}} &\longrightarrow \mathcal{S}_{(\alpha-\frac{\delta}{2})\text{ss}} \cap \mathcal{I}, & T_D(\{X(t), t \geq 0\}) &\doteq \{X(t), t \geq 0\}^{\otimes t^{-\delta}},\end{aligned}$$

ahol a jobb oldalon a  $t^\delta$  és  $t^{-\delta}$  függvény rendű konvolúcióhatványok szerepelnek. Ekkor a  $T_S$  leképezés jól definiált (azaz  $\mathcal{I}_{(\alpha,\delta)_{dS}}$ -be képez) és injektív.  $T_S$  akkor és csak akkor bijektív, ha  $\delta = 0$ . Hasonló állítás igaz  $T_D$ -re is.

A fenti tétel bizonyításában azt nem könnyű megmutatni, hogy a két leképezés általában nem szürjektív. Ez azon múlik, hogy mindkét leképezés csökkenti a korrelációs együttható abszolútértékét. A tétel következményeként kapjuk, hogy a dilatív stabilitás nem egyszerűen az önhasonlóság és a hatványfüggvény rendű konvolúcióhatvány kombinációja, tehát nem fölösleges a dilatív stabilitással külön foglalkozni.

A következő részben a stacionaritás egy általánosítását, a transzlatív stabilitást definiáljuk: legyen

$\tilde{\mathcal{I}} \doteq \{ \{S(t), t \in \mathbb{R}\} \text{ sztochasztikus folyamat} : S(0) \text{ nem Gauss, a véges dimenziós eloszlásai korlátlanul oszthatók, és a } c_n(t) \doteq \text{cum}_n(S(t)), t \in \mathbb{R}, n \geq 2, \text{ kumuláns függvények léteznek és jobbról folytonosak} \}$ ,

és legyen  $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ . Az  $\{S(t), t \in \mathbb{R}\} \in \tilde{\mathcal{I}}$  folyamatot  $g$ -transzlatív stabilnak nevezzük, ha

$$\forall T \in \mathbb{R} : S(t+T) \stackrel{\text{vd}}{\approx} S^{\otimes g(T)}(t).$$

**Állítás.** Ha az  $\{S(t), t \in \mathbb{R}\}$  folyamat  $g$ -transzlatív stabil, akkor létezik pontosan egy  $\delta \in \mathbb{R}$ , amelyre  $g(t) = e^{\delta t}$ . Így az „ $e^{\delta t}$ -transzlatív stabil” kifejezés helyett egyszerűen a „ $\delta$ -transzlatív stabil” kifejezést fogjuk használni.

Bevezetve az

$$\mathcal{S}_{\text{st}} \doteq \{(-\infty, \infty)\text{-en (erősen) stacionárius folyamatok}\},$$

$$\mathcal{I}_{\delta\text{ts}} \doteq \{\delta\text{-transzlatív stabil folyamatok}\},$$

$$\mathcal{I}_{\text{wsOU}\lambda} \doteq \{\text{tágabb értelemben OU típusú folyamatok } \lambda \text{ paraméterrel}\},$$

$$\mathcal{I}_{\text{add}} \doteq \{[0, \infty)\text{-en additív folyamatok}\}$$

jelöléseket,  $\mathcal{I}_{0\text{ts}} = \mathcal{S}_{\text{st}} \cap \tilde{\mathcal{I}}$ . A transzlatív stabilitás segítségével általánosítjuk a [7] cikkben bevezetett Lamperti-transzformációt, amely tetszőleges  $\alpha > 0$  esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést ad meg az  $\alpha$ -önhasonló

és a stacionárius folyamatok között. Tehát a következő eredmény a Lamperti-transzformáció dilatív stabil megfelelője: tetszőleges megengedhető  $(\alpha, \delta)$  esetén a Lamperti-transzformáció kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést ad meg az  $(\alpha, \delta)$ -dilatív stabil és a  $\delta$ -transzlatív stabil folyamatok között. Továbbá a Lamperti-transzformáció a stacionárius,  $\alpha$  paraméterű OU típusú és az  $\alpha$ -önhasonló additív folyamatok között is létesít egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést (ld. Jeanblanc et al. [5]). Bebizonyítjuk ennek a megfelelőjét: a Lamperti-transzformáció a  $\delta$ -transzlatív stabil,  $-(\alpha-\delta/2)$  paraméterű tágabb értelemben OU típusú folyamatok és az  $(\alpha, \delta)$ -dilatív stabil, additív folyamatok között is kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést ad meg:

**Theorem.** *(Lamperti-transzformáció) Legyen  $(\alpha, \delta)$  megengedhető paraméter. Ekkor az*

$$L_{TS} : \mathcal{I}_{\delta ts} \longrightarrow \mathcal{I}_{(\alpha, \delta) ds}, \quad X(t) \doteq (L_{TS}(S))(t) \doteq t^{\alpha - \frac{\delta}{2}} S(\log t), \quad t > 0,$$

$$X(0) \doteq (L_{TS}(S))(0) \doteq 0,$$

$$L_{DS} : \mathcal{I}_{(\alpha, \delta) ds} \longrightarrow \mathcal{I}_{\delta ts}, \quad S(t) \doteq (L_{DS}(X))(t) \doteq e^{-(\alpha - \frac{\delta}{2})t} X(e^t), \quad t \in \mathbb{R},$$

leképezések jól definiáltak, azaz  $L_{TS}$   $\mathcal{I}_{(\alpha, \delta) ds}$ -be,  $L_{DS}$  pedig  $\mathcal{I}_{\delta ts}$ -be képez, és a két leképezés egymás inverze. Továbbá, feltéve, hogy  $\delta < 0$  esetén az összes folyamat 0 várhatóértékű, az

$$L_{TS}| : \mathcal{I}_{\delta ts} \cap \mathcal{I}_{wsOU-(\alpha - \frac{\delta}{2})} \longrightarrow \mathcal{I}_{(\alpha, \delta) ds} \cap \mathcal{I}_{add},$$

$$L_{DS}| : \mathcal{I}_{(\alpha, \delta) ds} \cap \mathcal{I}_{add} \longrightarrow \mathcal{I}_{\delta ts} \cap \mathcal{I}_{wsOU-(\alpha - \frac{\delta}{2})}$$

leképezések jól definiáltak,  $L_{TS}|$   $\mathcal{I}_{(\alpha, \delta) ds} \cap \mathcal{I}_{add}$ -ra,  $L_{DS}|$  pedig  $\mathcal{I}_{\delta ts} \cap \mathcal{I}_{wsOU-(\alpha - \frac{\delta}{2})}$ -ra képez, és (következésként)  $L_{TS}|$  és  $L_{DS}|$  egymás inverzei.

Van egy rész a stacionárius növekményű önhasonló és dilatív stabil folyamatokról. Ezen folyamatok azért fontosak, mert egy stacionárius növekményű, nem elfajult, dilatív stabil folyamat autokovariancia függvénye ugyanaz, mint a megfelelő  $L^2$ -stationárius növekményű önhasonló folyamat autokovariancia függvénye, ami pedig éppen egy frakcionális Brown-mozgás autokovariancia függvénye. Ezzel a hosszú memóriájú folyamatok modellezésére egy új lehetőség adódik.

A következő rész a dilatív stabil renormalizációs operátorokkal foglalkozik. Megmutatjuk, hogy az önhasonló esettel való analógia ebből a szempontból is érvényes. Nevezetesen, tetszőleges megengedhető  $(\alpha, \delta)$  esetén az  $\{A_T^{(\alpha, \delta)} : T > 0\}$  dilatív stabil renormalizációs operátorok

$$A_T^{(\alpha, \delta)} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}, \quad (A_T^{(\alpha, \delta)} X)(t) \doteq T^{-(\alpha - \frac{\delta}{2})} X^{\otimes T^{-\delta}}(Tt), \quad t \geq 0,$$

halmaza a kompozíció művelettel félcsoportot alkot. Így a dilatív stabil renormalizációs operátorok iterálhatók. Továbbá tetszőleges rögzített megengedhető  $(\alpha, \delta)$  esetén egy  $\mathcal{I}$ -beli folyamat akkor és csak akkor  $(\alpha, \delta)$ -dilatív stabil, ha bármely  $T > 0$ -ra fixpontja az  $A_T^{(\alpha, \delta)}$ -nak. Ez a tény magyarázatot ad arra, hogy miért éppen a renormalizált folyamatok konvergálnak a dilatív stabil (funkcionális) határeloszlás-tételekben.

### 3. A LISOU folyamat

Ez a fejezet stacionárius OU típusú folyamatok szuperpozíciójával és az integrált szuperpozíció folyamatra vonatkozó dilatív stabil renormalizációs határeloszlás-tétellel foglalkozik. Duffie et al. [2] definiálta és vizsgálta Markov-folyamatok regularitását és affinitását. A reguláris affin folyamatok pontosan azok a reguláris homogén Markov-folyamatok, amelyek korlátlanul dekomponálhatók (a Markov-folyamatok terminológiájában a korlátlanul oszthatóság megfelelője). Másrészt éppen a korlátlanul dekomponálható (ill. korlátlanul osztható) folyamatokat lehet szuperponálni. A reguláris affin folyamatok két fajtája: az OU típusú folyamatok és a folytonos állapotterű elágazó immigrációs folyamatok (CBI folyamatok). Ez az oka annak, hogy a 3. és a 4. fejezetben éppen OU típusú ill. CBI folyamatok vannak szuperponálva.

A szuperpozíciónak nevezett konstrukció a következő.

**SPL feltétel.** (*superpositional law*) Legyen  $1/2 < H < 1$  (későbbi szerepe: Hurst paraméter),  $0 < d_1, d_2, \dots$  egy sorozat (idő dilatációs konstansok),  $0 < p_1, p_2, \dots$  egy diszkrét eloszlás (szuperpozíciós súlyok) és legyen  $\xi$  egy diszkrét valószínűségi változó a következő eloszlással:  $P(\xi = d_i) = p_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,

(szuperpozíciós eloszlás). Legyen a  $\xi$  eloszlásfüggvénye 0-ban  $2-2H$ -rendű regulárisan változó, azaz

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = x^{2-2H} \ell\left(\frac{1}{x}\right),$$

ahol  $\ell$  egy ( $\infty$ -ben) lassan változó függvény.

Legyen  $\{L(t), t \in \mathbb{R}\}$  kétoldalú Lévy-folyamat  $(\sigma^2, \gamma, \nu)$  paraméterrel, ahol  $\gamma = \mathbf{E}L(1)$  és a  $\nu \neq 0$  Lévy-mértékre teljesül, hogy  $\int_{-1}^1 x^2 \nu(dx) + \int_{\mathbb{R} \setminus (-1,1)} e^{u|x|} \nu(dx) < \infty$ , valamilyen  $u > 0$ -ra. Legyen továbbá  $\{X(t), t \geq 0\}$  stacionárius OU típusú folyamat  $\alpha = -1$  paraméterrel és  $\{L(t), t \in \mathbb{R}\}$  meghajtó Lévy-folyamattal, és legyenek  $\{X_j(t), t \geq 0\}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , független folyamatok a következő véges dimenziós eloszlásokkal:

$$\{X_j(t), t \geq 0\} \stackrel{\text{vd}}{\sim} \{X(d_j t), t \geq 0\}^{*\otimes p_j}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

**Tétel.** *Tetszőleges  $t \geq 0$  esetén a  $\sum_j X_j(t)$  sor  $L^2$ -ben konvergens ( $t$ -ben egyenletesen is), és 1 valószínűséggel konvergens.*

Az  $Y(t) \doteq \sum_{j=1}^{\infty} X_j(t)$ ,  $t \geq 0$ , határfolyamatot OU típusú folyamatok (végtelen) szuperpozíciójának (SOU folyamatnak) nevezzük,  $(H, \ell)$  és  $(\sigma^2, \gamma, \nu)$  paraméterekkel, a

$$J_{\sigma^2, \gamma, \nu}^{(H, \ell)}(t) \doteq \int_0^t Y(s) ds, \quad t \geq 0,$$

1 valószínűséggel definiált folyamatot pedig ISOU (integrált SOU) folyamatnak nevezzük, szintén  $(H, \ell)$  és  $(\sigma^2, \gamma, \nu)$  paraméterekkel. A következő tétel szerint az ISOU folyamat konstrukciójában a szuperpozíció és az integrál sorrendje felcserélhető, és a konvergencia funkcionális határeloszlás-tételként is érvényes.

**Tétel.**

$$\forall t \geq 0 : \sum_{j=1}^n \int_0^t X_j(s) ds \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} J_{\sigma^2, \gamma, \nu}^{(H, \ell)}(t) \quad L^2\text{-ben és m.b.,}$$

továbbá

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \int_0^t X_j(s) ds, t \geq 0 \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \left\{ J_{\sigma^2, \gamma, \nu}^{(H, \ell)}(t), t \geq 0 \right\} \quad C[0, \infty)\text{-en.}$$

A fejezet fő tétele a következő.

**Tétel.** *A renormalizált centralizált ISOU folyamatok eloszlásainak családja  $C[0, \infty)$ -en gyengén konvergens. A határeloszlással megadott folyamatot  $\{J_{\sigma^2, \nu}^{(H)}(t), t \geq 0\}$ -vel jelöljük és  $(H, (\sigma^2, \nu))$  paraméterű LISOU folyamatnak (limit of [renormalized centered] ISOU processes) nevezzük:*

$$\frac{1}{T} \left\{ J_{\sigma^2, \gamma, \nu}^{(H, \ell)}(Tt) - \mathbb{E} J_{\sigma^2, \gamma, \nu}^{(H, \ell)}(Tt), t \geq 0 \right\} \stackrel{\otimes \frac{T^{2-2H}}{\ell(T)}}{\xrightarrow{T \rightarrow \infty}} \left\{ J_{\sigma^2, \nu}^{(H)}(t), t \geq 0 \right\} \\ C[0, \infty)\text{-en.}$$

*A  $H, (\sigma^2, \nu)$  paraméterű LISOU folyamat eloszlását  $C[0, \infty)$ -en egyértelműen meghatározza a folyamat 0 várhatóértéke és az együttes kumulánsai:*

$$\text{cum} \left( J_{\sigma^2, \nu}^{(H)}(t_1), \dots, J_{\sigma^2, \nu}^{(H)}(t_m) \right) = \frac{\text{cum}_m(L(1))}{m} \Gamma(3 - 2H) \\ \times \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_m} (s_2^* - s_1^* + \cdots + s_m^* - s_1^*)^{2H-2} d\underline{s}, \quad (3)$$

$0 \leq t_1, \dots, t_m, m \geq 2$ . Továbbá  $\{J_{\sigma^2, \nu}^{(H)}(t), t \geq 0\}$  stacionárius növekményű,  $(H, 2H - 2)$ -dilatív stabil folyamat.

## 4. A LISCBI folyamat

A fejezet fő eredményei az előző fejezetbeli eredmények megfelelői, csak a kiinduló folyamat most folytonos állapotterű, elágazó immigrációs (CBI) folyamat OU típusú folyamat helyett. A CBI folyamatot Kawazu–Watanabe [6] olyan,  $[0, \infty)$  állapotterű  $\{X(t), t \geq 0\}$  Feller-folyamatként definiálta, amely átmenetvalószínűség-eloszlásainak Laplace-transzformáltja:

$$\varphi_{|x}(t, u) = \mathbb{E}(e^{-uX(t)} | X(0) = x) = e^{-\phi(t, u) - \psi(t, u)x}, \quad u, t, x \geq 0.$$

A  $\phi$  és  $\psi$ , Laplace-exponens függvényeknek nevezett függvényeket Kawazu–Watanabe [6, Thm. 1.1–1.1'] és Filipović [3, Thm. 4.3] a következő

differenciálegyenletek egyértelmű megoldásaiként adják meg:

$$\partial_1 \psi(t, u) = R(\psi(t, u)), \quad \psi(0, u) = u, \quad (4)$$

$$\partial_1 \phi(t, u) = S(\psi(t, u)), \quad \phi(0, u) = 0, \quad (5)$$

ahol

$$R(u) = -\frac{\sigma^2}{2} u^2 + \alpha u + \int_0^\infty (1 - e^{-uy} - u(1 \wedge y)) m_1(dy), \quad u \geq 0, \quad (6)$$

$$S(u) = \vartheta u + \int_0^\infty (1 - e^{-uy}) m_2(dy), \quad u \geq 0, \quad (7)$$

$\sigma^2 \geq 0$ ,  $\vartheta \geq 0$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$  és  $m_1, m_2$  Borel-mértékek  $(0, \infty)$ -en, amelyekre  $\int_0^\infty (1 \wedge y^2) m_1(dy) + \int_0^\infty (1 \wedge y) m_2(dy) < \infty$ , és az  $R$  függvény kielégíti az ún. konzervativitási feltételt. Fordítva, tetszőleges, a fentiekben megadott  $\sigma^2, \vartheta, \alpha$  paraméterek,  $m_1, m_2$  Borel-mértékek és  $R, S$  Laplace-exponens függvények esetén létezik pontosan egy olyan CBI folyamat, amelynek a  $\phi, \psi$  Laplace-exponens függvényei kielégítik a (4–5) differenciálegyenleteket. A (6–7) Laplace-exponens függvényekkel megadott eloszlásokat elágazó ill. immigrációs eloszlásnak nevezzük. A stacionárius CBI folyamatra vonatkozó legfontosabb eredményünk a következő.

**Állítás.** *Ha  $\{X(t), t \geq 0\}$  olyan stacionárius CBI folyamat, amely elágazó és immigrációs eloszlásainak az összes momentuma véges, akkor minden  $m \geq 2$  esetén a folyamat  $(t_1, \dots, t_m)$  pontban vett együttes kumulánsa az  $e^{R'(0)(t_2^* - t_1^*)}, \dots, e^{R'(0)(t_m^* - t_{m-1}^*)}$  változók polinomja:*

$$\text{cum}(X(t_1), \dots, X(t_m)) = P_m(e^{R'(0)(t_2^* - t_1^*)}, \dots, e^{R'(0)(t_m^* - t_{m-1}^*)}), \quad (8)$$

$t_1, \dots, t_m \geq 0$ , ahol a

$$P_m(\underline{x}) = P_m(x_1, \dots, x_{m-1}) = \sum_{k_1, \dots, k_{m-1}} c_{k_1, \dots, k_{m-1}} x_1^{k_1} \cdots x_{m-1}^{k_{m-1}} \quad (9)$$

polinomnak a következő tulajdonságai vannak:

- i)  $c_{k_1, \dots, k_{m-1}} = \sum_{j=1}^m \lambda_{m,j}(k_1, \dots, k_{m-1}) S^{(j)}(0)$  ahol a  $\lambda_{m,j}(k_1, \dots, k_{m-1})$  együtthatók nem függenek a  $(\vartheta, m_2)$  paramétertől,
- ii) az összes  $c_{k_1, \dots, k_{m-1}}$  együttható pozitív,
- iii) a  $(\sigma^2, \alpha, m_1) \mapsto (c\sigma^2, c\alpha, cm_1)$ , azaz az  $R(t) \mapsto cR(t)$ ,  $t \geq 0$ , transzformáció hatására a  $P_m(\underline{x})$  polinom a  $P_m(\underline{x}) \mapsto \frac{1}{c} P_m(\underline{x})$ ,  $c > 0$ , módon változik,
- iv) a  $(\vartheta, m_2) \mapsto (c\vartheta, cm_2)$ , azaz az  $S(t) \mapsto cS(t)$ ,  $t \geq 0$ , transzformáció hatására a  $P_m(\underline{x})$  polinom a  $P_m(\underline{x}) \mapsto cP_m(\underline{x})$ ,  $c > 0$ , módon változik.

A szuperponálandó CBI folyamatokra tett feltételek a következők: Legyen a (6)-tal megadott  $R$  a  $(\sigma^2, \alpha = \int_1^\infty (1-y)m_1(dy) - 1, m_1)$  paraméterű elágazó eloszlás Laplace-exponens függvénye, és legyen a (7)-tel megadott  $S$  a  $(\vartheta, m_2)$  paraméterű immigrációs eloszlás Laplace-exponens függvénye. Tegyük fel, hogy  $\int_1^\infty e^{ux}(m_1 + m_2)(dx) < \infty$  valamilyen  $u > 0$ -ra. Legyen  $\{X(t), t \geq 0\}$  stacionárius CBI folyamat  $R$  és  $S$  elágazó ill. immigrációs Laplace-exponens függvényekkel. Legyenek az  $\{X_j(t), t \geq 0\}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , független folyamatok a következő véges dimenziós eloszlásokkal:

$$\{X_j(t), t \geq 0\} \stackrel{\text{vd}}{\sim} \{X(d_j t), t \geq 0\}^{\otimes p_j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

ahol a  $d_j$ -k és a  $p_j$ -k az SPL feltétel-ben megadottak.

**Tétel.** A (2) alatti tételtől kezdve a 3. fejezetben levő dolgok (a 7–8. oldalakon) igazak maradnak ill. átvihetők az OU esetről a CBI esetre, azaz ha az „OU” rövidítést a „CBI”-re cseréljük, a  $(\sigma^2, \gamma, \nu)$  és a  $(\sigma^2, \nu)$  paramétereket pedig  $(\sigma^2, m_1, \vartheta, m_2)$ -re. Továbbá a  $(\sigma^2, m_1, \vartheta, m_2)$  paraméterű LISDLG folyamat kumulánsai (3) helyett a következők:

$$\begin{aligned} & \text{cum} \left( J_{\sigma^2, m_1, \vartheta, m_2}^{(H)}(t_1), \dots, J_{\sigma^2, m_1, \vartheta, m_2}^{(H)}(t_m) \right) \\ &= \Gamma(3 - 2H) \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_m} \varphi_H(P_m)(s_2^* - s_1^*, \dots, s_m^* - s_{m-1}^*) d\underline{s}, \quad (10) \end{aligned}$$

$0 \leq t_1, \dots, t_m, m \geq 2$ , ahol  $P_m, m \geq 2$ , a (9) polinimokat jelenti, amelyek együtthatóira még az  $R'(0) = -1$  feltétel is teljesül,  $\varphi_H$  pedig a többváltozós polinomok halmazán megadott következő leképezés:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n} c_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

$$\longmapsto \varphi_H(P)(x_1, \dots, x_n) \doteq \sum_{k_1, \dots, k_n} c_{k_1, \dots, k_n} (k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n)^{2H-2}$$

(a  $P$  polinomok és a  $\varphi_H(P)$  képeik változói is csak pozitívak lehetnek).

A bizonyításban a legnehezebb azt megmutatni, hogy a (10) kumulánsok (a 0 várhatóértékkel együtt) egyértelműen meghatározzák az eloszlást. Ennek a megmutatása a 25. oldali állítás segítségével történik.

Azt a speciális esetet, amikor a CBI folyamat a

$$dX(t) = (\vartheta + \alpha X(t)) dt + \sigma \sqrt{X(t)} dB(t),$$

sztochasztikus differenciálegyenlettel megadott, ún. lineáris generátorú diffúziós folyamat (DLG folyamat) (ahol  $\{B(t), t \geq 0\}$  a standard Brown-mozgás), egy alfejezetben külön is tárgyaljuk. Ilyenkor a (10) kumulánsokra explicit kifejezés adható. Így tehát a LISDLG folyamat (a 0 várhatóértékével és) az alábbi kumulánsaival is definiálható:

$$\text{cum} \left( J_{\sigma^2, \vartheta}^{(H)}(t_1), \dots, J_{\sigma^2, \vartheta}^{(H)}(t_m) \right) = 2^{3-2H-m} \Gamma(3-2H) \vartheta \sigma^{2m-2} (m-1)! \\ \times \text{sym} \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_m} \left( |s_2 - s_1| + |s_3 - s_2| + \cdots + |s_m - s_{m-1}| + |s_1 - s_m| \right)^{2H-2} ds,$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_m, m \geq 2.$$

## 5. Cox-folyamatok és a dilatív stabilitás

Ha  $\{Y(t), t \geq 0\}$  az  $\{N(t), t \geq 0\}$  standard Poisson-folyamattól független véletlen mérték, akkor az  $\{N \triangleleft Y(t), t \geq 0\} \doteq \{N(Y(t)), t \geq 0\}$  folyamatot  $\{Y(t), t \geq 0\}$  intenzitásfolyamatú Cox-folyamatnak nevezik. Grandell [4, Thm. 4.2.2] szerint ha egy Cox-folyamat intenzitásfolyamatára önhasznó renormalizációs funkcionális határeloszlás-tétel érvényes, akkor hasonló

önhasonló renormalizációs funkcionális határeloszlás-tétel érvényes magára a Cox-folyamatra is. A dolgozat utolsó része ezen állítás dilatív stabil megfelelőjéről szól.

Ha  $\{Y(t), t \geq 0\}$  egy korlátlanul osztható véletlen mérték, akkor azt mondjuk, hogy  $\{Y(t), t \geq 0\}$ -re dilatív stabil renormalizációs funkcionális határeloszlás-tétel érvényes, ha létezik olyan  $a$  càdlàg függvény,  $(\alpha, \delta)$  megengedhető paraméter,  $\alpha$ - és  $\delta$ -rendű regulárisan változó  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  és  $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  függvények úgy, hogy  $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)/\sqrt{g(t)}) = \infty$ , továbbá  $(\alpha, \delta)$ -dilatív stabil  $\{X(t), t \geq 0\}$  càdlàg folyamat, amelyekre

$$\left\{ \frac{\sqrt{g(T)}}{f(T)} (Y(Tt) - a(Tt)), t \geq 0 \right\}^{\otimes \frac{1}{g(T)}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{w} \{X(t), t \geq 0\} \quad D[0, \infty)\text{-en.} \quad (11)$$

Tételünk a [4, Thm. 4.2.2] dilatív stabil megfelelője:

**Tétel.** *Legyen  $\{Y(t), t \geq 0\}$  korlátlanul osztható véletlen mérték, amelyre teljesül a (11) dilatív stabil renormalizációs funkcionális határeloszlás-tétel, ahol  $a \in D_0[0, \infty)$ . Ha létezik a  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a(T)}{f^2(T)} = \kappa \in [0, \infty)$  határérték, akkor az  $\{N \triangleleft Y(t), t \geq 0\}$  Cox-folyamatra a következő dilatív stabil renormalizációs funkcionális határeloszlás-tétel érvényes:*

$$\left\{ \frac{\sqrt{g(T)}}{f(T)} \left( N \triangleleft Y(Tt) - a(Tt) \right), t \geq 0 \right\}^{\otimes \frac{1}{g(T)}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{w} \{X(t) + B(\kappa t^{2\alpha}), t \geq 0\} \quad D[0, \infty)\text{-en,}$$

ahol  $\{B(t), t \geq 0\}$  az  $\{X(t), t \geq 0\}$  folyamattól független Brown-mozgás.

Intenzitásfolyamatnak speciálisan a  $\{J_{\sigma^2, \vartheta}^{(H, \ell)}(t), t \geq 0\}$  ISDLG folyamatot véve, az előző tétel következményeként kapjuk, hogy az  $\{U(t), t \geq 0\} \doteq \{N \triangleleft J_{\sigma^2, \vartheta}^{(H, \ell)}(t), t \geq 0\}$  Cox-folyamatra:

$$\left\{ \frac{1}{T} (U(Tt) - Tt \vartheta), t \geq 0 \right\}^{\otimes \frac{T^{2-2H}}{\ell(T)}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{w} \{J_{\sigma^2, \vartheta}^{(H)}(t), t \geq 0\} \quad D[0, \infty)\text{-en,} \quad (12)$$

a határfolyamat pedig a LISDLG folyamat. Ezután megmutatjuk, hogy az  $\{U(t), t \geq 0\}$  folyamat születési-halálozási immigrációs folyamatok halálozásszámláló (DC) folyamatainak szuperpozíciója (SDC folyamat). A szuperpozíciós konstrukció hasonló a korábbi ilyen konstrukciókhoz. Így (12) kimondható a következőképpen is — és ez a dolgozat utolsó állítása:

**Tétel.** Legyen  $\{U(t), t \geq 0\}$   $(H, \ell)$  és  $\nu, \lambda > 0$  paraméterű SDC folyamat ( $\nu, \lambda$  az immigrációs ill. a születési intenzitásparaméter). Ekkor az  $\{U(t), t \geq 0\}$  renormalizált centralizáltjai eloszlásainak családja  $D[0, \infty)$ -en gyengén konvergál a  $H, (2\lambda(\lambda + 1), \nu(\lambda + 1))$  paraméterű LISDLG folyamat eloszlásához:

$$\frac{1}{T} \left\{ U(Tt) - \mathbb{E}U(Tt), t \geq 0 \right\}^{\otimes \frac{T^{2-2H}}{\ell(T)}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{w} \left\{ J_{2\lambda(\lambda+1), \nu(\lambda+1)}^{(H)}(t), t \geq 0 \right\} D[0, \infty)\text{-en.}$$

## Irodalomjegyzék

- [1] N. H. BINGHAM, C. M. GOLDIE and J. L. TEUGELS, *Regular Variation*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [2] D. DUFFIE, D. FILIPOVIĆ and W. SCHACHERMAYER, Affine processes and applications in finance. *Ann. Appl. Probab.* **13** (2003), 984–1053.
- [3] D. FILIPOVIĆ, A general characterization of one factor affn term structure models. *Finance Stoch.* **5** (2001), 389–412.
- [4] J. GRANDELL, Doubly stochastic Poisson processes. *Lecture Notes in Math.* **529**, Springer, New-York, 1976.
- [5] M. JEANBLANC, J. PITMAN and M. YOR, Self-similar processes with independent increments associated with Lévy and Bessel processes. *Stochastic Process. Appl.* **100** (2002), 223–231.
- [6] K. KAWAZU and S. WATANABE, Branching processes with immigration and related limit theorems. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **16** (1971), 34–51.
- [7] J. W. LAMPERTI, Semi-stable stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **104** (1962), 62–78.

## Tudományos publikációk és hivatkozások jegyzéke

1. E. IGLÓI, On periodogram based least squares estimation of the long-memory parameter of FARMA processes. *Publ. Math. Debrecen* **44** (3–4) (1994), 367–380.
  - N. N. LEONENKO, *Limit theorems for random fields with singular spectrum*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
  - N. N. LEONENKO and W. A. WOYCZYNSKI, Parameter identification for stochastic Burgers' flows via parabolic rescaling. *Probab. Math. Statist.* **21** (2001), 1–55.
2. E. IGLÓI and G. TERDIK, Bilinear stochastic systems with fractional Brownian motion input. *Ann. Appl. Probab.* **9** (1) (1999), 46–77.
  - V. V. ANH, N. N. LEONENKO and L. M. SAKHNO, Statistical inference using higher-order information. *Journal of Multivariate Analysis* **98** (4) (2007), 706–742.
  - C. G. TURVEY, A note on scaled variance ratio estimation of the Hurst exponent with application to agricultural commodity prices. *Physica A* **337** (1) (2007), 155–165.
  - L. YAN and M. TIAN, On the local times of fractional Ornstein–Uhlenbeck process. *Lett. Math. Phys.* **73** (3) (2005), 209–220.
  - L. YAN, Y. LU and Z. XU, Some properties of the fractional Ornstein–Uhlenbeck process. *J. Phys. A* **41** (14) (2008).
3. GÁL Z., IGLÓI E. és TERDIK GY., Nagysebességű informatikai hálózat adatforgalmának matematikai statisztikai jellemzése. *Alk. Mat. Lapok* **19** (1) (1999), 29–38.
4. E. IGLÓI and G. TERDIK, Long-range dependence through gamma-mixed Ornstein–Uhlenbeck process. *Electronic J. Probab. (EJP)* **4** (1999).
  - V. V. ANH, C. C. HEYDE and N. N. LEONENKO, Dynamic models of long-memory processes driven by Lévy noise. *J. Appl. Probab.* **39** (4) (2002), 730–747.

- V. V. ANH and R. MCVINISH, Fractional differential equations driven by Lévy noise. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **16** (2) (2003), 97–119.
  - N. N. LEONENKO, Contribution to the discussion of “Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics” by O. E. Barndorff-Nielsen and N. Shephard. *J. R. Stat. Soc. Ser. B* **63** (2) (2001), 167–241.
  - L. COUTIN An introduction to (stochastic) calculus with respect to fractional Brownian motion. *Seminaire de Probabilites XL*, Lecture Notes in Math. **1899**, 3–65. Springer, Berlin, 2007.
  - R. S. MCVINISH, Optimising prediction error among completely monotone covariance sequences. *Electronic Comm. Probab. (ECP)* **13** (2008), 113–120.
  - R. S. MCVINISH, On the structure and estimation of reflection positive processes, *J. Appl. Probab.* **45** (1) (2008), 150–162.
5. TERDIK GY., IGLÓI E. és MOLNÁR I., Csonkított normális eloszlás kezelése a tejipari adatok értékelésénél. *Tejgazdaság* **60** (1) (2000), 22–29.
  6. G. TERDIK, Z. GÁL, E. IGLÓI and S. MOLNÁR, Bispectral analysis of traffic in high-speed networks. *Comput. Math. Appl.* **43** (2002), 1575–1583.
  7. E. IGLÓI and G. TERDIK, Superposition of diffusions with linear generator and its multifractal limit process. *ESAIM: Probability and Statistics* **7** (2003), 23–88.
    - E. P. TSOLAKI, Testing nonstationary time series for Gaussianity and linearity using the evolutionary bispectrum: An application to internet traffic data. *Signal Processing* **88** (6) (2008), 1355–1367.
  8. E. IGLÓI, Renormalization group of and convergence to the LISDLG process. *ESAIM: Probability and Statistics* **8** (2004), 102–114.

9. E. IGLÓI, A rate-optimal trigonometric series expansion of the fractional Brownian motion. *Electronic J. Probab. (EJP)* **10** (2005).
  - J. ISTAS, Karhunen–Loève expansion of spherical fractional Brownian motions. *Statistics & Probability Letters* **76** (14) (2006), 1578–1583.
  - A. MALYARENKO, An optimal series expansion of the multiparameter fractional Brownian motion. *J. Theor. Probab.* **21** (2) (2008), 459–475.
  - A. W. VAN DER VAART and J. H. VAN ZANTEN, Rates of contraction of posterior distributions based on Gaussian process priors. *Ann. Statist.* **36** (3) (2008), 1435–1463.

## Konferencia előadások

1. E. IGLÓI and G. TERDIK, Bilinear stochastic systems with long-range dependence in continuous time, Stochastic differential and difference equations (Győr, Hungary, 1996), 299–307. *Progr. Systems Control Theory* **23** (1997).
2. E. IGLÓI and G. TERDIK, Bilinear modelling of Chandler wobble. XVIII. Seminar on Stability Problems of Stochastic Models (Hajdúszoboszló, Hungary, 1997). *Theor. Probability Appl.* **42** (2) (1998).
3. E. IGLÓI and G. TERDIK, Long-range dependent limit of processes with short memory. *Limit theorems in probability and statistics, Vol. II (Balatonlelle, 1999)*, 189–208. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.