SZAKDOLGOZAT

Sereg Edgár

Debrecen

2009

Debreceni Egyetem
Informatika Kar

ISKOLAI PROBLÉMÁK SORBANÁLLÁSI MODELLEZÉSE

TÉMAVEZETŐ:
Dr. Sztrik János
tanszékvezető
egyetemi docens

KÉSZÍTETTE:
Sereg Edgár
informatika tanár

Debrecen
2009

A Debreceni Egyetemen eltöltött majdnem tíz éve alatt két diplomát szereztem, de már az első – matematika tanári – képzésem alkalmával sikerült beleszeretnem a valószínűségszámítás tudományába és alkalmazásaiba. Ehhez és az érdeklődés fenntartásához állandó támogatókra is szükségem volt, amelyben Dr. Sztrik János Tanár Úr volt segítségemre. Különös megtiszteltetés, hogy leendő diplomám megszerzése során ismét együtt dolgozhattam Tanár Úrral.

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés

Bár nem akarjuk, de nagyon sokszor sorba kell állnunk. Várakozunk a buszmegállóban, a boltban, a postán, a bankban, stb. Nemcsak mi, hanem számos területen előforduló igények is sorba állnak, pl. hívások a telefonközpontban, levelek és iratok a hivatalban, programok a központi egységnél. Ha ismerjük a kiszolgálási szabályokat és a kiszolgálási időket a magunk módján csökkenteni tudjuk a várakozási időt, pl. ismerősöket keresünk a sorban, ismerős a kiszolgáló főnöke, stb. Ezt a módszert nem tudjuk alkalmazni az automatikus rendszereknél, de prioritások megadásával egyes igényeknek kevesebbet kell várakozni, mint a többinek.

Nem véletlen, hogy szóbahoztuk a telefonforgalmi és számítógépes problémákat. Az elmélet történetében döntő helyet foglalnak el ezek az alkalmazási területek. A sorbanállási rendszerek tanulmányozását a telefonforgalmi problémák megoldására A. K. Erlang dán mérnök kezdte el a XX. század elején.

Munkája nemcsak a mérnökök, hanem a matematikusok figyelmét is felkeltette és nagyon sok cikk és könyv foglalkozott a valószínűségszámítási háttérrel. A sorbanállási elmélet szinte önálló tudománnyá nőtte ki magát, melynek eredményeit és módszereit sikerrel alkalmazzák többek között a megbízhatóságelméletben, számítástudományban, operációkutatásban. Sok kiváló matematikus szerzett hírnevet a sorbanállási elmélet területén. Ami rendkívül fontos, hogy egy jelenleg is dinamikusan fejlődő területről van szó. Ehhez nagyban hozzájárult az utóbbi évtizedek telekommunikációs fejlődése.

A szakdolgozat célja néhány az iskolában előforduló várokozási probléma vizsgálata sorbanállási modellek segítségével. Ilyen problémák a könyvtári kölcsönzés, a felvételi dolgozatok rögzítése, az iskolai internet elérhetőséget nyújtó számítógépek kihasználtságát érintő kérdések. A dolgozat egyes részei rendkívül friss eredmények is tartalmaz. Az elméleti vizsgálódás mellett példákkal illetve programok segítségével próbáltam színesebbé, változatosabbá tenni a dolgozatot.

2. Általános jellemzők

A sorbanállási rendszerek vizsgálatánál alapvető szerepük van a Markov - folyamatoknak. Ezen belül is a születési-halálozási folyamatoknak. Ebben az esetben minden állapotból, csak „szomszédos” állapotba léphetünk. Állapottérnek ekkor a nem negatív egész számok halmazát választjuk, azaz ha a várakozás nyelvét használjuk, akkor a sorban mindig egyel többen (érkeznek a sorba) vagy egyel kevesebben (elmennek) állnak.

Ahhoz, hogy egy *X(t)* Markov lánc születési-halálozási folyamat legyen, teljesítenie kell az alábbi feltételeket:

1. $P(X(t+h)=k+1 \mid X(t)=k)=\lambda_k h+o(h)$
2. $P(X(t+h)=k-1 \mid X(t)=k)=\mu_k h+o(h)$
3. $P(X(t+h)=k \mid X(t)=k)=1-(\lambda_k+\mu_k)h+o(h)$
4. $P(X(t+h)=m \mid X(t)=k)=o(h), \quad |m-k|>1$

ahol *h* egy tetszőlegesen kis intervallumot jelent, *o(h)* pedig olyan mennyiséget jelöl, amely gyorsabban tart nullához, mint h, vagyis

$$\frac{o(h)}{h} \to 0 \text{, ha } h \to 0.$$

A λ_k-kat születési intenzitásoknak, a μ_k-kat pedig kihalási intenzitásoknak nevezzük. A $P_k(t)=P(X(t)=k)$ jelölés bevezetésével a következőket kapjuk.

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P_0(t)(1-\lambda_0 h+o(h))+P_1(t)\mu_1 \\ P_k(t+k) &= P_k(t)(1-\lambda_k h-\mu_k h+o(h))+ \\ &\quad + P_{k-1}(t)(\lambda_{k-1}h+o(h))+ \\ &\quad + P_{k+1}(t)(\mu_{k+1}h+o(h))+o(h), \end{aligned}$$

Mindkét oldalból kivonva $P_0(t)$-t illetve $P_k(t)$-t osztjuk az egyenleteket *h*-val, akkor $h \to 0$ esetén a következő differenciálegyenletek kapjuk:

(1) $$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda_0 P_0(t)+\mu_1 P_1(t)$$

(2) $$\frac{dP_k(t)}{dt}=-(\lambda_k+\mu_k)P_k(t)+\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)+\mu_{k+1}P_{k+1}(t), \quad k=1,2,3,\ldots$$

Látható, hogy az általános, időtől függő megoldás nehezen adható meg. Azonban, még ha a $P_k(t)$ függvényeket meg is tudnánk határozni, nem világos, hogy mennyire segítene minket ez a függvényhalmaz abban, hogy jobban át tudjuk látni a sorbanállási rendszer viselkedését. Ezért azt kérdezzük, vajon a $P_k(t)$ valószínűségek a t növekedésével megállapodnak-e végül, beáll-e stacionárius állapot. Feltéve, hogy létezik ez az állapot és

$$P_k := \lim_{t \to \infty} P_k(t)\,,$$

az (1) (2) egyenletekben a $\lim_{t \to \infty} \frac{dP_k(t)}{dt}$ mennyiségeket nullával tehetjük egyenlővé, azaz

(3) $$0 = -(\lambda_k + \mu_k)P_k + \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}\,, \quad ha \;\; k \geq 0$$

feltéve, hogy $\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$. Megköveteljük, hogy a fenti események teljes eseményrendszert alkossanak, amelyre normalizáló feltételként hivatkozunk:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1\,.$$

Egyensúlyi helyzetben a befelé irányuló folyamatnak egyenlőnek kell lennie a kifelé irányuló folyamattal, így egy tetszőleges *k* állapotba való beáramlás intenzitása egyenlő a *k* állapotból való kiáramlás intenzitásával, azaz

$$\lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1} = (\lambda_k + \mu_k)P_k$$

A (3) egyenleteket figyelembe véve, a következőket kapjuk:

$$\lambda_{k-1}P_{k-1} = \mu_k P_k\,,$$

így az általános megoldásra könnyen adódik

(4) $$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} P_0 = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} P_0\,.$$

Ahhoz, hogy egy sorbanállási rendszert teljesen jellemezhessünk, meg kell adnunk azt a folyamatot, amely a beérkező igényeket írja le, és meg kell adnunk a kiszolgálás szabályait és struktúráját. A beérkező folyamatot általában az egymás után beérkező igények közötti időintervallumok eloszlásával adhatjuk meg - *A(t)*.
A másik sztochasztikus mennyiség, amit meg kell adnunk, az a kiszolgálási idő eloszlása - *B(t)*. Meg kell határoznunk a rendszer befogadóképességét, ami nem más mint a várakozó sor maximális hossza - K. Egy további rendszerjellemző a kiszolgálóegységek száma valamint a kiszolgálási elv.

Mindezek ismeretében a következő jellemzőket határozhatjuk meg a sorbanállási rendszer hatékonyságának, teljesítményének vizsgálata során:

- az igények (átlagos) várakozási ideje: $\overline{W}$,
- a(z) (átlagos) válaszolási idő: $\overline{T}$,
- a sorban lévő igények (átlagos) száma: $\overline{Q}$,
- a rendszerben lévő igények (átlagos) száma: $\overline{N}$,
- a foglaltsági intervallum (átlagos) hossza, vagyis az a folytonos időintervallum, amelyben a kiszolgálóegység állandóan foglalt: $E\delta$
- a tétlenségi időszakasz (áltagos) hossza: Ei,
- a rendszer forgalmi intenzitása: $\rho = \frac{\text{átlagos kiszolgálási idő}}{\text{átlagos beérkezési időköz}}$
- a szerver kihasználtsága: U_S,
- a rendszer átbocsátóképessége

Mielőtt rátérnénk a különböző modellek vizsgálatára, néhány jelölést vezetünk be, amely segítségével osztályozhatjuk a rendszereket. A következő jelölés általánosan használt,

N / A / B / m / K, ahol

N: az igényforrások száma,

A: a beérkezési időközök eloszlásfüggvénye,

B: a kiszolgálási idő eloszlásfüggvénye,

m: a kiszolgálóegységek száma,

K: a várakozási sor kapacitása.

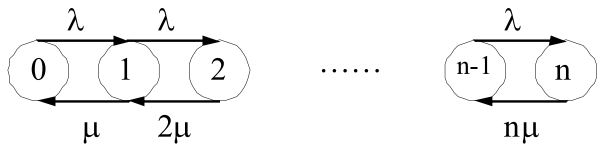
Ha A vagy B exponenciális eloszlású, akkor az M jelölést, ha általános eloszlásúak, akkor a G jelölést használjuk helyettük. Megmutatható, hogy ha a beérkezési időközök λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek, akkor a beérkezési folyamat Poisson folyamat. Számos sorbanállási rendszerre teljesülnek az ún. Little-formulák, amelyek a következőket állítják:

1. Az átlagos beérkezési intenzitás és az átlagos válaszolási idő szorzata megadja a rendszerben lévő igények átlagos számát.
2. Az átlagos beérkezési intenzitás és az átlagos várakozási idő szorzata egyenlő az átlagos sor hosszával.

3. Az M/M/n/n típusú Erlang-féle veszteséges rendszer

Bizonyára sokszor előfordul minden iskolában, hogy a szülők a felvételi dolgozat megírását követően érdeklődnek gyermekük írásbeli eredménye után. Ha az iskola *n* különböző készüléken fogadja a hívásokat, akkor az is előfordulhat, hogy a telefon foglalt állást jelez, sőt bontja a központ a kapcsolatot. A következőkben ennek a problémának a modellezése következik. Az elkövetkezőkben szerver alatt a kiszolgáló személyzetet értjük.

Ezt a rendszert *n* csatornás veszteséges modellként is szokás nevezni. Az igények az *n* csatornás rendszerbe Poisson-folyamat szerint érkeznek. Ha nincs üres szerver, akkor a hívás elvész. Ez a probléma a tömegkiszolgálás egyik legrégebbi problémája, amellyel a telefonközpontok kihasználtságával kapcsolatban A. K. Erlang és C. Palm. foglalkozott. A feltételek alapján ez egy születési-kihalási folyamattal modellezhető, melynek állapotdiagramja és intenzitásai a következők:



Ábra Hiba! A kapcsoló argumentuma érvénytelen.**.**

Az M/M/n/n rendszer állapotátmenetei

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda\,, & ha \quad k < n \\ 0\,, & ha \quad k \geq n \end{cases}$$

$$\mu_k = k\mu\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

A $\mu_k = k\mu$, ugyanis *k* darab független, μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó minimuma szintén exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek paramétere a részparaméterek összege, vagyis $k\mu$. Így az abszolút valószínűségek (4) alapján a következők lesznek:

$$P_k = \begin{cases} P_o \prod_{i=0}^{k-1} \dfrac{\lambda}{(i+1)\mu} = P_o \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!} & , \quad ha \ \ k \le n \\ 0 & , \quad ha \ \ k > n \end{cases}$$

A normalizáló feltétel miatt:

$$P_o = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \right)^{-1},$$

így

$$P_k = \frac{\dfrac{\rho^k}{k!}}{\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\rho^i}{i!}}, \qquad k \le n$$

A rendszer egyik jellemzője a P_n valószínűség, amelyet először Erlang vezetettbe és Erlang-féle veszteségformula vagy Erlang-féle B formula néven ismert, és $B(n,\rho)$ szimbólummal jelölik. A P_n valószínűség annak stacionárius valószínűsége, hogy egy újonnan érkező hívást nem fogad a rendszer, azaz a hívás elvész.

Az átlagos beérkezési intenzitás valójában kisebb mint λ, mivel néhány hívást elutasít a rendszer. Így a tényleges beérkezés intenzitása $\lambda(1-B(n,\rho))$. Továbbá az átlagos sorhossz illetve az átlagos várakozási idők egyaránt zérók, ugyanis nem várakozhatnak a beérkezett hívások. Így a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma megegyezik a foglalt szerverek átlagos számával, vagyis

$$\overline{N} = \sum_{j=0}^{n} jP_j = \sum_{j=0}^{n} j \frac{\rho^j}{j!} P_0 = \rho \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} P_0 = \rho(1-P_n) = \rho(1-B(n,\rho)).$$

S mivel a válaszolási idő egyenlő a kiszolgálási idővel, így a válaszolási idő eloszlásfüggvénye megegyezik a kiszolgálási idő eloszlásfüggvényével, azaz

(5) $$F_W(x) = 1 - e^{\mu x}.$$

Erlang sejtette, majd később be is bizonyították, hogy az (5) összefüggés kivételével minden formula igaz az M/G/n/n típusú rendszerekre is. Ezért ezekben a rendszerekben az átlagos kiszolgálási idő és a $B(n,\rho)$ érték a legfontosabb paraméterek.

Mint ahogy azt fent is említettem az egyik legfontosabb érték a P_n valószínűség meghatározása, azonban nagy számú szerver esetén a számolás meglehetősen hosszadalmas. Mivel a sorbanállási rendszerek nagy része számítógépes környezetben alkalmazható, ezért nem meglepő, hogy egy algoritmus segítségével számoljuk ki az igényvesztés valószínűségét. A következő algoritmus HM (Ham módisított) algoritmusként ismert.

ALGORITMUS

Jelölje ρ a forgalmi intenzitást és *n* a kiszolgálóegységek számát. Ekkor az Erlang-féle veszteségformula kiszámítható a következő rekurzív módon:

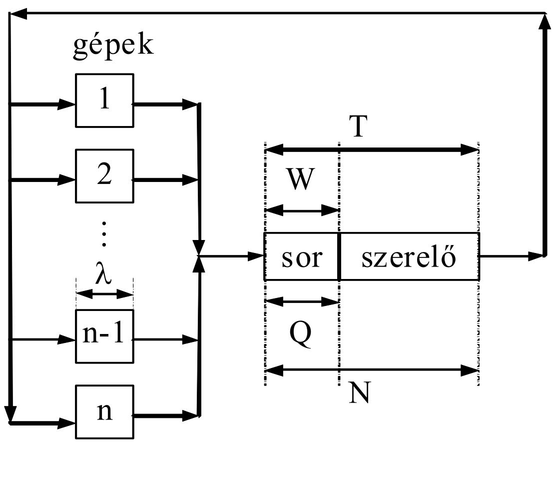
$$B(m,\rho) = \frac{\rho B(m-1,\rho)}{m + \rho B(m-1,\rho)} \qquad m = 2, 3, \dots, n.$$

$$B(1,\rho) = \frac{\rho}{1+\rho}$$

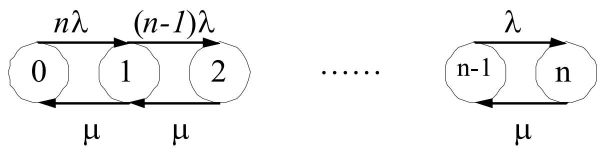
4. Az n/M/M/1 típusú rendszer (Gépkiszolgálási probléma egy szerelővel)

Az iskolákban a tanév kezdés alkalmával az egyik legproblémásabb kérdés a tankönyvek osztása. Ezt a feladatot általában a könyvtáros végzi, mivel ő az illetékes pl az ingyen tankönyvek készletében. A diákok a tankönyvigényléssel kapcsolatos kérdésekkel annyi különböző helyről érkezhetnek, ahány osztálya van az iskolának. Az osztályokat az irodalom általános elnevezése alapján tekinthetjük gépeknek, vagyis forrásoknak, a könyvtárost pedig szerelőnek, vagy szervernek.

Ezt a modellt több néven is szokták említeni. Ebben az esetben a forrás - ahonnan az igények érkezhetnek - véges számú. Ez az egyik legfontosabb sorbanállási modell. Az igények generálását most *n* db osztály végzi úgy, hogy az ott eltöltött idő minden igény esetén egymástól független λ paraméterű valószínűségi változó. A kiszolgálási idő a beérkezésektől független μ paraméterű exponenciális valószínűségi változó. Az osztályok akkor lépnek be a sorbanállási rendszerbe, ha van az osztályból valaki lemegy a problémájával a könyvtároshoz. A rendszer biztosan eléri az egyensúlyi helyzetet, mert itt nem lép fel konvergencia probléma. Ha már *k* osztályból érkezett diák, akkor az *n-k* osztály működési idejének eloszlása *n-k* db azonos, egymástól független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó minimuma, amely szintén exponenciális eloszlású $(n-k)\lambda$ paraméterrel. Így az állapotátmenet diagramm alapján a születési-kihalási intenzitások:



Ábra Hiba! A kapcsoló argumentuma



Ábra Hiba! A kapcsoló argumentuma érvénytelen.. **Az n/M/M/1 rendszer állapotai**

$$\lambda_k = \begin{cases} (n-k)\lambda\,, & ha \ \ 0 \le k \le n \\ 0\,, & ha \ \ k > n \end{cases}$$

$$\mu_k = \mu\,, \qquad ha \quad k \ge 1.$$

Így az abszolút valószínűségekre a következők adódnak:

$$P_k = \frac{n!}{(n-k)!}\rho^k P_0\,, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\rho^k}$$

Ha $\sigma = \frac{\mu}{\lambda}$, akkor a következő összefüggést kapjuk:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\rho^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\rho^{n-k}} = \frac{1}{n!\rho^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\rho^k}} = \frac{\frac{\sigma^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma^k}{k!}} = B(n,\sigma)$$

Így a könyvtártos kihasználtsága:

$$U_S = 1 - P_0 = 1 - B(n, \rho^{-1})\,.$$

Mielőtt még rátérnénk a rendszer jellemzőinek meghatározásához vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $P(k,\lambda)$ a λ paraméterű Poisson-eloszlás, és $Q(k,\lambda)$ ennek kumulatív eloszlása, azaz

$$P(k,\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\,,\qquad 0\le k<\infty$$

$$Q(k,\lambda)=\sum_{i=0}^{k}P(i,\lambda)\,,\quad 0\le k<\infty$$

Ekkor

$$\frac{P(n-k,\rho^{-1})}{Q(n,\rho^{-1})}=\frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}\dfrac{\mu^k}{\lambda^k}e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{n!}{i!}\dfrac{\mu^i}{\lambda^i}e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}=\frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}\rho^k}{\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{n!}{i!}\rho^{n-i}}=\frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}\rho^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{(n-i)!}\rho^i}=P_k$$

Ha P_k^E-vel jelöljük az Erlang-féle veszteségmodellben a valószínűségeket, akkor az alábbi összefüggés olvasható ki az előző egyenlőségből:

$$P_k=P_{n-k}^E\,,$$

ahol forgalmi intenzitások egymás reciprokai.

4.1 A rendszer jellemzőinek meghatározása

A könyvtáros kihasználtsága: $U_S=1-P_0=1-B(n,\rho^{-1})=\dfrac{Q(n-1,\rho^{-1})}{Q(n,\rho^{-1})}$.

A rendszer átbocsátóképessége: $\lambda_t=\mu U_S$.

A rendszerben tartózkodó diákok átlagos száma:

$$\overline{N}=\sum_{k=0}^{n}kP_k=n-\sum_{k=0}^{n}(n-k)P_k=n-\sum_{k=0}^{n}(n-k)P_{n-k}^E=$$
$$=n-\sum_{k=0}^{n}kP_k^E=n-\rho^{-1}(1-B(n,\rho^{-1}))=n-\frac{U_S}{\rho}$$

Az átlagos sorhossz:

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)P_k = \sum_{k=1}^{n} kP_k - \sum_{k=1}^{n} P_k = \overline{N} - U_S .$$

Az igénygenerálásra alkalmasosztályok száma:

$$\overline{m} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)P_k = \overline{N_E} = \frac{U_S}{\rho} .$$

Nyilván várható volt, hogy a problémamentes osztályok átlagos száma egyenlő az Erlang-féle modell esetén a foglalt szerverek számával és fordítva.

A könyvtáros átlagos foglaltsági periódushossza:

$$U_S = 1 - P_0 = \frac{E\delta}{Ei + E\delta} = \frac{E\delta}{\frac{1}{n\lambda} + E\delta}$$

$$E\delta = \frac{1-P_0}{n\lambda P_0} = \frac{U_S}{n\lambda(1-U_S)}$$

Az osztályfőnökök kihasználtsága:

Nyilván az osztályfőnökök akkor vannak kihasználva, ha nem merül fel kérdés a tankönyvvásárlással kapcsolatban, mert akkor az elküldött gyereket meg kell várni, amíg visszaér a válasszal. Így az összes osztályfőnök kihasználtsága:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n}(n-k)P_k = \overline{m} = \frac{\mu}{\lambda}U_S$$

Egy osztályfőnök kihasználtsága: $U_t = \frac{\overline{m}}{n}$.

Az előző összefüggésből kiolvasható, hogy $\lambda\overline{m} = \mu U_S = \lambda_t$.

Az osztályok átlagos várakozási ideje:

$$U_t = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \overline{W} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\overline{m}}{n}$$

$$\lambda\overline{m} = \frac{n}{\frac{1}{\lambda} + \overline{W} + \frac{1}{\mu}}$$

$$\lambda\overline{m}\,\overline{W} = n - \overline{m}(1+\rho) = n - \frac{U_S}{\rho}(1+\rho)$$

$$= n - \frac{U_S}{\rho} - U_S = \overline{N} - U_S = \overline{Q}$$

Megkaptuk az átlagos sorhosszra vonatkozó Little-formulát, ugyanis az átlagos beérkezési intenzitás $\overline{m}\lambda$. Hasonlóan nyerhető a rendszerben tartózkodó igények számára vonatkozó Little-formula is, azaz

$$\overline{m}\lambda\overline{T} = \overline{N}.$$

Látható, hogy a rendszerjellemzők meghatározása során minden esetben szükségük van a könyvtáros kihasználtságára. Most már valóban látható, hogy miért volt szükség az Erlang-féle veszteségmodell és az egy kiszolgálós véges forrású rendszerek kapcsolatának meghatározására. Így ugyanis lehetővé vált a U_S mennyiség egyszerű kiszámítása számítógépes környezetben.

Bizonyos esetekben azonban nem elég meghatároznunk az átlagos jellemzőket. Elképzelhető, hogy szükségünk van a várakozási vagy a tartózkodási idő eloszlására. Legyen R_k annak valószínűsége, hogy egy újonnan érkező diák k másik diákot talál a rendszerben. Poisson folyamatok esetén a P_k az és R_k valószínűségek egyenlők. Véges forrású rendszerekben ez az összefüggés nem érvényes. Szerencsére, azonban egy egyszerű kapcsolat mutatható ki a két eloszlás között, mint azt látni fogjuk. Stacionárius esetben ha k osztályban áll a munka, nem működik, akkor egy $(t, t+\tau)$ intervallum során beérkező igények átlagos száma

$\lambda_k(n)\tau P_k(n)$. Ahogy τ-vel tartunk a végtelenbe annak valószínűsége, hogy egy érkező diák *k* másikat talál a rendszerben megadható a következő módon:

$$R_k(n) = \frac{\lambda_k(n)\tau P_k(n)}{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(n)\tau P_i(n)}, \qquad 0 \le k \le n-1.$$

Az előző összefüggés érvényes minden állapotfüggő születési (vagy beérkezési) folyamatra. Ha behelyettesítjük a születési intenzitásokat és egyszerűsítünk τ-val, akkor a következőt kapjuk:

$$R_k(n) = \frac{(n-k)P_k(n)}{\sum_{i=0}^{n}(n-i)P_i(n)} = \frac{(n-k)\dfrac{n!}{(n-k)!}P_0}{\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\dfrac{n!}{(n-i)!}P_0} = \frac{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!}}{\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(n-1-i)!}} = P_k(n-1).$$

Az átalakítások során azt kaptuk, hogy annak valószínűsége, hogy egy *n* osztályból álló, véges forrású rendszerben egy újonnan érkező igény *k* igényt talál a rendszerben egyenlő annak abszolút valószínűségével, hogy egy (*n-1*) véges forrású modell esetén *k* igény tartózkodik a rendszerben.

Jelölje $F_T(t)$ egy diák rendszerben eltöltött idejének eloszlásfüggvényét. Legyen továbbá A azon diákok száma, amelyet egy újonnan érkező diák talál a rendszerben. Ekkor

$$F_T(t) = P(T \le t) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T \le t \mid A = k)\, R_k(n)$$

Ha egy diák érkezése során *k* másik tanuló tartózkodik a rendszerben, akkor a rendszerben eltöltött idejének eloszlása egyenlő (n+1) független, azonos μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegével. Így a sűrűségfüggvénye

$$f_{T|k}(x) = \frac{\mu(\mu x)^k e^{-\mu x}}{k!}, \quad x \ge 0$$

és

$$P\left(T \le t \mid A = k\right) = \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^k e^{-\mu x}}{k!}\, dx\,.$$

Tehát

$$F_T(t) = P(T \le t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^k e^{-\mu x}}{k!}\, dx \right\} R_k(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} Q(k, \mu t) P_k(n-1) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(n-k-1, \rho^{-1}) Q(k, \mu t)}{Q(n-1, \rho^{-1})} = 1 - \frac{Q(n-1, \mu t + \rho^{-1})}{Q(n-1, \rho^{-1})}$$

Az utolsó egyenlőség során felhasználtam, a következő összefüggés:

$$\sum_{j=0}^{l} P(l-j, \mu) Q(j, \lambda) = Q(l, \lambda + \mu)\,.$$

Hasonló átalakítások után az átlagos sorbanállási idő eloszlása

$$F_W(t) = 1 - \frac{Q(n-2, \mu t + \rho^{-1})}{Q(n-1, \rho^{-1})}\,,$$

illetve a válaszolási idő és a várakozási idő sűrűségfüggvénye

$$f_T(x) = \frac{\mu\, P(n-1, \rho^{-1} + \mu x)}{Q(n-1, \rho^{-1})}$$

$$f_W(x) = \frac{\mu\, P(n-2, \rho^{-1} + \mu x)}{Q(n-1, \rho^{-1})}$$

Bizonyos esetekben azonban nagyon hosszadalmas meghatározni a $Q(n, \lambda)$ típusú kifejezéseket. Ennek a problémának az egyik lehetséges megoldása a Poisson eloszlás normális eloszlással való közelítése, a következő módon.

Kis n-re $Q(n, \lambda)$ nyilván könnyen számolható, míg nagy n-re és nagy λ-ra (λ>15) a Poisson eloszlás közelíthető λ átlagú és λ szórású normális eloszlással. Így $P(n, \lambda)$ és $Q(n, \lambda)$ a következő alakban írhatók:

$$P(n,\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left\{ \frac{(n + \frac{1}{2} - \lambda)^2}{2\lambda} \right\}$$

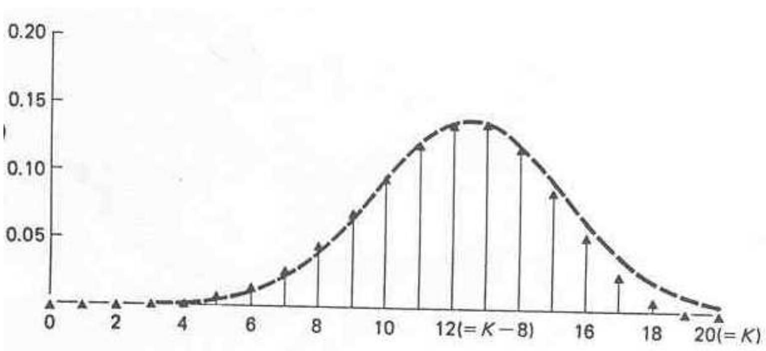
$$Q(n,\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \approx \Phi\left(\frac{n + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvénye. Az $\frac{1}{2}$ értéket azért adtuk hozzá a számlálókhoz, mert a $P(n,\lambda)$ körülbelül $n = \lambda - \frac{1}{2}$-nél veszi fel a maximumát.

Tegyük fel, hogy ρ^{-1} és $n - \rho^{-1}$ elég nagyok. Ekkor $Q(n-1,\rho^{-1})\approx 1$ és az abszolút valószínűségek a következő alakban számolgatók:

$$P_k \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho^{-1}}} \exp\left\{ -\frac{\left[k - (n - \rho^{-1} + \frac{1}{2})\right]^2}{2\rho^{-1}} \right\}, \quad 0 \le k \le n.$$

A fentiek szerint a rendszerben lévő igények száma megközelítőleg normális eloszlású $n - \rho^{-1}$ átlaggal és ρ^{-1} szórással. A következő ábrán a pontos megoldást a nyilak jelölik, míg a közelítő megoldást a szaggatottal jelzett normális görbe, amikor ρ^{-1}=8 és n=20.



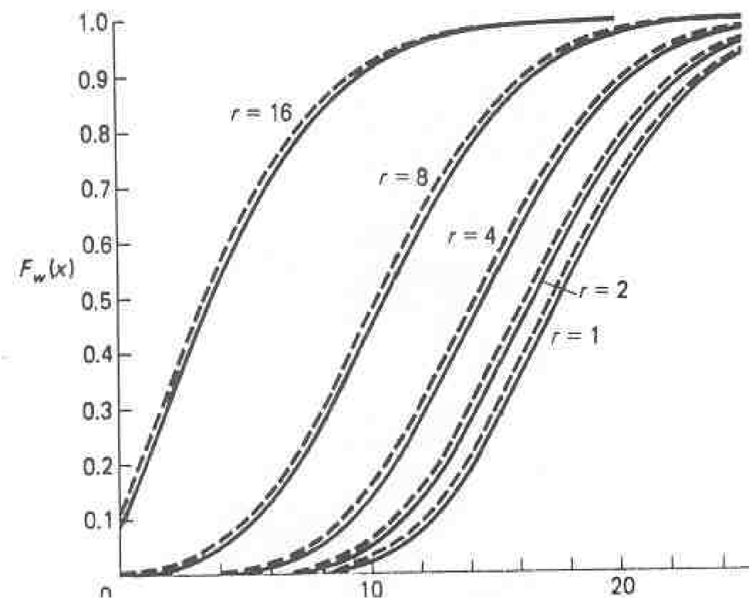
Ábra Hiba! A kapcsoló argumentuma érvénytelen.**. A pontos és a becsült megoldások viszonya**

Így a közelítő formulák alkalmazhatók a válaszolási illetve várakozási idők eloszlás valamint sűrűségfüggvényeire. Az eredmény azonban elég elszomorító. Éppen ezért alkalmazzuk a következő összefüggést. Ha egy x valószínűségi változó megközelítőleg normális eloszlású λ átlaggal és λ szórással, akkor az $y = 2\sqrt{x}$ is megközelítőleg normális eloszlású $2\sqrt{\lambda}$ átlaggal és 1 szórással. Így a kumulatív eloszlás a következő módon közelíthető:

$$Q(n,\lambda) \approx \Phi(2(\sqrt{x+\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\lambda})),$$

$$\begin{aligned} F_W(t) &= 1 - \frac{Q(n-2, \mu t + \rho^{-1})}{Q(n-1, \rho^{-1})} \approx \\ &\approx 1 - \Phi(2(\sqrt{n-2+\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\mu t + \rho^{-1}})) = \\ &= \Phi(2(\sqrt{n-2+\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\mu t + \rho^{-1}})). \end{aligned}$$

A következő ábrán a szaggatott görbe az n=20 és ρ^{-1}=1,2,4,8,16 eseteket mutatja a pontos megoldásokkal együtt. A válaszolási idő eloszlását is hasonló pontossággal tudjuk meghatározni.



Ábra Hiba! A kapcsoló argumentuma érvénytelen.. **A pontos illetve becsült várakozási idők**

Megmutatjuk, hogy a rendszer átbocsátóképessége a következő módon is kiszámolható:

$$\lambda_t = \frac{n}{\frac{1}{\lambda} + \overline{T}},$$

ugyanis

$$\lambda_t = \frac{n}{\frac{1}{\lambda} + \overline{T}} = \frac{n}{\frac{1}{\lambda} + \frac{\overline{N}}{\lambda \overline{m}}} = \frac{n}{\frac{\overline{N} + \overline{m}}{\lambda \overline{m}}} = \frac{n}{\frac{n}{\lambda \overline{m}}} = \lambda \overline{m}.$$

Felhasználva, hogy $\lambda_t = \mu U_S = \mu(1 - P_0)$,

$$\overline{T} = \frac{n}{(1 - P_o(n))\mu} - \frac{1}{\lambda}.$$

Nagy *n*-re a tétlenség valószínűsége nagyon kicsi, így a nevező megközelítőleg 1. Ebben az esetben

$$\overline{T} \approx \frac{n}{\mu} - \frac{1}{\lambda}.$$

Továbbá n=1 esetben az átlagos válaszolási idő $\overline{T} = \frac{1}{\mu}$.

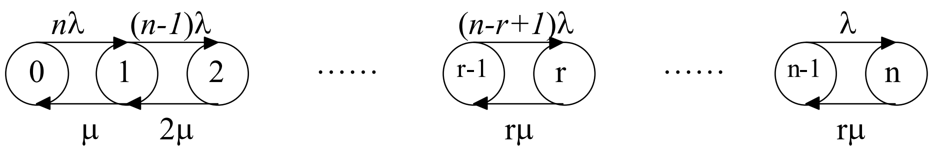
Ha a két válaszolási időt az $\frac{1}{\mu}$ függvényeként tekintjük, akkor a metszéspontjukra - *n** - a következő teljesül:

$$\frac{1}{\mu} = n^* \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad n^* = \frac{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\mu}} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda}.$$

Az *n**-t telítettségi pontnak nevezzük, amely a következő tulajdonsággal bír. Ha a forrásban eltöltött idők és a kiszolgálási idők konstansok lennének, akkor az n* lenne a legtöbb diák amelyet még úgy tudna kiszolgálni a könyvtáros, hogy nem keletkezne sor. Mivel azonban az a kiszolgálási idők valószínűségi változók, az aktuális válaszolási idők nagyobbak mint az a két egyenes amelyek metszéspontja *n**, így már n*-nál kisebb értékeknél is számíthatunk sorbanállásra.

5. Az n/M/M/r típusú rendszer (Gépkiszolgálási probléma több szerelővel)

Az előző modellben adott feltevéseinket annyiban változtatjuk, hogy itt az igények kiszolgálását nem egy hanem *r* kiszolgálóegység végzi. Nyilván ebben az esetben sem lép fel konvergencia probléma, s természetesen csak abban az esetben érdemes a rendszert vizsgálni, ha $r<n$. Ebben az esetben is egy születési-halálozási folyamatot kapunk melynek állapotátmenetei és intenzitásai a következők:



Ábra Hiba! A kapcsoló argumentuma érvénytelen.**. Az n/M/M/r modell állapotátmenetei**

$$\lambda_k = (n-k)\lambda\,, \qquad 0 \le k \le n-1$$
$$\mu_k = \begin{cases} k\mu\,, & 1 \le k \le r \\ r\mu\,, & r < k \le n \end{cases}$$

A stacionárius eloszlások:

$$P_k = \binom{n}{k}\rho^k P_0\,, \qquad 0 \le k \le r$$
$$P_k = \frac{k!}{r!\,r^{k-r}}\binom{n}{k}\rho^k P_0\,, \qquad r < k \le n\,.$$

Természetesen teljesülni kell a normalizáló feltételnek is:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1\,.$$

A P_0 meghatározásához ez a képlet meglehetősen bonyolult, ezért egy egyszerűbb eljárást használunk. Legyen

$$a_k = \frac{P_k}{P_0}.$$

Ekkor a hányadosok között az alábbi rekurzív összefüggés fedezhető fel.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_k &= \frac{n-k+1}{k}\rho\, a_{k-1}, \qquad 0 \le k \le r-1 \\ a_k &= \frac{n-k+1}{r}\rho\, a_{k-1}, \qquad r < k \le n \end{aligned}$$

A normalizáló feltételből P_0-t kifejezve és P_0-val osztva mindkét oldalt a következő tapasztaljuk:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k}.$$

Így minden P_k valószínűség megkapható, ha P_0-t megszorozzuk a_k-val.

5.1 Az n/M/M/r rendszer jellemzői:

A rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{n} kP_k$$

A várakozási sor átlagos hossza:

$$\overline{Q} = \sum_{k=r+1}^{n} (k-r)P_k$$

Az igénygenerálásra alkalmas terminálok száma:

$$\overline{m} = n - \overline{N}.$$

A várakozás valószínűsége:

$$P(W > 0) = \sum_{k=r}^{n} P_k \;.$$

A foglalt kiszolgálóegységek átlagos száma:

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{r-1} kP_k + r\sum_{k=r}^{n} P_k \;.$$

A tétlen kiszolgálóegységek átlagos száma:

$$\overline{S} = r - \overline{r} \;.$$

Összefüggések a jellemzők között:

$$\overline{N} = \overline{Q} + \overline{r} = n - \overline{m},$$

$$\lambda_t = \lambda\overline{m} = \mu\overline{r} = \frac{n}{\frac{1}{\lambda} + \overline{T}}$$

$$\overline{m}\lambda\overline{T} = \overline{N}$$

$$\overline{m}\lambda\overline{W} = \overline{Q}$$

A rendszer jellemzőinek meghatározásához elegendő ismernünk a rendszerben lévő igények átlagos számát, mert belőle minden további meghatározható.

A következőkben meghatározzuk a várakozási idő eloszlásfüggvényét. Nyilván csak akkor kell várakozni, ha *k* ≥ *r*, ahol *k* a rendszerben talált igények száma. Ekkor az érkező igénynek (k-r+1) igény távozását kell kivárnia. Jelölje A azon igények számát, amelyet egy újonnan érkező igény a rendszerben talál, és R_k ennek valószínűségét. A korábban tárgyalt módon megmutatható, hogy $R_k(n) = P_k(n-1)$. Ha *k* ≥ *r* és *l* = *k*–*r*, akkor, $P(W > t \mid A = k)$ annak valószínűsége, hogy *l* vagy annál kevesebb igény távozott *t* idő alatt. De ez a valószínűség megadható a következő módon:

$$P\big(W > t \mid A = k\big) = e^{-r\mu t}\sum_{i=0}^{l}\frac{(r\mu t)^i}{i!} = Q(l, r\mu t)$$

Ez abból következik, hogy a kiszolgálás úgy folyik mintha a rendszer egyetlen kiszolgálóegysége exponenciális eloszlás szerint működne, melynek intenzitása rμ. A teljes valószínűség tétele alapján:

$$P(W > t) = \sum_{k=r}^{n-1} P(W > t \mid A = k) P_k(n-1) = \sum_{k=r}^{n-1} Q(k-r, r\mu t) P_k(n-1).$$

Egyszerű behelyettesítés alapján

$$P_k(n-1) = \frac{r^r}{r!} P_0(n-1) \frac{P(n-k-1, r\rho^{-1})}{P(n-1, r\rho^{-1})}$$

Így

$$P(W > t) = \frac{r^r P_0(n-1)}{r!\,P(n-1, r\rho^{-1})} \sum_{k=r}^{n-1} P(n-k-1, r\rho^{-1}) Q(k-r, r\mu t) =$$

$$= \frac{r^r P_0(n-1)}{r!\,P(n-1, r\rho^{-1})} \sum_{k=0}^{n-r-1} P(n-r-1-k, r\rho^{-1}) Q(k, r\mu t) =$$

$$= \frac{r^r P_0(n-1)}{r!\,P(n-1, r\rho^{-1})} Q(n-r-1, r\mu t + r\rho^{-1})$$

$$F_W(t) = 1 - \frac{r^r P_0(n-1) Q(n-r-1, r\mu t + r\rho^{-1})}{r!\,P(n-1, r\rho^{-1})}$$

A várakozási idő eloszlásfüggvénye:

$$f_W(t) = \frac{r^r \mu}{(r-1)!} P_0(n-1) \frac{P(n-r-1, r\mu t + r\rho^{-1})}{P(n-1, r\rho^{-1})}$$

6. A beérkező hívások véges forrású többkiszolgálós modellje, visszatérő igények esetén

Ez a modell hasonlít az előző véges forrású rendszerhez. Az eltérések a következők. A jelen modell egy *r* szerverből álló rendszer, ahol a beérkező hívások *n*>*r* forrásból származnak. Minden terminál a következő három állapotban valamelyikében lehet:

- kiszolgálás alatt áll
- várakozási ciklusban van,
- szabad.

Ha egy terminál szabad a *t* pillanatban, akkor, akkor λ(t,t+dt) valószínűséggel generál beérkező hívást. Ha egy szerver tétlen valamely beérkező hívás során, akkor a hívás kiszolgálása azonnal elkezdődik. A kiszolgálás alatt a terminál nem generálhat új beérkező hívást. A kiszolgálást követően a terminál tétlen működő állapotba kerül és új beérkező igény generálására alkalmas. Ha azonban egy új igény érkezésekor minden szerver foglalt, akkor a terminál ún. visszatérő hívásokat generál - várakozási ciklusban van - exponenciális időközönként $1/\alpha$ átlaggal amíg szabad szervert nem talál. Az előzőekhez hasonlóan az hívás kiszolgálása után a terminál ismét szabaddá válik. A kiszolgálási idő exponenciális eloszlású $1/\mu=1$ átlaggal, mind a beérkező mind a visszatérő igények esetén.

A rendszer a (*C(t)*, *N(t)*) állapotokkal adható meg, ahol C(t) a foglalt szerverek száma és N(t) a várakozási ciklusban lévő hívások szám a t pillanatban. A folyamat (*C(t)*, *N(t)*) folyamat egy kétdimenziós véges állapotterű - $S=\{0,1,\dots,r\}\times\{0,1,\dots,n-r\}$ - Markov-lánc, melynek $q_{(i\,j)(l\,m)}$ állapotátmenet intenzitásai a következők:

Ha $0 \le i \le r-1$,

$$q_{(i\,j)(l\,m)} = \begin{cases} (n-i-j)\lambda & \text{ha } (\mathrm{l,m}) = (\mathrm{i+1, j}) \\ i & \text{ha } (\mathrm{l,m}) = (\mathrm{i-1, j}) \\ j\alpha & \text{ha } (\mathrm{l,m}) = (\mathrm{i+1, j-1}) \\ -((n-i-j)\lambda + i + j\alpha) & \text{ha } (\mathrm{l,m}) = (\mathrm{i, j}) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

illetve, ha $i = r$ akkor

$$q_{(r\,j)(l\,m)} = \begin{cases} (n-r-j)\lambda & \text{ha } (\mathrm{l,m}) = (\mathrm{r, j+1}) \\ r & \text{ha } (\mathrm{l,m}) = (\mathrm{r-1, j}) \\ -((n\text{-}c\text{-}j)\lambda + r) & \text{ha } (\mathrm{l,m}) = (\mathrm{r, j}) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel a (*C(t)*, *N(t)*) folyamat állapottere véges, így a beérkező hívások tetszőleges intenzitása mellett a rendszer eléri az egyensúlyi állapotát. Mostantól minden esetben feltételezzük, hogy a rendszer egyensúlyi állapotban van.

Gyakorlati szempontok szerint a kiszolgálás minőségének legfontosabb paraméterei a következők - ahol $M = n - r$ és $p_{ij} = P(C(t) = i, N(t) = j)$, azaz a foglalt szerverek és az átlagos sorhossz együttes eloszlása egyensúlyi helyzetben:

- *a várakozási ciklusban lévő igények („sorhossz") átlagos száma*

$$\overline{N} = E(N(t)) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{M} j p_{ij} \ ,$$

- *a várakozás valószínűsége*

$$p_r = P(C(t) = r) = \sum_{j=0}^{M} p_{rj} \ ,$$

- *a foglalt szerverek átlagos száma:*

$$\overline{Y} = E(C(t)) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{M} i p_{ij} \ ,$$

- *a beérkező hívások átlagos intenzitása:*

$$\overline{\lambda} = \lambda E(n - C(t) - N(t)) = \lambda \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{M} (n - i - j) p_{ij} = \lambda(n - \overline{Y} - \overline{N})$$

- *a beérkező hívások várakozásának aránya:*

$$B = \frac{\lambda E(n - C(t) - N(t); C(t) = r)}{\lambda E(n - C(t) - N(t))} = \frac{Mp_r - N_r}{n - \overline{Y} - \overline{N}}, \quad \text{ahol} \quad N_r = E(N(t); C(t) = r)$$

- *a ciklusban lévő igények várakozásának aránya:*

$$B^{(R)} = \frac{\alpha E(N(t); C(t) = r)}{\alpha E(N(t))} = \frac{N_r}{N},$$

- *a beérkező és a ciklusban lévő igények visszautasításának aránya:*

$$B^{(T)} = \frac{E(\lambda(n - C(t) - N(t)) + \alpha N(t); C(t) = r)}{E(\lambda(n - C(t) - N(t)) + \alpha N(t))} = \frac{\lambda M p_r + (\alpha - \lambda) N_r}{\lambda n - \lambda \overline{Y} + (\alpha - \lambda)\overline{N}}$$

- *az átlagos várakozási idő és az feltételes várakozási idő:*

$$\overline{W} = \frac{\overline{N}}{\overline{\lambda}}, \quad \overline{W}_B = \frac{\overline{W}}{B}.$$

6.1 A foglalt szerverek számának eloszlása és az átlagos sorhossz

Az eddigi modellek során az átlagos jellemzők megadhatók voltak zárt formában. Bár most erre nincs lehetőségünk, különböző módszerek segítségével programozott környezetben a rendszerjellemzők meghatározhatók.

Az együttess eloszlásokra vonatkozó Kolmogorov egyenletek a következő alakúak, ahol $p_{ij} = 0$, ha (*i,j*) nem tartozik a (*C(t)*, *N(t)*) folyamat állapotteréhez.

(6)

$$\begin{aligned}
((n-i-j)\lambda + i + j\alpha) p_{ij} &= (n-i+1-j)\lambda p_{i-1,j} \\
&+ (j+1)\alpha p_{i-1,j+1} \\
&+ (i+1) p_{i+1,j} \\
((n-r-j)\lambda + r) p_{rj} &= (n-r+1-j)\lambda p_{r-1,j} \\
&+ (n-r-j+1)\lambda p_{r,j-1} \\
&+ (j+1)\alpha p_{r-1,j+1}
\end{aligned}$$

Összeadva az egyenleteket $i = 0,1,\dots,c$ -re a következő összefüggést kapjuk:

(7) $$(n-r-j)\lambda p_{rj} = (j+1)\alpha \sum_{i=0}^{r-1} p_{i,j+1}\,, \quad 0 \le j \le n-r.$$

Határozzuk meg a p_{ij} valószínűségeket. Először vezessük be a következő változókat:

$$s_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{0M}}\,,$$

így

$$p_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{M} s_{ij}}\,.$$

Az s_{ij} változók kielégítik a (6), (7) egyenleteket és

$$s_{0M} = 1\,.$$

Az s_{ij} változókat a következő sorrendben fogjuk meghatározni:

$$s_{0M},\dots,s_{rM}, s_{0,M-1},\dots,s_{r,M-1},\dots, \quad ,\dots,s_{00},\dots,s_{r0}$$

Legyen j = M. A (6) egyenletből rekurzívan meghatározhatjuk az $s_{0M},\dots,s_{rM}$ változókat, a következő módon:

$$s_{1M} = (r\lambda + M\alpha)s_{0M} = r\lambda + M\alpha,$$
$$s_{iM} = \frac{(r-i+1)\lambda + i - 1 + M\alpha}{i} s_{i-1M} - \frac{(r-i+2)\lambda}{i} s_{i-2M}$$

$i = 2,\dots,r$.

Legyen $j = j-1$ (∗). Ekkor a (7) egyenletből

(8) $$s_{rj} = \frac{(j+1)\alpha}{(nM-j)\lambda}\sum_{i=0}^{r-1} s_{i,j+1}\,.$$

Tekintsük a (6) differenciálegyenleteket, mint az $x_i = s_{ij}, \quad 0 \le i \le r-1$ ismeretlenekre vonatkozó lineáris egyenleteket. Ekkor az egyenletek a következő alakban írhatók:

(9) $$\lambda_i x_{i-1} + \beta_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = \delta_i\,, \quad 0 \le i \le r-1\,,$$

ahol

$$
\begin{aligned}
x_i &= s_{ij} \\
\lambda_i &= -(n-i+1-j)\lambda \\
\beta_i &= (n-i-j)\lambda + i + j\alpha \\
\gamma_i &= -(i+1) \\
\delta_i &= (j+1)\alpha s_{i-1,j+1} \\
x_{-1} &= 0 \\
x_r &= s_{rj}
\end{aligned}
$$

amelyekből az utolsó kettő ismert. A probléma megoldására legalkalmasabb módszer a Cholesky-algoritmus. Valójában ez a Gauss-elimináció egy variánsa. Elevenítsük fel a módszert.

Tekintsük a (9) egyenletrendszer kibővített mátrixát

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
\beta_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \delta_0 \\
\lambda_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \delta_1 \\
0 & \lambda_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{r-2} & \beta_{r-2} & \gamma_{r-2} & 0 & \delta_{r-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} & \delta_{r-1}
\end{array}\right)
$$

és a Gauss-elimináció segítségével, a főátló alatti elemeket eltüntetve, a következő mátrixot kapjuk:

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
B_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & D_0 \\
0 & B_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & D_1 \\
0 & 0 & B_2 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & D_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{r-2} & \gamma_{r-2} & 0 & D_{r-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{r-1} & \gamma_{r-1} & D_{r-1}
\end{array}\right)
$$

vagyis a következő egyenletrendszert:

(10) $$B_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = D_i\,, \qquad 0 \le i \le r-1\,.$$

Az első egyenletből $B_0 = \beta_0$, $D_0 = \delta_0$.

Tegyük fel, hogy már átalakítottuk az *i*-dik egyenletet, azaz

$$B_{i-1}x_{i-1} + \gamma_{i-1}x_i = D_{i-1}\,.$$

Az egyenlet mindkét oldalát megszorozva $(\lambda_i \,/\, \beta_{i-1})$-gyel és kivonva az eredeti (i+2)-dik egyenletből, a következőket kapjuk:

$$\left(\beta_i - \gamma_i \frac{\lambda_i}{B_{i-1}}\right)x_i + \gamma_i x_{i+1} = \delta_i - D_{i-1}\frac{\lambda_i}{B_{i-1}}\,.$$

Ezek alapján

(11) $$B_i = \beta_{i-1} - \frac{\lambda_i \gamma_{i-1}}{B_{i-1}}, \qquad D_i = \delta_i - \frac{\lambda_i D_{i-1}}{B_{i-1}}\,.$$

A $B_0 = \beta_0$, $D_0 = \delta_0$ összefüggésből kiindulva a (11) egyenlet segítségével a átalakított mátrix elemei meghatározhatók, majd a (10) egyenletek alapján fordított sorrendben megkapjuk az $x_{r-1}, x_{r-2}, \ldots, x_0$ értékeit.

A megoldás menete

Meghatározzuk a *B_i* , *D_i* $(0 \le i \le r-1)$ változók értékét a következő egyenletek alapján

$$\begin{aligned}
B_0 &= (n-j)\lambda + j\alpha \\
B_i &= (n-i-j)\lambda + i + j\alpha - \frac{(n-i+1-j)\lambda i}{B_{i-1}}, \qquad 1 \le i \le r-1 \\
D_0 &= 0 \\
D_i &= (j+1)\alpha s_{i-1,j+1} + \frac{(n-i+1-j)\lambda D_{i-1}}{B_{i-1}}, \qquad 1 \le i \le r-1.
\end{aligned}$$

Ezután az indexek tekintetében fordított sorrendben meghatározzuk az s_{ij} $(0 \le i \le r-1)$ változókat a következő összefüggés alapján:

$$s_{ij} = \frac{D_i + (i+1)s_{i+1,j}}{B_i}, \qquad i = r-1, r-2, \ldots, 1, 0\,.$$

Ezt követően visszatérünk a (∗) lépéshez és addig ismételjük az eljárást amíg $j \geq 0$. Mivel $p_{ij} = s_{ij} p_{0M}$, így

$$p_{0M} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{M} s_{ij}}.$$

Most már az abszolút valószínűségek ismeretében meg tudjuk határozni a rendszer jellemzőket. A következő Pascal program kiszámítja a foglalt szerverek átlagos számát ($\overline{Y}$), az várakozási ciklusban lévő hívások átlagos számát ($\overline{N}$), a várakoztatott igények arányát és a feltételes várakozási időt.

```
Program retrial(Input, Output); {véges forrású visszatérő
sorok}
Uses Crt;
Var  i, j, j1, j2, c, M, K : integer;
     a, mu, sum, pc, Y, N, Nc, bl, W  : extended;
     r : array[0..100,0..1] of extended;
     b,D : array[0..100] of extended;

Begin
     clrscr;
     writeln(‘ Adja meg a kiszolgálóegységek számát: ’);
     read(c);
     writeln(‘ Adja meg a terminálok számát: ‘); read(K);
     writeln(‘ Adja meg a beérkező új hívások érkezési
               intenzitását: ‘); read(a);
     writeln(‘ Adja meg a várokozási ciklusból ékező igények
               intenzitását: ‘); read(mu);
     M:=K−c;
     j1:=0; j2:=1; j:=M;
     sum:=0; pc:=0; Y:=0; N:=0; Nc:=0;
     r[0,j1]:=1;
     sum:=sum+r[0,j1]; N:=N+j*r[0,j1];
     r[1,j1]:=c*+a+M*mu;
```

```
    sum:=sum+r[1,j1];N:=N+j*r[1,j1]; Y:=Y+r[1,j1];
    if c=1 then begin pc:=pc+r[1,j1]; Nc:=Nc+j*r[1,j1] end;
    for i:=2 to c do
        begin
            r[i,j1]:=(((c–i+1)*a+1–+M*mu)*r[i-1,j1]–
            (c–i+2)*a*r[i-2,,j1])/ i;
            sum:=sum+r[i,j1]; N:=N+j*r[i,j1];
Y:=Y+i*r[i,j1];
            if i=c then begin pc:=pc+r[i,j1];
            Nc:=Nc+j*r[i,j1] end;
        end;
    for j:=M-1 downto 0 do
        begin
            j1:=1–j1; j1:=1–j2;
            r[c,j1]:=0;
            for i:=0 to c–1 do r[c,j1]:=r[c,j1]+r[i,j2];
            r[c,j1]:=r[c,j1]*(j+1)*mu / ((M-j)*a);
            sum:=sum+r[c,j1]; N:=N+j*r[c,j1];
            Y:=Y+c*r[j1]; pc:=pc+r[c,j1]; Nc:=Nc+j*r[c,j1];
            b[0]:=0; D[0]:=0;
            for i:=1 to c-1 do
                begin
                    b[i]:=i*(j*mu+b[i-1])/((K-i+1-j)
                    *a+j*mu+b[i-1]);
                    D[i]:=(j+1)*mu*r[i-1,j2]+(K-i+1-j)*a*
                    *D[i-1]/((K-i+1-j)*a+j*mu+b[i-1]);
                end;
            for i:=c-1 downto 0 do
                begin
                    r[i,j1]:=(D[i]+(i+1)*r[i+1,j1])/
                    ((K-i-j)*a+j*mu+b[i]);
                    sum:=sum+r[i,j1]; N:=N+j*r[i,j1];
                    Y:=Y+i*r[i,j1];
```

```
                end;
          end;
     pc:=pc/sum; Y:=Y/sum; N:=N/sum; Nc:=nc/sum;
     W:=N/Y; lb:=a*(M*pc-Nc)/Y;
     wrilteln(‘ A foglalt szerverek átlagos száma: ‘,Y:8:4);
     writeln(‘ A várakozási ciklusban lévő hívások átlagos
               száma: ‘,N:8:4);
     writeln(‘ A várakoztatás valószínűsége: ‘,bl:6:4);
     writeln(‘ Az átlagos feltételes várakozási idő:
               ‘,W/bl:9:4);
     repeat until keypressed;
End.
```

6.2 A rendszer eloszlása az érkezési pillanatban

Az előzőek során kiszámolt p_{ij} valószínűségek megmutatják a rendszer (*C(t)=i, N(t)=j*) állapotban való tartózkodásának valószínűségét. Éppen ezért tekinthető úgy mint egy külső megfigyelő eloszlása. Azonban a híváskiszolgálás minősége szempontjából rendkívül fontos ismernünk a rendszert egy új igény érkezésének pillanatában. Jelölje π_{ij} annak valószínűségét, hogy egy új igény, az érkezése pillanatában a rendszert (*i,j*) állapotban találja. Ezt az eloszlást a érkező hívás észlelt eloszlásának nevezzük.

A véges forrású modellek egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy az érkező hívás által tapasztalt eloszlás különbözik a megfigyelő eloszlásától. Valóban, ugyanis a p_{rj} valószínűségek pozitívak minden j=0,1,...,(*n-r*) esetén, amíg $\pi_{rM} = 0$.

Jól ismert, hogy *n* elemű véges forrású születési-kihalási sorbanállási modellek esetén, az érkező által a rendszerben talált hívások eloszlása, π_k (*n*) egyenlő az eggyel kevesebb (n-1) elemű véges forrású modell állapoteloszlásával, p_k (*n-1*). A visszatérő véges forrású modellekre nem igaz az eredmény.

Mindemellett az érkező által észlelt eloszlás a visszatérő modellek esetén, könnyen kapcsolatba hozható a megfigyelő eloszlásával a következő módon. Jelöljük a rendszer állapotait a következő típusú vektorokkal:

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

ahol

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{ha az i - dik terminál szabad} \\ s, & \text{ha az i - dik terminál foglalt} \\ r, & \text{ha az i - dik terminál ciklusban van} \end{cases}$$

Ha a rendszer az x állapotban van, jelölje $C(x)$ a kiszolgálás alatt lévő hívások számát, és $N(x)$ a várakozási ciklusban lévő hívásokat. Jelölje X_{ij} azon x állapotok összességét, amelyre $C(x)=i$ és $N(x)=j$ (i=0,...,r; j=0,...,n-r). Az X_{ij} halmaz elemeinek száma: $\binom{n}{i}\cdot\binom{n-i}{j}$.

A szimmetria miatt, minden $x\in X_{ij}$ állapotban tartózkodás valószínűsége egyenlő. Jelölje ezt p_{ij}^*. Másrészt az X_{ij} halmazban való tartózkodás valószínűsége egyenlő p_{ij}-vel. Így

$$p_{ij}^* = \frac{p_{ij}}{\binom{n}{i}\cdot\binom{n-i}{j}}.$$

Rögzítsük valamely i_0 terminált, és jelölje $\hat{p}_{ij}$ annak valószínűségét, hogy egyensúlyi helyzetben az i_0 terminál működik, a foglalt szerverek száma i és j terminál várakozási ciklusban van. Nyilvánvaló, hogy ezt az állapotot azon $x\in X_{ij}$ jelentik, amelyekre $x_{i_0} = 0$. A feltételt kielégítő állapotok száma $\binom{n-1}{i}\cdot\binom{n-1-i}{j}$. Ezért

$$\hat{p}_{ij} = \binom{n-1}{i}\cdot\binom{n-1-i}{j}\cdot p_{ij}^* = \frac{n-i-j}{n}p_{ij}.$$

Így annak stacionárius valószínűsége, hogy az adott terminál működik

$$\hat{p} = \sum_i\sum_j \hat{p}_{ij} = \frac{1}{n}\sum_i\sum_j (n-i-j)p_{ij} = \frac{\overline{\lambda}}{K\lambda}$$

és a rendszer állapotainak valószínűsége feltéve, hogy az i_0-dik terminál működik:

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{\hat{p}_{ij}}{\hat{p}} = \frac{(n-i-j)\lambda}{\overline{\lambda}} p_{ij} .$$

Ez a rendszer eloszlása a megfigyelő szempontjából, az i_0-dik terminál működése során. De mivel a hívás generálásáig eltelt idők exponenciálisak, így az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt a $\tilde{p}_{ij}$ eloszlás megegyezik az érkező hívás által tapasztalt eloszlással, azaz

$$\pi_{ij} = \frac{(n-i-j)\lambda}{\overline{\lambda}} p_{ij}$$

6.3 A várakozási idő

Rögzítsük az i_0 terminált és tételezzük fel, hogy a t pillanatban hívást generál. A kiszolgálása megkezdéséig eltelt idő a hívás tényleges várakozási ideje. A várakozási folyamat vizsgálata sokkal bonyolultabb mint a rendszerben lévő igények száma. Bár az átlagos várakozási idő könnyen meghatározható az állapotvalószínűségek és a Little formula alapján, és a várakozás valószínűsége - B - kiszámítható az

$$\frac{1}{\overline{\lambda}} \sum_{j=0}^{n-r-1} (n-r-j)\lambda p_{rj}$$

összefüggés alapján, a pontos és részletes elemzéshez nem elegendő a külső megfigyelő eloszlása. A feltartóztatás valószínűsége - B - megegyezik annak valószínűségével, hogy egy új hívás érkezése pillanatában minden kiszolgálóegység foglalt. Ezért B a

$$B = \sum_{j=0}^{n-r-1} \pi_{rj}$$

módon definiálható, ahol π_{ij} az érkező hívás szempontjából az állapotok eloszlása.

Így

$$B = \sum_{j=0}^{n-r-1} \pi_{rj} = \frac{1}{\overline{\lambda}} \sum_{j=0}^{n-r-1} (n-r-j)\lambda p_{rj} ,$$

mint vártuk, a várakozás valószínűsége egyenlő az igényfeltartás arányával.

Tegyük fel, hogy a t=0 pillanatban *j* hívás várakozik a ciklusban és *i* hívás kiszolgálás alatt áll (j=1,2,...,*n-r*; i=0,...,*r*). Jelöljük meg az egyik várakozó hívást és jelöljük $f_{ij}(t)$-vel annak valószínűségét, hogy t idő múlva az igényt nem szolgálták ki, azaz

$$f_{ij}(t) = P(\tau_{ij} > t).$$

A várakozás idő komplementerének eloszlása $\overline{F}(t)$, a következő módon határozható meg:

(12) $$\overline{F}(t) = \sum_{j=0}^{n-r-1} \tau_{rj} f_{r,j+1}(t) = \frac{1}{\overline{\lambda}} \sum_{j=0}^{n-r-1} (n-r-j)\lambda p_{rj} f_{r,j+1}(t).$$

Az f_{ij} kiszámításához vezessük be a következő $\zeta(t)$ Markov folyamatot, melynek állapottere {0,...,r}×{1,...,n-r}∪{*s*}. Értelmezzük az (*i,j*) állapotot úgy, hogy i igény kiszolgálás alatt áll és j igény várakozik, beleértve a kijelölt terminált (hívást) is. A s egy elnyelő állapot, és ebbe az állapotba való átmenet azt jelenti, hogy a hívás kiszolgálása elkezdődik. Így a hátralévő várakozási idő a kitüntett terminál esetén az elnyelő állapotba jutásig eltelt idő, azaz

$$f_{ij}(t) = P\big(\zeta(t) \neq s \,\big|\, \zeta(0) = (i,j)\big) = 1 - P\big(\zeta(t) = s \,\big|\, \zeta(0) = (i,j)\big).$$

Könnyen látható, hogy ha 0 ≤ *i* ≤ *r*-1, akkor a rendszer az (i,j) állapotból a következő lépés során az alábbi állapotokba juthat:

- $(i+1, j)$ állapotba $(n-i-j)\lambda$ intenzitással
- $(i+1, j-1)$ állapotba $(j-1)\alpha$ intenzitással
- *s* állapotba α intenzitással
- $(i-1, j)$ állapotba *i* intenzitással

Ha *i=r*, akkor a folyamat a következő állapotokba juthat egy lépés során:

- $(r, j+1)$ állapotba $(n-r-j)\lambda$ intenzitással
- $(r-1, j)$ állapotba *r* intenzitással

Ekkor a Markov láncokra vonatkozó Kolmogorov differenciálegyenletek a következők:

$$\begin{aligned} f'_{ij}(t) = &-\left[(n-i-j)\lambda + j\alpha + i\right] f_{ij}(t) \\ &+ (n-i-j)\lambda f_{i+1,j}(t) \\ &+ (j-1)\alpha f_{i+1,j-1}(t) + i f_{i-1,j}(t) \end{aligned}$$

ha $0 \le i \le r\text{-}1$, $1 \le j \le n\text{-}r$ és

$$f'_{rj}(t) = -\left[(n-r-j)\lambda + r\right] f_{rj}(t) + (n-r-j)\lambda f_{r,j+1}(t) + r f_{r-1,j}(t)$$

ha $i=r$, $1 \le j \le n\text{-}r$.

Vegyük mindkét oldal $\varphi_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt$ Laplace transzformáltját. Így a következőket kapjuk:

(13)
$$\begin{aligned} -1 + s\varphi_{ij}(s) = &-\left[(n-i-j)\lambda + j\alpha + i\right]\varphi_{ij}(s) \\ &+ (n-i-j)\lambda\varphi_{i+1,j}(s) \\ &+ (j-1)\alpha\varphi_{i+1,j-1}(s) + i\varphi_{i-1,j}(s) \end{aligned}$$

ha $0 \le i \le r\text{-}1$, $1 \le j \le n\text{-}r$ és

(14)
$$\begin{aligned} -1 + s\varphi_{rj}(s) = &-\left[(n-r-j)\lambda + r\right]\varphi_{rj}(s) \\ &+ (n-r-j)\lambda\varphi_{r,j+1}(s) \\ &+ r\varphi_{r-1,j}(s) \end{aligned}$$

ha $i=r$, $1 \le j \le n\text{-}r$.

Szorozzuk meg a (13) egyenleteket p_{ij}-vel, a (14) egyenleteket p_{rj}-vel és helyettesítsük az $\left[(n-i-j)\lambda + j\alpha + i\right]p_{ij}$ és az $\left[(n-r-j)\lambda + r\right]p_{rj}$ tagokat a p_{ij} valószínűségekre vonatkozó Kolmogorov egyenletek jobb oldalán álló kifejezésekkel, és adjuk össze az egyenleteket i=0,...,r-re. Algebrai átalakítások után a következőt kapjuk:

(15)
$$\sum_{j=0}^{n-r}(n-r-j)\lambda p_{rj}\varphi_{r,j+1}(s) = \overline{N} - s\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{n-r} j p_{ij}\varphi_{ij}(s)\,.$$

Tekintve a várakozási idő és a feltételes várakozási idő Laplace transzformáltját

$$Ee^{-sW(t)} = 1 - s\int_0^\infty e^{-st}\overline{F}(t)dt$$

$$Ee^{-s\tau_{ij}} = 1 - s\varphi_{ij}(s)$$

a (12) összefüggést felhasználva a következőt kapjuk

(16)
$$Ee^{-sW(t)} = 1 - s\frac{1}{\overline{\lambda}}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n-r} jp_{ij}E\exp\{-s\tau_{ij}\}$$

Differenciálva a (16) egyenletet az *s*=0 pontban, megkapjuk az átlagos várakozási időre vonatkozó Little-formulát:

$$EW(t) = \frac{EN(t)}{\overline{\lambda}}.$$

Kétszer differenciálva a (16) egyenletet az *s*=0 pontban egy újabb összefüggést kapunk:

$$E(W(t))^2 = \frac{2}{\overline{\lambda}}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n-r} jp_{ij}E\tau_{ij}\ .$$

Ahhoz kiszámoljuk a várakozási idő szórását, mindösszesen az átlagos feltételes várakozási időket kell ismernünk - $m_{ij} = E\tau_{ij}$.

6.4 Az átlagos feltételes várakozási idő

A (13) és (14) egyenletekbe *s*=0-t helyettesítve a következő egyenletek adódnak az átlagos feltételes várakozási időkre:

$$\begin{aligned}-1 = -\big[(n-i-j)\lambda + j\alpha + i\big] m_{ij} \\ +(n-i-j)\lambda m_{i+1,j} \\ +(j-1)\alpha m_{i+1,j-1} + i m_{i-1,j}\end{aligned}$$

ha $0 \le i \le r$-1, $1 \le j \le n$-r és

$$\begin{aligned}-1 = -\big[(n-r-j)\lambda + r\big] m_{rj} \\ +(n-r-j)\lambda m_{r,j+1} \\ +r m_{r-1,j}\end{aligned}$$

ha i=r, $1 \le j \le n$-r.

Átalakítva az egyenleteket:

(17)
$$\begin{aligned}m_{i+1,j} = \frac{(n-i-j)\lambda + j\alpha + i}{(n-i-j)\lambda} m_{ij} - \frac{i}{(n-i-j)\lambda} m_{i-1,j} \\ - \frac{(j-1)\alpha}{(n-i-j)\lambda} m_{i+1,j-1} - \frac{1}{(n-i-j)\lambda}\end{aligned}$$

ha $0 \le i \le r$-1, $1 \le j \le n$-r és

(18)
$$m_{r,j+1} = \frac{(n-r-j)\lambda + i}{(n-r-j)\lambda} m_{rj} - \frac{r}{(n-r-j)\lambda} m_{r-1,j} - \frac{1}{(n-i-j)\lambda}$$

ha i=r, $1 \le j \le n$-r-1,

(19)
$$-1 = -r m_{r,n-r} + r m_{r-1,n-r}$$

ha i=r és j=n-r.

Az egyenletek megoldható a következő algoritmus segítségével.

1. Helyettesítsünk j=1-t a (17) egyenletbe:

$$m_{i+1,1} = \frac{\big((n-i-1)\lambda + \alpha + i\big) m_{i1} - m_{i-1,1} - 1}{(n-i-1)\lambda} \qquad ha \quad 0 \le i \le r-1.$$

Az egyenletből rekurzív módon meghatározhatók az $m_{i,1}$ ($0 \le i \le r$) változók a következő lineáris egyenlet alapján:

$$m_{i,1} = u_{i,1} \cdot m_{0,1} + v_{i,1}.$$

Az u_{i1}, v_{i1} együtthatók a következő rekurzív összefüggés alapján határozhatók meg:

$$u_{0,1} = 1; \qquad v_{0,1} = 0;$$
$$u_{1,1} = \frac{(n-1)\lambda + \alpha}{(n-1)\lambda}; \quad v_{1,1} = -\frac{1}{(n-1)\lambda};$$
$$u_{i+1,1} = \frac{((n-i-1)\lambda + \alpha + i)u_{i1} - iu_{i-1,1}}{(n-i-1)\lambda} \qquad ha \quad 1 \le i \le r-1;$$
$$v_{i+1,1} = \frac{((n-i-1)\lambda + \alpha + i)v_{i1} - iv_{i-1,1} - 1}{(n-i-1)\lambda} \qquad ha \quad 1 \le i \le r-1.$$

2. Növeljük *j*-t eggyel és tegyük fel, hogy az m_{ik} ($0 \le i \le r$, $1 \le k \le j-1$) változókat már kifejeztük az m_{01} lineáris függvényeként, azaz $m_{ik} = u_{ik} \cdot m_{01} + v_{ik}$. A (15) egyenletből rekurzív összefüggés segítségével kifejezhetjük az m_{ij} ($0 \le i \le r$) változókat az m_{0j} és m_{01} lineáris kombinációjaként:

(20) $$m_{ij} = x_{ij} m_{0j} + y_{ij} m_{01} + z_{ij}$$

Az x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} együtthatók numerikus módon számolhatók az alábbi rekurzív eljárás alapján:

$$x_{0,j} = 1, \quad x_{1,j} = \frac{(n-j)\lambda + j\alpha}{(n-j)\lambda}$$
$$y_{0,j} = 0, \quad y_{1,j} = -\frac{(j-1)\alpha}{(n-j)\lambda} u_{1,j-1}$$
$$z_{0,j} = 0, \quad z_{1,j} = -\frac{(j-1)\alpha v_{1,j-1} + 1}{(n-j)\lambda}$$

és *i*=1,...,r-1 esetén

$$x_{i+1,j} = \frac{((n-i-j)\lambda + i + j\alpha)x_{i,j} - i\,x_{i-1,j}}{(n-i-j)\lambda},$$
$$y_{i+1,j} = \frac{((n-i-j)\lambda + i + j\alpha)y_{i,j} - i\,y_{i-1,j}}{(n-i-j)\lambda} - \frac{(j-1)\alpha\, u_{i+1,j-1}}{(n-i-j)\lambda},$$
$$z_{i+1,j} = \frac{((n-i-j)\lambda + i + j\alpha)z_{i,j} - ix_{i-1,j}}{(n-i-j)\lambda} - \frac{(j-1)\alpha\, z_{i+1,j-1} - 1}{(n-i-j)\lambda}$$

Másrészt a (18) egyenletből:

(21) $$m_{r,j} = u_{r,j} \cdot m_{0,1} + v_{r,j}$$

ahol

$$u_{r,j} = \frac{((n-r-j+1)\lambda + r)u_{r,j-1} - ru_{r-1,j-1}}{(n-r-j+1)\lambda}$$
$$v_{r,j} = \frac{((n-r-j+1)\lambda + r)v_{r,j-1} - rv_{r-1,j-1} - 1}{(n-r-j+1)\lambda}$$

A (20) (21) egyenletek alapján $m_{0,j}$ kifejezhető $m_{0,1}$ lineáris kifejezéseként:

$$m_{0,j} = \frac{u_{r,j} - y_{r,j}}{x_{r,j}} m_{0,1} + \frac{v_{r,j} - z_{r,j}}{x_{r,j}} = u_{0,j} \cdot m_{0,1} + v_{0,j} \,.$$

Így ki tudjuk fejezni az m_{ij} (0≤ *i* ≤ *r*) változókat az $m_{0,1}$ lineáris függvényeiként:

(22) $$m_{i,j} = u_{i,j} \cdot m_{0,1} + v_{i,j} \qquad 0 \le i \le r$$

sahol

$$u_{0,j} = \frac{u_{r,j} - y_{r,j}}{x_{r,j}}$$
$$v_{0,j} = \frac{v_{r,j} - z_{r,j}}{x_{r,j}}$$
$$u_{i,j} = x_{i,j}u_{0,j} + y_{i,j} \qquad ha \quad 1 \le i \le r$$
$$v_{i,j} = x_{i,j}v_{0,j} + z_{i,j} \qquad ha \quad 1 \le i \le r$$

3. Ismételjük a második lépést amíg *j=n-r*. ezek után minden m_{ij} (0≤ *i* ≤ *r*, 1≤ *j* ≤ *n-r*) változó kifejezhető $m_{0,1}$ segítségével. A (19) egyenletből:

$$r(u_{r-1,n-r} \cdot m_{0,1} + v_{r-1,n-r}) - r(u_{r,n-r} \cdot m_{0,1} + v_{r,n-r}) = -1 \,.$$

Ennek segítségével ki tudjuk fejezni az $m_{0,1}$ változót:

$$m_{0,1} = \frac{v_{r-1,n-r} - v_{r,n-r} + {}^{1}\!/_{r}}{u_{r,n-r} - u_{r-1,n-r}} \,.$$

A (22) összefüggés alapján minden m_{ij} feltételes várakozási idő kiszámolható. A következő Pascal program segítségével kiszámolhatók az ismeretlenek.

```
Program retrial; {az átlagos feltételes várakozási idők}
Uses crt;
Var  i, j, c, K: integer;
     a, mu: extended;
     m, u, v, x, y, z: array[0..10,0..20] of extended;

Begin
     writeln(' Adja meg a szerverek számát: '); read(c);
     writeln(' Adja meg a terminálok számát: '); read(K);
     writeln(' Adja meg a beérkező igények intenzitását: ');
     read(a);
     writeln(' Adja meg a várakozási ciklusból érkező igények
               intenzitását: '); read(mu);
     u[0,1]:=1; v[0,1]:=0;
     u[1,1]:=((K-1)*a+mu)/((K-1)*a); v[1,1]:=-1/((K-1)*a);
     for i:=1 to c-1 do
          begin
               u[i+1,1]:=(((K-i-1)*a+i+mu)*u[i,1]-
               i*u[i-1,1])/((K-i-1)*a);
               v[i+1,1]:=(((K-i-1)*a+i+mu)*v[i,1]-
               i*v[i-1,1]-1)/((K-i-1)*a);
          end;
     for j:=2 to K-c do
          begin
               x[0,j]:=1; y[0,j]:=0; z[0,j]:=0;
               x[1,j]:=((K-j)*a+j*mu)/((K-j)*a);
               y[1,j]:= -(j-1)*mu*u[1,j-1]/((K-j)*a);
               z[1,j]:= -((j-1)*mu*v[1,j-1]+1)/((K-j)*a);
               for i:=1 to c-1 do
                    begin
```

```
                    x[i+1,j]:=(((K-i-j)*a+i+j*mu)*x[i,j]-i*
                    x[i-1,j])/((K-i-j)*a);
                    y[i+1,j]:=
                    (((K-i-j)*a+i+j*mu)*y[i,j]-i*y[i-1,j]-(
                    j-1)*mu*u[i+1,j-1])/
                    ((K-i-j)*a);
                    z[i+1,j]:=
                    (((K-i-j)*a+i+j*mu)*z[i,j]-i*z[i-1,j]-(
                    j-1)*mu*v[i+1,j-1]-1)/
                    ((K-i-j)*a);
                end;
            u[c,j]:=(((K-c-j+1)*a+c)*u[c,j-1]-c*u[c-1,j-
            1])/((K-c-j+1)*a);
            v[c,j]:= (((K-c-j+1)*a+c)*v[c,j-1]-c*v[c-1,j-1]-
            1)/((K-c-j+1)*a);
            u[0,j]:=(u[c,j]-y[c,j])/x[c,j];
            v[0,j]:=(v[c,j]-z[c,j])/x[c,j];
            for i:=1 to c do
                begin
                    u[i,j]:=x[i,j]*u[0,j]+y[i,j];
                    v[i,j]:=x[i,j]*v[0,j]+z[i,j];
                end;
        end;
    m[0,1]:=(v[c-1,K-c] -v[c,K-c]+1/c)/(u[c,K-c]-u[c-1,K-c]);
    for i:=0 to c do for j:=1 to K-c do
    m[i,j]:=u[i,j]*m[0,1]+v[i,j];
End.
```

7. Egyéb alkalmazások

7.1 Mágneses lemezes memóriák

Tekintsünk egy rendszert, ahol n lemezes egység egy szervernél tartózkodik és átadják az információt, ha a szervert szabadon találják. A kiszolgálatlan egységek felváltva próbálkoznak, konstans ismétlődő intervallumokban. S mint azt ahogy a szimulációk is mutatják, a próbálkozási időközök exponenciális eloszlással a gyakorlatban közelíthetők.

7.2 CSMA/CD protokoll alapú helyi hálózatok

Az n/M/G/1 visszatérő szervervakációs modell alkalmas a CSMA/CD protokollú helyi hálózatok vizsgálatára. Ezekben a hálózatokban n véges terminál egy buszhoz van kapcsolva. A rendszerben működő információátadást irányító elv általában az n/M/G/1 modellnek. Tekintsük az úgynevezett összeütközés jelenségét. Tegyük fel, hogy egy igény a csatornában van és szabad jelet kap. Az információátadás megkezdődik, de egy bizonyos τ ideig bármely más igény is a csatornába juthat és továbbíthatja az adatait. Ilyen esetben torlódás következik be. Az átadást megkezdő igény a várakozási ciklusba kerül, míg a torlódásban lévő igények az esetet megelőző állapotukba kerülne vissza. Összetorlódás esetén a csatorna egy készenléti idő múlva ismét szabad lesz. A készenléti idő 3τ vakációs idővel modellezhető, ahol τ egy jel eljutásának idejét jelöli a csatorna végpontjai között.

7.3 Torlódáselkerülő helyi hálózatok

A hálózatok esetében egy szokásos jelenség, hogy több állomás közös utat használ így az adatok torlódnak. Ezáltal az információ sérül és következésképpen a teljesítmény minősége csökken. A probléma elkerülése érdekében számos torlódáselkerülő hálózatokat alkalmaznak. A kilencvenes években a probléma megoldásaként a hálózatot n/M/G/1 visszatérő sorral modellezik.

8. Irodalomjegyzék

Sztrik János
Kulcs a sorbanálllás elméletéhez és alkalmazásaihoz
Debrecen, Kossuth Egyetem 2000.

Falin Gueannadi I.
Retrial queues
London, New York, NY: Chapmann & Hall, 1997.

Panico, Joseph A.
Queuing theory: a study of waiting lines for business, economics, and science
Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall 1969

Newell, Gordon Frank
Applications of queuing theory
London: New York: Chapmann & Hall, 1971.

Cohen, Jacob Willem
The single server queue
Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1969.

Kleinrock, Leonard
Queuing systems
New York: John Wiley, 1976.

White, John A.
Analysis of queuing systems
New York: Academic Press, 1975.

Daigle, John N.
Queuing for telecommunications
Reading (Mass): Addison-Wesley Publ. Co., 1992.