

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Általánosított Berwald-sokaságok 2 és 3 dimenzióban

Írta: Oláh Márk

Témavezető: Dr. Vincze Csaba



DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2023

1. FEJEZET

Bevezetés

A differenciálgeometria legfontosabb eszközei sokaságokon a lineáris konnexiók és a metrikák.

Egy ∇ **lineáris konnexió** lehetővé teszi a különböző pontokbeli érintőterekben lévő érintővektorok összehasonlítását, és így egy vektormező differenciálását egy másik mentén. Egy lineáris konnexió megadása a sokaságon ekvivalens a **párhuzamos eltolás** működésének előírásával minden egyes görbe mentén. Egy vektormezőt **párhuzamosnak** hívunk egy görbe mentén, ha nem változik a görbe (sebességvektormezője) mentén, azaz, ha a deriváltja a görbe mentén zérus.

Hogy a sokaságon méréseket tudjunk végezni, az érintővektorok mérését kell először értelmeznünk – geometriailag ezt jelenti egy **metrika** megadása. Egy γ **Riemann-metrika** lényegében belső szorzatok egy simán változó családja az érintőtereken, melynek indukált mátrixai (egységömbjei) ellipszoidok. Egy F **Finsler-metrika** minden érintőtéren egy Minkowski-normából (nem feltétlenül középpontosan szimmetrikus normából) áll, melyek simán változnak pontról pontra, és melyeknek indukált mátrixai általános, szigorúan konvex testek sima határai. Ha egy sokaságot egy Riemann- vagy Finsler-metrikával látunk el, akkor ezek együttesét **Riemann-/Finsler-sokaságnak** nevezzük. A Finsler-sokaságok a Riemann-sokaságok közvetlen általánosításai, de sok tekintetben különböznek tőlük.

Amennyiben egy sokaságon egyszerre rendelkezésünkre áll egy ∇ lineáris konnexió és egy metrika is, tekinthetjük a ∇ -ra nézve párhuzamos vektormezőket, és ezek hosszát a metrika segítségével meg is mérhetjük. Természetes követelménynek érezzük, hogy ha egy vektormező párhuzamos (nem változik), akkor a hossza

is legyen állandó a görbe mentén. Ez esetben azt mondjuk, hogy ∇ **metrikus** a (Riemann-)metrikához vagy **kompatibilis** a (Finsler-)metrikához. Rögtön felmerülhetnek bennünk a következő kérdések:

K: *Egy adott metrikához vajon mindig létezik hozzá metrikus/kompatibilis lineáris konnexió? Ha igen, vajon mennyi? Hogy lehet ezeket megtalálni? Van-e különbség a Riemann- és Finsler-metrikák esete között?*

A Riemann-eset nem túl nehéz, és már több mint egy évszázada megoldott. Egy Riemann-sokaságon végtelen sok metrikus lineáris konnexió létezik, amelyeket a torziótenzoruk segítségével „paraméterezhetünk” (ezt adja meg a Koszul-formula), azaz a torzióznak bármilyen értéket előírva, az egyértelműen meghatároz egy metrikus konnexiót. Többnyire azzal szokás dolgozni, amelyiknek torziója azonosan nulla, ezt hívjuk a sokaság **Lévi-Civita konnexiójának**.

Sajnos a Finsler-eset jóval bonyolultabb, és máig megoldatlan probléma. Ebben az esetben az alábbi kérdéseket tehetjük fel:

1. *Egy adott Finsler-metrikához vajon mindig létezik kompatibilis lineáris konnexió? Ha nem, tudunk valamilyen (legalább szükséges vagy elégséges) feltételt adni a létezésre?*
2. *Ha egy Finsler-metrikához léteznek kompatibilis lineáris konnexiók, vajon hány ilyen van, és hogyan tudjuk őket megtalálni?*
3. *A fenti esetben ki tudunk-e választani egy olyan kitüntetett konnexiót, mint a Riemann-esetben a Lévi-Civita konnexió?*
4. *Mi a helyzet, ha csak sokaságokat tekintünk? Minden sokaságon létezik (nem-Riemann) Finsler-metrika, de vajon van-e biztosan legalább egy, amelyhez létezik kompatibilis lineáris konnexió? Ha nem, tudunk-e valamilyen feltételt adni a létezésre a sokaság topologikus/analitikus tulajdonságai alapján?*

E kérdések egy részére a válaszok már ismertek a szakirodalomban (vannak példák olyan Finsler-sokaságokra, amelyeken 0, 1 vagy végtelen sok kompatibilis ∇ létezik). A disszertációban ezen eredmények listájához próbáltunk újabbakat hozzáadni.

2. FEJEZET

Általánosított Berwald-sokaságok és a kompatibilitási egyenletek

Ha egy Finsler-sokaságon létezik egy ∇ kompatibilis lineáris konnexió, akkor **általánosított Berwald-sokaságnak** hívjuk (röviden **GBM**). Minden Riemann-sokaság triviális példa, így csak nem-Riemann Finsler-sokaságokat és GBM-eket vizsgálunk. Gyakran használjuk az alábbi elemi tulajdonságokat:

- A **merevségi tétel** szerint egy összefüggő GBM vagy minden pontban Riemann, vagy egyetlen pontban sem az.
- Minden F Finsler-metrikához létezik egy hozzá kompatibilis γ Riemann-metrika; ezt azt jelenti, hogy minden, F -hez kompatibilis lineáris konnexió metrikus γ -hoz (Vincze, [15]).

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\widehat{\partial}_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \dot{\partial}_i := \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad f_{ij} = y^i \dot{\partial}_j F - y^j \dot{\partial}_i F.$$

Egy adott F Finsler-metrikához kompatibilis ∇ -kat az ún. **kompatibilitási egyenletek** (röviden **CEQ**) megoldásaiként kapjuk. A Γ_{ij}^k Christoffel-szimbólumokkal felírva, ezek az egyenletek az alábbiak:

$$(1) \quad \widehat{\partial}_i F - y^j (\Gamma_{ij}^k \circ \pi) \dot{\partial}_k F = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Választva egy kompatibilis γ Riemann-metrikát, használhatjuk a T_{ab}^c torziókomponenseket ismeretlenként. A p pontbeli érintőteret rögzítve és áttérve p körüli Riemann-normálkoordinátákra, a CEQ alakja

$$(2) \quad \sum_a' 2f_{ia} \mathbf{T}_{ia}^i + \sum_{a < b}' f_{ab} (\mathbf{T}_{ib}^a + \mathbf{T}_{ab}^i + \mathbf{T}_{ai}^b) = -2\widehat{\partial}_i F, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Meggondolásaink lényege, hogy

- a kompatibilis ∇ -kat a torziójuk egyértelműen meghatározza, így, ha megoldjuk a CEQ-et a torziókomponensekre, azokból visszanyerhetjük magukat a konnexiókat az alábbi módon:

$$(3) \quad \mathbf{T}_{ab}^c \xrightarrow{(4) \text{ formula}} \Gamma_{ij}^k \xrightarrow{(5) \text{ formula}} \nabla :$$

$$(4) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \gamma^{mk} (-\gamma_{ij;m} + \gamma_{jm;i} + \gamma_{mi;j} + \mathbf{T}_{ij}^l \gamma_{ml} - \mathbf{T}_{jm}^l \gamma_{il} + \mathbf{T}_{mi}^l \gamma_{jl}),$$

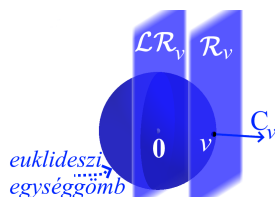
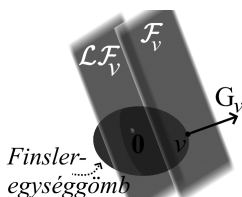
$$(5) \quad \nabla_X Y = (X^i \partial_i (Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k.$$

- A fenti egyenleteket **csak egy rögzített** $p \in M$ **pontbeli érintőtér** $v \in T_p^\circ M := T_p M \setminus \{0\}$ **elemekre** tekintjük. Egy darab v -re egy lineáris egyenletrendszer kapunk $\mathbf{T}_{ab}^c(p)$ ismeretlenekkel. Értékeik az $\binom{n}{2} n$ -dimenziós $\wedge^2 T_p^* M \otimes T_p M$ vektortérből kerülhetnek ki (ügyes átalakítások után, a megoldásvektorok többnyire $T_p M$ elemei lesznek). Így az összes v -re tekintett megoldás, mint affin alterek metszete, maga is egy affin altér $\wedge^2 T_p^* M \otimes T_p M$ -ben (vagy $T_p M$ -ben). Mivel csak egy rögzített pontban dolgozunk, az itteni megoldhatóság természetesen nem garantálja globális megoldások létezését, de a sokaság minden pontját sorra véve, így is sokat megtudhatunk azokról.

[20]-ban Vincze bevezette az extrémális kompatibilis lineáris konnexiók fogalmát (mostantól röviden **extrémális konnexió**). Egy Riemann-sokaságon mindig adott a kitüntetett, „kanonikus” metrikus ∇ , a Lévi-Civita konnexió zérus torzióval. Egy Finsler-sokaságon azonban, ha léteznek is kompatibilis ∇ -k, ezek torziója bármi lehet, és első ránézésre nem világos, hogyan jelöljünk ki egy kanonikus választást. Ehhez az ún. nyalábmétrikát kell használnunk a torziótenzorok terén, amelyet az eredeti kompatibilis Riemann-metrika indukál. Ezáltal módunk nyílik a torziótenzorok (adott pontbeli) mérésére és összehasonlítására. Az extrémális konnexió definíció szerint az az egyértelműen létező kompatibilis ∇ , amelynek torziója minden pontban a lehető legkisebb hosszal rendelkezik a fent leírt nyalábmétrikával mérve.

Minden esetben, amikor meg tudtuk oldali a CEQ-et, $T_p M$ „kettős” geometriai struktúráját használtuk fel:

Finsler-metrika		Riemann-metrika
Finsler-gömbök	szinthalmazok	euklideszi gömbök
\mathcal{F}_v	érintőterek $v \in T_p^\circ M$ -ben	\mathcal{R}_v
$\mathcal{L}\mathcal{F}_v := \mathcal{F}_v - v$	lineáris érintőterek $v \in T_p^\circ M$ -ben	$\mathcal{L}\mathcal{R}_v := \mathcal{R}_v - v$
$G_v := \text{grad } F(v) = [\dot{\partial}_1 F, \dots, \dot{\partial}_n F](v)$	normálvektorok (γ -ra nézve)	$C_v := v = [v^1, \dots, v^n]$



[20]-ban Vincze az alábbi fogalmakat vezette be $T_p M$ elemeire:

	szerepe a CEQ-ben	geometriai jelentés
vertikális érintkezési pont	az együtthatók (a teljes bal oldal) eltűnik	a Finsler- és Riemann-normálvektorok párhuzamosak
horizontális érintkezési pont	a CEQ jobb oldala eltűnik (homogén lesz)	F deriváltja eltűnik a $\widehat{\partial}_i$ horizontális irányok mentén

- A vertikális érintkezési pontok megátolhatják a megoldások létezését, amennyiben nem horizontális érintkezési pontok is egyszerre. Ha azok, akkor azonban feleslegesek, mert itt a CEQ a $0 = 0$ egyenletet adja. Ha $T_p M$ minden eleme vertikális érintkezési pont, akkor F Riemann p -ben.
- Horizontális érintkezési pontokban a CEQ homogén. Ha $T_p M$ minden eleme horizontális érintkezési pont, akkor $T \equiv 0$ triviális megoldás p -ben.

A disszertáció 3., 4. és 5. fejezeteiben megoldottuk a CEQ-et és megkerestük az extrémális konnexiót különböző speciális esetekben.

3. FEJEZET

Egy példa: Randers-sokaságok

E fejezetben megoldottuk a fenti problémákat Randers-metrikák esetén. Ezek olyan Finsler-metrikák, melyek alakja

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y),$$

ahol α egy a Riemann-metrikából származó normafüggvény (**Riemann rész**) és β egy kovektormező (**perturbáló rész**). A CEQ egyszerűsítése végett a tölti be a kompatibilis Riemann-metrika szerepét, és **adaptált normálkoordinátákat**, azaz olyan Riemann-normálkoordinátákat használunk p körül, amelyben az első $n - 1$ koordinátavektor feszíti ki β magterét. Ebben

$$\alpha(x, y) = \sqrt{(y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2} \quad \text{és} \quad \beta_i(x) = \delta_i^n \|\beta(x)\|.$$

Használjuk továbbá a következő jelölést:

$$(6) \quad \boxed{C_{j;i}(x) := -\frac{\widehat{\partial}_i \beta_j}{\|\beta\|}(x)}.$$

A fejezetben új bizonyítást adtunk Vincze egy korábbi eredményére (l. [17]) kompatibilis ∇ -k létezéséről Randers-tereken.

1. TÉTEL. [17] *Egy összefüggő Randers-sokaság GBM \iff $a \|\beta\|$ perturbáló kovektormező hossza konstans.*

A fejezet az alábbi új eredményeket tartalmazza [1]-ből.

2. TÉTEL (A CEQ megoldása Randers-terek esetén, [1]). *Tegyük fel, hogy egy nem-Riemann (M, F) Randers-sokaság GBM, rögzítsünk egy $p \in M$ pontot és használjunk adaptált normálkoordinátákat p körül. Ekkor a kompatibilis lineáris konnexitások torzióját p -ben az alábbi táblázat értékei adják.*

<i>típus</i>	<i>indexek</i>	<i>formula</i>	<i>komp. száma</i>
<i>bármilyen</i>	$n \notin \{a, b, c\}$	\mathbf{T}_{ab}^c szabadon választott	$(n-1) \binom{n-1}{2}$
<i>repetitív</i>	$a \neq n$	$\mathbf{T}_{an}^n = C_{a;n}$	$n-1$
	$a \neq n$	$\mathbf{T}_{an}^a = C_{a;a}$	$n-1$
<i>diverz</i>	$a < b < n$	$\mathbf{T}_{an}^b + \mathbf{T}_{bn}^a = C_{a;b} + C_{b;a}$	$2 \binom{n-1}{2}$
	$a < b < n$	$\mathbf{T}_{ab}^n = C_{a;b} - C_{b;a}$	$\binom{n-1}{2}$

A $C_{j;i}$ mennyiségeket a (6) formulában definiáltuk. A fentiekből magukat a konnexiókat (3) alapján tudjuk meghatározni. Szintén látszik, hogy a szabadon választható komponensek aránya $(n-2)/n$, ami 1-hez tart, ha $n \rightarrow \infty$.

3. TÉTEL (Az extrémális konnexió Randers-tereken, [1]).
Tegyük fel, hogy egy nem-Riemann (M, F) Randers-sokaság GBM, rögzítsünk egy $p \in M$ pontot és használjunk adaptált normálkoordinátákat p körül. Ekkor az extrémális konnexió torzióját p -ben az alábbi táblázat értékei adják.

<i>típus</i>	<i>indexek</i>	<i>formula</i>	<i>komp. száma</i>
<i>bármilyen</i>	$n \notin \{a, b, c\}$	$\mathbf{T}_{ab}^c = 0$	$(n-1) \binom{n-1}{2}$
<i>repetitív</i>	$a \neq n$	$\mathbf{T}_{an}^n = C_{a;n}$	$n-1$
	$a \neq n$	$\mathbf{T}_{an}^a = C_{a;a}$	$n-1$
<i>diverz</i>	$a < b < n$	$\mathbf{T}_{an}^b = \mathbf{T}_{bn}^a = \frac{C_{a;b} + C_{b;a}}{2}$	$2 \binom{n-1}{2}$
	$a < b < n$	$\mathbf{T}_{ab}^n = C_{a;b} - C_{b;a}$	$\binom{n-1}{2}$

A $C_{j;i}$ mennyiségeket a (6) formulában definiáltuk. A fentiekből magát a konnexiót (3) alapján tudjuk meghatározni.

4. FEJEZET

2-dimenziós általánosított Berwald-sokaságok

Ismert, hogy minden 2-dimenziós, összefüggő, nem-Riemann Finsler-sokaságon (felületen) vagy nem létezik egyetlen kompatibilis ∇ sem, vagy pontosan egy létezik. A fejezet első felében három különböző módszert mutattunk be ennek igazolására és a konnexió meghatározására:

- Az első módszer az, hogy magát a CEQ-et vizsgáljuk:

$$(CEQ-2D) \quad \left. \begin{aligned} f_{21}\mathbf{T}_{12}^1 &= \widehat{\partial}_1 F \\ f_{21}\mathbf{T}_{12}^2 &= \widehat{\partial}_2 F \end{aligned} \right\}.$$

Ebből egyszerűen látható, hogy a nem-Riemann esetben, ha van megoldás, akkor az egyértelmű és a következő alakú p -ben:

$$(7) \quad \boxed{\mathbf{T}_{12}^1 = \frac{\widehat{\partial}_1 F(v)}{f_{21}(v)} \quad \text{és} \quad \mathbf{T}_{12}^2 = \frac{\widehat{\partial}_2 F(v)}{f_{21}(v)}}.$$

- A második módszer klasszikus Finsler-geometriai eszközöket használ, ezeket csak megemlítettük (l. [5]).
- A harmadik módszer alapja, hogy 2D-ben minden lineáris konnexió torziója szemiszimmetrikus, azaz

$$(8) \quad T(X, Y) = \rho(Y)X - \rho(X)Y$$

alakban írható valamilyen ρ kovektormező segítségével a sokaságon. Ebből, Vincze azon eredményével együtt ([16]-ből, melyre új, elemi bizonyítást adtunk [4]-ben), mely szerint minden Finsler-metrikához legfeljebb egy ilyen lineáris konnexió létezik, rögtön következik az egyértelműség.

A fejezet második felében az alábbi új eredményeket/bizonyításokat mutattuk be [2]-ből.

4. TÉTEL (A Gauss-görbület divergencia-reprezentációja, [2]).
 Legyen (M, F, ∇) általánosított Berwald-**felület** és γ egy kompatibilis Riemann-metrika ∇^* Lévi-Civita konnexióval. Ekkor γ Gauss-görbülete éppen annak a ρ^\sharp vektormezőnek a divergenciája, amelynek duális ρ kovektormezője ∇ torziójának (8)-beli alakjában szerepel:

$$(9) \quad \kappa^* = \operatorname{div}^* \rho^\sharp.$$

A bizonyítás alapja, hogy ∇ torziója szemiszimmetrikus, és a két konnexió, ∇ és ∇^* görbületeinek összevetése.

5. TÉTEL. Legyen M összefüggő, kompakt és irányítható felület. Ha M -en létezik általánosított Berwald-struktúra, akkor M Euler-karakterisztikája szükségképpen 0.

BIZONYÍTÁS. [2] Integráljuk ki a (9) divergencia-reprezentáció mindkét oldalát a teljes sokaság felett:

$$\int_M \kappa^* = \int_M \operatorname{div}^*(\rho^\sharp).$$

- A bal oldal a Gauss–Bonnet tétel alapján $2\pi \cdot \chi(M)$.
- A jobb oldal a divergenciatétel szerint $\int_{\partial M} \langle \rho^\sharp, N \rangle$, ahol N a kifelé mutató egység-normálvektormező. De a sokaságnak nincsen határa, így ez az integrál 0-val egyenlő. \square

6. TÉTEL. [2] Az összes kompakt, összefüggő és irányítható felület (az S^2 gömb és a $\mathbb{T}\#\dots\#\mathbb{T}$ g -szeres tóruszok) közül csakis a tóruszon létezhet nem-Riemann általánosított Berwald-struktúra, ezen pedig létezik is.

7. TÉTEL. [2] A 2D-s modellterek (euklideszi sík, euklideszi gömb és hiperbolikus sík) közül az euklideszi és a hiperbolikus síkon létezik nem-Riemann általánosított Berwald-struktúra.

A fejezet végén bemutattunk egy egyszerű módszert olyan nem-Riemann általánosított Berwald-struktúrák konstruálására, amely kompatibilis ezen terek hagyományos γ Riemann-metrikáival. A módszer a következő.

γ Gauss-görbületét felírjuk egy ρ^\sharp vektormező divergenciájaként
 (megoldjuk a $\kappa^* = \text{div}^*(\rho^\sharp)$ egyenletet ρ^\sharp -ra)

$\longrightarrow \rho^\sharp$ vektormező $\longrightarrow \rho$ kovektormező

$\xrightarrow{(8)}$ T torzió $\xrightarrow{(3)}$ ∇ **metrikus** lineáris konnexió

\longrightarrow párhuzamosság-fogalom

\downarrow

válasszunk egy nem kvadratikus poliellipszist $p \in M$ -ben,

amely invariáns a $\text{Hol}(\nabla)$ holonómiacsoporttal szemben

\longrightarrow ezt párhuzamos eltoljuk M pontjaiba ∇ segítségével

\longrightarrow ezeket választva indukáljuk, egy olyan nem-Riemann

Finsler-metrikát kapunk, amely kompatibilis ∇ -val

5. FEJEZET

3-dimenziós általánosított Berwald-sokaságok

3D-ben, a változók újracsoportosításával az együtthatóik szerint, a CEQ az alábbi alakban írható:

$$(CEQ-3D-i) \quad \langle C_v \times G_v, \vec{s}_i \rangle = -2 \hat{\partial}_i F(v), \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

azaz 3 lineáris egyenletet kapunk, ahol

- a $C \times G$ vektormező az F és γ metrikák kapcsolatát írja le:
 - ▶ $v \in T_p^\circ M$ vertikális érintkezési pont $\iff C_v \times G_v = \mathbf{0}$.
 - ▶ Ha v nem vertikális érintkezési pont, akkor a nemzérus $C_v \times G_v$ vektor az $\mathcal{F}_v \cap \mathcal{R}_v$ egyenes irányát adja. Következésképpen, $C \times G$ integrálgörbéi $T_p^\circ M$ -ben mindig a Finsler- és Riemann-gömbök metszetében futnak.
- az $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ ismeretlenek pedig $T_p M$ -beli vektorok, és minden megoldás ezekre egyértelműen meghatároz egy megoldást a torziókomponensek értékeire is.

Mivel ezek az egyenletek csak a jobb oldali inhomogén részükben különböznek egymástól, együtt kezelhetjük őket, ha csak a homogén részüket tekintjük:

$$(H-CEQ-3D) \quad \langle C_v \times G_v, \vec{s} \rangle = 0.$$

Tehát először meg kell oldanunk a (H-CEQ-3D) homogén verziót, melynek megoldáshalmaza (a közös **iránytér**) egy lineáris altér, méghozzá $\text{span}(C_v \times G_v)$ ortogonális komplementere $T_p M$ -ben. Az eredeti, esetlegesen inhomogén (CEQ-3D-1), (CEQ-3D-2), (CEQ-3D-3) egyenletek megoldáshalmazai (a **megoldásterek**) vagy üresek, vagy az iránytér affin eltoltjai (és így azzal és egymással is párhuzamosak).

A fejezetben az alábbi eredményeket mutattuk be [3]-ból.

8. ÁLLÍTÁS. [3] *Az alábbi esetek lehetségesek:*

$C_v \times G_v$ generált dim.	iránytér dim.	(CEQ-3D-i) egyenletek megoldásterei	geometria
0	3	$T_p M$ vagy \emptyset	F_p kvadratikus (Riemann)
1	nem fordulhat elő		
2	1	3 párhuzamos egyenes vagy \emptyset	F_p forgásfelület, melynek tengelye az iránytér
3	0	3 pont vagy \emptyset	F_p -nek nincs origón áthaladó forgástengelye

9. TÉTEL (3D-s GBM-ek főtétele, [3]). Ha M 3-dimenziós összefüggő, nem-Riemann általánosított Berwald-sokaság, akkor az alábbi esetek lehetségesek.

- **Határozatlan eset (UDC):** Végtelen sok kompatibilis lineáris konnexió létezik, ami azzal ekvivalens, hogy a Finsler-indikátrix euklideszi forgásfelület valamely (és így bármely) pont érintőterében, az origón áthaladó forgástengellyel. A tengelyek irányát egy globálisan jóldefiniált (sehol sem eltűnő) $D \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező adja, melynek elemei konstans 1 hosszúak, minden $T_p M$ -ben $\text{span}(C_v \times G_v)$ ortogonális komplementerében található és bármely kompatibilis ∇ -ra nézve párhuzamosak. E konnexiók egyike

$$(10) \quad \nabla_X Y = \nabla_X^* Y + \frac{\langle \nabla_X^* D, Y \rangle D - \langle Y, D \rangle \nabla_X^* D}{\langle D, D \rangle}.$$

- **Határozott eset (DC):** A téren pontosan egy kompatibilis lineáris konnexió létezik, amelynek görbülete zérus. Alakja

$$(11) \quad \nabla_X Y = \nabla_X^* Y - \rho(X) \times Y,$$

ahol ρ a $\mathfrak{X}(M)$ egy endomorfizmusa, mely kielégíti az

$$R^*(X, Y)Z = \left((\nabla_X^* \rho)(Y) - (\nabla_Y^* \rho)(X) - \rho(X) \times \rho(Y) \right) \times Z$$

egyenletet minden $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén.

Minden egyes esetben konkrét formulával is leírtuk a kompatibilis ∇ -kat, amelyekhez az alábbi eszközöket és jelöléseket használtuk:

- $\tilde{\partial}_i F := -\frac{\hat{\partial}_i F}{\|C \times G\|}$,
- \tilde{c} a $\frac{C \times G}{\|C \times G\|}$ vektormező integrálgörbéje, egy olyan $v = \tilde{c}(0) \in T_p^\circ M$ pontból indulva, mely nem vertikális érintkezési pont,
- κ a \tilde{c} görbe görbülete,
- $$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} := \frac{1}{\kappa(0)} \begin{bmatrix} \tilde{c}^{2'}(0) \tilde{c}^{3''}(0) - \tilde{c}^{3'}(0) \tilde{c}^{2''}(0) \\ \tilde{c}^{3'}(0) \tilde{c}^{1''}(0) - \tilde{c}^{1'}(0) \tilde{c}^{3''}(0) \\ \tilde{c}^{1'}(0) \tilde{c}^{2''}(0) - \tilde{c}^{2'}(0) \tilde{c}^{1''}(0) \end{bmatrix},$$
- $$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} := \tilde{\partial}_1 F(v) \begin{bmatrix} \tilde{c}^{1'}(0) \\ \tilde{c}^{2'}(0) \\ \tilde{c}^{3'}(0) \end{bmatrix} + \frac{(\tilde{\partial}_1 F \circ \tilde{c})'(0)}{\kappa^2(0)} \begin{bmatrix} \tilde{c}^{1''}(0) \\ \tilde{c}^{2''}(0) \\ \tilde{c}^{3''}(0) \end{bmatrix},$$
- $$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} := \tilde{\partial}_2 F(v) \begin{bmatrix} \tilde{c}^{1'}(0) \\ \tilde{c}^{2'}(0) \\ \tilde{c}^{3'}(0) \end{bmatrix} + \frac{(\tilde{\partial}_2 F \circ \tilde{c})'(0)}{\kappa^2(0)} \begin{bmatrix} \tilde{c}^{1''}(0) \\ \tilde{c}^{2''}(0) \\ \tilde{c}^{3''}(0) \end{bmatrix},$$
- $$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} := \tilde{\partial}_3 F(v) \begin{bmatrix} \tilde{c}^{1'}(0) \\ \tilde{c}^{2'}(0) \\ \tilde{c}^{3'}(0) \end{bmatrix} + \frac{(\tilde{\partial}_3 F \circ \tilde{c})'(0)}{\kappa^2(0)} \begin{bmatrix} \tilde{c}^{1''}(0) \\ \tilde{c}^{2''}(0) \\ \tilde{c}^{3''}(0) \end{bmatrix},$$
- és ezek alapján definiáltuk az alábbi konstansokat:

$$d := 4D_1 P_1 + 2D_1 Q_2 + 2D_1 R_3 + 2D_2 P_2 + 2D_3 P_3,$$

$$e := 2D_1 Q_1 + 2D_2 P_1 + 4D_2 Q_2 + 2D_2 R_3 + 2D_3 Q_3,$$

$$f := 2D_1 R_1 + 2D_2 R_2 + 2D_3 P_1 + 2D_3 Q_2 + 4D_3 R_3,$$

$$g := 2D_1 D_2, \quad h := 2D_1 D_3, \quad i := 2D_2 D_3,$$

$$k := D_1^2 + 2D_2^2 + 2D_3^2, \quad l := 2D_1^2 + D_2^2 + 2D_3^2,$$

$$m := 2D_1^2 + 2D_2^2 + D_3^2, \quad \|D\|^2 := D_1^2 + D_2^2 + D_3^2.$$

10. TÉTEL (Megoldások 3D-ben a határozatlan esetben, [3]). Egy 3D-s GBM egy p pontjában, ha $C \times G$ elemei 2 dimenziót feszítenek ki T_pM -ben, akkor a metrikához kompatibilis lineáris konnexiók torziókomponensei az alábbiak:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{12}^1(p) &= P_3 + sD_3, & \mathbf{T}_{12}^3(p) &= -P_1 - Q_2 - sD_1 - tD_2, \\ \mathbf{T}_{12}^2(p) &= Q_3 + tD_3, & \mathbf{T}_{13}^2(p) &= P_1 + R_3 + sD_1 + uD_3, \\ \mathbf{T}_{13}^1(p) &= -P_2 - sD_2, & \mathbf{T}_{23}^1(p) &= -Q_2 - R_3 - tD_2 - uD_3, \\ \mathbf{T}_{13}^3(p) &= -R_2 - uD_2, \\ \mathbf{T}_{23}^2(p) &= Q_1 + tD_1, \\ \mathbf{T}_{23}^3(p) &= R_1 + uD_1, \end{aligned}$$

ahol s, t, u szabad paraméterek és az összes többi mennyiség a fentiekben értelmezett. Magukat a konnexiókat ezekből a (3) formula alapján tudjuk meghatározni.

11. TÉTEL (Az extrémális konnexió 3D-ben, a határozatlan esetben, [3]). A fenti esetben az extrémális konnexió torziókomponenseit az alábbi paraméterek adják:

$$s^0 = \frac{-2dk + eg + fh}{8 \|D\|^4}, \quad t^0 = \frac{dg - 2el + fi}{8 \|D\|^4}, \quad u^0 = \frac{dh + ei - 2fm}{8 \|D\|^4}.$$

12. TÉTEL (Megoldás 3D-ben a határozott esetben, [3]). Egy 3D-s GBM egy p pontjában, ha $C \times G$ elemei 3 dimenziót feszítenek ki T_pM -ben, akkor a metrikához kompatibilis, egyértelműen létező lineáris konnexió torziókomponenseit úgy kapjuk, hogy a 10. Tétel formuláiba az alábbiakat helyettesítjük:

$$\tilde{\omega}_{i3} = -2 \frac{\widehat{\partial}_i F(w) + \left\langle C_w \times G_w, \tilde{\partial}_i F(v) \tilde{c}'(0) + \frac{(\tilde{\partial}_i F \circ \tilde{c})'(0)}{\kappa^2(0)} \tilde{c}''(0) \right\rangle}{\left\langle C_w \times G_w, \frac{\tilde{c}'(0) \times \tilde{c}''(0)}{\kappa(0)} \right\rangle},$$

$$s = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{13}, \quad t = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{23}, \quad u = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{33}.$$

Itt $w \in T_pM$ egy olyan pont, ahol $\langle C_w \times G_w, \tilde{c}'(0) \times \tilde{c}''(0) \rangle \neq 0$.



**DEBRECENI
EGYETEM**

**DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR**

H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/106/2023.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Oláh Márk

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10072867

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. Vincze, C., **Oláh, M.**: On generalized Berwald manifolds of dimension three.
Publ. Math. Debr. 100 (3-4), 337-363, 2022. ISSN: 0033-3883.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2022.9059>
IF: 0.698 (2021)

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

2. Vincze, C., **Oláh, M.**, Alabdulsada, L. M. H.: On the divergence representation of the Gauss curvature of Riemannian surfaces and its applications.
Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. 69, 1-13, 2020. ISSN: 0009-725X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s12215-018-0382-6>
3. Vincze, C., **Oláh, M.**: On the extremal compatible linear connection of a Randers space.
J. Geom. 111 (2), 1-16, 2020. ISSN: 0047-2468.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00022-020-00532-9>

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

4. Vincze, C., Varga, A., **Oláh, M.**, Förián, L.: On computable classes of equidistant sets: equidistant functions.
Miskolc Math. Notes. 19 (1), 677-689, 2018. ISSN: 1787-2405.
IF: 0.468

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (5)

5. Vincze, C., **Oláh, M.**: Finsler metrics and semi-symmetric compatible linear connections.
J. Geom. 113 (3), 1-14, 2022. ISSN: 0047-2468.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00022-022-00654-2>





**DEBRECENI
EGYETEM**

**DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR**
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/106/2023.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Oláh Márk

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10072867

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. Vincze, C., **Oláh, M.**: On generalized Berwald manifolds of dimension three.
Publ. Math. Debr. 100 (3-4), 337-363, 2022. ISSN: 0033-3883.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2022.9059>
IF: 0.698 (2021)

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

2. Vincze, C., **Oláh, M.**, Alabdulsada, L. M. H.: On the divergence representation of the Gauss curvature of Riemannian surfaces and its applications.
Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. 69, 1-13, 2020. ISSN: 0009-725X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s12215-018-0382-6>
3. Vincze, C., **Oláh, M.**: On the extremal compatible linear connection of a Randers space.
J. Geom. 111 (2), 1-16, 2020. ISSN: 0047-2468.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00022-020-00532-9>

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

4. Vincze, C., Varga, A., **Oláh, M.**, Főrián, L.: On computable classes of equidistant functions.
Miskolc Math. Notes. 19 (1), 677-689, 2018. ISSN: 1787-2405.
IF: 0.468

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (5)

5. Vincze, C., **Oláh, M.**: Finsler metrics and semi-symmetric compatible linear connections.
J. Geom. 113 (3), 1-14, 2022. ISSN: 0047-2468.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00022-022-00654-2>



Short thesis for the degree of doctor of
philosophy (PhD)

Generalized Berwald Manifolds of Dimensions 2 and 3

Author: Márk Oláh

Supervisor: Csaba Vincze, PhD



UNIVERSITY OF DEBRECEN
Doctoral Council of Natural Sciences and Informatics
Doctoral School of Mathematical
and Computational Sciences
Debrecen, 2023

1. CHAPTER

Introduction

In differential geometry, two of the most important tools on manifolds are linear connections and metrics.

A **linear connection** ∇ defines a way to compare tangent vectors living in different tangent spaces at different points of the manifold, and thus enables us to differentiate one vector field along another. Defining a linear connection is actually equivalent to prescribing the rule for (linear) **parallel translation** from one tangent space to any other along any curve. A vector field along a curve is called **parallel** if it does not change along (the velocity vector field of) the curve, or, in other words, if its derivative along the curve is zero.

To be able to take measurements on the manifold, we need to define a way to measure the length of tangent vectors first – this is the notion of a **metric** in the geometrical sense. A **Riemannian metric** γ is a smoothly varying family of inner products in the tangent spaces, with ellipsoids as indicatrices (unit spheres). In the case of a **Finsler metric** F , we have a Minkowski (not necessarily centrally symmetric) norm in each tangent space with general, strictly convex smooth bodies as indicatrices, which vary smoothly from point to point. A manifold endowed with a Riemannian/Finsler metric is called a **Riemannian/Finsler manifold**. Finsler manifolds can be considered as the direct generalizations of Riemannian manifolds, but they behave quite differently in many situations.

Given both a linear connection ∇ and a metric on the same manifold, ∇ gives us the notion of parallel vector fields, and the metric allows us to measure the length of the elements of these vector fields. It feels natural to require that if a vector field does

not change (is parallel), then neither should its length. In this case, we say that ∇ is **metrical** to the metric (if it is Riemannian) or **compatible** to the metric (if it is Finslerian). The following questions arise naturally:

Q: *Given a metric, can we always find a linear connection ∇ metrical/compatible to it? If yes, how and how many? Is there a difference between the Riemannian and the Finslerian case?*

The Riemannian case is quite easy and has been solved for more than a century now. On a Riemannian manifold, there exists an infinite family of linear connections metrical to the Riemannian metric γ . These can be 'parameterized' by their torsion tensor (given by the so-called Koszul formula), i.e. prescribing any value to the torsion uniquely determines one member of this family. We usually consider the one with identically zero torsion, called the **Levi-Civita connection** of the metric.

Unfortunately, the Finslerian case is incomparably more difficult and is still unsolved today. In this dissertation, we are looking for the answers to the following questions:

1. *For a given Finsler metric on a manifold, is there always a linear connection compatible to it? If not, can we describe the 'good' Finsler metrics or at least give some necessary or sufficient conditions?*
2. *If a Finsler metric does admit compatible linear connections, how many are there and how can we describe them?*
3. *Can we distinguish a 'canonical' choice in the above case (like the Levi-Civita connection in Riemannian Geometry)?*
4. *What about manifolds? We know that any manifold admits a non-Riemannian Finsler metric; does it admit one with a compatible linear connection? If not, can we give some conditions or at least some obstructions based on the manifold's topological or analytic properties?*

In the literature, some of these questions are already answered (we have examples for Finsler metrics admitting 0, 1 or infinitely many compatible linear connections), but we also added new results to the list.

2. CHAPTER

Generalized Berwald manifolds and the compatibility equations

A Finsler manifold admitting a compatible linear connection ∇ is called a **generalized Berwald manifold**, or **GBM** for short. All Riemannian manifolds are special GBMs, but we exclude these and only consider non-Riemannian Finsler manifolds and GBMs. Two fundamental facts are used very often:

- The **rigidity property** says that a *connected* GBM is either Riemannian (everywhere) or non-Riemannian everywhere.
- Vincze proved in [15] that for any Finsler metric F there exists a Riemannian metric γ compatible to it, meaning that any linear connection compatible to F is also metrical to γ .

Let's introduce the notations

$$\widehat{\partial}_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \dot{\partial}_i := \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad f_{ij} = y^i \dot{\partial}_j F - y^j \dot{\partial}_i F.$$

Compatible ∇ s to a given Finsler metric F are the solutions of the system of **compatibility equations**, or **CEQ** for short. With the Christoffel symbols Γ_{ij}^k as unknowns, these equations are

$$(1) \quad \widehat{\partial}_i F - y^j (\Gamma_{ij}^k \circ \pi) \dot{\partial}_k F = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Choosing a fixed compatible Riemannian metric γ , using the torsion components \mathbf{T}_{ab}^c as the new unknowns, and considering everything in the tangent space $T_p M$ at a fixed point p only, with Riemannian normal coordinates around p , the form of the CEQ we will investigate and solve is

$$(2) \quad \sum_a' 2f_{ia} \mathbf{T}_{ia}^i + \sum_{a < b}' f_{ab} (\mathbf{T}_{ib}^a + \mathbf{T}_{ab}^i + \mathbf{T}_{ai}^b) = -2\widehat{\partial}_i F, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Note two things:

- Compatible ∇ s are uniquely determined by their torsion, so, after solving the CEQ for the \mathbf{T}_{ab}^c , the connections can be retrieved as

$$(3) \quad \mathbf{T}_{ab}^c \xrightarrow{\text{formula (4)}} \Gamma_{ij}^k \xrightarrow{\text{formula (5)}} \nabla :$$

$$(4) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \gamma^{mk} (-\gamma_{ij;m} + \gamma_{jm;i} + \gamma_{mi;j} + \mathbf{T}_{ij}^l \gamma_{ml} - \mathbf{T}_{jm}^l \gamma_{il} + \mathbf{T}_{mi}^l \gamma_{jl}),$$

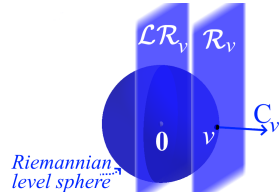
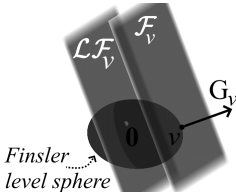
$$(5) \quad \nabla_X Y = (X^i \partial_i (Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k.$$

- We stress one more time that these equations are considered for the elements $v \in T_p^\circ M := T_p M \setminus \{\mathbf{0}\}$ **at a fixed point** $p \in M$ **only**. For a fixed value of v , this is a linear system for the unknown numbers $\mathbf{T}_{ab}^c(p)$, whose possible values (as vectors) are from the vector space $\wedge^2 T_p^* M \otimes T_p M$ of dimension $\binom{n}{2}n$ (or most of the time, with some tricks, they can be considered as elements of $T_p M$ itself). Thus, the solution set (after considering all values of v) is the intersection of affine subspaces, i.e. an affine subspace of $\wedge^2 T_p^* M \otimes T_p M$ (or sometimes $T_p M$). This is, of course, the solution only at one point, and solvability here does not imply the existence of global solutions, but considering this for any point of the manifold, we can learn much about those.

In [20], Vincze also introduces the notion of the **extremal compatible linear connection** (extremal connection from now on). On a Riemannian manifold, there is always a unique, easily distinguishable 'canonical' metrical ∇ , whose torsion is zero (the Levi-Civita connection). On a Finsler manifold, even if we have compatible ∇ s, all of them might have nonzero torsion, and at first sight it might not be obvious how to choose a 'canonical' one from them. For this, we need to consider the so-called bundle metric on the space of torsion tensors induced by the original compatible Riemannian metric. This gives us a way to measure and compare torsion tensors (at a given point p), and the extremal connection is defined as the unique compatible connection whose torsion has the minimal pointwise norm everywhere with respect to this metric.

In all cases where we were able to solve the CEQ, we used the 'double' geometric structure of T_pM and their related vector fields.

Finsler metric		Riemannian metric
Finslerian spheres	level sets	Euclidean spheres
\mathcal{F}_v	tangent planes at $v \in T_p^\circ M$	\mathcal{R}_v
$\mathcal{L}\mathcal{F}_v := \mathcal{F}_v - v$	linear tangent planes at $v \in T_p^\circ M$	$\mathcal{L}\mathcal{R}_v := \mathcal{R}_v - v$
$G_v := \text{grad } F(v) = [\hat{\partial}_1 F, \dots, \hat{\partial}_n F](v)$	normal vector fields (w.r.t. γ)	$C_v := v = [v^1, \dots, v^n]$



In [20], Vincze defined two special classes of elements of T_pM :

	role in the CEQ	geometrical role
vertical contact points	the coefficients (the whole LHS) of the CEQ disappears	the Finslerian and Euclidean normal vectors are parallel
horizontal contact points	the RHS of the CEQ disappears (the CEQ becomes homogeneous)	the derivative of the Finsler function vanishes along the horizontal directions $\hat{\partial}_i$

- Vertical contact points can serve as obstructions against the existence of solutions: they must also be horizontally contact to have solutions. If this is satisfied, they are otherwise useless, giving the equations $0 = 0$. If all points of T_pM are vertically contact, then F is Riemannian at p .
- At horizontally contact points, the CEQ becomes homogeneous. If all points of T_pM are horizontally contact, then $T \equiv 0$ is a trivial solution at p .

In Chapters 3, 4, 5 of the dissertation, we solved the CEQ and find the extremal connection in special cases.

3. CHAPTER

An example: Randers spaces

In this chapter, we solved the problem in the special case of **Randers metrics**, i.e. Finsler metrics of the form

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y),$$

where α is a norm induced by some Riemannian metric a (**Riemannian part**) and β is a 1-form field (**perturbating part**) on the manifold M . To simplify the CEQ, a is used as the compatible Riemannian metric and we use **adapted normal coordinates**, meaning that the Riemannian normal coordinates around $p \in M$ are chosen in a way such that the first $n - 1$ coordinate vectors span the kernel of β , giving

$$\alpha(x, y) = \sqrt{(y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2} \quad \text{and} \quad \beta_i(x) = \delta_i^n \|\beta(x)\|.$$

We also use the notation

$$(6) \quad \boxed{C_{j;i}(x) := -\frac{\widehat{\partial}_i \beta_j}{\|\beta\|}(x)}.$$

We gave a new proof for a previous result of Vincze (see [17]) about the existence of compatible ∇ s on Randers spaces.

THEOREM 1. [17] *A **connected** Randers manifold is a GBM \iff the norm $\|\beta\|$ of the perturbating term is constant.*

The chapter contains the following new results from [1].

THEOREM 2 (The solution of the CEQ for Randers spaces, [1]). *Suppose that a non-Riemannian Randers manifold (M, F) is a GBM, fix a point $p \in M$ and use adapted coordinates around it. Then at this point, the torsion components $\mathbf{T}_{ab}^c(p)$ of compatible linear connections are given by the following table.*

<i>type</i>	<i>indices</i>	<i>formula</i>	<i>no. of comp. 's</i>
<i>any</i>	$n \notin \{a, b, c\}$	\mathbf{T}_{ab}^c is freely chosen	$(n-1) \binom{n-1}{2}$
<i>repetitive</i>	$a \neq n$	$\mathbf{T}_{an}^n = C_{a;n}$	$n-1$
	$a \neq n$	$\mathbf{T}_{an}^a = C_{a;a}$	$n-1$
<i>diverse</i>	$a < b < n$	$\mathbf{T}_{an}^b + \mathbf{T}_{bn}^a = C_{a;b} + C_{b;a}$	$2 \binom{n-1}{2}$
	$a < b < n$	$\mathbf{T}_{ab}^n = C_{a;b} - C_{b;a}$	$\binom{n-1}{2}$

Here, the quantities $C_{j;i}$ are defined by (6). From these, we can retrieve the connections by (3). We can also see that the ratio of the components that can be freely chosen is $(n-2)/n$, which tends to 1 as $n \rightarrow \infty$.

THEOREM 3 (The extremal connection of a Randers space, [1]). *Suppose that a non-Riemannian Randers manifold (M, F) is a GBM, fix a point $p \in M$ and use adapted coordinates around it. Then at this point, the torsion components $T_{ab}^c(p)$ of the extremal compatible linear connection are given by the following table.*

<i>type</i>	<i>indices</i>	<i>formula</i>	<i>no. of comp. 's</i>
<i>any</i>	$n \notin \{a, b, c\}$	$\mathbf{T}_{ab}^c = 0$	$(n-1) \binom{n-1}{2}$
<i>repetitive</i>	$a \neq n$	$\mathbf{T}_{an}^n = C_{a;n}$	$n-1$
	$a \neq n$	$\mathbf{T}_{an}^a = C_{a;a}$	$n-1$
<i>diverse</i>	$a < b < n$	$\mathbf{T}_{an}^b = \mathbf{T}_{bn}^a = \frac{C_{a;b} + C_{b;a}}{2}$	$2 \binom{n-1}{2}$
	$a < b < n$	$\mathbf{T}_{ab}^n = C_{a;b} - C_{b;a}$	$\binom{n-1}{2}$

Here, the quantities $C_{j;i}$ are defined by (6). From these, we can retrieve the connection by (3).

4. CHAPTER

2-dimensional generalized Berwald manifolds

It is well-known that 2-dimensional connected non-Riemannian Finsler manifolds (surfaces) either don't admit any compatible linear connections, or admit a unique one. In the first half of the chapter, we presented three different ways to prove this and to obtain formulas for this connection.

- The first method is to consider the CEQ directly:

$$(CEQ-2D) \quad \left. \begin{aligned} f_{21} \mathbf{T}_{12}^1 &= \widehat{\partial}_1 F \\ f_{21} \mathbf{T}_{12}^2 &= \widehat{\partial}_2 F \end{aligned} \right\}.$$

From this, it can be seen that in the non-Riemannian case, if there is a solution, it must be unique and its torsion at p is

$$(7) \quad \boxed{\mathbf{T}_{12}^1 = \frac{\widehat{\partial}_1 F(v)}{f_{21}(v)} \quad \text{and} \quad \mathbf{T}_{12}^2 = \frac{\widehat{\partial}_2 F(v)}{f_{21}(v)}}.$$

- The second method uses classical tools of Finsler geometry and is only mentioned briefly (see [5]).
- The third method is based on the fact that, in 2D, the torsion of any linear connection is semi-symmetric, meaning that it can be written in the form

$$(8) \quad T(X, Y) = \rho(Y)X - \rho(X)Y$$

for some differential 1-form ρ on the base manifold. This, together with the theorem of Vincze (from [16], for which we gave a new elementary proof in [4]) stating that any Finsler metric admits at most one such connection, yields the unicity result.

In the second half of the chapter, we presented the following new results/proofs from [2].

THEOREM 4 (The divergence representation of the Gauss curvature, [2]). *Let (M, F, ∇) be a generalized Berwald **surface** and γ a compatible Riemannian metric with Levi-Civita connection ∇^* . Then the Gauss curvature of γ is the divergence of the vector field ρ^\sharp dual to the 1-form ρ coming from the semi-symmetric torsion of ∇ in the form of (8):*

$$(9) \quad \kappa^* = \operatorname{div}^* \rho^\sharp.$$

The proof is based on the torsion of ∇ being semi-symmetrical and the comparison of the curvature tensors of ∇ and ∇^* .

THEOREM 5. *Let M be a connected, compact and orientable surface. If it is the base manifold of a non-Riemannian generalized Berwald surface, then its Euler characteristic is zero.*

PROOF. [2] Let us integrate both sides of the divergence representation (9) over the whole manifold M :

$$\int_M \kappa^* = \int_M \operatorname{div}^*(\rho^\sharp).$$

- By the Gauss–Bonnet theorem, the left hand side is $2\pi \cdot \chi(M)$.
- By the divergence theorem, the right hand side is $\int_{\partial M} \langle \rho^\sharp, N \rangle$ with N as the outward-pointing unit normal vector field. But our manifolds have no boundary, so this integral is 0. \square

THEOREM 6. [2] *Of all compact, connected and orientable surfaces (the 2-sphere \mathbb{S}^2 and the g -fold tori $\mathbb{T}\#\dots\#\mathbb{T}$), none can be the base manifold of a non-Riemannian GBM except for the torus. Furthermore, the torus can indeed carry a GBM structure.*

THEOREM 7. [2] *Of all the 3 model spaces in 2D (the Euclidean plane, the 2-sphere and the hyperbolic plane), both the Euclidean and hyperbolic planes can carry a GBM structure.*

We also demonstrated an easy method for constructing (non-Riemannian) generalized Berwald structures, compatible to the usual Riemannian metrics γ on the Euclidean and hyperbolic planes. The method, in short, is the following.

represent the Gauss curvature of γ as divergence
 (i.e. solve $\kappa^* = \text{div}^*(\rho^\sharp)$ for ρ^\sharp)

→ ρ^\sharp vector field → ρ 1-form field

$\xrightarrow{(8)}$ T torsion $\xrightarrow{(3)}$ ∇ **metrical** linear connection

→ notion of parallelism

↓

choose a non-quadratic polyellipse at $p \in M$,
 invariant under $\text{Hol}(\nabla)$

→ parallel translate this to all points of M , using ∇

→ as an indicatrix family, these together constitute a
 non-Riemannian Finsler metric F compatible to ∇

5. CHAPTER

3-dimensional generalized Berwald manifolds

In 3D, by regrouping the torsion components with respect to the coefficients, the CEQ can be written into the form

$$(CEQ-3D-i) \quad \langle C_v \times G_v, \vec{s}_i \rangle = -2 \hat{\partial}_i F(v), \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

i.e. 3 linear equations where

- the vector field $C \times G$ describes how F and γ are related:
 - ▶ $v \in T_p^\circ M$ is vertically contact $\iff C_v \times G_v = \mathbf{0}$.
 - ▶ If v is not vertically contact, the nonzero vector $C_v \times G_v$ gives the direction of the line $\mathcal{F}_v \cap \mathcal{R}_v$. Consequently, the integral curves of the vector field $C \times G$ in $T_p^\circ M$ are always running in the intersection of the Finslerian and the Riemannian (Euclidean) spheres.
- the unknowns $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ are vectors in $T_p M$, and a solution for these uniquely determines a solution for the torsion.

Since these equations only differ from each other in their inhomogeneous parts, we can handle them together by considering only the homogeneous version

$$(H-CEQ-3D) \quad \langle C_v \times G_v, \vec{s} \rangle = 0.$$

So first, we consider the homogeneous version (H-CEQ-3D). Its solution set (the common **directional space**) is a linear subspace that is the orthogonal complement of $\text{span}(C_v \times G_v)$ inside $T_p M$. The solution sets of the original, possibly inhomogeneous equations (CEQ-3D-1), (CEQ-3D-2), (CEQ-3D-3) of the CEQ (the **solution spaces**) are either empty or affine translates of the directional space (and therefore parallel to it and to each other).

We presented the following new results from [3].

STATEMENT 8. [3] *We have the following possible cases:*

dim. of span of $C_v \times G_v$	dim. of directional space	solution spaces of the equations (CEQ-3D- i)	geometry
0	3	$T_p M$ or \emptyset	F_p is quadratic
1	impossible		
2	1	3 parallel lines or \emptyset	F_p is a revolution surface with the directional line as axis
3	0	3 points or \emptyset	F_p does not have a rotational axis through the origin

THEOREM 9 (Main theorem of 3-dimensional GBMs, [3]). *If M is a connected non-Riemannian generalized Berwald manifold of dimension three, then we have the following possible cases.*

- **Undetermined case (UDC):** *The space admits infinitely many compatible linear connections if and only if the Finslerian indicatrix is a Euclidean surface of revolution at some and therefore all points of the manifold, with rotational axes going through the origins of the tangent spaces. These axes are generated by a globally well-defined (nowhere vanishing) vector field $D \in \mathfrak{X}(M)$, whose values have length 1, are in the orthogonal complement of the span of $C_v \times G_v$ in each $T_p M$ and are parallel (covariant constant) with respect to any compatible linear connection. One of these connections is given by*

$$(10) \quad \nabla_X Y = \nabla_X^* Y + \frac{\langle \nabla_X^* D, Y \rangle D - \langle Y, D \rangle \nabla_X^* D}{\langle D, D \rangle}.$$

- **Determined case (DC):** *The space admits a unique compatible linear connection that is flat. It is given by*

$$(11) \quad \nabla_X Y = \nabla_X^* Y - \rho(X) \times Y,$$

where ρ is an endomorphism of $\mathfrak{X}(M)$ satisfying

$$R^*(X, Y)Z = \left((\nabla_X^* \rho)(Y) - (\nabla_Y^* \rho)(X) - \rho(X) \times \rho(Y) \right) \times Z$$

for any $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

We also gave formulas for the compatible ∇ s in the different cases, using the following assumptions and notations:

- $\tilde{\partial}_i F := -\frac{\widehat{\partial}_i F}{\|C \times G\|}$,
- \tilde{c} is the integral curve of $\frac{C \times G}{\|C \times G\|}$, starting at a not vertically contact point $v = \tilde{c}(0)$ of $T_p^\circ M$,
- κ is the curvature of \tilde{c} ,
- $\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} := \frac{1}{\kappa(0)} \begin{bmatrix} \tilde{c}^2'(0) \tilde{c}^3''(0) - \tilde{c}^3'(0) \tilde{c}^2''(0) \\ \tilde{c}^3'(0) \tilde{c}^1''(0) - \tilde{c}^1'(0) \tilde{c}^3''(0) \\ \tilde{c}^1'(0) \tilde{c}^2''(0) - \tilde{c}^2'(0) \tilde{c}^1''(0) \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} := \tilde{\partial}_1 F(v) \begin{bmatrix} \tilde{c}^1'(0) \\ \tilde{c}^2'(0) \\ \tilde{c}^3'(0) \end{bmatrix} + \frac{(\tilde{\partial}_1 F \circ \tilde{c})'(0)}{\kappa^2(0)} \begin{bmatrix} \tilde{c}^1''(0) \\ \tilde{c}^2''(0) \\ \tilde{c}^3''(0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} := \tilde{\partial}_2 F(v) \begin{bmatrix} \tilde{c}^1'(0) \\ \tilde{c}^2'(0) \\ \tilde{c}^3'(0) \end{bmatrix} + \frac{(\tilde{\partial}_2 F \circ \tilde{c})'(0)}{\kappa^2(0)} \begin{bmatrix} \tilde{c}^1''(0) \\ \tilde{c}^2''(0) \\ \tilde{c}^3''(0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} := \tilde{\partial}_3 F(v) \begin{bmatrix} \tilde{c}^1'(0) \\ \tilde{c}^2'(0) \\ \tilde{c}^3'(0) \end{bmatrix} + \frac{(\tilde{\partial}_3 F \circ \tilde{c})'(0)}{\kappa^2(0)} \begin{bmatrix} \tilde{c}^1''(0) \\ \tilde{c}^2''(0) \\ \tilde{c}^3''(0) \end{bmatrix},$$

- and from these, we define

$$d := 4D_1P_1 + 2D_1Q_2 + 2D_1R_3 + 2D_2P_2 + 2D_3P_3,$$

$$e := 2D_1Q_1 + 2D_2P_1 + 4D_2Q_2 + 2D_2R_3 + 2D_3Q_3,$$

$$f := 2D_1R_1 + 2D_2R_2 + 2D_3P_1 + 2D_3Q_2 + 4D_3R_3,$$

$$g := 2D_1D_2, \quad h := 2D_1D_3, \quad i := 2D_2D_3,$$

$$k := D_1^2 + 2D_2^2 + 2D_3^2, \quad l := 2D_1^2 + D_2^2 + 2D_3^2,$$

$$m := 2D_1^2 + 2D_2^2 + D_3^2, \quad \|D\|^2 := D_1^2 + D_2^2 + D_3^2.$$

THEOREM 10 (The solutions in the UDC case in 3D, [3]). *At the point p of a 3-dimensional GBM, if the vectors $C \times G$ span 2 dimensions, then the torsion components of the linear connections compatible to the Finsler metric F are*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{12}^1(p) &= P_3 + sD_3, & \mathbf{T}_{12}^3(p) &= -P_1 - Q_2 - sD_1 - tD_2, \\ \mathbf{T}_{12}^2(p) &= Q_3 + tD_3, & \mathbf{T}_{13}^2(p) &= P_1 + R_3 + sD_1 + uD_3, \\ \mathbf{T}_{13}^1(p) &= -P_2 - sD_2, & \mathbf{T}_{23}^1(p) &= -Q_2 - R_3 - tD_2 - uD_3, \\ \mathbf{T}_{13}^3(p) &= -R_2 - uD_2, \\ \mathbf{T}_{23}^2(p) &= Q_1 + tD_1, \\ \mathbf{T}_{23}^3(p) &= R_1 + uD_1, \end{aligned}$$

where s, t, u are free parameters and all the other quantities are defined above. From these, we can retrieve the connections by (3).

THEOREM 11 (The extremal connection in the UDC case in 3D, [3]). *In the above case, the torsion components of the extremal compatible linear connection belong to the parameters*

$$s^0 = \frac{-2dk + eg + fh}{8 \|D\|^4}, \quad t^0 = \frac{dg - 2el + fi}{8 \|D\|^4}, \quad u^0 = \frac{dh + ei - 2fm}{8 \|D\|^4}.$$

THEOREM 12 (The solution in the DC case in 3D, [3]). *At the point p of a 3-dimensional GBM, if the vectors $C \times G$ span 3 dimensions, then the uniquely determined compatible ∇ 's torsion components are given by substituting*

$$\tilde{\omega}_{i3} = -2 \frac{\widehat{\partial}_i F(w) + \left\langle C_w \times G_w, \widehat{\partial}_i F(v) \tilde{c}'(0) + \frac{(\tilde{\partial}_i F \circ \tilde{c})'(0)}{\kappa^2(0)} \tilde{c}''(0) \right\rangle}{\left\langle C_w \times G_w, \frac{\tilde{c}'(0) \times \tilde{c}''(0)}{\kappa(0)} \right\rangle},$$

$$s = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{13}, \quad t = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{23}, \quad u = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{33}$$

to the formulas of Theorem 10, where $w \in T_p^o M$ is chosen such that $\langle C_w \times G_w, \tilde{c}'(0) \times \tilde{c}''(0) \rangle \neq 0$.



**UNIVERSITY of
DEBRECEN**

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY

UNIVERSITY OF DEBRECEN

H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen

Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/106/2023.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Márk Oláh

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10072867

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

1. Vincze, C., **Oláh, M.**: On generalized Berwald manifolds of dimension three.
Publ. Math. Debr. 100 (3-4), 337-363, 2022. ISSN: 0033-3883.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2022.9059>
IF: 0.698 (2021)

Foreign language scientific articles in international journals (2)

2. Vincze, C., **Oláh, M.**, Alabdulsada, L. M. H.: On the divergence representation of the Gauss curvature of Riemannian surfaces and its applications.
Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. 69, 1-13, 2020. ISSN: 0009-725X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s12215-018-0382-6>
3. Vincze, C., **Oláh, M.**: On the extremal compatible linear connection of a Randers space.
J. Geom. 111 (2), 1-16, 2020. ISSN: 0047-2468.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00022-020-00532-9>

List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

4. Vincze, C., Varga, A., **Oláh, M.**, Fórián, L.: On computable classes of equidistant functions.
Miskolc Math. Notes. 19 (1), 677-689, 2018. ISSN: 1787-2405.
IF: 0.468

Foreign language scientific articles in international journals (5)

5. Vincze, C., **Oláh, M.**: Finsler metrics and semi-symmetric compatible linear connections.
J. Geom. 113 (3), 1-14, 2022. ISSN: 0047-2468.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00022-022-00654-2>





**UNIVERSITY of
DEBRECEN**

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY

UNIVERSITY OF DEBRECEN

H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen

Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/106/2023.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Márk Oláh

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10072867

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

1. Vincze, C., **Oláh, M.**: On generalized Berwald manifolds of dimension three.
Publ. Math. Debr. 100 (3-4), 337-363, 2022. ISSN: 0033-3883.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2022.9059>
IF: 0.698 (2021)

Foreign language scientific articles in international journals (2)

2. Vincze, C., **Oláh, M.**, Alabdulsada, L. M. H.: On the divergence representation of the Gauss curvature of Riemannian surfaces and its applications.
Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. 69, 1-13, 2020. ISSN: 0009-725X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s12215-018-0382-6>
3. Vincze, C., **Oláh, M.**: On the extremal compatible linear connection of a Randers space.
J. Geom. 111 (2), 1-16, 2020. ISSN: 0047-2468.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00022-020-00532-9>

List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

4. Vincze, C., Varga, A., **Oláh, M.**, Fórián, L.: On computable classes of equidistant functions.
Miskolc Math. Notes. 19 (1), 677-689, 2018. ISSN: 1787-2405.
IF: 0.468

Foreign language scientific articles in international journals (5)

5. Vincze, C., **Oláh, M.**: Finsler metrics and semi-symmetric compatible linear connections.
J. Geom. 113 (3), 1-14, 2022. ISSN: 0047-2468.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00022-022-00654-2>



Bibliography

Featured papers

- [1] Cs. Vincze, M. Oláh, *On the extremal compatible linear connection of a Randers space*, Journal of Geometry **111** Article no. 19 (2020).
[arXiv: 2001.04389](#) [DOI: 10.1007/s00022-020-00532-9](#)
- [2] Cs. Vincze, M. Oláh, L. M. Alabdulsada, *On the divergence representation of the Gauss curvature of Riemannian surfaces and its applications*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, **69** (2020), pp. 1–13.
[arXiv: 2003.05062](#) [DOI: 10.1007/s12215-018-0382-6](#)
- [3] Cs. Vincze, M. Oláh, *On generalized Berwald manifolds of dimension three*, Publicationes Mathematicae Debrecen, **100** (2022), pp. 337–363.
[arXiv: 2108.10032](#) [DOI: 10.5486/PMD.2022.9059](#)

Mentioned papers

- [4] Cs. Vincze, M. Oláh, *Finsler metrics and semi-symmetric compatible linear connections*, Journal of Geometry **113**, Article no. 45 (2022)
[arXiv: 2204.01034](#) [DOI: 10.1007/s00022-022-00654-2](#)

- [5] Cs. Vincze, T. Khoshdani, S. Mehdi Zadeh, M. Oláh, *On compatible linear connections of two-dimensional generalized Berwald manifolds: a classical approach*, Communications in Math. **27** (1) (2019), pp. 51–68.
arXiv version: On compatible linear connections of two-dimensional generalized Berwald manifolds
[arXiv: 1808.02644](https://arxiv.org/abs/1808.02644) [DOI: 10.2478/cm-2019-0005](https://doi.org/10.2478/cm-2019-0005)
- [6] Cs. Vincze, T. Khoshdani, M. Oláh, *On generalized Berwald surfaces with locally symmetric fourth root metrics*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications **24** (2) (2019), pp. 63–78.
[arXiv: 1808.10855](https://arxiv.org/abs/1808.10855)
<http://www.mathem.pub.ro/bjga/v24n2/B24-2vi-ZF66.pdf>

Basic references and textbooks

- [7] David Bao, Shiing-Shen Chern, Zhongmin Shen, *An Introduction to Riemann–Finsler Geometry*. Springer Verlag, New York, 2000.
- [8] Arthur L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 10, Springer-Verlag, 1987.
- [9] Manfredo Perdigao do Carmo, *Riemannian Geometry*. English translation by Francis Flaherty. Birkhäuser, Boston, 1992.
- [10] Shoshichi Kobayashi, Katsumi Nomizu, *Foundations of Differential Geometry. Volume 1*. Wiley and Sons, New York, 1963.
- [11] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd edition. Springer Verlag, New York, 2013.
- [12] John M. Lee, *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*. Springer Verlag, New York, 1997.
- [13] James Munkres, *Topology*, 2nd edition, Pearson Education Limited, 2014.

Cited papers on GBMs

- [14] N. Bartelmeß and V. Matveev, *Monochromatic metrics are generalized Berwald*, J. Diff. Geom. Appl. **58** (2018), pp. 264–271.
- [15] Cs. Vincze, *A new proof of Szabó’s theorem on the Riemannizability of Berwald manifolds*, J. AMAPN **21** (2005), pp. 199–204.
- [16] Cs. Vincze, *Generalized Berwald manifolds with semi-symmetric linear connections*, Publ. Math. Debrecen **83** (4) (2013), pp. 741–755.
- [17] Cs. Vincze, *On Randers manifolds with semi-symmetric compatible linear connections*, Indagationes Mathematicae **26** (2) (2014), pp. 363–379.
- [18] Cs. Vincze, *On a special type of generalized Berwald manifolds: semi-symmetric linear connections preserving the Finslerian length of tangent vectors*, ”Finsler geometry: New methods and Perspectives”, European Journal of Mathematics **3** (4) (2017), pp. 1098–1171.
- [19] Cs. Vincze, *Lazy orbits: an optimization problem on the sphere*, Journal of Geometry and Physics **124** (2018), pp. 180–198.
- [20] Cs. Vincze, *On the extremal compatible linear connection of a generalized Berwald manifold*, Aequationes Mathematicae, Volume **96** (2022), pp. 53–70.
- [21] V. Wagner, *On generalized Berwald spaces*, CR Dokl. Acad. Sci. USSR (N.S.) **39** (1943), pp. 3–5.

Miscellaneous

- [22] I. Agricola and T. Friedrich, *On the holonomy of connections with skew-symmetric torsion*, Math. Ann. **328** (4) (2004), pp. 711–748.
- [23] W. Ambrose, I. Singer, *A theorem on holonomy*, Transactions of the American Mathematical Society, **75** (1953), pp. 428–443.
- [24] P. L. Antonelli, R. S. Ingarden, M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*. Springer Netherlands, 1993.
- [25] D. Bao, C. Robles, Z. Shen, *Zermelo Navigation on Riemannian Manifolds*, J. Differential Geometry, 66 (2004), pp. 377–435.
- [26] M. Berger, *Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France **83** (1955)
- [27] A. Borel, A. Lichnerowicz, *Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes*, Les Comptes rendus de l'Académie des sciences, **234** (1952), pp. 1835–1837.
- [28] P. Chansri, P. Chansangiam, Sorin V. Sabau, *The Geometry on the Slope of a Mountain*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 21 (2020), No. 2, pp. 747–762.
- [29] Y. Ollivier, *A visual introduction to Riemannian curvatures and some discrete generalizations*, manuscript
- [30] I. Richards, *On the classification of noncompact surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **106**. (1963), pp. 259–269.
- [31] B. G. Schmidt, *Conditions on a Connection to be a Metric Connection*, Commun. Math. Phys. **29** (1973), pp. 55–59.