

Tézisek

1. Csoportthatások halmazokon és automataelmélet

1.1 Csoportthatások halmazokon elmélettel kapcsolatos eredmények

Állítás Legyen X egy G -halmaz és x egy tetszőleges eleme. Ha $N(G_x) \subset G$ akkor $N(G_{x'} \subset G \forall x' \in C^\sim(x)$. Speciálisan ha G véges akkor a $G_x \subset N(G_x)$ összefüggés a hasonló $G_{x'} \subset N(G_{x'})$ összefüggést implikálja és $G_x = N(G_x)$ -ből az $G_{x'} = N(G_{x'}) \forall x' \in C^\sim(x)$ összefüggés következik.

Állítás Legyen X egy G -halmaz és x egy tetszőleges eleme. Feltételezzük, hogy $G_x = N(G_x) \subset G$ (ami egyben azt is jelenti a **Bevezető 1.1.9 b)** paragrafusa alapján, hogy $C^\sim(x)$ számossága nagyobb mint 1) továbbá legyen $x' \in C^\sim(x), x' \neq x$ akkor $G_x \neq G_{x'}$. Ha G véges akkor $G_{x_1} \neq G_{x_2} \forall x_1, x_2 \in C^\sim(x), x_1 \neq x_2$.

Következmény Ha S_X véges és ha $G_x = N(G_x)$ az S_X valamilyen tetszőleges stabilizátor részcsoportjára (x tetszőleges X -ben) akkor $G_x \neq G_{x'} \forall x, x' \in X, x \neq x'$ (ahol G_x és $G_{x'}$ továbbra is az x illetve x' elemek stabilizátorait jelölik).

Állítás Legyen \mathbf{G} a G csoport összes G_x stabilizátor részcsoportjának halmaza. Az X halmaz akkor és csak akkor ágyazható \mathbf{G} -be ha $G_x = N(G_x) \subset G$ minden $x \in X$ -re. Ha S_X véges az X halmaz akkor és csak akkor ágyazható \mathbf{G} -be ha $G_x = N(G_x)$ valamilyen tetszőleges $x \in X$ -re.

1.2 Csoportthatások halmazokon és kategóriaelmélet kapcsolatával összefüggő eredmények

Állítás A $C^\sim(x)$ és a $C^\cong(G_x)$ osztályok egy-egy kategóriát alkotnak amely kategóriák között egy F funktor definiálható.

Vagyis megmutatjuk, hogy $C^\sim(x)$ egy kategóriát alkot melynek objektumai az x, x', x'', \dots (tehát $C^\sim(x)$ elemei) és morfizmusai pedig az $f_x^{gG_x}$ -el jelölt függvények ahol

$$f_x^{gG_x} : \{x\} \rightarrow \{x'\}, gx = x', g \in G$$

és

$$f_x^{gG_x}(x) = (gG_x)x = gx = x'; x \in C^\sim(x)$$

Hasonlóan megmutatjuk, hogy $C^\cong(G_x)$ szintén kategóriát alkot melynek objektumai $G_x, G_{x'}, G_{x''}, \dots$ és morfizmusait pedig a következőképpen definiálom:

$$f_{gG_x} : \{G_x\} \rightarrow \{G_{x'}\}, f_{gG_x}(G_x) = gG_xg^{-1} = G_{x'} (gx = x', g \in G)$$

Végül megmutatjuk, hogy konstruálható egy F funktor a két említett kategória között a következő $F = (\Phi_x, \Psi_x)$ függvénypárral:

$$\Phi_x : C^\sim(x) \rightarrow C^\cong(G_x), \Phi_x(x^*) = G_{x^*}, \forall x^* \in C^\sim(x)$$

$$\Psi_x : \{f_{x^*}^{g^* G_{x^*}} : x^* \in C^\sim(x), g^* \in G\} \rightarrow \{f_{g^* G_{x^*}} : x^* \in C^\sim(x), g^* \in G\}$$

$$\Psi_x(f_{x^*}^{g^* G_{x^*}}) = f_{g^* G_{x^*}}$$

Φ_x az objektumok közötti megfeleltetésekért felelős míg Ψ_x a morfizmusok közötti megfeleltetésekért.

1.3 Kölcsönhatásmélettal kapcsolatos eredmények

Definíció (kölcönhatás) Legyen X és S_X/\overline{G}_X egy adott fizikai rendszer állapothalmaza illetve szimmetrikus csoportja. A rendszer kölcsönhatásban vesz részt ha létezik (ϕ_1, f_1) és (ϕ_2, f_2) függvénypár, ahol ϕ_1 és ϕ_2 az S_X/\overline{G}_X illetve S_X/G_1 csoportok homomorfizmusai

$$\phi_1 : S_X/\overline{G}_X \rightarrow S_X/G_1; \phi_2 : S_X/G_1 \rightarrow S_X/G_2$$

ahol

$$\text{Ker}\phi_1 = G_1/\overline{G}_X, \overline{G}_X \subset G_1; \text{Ker}\phi_2 = G_2/G_1, G_1 \subset G_2$$

$$f_1 : X \rightarrow X/\text{Ker}f_1; f_2 : X/\text{Ker}f_1 \rightarrow (X/\text{Ker}f_1)/\text{Ker}f_2$$

valamint

$$\text{Ker}f_1 = \sim_{\text{Ker}\phi_1} = \sim_{G_1/\overline{G}_X}; \text{Ker}f_2 = \sim_{\text{Ker}\phi_2} = \sim_{G_2/G_1}$$

A következő eredmény előáll mint egy fontos következménye a már ismert és a disszertáció 1.4 alfejezetben megemlített alábbi eredményeknek: Mint ismeretes, egy normális részcsoport hatásai kongruenciarelációt indukálnak az adott halmazon. Ez a tény a disszertációban bemutatott elmélet esetében a következőképpen formalizálható: Ha x_1 és x_2 az X állapothalmaz két tetszőleges eleme úgy, hogy $x_1 \sim_{G_1/\overline{G}_X} x_2$ és $g_2 \in G_i$ ($G_1 \subset G_2 \subseteq G_i$) akkor $[(g_2\overline{G}_X)x_1] \sim_{G_1/\overline{G}_X} [(g_2\overline{G}_X)x_2]$ (azaz $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ kongruencia). Ennek az állításnak a megfordítása is igaz, nevezetesen ha $(g_1\overline{G}_X)x_1 = x_2$ és ha létezik $g^* \in G_1$ úgy, hogy

$$(g^*\overline{G}_X)[(g_2\overline{G}_X)x_1] = (g_2\overline{G}_X)x_2 \forall g_1 \in G_1 \forall g_2 \in S_X$$

(azaz ha $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ egy kongruencia, vagyis ha egy adott $g_2\overline{G}_X$ bemenőjel az f_1 mennyiségnek ugyanakkora változását idézi elő ahol $\text{Ker}f_1 = \sim_{G_1/\overline{G}_X}$)

akkor G_1 normális részcsoportha S_X -nek.

Következmény Minden $x_1 \rightarrow (g_2 \overline{G}_X)x_1$; $x_2 \rightarrow (g_2 \overline{G}_X)x_2$ típusú átmenet ahol

$$\begin{aligned} C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_1) &= C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_2) \neq \\ &\neq C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}[(g_2 \overline{G}_X)x_1] = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}[(g_2 \overline{G}_X)x_2] \end{aligned}$$

az $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ ekvivalenciareláció osztályai között az

$$(X, S_X/\overline{G}_X, X/\sim_{G_1/\overline{G}_X}, \delta, \lambda)$$

rendszer (automata) esetén ugyanazt az átmenetet indukálja nevezetesen

$$C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_1) \longrightarrow C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}[(g_2 G_1)x_1]$$

az $(X/\sim_{G_1/\overline{G}_X}, S_X/G_1, (X/\sim_{G_1/\overline{G}_X})/\sim_{G_2/G_1}, \delta', \lambda')$ rendszer (automata) állapotai között.

Tehát kölcsönhatáskor egy adott rendszer (automata) átalakul automata homomorfizmus által egy gazdaságosabb és stabilabb rendszerré (automatává), a nagyobb stabilitás abban jut kifejezésre, hogy a régi rendszer állapotainak \overline{G}_X szimmetriája a G_1 szimmetriára bővül ezen átalakulás folyamán. Mivel a G_1/\overline{G}_X csoport elemeinek a hatásai által indukált $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ kongruenciareláció osztályai között történik az átmenet, ezért ebben a folyamatban a G_1/\overline{G}_X szimmetria sérül (osztályon belüli átmenetek a G_1/\overline{G}_X szimmetria érvényesülését, míg az osztályok közötti átmenetek a fenti szimmetria sérülését jelentik). Viszont G_1 csoport nyilvánvalóan tartalmaz egy, a G_1/\overline{G}_X csoporttal izomorf részcsoporthot. Tehát a sérülő G_1/\overline{G}_X szimmetria valóban beépül (beágyazódik) a magasabb G_1 szimmetriába.

Indokolttá válik, a kölcsönhatássorozat és a kompozíciólánc közötti összefüggés. A kompozíciólánc faktorcsoporthai megadják a kölcsönhatások típusát (izomorf faktorcsoporthok azonos típusú kölcsönhatásokat képviselnek).

Definíció (kölcsönhatás-sorozat) Legyenek f_1, f_2, \dots, f_n a rendszerhez asszociált fizikai mennyiségek úgy, hogy

$$\text{Ker } f_1 = \sim_{G_1/\overline{G}_X}; \text{Ker } f_2 = \sim_{G_2/G_1}; \dots; \text{Ker } f_{n-1} = \sim_{G_{n-1}/G_{n-2}};$$

$$\text{Ker } f_n = \sim_{G_n/G_{n-1}}$$

$$f_i : ((X/\dots)/\sim_{G_{i-1}/G_{i-2}}) \rightarrow ((X/\dots)/\sim_{G_{i-1}/G_{i-2}})/\sim_{G_i/G_{i-1}} \quad (i = 1, n)$$

és $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ homomorfizmusok úgy, hogy

$$\phi_1 : S_X/\overline{G}_X \rightarrow S_X/G_1; \quad \phi_2 : S_X/G_1 \rightarrow S_X/G_2;$$

$$\dots\phi_{n-1} : S_X/G_{n-2} \rightarrow S_X/G_{n-1}$$

$$\text{Ker}\phi_1 = G_1/\overline{G}_X; \text{Ker}\phi_2 = G_2/G_1; \dots; \text{Ker}\phi_{n-1} = G_{n-1}/G_{n-2}$$

A $(\phi_1, f_1), (\phi_2, f_2), \dots, (\phi_{n-1}, f_{n-1})$ függvénpárok, ahol $\text{Ker}f_i = \sim_{\text{Ker}\phi_i}$ ($i = 1, n$), a rendszernek egy kölcsönhatási sorozatát valósítják meg melyben a rendszer részt vehet. Ha $\text{Ker}f = \sim_{S_X/\overline{G}_X}$ akkor nincs olyan kölcsönhatás a rendszer számára amely kölcsönhatás által az f fizikai mennyiség értéke megváltozna.

A szóban lévő kölcsönhatáselmélet lényegét a következő elv foglalja össze, amelyet az állapotok szimmetriájának az elvének neveztem el:

Állapotok szimmetriájának elve: *Minden rendszer amelyre igaz, hogy állapotai azonos szimmetriájúak, "kölcsönhatás-sorozatban" vehet részt míg az állapotok szimmetriája maximális lesz és a rendszer stabillá válik. Ebben az esetben a rendszer különböző állapotainak száma minimális. Minden közbenső rendszer (automata) az előzőnek a homomorf képe (azaz automata-homomorf képe).*

2. Szimmetria - szélsőérték elve

Jejlje $gE = \{gx : x \in E\}$ a $g \in G$ elem hatását az E halmazon, ahol G egy csoport. Jelölje (X, S, μ) egy lokálisan kompakt Hausdorff-féle teret amely eleget tesz a megszámlálhatóság második axiómájának ahol S a Baire-féle halmazok σ -gyűrűje (amely azonos a Borel-féle halmazok σ -gyűrűjével) és μ a Baire-féle mérték az S -en.

Legyen $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ egy mérhető halmazok sorozata a fentebb említett téren úgy, hogy

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \dots \subset B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (A_j);$$

A_i egy G_i -invariáns halmaz ($g_i A_i = A_i \forall g_i \in G_i$) ahol $G_{ii \in \mathbb{N}}$ egy véges csoportok sorozata úgy, hogy

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_i \subset G_{i+1} \subset \dots \subset H = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \subset G$$

$|(G_{i+1} : G_i)| = k \geq 2 \forall i = 1, 2, \dots$ és G egy kompakt topológikus részcsoportha az F -nek (F az X topológikus automorfizmusainak a teljes csoportja) úgy, hogy S -ről feltételezzük, hogy G -invariáns. Legyen ν egy másik mérték az S -en definiálva úgy, hogy $\mu(B) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j)$ és $\nu(B) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(A_j)$ értékekről feltételezzük, hogy végesek (azaz a fenti sorozatok konvergens sorozatok) valamint feltételezem, hogy $[\nu(A_j)]^s / \mu(A_j)$ egy csökkenő sorozat

ahol s egy nem negatív valós szám, $s \geq 1$ (az $s = 0$ esetre triviálisan teljesül mivel $\mu(A_j)$ növekvő).

Végezetül feltételezzük, hogy T az \mathbf{R}^+ -al izomorf ($t_{c_1 t_{c_2}} = t_{c_1 c_2}$ $c_1, c_2 \in \mathbf{R}^+$) az F -nek topológikus részcsoportja úgy, hogy S T -invariáns úgyszintén, T felcserélhető H -val és $\nu(t_c P) = c\nu(P)$; $\mu(t_c P) = c^s \mu(P)$ minden $P \in S$ -re.

Akkor P és $t_c P$ szimmetriája azonos H -ban és ha $\mathbf{E} \subset S$ olyan osztály amelyre $\nu(A) = l = \text{const} > 0 \forall A \in \mathbf{E}$ akkor $\mu(A)$ értéke maximális ha A szimmetriája maximális; a \overline{B} halmaz \overline{H} -invariáns (ahol a felülvonások a lezárást jelölik az X -ben illetve az F -ben) és ha $\overline{B} = B \in S$ akkor $\mu(B) = \mu(\overline{B})$ és μ a maximális értékét a maximális \overline{H} szimmetria esetén veszi fel. Ez testesíti meg a szimmetria-szélsőérték elvét.

Alkalmazás Legyen ν és μ a kerület illetve a terület az euklideszi síkban;

$$G_1 = D_3 \subset G_2 = D_6 \subset G_3 = D_{12} \subset \dots \subset G_j = D_{3 \cdot 2^{j-1}} \subset \dots \subset H = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$$

Az A_j az R sugarú körbe írt $3 \cdot 2^{j-1}$ oldalú szabályos sokszög ($j = 1, 2, \dots$). Ebben az esetben $s = 2$, $n = 3 \cdot 2^{j-1}$ és

$$x_n = [\nu(A_n)]^2 / \mu(A_n) = 4n \operatorname{tg}(\pi/n)_{n \geq 3}$$

ami csökkenő sorozat. Így, ha $c_j \nu(A_j) = l = \text{const}$ akkor a körnek lesz maximális területe mert $B = \overline{B}$ -kör és \overline{H} a kör szimmetriája mivel minden forgatás (tetszőleges szöggel) előállítható valamilyen H -béli sorozat határértékeként (tehát visszaköszön az izoperimetrikus probléma eredménye mint a szimmetria-szélsőérték elvének speciális megnyílvánulásaként).

Irodalom

- [1] **J. Benkő**, A topológia elemei, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1975.
- [2] **P. J. Cameron**, Permutation Groups, Cambridge University Press, 1999.
- [3] **P. Dömösi, F. Attila, G. Horváth, Z. Mecsei**, Formális Nyelvek és Automaták, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, Informatikai Intézet, Debrecen, 2003.
- [4] **L. Filep**, A tudományok királynője (A matematika fejlődése), Typotex, Budapest, Bessenyei Kiadó-Nyíregyháza, 1997.
- [5] **J. B. Fraleigh**, A first Course in Abstract Algebra, 5th ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.
- [6] **F. Gécseg, I. Peák**, Algebraic Theory of Automata, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
- [7] **P. R. Halmos**, Measure Theory, Springer, Berlin, 1950.
- [8] **Gy. Maurer, I. Virág**, Bevezetés a struktúrák elméletébe, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1976.
- [9] **L. Pontrjagin**, Topological Groups, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1946.
- [10] **F. Reinhardt-H. Soeder**, SH atlasz, Matematika, Springer-Verlag, Budapest, 1993.
- [11] **W. Rudin**, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, Inc., New York (Hungarian Translation), Walter Rudin, A Matematikai Analízis Alapjai, Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1978.
- [12] **M. Sain**, Matematikatörténeti ABC, Ötödik, átdolgozott éstett kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
- [13] **M. Sain**, Nincs királyi út!, Matematikatörténet, Gondolat. Budapest, 1986.
- [14] **E. T. Schmidt**, Algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [15] **M. Suzuki**, Group Theory, Springer Berlin, 1986.
- [16] **L. A. Veress**, Group actions on sets and automata theory, Applied Mathematics and Computation, 113(2000)289-304.
- [17] **L. A. Veress**, Symmetry principles via interactions and symmetry-violations, Applied Mathematics and Computation, 134(2003)567-575.
- [18] **L. A. Veress**, The principle of symmetry-extremity, Applied Mathematics and Computation, 137(2003)293-301.
- [19] **L. A. Veress**, Newton's laws, symmetry, and the three basic interactions of the nature, Applied Mathematics and Computation, 146(2003)73-80.

[20] L. A. Veress, Has the nature its own philosophy?, Applied Mathematics and Computation, 150(2004)347–350.

**THE ROLE OF SYMMETRY
IN MATHEMATICS**

Thesis

VERESS LÁSZLÓ ANTAL

UNIVERSITY OF DEBRECEN

MATHEMATICAL INSTITUTE
(2009)

Thesis

1. Group actions on sets and automata theory

1.1 Results concerning the theory of group actions on sets

Statement Let X be a G -set and x an arbitrary element of X . If $N(G) \subset G$ then $N(G_{x'}) \subset G \forall x' \in C^\sim(x)$. Specially if G is a finite group then $G_x \subset N(G_x)$ implies $G_{x'} \subset N(G_{x'})$ and $N(G_x) = G_x$ implies $N(G_{x'}) = G_{x'} \forall x' \in C^\sim(x)$.

Statement Let X be a G -set and x an arbitrary element of X . Suppose that $G_x = N(G_x) \subset G$ (by **1.1.9 b**) paragraph of **Introduction** it means at the same time that $C^\sim(x)$ has more than one element) and let x' be an element of $C^\sim(x)$ such that $x' \neq x$. Then $G_x \neq G_{x'}$. If G is finite then $G_{x_1} \neq G_{x_2} \forall x_1, x_2 \in C^\sim(x), x_1 \neq x_2$. **Corollary** If S_X is finite and if $G_x = N(G_x)$ (x arbitrary element of X - G_x being an arbitrary stabilizer subgroup of S_X) then $G_x \neq G_{x'} \forall x, x' \in X, x \neq x'$ ($G_x, G_{x'}$ denotes the stabilizers of x and x' respectively).

Statement Denote \mathbf{G} the set of all stabilizer subgroups of G . X is embeddable into \mathbf{G} if and only if $G_x = N(G_x) \subset G \forall x \in X$. If S_X is finite then X is embeddable into \mathbf{G} if and only if $G_x = N(G_x)$ for an arbitrary $x \in X$.

1.2 Results concerning the relationships between the theory of group actionson sets and category theory

Statement The $C^\sim(x)$ and $C^\cong(G_x)$ orbits form each-other a category and it may define a functor F between them.

That is we show that $C^\sim(x)$ forms a category with $x, x', x'', \dots \in C^\sim(x)$ viewed as objects and the morphisms are the fuctions $f_x^{gG_x}$ such that

$$f_x^{gG_x} : \{x\} \rightarrow \{x'\}, gx = x', g \in G$$

and

$$f_x^{gG_x}(x) = (gG_x)x = gx = x'; x \in C^\sim(x)$$

Similarly, we show that $C^{\cong}(G_x)$ forms a category too whose objects are $G_x, G_{x'}, G_{x''}..$ and the morphisms are the functions

$$f_{gG_x} : \{G_x\} \rightarrow \{G_{x'}\}, f_{gG_x}(G_x) = gG_xg^{-1} = G_{x'}, (gx = x', g \in G)$$

Finally we show that it may construct a functor F between the two above mentioned category with the following function-pair $F = (\Phi_x, \Psi_x)$

$$\Phi_x : C^{\sim}(x) \rightarrow C^{\cong}(G_x), \Phi_x(x^*) = G_{x^*}, \forall x^* \in C^{\sim}(x)$$

$$\Psi_x : \{f_{x^*}^{g^*G_{x^*}} : x^* \in C^{\sim}(x), g^* \in G\} \rightarrow \{f_{g^*G_{x^*}} : x^* \in C^{\sim}(x), g^* \in G\}$$

$$\Psi_x(f_{x^*}^{g^*G_{x^*}}) = f_{g^*G_{x^*}}$$

Φ_x is responsible for the correspondence between objects and Ψ_x is responsible for the correspondence between morphisms.

1.3 Results concerning the interaction theory

Definition of interaction Let X be the set of states and S_X/\overline{G}_X the symmetric group of a given physical system. The system can take part into interaction if there exists (ϕ_1, f_1) and (ϕ_2, f_2) function pairs where ϕ_1 and ϕ_2 are homomorphisms of S_X/\overline{G}_X and of S_X/G_1 respectively

$$\phi_1 : S_X/\overline{G}_X \rightarrow S_X/G_1; \phi_2 : S_X/G_1 \rightarrow S_X/G_2$$

$$Ker\phi_1 = G_1/\overline{G}_X, \overline{G}_X \subset G_1; Ker\phi_2 = G_2/G_1, G_1 \subset G_2$$

and

$$f_1 : X \rightarrow X/Kerf_1; f_2 : X/Kerf_1 \rightarrow (X/Kerf_1)/Kerf_2$$

such that

$$Kerf_1 = \sim Ker\phi_1 = \sim G_1/\overline{G}_X; Kerf_2 = \sim Ker\phi_2 = \sim G_2/G_1$$

Our next result is a consequence of known results that we have mentioned in **1.4 paragraph**. As is known the actions of elements of a normal subgroup induce a congruence relation on the considered set. This statement may be formalized in the following way: Let x_1, x_2 be two arbitrary

elements of X such that $x_1 \sim_{G_1/\overline{G}_X} x_2$. If $g_2 \in G_i$ ($G_1 \subset G_2 \subseteq G_i$) then $[(g_2\overline{G}_X)x_1] \sim_{G_1/\overline{G}_X} [(g_2\overline{G}_X)x_2]$ (that is $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ is a congruence). The converse is also true: if $(g_1\overline{G}_X)x_1 = x_2$ and if there exists $g^* \in G_1$ such that $(g^*\overline{G}_X)[(g_2\overline{G}_X)x_1] = (g_2\overline{G}_X)x_2 \forall g_1 \in G_1$ and $\forall g_2 \in S_X$ -the group of all input signs (that is if $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ is a congruence, in other words if I claim that a given input sign $g_2\overline{G}_X$ to induce the same variation of f_1 , $Ker f_1 = \sim_{G_1/\overline{G}_X}$) then G_1 is a normal subgroup of S_X . Step by step we get a composition series of S_X .

Corollary Every transition $x_1 \rightarrow (g_2\overline{G}_X)x_1; x_2 \rightarrow (g_2\overline{G}_X)x_2$

$$C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_1) = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_2) \neq$$

$$\neq C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}[(g_2\overline{G}_X)x_1] = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}[(g_2\overline{G}_X)x_2]$$

between orbits of $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ for $(X, S_X/\overline{G}_X, X/\sim_{G_1/\overline{G}_X}, \delta, \lambda)$ induces the same transition

$$C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_1) \longrightarrow C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}[(g_2G_1)x_1]$$

between "states" for the system described by

$$(X/\sim_{G_1/\overline{G}_X}, S_X/G_1, (X/\sim_{G_1/\overline{G}_X})/\sim_{G_2/G_1}, \delta', \lambda')$$

So when the system (automaton) takes part into interaction the system (automaton) transforms into its homomorphic image automaton by automata homomorphism. The new system (automaton) is more stable (because the symmetry of states of the first automaton described by \overline{G}_X becomes a higher symmetry described by G_1) and more optimal (because of automata homomorphism).

Since we mention transitions between orbits of $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ (the congruence relation induced by the actions of the elements of G_1/\overline{G}_X) therefore in this process the symmetry described by G_1/\overline{G}_X is violated. But it is obvious that the group G_1 contains a subgroup izomorphic to G_1/\overline{G}_X . So the violated G_1/\overline{G}_X symmetry is embedded into the higher G_1 symmetry. It is

justified the relationship between interaction-chain (see the definition below) and a composition series. The factor groups of the series determine the type of interactions of the chain (isomorphic factor groups meaning indistinguishable interactions).

Definition of chain of interactions Let $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n$ a set of physical quantities of the system such that

$$Ker f_1 = \sim_{G_1/\overline{G}_X}; \quad Ker f_2 = \sim_{G_2/G_1};$$

$$\dots \quad Ker f_{n-1} = \sim_{G_{n-1}/G_{n-2}}; \quad Ker f_n = \sim_{G_n/G_{n-1}}$$

$$f_i : (..(X/..)/ \sim_{G_{i-1}/G_{i-2}}) \rightarrow (..(X/..)/ \sim_{G_{i-1}/G_{i-2}}) / \sim_{G_i/G_{i-1}}, (i = 1, n)$$

and $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ a chain of homomorphisms such that

$$\phi_1 : S_X/\overline{G}_X \rightarrow S_X/G_1; \quad \phi_2 : S_X/G_1 \rightarrow S_X/G_2;$$

$$\dots \quad \phi_{n-1} : S_X/G_{n-2} \rightarrow S_X/G_{n-1}$$

$$Ker \phi_1 = G_1/\overline{G}_X; Ker \phi_2 = G_2/G_1; \dots; Ker \phi_{n-1} = G_{n-1}/G_{n-2}$$

The set of $(\phi_1, f_1), (\phi_2, f_2), \dots, (\phi_{n-1}, f_{n-1})$ with $Ker f_i = \sim_{Ker \phi_i}, (i = 1, n - 1)$ corresponds to a chain of interactions of the system in which the system can take part.

If $Ker f = \sim_{S_X/\overline{G}_X}$ then no interactions for the system for which the value of f is changing.

I conclude the results of my interaction theory with the following principle that I called the principle of symmetry of states.

Statement (principle of symmetry of states) Any system whose states have the same symmetry can take part in "interaction-chain" until the symmetry of states will be maximal and the system will be stable. In this case, the system has a minimal number of different states. Each "intermediate system" can be viewed like a homomorphic image (that is the homomorphic image) of the anterior.

2. The principle of symmetry-extremity

Denote $gE = \{gx : x \in E\}$ the action of the element $g \in G$ on the set E (where G is a group). Denote (X, S, μ) a separable locally compact Hausdorff space [10, p.73], where S is the σ -ring of Baire sets (which is identical to the σ -ring of Borel sets [10, Theorem 50.E]) and μ is a Baire measure on S .

Statement ("Isoperimetric problem") Let $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a sequence of measurable sets on the above mentioned space, such that

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \dots \subset B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (A_j);$$

A_i is a G_i -invariant set ($g_i A_i = A_i \forall g_i \in G_i$) where $\{G_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ is a sequence of finite groups such that

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_i \subset G_{i+1} \subset \dots \subset H = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \subset G$$

$|(G_{i+1} : G_i)| = k \geq 2 \forall i = 1, 2, \dots$ and G denote a compact topological subgroup of F -the whole group of topological automorphisms of X -such that S is G -invariant. Let ν be an other measure defined on S such that the numbers $\mu(B) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j); \nu(B) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(A_j)$ ([10, Theorem 9.D]) are finite (that is I suppose that the above defined sequences are convergent) and such that the sequence $[\nu(A_j)]^s / \mu(A_j)$ is a decreasing sequence where s is a nonnegative real number, $s \geq 1$ (the case $s = 0$ follows trivially because $\mu(A_j)$ is increasing).

Finally, I suppose that T is a topological subgroup of F isomorphic to \mathbf{R}^+ ($t_{c_1} t_{c_2} = t_{c_1 c_2}, c_1, c_2 \in \mathbf{R}^+$) such that S is T invariant too, T commutes with H and $\nu(t_c P) = c\nu(P); \mu(t_c P) = c^s \mu(P) \forall P \in S$.

Then P and $t_c P$ have the same symmetry on H and if $\mathbf{E} \subset S$ is a class of sets such that $\nu(A) = l = \text{const} > 0 \forall A \in \mathbf{E}$ the set \overline{B} is \overline{H} -invariant (where the overlines denote the closure on X and F respectively) and if $\overline{B} = B \in S$, μ is maximal in the case of maximal symmetry described by \overline{H} . This materializes the principle of symmetry-extremity.

Statement (Application) ν and μ are the perimeter and area in the Euclidean plane

$$G_1 = D_3 \subset G_2 = D_6 \subset G_3 = D_{12} \subset \dots \subset G_j = D_{3 \cdot 2^{j-1}} \subset \dots \subset H = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$$

A_j is the regular $3 \cdot 2^{j-1}$ -gon ($j = 1, 2, \dots$) inscribed into the circle of radius R . For that case $s = 2$, $n = 3 \cdot 2^{j-1}$ and

$$[\nu(A_n)]^s / \mu(A_n) = 4ntg(\pi/n)_{n \geq 3}$$

which is a decreasing sequence. Thus if $c_j \nu(A_j) = l = \text{const}$ then the circle has the maximal area because $B = \overline{B} = \text{circle}$ and \overline{H} is the symmetry of the circle since any rotation is the limit of some sequence in H (that is we recognize the result of the isoperimetric problem viewed as a special case of the principle of symmetry-extremity).

Statement The principle of symmetry of states may be regarded as a particular case of the principle of symmetry-extremity and vice versa.

References

- [1] **J. Benkő**, A topológia elemei, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1975.
- [2] **P. J. Cameron**, Permutation Groups, Cambridge University Press, 1999.
- [3] **P. Dömösi, F. Attila, G. Horváth, Z. Mecsei**, Formális Nyelvek Ús Automaták, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, Informatikai Intézet, Debrecen, 2003.
- [4] **L. Filep**, A tudományok kiálynője (A matematika fejlődése), Typo-
tex, Budapest, Bessenyei Kiadó-Nyíregyháza, 1997.
- [5] **J. B. Fraleigh**, A first Course in Abstract Algebra, 5th ed., Addison-
Wesley, Reading, MA, 1994.
- [6] **F. Gécseg, I. Peák**, Algebraic Theory of Automata, Akadémiai
Kiadó, Budapest, 1972.
- [7] **P. R. Halmos**, Measure Theory, Springer, Berlin, 1950.
- [8] **Gy. Maurer, I. Virág**, Bevezetés a struktúrák elméletébe, Dacia
Könyvkiadó, Kolozsvár, 1976.
- [9] **L. Pontrjagin**, Topological Groups, Princeton University Press,
Princeton, NJ, 1946.
- [10] **F. Reinhardt-H. Soeder**, SH atlasz, Matematika, Springer-Verlag,
Budapest, 1993.
- [11] **W. Rudin**, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill,
Inc., New York (Hungarian Translation), Walter Rudin, A Matematikai
Analízis Alapjai, Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1978.
- [12] **M. Sain**, Matematikatörténeti ABC, ötödik, átdolgozott kiadás,
Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
- [13] **M. Sain**, Nincs király! út!, Matematikatörténet, Gondolat. Bu-
dapest, 1986.
- [14] **E. T. Schmidt**, Algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [15] **M. Suzuki**, Group Theory, Springer Berlin, 1986.
- [16] **L. A. Veress**, Group actions on sets and automata theory, Applied
Mathematics and Computation, 113(2000)289-304.

[17] **L. A. Veress**, Symmetry principles via interactions and symmetry-violations, *Applied Mathematics and Computation*, 134(2003)567-575.

[18] **L. A. Veress**, The principle of symmetry-extremity, *Applied Mathematics and Computation*, 137(2003)293-301.

[19] **L. A. Veress**, Newton's laws, symmetry, and the three basic interactions of the nature, *Applied Mathematics and Computation*, 146(2003)73-80.

[20] **L. A. Veress**, Has the nature its own philosophy?, *Applied Mathematics and Computation*, 150(2004)347-350.