



Térbeli statisztikai modellek és alkalmazásaik

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Sikolya Kinga

Témavezető: Dr. Baran Sándor

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi Doktori Tanács
Informatikai Tudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2014.



Térbeli statisztikai modellek és alkalmazásaik

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Sikolya Kinga

Témavezető: Dr. Baran Sándor

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi Doktori Tanács
Informatikai Tudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2014.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács *Informatikai Tudományok* Doktori Iskola *Az információ technológia és a sztochasztikus rendszerek elméleti alapjai és alkalmazásai* programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2014. szeptember 14.

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy *Sikolya Kinga* doktorjelölt 2010 – 2013 között a fent megnevezett Doktori Iskola *Az információ technológia és a sztochasztikus rendszerek elméleti alapjai és alkalmazásai* programjának keretében irányítással végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2014. szeptember 14.

a témavezető aláírása

Térbeli statisztikai modellek és alkalmazásai

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a Műszaki tudományágban

Írta: Sikolya Kinga okleveles alkalmazott matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Informatikai Tudományok Doktori Iskolája (Az
információ technológia és a sztochasztikus rendszerek elméleti alapjai és
alkalmazásai programja) keretében

Témavezető: Dr. Baran Sándor

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Fazekas István (DE-IK).....
tagok:	Dr. Vertse Tamás (DE-IK)
	Dr. Móri Tamás (ELTE-TTK)

A doktori szigorlat időpontja: 2014. január 17.

Az értekezés bírálói:

Dr.	
Dr.	
Dr.	

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.
tagok:	Dr.
	Dr.
	Dr.
	Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20... ..

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek abban, hogy ez a disszertáció elkészüljön.

Elsősorban témavezetőmnek, Dr. Baran Sándornak, a mérhetetlenül sok segítségért, a kutatási módszertani útmutatásaiért, az adott inspirációkért, a türelméért és a szigorúságáért, ami nélkül ez a disszertáció nem készülhetett volna el.

Ugyancsak köszönettel tartozom a Debreceni Egyetem Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszékének, hogy mindannyian támogattak és segítettek a tanulmányaim során.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni szüleimnek és barátaimnak, hogy mindenben segítettek, támogattak, biztattak és végig mellettem álltak.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
Tézispontok	4
1. Gauss mezők eltolásparamétereinek becslése	7
1.1. Bevezetés	7
1.2. Jelölések és előzmények	7
1.3. A modell és a becslés	11
1.4. Szimulációs eredmények	34
2. Optimális mintavételi elhelyezések	45
2.1. Bevezetés	45
2.2. Statisztikai modell	46
2.3. D-optimalitás	48
2.3.1. A trend paraméter becslése	49
2.3.2. Kovariancia paraméterek becslése	51
2.3.3. Az összes paraméter becslése	59
2.4. IMSPE kritérium	64
2.5. Entrópia kritérium	75
2.6. Numerikus eredmények	78
2.6.1. Az IMSPE és az entrópia kritérium összehasonlítása	78
2.6.2. A két minta statisztikai hatékonyságának összehasonlítása	80
2.6.3. A két mintavételi elrendezés összehasonlítása a metánnak a hidroxillal való reakciója esetén	83
Összefoglalás	86
Summary	91
Irodalomjegyzék	95
Függelék	99

Jelölések

$\mathbb{N}$	természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	egész számok halmaza
$\mathbb{R}$	valós számok halmaza
$\mathbb{R}_+$	pozitív valós számok halmaza
$\mathbb{R}^k$	valós euklideszi tér
E	várható érték
$W(s, t)$	standard Wiener mező
$\tilde{X}(s, t)$	stacionárius Ornstein-Uhlenbeck mező
$X(s, t)$	nemstacionárius Ornstein-Uhlenbeck mező
G	megfigyelési tartomány
A^{-1}	az A mátrix inverze
$\det(A)$	az A mátrix determinánsa
$A^\top$	az A mátrix transzponáltja
$\text{tr} A$	az A mátrix nyoma
$C^2(a, b)$	az $[a, b]$ intervallumon kétszer folytonosan differenciálható függvények tere
$C(G)$	a G halmazon értelmezett folytonos függvények tere
P_X	az X folyamat által generált valószínűségi mérték
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$	$\mathbb{R}^k$ halmazon definiált Borel σ -algebra
$X_n \xrightarrow{P} X$	X_n sztochasztikusan konvergál X -hez
l.i.m.	négyzetes középben vett határérték
$\mathcal{X}$	mintatér
$A \otimes B$	az A és B mátrix Kronecker szorzata
M	Fisher-féle információs mátrix
$\mathcal{I}$	egységmátrix
$\mathbf{1}_n$	n hosszúságú egyesekből álló oszlopvektor
$\text{Ent}(Y)$	az Y valószínűségi változó entrópiája

Bevezetés

A térbeli statisztikai modellek igen széleskörű alkalmazásokkal bírnak számos tudományterületen belül, így nem meglepő, hogy az egyik legtöbbet kutatott terület. Ezen disszertáció térbeli statisztikai modellek paraméterbecsléseivel, valamint optimális mintavételi elhelyezéseinek vizsgálatával foglalkozik.

A dolgozat első felében egy olyan térbeli lineáris regressziós modellt tekintünk, ahol a meghajtó folyamat egy Wiener- vagy pedig egy stacionárius, illetve nemstacionárius Ornstein-Uhlenbeck (OU) mező, és egy meglehetősen általános megfigyelési tartomány esetén keressük a regressziós paraméterek maximum likelihood (ML) becslését. Ennek a regressziós modellnek speciális eseteiben a paraméterek becslését már többen vizsgálták a szakirodalomban. A legegyszerűbb esettel Rozanov (1968) a 60-es évek végén kezdett el foglalkozni, amikor is egyetlen paramétertől függő trenddel eltolt Wiener mezőt figyelt meg egy téglalapon és karakterisztikus egyenletek segítségével meghatározta az ismeretlen trend paraméter ML becslését. Ezt az esetet általánosította Arató, N. M (1997a) a megfigyelési tartomány bonyolultabbá tételével. Baran, Pap és Zuilen (2003, 2004, 2011) a korábban használt sztochasztikus parciális differenciálegyenletek helyett az úgynevezett diszkrét approximáció módszerét alkalmazva a korábbiaknál általánosabb feltételek mellett és három különböző, egyre komplexebb megfigyelési tartományt tekintve adta meg az ismeretlen trend paraméter becslését. Kiindulva Baran, Pap és Zuilen (2011) eredményeiből sikerült kiterjeszteni a regressziós modell ismeretlen paramétereinek számát tetszőleges p tagra és megadni ezek ML becslését. Ehhez fő eszközként a például Baran, Pap és Zuilen (2011) által leírt diszkrét approximációt használjuk.

Azzal az esettel, amikor a meghajtó folyamat egy stacionárius OU mező Arató, N. M. (1997b) kezdett el foglalkozni. A Rozanov (1990) által bevezetett sztochasztikus differenciálegyenletek módszerét alkalmazva megadta egy téglalapon megfigyelt egyetlen eltolásparamétert tartalmazó véletlen mező ismeretlen paraméterének ML becslését. Általánosabb feltételek mellett Baran, Pap és Zuilen (2003) diszkrét approximáció segítségével igazolta Arató, N. M. (1997b) eredményét stacionárius, illetve nemstacionárius OU mező esetén. Ezen eredményeket sikerült kiterjeszteni Baran, Pap és Zuilen (2011) által használt legáltalánosabb megfi-

gyelési tartományt és tetszőleges számú ismert függvény lineáris kombinációjaként előálló trendet tekintve.

Az első rész öt szimulációs példával zárul, melyek segítségével szemléltetjük Arató, N. M (1997a) és Baran, Pap és Zuijlen (2003, 2004, 2011) elméleti eredményeit, valamint a dolgozat első részének fő tételeit.

A disszertáció második felében egy számos helyen alkalmazható problémát, az úgynevezett optimális mintavételi terv meghatározását vizsgáljuk egy konstans trenddel eltolt OU mező esetén. A Gauss-zajjal meghajtott folyamatok vizsgálata igen népszerű a térbeli statisztika irodalmában (lásd például Ripley, 1981), ugyanis ez a modell széleskörű alkalmazásokkal bír például a geostatistikában (Matheron, 1962), számítógépes kísérletekben (Santner, Williams és Notz, 2003; Müller és Stehlík, 2009), ipari alkalmazásokban (Pham, 2006). Napjainkban megszokott és gyakran alkalmazott eljárás, hogy matematikai szimulációs modelleket használnak különböző valós rendszerek tesztelésére. Előnye, hogy a legtöbb esetben könnyebb és olcsóbb a számítógépes szimulációk végrehajtása, mint a valódi kísérleteké, viszont hátránya, hogy a számolásigény növekedésével a szimulációk egyre bonyolultabbá válnak, így igen nagy jelentősége van a szimulációk alapját képező mintavételi eljárásnak. A mintavétel optimalitását különböző szempontokat figyelembe véve szokták vizsgálni: a minél pontosabb előrejelzés, a kísérlet során szereshető minél több információ, valamint az illesztett modell ismeretlen paraméterbecsléseinek minél magasabb hatékonysága szerint. A megfelelő optimális mintavételi terv meghatározása céljából mindhárom esetben született egy-egy optimalitási kritérium.

Paraméterbecslés szerinti optimalitás (D-optimalitás): Az alkalmazások során a vizsgálatok végrehajtásához szükséges az adott problémát leíró véletlen folyamat paramétereinek ismerete, illetve a legtöbb esetben ennek hiányában ezek megbecslése. Annak érdekében, hogy a szükséges paraméterek becslését elkészítsék megfigyeléseket végeznek, majd ezt követően a megbecsült várható értékű és kovariancia struktúrájú folyamat segítségével előrejelzéseket készítenek. Így természetes módon adódik az az elvárás, hogy a folyamat megfigyelésére olyan mintát válasszunk, amelyből adódó paraméterek becslése a leghatékonyabb. Pázman (2007) megmutatta, hogy ennek az eljárásnak a végrehajtására a ML becslés jó választás és a Fisher-féle információ nagyon jól jellemzi a becslés pontosságát. Zhu és Stein (2005) szimulációk segítségével igazolta, hogy közepes nagyságú minta esetén a ML becslések kovariancia mátrixát a Fisher-féle információ inverze jól közelíti, így tehát a Fisher-féle információ egy jól használható mintavételi kritériumnak bizonyul. Azt az eljárást, amikor a paraméterekre vonatkozó Fisher-féle információ mennyiség maximalizálásával határozzuk meg az optimális mintát, D-optimális mintavételnek nevezzük. Az optimális mintavételnek ezt a megközelítését OU folyamat esetén Stehlík (2007) vizsgálta és megmutatta, hogy az ekvidisztáns minta döntő szerepet játszik az ismeretlen trend paraméter becslésében. Ezt követően Kisefák és Stehlík (2008), valamint Zagoraiou és Baldi Antognini (2009) konstans

trenddel eltolt OU folyamat esetén igazolta, hogy a trend paraméter becslésére az ekvidisztáns minta optimális, valamint ez utóbbi szerzők azt is megmutatták, hogy az OU folyamat kovariancia paraméterére nem létezik optimális mintavétel. Baran és Stehlík (2014) általánosították Zagoraiou és Baldi Antognini (2009) eredményét oly módon, hogy az egydimenziós valós mintateret kiterjesztették monoton kétdimenziós halmazra, az OU folyamatot pedig ennek megfelelően OU mezőre.

Előrejelzés szerinti optimalitás (IMSPE kritérium): Ismeretes, hogy a krigezés technikájának alapvető célja a mintatér egy nem megfigyelhető pontjában a kísérlet kimenetelének megbecslése az összes eddigi kimenetel alapján. Ekkor természetes kritériumként adódik a megfelelő függvény átlagos négyzetes hibájának (Mean Squared Prediction Error-MSPE) minimalizálása. Mivel a becslés pontossága általában függ a teljes mintatértől, Santner, Williams és Notz (2003) bevezette az úgynevezett Integrated Mean Squared Prediction Error (IMSPE) optimalitás fogalmát, ami azt jelenti, hogy a keresett optimális mintavételi elrendezést az átlagos négyzetes hiba mintatér felett tekintett integráljának minimumhelyeként adjuk meg. A dolgozat szempontjából fontos előzmény, hogy OU folyamat esetén Baldi Antognini és Zagoraiou (2010) megadta az IMSPE kritérium egzakt alakját és igazolta, hogy ebben az esetben az ekvidisztáns minta lesz az optimális.

A szerezhető információ mennyiség maximuma szerinti optimalitás (Entrópia kritérium): Az optimális mintavételnek az információelméleten alapuló megközelítése, amikor azokat a helyeket keressük, ahol a megszerezhető információ mennyisége a lehető legnagyobb. Mivel a Shannon entrópia a bizonytalanság mértékének egy igen jó jellemzője, Shewry és Wynn (1987) úgy gondolták, hogy a mintatér egy nem megfigyelt pontjának legjobb előrejelzésére vonatkozóan a megfigyelések entrópiája jó kritériumnak bizonyul. Eddig ebben az esetben is csak OU folyamatra születtek eredmények, méghozzá szintén Baldi Antognini és Zagoraiou (2010) révén, amikor is a szerzők megadták az entrópia kritérium egzakt alakját és igazolták, hogy ebben az esetben szintén az ekvidisztáns minta az optimális.

Az értekezés második felében OU mező esetén vizsgáljuk a mindhárom kritérium szerinti optimális mintavételt. Paraméterbecslés esetén Baran és Stehlík (2014) monoton halmazokra kimondott eredményeivel analóg állításokat fogalmazunk meg a D-optimalitásról a mintavételi helyek egy igen kézenfekvő elrendezésére, amikor is szabályos rácsot alkotnak. Előrejelzés esetén az IMSPE és az entrópia kritérium szerinti optimális mintavételt vizsgáljuk mindkét típusú mintarendszerre. A kapott eredményeket a dolgozat végén valós adatokra épülő numerikus szimulációk segítségével vizsgáljuk és hasonlítjuk össze.

Az értekezés tézispontjai

Az értekezésben az alábbi tézispontok kerülnek kidolgozásra.

1. Tézis. Baran, Pap és Zuijlen (2011) eredményének általánosításaként meghatároztuk a Wiener, valamint stacionárius és nemstacionárius Ornstein-Uhlenbeck mező által meghajtott térbeli lineáris regressziós modell esetén a regressziós paraméterek maximum likelihood becslését (1.3., 1.10., 1.11. Tételek).

2. Tézis. Az 1. tézisbeli, valamint a korábbi szakirodalomban fellelhető eredményeket (Arató, N. M (1997a, b); Baran, Pap és Zuijlen (2003, 2004, 2011)) szimulációkkal szemléltettük (1.4 fejezet).

3. Tézis. Konstans trenddel eltolt Ornstein-Uhlenbeck mező esetén megvizsgáltuk a D-optimalitást (2.3. fejezet).

3.1. Szabályos rácsot alkotó mintapontok esetén megadtuk a trend paraméter becslésére vonatkozó D-optimalitáshoz szükséges Fisher-féle információ egzakt alakját, valamint igazoltuk, hogy a trend paraméter becslésére vonatkozó D-optimális mintavételt az iránymenti ekvidisztáns minta adja (2.5. Tétel).

3.2. A kovariancia paraméterek becslésére vonatkozó D-optimalitás alapját képező Fisher-féle információnak meghatároztuk az egzakt alakját abban az esetben, amikor a folyamatot szabályos rácson figyeljük meg (2.7. Tétel).

3.3. Két speciális D-optimalitási mintavételt bevezetve, nevezetesen a korlátozott és a szabad mintavételezést (2.9. Definíció), igazoltuk, hogy szabályos rácson megfigyelt folyamat esetén a kovariancia paraméterek becslésére vonatkozó korlátozott D-optimális mintavétel nem létezik (2.10. Tétel). A szabad mintavételezés egy speciális esetében meghatároztuk a kovariancia paraméterek becslésére vonatkozó Fisher-féle információs mátrix determináns extrémális helyeit (2.14. Tétel).

3.4. Két speciális esetben szabályos rácsot alkotó mintapontok esetén megadtuk a trend és a kovariancia paraméterek együttes becslésére vonatkozó D-optimális mintavételi elhelyezéseket (2.16., 2.17. példák; 2.18. Tétel).

4. Tézis. Konstans trenddel eltolt Ornstein-Uhlenbeck mező esetén megvizsgáltuk az IMSPE kritériumot (2.4. fejezet).

4.1. Monoton megfigyelések esetén megadtuk az IMSPE kritérium egzakt alakját (2.19. Tétel), igazoltuk egyfajta szimmetria tulajdonságát (2.21. Tétel), valamint bebizonyítottuk, hogy az IMSPE kritérium szerinti optimális minta szimmetrikus (2.22. Következmény).

4.2. Baldi Antognini és Zagoraiou (2010) OU folyamatra megfogalmazott állításainak kiterjesztéseként szabályos rács esetén megadtuk az MSPE, illetve az IMSPE függvények zárt alakját, valamint igazoltuk, hogy az IMSPE kritérium szerinti optimális mintavételt az iránymenti ekvidisztáns minta adja (2.24. Tétel).

5. Tézis. Konstans trenddel eltolt Ornstein-Uhlenbeck mező esetén megvizsgáltuk az entrópia kritériumot (2.5. fejezet).

5.1. Monoton megfigyelések esetén meghatároztuk az entrópia kritérium egzakt alakját, valamint erre vonatkozóan az optimális mintavételt (2.26. Tétel).

5.2. Szabályos rácsot alkotó mintapontok esetén felírtuk az entrópia kritérium zárt alakját és bebizonyítottuk, hogy ekkor az optimális mintavételt az iránymenti ekvidisztáns minta adja (2.29. Tétel).

6. Tézis. Szimuláció keretében összehasonlítottuk az IMSPE és az entrópia kritériumot, valamint megvizsgáltuk a két mintavételi elrendezés viselkedését mindhárom kritérium esetén (2.6 fejezet).

1. fejezet

Gauss mezők eltolásparamétereinek becslése

1.1. Bevezetés

A disszertáció első felében különböző Gauss-folyamatokkal meghajtott lineáris modellek paraméterbecsléseinek vizsgálatával foglalkozunk. Néhány speciális, a számegyenesen vagy a kétdimenziós síkon értelmezett modellre Arató, N. M (1997a, b), valamint Baran, Pap és Zuijlen (2003, 2004, 2011) meghatározták a paraméterek maximum likelihood (ML) becsléseit különböző megfigyelési tartományok felett. Ezen korábbi eredményeket az 1.2. fejezetben ismertetjük, az 1.3. fejezetben pedig ezek kiterjesztését írjuk le az eddigiektől egy jóval általánosabb modellre. Itt egy térbeli lineáris regressziós modellt vizsgálunk és három különböző meghajtó folyamat, nevezetesen Wiener, valamint stacionárius és nemstacionárius Ornstein-Uhlenbeck (OU) mező esetén megadjuk az ismeretlen regressziós paraméterek maximum likelihood (ML) becsléseinek alakját. Az 1.4. fejezetben szimulációs vizsgálatok segítségével szemléltetjük mind Arató, N. M (1997a, b), valamint Baran, Pap és Zuijlen (2003, 2004, 2011) eredményeit, mind pedig az 1.3. fejezetben leírt állításokat, melyeket Baran és Sikolya (2012a, b) dolgozatokban közöltünk.

1.2. Jelölések és előzmények

A Gauss-folyamatok a sztochasztikus folyamatoknak az egyik legszélesebb körben alkalmazott családja. Népszerűségét annak köszönheti, hogy a véges dimenziós eloszlásait a várható érték és a kovarianciák egyértelműen meghatározzák. A Gauss-folyamatok alapvető karakterizációja, hogy minden véges dimenziós eloszlása normális eloszlású. A térbeli esetben, speciálisan amikor a folyamatot a sík

pontjaiban értelmezzük, az egyik legjelentősebb Gauss mező a Wiener mező. Ez egy olyan térbeli centrált $\{W(s, t) : s, t \geq 0\}$ Gauss folyamat, melynek kovariancia struktúrája

$$\mathbb{E}W(s_1, t_1)W(s_2, t_2) = \min(s_1, s_2) \cdot \min(t_1, t_2), \quad \forall s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 0.$$

A Wiener mező széleskörű alkalmazásokkal bír a statisztikai modellezés terén, például a fizika (potenciálmélet (Kuroda és Manaka, 1987)), a kémia (véletlen polimerek modellezése (Douglas, 1996)) és a pénzügyi matematika (Heath-Jarrow-Morton típusú kamatláb modellek (Goldstein, 2000)) területén.

A másik igen gyakran használt véletlen mező az úgynevezett Ornstein-Uhlenbeck mező (OU mező), ami ugyancsak fontos szerepet játszik a potenciál elméletben (Feyel és de La Pradelle, 1995), valamint a Wiener mezőhöz hasonlóan, mint meghajtó mező, felbukkan bizonyos kamatláb modellekben is (Goldstein, 2000; Santa-Clara és Sornette, 2001). A stacionárius OU mező alatt egy olyan centrált $\{\tilde{X}(s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$ Gauss-folyamatot értünk, melynek kovariancia struktúrája

$$\mathbb{E}\tilde{X}(s_1, t_1)\tilde{X}(s_2, t_2) = \frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}e^{-\alpha|s_2-s_1|-\beta|t_2-t_1|}, \quad (1.1)$$

ahol $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\sigma > 0$. Legyen továbbá

$$X(s, t) = \sigma \int_0^s \int_0^t e^{\alpha(u-s)+\beta(v-t)} dW(u, v), \quad s, t \geq 0, \quad (1.2)$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\{W(s, t) : s, t \geq 0\}$ pedig egy standard Wiener mező. Ekkor az (1.2) alakú véletlen mezőt nulla kezdeti értékű OU mezőnek hívjuk, melynek értelmében a folyamat az értelmezési tartomány határain végig a nulla értéket veszi fel.

Tekintsük a következő Gauss mezővel meghajtott

$$Z(s, t) := m_1 g_1(s, t) + \dots + m_p g_p(s, t) + U(s, t) \quad (1.3)$$

lineáris regressziót egy speciális $G \subset \mathbb{R}^2$ megfigyelési tartomány felett, ahol $g_1, \dots, g_p$ ismert függvények, U pedig egy Wiener vagy pedig egy OU mezőt jelöl. Célunk az $m_1, \dots, m_p$ ismeretlen paraméterek maximum likelihood (ML) becslésének meghatározása.

A Z folyamatnak a meghajtó mezőre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltja a Feldman-Hajek tétel (Kuo, 1975) alapján ugyan elvileg meghatározható és ebből már a ML becslés felírható, a legtöbb esetben azonban az explicit számolások már nem hajthatóak végre.

Wiener meghajtó mező ($U(s, t) = W(s, t)$)

A legegyszerűbb esetben, amikor a meghajtó folyamat egy standard Wiener mező, a megfigyelési tartomány egy téglalap, valamint $p = 1$ és $g_1 \equiv 1$, az ismeretlen paraméter ML becslését Rozanov (1968) határozta meg karakterisztikus egyenletek megadásával. Arató, N. M (1997a) Rozanovhoz hasonlóan azt az esetet vizsgálta, amikor $p = 1$, $g_1 \equiv 1$, viszont a megfigyelési tartomány jóval bonyolultabb. Legyen $[a, b] \subset (0, \infty)$ és tekintsünk egy olyan $\gamma : [a, b] \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton csökkenő függvényt, melyre $\gamma(b) > 0$. Ekkor az Arató, N. M (1997a) által tekintett G megfigyelési tartomány egy olyan részhalmaza a

$$G \subset \tilde{G} := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq s \leq b, t \geq \gamma(s) \text{ vagy } s > b, t \geq \gamma(b)\} \quad (1.4)$$

halmaznak, ami tartalmazza a $\Gamma := \{(s, \gamma(s)) : s \in (a, b)\}$ görbe egy ε -környezetét, azaz létezik egy olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [a, a + \varepsilon], t \in [\gamma(s), \gamma(a)] \text{ vagy } s \in [a + \varepsilon, b], t \in [\gamma(s), \gamma(s) + \varepsilon]\} \subset G.$$

A Rozanov (1990) által használt sztochasztikus parciális differenciálegyenletek módszerével Arató, N. M (1997a) az $[a, b]$ intervallumon tekintett γ görbe kétszer folytonosan differenciálhatóságának feltétele mellett megadta az ismeretlen m_1 paraméter ML becslésének explicit alakját. Baran, Pap és Zuiljen (2003, 2004, 2011) a $p = 1$ speciális esetet vizsgálták, azaz a $Z(s, t) := m_1 g_1(s, t) + W(s, t)$ folyamatot tekintették három különböző megfigyelési tartomány esetén, és mindhárom esetben a szokásos sztochasztikus differenciálegyenletek helyett egy jóval egyszerűbb módszerrel, az úgynevezett diszkrét approximációval határozták meg a keresett ML becslést. A három eset közül a legegyszerűbb, amikor a megfigyelési tartomány egy téglalap, azaz $G := [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, $[a_1, a_2], [b_1, b_2] \subset (0, \infty)$. Ekkor Baran, Pap és Zuiljen (2003) a g_1 abszolút folytonosságát, valamint a $\partial_1 \partial_2 g_1$ négyzetes integrálhatóságát feltételezve igazolták, hogy az m_1 eltolásparaméter ML becslése $\hat{m}_1 = A^{-1} \zeta$, ahol

$$A = \frac{g_1^2(a_1, b_1)}{a_1 b_1} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{[\partial_1 g_1(u, b_1)]^2}{b_1} du + \int_{b_1}^{b_2} \frac{[\partial_2 g_1(a_1, v)]^2}{a_1} dv \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} & + \iint_G [\partial_1 \partial_2 g_1(u, v)]^2 du dv, \\ \zeta & = \frac{g_1(a_1, b_1) Z(a_1, b_1)}{a_1 b_1} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial_1 g_1(u, b_1)}{b_1} Z(du, b_1) + \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial_2 g_1(a_1, v)}{a_1} Z(a_1, dv) \\ & + \iint_G \partial_1 \partial_2 g_1(u, v) Z(du, dv), \end{aligned} \quad (1.6)$$

amely normális eloszlású m_1 várható értékkel és $1/A$ szórásnégyzettel. Speciálisan, $g_1 \equiv 1$ esetén $\hat{m}_1 = Z(a_1, b_1)$.

A második esetben Baran, Pap és Zuijlen (2004) az imént leírt Arató, N. M. (1997a) által vizsgált modellt tekintették, azaz az (1.4) által definiált tartományon figyelték meg a folyamatot és a diszkrét approximáció segítségével az eredetnél általánosabb körülmények között igazolták Arató, N. M. (1997a), Theorem 2-ben (20 o.) szereplő állítást. Megmutatták, hogy ha $\gamma \in C^2(a, b)$, $\gamma'(a) := \lim_{s \downarrow a} \gamma'(s) \in [-\infty, 0]$ és $\gamma'(b) := \lim_{s \uparrow b} \gamma'(s) \in [-\infty, 0]$ léteznek, valamint

$$\int_a^b \frac{|\gamma'(s)\gamma''(s)|}{(1 + \gamma'(s)^2)^2} ds < \infty$$

teljesül, akkor az m_1 eltolásparaméter ML becslése $\hat{m}_1 = A^{-1}\zeta$, ahol

$$A = \frac{1}{b\gamma(b)} + \int_a^b \frac{ds}{s^2\gamma(s)}, \quad \zeta = c_1 Z(a, \gamma(a)) + c_2 Z(b, \gamma(b)) + \int_{\Gamma} y_1 Z + \int_{\Gamma} y_2 \partial_n Z, \quad (1.7)$$

c_1, c_2 az a illetve b helyeken tekintett γ és γ' -től függő konstansok, y_1 és y_2 a $\gamma, \gamma', \gamma''$ függvényei, $\partial_n Z$ pedig a Z normális irányú deriváltját jelöli (lásd Baran, Pap és Zuijlen (2004), Definition 4.1). Speciálisan, ha $\gamma'(a) = -\infty$, akkor

$$\zeta = \frac{Z(b, \gamma(b))}{b\gamma(b)} + \int_a^b \frac{Z(s, \gamma(s))}{s^2\gamma(s)} ds - \int_a^b \frac{1}{s\gamma(s)} Z(ds, \gamma(s)).$$

A harmadik esetben Baran, Pap és Zuijlen (2011) egy a korábbiaknál jóval komplexebb megfigyelési tartományon figyelte meg a folyamatot és a $p = 1$ esetben a szerzők meghatározták az eltolásparaméter ML becslését. A disszertáció első felének fő eredménye Baran, Pap és Zuijlen (2011) által igazolt Theorem 2.1 általánosítása lesz.

OU meghajtó mező ($U(s, t) = \tilde{X}(s, t)$; $U(s, t) = X(s, t)$)

Arató, N. M. (1997b) megvizsgálta az (1.3) modellt abban az esetben is, amikor a meghajtó folyamat egy stacionárius OU mező, $p = 1$, $g_1 \equiv 1$, a megfigyelési tartomány pedig egy téglalap, és a sztochasztikus parciális differenciálegyenletek módszerét használva sikerült egzakt alakot adnia az ismeretlen eltolásparaméter ML becslésére. Ezt az eredményt általánosította Baran, Pap és Zuijlen (2003) ugyancsak a $p = 1$ esetben, de egy kétszer folytonosan differenciálható és G felett négyzetesen integrálható g_1 függvényt tekintve, amikor a G megfigyelési tartomány egy téglalap. A szerzők meghatározták az m_1 ML becslését abban az esetben is, amikor a meghajtó folyamat az (1.2) segítségével definiált nemstacionárius OU mező. Ezen eredményeket sikerült kiterjesztenünk arra az esetre, amikor

az (1.3) folyamatot a Baran, Pap és Zuijlen (2011) által tekintett jóval általánosabb G tartományon figyeljük meg.

1.3. A modell és a becslés

Tekintsük az (1.3) modellt a $g_1, \dots, g_p : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ismert függvényekkel és az $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{R}$ ismeretlen regressziós paraméterekkel. Legyen $[a, c] \subset (0, \infty)$ és $b_1, b_2 \in (a, c)$, továbbá legyenek $\gamma_{1,2} : [a, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ és $\gamma_0 : [b_2, c] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton csökkenő függvények, illetve $\gamma_1 : [b_1, c] \rightarrow \mathbb{R}$ és $\gamma_2 : [a, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növekvő függvények, melyekre $\gamma_{1,2}(b_1) = \gamma_1(b_1) > 0$, $\gamma_2(b_2) = \gamma_0(b_2)$, $\gamma_{1,2}(a) = \gamma_2(a)$ és $\gamma_1(c) = \gamma_0(c)$ teljesül. Tekintsük a $\Gamma := \Gamma_{1,2} \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_0$ görbét, ahol

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2} &:= \left\{ (s, \gamma_{1,2}(s)) : s \in [a, b_1] \right\}, & \Gamma_1 &:= \left\{ (s, \gamma_1(s)) : s \in [b_1, c] \right\}, \\ \Gamma_2 &:= \left\{ (s, \gamma_2(s)) : s \in [a, b_2] \right\}, & \Gamma_0 &:= \left\{ (s, \gamma_0(s)) : s \in [b_2, c] \right\}, \end{aligned}$$

és $\varepsilon > 0$ esetén jelölje $\Gamma_{1,2}^\varepsilon$, Γ_1^ε , Γ_2^ε és Γ_0^ε a $\Gamma_{1,2}$, Γ_1 , Γ_2 és Γ_0 egy ε -környezetét, azaz például

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2}^\varepsilon &:= \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [a, a + \varepsilon], t \in [\gamma_{1,2}(s), \gamma_{1,2}(a)] \text{ vagy} \right. \\ &\quad \left. s \in [a + \varepsilon, b_1], t \in [\gamma_{1,2}(s), \gamma_{1,2}(s) + \varepsilon] \right\}. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $\varepsilon > 0$, amely esetén fennáll

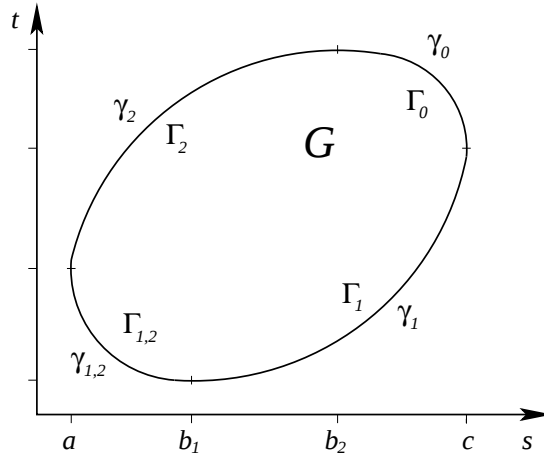
$$\Gamma_1^\varepsilon \cap \Gamma_2^\varepsilon = \emptyset \quad \text{és} \quad \Gamma_{1,2}^\varepsilon \cap \Gamma_0^\varepsilon = \emptyset, \quad (1.8)$$

továbbá legyen $G := G_1 \cup G_2 \cup G_3$, ahol

$$\begin{aligned} G_1 &:= \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [a, b_1 \wedge b_2], t \in [\gamma_{1,2}(s), \gamma_2(s)] \right\}, \\ G_2 &:= \begin{cases} \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [b_1, b_2], t \in [\gamma_1(s), \gamma_2(s)] \right\}, & \text{ha } b_1 \leq b_2, \\ \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [b_2, b_1], t \in [\gamma_{1,2}(s), \gamma_0(s)] \right\}, & \text{ha } b_1 > b_2, \end{cases} \\ G_3 &:= \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [b_1 \vee b_2, c], t \in [\gamma_1(s), \gamma_0(s)] \right\}. \end{aligned}$$

Az 1.1. ábrán láthatunk egy példát az imént definiált G megfigyelési tartományra.

Célunk az (1.3) modellben szereplő $m_1, \dots, m_p$ ismeretlen regressziós paraméterek a $\{Z(s, t) : (s, t) \in G\}$ folyamat megfigyelésén alapuló ML becsléseinek a meghatározása mind akkor, amikor a meghajtó folyamat egy standard Wiener mező, mind pedig akkor, amikor stacionárius, illetve nemstacionárius OU mező. Az $U(s, t) = W(s, t)$ és $p = 1$ esetben Baran, Pap és Zuijlen (2011) a következő tételt igazolták.



1.1. ábra. Példa egy G megfigyelési tartományra (Baran, Pap és Zuijlen (2011), Figure 1).

1.1. TÉTEL. (Baran, Pap és Zuijlen (2011), Theorem 2.1) Ha g_1 kétszer folytonosan differenciálható a G tartomány belsejében és a $\partial_1 g$, $\partial_2 g$, valamint $\partial_1 \partial_2 g$ parciális deriváltak folytonosan kiterjeszthetők G -re, akkor a Z , illetve W véletlen mezők által a $C(G)$ téren generált P_Z és P_W valószínűségi mértékek ekvivalensek és a P_Z mértéknek a P_W mértékre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltja

$$\frac{dP_Z}{dP_W}(Z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(Am^2 - 2\zeta m) \right\},$$

ahol

$$\begin{aligned} A := & \frac{g_1(b_1, \gamma_{1,2}(b_1))^2}{b_1 \gamma_{1,2}(b_1)} + \int_a^{b_1} \frac{[g_1(s, \gamma_{1,2}(s)) - s \partial_1 g_1(s, \gamma_{1,2}(s))]^2}{s^2 \gamma_{1,2}(s)} ds \\ & + \int_{b_1}^c \frac{[\partial_1 g_1(s, \gamma_1(s))]^2}{\gamma_1(s)} ds + \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \frac{[\partial_2 g_1(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t)]^2}{\gamma_{1,2}^{-1}(t)} dt \\ & + \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \frac{[\partial_2 g_1(\gamma_2^{-1}(t), t)]^2}{\gamma_2^{-1}(t)} dt + \iint_G [\partial_1 \partial_2 g_1(s, t)]^2 ds dt, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\zeta := & \frac{g_1(b_1, \gamma_{1,2}(b_1))Z(b_1, \gamma_{1,2}(b_1))}{b_1\gamma_{1,2}(b_1)} + \int_{b_1}^c \frac{\partial_1 g_1(s, \gamma_1(s))}{\gamma_1(s)} Z(ds, \gamma_1(s)) \\
& + \int_a^{b_1} \frac{[g_1(s, \gamma_{1,2}(s)) - s\partial_1 g_1(s, \gamma_{1,2}(s))]}{s^2\gamma_{1,2}(s)} [Z(s, \gamma_{1,2}(s)) ds - sZ(ds, \gamma_{1,2}(s))] \\
& + \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \frac{\partial_2 g_1(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t)}{\gamma_{1,2}^{-1}(t)} Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), dt) + \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \frac{\partial_2 g_1(\gamma_2^{-1}(t), t)}{\gamma_2^{-1}(t)} Z(\gamma_2^{-1}(t), dt) \\
& + \iint_G \partial_1 \partial_2 g_1(s, t) Z(ds, dt).
\end{aligned}$$

Ennek alapján az m_1 eltolásparaméternek a $\{Z(s, t) : (s, t) \in G\}$ megfigyelésén alapuló ML becslése $\hat{m}_1 = \zeta/A$ alakú és normális eloszlású m_1 várható értékkel és $1/A$ szórásnégyzettel.

1.2. MEGJEGYZÉS. Az 1.1. Tételben szereplő, a Wiener mező parciális deriváltjainak görbe menti súlyozott L^2 -Riemann integrálján a Baran, Pap és Zuijlen (2011) által bevezetett Definition 4.1-ben található definíciót értjük, melynek értelmében ha adott egy Z L^2 -folyamat egy $\Gamma := \{(s, \gamma(s)) : s \in [a, b]\}$ görbe ε -környezetében, ahol $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton, továbbá $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy Borel mérhető függvény, akkor

$$\begin{aligned}
& \int_a^b y(s) Z(ds, \gamma(s)) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b y(s) [Z(s+h, \gamma(s)) - Z(s, \gamma(s))] ds, \\
& \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} y(\gamma^{-1}(t)) Z(\gamma^{-1}(t), dt) \\
& := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} y(\gamma^{-1}(t)) [Z(\gamma^{-1}(t), t+h) - Z(\gamma^{-1}(t), t)] dt,
\end{aligned}$$

amennyiben a jobb oldalon lévő mennyiségek léteznek.

A következő tétel az 1.1. Tételnek tetszőleges p tagból álló regressziós modellre vonatkozó általánosítása.

1.3. TÉTEL. Ha $g_1, \dots, g_p$ kétszer folytonosan differenciálható a G tartomány belsejében és a $\partial_1 g_i$, $\partial_2 g_i$ és $\partial_1 \partial_2 g_i$, $i = 1, \dots, p$, parciális deriváltak folytonosan

kiterjeszthetők G -re, akkor a Z , illetve W véletlen mezők által a $C(G)$ téren generált P_Z és P_W valószínűségi mértékek ekvivalensek és a P_Z mértéknek a P_W mértékre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltja

$$\frac{dP_Z}{dP_W}(Z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{m}^\top A \mathbf{m} - 2\zeta^\top \mathbf{m}) \right\},$$

ahol $A := (A_{k,\ell})_{k,\ell=1}^p$, $\mathbf{m} := (m_1, \dots, m_p)^\top$ és $\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_p)^\top$,

$$\begin{aligned} A_{k,\ell} := & \frac{g_k(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) g_\ell(b_1, \gamma_{1,2}(b_1))}{b_1 \gamma_{1,2}(b_1)} \\ & + \int_a^{b_1} \frac{[g_k(s, \gamma_{1,2}(s)) - s \partial_1 g_k(s, \gamma_{1,2}(s))] [g_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) - s \partial_1 g_\ell(s, \gamma_{1,2}(s))]}{s^2 \gamma_{1,2}(s)} ds \\ & + \int_{b_1}^c \frac{\partial_1 g_k(s, \gamma_1(s)) \partial_1 g_\ell(s, \gamma_1(s))}{\gamma_1(s)} ds + \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \frac{\partial_2 g_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \partial_2 g_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t)}{\gamma_2^{-1}(t)} dt \\ & + \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \frac{\partial_2 g_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \partial_2 g_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t)}{\gamma_{1,2}^{-1}(t)} dt + \iint_G \partial_1 \partial_2 g_k(s, t) \partial_1 \partial_2 g_\ell(s, t) ds dt, \end{aligned} \quad (1.9)$$

és

$$\begin{aligned} \zeta_k := & \frac{g_k(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) Z(b_1, \gamma_{1,2}(b_1))}{b_1 \gamma_{1,2}(b_1)} + \int_{b_1}^c \frac{\partial_1 g_k(s, \gamma_1(s))}{\gamma_1(s)} Z(ds, \gamma_1(s)) \\ & + \int_a^{b_1} \frac{[g_k(s, \gamma_{1,2}(s)) - s \partial_1 g_k(s, \gamma_{1,2}(s))]}{s^2 \gamma_{1,2}(s)} [Z(s, \gamma_{1,2}(s)) ds - s Z(ds, \gamma_{1,2}(s))] \\ & + \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \frac{\partial_2 g_k(\gamma_2^{-1}(t), t)}{\gamma_2^{-1}(t)} Z(\gamma_2^{-1}(t), dt) + \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \frac{\partial_2 g_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t)}{\gamma_{1,2}^{-1}(t)} Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), dt) \\ & + \iint_G \partial_1 \partial_2 g_k(s, t) Z(ds, dt). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor az $\mathbf{m}$ paramétervektornak a $\{Z(s, t) : (s, t) \in G\}$ megfigyelésén alapuló ML becslése $\hat{\mathbf{m}} = A^{-1}\zeta$ alakú és p -dimenziós normális eloszlású $\mathbf{m}$ várható érték vektorral és A^{-1} kovariancia mátrixszal.

1.4. MEGJEGYZÉS. Az A mátrix elemeit leíró (1.9) által meghatározott tagokat megvizsgálva, látható azok nemnegatív definitisége, amely ilyen módon garantálja

az A mátrix nemnegatív definittségét is. Így a $\det(A) \neq 0$ feltétel teljesüléséhez elegendő a tagok közül legalább egynek a pozitív definittségét biztosítani, amit például a $g_1, \dots, g_p$ függvények lineáris függetlensége garantál.

1.5. MEGJEGYZÉS. Az 1.3. Tételben szereplő, a Wiener mező parciális deriváltjainak görbe menti súlyozott L^2 -Riemann integráljain az 1.2. Megjegyzésbeli integrálokat értjük.

1.6. PÉLDA. Tekintsük a

$$Z(s, t) = m_1(s^2 + t^2) + m_2(s + t) + m_3(s \cdot t) + W(s, t), \quad (s, t) \in G,$$

modellt, ahol $W(s, t)$, $(s, t) \in [u - r, u + r] \times [v - r, v + r]$ egy standard Wiener mező, G pedig egy (u, v) középpontú r sugarú kör. Ekkor

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2}(s) &= v - \sqrt{r^2 - (s - u)^2}, & s \in [u - r, u], \\ \gamma_1(s) &= v - \sqrt{r^2 - (s - u)^2}, & s \in [u, u + r], \\ \gamma_2(s) &= v + \sqrt{r^2 - (s - u)^2}, & s \in [u - r, u], \\ \gamma_0(s) &= v + \sqrt{r^2 - (s - u)^2}, & s \in [u, u + r], \\ \gamma_{1,2}^{-1}(t) &= u - \sqrt{r^2 - (t - v)^2}, & t \in [v - r, v], \\ \gamma_2^{-1}(t) &= u - \sqrt{r^2 - (t - v)^2}, & t \in [v, v + r]. \end{aligned}$$

Ebben az esetben az (1.9) által definiált szimmetrikus A mátrix különböző elemei

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \frac{(u^2 + (v - r)^2)^2}{u(v - r)} + \int_{u-r}^u \frac{(\gamma_{1,2}^2(s) - s^2)^2}{s^2 \gamma_{1,2}(s)} ds + 4 \int_u^{u+r} \frac{s^2}{\gamma_1(s)} ds \\ &\quad + 4 \int_{v-r}^v \frac{t^2}{\gamma_{1,2}^{-1}(t)} dt + 4 \int_v^{v+r} \frac{t^2}{\gamma_2^{-1}(t)} dt, \\ A_{1,2} &= \frac{(u^2 + (v - r)^2)(u + v - r)}{u(v - r)} + \int_{u-r}^u \frac{\gamma_{1,2}^2(s) - s^2}{s^2} ds \\ &\quad + 2 \int_u^{u+r} \frac{s}{\gamma_1(s)} ds + 2 \int_{v-r}^v \frac{t}{\gamma_{1,2}^{-1}(t)} dt + 2 \int_v^{v+r} \frac{t}{\gamma_2^{-1}(t)} dt, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}
A_{2,2} &= \frac{(u+v-r)^2}{u(v-r)} + \int_{u-r}^u \frac{\gamma_{1,2}(s)}{s^2} ds + \int_u^{u+r} \frac{1}{\gamma_1(s)} ds \\
&\quad + \int_{v-r}^v \frac{1}{\gamma_{1,2}^{-1}(t)} dt + \int_v^{v+r} \frac{1}{\gamma_2^{-1}(t)} dt, \\
A_{1,3} &= u^2 + (v-r)^2 + 2r(u+2v) + r^2, \\
A_{2,3} &= u + v + 2r, \\
A_{3,3} &= u(v-r) + r(v+2u) - \frac{3\pi r^2}{4},
\end{aligned}$$

az (1.10) képlettel megadott $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^\top$ komponensei pedig

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{(u^2 + (v-r)^2) Z(b_1, \gamma_{1,2}(b_1))}{u(v-r)} + \int_u^{u+r} \frac{2s}{\gamma_1(s)} Z(ds, \gamma_1(s)) \\
&\quad + \int_{v-r}^v \frac{2t}{\gamma_2^{-1}(t)} Z(\gamma_2^{-1}(t), dt) + \int_v^{v+r} \frac{2t}{\gamma_{1,2}^{-1}(t)} Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), dt) \\
&\quad + \int_{u-r}^u \frac{(\gamma_{1,2}^2(s) - s^2)}{s^2 \gamma_{1,2}(s)} \left[Z(s, \gamma_{1,2}(s)) ds - s Z(ds, \gamma_{1,2}(s)) \right], \\
\zeta_2 &= \frac{(u+v-r) Z(b_1, \gamma_{1,2}(b_1))}{u(v-r)} + \int_u^{u+r} \frac{1}{\gamma_1(s)} Z(ds, \gamma_1(s)) + \int_{v-r}^v \frac{1}{\gamma_2^{-1}(t)} Z(\gamma_2^{-1}(t), dt) \\
&\quad + \int_{u-r}^u \frac{1}{s^2} \left[Z(s, \gamma_{1,2}(s)) ds - s Z(ds, \gamma_{1,2}(s)) \right] + \int_v^{v+r} \frac{1}{\gamma_{1,2}^{-1}(t)} Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), dt), \\
\zeta_3 &= Z(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) + \int_u^{u+r} Z(ds, \gamma_1(s)) + \int_{v-r}^v Z(\gamma_2^{-1}(t), dt) \\
&\quad + \int_v^{v+r} Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), dt) + \iint_G Z(ds, dt).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Az 1.3. Tétel igazolását az 1.1. Tétel bizonyításához teljesen hasonló módon végezzük el, mégpedig a már korábban említett diszkrét apporximáció (lásd Baran, Pap és Zuiljen (2003), (2004), (2011)) segítségével.

Diszkrét approximáció

A diszkrét approximáció lényege, hogy a folytonos véletlen mezőt egy diszkrét térbeli folyamattal közelítjük meg. A következő tétel alapötlete Arató (1982) 2.3.2 fejezetéből származik, és ezen tétel biztosítja a diszkrét időből a folytonos időbe való átmenetet. Legyen Γ egy tetszőleges index halmaz, $X \subset \mathbb{R}^\Gamma$ egy függvénytér, $\mathcal{X}$ pedig az X

$$\{x \in X : (x(\gamma_1), \dots, x(\gamma_k)) \in B\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$$

cilinderhalmazai által generált σ -algebra. Tekintsünk egy $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ X -beli trajektóriájú sztochasztikus folyamatot és jelölje a P_ξ az $(X, \mathcal{X})$ téren a folyamat által generált valószínűségi mértéket. A $\Gamma' = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \subset \Gamma$ véges halmaz esetén jelölje a $P_\xi^{\Gamma'}$ a $\xi(\Gamma') := (\xi_{\gamma_1}, \dots, \xi_{\gamma_k})$ valószínűségi vektor által a $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ téren generált valószínűségi mértéket.

1.7. TÉTEL. (Baran, Pap és Zuijlen (2003), Proposition 1) Legyen $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ és $\{\eta_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ két X -beli trajektóriával rendelkező sztochasztikus folyamat. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, melyre teljesül, hogy $Ef(X) = 1$, valamint tetszőleges $\Gamma_0 \subset \Gamma$ esetén létezik egy olyan, Γ véges részhalmazából álló Γ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozat, hogy $\Gamma_0 \subset \Gamma_n \subset \Gamma$, $n = 1, 2, \dots$, és $n \rightarrow \infty$ esetén

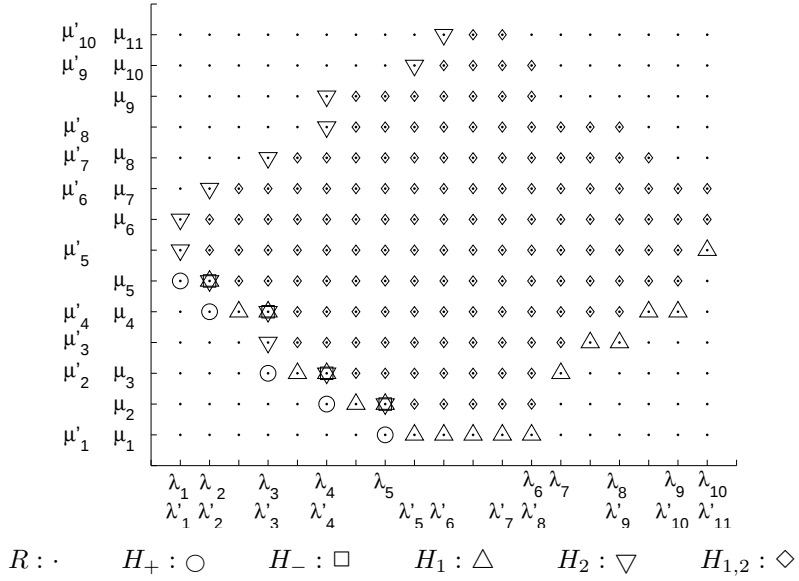
$$\frac{dP_\eta^{\Gamma_n}}{dP_\xi^{\Gamma_n}}(\xi(\Gamma_n)) \xrightarrow{P} f(\xi).$$

Ekkor P_η abszolút folytonos a P_ξ mértékre nézve és $\frac{dP_\eta}{dP_\xi} = f$.

Az imént leírt diszkrét approximáció értelmében első lépésként meg kell határoznunk a P_Z mérték a P_W mértékre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltjának közelítését. Ehhez tekintsük a $\{Z(s_i, t_j) : (i, j) \in H\}$ és $\{W(s_i, t_j) : (i, j) \in H\}$, megfigyelések által generált valószínűségi mértékek Radon-Nikodym deriváltját, ahol H az $\mathbb{R}^2$ egy a G tartományt közelítő véges részhalmaza.

Véges minták Radon-Nikodym deriváltjai

Először definiáljuk a G tartomány közelítéséhez szükséges H véges halmazt, illetve részhalmazait Baran, Pap és Zuijlen (2011) jelöléseit használva. Legyenek a $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_L$ és $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M$ számok valósak, továbbá $1 = \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots < \lambda_{n+m} = L$, $1 = \lambda'_1 < \dots < \lambda'_{n'} < \lambda'_{n'+1} < \dots < \lambda'_{n'+m'} = L$, $1 = \mu_1 < \dots < \mu_n < \mu_{n+1} < \dots < \mu_{n+n'} = M$, illetve $1 = \mu'_1 < \dots < \mu'_{n'} < \mu'_{n'+1} < \dots < \mu'_{n'+m'} = M$ pedig egészek.



1.2. ábra. Példa R , H_+ , H_- , H_1 , H_2 és $H_{1,2}$ index halmazokra az $n = m = m' = 5$ és $n' = 6$ esetben (Baran, Pap és Zuijlen (2011), Figure 2).

Legyen

$$\begin{aligned}
 R &:= \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq M\}, \\
 R_{1,2} &:= \bigcup_{k=1}^{n-1} \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \lambda_k \leq i < \lambda_{k+1}, 1 \leq j < \mu_{n-k+1}\}, \\
 R_1 &:= \bigcup_{k=n+1}^{n+m-1} \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \lambda_k < i \leq \lambda_{k+1}, 1 < j \leq \mu'_{k-n+1}\}, \\
 R_2 &:= \bigcup_{k=1}^{n'-1} \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \lambda'_k \leq i < \lambda'_{k+1}, \mu_{n+k} < j \leq M\}, \\
 R_0 &:= \bigcup_{k=n'+1}^{n'+m'-1} \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \lambda'_k < i \leq \lambda'_{k+1}, \mu'_{n'+m'+m-k} < j \leq M\}, \\
 H &:= R \setminus (R_{1,2} \cup R_1 \cup R_2 \cup R_0), \\
 H_+ &:= \{(\lambda_k, \mu_{n-k+1}) : k = 1, \dots, n\}, \\
 H_- &:= \{(\lambda_k, \mu_{n-k+2}) : k = 2, \dots, n\}, \\
 H_1 &:= \{(i, \mu_k) : k = 1, \dots, n, \lambda_{n-k+1} < i \leq \lambda_{n-k+2}\} \\
 &\quad \cup \{(i, \mu'_k) : k = 2, \dots, m, \lambda_{n+k-1} < i \leq \lambda_{n+k}\}, \\
 H_2 &:= \{(\lambda_k, j) : k = 1, \dots, n, \mu_{n-k+1} < j \leq \mu_{n-k+2}\} \\
 &\quad \cup \{(\lambda'_k, j) : k = 2, \dots, n', \mu_{n+k-1} < j \leq \mu_{n+k}\}, \\
 H_{1,2} &:= H \setminus (H_+ \cup H_- \cup H_1 \cup H_2).
 \end{aligned}$$

Példaként tekintsük az 1.2. ábrát. Az 1.3. Tétel igazolásának alapját képező a $\{Z(s_i, t_j) : (i, j) \in H\}$ és $\{W(s_i, t_j) : (i, j) \in H\}$ véges halmazbeli megfigyelések által generált valószínűségi mértékek Radon-Nikodym deriváltjának alakját meghatározó 1.9. Lemma bizonyításához elengedhetetlen a Baran, Pap és Zuijlen (2011) által igazolt alábbi segédállítás.

1.8. LEMMA. (Baran, Pap és Zuijlen (2011), Lemma 3.1) A $\{W(s_i, t_j) : (i, j) \in H\}$ minta együttes sűrűségfüggvénye

$$c \cdot f(x_{i,j} : (i, j) \in H_+ \cup H_-) \cdot g(x_{i,j} : (i, j) \in H), \quad (1.13)$$

alakú, ahol c egy normáló tényező,

$$\begin{aligned} f(x_{i,j} : (i, j) \in H_+ \cup H_-) &= \exp \left\{ - \sum_{(i,j) \in H_+} \frac{x_{i,j}^2}{2s_i t_j} + \sum_{(i,j) \in H_-} \frac{x_{i,j}^2}{2s_i t_j} \right\}, \\ g(x_{i,j} : (i, j) \in H) &= \exp \left\{ - \sum_{(i,j) \in H_1} \frac{(\Delta_1 x_{i,j})^2}{2(\Delta s_i) t_j} - \sum_{(i,j) \in H_2} \frac{(\Delta_2 x_{i,j})^2}{2s_i (\Delta t_j)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{(i,j) \in H_{1,2}} \frac{(\Delta_1 \Delta_2 x_{i,j})^2}{2(\Delta s_i)(\Delta t_j)} \right\}, \end{aligned}$$

ahol $\Delta_1 x_{i,j} := x_{i,j} - x_{i-1,j}$, $\Delta_2 x_{i,j} := x_{i,j} - x_{i,j-1}$ és $\Delta s_i := s_i - s_{i-1}$, $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$.

A diszkrét approximáció értelmében szükséges a véges minták Radon-Nikodym deriváltjának ismerete, amelyet ebben az esetben az alábbi lemma foglal magába.

1.9. LEMMA. A $\{Z(s_i, t_j) : (i, j) \in H\}$ és $\{W(s_i, t_j) : (i, j) \in H\}$ megfigyelések által generált P_Z^H és P_W^H valószínűségi mértékek ekvivalensek és

$$\frac{dP_Z^H}{dP_W^H}(x_{i,j} : (i, j) \in H) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\mathbf{m}^\top A_H \mathbf{m} - 2\mathbf{m}^\top y_H \right) \right\},$$

ahol $A_H := (A_{k,\ell,H})_{k,\ell=1}^p$ és $y_H := (y_{1,H}, \dots, y_{p,H})^\top$,

$$\begin{aligned} A_{k,\ell,H} &:= \sum_{(i,j) \in H_+} \frac{g_k(s_i, t_j) g_\ell(s_i, t_j)}{s_i t_j} - \sum_{(i,j) \in H_-} \frac{g_k(s_i, t_j) g_\ell(s_i, t_j)}{s_i t_j} \\ &+ \sum_{(i,j) \in H_1} \frac{(\Delta_1 g_k(s_i, t_j)) (\Delta_1 g_\ell(s_i, t_j))}{(\Delta s_i) t_j} + \sum_{(i,j) \in H_2} \frac{(\Delta_2 g_k(s_i, t_j)) (\Delta_2 g_\ell(s_i, t_j))}{s_i (\Delta t_j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{(i,j) \in H_{1,2}} \frac{(\Delta_1 \Delta_2 g_k(s_i, t_j)) (\Delta_1 \Delta_2 g_\ell(s_i, t_j))}{(\Delta s_i)(\Delta t_j)}, \\
y_{k,H} &:= \sum_{(i,j) \in H_+} \frac{x_{i,j} g_k(s_i, t_j)}{s_i t_j} - \sum_{(i,j) \in H_-} \frac{x_{i,j} g_k(s_i, t_j)}{s_i t_j} + \sum_{(i,j) \in H_1} \frac{(\Delta_1 x_{i,j}) (\Delta_1 g_k(s_i, t_j))}{(\Delta s_i) t_j} \\
& + \sum_{(i,j) \in H_2} \frac{(\Delta_2 x_{i,j}) (\Delta_2 g_k(s_i, t_j))}{s_i (\Delta t_j)} + \sum_{(i,j) \in H_{1,2}} \frac{(\Delta_1 \Delta_2 x_{i,j}) (\Delta_1 \Delta_2 g_k(s_i, t_j))}{(\Delta s_i)(\Delta t_j)}.
\end{aligned}$$

Ha A_H pozitív definit, akkor az $\mathbf{m}$ paramétervektornak a $\{Z(s_i, t_j) : (i, j) \in H\}$ megfigyeléseken alapuló ML becslése $\hat{\mathbf{m}}_H = A_H^{-1} \zeta_H$ alakú, ahol

$$\zeta_H := (\zeta_{1,H}, \dots, \zeta_{p,H})^\top,$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{k,H} &:= \sum_{(i,j) \in H_+} \frac{g_k(s_i, t_j) Z(s_i, t_j)}{s_i t_j} - \sum_{(i,j) \in H_-} \frac{g_k(s_i, t_j) Z(s_i, t_j)}{s_i t_j} \\
& + \sum_{(i,j) \in H_1} \frac{(\Delta_1 g_k(s_i, t_j)) (\Delta_1 Z(s_i, t_j))}{(\Delta s_i) t_j} + \sum_{(i,j) \in H_2} \frac{(\Delta_2 g_k(s_i, t_j)) (\Delta_2 Z(s_i, t_j))}{s_i (\Delta t_j)} \\
& + \sum_{(i,j) \in H_{1,2}} \frac{(\Delta_1 \Delta_2 g_k(s_i, t_j)) (\Delta_1 \Delta_2 Z(s_i, t_j))}{(\Delta s_i)(\Delta t_j)}
\end{aligned}$$

és $\hat{\mathbf{m}}_H$ p -dimenziós normális eloszlású $\mathbf{m}$ várható érték vektorral és A_H^{-1} kovariancia mátrixszal.

BIZONYÍTÁS. Az 1.8. Lemma alapján a $\{Z(s_i, t_j) : (i, j) \in H\}$ megfigyelések együttes sűrűségfüggvénye

$$c \cdot f(x_{i,j} - \sum_{k=1}^p m_k g_k(s_i, t_j) : (i, j) \in H_+ \cup H_-) \cdot g(x_{i,j} - \sum_{k=1}^p m_k g_k(s_i, t_j) : (i, j) \in H).$$

Így

$$\begin{aligned}
\frac{dP_Z^H}{dP_W^H}(x_{i,j} : (i, j) \in H) &= \frac{f(x_{i,j} - mg(s_i, t_j) : (i, j) \in H_+ \cup H_-)}{f(x_{i,j} : (i, j) \in H_+ \cup H_-)} \\
&\times \frac{g(x_{i,j} - mg(s_i, t_j) : (i, j) \in H)}{g(x_{i,j} : (i, j) \in H)} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\mathbf{m}^\top A_H \mathbf{m} - 2 \mathbf{m}^\top y_H \right) \right\},
\end{aligned}$$

amelyből már adódik az $\mathbf{m}$ paramétervektor ML becslésének alakja. Nyilvánvalóan $E \hat{\mathbf{m}}_H = \mathbf{m}$. Végezetül pedig ζ_H tagjainak független növekményűségét kihasználva rövid számolás után kapjuk, hogy a becslés kovariancia mátrixa nem más, mint A_H^{-1} . $\square$

A $\{Z(s_i, t_j) : (i, j) \in G\}$ folyamatot véges minták sorozatával megközelítve, ezt követően pedig elvégezve a határátmenetet az 1.7. Tétel és az 1.9. Lemma segítségével adódik az 1.3. Tétel igazolása. A megfelelő véges közelítés létezésének, valamint a határátmenetnek az igazolása teljesen analóg a Baran, Pap és Zuijlen (2011) által leírt bizonyítással, így ezt külön nem ismertetjük.

Ismert, hogy az (1.1) kovariancia struktúrájú $\{\tilde{X}(s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$ stacionárius OU mező felírható a Wiener mező segítségével, mégpedig a következő módon

$$\tilde{X}(s, t) = \frac{\sigma}{2\sqrt{\alpha\beta}} e^{-\alpha s - \beta t} W(e^{2\alpha s}, e^{2\beta t}), \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Tekintsük a $Z(s, t) := m_1 h_1(s, t) + \dots + m_p h_p(s, t) + \tilde{X}(s, t)$, $(s, t) \in \mathbb{R}_+$, véletlen mezőt. Az 1.3. Tételt a

$$g_k(u, v) = \frac{2\sqrt{\alpha\beta uv}}{\sigma} h_k\left(\frac{\log u}{2\alpha}, \frac{\log v}{2\beta}\right), \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (1.15)$$

függvényekre és a $\tilde{\Gamma} := \tilde{\Gamma}_{1,2} \cup \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2 \cup \tilde{\Gamma}_0$ zárt görbe által határolt $\tilde{G}$ tartományra alkalmazva, ahol

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{1,2} &:= \left\{ (u, \tilde{\gamma}_{1,2}(u)) : u \in [e^{2\alpha a}, e^{2\alpha b_1}] \right\}, & \tilde{\Gamma}_1 &:= \left\{ (u, \tilde{\gamma}_1(u)) : u \in [e^{2\alpha b_1}, e^{2\alpha c}] \right\}, \\ \tilde{\Gamma}_2 &:= \left\{ (u, \tilde{\gamma}_2(u)) : u \in [e^{2\alpha a}, e^{2\alpha b_2}] \right\}, & \tilde{\Gamma}_0 &:= \left\{ (u, \tilde{\gamma}_0(u)) : u \in [e^{2\alpha b_2}, e^{2\alpha c}] \right\}, \\ \tilde{\gamma}_j(u) &:= \exp\left(2\beta\gamma_j(\log(u)/2\alpha)\right), & j &\in \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{0\}\}, \end{aligned}$$

a következő állítást kapjuk.

1.10. TÉTEL. *Ha $h_1, \dots, h_p$ kétszer folytonosan differenciálható a G tartomány belsejében és a $\partial_1 h_i$, $\partial_2 h_i$ és $\partial_1 \partial_2 h_i$, $i = 1, \dots, p$, parciális deriváltak folytonosan kiterjeszthetők G -re, akkor a Z , illetve $\tilde{X}$ véletlen mezők által a $C(G)$ téren generált P_Z és $P_{\tilde{X}}$ valószínűségi mértékek ekvivalensek és a P_Z mértéknek a $P_{\tilde{X}}$ mértékre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltja*

$$\frac{dP_Z}{dP_{\tilde{X}}}(Z) = \exp\left\{-\frac{\alpha\beta}{2\sigma^2}(\mathbf{m}^\top A \mathbf{m} - 2\zeta^\top \mathbf{m})\right\},$$

ahol $A := (A_{k,\ell})_{k,\ell=1}^p$, $\mathbf{m} := (m_1, \dots, m_p)^\top$ és $\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_p)^\top$,

$$\begin{aligned} A_{k,\ell} &:= h_k(a, \gamma_2(a))h_\ell(a, \gamma_2(a)) + h_k(c, \gamma_1(c))h_\ell(c, \gamma_1(c)) \\ &+ h_k(b_1, \gamma_1(b_1))h_\ell(b_1, \gamma_1(b_1)) + h_k(b_2, \gamma_2(b_2))h_\ell(b_2, \gamma_2(b_2)) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^{b_1} \left[\alpha h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) + \alpha^{-1} \partial_1 h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) \partial_1 h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] ds \\
& + \int_{b_1}^c \left[\alpha h_k(s, \gamma_1(s)) + \partial_1 h_k(s, \gamma_1(s)) \right] \left[h_\ell(s, \gamma_1(s)) + \alpha^{-1} \partial_1 h_\ell(s, \gamma_1(s)) \right] ds \\
& + \int_a^{b_2} \left[\alpha h_k(s, \gamma_2(s)) - \partial_1 h_k(s, \gamma_2(s)) \right] \left[h_\ell(s, \gamma_2(s)) - \alpha^{-1} \partial_1 h_\ell(s, \gamma_2(s)) \right] ds \\
& + \int_{b_2}^c \left[\alpha h_k(s, \gamma_0(s)) h_\ell(s, \gamma_0(s)) + \alpha^{-1} \partial_1 h_k(s, \gamma_0(s)) \partial_1 h_\ell(s, \gamma_0(s)) \right] ds \\
& + \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \left[\beta h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) - \partial_2 h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] \left[h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) - \beta^{-1} \partial_2 h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] dt \\
& + \int_{\gamma_1(b_1)}^{\gamma_1(c)} \left[\beta h_k(\gamma_1^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_1^{-1}(t), t) + \beta^{-1} \partial_2 h_k(\gamma_1^{-1}(t), t) \partial_2 h_\ell(\gamma_1^{-1}(t), t) \right] dt \\
& + \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \left[\beta h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) + \beta^{-1} \partial_2 h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \partial_2 h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] dt \\
& + \int_{\gamma_0(c)}^{\gamma_0(b_2)} \left[\beta h_k(\gamma_0^{-1}(t), t) + \partial_2 h_k(\gamma_0^{-1}(t), t) \right] \left[h_\ell(\gamma_0^{-1}(t), t) + \beta^{-1} \partial_2 h_\ell(\gamma_0^{-1}(t), t) \right] dt \\
& + \iint_G \left[\alpha \beta h_k(s, t) h_\ell(s, t) + \alpha^{-1} \beta \partial_1 h_k(s, t) \partial_1 h_\ell(s, t) \right. \\
& \quad \left. + \alpha \beta^{-1} \partial_2 h_k(s, t) \partial_2 h_\ell(s, t) + \alpha^{-1} \beta^{-1} \partial_1 \partial_2 h_k(s, t) \partial_1 \partial_2 h_\ell(s, t) \right] ds dt
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\zeta_k &:= 4h_k(b_1, \gamma_1(b_1))Z(b_1, \gamma_1(b_1)) \\
&+ 2 \int_{b_1}^c \left[\alpha h_k(s, \gamma_1(s)) + \partial_1 h_k(s, \gamma_1(s)) \right] \left[Z(s, \gamma_1(s)) ds + \alpha^{-1} Z(ds, \gamma_1(s)) \right]
\end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_a^{b_1} \left[\alpha h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) - \partial_1 h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] \left[Z(s, \gamma_{1,2}(s)) ds - \alpha^{-1} Z(ds, \gamma_{1,2}(s)) \right] \\
& + 2 \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \left[\beta h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) + \partial_2 h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] \left[Z(\gamma_2^{-1}(t), t) dt + \beta^{-1} Z(\gamma_2^{-1}(t), dt) \right] \\
& + 2 \int_{\gamma_{1,2}(a)}^{\gamma_{1,2}(b_1)} \left[\beta h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) + \partial_2 h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] \left[Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) dt + \beta^{-1} Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), dt) \right] \\
& + \iint_G \left[\alpha \beta h_k(s, t) + \beta \partial_1 h_k(s, t) + \alpha \partial_2 h_k(s, t) + \partial_1 \partial_2 h_k(s, t) \right] \\
& \quad \times \left[Z(s, t) ds dt + \alpha^{-1} Z(ds, t) dt + \beta^{-1} Z(s, dt) ds + \alpha^{-1} \beta^{-1} Z(ds, dt) \right].
\end{aligned}$$

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor az $\mathbf{m}$ paramétervektornak a $\{Z(s, t) : (s, t) \in G\}$ megfigyelésén alapuló ML becslése $\hat{\mathbf{m}} = A^{-1}\zeta$ alakú és p -dimenziós normális eloszlású $\mathbf{m}$ várható érték vektorral és A^{-1} kovariancia mátrixszal.

BIZONYÍTÁS. A tétel igazolásához használjuk ki az OU mező (1.14) által meghatározott alakját és alkalmazzuk az 1.3. Tételt a $\tilde{G}$ tartományon megfigyelt

$$Y(u, v) := \frac{2\sqrt{\alpha\beta uv}}{\sigma} Z\left(\frac{\log u}{2\alpha}, \frac{\log v}{2\beta}\right) = m_1 g_1(u, v) + \dots + m_p g_p(u, v) + W(u, v),$$

véletlen mezőre, ahol a g_k az (1.15) által definiált függvényt jelöli. Ekkor

$$\begin{aligned}
\partial_1 g_k(u, v) &= \frac{\sqrt{\beta v}}{\sigma \sqrt{\alpha u}} (\alpha + \partial_1) h_k\left(\frac{\log u}{2\alpha}, \frac{\log v}{2\beta}\right), \\
\partial_2 g_k(u, v) &= \frac{\sqrt{\alpha u}}{\sigma \sqrt{\beta v}} (\beta + \partial_2) h_k\left(\frac{\log u}{2\alpha}, \frac{\log v}{2\beta}\right), \\
\partial_1 \partial_2 g_k(u, v) &= \frac{1}{2\sigma \sqrt{\alpha\beta uv}} (\alpha + \partial_1)(\beta + \partial_2) h_k\left(\frac{\log u}{2\alpha}, \frac{\log v}{2\beta}\right),
\end{aligned} \tag{1.18}$$

majd rövid számolást követően kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
A_{k,\ell} &= 4h_k(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) h_\ell(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) \\
&+ 2 \int_a^{b_1} \left[(\alpha - \partial_1) h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] \left[(1 - \alpha^{-1} \partial_1) h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_{b_1}^c \left[(\alpha + \partial_1) h_k(s, \gamma_1(s)) \right] \left[(1 + \alpha^{-1} \partial_1) h_\ell(s, \gamma_1(s)) \right] ds \\
& + 2 \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \left[(\beta + \partial_2) h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] \left[(1 + \beta^{-1} \partial_2) h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] dt \\
& + 2 \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \left[(\beta + \partial_2) h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] \left[(1 + \beta^{-1} \partial_2) h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] dt \\
& + \iint_G \left[(\alpha + \partial_1)(\beta + \partial_2) h_k(s, t) \right] \left[(1 + \alpha^{-1} \partial_1)(1 + \beta^{-1} \partial_2) h_\ell(s, t) \right] ds dt \\
& = A_{k,\ell}^{(1)} + \alpha A_{k,\ell}^{(2)} + \beta A_{k,\ell}^{(3)} + \alpha^{-1} A_{k,\ell}^{(4)} + \beta^{-1} A_{k,\ell}^{(5)} + A_{k,\ell}^{(6)},
\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}
A_{k,\ell}^{(1)} &:= 4h_k(b_1, \gamma_{1,2}(b_1))h_\ell(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) + 2 \int_{b_1}^c \partial_1 \left[h_k(s, \gamma_1(s)) h_\ell(s, \gamma_1(s)) \right] ds \\
&- 2 \int_a^{b_1} \partial_1 \left[h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] ds + 2 \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \partial_2 \left[h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] dt \\
&+ 2 \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \partial_2 \left[h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] dt + \iint_G \partial_1 \partial_2 \left[h_k(s, t) h_\ell(s, t) \right] ds dt, \\
A_{k,\ell}^{(2)} &:= 2 \int_{b_1}^c h_k(s, \gamma_1(s)) h_\ell(s, \gamma_1(s)) ds + 2 \int_a^{b_1} h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) ds \\
&+ \iint_G \partial_2 \left[h_k(s, t) h_\ell(s, t) \right] ds dt, \\
A_{k,\ell}^{(3)} &:= 2 \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) dt + 2 \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) dt \\
&+ \iint_G \partial_1 \left[h_k(s, t) h_\ell(s, t) \right] ds dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{k,\ell}^{(4)} &:= 2 \int_{b_1}^c \partial_1 h_k(s, \gamma_1(s)) \partial_1 h_\ell(s, \gamma_1(s)) \, ds + 2 \int_a^{b_1} \partial_1 h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) \partial_1 h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) \, ds \\
&\quad + \iint_G \partial_2 [\partial_1 h_k(s, t) \partial_1 h_\ell(s, t)] \, ds \, dt, \\
A_{k,\ell}^{(5)} &:= 2 \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_1)} \partial_2 h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \partial_2 h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) \, dt + 2 \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \partial_2 h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \partial_2 h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \, dt \\
&\quad + \iint_G \partial_1 [\partial_2 h_k(s, t) \partial_2 h_\ell(s, t)] \, ds \, dt, \\
A_{k,\ell}^{(6)} &:= \iint_G [\alpha \beta h_k(s, t) h_\ell(s, t) + \alpha^{-1} \beta \partial_1 h_k(s, t) \partial_1 h_\ell(s, t) \\
&\quad + \alpha \beta^{-1} \partial_2 h_k(s, t) \partial_2 h_\ell(s, t) + \alpha^{-1} \beta^{-1} \partial_1 \partial_2 h_k(s, t) \partial_1 \partial_2 h_\ell(s, t)] \, ds \, dt.
\end{aligned}$$

Nyilvánvalóan

$$\iint_G \partial_2 [h_k(s, t) h_\ell(s, t)] \, ds \, dt \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^{b_2} h_k(s, \gamma_2(s)) h_\ell(s, \gamma_2(s)) \, ds - \int_a^{b_1} h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) \, ds \\
&\quad - \int_{b_1}^c h_k(s, \gamma_1(s)) h_\ell(s, \gamma_1(s)) \, ds + \int_{b_2}^c h_k(s, \gamma_0(s)) h_\ell(s, \gamma_0(s)) \, ds, \\
&\iint_G \partial_1 [h_k(s, t) h_\ell(s, t)] \, ds \, dt \quad (1.20) \\
&= \int_{\gamma_1(b_1)}^{\gamma_1(c)} h_k(\gamma_1^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_1^{-1}(t), t) \, dt - \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \, dt \\
&\quad - \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) \, dt + \int_{\gamma_0(c)}^{\gamma_0(b_2)} h_k(\gamma_0^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_0^{-1}(t), t) \, dt,
\end{aligned}$$

és hasonló módon fejezhető ki a

$$\iint_G \partial_2 [\partial_1 h_k(s, t) \partial_1 h_\ell(s, t)] \, ds \, dt, \quad \text{illetve} \quad \iint_G \partial_1 [\partial_2 h_k(s, t) \partial_2 h_\ell(s, t)] \, ds \, dt$$

integrálok is. Ezek után, felhasználva a

$$\begin{aligned}
 & 2 \iint_G \partial_1 \partial_2 [h_k(s, t) h_\ell(s, t)] \, ds \, dt \\
 &= \int_a^{b_2} \partial_1 [h_k(s, \gamma_2(s)) h_\ell(s, \gamma_2(s))] \, ds - \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \partial_2 [h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t)] \, dt \\
 &\quad - \int_{b_1}^c \partial_1 [h_k(s, \gamma_1(s)) h_\ell(s, \gamma_1(s))] \, ds + \int_{\gamma_1(b_1)}^{\gamma_1(c)} \partial_2 [h_k(\gamma_1^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_1^{-1}(t), t)] \, dt \\
 &\quad - \int_a^{b_1} \partial_1 [h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s))] \, ds + \int_{\gamma_{1,2}(a)}^{\gamma_{1,2}(b_1)} \partial_2 [h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t)] \, dt \\
 &\quad + \int_{b_2}^c \partial_1 [h_k(s, \gamma_0(s)) h_\ell(s, \gamma_0(s))] \, ds - \int_{\gamma_0(b_2)}^{\gamma_0(c)} \partial_2 [h_k(\gamma_0^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_0^{-1}(t), t)] \, dt,
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

felbontást is, egyszerű számolást követően jutunk az (1.16) által megadott alakhoz. Az (1.18) parciális deriváltak, valamint az 1.2. Megjegyzésben definiált integrálok segítségével kapjuk, hogy

$$\zeta_k = \zeta_k^{(1)} + \zeta_k^{(2)} + \zeta_k^{(3)} + \zeta_k^{(4)} + \zeta_k^{(5)} + \zeta_k^{(6)},$$

ahol

$$\begin{aligned}
 \zeta_k^{(1)} &:= 4h_k(b_1, \gamma_{1,2}(b_1))Z(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)), \\
 \zeta_k^{(2)} &:= \text{l.i.m.}_{\varrho \rightarrow 0} \frac{4}{\varrho} \int_{b_1}^c e^{\alpha s} (\alpha + \partial_1) h_k(s, \gamma_1(s)) \\
 &\quad \times \left[(e^{2\alpha s} + \varrho)^{1/2} Z\left(\frac{\log(e^{2\alpha s} + \varrho)}{2\alpha}, \gamma_1(s)\right) - e^{\alpha s} Z(s, \gamma_1(s)) \right] ds, \\
 \zeta_k^{(3)} &:= 4 \int_a^{b_1} (\alpha - \partial_1) h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) Z(s, \gamma_{1,2}(s)) ds \\
 &\quad - \text{l.i.m.}_{\varrho \rightarrow 0} \frac{4}{\varrho} \int_a^{b_1} e^{\alpha s} (\alpha - \partial_1) h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) \\
 &\quad \times \left[(e^{2\alpha s} + \varrho)^{1/2} Z\left(\frac{\log(e^{2\alpha s} + \varrho)}{2\alpha}, \gamma_{1,2}(s)\right) - e^{\alpha s} Z(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] ds,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_k^{(4)} &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4}{\delta} \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} e^{\beta t} (\beta + \partial_2) h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \\
&\quad \times \left[(e^{2\beta t} + \delta)^{1/2} Z\left(\gamma_2^{-1}(t), \frac{\log(e^{2\beta t} + \delta)}{2\beta}\right) - e^{\beta t} Z(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] dt, \\
\zeta_k^{(5)} &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4}{\delta} \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} e^{\beta t} (\beta + \partial_2) h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \\
&\quad \times \left[(e^{2\beta t} + \delta)^{1/2} Z\left(\gamma_{1,2}^{-1}(t), \frac{\log(e^{2\beta t} + \delta)}{2\beta}\right) - e^{\beta t} Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] dt, \\
\zeta_k^{(6)} &:= \lim_{\varrho, \delta \rightarrow 0} \frac{4}{\varrho \delta} \iint_G e^{\alpha s + \beta t} (\alpha + \partial_1)(\beta + \partial_2) h_k(s, t) \left[e^{\alpha s + \beta t} Z(s, t) \right. \\
&\quad \left. - (e^{2\alpha s} + \varrho)^{1/2} e^{\beta t} Z\left(\frac{\log(e^{2\alpha s} + \varrho)}{2\alpha}, t\right) - e^{\alpha s} (e^{2\beta t} + \delta)^{1/2} Z\left(s, \frac{\log(e^{2\beta t} + \delta)}{2\beta}\right) \right. \\
&\quad \left. + (e^{2\alpha s} + \varrho)^{1/2} (e^{2\beta t} + \delta)^{1/2} Z\left(\frac{\log(e^{2\alpha s} + \varrho)}{2\alpha}, \frac{\log(e^{2\beta t} + \delta)}{2\beta}\right) \right] ds dt,
\end{aligned}$$

amelyből már (1.17) azonnal következik. $\square$

Végezetül tekintsük a $Z(s, t) := m_1 h_1(s, t) + \dots + m_p h_p(s, t) + X(s, t)$, $(s, t) \in \mathbb{R}_+$, véletlen mezőt, ahol $\{X(s, t) : s, t \geq 0\}$ az (1.2) által definiált nulla kezdeti értékű OU mező. Az $\alpha \neq 0$ és $\beta \neq 0$ esetben az $\{X(s, t) : s, t \geq 0\}$ mező nem más, mint egy nulla várható értékű Gauss-folyamat

$$EX(s_1, t_1)X(s_2, t_2) = \frac{\sigma^2}{4\alpha\beta} \left(e^{-\alpha|s_1-s_2|} - e^{-\alpha(s_1+s_2)} \right) \left(e^{-\beta|t_1-t_2|} - e^{-\beta(t_1+t_2)} \right)$$

kovariancia struktúrával. Így például az $\alpha > 0$, $\beta > 0$ paraméterű nemstacionárius OU mező felírható az alábbi

$$X(s, t) = \frac{\sigma}{2\sqrt{\alpha\beta}} e^{-\alpha s - \beta t} W(e^{2\alpha s} - 1, e^{2\beta t} - 1), \quad s, t \geq 0, \quad (1.22)$$

alakban. A stacionárius esethez hasonlóan az 1.3. Tételt alkalmazva a

$$g_k(u, v) = \frac{2\sqrt{\alpha\beta(u+1)(v+1)}}{\sigma} h_k\left(\frac{\log(u+1)}{2\alpha}, \frac{\log(v+1)}{2\beta}\right) \quad (1.23)$$

függvényekre, valamint a $\widehat{\Gamma} := \widehat{\Gamma}_{1,2} \cup \widehat{\Gamma}_1 \cup \widehat{\Gamma}_2 \cup \widehat{\Gamma}_0$ zárt görbe által határolt $\widehat{G}$

tartományra, ahol

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}_{1,2} &:= \left\{ (u, \widehat{\gamma}_{1,2}(u)) : u \in [e^{2\alpha a} - 1, e^{2\alpha b_1} - 1] \right\}, \\ \widehat{\Gamma}_1 &:= \left\{ (u, \widehat{\gamma}_1(u)) : u \in [e^{2\alpha b_1} - 1, e^{2\alpha c} - 1] \right\}, \\ \widehat{\Gamma}_2 &:= \left\{ (u, \widehat{\gamma}_2(u)) : u \in [e^{2\alpha a} - 1, e^{2\alpha b_2} - 1] \right\}, \\ \widehat{\Gamma}_0 &:= \left\{ (u, \widehat{\gamma}_0(u)) : u \in [e^{2\alpha b_2} - 1, e^{2\alpha c} - 1] \right\},\end{aligned}$$

továbbá

$$\widehat{\gamma}_j(u) := \exp \left(2\beta \gamma_j \left(\log(u+1)/2\alpha \right) \right) - 1, \quad j \in \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{0\}\},$$

a következő eredményt kapjuk.

1.11. TÉTEL. Ha $\alpha \neq 0$ és $\beta \neq 0$, $h_1, \dots, h_p$ kétszer folytonosan differenciálható a G tartomány belsejében és a $\partial_1 h_i$, $\partial_2 h_i$ és $\partial_1 \partial_2 h_i$, $i = 1, \dots, p$, parciális deriváltak folytonosan kiterjeszthetők G -re, akkor a Z , illetve X véletlen mezők által a $C(G)$ téren generált P_Z és P_X valószínűségi mértékek ekvivalensek és a P_Z mértéknek a P_X mértékre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltja

$$\frac{dP_Z}{dP_X}(Z) = \exp \left\{ -\frac{\alpha\beta}{2\sigma^2} (\mathbf{m}^\top A \mathbf{m} - 2\zeta^\top \mathbf{m}) \right\},$$

ahol $A := (A_{k,\ell})_{k,\ell=1}^p$, $\mathbf{m} := (m_1, \dots, m_p)^\top$ és $\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_p)^\top$,

$$\begin{aligned}A_{k,\ell} &:= \coth(\alpha a) \coth(\beta \gamma_2(a)) h_k(a, \gamma_2(a)) h_\ell(a, \gamma_2(a)) \\ &+ h_k(c, \gamma_1(c)) h_\ell(c, \gamma_1(c)) + \coth(\beta \gamma_1(b_1)) h_k(b_1, \gamma_1(b_1)) h_\ell(b_1, \gamma_1(b_1)) \\ &+ \coth(\alpha b_2) h_k(b_2, \gamma_2(b_2)) h_\ell(b_2, \gamma_2(b_2)) \\ &+ \int_a^{b_1} \coth(\beta \gamma_{1,2}(s)) \left[\alpha h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) \right. \\ &\quad \left. + \alpha^{-1} \partial_1 h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) \partial_1 h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] ds \\ &+ \int_{b_1}^c \coth(\beta \gamma_1(s)) \left[\alpha h_k(s, \gamma_1(s)) + \partial_1 h_k(s, \gamma_1(s)) \right] \\ &\quad \times \left[h_\ell(s, \gamma_1(s)) + \alpha^{-1} \partial_1 h_\ell(s, \gamma_1(s)) \right] ds\end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^{b_2} \left[\alpha \coth(\alpha s) h_k(s, \gamma_2(s)) - \partial_1 h_k(s, \gamma_2(s)) \right] \\
& \quad \times \left[\coth(\alpha s) h_\ell(s, \gamma_2(s)) - \alpha^{-1} \partial_1 h_\ell(s, \gamma_2(s)) \right] ds \\
& + \int_{b_2}^c \left[\alpha h_k(s, \gamma_0(s)) h_\ell(s, \gamma_0(s)) + \alpha^{-1} \partial_1 h_k(s, \gamma_0(s)) \partial_1 h_\ell(s, \gamma_0(s)) \right] ds \\
& + \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \coth(\alpha \gamma_{1,2}^{-1}(t)) \left[\beta \coth(\beta t) h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) - \partial_2 h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] \\
& \quad \times \left[\coth(\beta t) h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) - \beta^{-1} \partial_2 h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] dt \\
& + \int_{\gamma_1(b_1)}^{\gamma_1(c)} \left[\beta h_k(\gamma_1^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_1^{-1}(t), t) + \beta^{-1} \partial_2 h_k(\gamma_1^{-1}(t), t) \partial_2 h_\ell(\gamma_1^{-1}(t), t) \right] dt \\
& + \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \coth(\alpha \gamma_2^{-1}(t)) \left[\beta h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) \right. \\
& \quad \left. + \beta^{-1} \partial_2 h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \partial_2 h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] dt \\
& + \int_{\gamma_0(c)}^{\gamma_0(b_2)} \left[\beta h_k(\gamma_0^{-1}(t), t) + \partial_2 h_k(\gamma_0^{-1}(t), t) \right] \left[h_\ell(\gamma_0^{-1}(t), t) + \beta^{-1} \partial_2 h_\ell(\gamma_0^{-1}(t), t) \right] dt \\
& + \iint_G \left[\alpha \beta h_k(s, t) h_\ell(s, t) + \alpha^{-1} \beta \partial_1 h_k(s, t) \partial_1 h_\ell(s, t) \right. \\
& \quad \left. + \alpha \beta^{-1} \partial_2 h_k(s, t) \partial_2 h_\ell(s, t) + \alpha^{-1} \beta^{-1} \partial_1 \partial_2 h_k(s, t) \partial_1 \partial_2 h_\ell(s, t) \right] ds dt
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\zeta_k &:= \left[1 + \coth(\alpha b_1) \right] \left[1 + \coth(\beta \gamma_1(b_1)) \right] h_k(b_1, \gamma_1(b_1)) Z(b_1, \gamma_1(b_1)) \quad (1.25) \\
& + \int_{b_1}^c \left[1 + \coth(\beta \gamma_1(s)) \right] \left[\alpha h_k(s, \gamma_1(s)) + \partial_1 h_k(s, \gamma_1(s)) \right] \\
& \quad \times \left[Z(s, \gamma_1(s)) ds + \alpha^{-1} Z(ds, \gamma_1(s)) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^{b_1} \left[1 + \coth(\beta \gamma_{1,2}(s)) \right] \left[\alpha \coth(\alpha s) h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) - \partial_1 h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] \\
& \quad \times \left[\coth(\alpha s) Z(s, \gamma_{1,2}(s)) ds - \alpha^{-1} Z(ds, \gamma_{1,2}(s)) \right] \\
& + \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \left[1 + \coth(\alpha \gamma_2^{-1}(t)) \right] \left[\beta h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) + \partial_2 h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] \\
& \quad \times \left[Z(\gamma_2^{-1}(t), t) dt + \beta^{-1} Z(\gamma_2^{-1}(t), dt) \right] \\
& + \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \left[1 + \coth(\alpha \gamma_{1,2}^{-1}(t)) \right] \left[\beta h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) + \partial_2 h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] \\
& \quad \times \left[Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) dt + \beta^{-1} Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), dt) \right] \\
& + \iint_G \left[\alpha \beta h_k(s, t) + \beta \partial_1 h_k(s, t) + \alpha \partial_2 h_k(s, t) + \partial_1 \partial_2 h_k(s, t) \right] \\
& \quad \times \left[Z(s, t) ds dt + \alpha^{-1} Z(ds, t) dt + \beta^{-1} Z(s, dt) ds + \alpha^{-1} \beta^{-1} Z(ds, dt) \right].
\end{aligned}$$

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor az $\mathbf{m}$ paramétervektornak a $\{Z(s, t) : (s, t) \in G\}$ megfigyelésén alapuló ML becslése $\hat{\mathbf{m}} = A^{-1}\zeta$ alakú és p -dimenziós normális eloszlású $\mathbf{m}$ várható érték vektorral és A^{-1} kovariancia mátrixszal.

BIZONYÍTÁS. Az egyszerűség kedvéért az állítást csak az $\alpha > 0$, $\beta > 0$ esetben igazoljuk. A bizonyítás menete hasonló az 1.10. Tétel bizonyításához, csak itt a nemstacionárius OU mezőnek az (1.22) által meghatározott alakját és az 1.3. Tételt alkalmazzuk a $\hat{G}$ tartományon megfigyelt

$$\begin{aligned}
Y(u, v) &:= \frac{2\sqrt{\alpha\beta(u+1)(v+1)}}{\sigma} Z\left(\frac{\log(u+1)}{2\alpha}, \frac{\log(v+1)}{2\beta}\right) \\
&= m_1 g_1(u, v) + \dots + m_p g_p(u, v) + W(u, v)
\end{aligned}$$

véletlen mezőre, ahol g_k az (1.23) által definiált függvényt jelöli. Ekkor

$$\begin{aligned}
\partial_1 g_k(u, v) &= \frac{\sqrt{\beta(v+1)}}{\sigma \sqrt{\alpha(u+1)}} (\alpha + \partial_1) h_k\left(\frac{\log(u+1)}{2\alpha}, \frac{\log(v+1)}{2\beta}\right), \\
\partial_2 g_k(u, v) &= \frac{\sqrt{\alpha(u+1)}}{\sigma \sqrt{\beta(v+1)}} (\beta + \partial_2) h_k\left(\frac{\log(u+1)}{2\alpha}, \frac{\log(v+1)}{2\beta}\right),
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\partial_1 \partial_2 g_k(u, v) = \frac{1}{2\sigma \sqrt{\alpha\beta(u+1)(v+1)}} \times (\alpha + \partial_1)(\beta + \partial_2) h_k\left(\frac{\log(u+1)}{2\alpha}, \frac{\log(v+1)}{2\beta}\right),$$

így

$$\begin{aligned} A_{k,\ell} = & 4 \frac{e^{2\alpha b_1}}{e^{2\alpha b_1} - 1} \frac{e^{2\beta \gamma_{1,2}(b_1)}}{e^{2\beta \gamma_{1,2}(b_1)} - 1} h_k(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) h_\ell(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) \\ & + 2 \int_a^{b_1} \frac{e^{2\beta \gamma_{1,2}(s)}}{e^{2\beta \gamma_{1,2}(s)} - 1} \left[(\alpha \coth(\alpha s) - \partial_1) h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] \\ & \quad \times \left[(\coth(\alpha s) - \alpha^{-1} \partial_1) h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] ds \\ & + 2 \int_{b_1}^c \frac{e^{2\beta \gamma_1(s)}}{e^{2\beta \gamma_1(s)} - 1} \left[(\alpha + \partial_1) h_k(s, \gamma_1(s)) \right] \left[(1 + \alpha^{-1} \partial_1) h_\ell(s, \gamma_1(s)) \right] ds \\ & + 2 \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \frac{e^{2\alpha \gamma_2^{-1}(t)}}{e^{2\alpha \gamma_2^{-1}(t)} - 1} \left[(\beta + \partial_2) h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] \left[(1 + \beta^{-1} \partial_2) h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] dt \\ & + 2 \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \frac{e^{2\alpha \gamma_{1,2}^{-1}(t)}}{e^{2\alpha \gamma_{1,2}^{-1}(t)} - 1} \left[(\beta + \partial_2) h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] \left[(1 + \beta^{-1} \partial_2) h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] dt \\ & + \iint_G \left[(\alpha + \partial_1)(\beta + \partial_2) h_k(s, t) \right] \left[(1 + \alpha^{-1} \partial_1)(1 + \beta^{-1} \partial_2) h_\ell(s, t) \right] ds dt. \end{aligned}$$

A $\gamma_{1,2}$, γ_1 , γ_2 és γ_0 görbék tartalmazó tagok összerendezése után, valamint az 1.10. Tétel bizonyításában meghatározott (1.19)-(1.21) eredményeket felhasználva kapjuk, hogy

$$A_{k,\ell} = A_{k,\ell}^{(1)} + A_{k,\ell}^{(2)} + A_{k,\ell}^{(3)} + A_{k,\ell}^{(4)} + A_{k,\ell}^{(5)},$$

ahol

$$\begin{aligned} A_{k,\ell}^{(1)} := & \frac{1}{2} h_k(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) h_\ell(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) - \frac{1}{2} h_k(a, \gamma_{1,2}(a)) h_\ell(a, \gamma_{1,2}(a)) \\ & + \coth(\alpha a) \coth(\beta \gamma_{1,2}(a)) h_k(a, \gamma_{1,2}(a)) h_\ell(a, \gamma_{1,2}(a)) \\ & + \coth(\beta \gamma_{1,2}(b_1)) h_k(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) h_\ell(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) \\ & + \coth(\alpha a) h_k(a, \gamma_{1,2}(a)) h_\ell(a, \gamma_{1,2}(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^{b_1} \coth(\beta \gamma_{1,2}(s)) \left[\alpha h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) \right. \\
& \quad \left. + \alpha^{-1} \partial_1 h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) \partial_1 h_\ell(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] ds \\
& + \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \coth(\alpha \gamma_{1,2}^{-1}(t)) \left[(\beta \coth(\beta t) - \partial_2) h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] \\
& \quad \times \left[(\coth(\beta t) - \beta^{-1} \partial_2) h_\ell(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] dt, \\
A_{k,\ell}^{(2)} &:= \frac{1}{2} h_k(c, \gamma_1(c)) h_\ell(c, \gamma_1(c)) - \frac{1}{2} h_k(b_1, \gamma_1(b_1)) h_\ell(b_1, \gamma_1(b_1)) \\
& + \int_{b_1}^c \coth(\beta \gamma_1(s)) \left[(\alpha + \partial_1) h_k(s, \gamma_1(s)) \right] \left[(1 + \alpha^{-1} \partial_1) h_\ell(s, \gamma_1(s)) \right] ds \\
& + \int_{\gamma_1(b_1)}^{\gamma_1(c)} \left[\beta h_k(\gamma_1^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_1^{-1}(t), t) + \beta^{-1} \partial_2 h_k(\gamma_1^{-1}(t), t) \partial_2 h_\ell(\gamma_1^{-1}(t), t) \right] dt, \\
A_{k,\ell}^{(3)} &:= \frac{1}{2} h_k(b_2, \gamma_2(b_2)) h_\ell(b_2, \gamma_2(b_2)) - \frac{1}{2} h_k(a, \gamma_2(a)) h_\ell(a, \gamma_2(a)) \\
& + \coth(\alpha b_2) h_k(b_2, \gamma_2(b_2)) h_\ell(b_2, \gamma_2(b_2)) - \coth(\alpha a) h_k(a, \gamma_2(a)) h_\ell(a, \gamma_2(a)) \\
& + \int_a^{b_2} \left[(\alpha \coth(\alpha s) - \partial_1) h_k(s, \gamma_2(s)) \right] \left[(\coth(\alpha s) - \alpha^{-1} \partial_1) h_\ell(s, \gamma_2(s)) \right] ds \\
& + \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \coth(\alpha \gamma_2^{-1}(t)) \left[\beta h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) \right. \\
& \quad \left. + \beta^{-1} \partial_2 h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \partial_2 h_\ell(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] dt, \\
A_{k,\ell}^{(4)} &:= \frac{1}{2} h_k(c, \gamma_0(c)) h_\ell(c, \gamma_0(c)) - \frac{1}{2} h_k(b_2, \gamma_0(b_2)) h_\ell(b_2, \gamma_0(b_2)) \\
& + \int_{b_2}^c \left[\alpha h_k(s, \gamma_0(s)) h_\ell(s, \gamma_0(s)) + \alpha^{-1} \partial_1 h_k(s, \gamma_0(s)) \partial_1 h_\ell(s, \gamma_0(s)) \right] ds \\
& + \int_{\gamma_0(b_2)}^{\gamma_0(c)} \left[(\beta + \partial_2) h_k(\gamma_0^{-1}(t), t) \right] \left[(1 + \beta^{-1} \partial_2) h_\ell(\gamma_0^{-1}(t), t) \right] dt,
\end{aligned}$$

$$A_{k,\ell}^{(5)} := \iint_G [\alpha \beta h_k(s, t) h_\ell(s, t) + \alpha^{-1} \beta \partial_1 h_k(s, t) \partial_1 h_\ell(s, t) + \alpha \beta^{-1} \partial_2 h_k(s, t) \partial_2 h_\ell(s, t) + \alpha^{-1} \beta^{-1} \partial_1 \partial_2 h_k(s, t) \partial_1 \partial_2 h_\ell(s, t)] ds dt,$$

amely éppen az (1.24) alakot adja. Végezetül, az (1.26) parciális deriváltakat, valamint az 1.2. Megjegyzésben definiált integrálokat felhasználva kapjuk, hogy

$$\zeta_k = \zeta_k^{(1)} + \zeta_k^{(2)} + \zeta_k^{(3)} + \zeta_k^{(4)} + \zeta_k^{(5)} + \zeta_k^{(6)},$$

ahol

$$\begin{aligned} \zeta_k^{(1)} &:= \frac{4e^{2\alpha b_1 + 2\beta \gamma_{1,2}(b_1)}}{(e^{2\alpha b_1} - 1)(e^{2\beta \gamma_{1,2}(b_1)} - 1)} h_k(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) Z(b_1, \gamma_{1,2}(b_1)) \\ \zeta_k^{(2)} &:= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\varrho} \int_{b_1}^c \frac{4e^{\alpha s + 2\beta \gamma_1(s)}}{e^{2\beta \gamma_1(s)} - 1} (\alpha + \partial_1) h_k(s, \gamma_1(s)) \\ &\quad \times \left[(e^{2\alpha s} + \varrho)^{1/2} Z\left(\frac{\log(e^{2\alpha s} + \varrho)}{2\alpha}, \gamma_1(s)\right) - e^{\alpha s} Z(s, \gamma_1(s)) \right] ds, \\ \zeta_k^{(3)} &:= \int_a^{b_1} \frac{4e^{2\alpha s + 2\beta \gamma_{1,2}(s)}}{(e^{2\alpha s} - 1)(e^{2\beta \gamma_{1,2}(s)} - 1)} (\alpha \coth(\alpha s) - \partial_1) h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) Z(s, \gamma_{1,2}(s)) ds \\ &\quad - \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\varrho} \int_a^{b_1} \frac{4e^{\alpha s + 2\beta \gamma_{1,2}(s)}}{e^{2\beta \gamma_{1,2}(s)} - 1} (\alpha \coth(\alpha s) - \partial_1) h_k(s, \gamma_{1,2}(s)) \\ &\quad \times \left[(e^{2\alpha s} + \varrho)^{1/2} Z\left(\frac{\log(e^{2\alpha s} + \varrho)}{2\alpha}, \gamma_{1,2}(s)\right) - e^{\alpha s} Z(s, \gamma_{1,2}(s)) \right] ds, \\ \zeta_k^{(4)} &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_2(a)}^{\gamma_2(b_2)} \frac{4e^{\beta t + 2\alpha \gamma_2^{-1}(t)}}{e^{2\alpha \gamma_2^{-1}(t)} - 1} (\beta + \partial_2) h_k(\gamma_2^{-1}(t), t) \\ &\quad \times \left[(e^{2\beta t} + \delta)^{1/2} Z\left(\gamma_2^{-1}(t), \frac{\log(e^{2\beta t} + \delta)}{2\beta}\right) - e^{\beta t} Z(\gamma_2^{-1}(t), t) \right] dt, \\ \zeta_k^{(5)} &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_{1,2}(b_1)}^{\gamma_{1,2}(a)} \frac{4e^{\beta t + 2\alpha \gamma_{1,2}^{-1}(t)}}{e^{2\alpha \gamma_{1,2}^{-1}(t)} - 1} (\beta + \partial_2) h_k(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \\ &\quad \times \left[(e^{2\beta t} + \delta)^{1/2} Z\left(\gamma_{1,2}^{-1}(t), \frac{\log(e^{2\beta t} + \delta)}{2\beta}\right) - e^{\beta t} Z(\gamma_{1,2}^{-1}(t), t) \right] dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_k^{(6)} := \text{l.i.m.}_{\varrho, \delta \rightarrow 0} \frac{4}{\varrho \delta} \iint_G e^{\alpha s + \beta t} (\alpha + \partial_1)(\beta + \partial_2) h_k(s, t) & \left[e^{\alpha s + \beta t} Z(s, t) \right. \\ & - (e^{2\alpha s} + \varrho)^{1/2} e^{\beta t} Z\left(\frac{\log(e^{2\alpha s} + \varrho)}{2\alpha}, t\right) - e^{\alpha s} (e^{2\beta t} + \delta)^{1/2} Z\left(s, \frac{\log(e^{2\beta t} + \delta)}{2\beta}\right) \\ & \left. + (e^{2\alpha s} + \varrho)^{1/2} (e^{2\beta t} + \delta)^{1/2} Z\left(\frac{\log(e^{2\alpha s} + \varrho)}{2\alpha}, \frac{\log(e^{2\beta t} + \delta)}{2\beta}\right) \right] ds dt, \end{aligned}$$

ebből pedig már a kívánt (1.25) alak adódik. $\square$

1.4. Szimulációs eredmények

Ezen fejezet célja, hogy a korábban Arató, N. M (1997a), valamint Baran, Pap és Zuiljen (2003, 2004, 2011) által igazolt elméleti eredményeket, illetve az előző fejezetben kimondott 1.3., 1.10., 1.11. Tételeket Matlab segítségével megvalósított szimulációkkal szemléltessük. Ha nem csak az egyes pontokban felvett értékekre, hanem a trajektóriákra vagyunk kíváncsiak, a Gauss véletlen mezők szimulációját általában azok Karhunen-Loève közelítésének segítségével hajtják végre. Speciálisan, a $W(s, t)$, $0 \leq s \leq S$, $0 \leq t \leq T$, Wiener mező esetén ez az alábbi

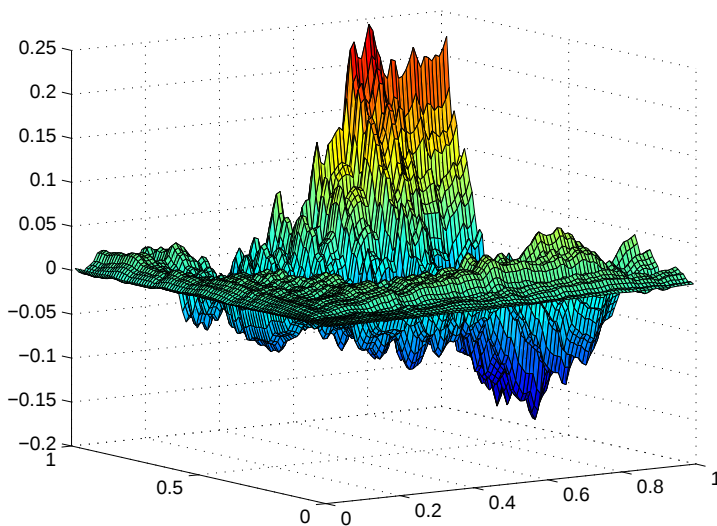
$$W(s, t) \approx \sum_{j,k=1}^n \omega_{j,k} \frac{8\sqrt{ST}}{\pi^2(2k-1)(2j-1)} \sin\left(\frac{\pi(2j-1)t}{2T}\right) \sin\left(\frac{\pi(2k-1)s}{2S}\right) \quad (1.27)$$

approximációt jelenti, ahol $\{\omega_{j,k} : 1 \leq j, k \leq n\}$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók halmaza (Deheuvels et al., 2006). Az 1.3. ábra a Wiener mező szimulációjára mutat példát $n = 150$ választása esetén.

Az $\tilde{X}(s, t)$ és $X(s, t)$, $0 \leq s \leq S$, $0 \leq t \leq T$, stacionárius és nulla kezdeti értékű OU mező közelítéseit az (1.27) által definiált approximációból kapjuk az (1.14) és (1.22) transzformációk segítségével (Jaimez és Bonnet, 1987). Ekkor

$$\begin{aligned} \tilde{X}(s, t) & \approx \sum_{j,k=1}^n \omega_{j,k} \frac{4\sigma e^{\alpha(S-s)+\beta(T-t)}}{\pi^2 \sqrt{\alpha\beta} (2k-1)(2j-1)} \sin\left(\frac{\pi(2j-1)e^{2\beta(t-T)}}{2}\right) \\ & \quad \times \sin\left(\frac{\pi(2k-1)e^{2\alpha(s-S)}}{2}\right), \\ X(s, t) & \approx \sum_{j,k=1}^n \omega_{j,k} \frac{4\sigma \sqrt{(e^{2\alpha S} - 1)(e^{2\beta T} - 1)}}{\pi^2 e^{\alpha s + \beta t} \sqrt{\alpha\beta} (2k-1)(2j-1)} \sin\left(\frac{\pi(2j-1)(e^{2\beta t} - 1)}{2(e^{2\beta T} - 1)}\right) \\ & \quad \times \sin\left(\frac{\pi(2k-1)(e^{2\alpha s} - 1)}{2(e^{2\alpha S} - 1)}\right). \end{aligned}$$

Minden egyes példa esetén 1000 független mintából készítettük el a meghajtó

1.3. ábra. Wiener mező szimulációja $n = 150$ esetén.

Gauss mezőket $25 \leq n \leq 100$ választásokkal és ezek segítségével a különböző véletlen mezők esetén meghatároztuk a becült paraméterek, illetve paramétervektorok várható értékeit, valamint az (1.6), (1.7), (1.10), (1.17), illetve (1.25) által definiált ζ változó empirikus szórásnégyzeteit, illetve kovariancia mátrixait.

1.12. PÉLDA. Tekintsük a

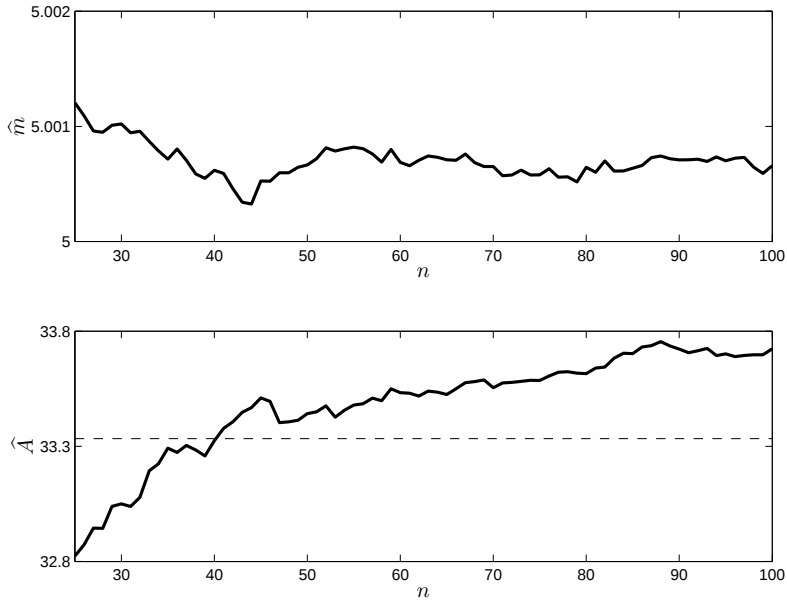
$$Z(s, t) = W(s, t) + m(s^2 + t^2),$$

modellt, ahol $W(s, t)$, $(s, t) \in G = [1, 3]^2$, egy standard Wiener mező. Ekkor az (1.5) alapján az A együttható

$$A = \frac{4b_2^3 - b_1^3}{3a_1} + \frac{4a_2^3 - a_1^3}{3b_1} + 2a_1b_1,$$

a

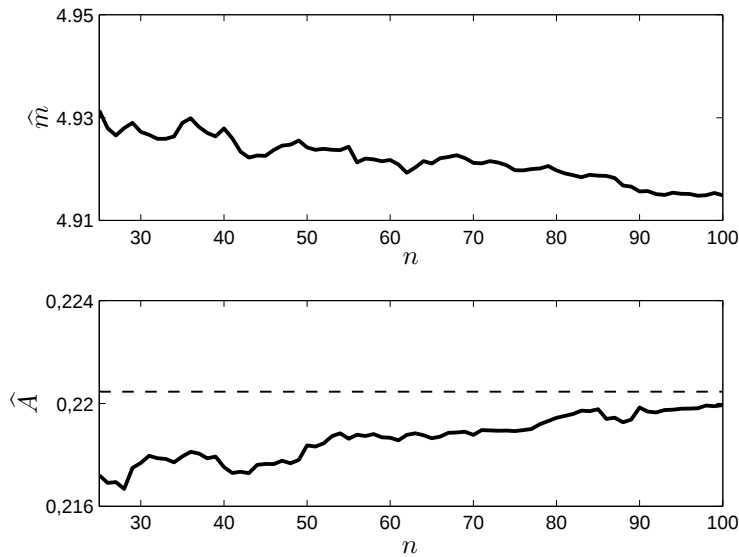
$$\zeta = \frac{(a_1^2 + b_1^2)Z(a_1, b_1)}{a_1b_1} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{2u}{b_1} Z(du, b_1) + \int_{b_1}^{b_2} \frac{2v}{a_1} Z(a_1, dv)$$



1.4. ábra. Az 1.12. példabeli m becslésének várható értékei és a ζ becsült szórásnégyzetei $25 \leq n \leq 100$ esetén.

közelítésére pedig teljesen

$$\begin{aligned}
 \zeta - mA &\approx \sum_{j,k=1}^n \omega_{j,k} \frac{8\sqrt{ST}}{(\pi^2)(2k-1)(2j-1)} \\
 &\times \left\{ \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1 b_1} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)a_1}{2S}\right) \sin\left(\frac{\pi(2j-1)b_1}{2T}\right) + \frac{2}{b_1} \sin\left(\frac{\pi(2j-1)b_1}{2T}\right) \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{2S}{\pi(2k-1)} \left(\cos\left(\frac{\pi(2k-1)a_2}{2S}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2k-1)a_1}{2S}\right) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + a_2 \sin\left(\frac{\pi(2k-1)a_2}{2S}\right) - a_1 \sin\left(\frac{\pi(2k-1)a_1}{2S}\right) \right] + \frac{2}{a_1} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)a_1}{2S}\right) \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{2T}{\pi(2j-1)} \left(\cos\left(\frac{\pi(2j-1)b_2}{2T}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2j-1)b_1}{2T}\right) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + b_2 \sin\left(\frac{\pi(2j-1)b_2}{2T}\right) - b_1 \sin\left(\frac{\pi(2j-1)b_1}{2T}\right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$



1.5. ábra. Az 1.13. példabeli m becslésének várható értékei és a ζ becslült szórásnégyzetei $25 \leq n \leq 100$ esetén.

Az elméleti paraméter értéke $m = 5$, míg $A = 33.3333$. Az 1.4. ábrán látható az $\hat{m}$ paraméterbecslés várható értékeinek és ζ becslült szórásnégyzeteinek alakulása az (1.27) közelítésben szereplő n változásának függvényében. Például az általunk tekintett maximális $n = 100$ esetén az $\hat{m} = 5.0007$ és $\hat{A} = 33.7233$ értékek adódnak.

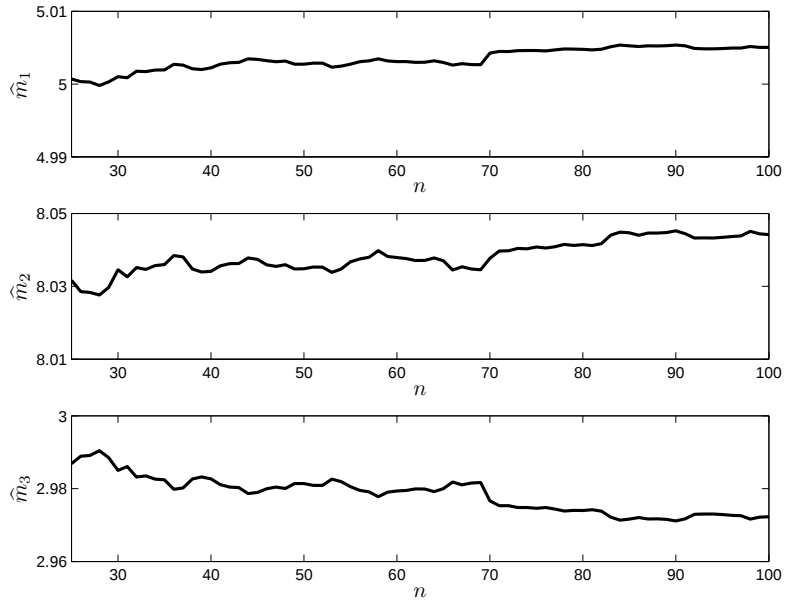
1.13. PÉLDA. Tekintsük a

$$Z(s, t) = W(s, t) + m,$$

modellt, ahol $W(s, t)$, $(s, t) \in G$, egy standard Wiener mező, G pedig az (1.4) által definiált tartomány (lásd Arató, N. M (1997a); Baran, Pap és Zuijlen (2004)), melynél Γ egy origó középpontú körvonal része, azaz $\gamma(s) = \sqrt{r^2 - s^2}$ valamilyen adott $r > 0$ sugárral, valamint $[a, b] \subset (0, r)$ (Baran, Pap és Zuijlen, 2004, Example 1.2). Ekkor

$$A = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} + \frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}} \right), \quad c_1 = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^2 a}, \quad c_2 = \frac{b}{r^2 \sqrt{r^2 - b^2}},$$

$$y_1(s, \sqrt{r^2 - s^2}) \equiv 0, \quad y_2(s, \sqrt{r^2 - s^2}) \equiv -\frac{1}{r^2},$$

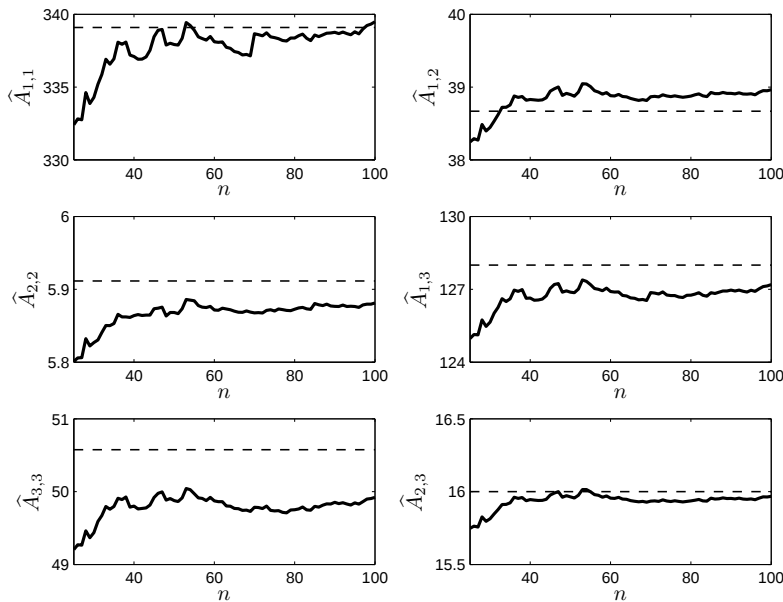


1.6. ábra. Az 1.14. példabeli $\mathbf{m}$ paramétervektor komponenseinek becsült várható értékei $25 \leq n \leq 100$ esetén.

az (1.7) által definiált ζ közelítésére pedig teljesül

$$\begin{aligned}
 \zeta - mA &\approx \sum_{j,k=1}^n \omega_{j,k} \frac{8\sqrt{ST}}{\pi^2 r^2 (2k-1)(2j-1)} \\
 &\times \left\{ \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)a}{2S}\right) \sin\left(\frac{\pi(2j-1)\sqrt{r^2 - a^2}}{2T}\right) \right. \\
 &+ \frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)b}{2S}\right) \sin\left(\frac{\pi(2j-1)\sqrt{r^2 - b^2}}{2T}\right) \\
 &- \int_a^b \left\{ \frac{\pi(2k-1)s}{2S\sqrt{r^2 - s^2}} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)s}{2S}\right) \sin\left(\frac{\pi(2j-1)\sqrt{r^2 - s^2}}{2T}\right) \right. \\
 &\left. \left. + \frac{\pi(2j-1)}{2T} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)s}{2S}\right) \cos\left(\frac{\pi(2j-1)\sqrt{r^2 - s^2}}{2T}\right) \right\} ds \right\}.
 \end{aligned}$$

Legyen az eltolásparaméter értéke az előző példához hasonlóan $m = 5$, továbbá $a = 1$, $b = 3$ és $r = 5$ választás esetén $A = 0.2205$. Az 1.5. ábrán látható az $\hat{m}$



1.7. ábra. Az 1.14. példabeli ζ becsült kovarianciái $25 \leq n \leq 100$ esetén.

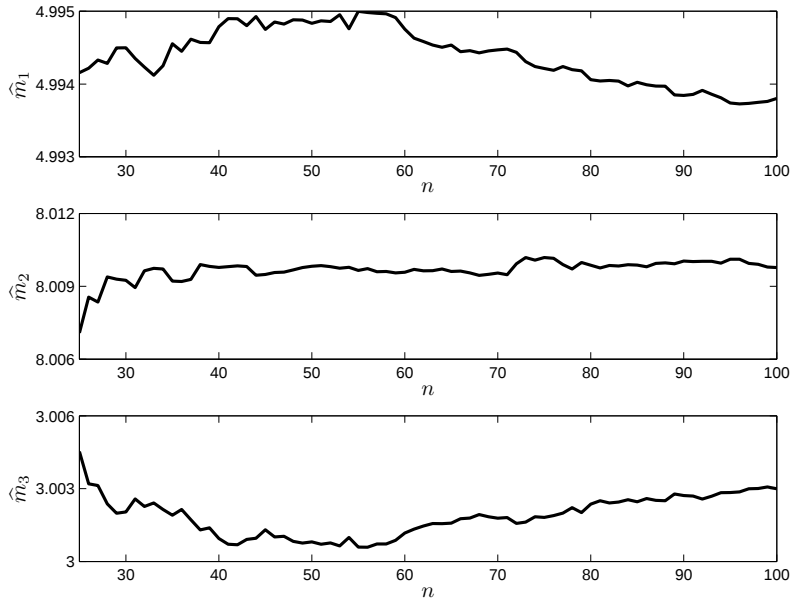
paraméterbecslés várható értékeinek és ζ becsült szórásnégyzeteinek alakulása az (1.27) közelítésben szereplő n változásának függvényében. Ekkor $n = 100$ esetén $\hat{m} = 4.9357$ és $\hat{A} = 0.2213$.

1.14. PÉLDA. Vizsgáljuk meg az 1.6. példában már tárgyalt

$$Z(s, t) = m_1(s^2 + t^2) + m_2(s + t) + m_3(s \cdot t) + W(s, t), \quad (s, t) \in G,$$

modellt, ahol $W(s, t)$, $(s, t) \in [0, 8]^2$, egy standard Wiener mező, G pedig egy $(6, 6)$ középpontú, $r = 2$ sugarú kör. Ekkor az (1.11) által meghatározott A mátrix elemeit, valamint az (1.12) által definiált $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^\top$ komponenseinek közelítését a Matlab programcsomagba beépített (rekurzív Simpson kvadratúrákon alapuló) *quad* függvény segítségével numerikus integrálok által határoztuk meg. Az általunk választott elméleti paraméterértékek $m_1 = 5$, $m_2 = 8$ és $m_3 = 3$, valamint a ζ elméleti kovariancia mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 339.0895 & 38.6688 & 128.0000 \\ 38.6688 & 5.9115 & 16.0000 \\ 128.0000 & 16.0000 & 50.5752 \end{pmatrix}.$$



1.8. ábra. Az 1.15. példabeli $\mathbf{m}$ paramétervektor komponenseinek becsült várható értékei $25 \leq n \leq 100$ esetén.

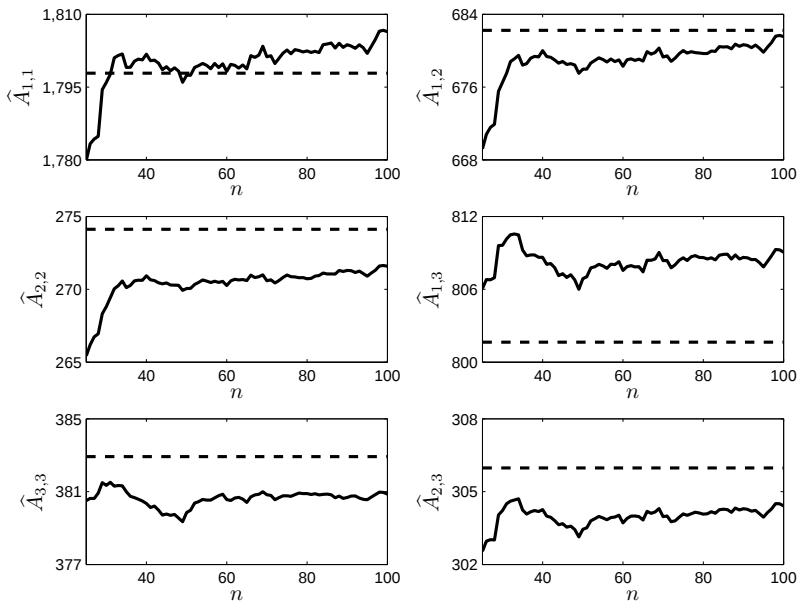
Az 1.6. ábra mutatja a három paraméter becsült várható értékeinek, az 1.7. ábra pedig a ζ becsült kovarianciáinak alakulását az (1.27) közelítésben szereplő n változásának függvényében. Ekkor $n = 100$ esetén a kapott empirikus várható érték vektor $(5.0050, 8.0442, 2.9723)^\top$, az empirikus kovariancia mátrix pedig

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 339.4824 & 38.9639 & 127.1914 \\ 38.9639 & 5.8811 & 15.9680 \\ 127.1914 & 15.9680 & 49.9207 \end{pmatrix}.$$

1.15. PÉLDA. Tekintsük ismételtén az 1.14. példában vizsgált modellt azzal a különbséggel, hogy meghajtó folyamatnak ebben az esetben egy stacionárius OU mezőt választunk. Ez a

$$Z(s, t) = m_1(s^2 + t^2) + m_2(s + t) + m_3(s \cdot t) + \tilde{X}(s, t), \quad (s, t) \in G,$$

modellhez vezet, ahol $\tilde{X}(s, t)$, $(s, t) \in [0, 3]^2$, egy $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\sigma = 1$ paraméterű stacionárius OU mező, G pedig $(2, 2)$ középpontú, $r = 1$ sugarú

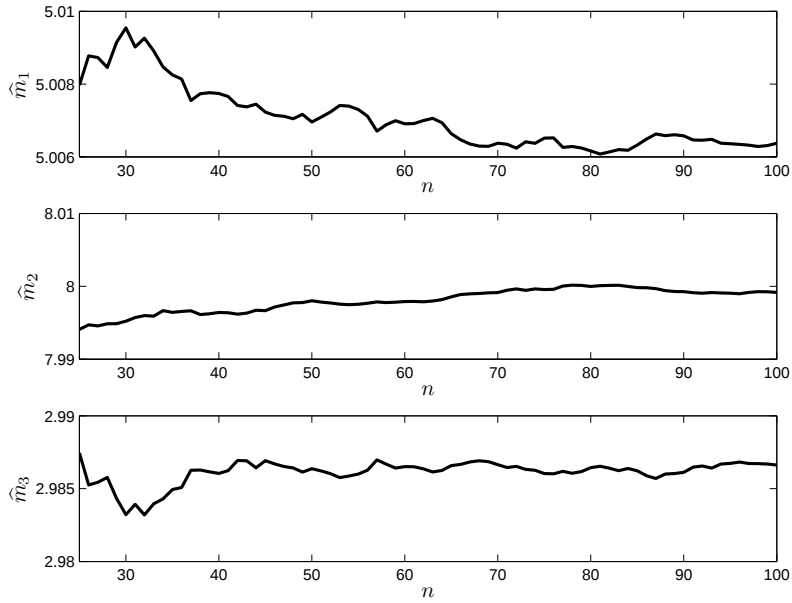


1.9. ábra. Az 1.15. példabeli ζ becsült kovarianciái $25 \leq n \leq 100$ esetén.

kör. Az 1.14. példához hasonlóan az (1.16) által meghatározott A mátrix elemeit, valamint az (1.17) által definiált $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^\top$ komponenseinek közelítését a Matlab programcsomagba beépített *quad* és *quad2d* (Shampine, 2008) függvények segítségével numerikus integrálok által határoztuk meg. Az előző példához analóg módon az elméleti paraméterek legyenek $m_1 = 5$, $m_2 = 8$ és $m_3 = 3$. Ebben az esetben a ζ elméleti kovariancia mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 1797.8554 & 682.2301 & 801.6460 \\ 682.2301 & 274.1195 & 305.9734 \\ 801.6460 & 305.9734 & 382.9247 \end{pmatrix}.$$

Az 1.8. ábra mutatja a három paraméter becsült várható értékeinek, az 1.9. ábra pedig a ζ becsült kovarianciáinak alakulását a Karhunen-Loève közelítésben szereplő n változásának függvényében. Ekkor $n = 100$ esetén a kapott empirikus várható érték vektor $(4.9938, 8.0098, 3.0030)^\top$, az empirikus kovariancia mátrix



1.10. ábra. Az 1.16. példabeli $\mathbf{m}$ paramétervektor komponenseinek becsült várható értékei $25 \leq n \leq 100$ esetén.

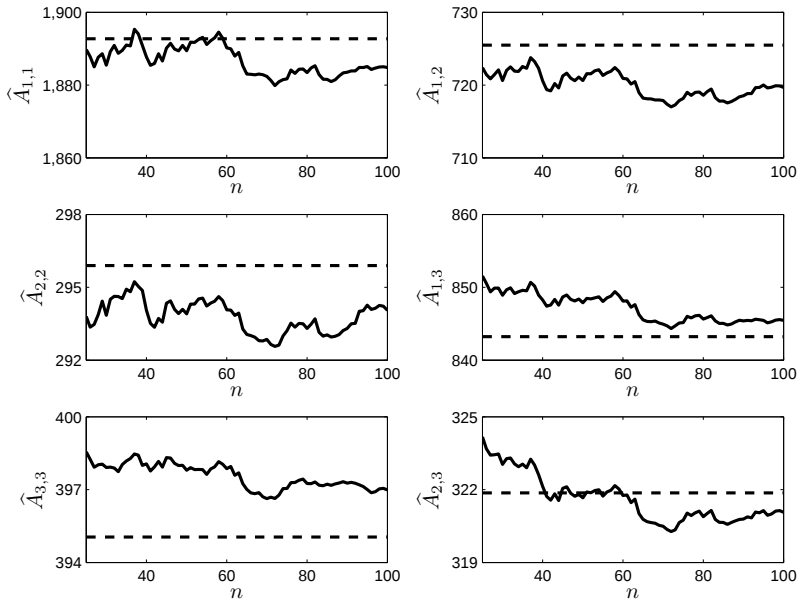
pedig

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1806.4240 & 681.5420 & 809.0529 \\ 681.5420 & 271.5779 & 304.4110 \\ 809.0529 & 304.4110 & 380.8634 \end{pmatrix}.$$

1.16. PÉLDA. Tekintsünk az előző két példához hasonló regressziós modellt azzal a különbséggel, hogy most a meghajtó folyamat legyen egy nulla kezdeti értékű OU mező. A vizsgált modell tehát

$$Z(s, t) = m_1(s^2 + t^2) + m_2(s + t) + m_3(s \cdot t) + X(s, t), \quad (s, t) \in G,$$

ahol $X(s, t)$, $(s, t) \in [0, 3]^2$, egy $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\sigma = 1$ paraméterű nulla kezdeti értékű OU mező. Az 1.15. példához hasonlóan a G megfigyelési tartomány legyen egy $(2, 2)$ középpontú, $r = 1$ sugarú kör. Az (1.24) által meghatározott A mátrix elemeit, valamint (1.25) által definiált $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^\top$ komponenseinek közelítését ebben az esetben is numerikus integrálok segítségével határoztuk meg.



1.11. ábra. Az 1.16. példabeli ζ becsült kovarianciái $25 \leq n \leq 100$ esetén.

Az elméleti paraméter értékek a korábbi két példához analóg módon legyenek $m_1 = 5$, $m_2 = 8$ és $m_3 = 3$. Ekkor a ζ kovariancia mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 1892.7035 & 725.4822 & 843.2301 \\ 725.4822 & 295.8952 & 321.8680 \\ 843.2301 & 321.8680 & 395.0477 \end{pmatrix}.$$

Az eddigiekhez hasonlóan az 1.10. ábrán megfigyelhetjük a három paraméter becsült várható értékeinek, az 1.11. ábrán pedig a ζ becsült kovarianciáinak alakulását a Karhunen-Loève közelítésben szereplő n változásának függvényében. Ekkor $n = 100$ esetén a kapott empirikus várható érték vektor $(5.0067, 7.9992, 2.9866)^\top$, a becsült kovariancia mátrix pedig

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1884.8293 & 719.6687 & 845.4606 \\ 719.6687 & 294.0491 & 321.0663 \\ 840.0300 & 321.0663 & 396.9913 \end{pmatrix}.$$

Összességében elmondható, hogy mind az öt fenti példában tekintett szimuláció során a kapott becslt értékek nagyon jól közelítik az elméleti értékeket, a becslések jó közelítését a készített ábrák is nagyon szépen szemléltetik. Azt is megfigyelhetjük, hogy a Karhunen-Loève sorfejtés n tagszáma $n \geq 25$ esetén már nincs lényeges hatással a becslések pontosságára.

2. fejezet

Optimális mintavételi elhelyezések

2.1. Bevezetés

A disszertáció második részében különböző kritériumok szerinti optimális mintavételi elhelyezések meghatározásával foglalkozunk Ornstein-Uhlenbeck (OU) mezők esetén. Az optimalitásnak többféle kritériuma van: paraméterbecslés esetén ilyen például a D-optimalitás, amikor a paraméterekre vonatkozó Fisher-féle információ-mennyiséget maximalizáljuk, előrejelzések esetén pedig az úgynevezett Integrated Mean Squared Prediction Error (IMSPE) vagy az entrópia kritérium (Baldi Antognini és Zagoraiou, 2010). A 2.3. fejezetben ismertetjük Baran és Stehlík (2014) D-optimális mintavételről kapott eredményeit abban az esetben, amikor a megfigyelések egy monoton halmazt alkotnak és ezzel párhuzamosan meghatározzuk a D-optimalitást szabályos rácson megfigyelt mintapontokra. A 2.4., illetve a 2.5. fejezetekben meghatározzuk az IMSPE kritériumot minimalizáló, illetve az entrópiát maximalizáló mintavételi elrendezéseket mindkét típusú mintarendszerre. A speciális geometriai alakzatokon végzett méréseknek számos fontos alkalmazása van különböző tudományterületekben. Erre láthatunk példát a 2.6. fejezetben, amikor egy kémiai reakció valós adatai segítségével végzünk összehasonlításokat a három kritériumot, illetve a megfigyelések két típusát alapul véve. A fejezetben leírt eredményeket a Baran, Sikolya és Stehlík (2013, 2014) cikkekben foglaltuk össze.

2.2. Statisztikai modell

Tekintsük a $\mathcal{X} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, téglalapon értelmezett

$$Y(s, t) = \theta + \varepsilon(s, t) \quad (2.1)$$

stacionárius folyamatot, ahol θ konstans, $\varepsilon(s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, pedig egy (1.1) kovariancia struktúrájú, 0 várható értékű Gauss mező. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a $\sigma := \tilde{\sigma}/(2\sqrt{\alpha\beta})$ jelölést és az (1.1) kovariancia helyett tekintsük a

$$\mathbb{E} \varepsilon(s_1, t_1) \varepsilon(s_2, t_2) = \sigma^2 \exp(-\alpha|s_2 - s_1| - \beta|t_2 - t_1|), \quad (2.2)$$

alakot, ahol a σ -t (esetleg ismert) segédparaméterként kezeljük. Az optimális mintavételi terv meghatározását mind paraméterbecslések, mind pedig előrejelzések esetén a mintapontok két különböző halmazán hajtjuk végre. A mintapontok első típusa, amikor a pontok monoton halmazt alkotnak.

2.1. DEFINÍCIÓ. *Azt mondjuk, hogy az $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n)\} \subset \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, megfigyelési halmaz teljesíti a D -(monotonitási) feltételt, ha $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ és $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.*

A D -feltételt kielégítő pontokban vett $\{Y(s_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ megfigyelések esetén a számításaink alapját Kisefák és Stehlík (2008) OU folyamatokra igazolt eredményei képezik. Jelölje $d_i := s_{i+1} - s_i$ és $\delta_i := t_{i+1} - t_i$ két szomszédos mintapont megfelelő koordinátáinak távolságát, valamint vezessük be a $\pi_i := \exp(-\alpha d_i - \beta \delta_i)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, jelölést. Könnyen látható, hogy az $\{Y(s_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ megfigyelések kovariancia mátrixa az alábbi Toeplitz típusú mátrix (lásd Kisefák és Stehlík (2008))

$$C(n, r) = \begin{bmatrix} 1 & \pi_1 & \pi_1\pi_2 & \pi_1\pi_2\pi_3 & \dots & \dots & \prod_{i=1}^{n-1} \pi_i \\ \pi_1 & 1 & \pi_2 & \pi_2\pi_3 & \dots & \dots & \prod_{i=2}^{n-1} \pi_i \\ \pi_1\pi_2 & \pi_2 & 1 & \pi_3 & \dots & \dots & \prod_{i=3}^{n-1} \pi_i \\ \pi_1\pi_2\pi_3 & \pi_2\pi_3 & \pi_3 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \pi_{n-1} \\ \prod_{i=1}^{n-1} \pi_i & \prod_{i=2}^{n-1} \pi_i & \prod_{i=3}^{n-1} \pi_i & \dots & \dots & \pi_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

ahol $r = (\alpha, \beta)^\top$ és amelynek inverze

$$C^{-1}(n, r) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\pi_1^2} & \frac{\pi_1}{\pi_1^2-1} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\pi_1}{\pi_1^2-1} & V_2 & \frac{\pi_2}{\pi_2^2-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\pi_2}{\pi_2^2-1} & V_3 & \frac{\pi_3}{\pi_3^2-1} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi_3}{\pi_3^2-1} & V_4 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & V_{n-1} & \frac{\pi_{n-1}}{\pi_{n-1}^2-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{\pi_{n-1}}{\pi_{n-1}^2-1} & \frac{1}{1-\pi_{n-1}^2} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

ahol $V_k := \frac{1-\pi_k^2\pi_{k-1}^2}{(\pi_k^2-1)(\pi_{k-1}^2-1)} = \frac{1}{1-\pi_k^2} + \frac{\pi_{k-1}^2}{1-\pi_{k-1}^2}$, $k = 2, \dots, n-1$.

Az általunk vizsgált másik mintavételi elrendezés a szabályos rács, azaz amikor az $\{(s_1, t_1), (s_1, t_2), \dots, (s_n, t_m)\} \subset \mathcal{X}$, $n, m \in \mathbb{N}$, megfigyelési helyek egy téglalap rácspontjai ($n \times m$ darab). A szabályos rácson megfigyelt (2.1) folyamat kovariancia struktúrájának meghatározásához szükségünk van a Kronecker-szorzat (jelölje $\otimes$) fogalmára.

2.2. DEFINÍCIÓ. Legyenek A és B $m \times n$, illetve $p \times q$ dimenziós mátrixok. Ekkor az

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$mp \times nq$ mátrixot az A és B mátrixok Kronecker-szorzatának nevezzük és $A \otimes B$ -vel jelöljük.

Ismert, hogy a Kronecker-szorzat rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. $A \otimes B \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$;
2. $A \otimes B = (A \otimes \mathcal{I})(\mathcal{I} \otimes B)$, ahol $\mathcal{I}$ jelöli az egységmátrixot;
3. Ha AC és BD is létezik, akkor

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD;$$

4. Ha A és B invertálható, akkor $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$;
5. Ha A egy $n \times n$ -es, B pedig $m \times m$ -es mátrix, akkor

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n.$$

A monoton esethez hasonlóan legyen $d_i := s_{i+1} - s_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, és $\delta_j := t_{j+1} - t_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, valamint vezessük be a $p_i := \exp(-\alpha d_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $q_j := \exp(-\beta \delta_j)$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, mennyiségeket. Rövid számolást követően látható, hogy szabályos rács esetén az $\{Y(s_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$ megfigyelések kovariancia mátrixa

$$C(n, m, r) = P(n, r) \otimes Q(m, r), \quad (2.5)$$

ahol $r = (\alpha, \beta)^\top$ és

$$P(n, r) := \begin{bmatrix} 1 & p_1 & p_1 p_2 & p_1 p_2 p_3 & \dots & \dots & \prod_{i=1}^{n-1} p_i \\ p_1 & 1 & p_2 & p_2 p_3 & \dots & \dots & \prod_{i=2}^{n-1} p_i \\ p_1 p_2 & p_2 & 1 & p_3 & \dots & \dots & \prod_{i=3}^{n-1} p_i \\ p_1 p_2 p_3 & p_2 p_3 & p_3 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & p_{n-1} \\ \prod_{i=1}^{n-1} p_i & \prod_{i=2}^{n-1} p_i & \prod_{i=3}^{n-1} p_i & \dots & \dots & p_{n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(m, r) := \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1 q_2 & q_1 q_2 q_3 & \dots & \dots & \prod_{j=1}^{m-1} q_j \\ q_1 & 1 & q_2 & q_2 q_3 & \dots & \dots & \prod_{j=2}^{m-1} q_j \\ q_1 q_2 & q_2 & 1 & q_3 & \dots & \dots & \prod_{j=3}^{m-1} q_j \\ q_1 q_2 q_3 & q_2 q_3 & q_3 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & q_{m-1} \\ \prod_{j=1}^{m-1} q_j & \prod_{j=2}^{m-1} q_j & \prod_{j=3}^{m-1} q_j & \dots & \dots & q_{m-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3. D-optimalitás

A D-optimális mintavételi eljárás alatt azt értjük, amikor a mintapontoknak egy olyan elrendezését keressük, amely szerint a véletlen mező megfigyelései alapján meghatározott Fisher-féle információs mátrix determinánsa maximális. A Fisher-féle információs mátrix alatt a hagyományos értelemben vett definíciót értjük, aminek reciproka alsó becslést ad az ismeretlen paraméter torzítatlan becslésének kovariancia mátrixára. Ez a módszer ugyan nagyon könnyen alkalmazható eljárás, a gyakorlatban való használat előtt azonban mégis célszerű bizonyos elméleti számításokat elvégezni. A szakirodalomban OU folyamat esetén többen foglalkoztak

a Fisher-féle információ szerinti D-optimális mintavételi eljárással. Stehlík (2007) megmutatta, hogy OU folyamat esetén az ekvidisztáns minta döntő szerepet játszik az ismeretlen trend paraméter becslésében. Kisefák és Stehlík (2008), valamint Zagoraiou és Baldi Antognini (2009) konstans trenddel eltolt OU folyamat esetén igazolták, hogy a trend paraméter becslésére az ekvidisztáns minta optimális, valamint ez utóbbi szerzők azt is megmutatták, hogy az OU folyamat kovariancia paraméterére nem létezik optimális mintavétel. Baran és Stehlík (2014) általánosították Zagoraiou és Baldi Antognini (2009) eredményét oly módon, hogy az egydimenziós valós mintateret kiterjesztették a 2.1. Definícióban meghatározott D-feltételt teljesítő kétdimenziós halmazra, az OU folyamatot pedig ennek megfelelően OU mezőre.

2.3.1. A trend paraméter becslése

Monoton megfigyelések

Induljunk ki abból, hogy a (2.1) modellt meghajtó ε OU mező (2.2) kovariancia struktúrájának α , β és σ paraméterei adottak, és keressük a θ trend paraméter becslését. Ekkor a D-feltételt kielégítő $\{Y(s_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ megfigyelési pontokban tekintett modell θ paraméterére vonatkozó Fisher-féle információ $M_\theta(n) = \mathbf{1}_n^\top C^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n$, ahol $\mathbf{1}_n$ egy n hosszúságú egyesekből álló oszlopvektor, $r = (\alpha, \beta)^\top$, $C(n, r)$ pedig a megfigyelések (2.3) kovariancia mátrixa (Pázman, 2007; Xia, Miranda és Gelfand, 2006). Ebben az esetben igaz a következő állítás.

2.3. TÉTEL. (Baran és Stehlík (2014)) *Tekintsük az $\{(s_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ D-feltételt kielégítő mintapontokban megfigyelt (2.2) kovariancia struktúrával rendelkező (2.1) modellt. Ekkor a θ trend paraméter becslésére szolgáló D-optimális mintavételt egy olyan alakú minta adja, ahol az $\alpha d_i + \beta \delta_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, mennyiség konstans.*

Maga a bizonyítás az optimalizálandó függvény Schur-konkavitásán alapul, melynek definíciója az alábbi (lásd Marshall és Olkin (1979), A.1 Definition, 54 o.).

2.4. DEFINÍCIÓ. Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt Schur-konvexnek nevezzük, ha $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén, ahol y majorálja x -et ($x \prec y$) következik, hogy $f(x) \leq f(y)$. Használjuk az x n -dimenziós vektor komponenseinek csökkenő sorrendjére az $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[n]}$ jelölést. Ekkor az alatt, hogy y majorálja x -et ($x \prec y$), $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén azt értjük, hogy

$$\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n x_{[i]} = \sum_{i=1}^n y_{[i]}.$$

Hasonlóan az f függvényt Schur-konkávnak nevezzük, ha $x \prec y$ esetén $f(x) \geq f(y)$ teljesül.

Egy f valós értékű, folytonosan differenciálható függvény Schur-konvexitását a későbbiekben több alkalommal is az úgynevezett Schur-konvexitási kritérium (lásd Marshall és Olkin (1979), Theorem A.4, 57 o.) segítségével igazoljuk, melynek értelmében egy f valós értékű függvény Schur-konvex egy I^n tartományon, ahol $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, pontosan akkor, ha f szimmetrikus az I^n tartományon és $(z_i - z_j)(\frac{\partial f(z)}{\partial z_i} - \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}) \geq 0$, $\forall z \in I^n$ és $i \neq j$ esetén. Nyilvánvalóan fordított egyenlőtlenség esetén az f függvény Schur-konkávításáról beszélhetünk. A Schur-konvex függvényeknek egy másik fontos jellemzője (Marshall és Olkin (1979), Proposition C1, 64 o.), amelyet szintén többször kihasználunk a bizonyításaink során, hogy ha $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ egy konvex függvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, akkor $f(x) = \sum_{i=1}^n g(x_i)$ egy Schur-konvex függvény az I^n tartományon. Egy függvény Schur-konvexitásának egyik nagy előnye, hogy a számunkra szükséges optimum keresés során a minimumhelyet a változók egyenlősége esetén kapjuk meg, a maximumhelyet pedig a határpontok adják. Értelemszerűen egy Schur-konkáv függvény esetén pontosan fordítva adódnak az optimumok.

A 2.3. Tétel bizonyításából adódik, hogy monoton halmaz esetén a maximalizálendő Fisher-féle információmennyiség

$$M_\theta(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \pi_i}{1 + \pi_i}. \quad (2.6)$$

Szabályos rács

A monoton esethez hasonlóan tegyük fel, hogy az ε OU mező (2.2) kovariancia struktúrájának α , β és σ paraméterei ismertek és keressük a θ trend paraméter becslését. Ekkor az $\{Y(s_i, t_j), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$ megfigyelésekre támaszkodó θ paraméter szerinti Fisher-féle információ $M_\theta(n, m) = \mathbf{1}_{nm}^\top C^{-1}(n, m, r) \mathbf{1}_{nm}$, ahol $C(n, m, r)$ a szabályos rács esetén meghatározott (2.5) kovariancia mátrix, a 2.3. Tétel szabályos rácson megfigyelt folyamatra vonatkozó megfelelője pedig a következő.

2.5. TÉTEL. *Tekintsük az $\{(s_i, t_j), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$ $n \times m$ -es szabályos rács mintapontjaiban megfigyelt (2.2) kovariancia struktúrával rendelkező (2.1) modellt. Ekkor*

$$M_\theta(n, m) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - p_i}{1 + p_i}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1 - q_j}{1 + q_j}\right), \quad (2.7)$$

ahol $p_i := \exp(-\alpha d_i)$, $q_j := \exp(-\beta \delta_j)$, $d_i := s_{i+1} - s_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, és $\delta_j := t_{j+1} - t_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$. A θ paraméter becslésére vonatkozó D -optimális mintavételt az iránymenti ekvidisztáns minta adja, azaz a $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1}$ és $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{m-1}$ eset.

BIZONYÍTÁS. A tétel igazolásához első lépésként meg kell határoznunk a $M_\theta(n, m) = \mathbf{1}_{nm}^\top C^{-1}(n, m, r) \mathbf{1}_{nm}$ Fisher-féle információ alakját, majd meg kell találnunk annak maximumát. A Kronecker szorzat 4. tulajdonsága alapján

$$C^{-1}(n, m, r) = P^{-1}(n, r) \otimes Q^{-1}(m, r), \quad (2.8)$$

ahol $P^{-1}(n, r)$ és $Q^{-1}(m, r)$ alakját a (2.4) összefüggés adja meg. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{1}_{nm} = \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_m$, és így

$$\begin{aligned} M_\theta(n, m) &= \mathbf{1}_{nm}^\top C^{-1}(n, m, r) \mathbf{1}_{nm} \\ &= (\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{1}_m^\top) (P^{-1}(n, r) \otimes Q^{-1}(m, r)) (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_m) \\ &= (\mathbf{1}_n^\top P^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n) (\mathbf{1}_m^\top Q^{-1}(m, r) \mathbf{1}_m). \end{aligned}$$

Látható, hogy ebben az esetben a Fisher-féle információ a 2.3. Tételben szereplő iránymenti Fisher-féle információk szorzataként áll elő, ahol a tényezők

$$\mathbf{1}_n^\top P^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1-p_i}{1+p_i} \quad \text{és} \quad \mathbf{1}_m^\top Q^{-1}(m, r) \mathbf{1}_m = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1-q_j}{1+q_j}.$$

Ezek alapján $M_\theta(n, m) = M_\theta^{(1)}(n) M_\theta^{(2)}(m)$,

$$\begin{aligned} M_\theta^{(1)}(n) &:= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1-p_i}{1+p_i} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(\alpha d_i), \\ M_\theta^{(2)}(m) &:= 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1-q_j}{1+q_j} = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} g(\beta \delta_j), \end{aligned}$$

ahol $g(x) := \frac{1-\exp(-x)}{1+\exp(-x)}$. Mivel a $g(x)$ az x változó egy konkáv függvénye, így Marshall és Olkin (1979), Proposition C1 (64 o.) alapján $M_\theta^{(1)}(n)$ és $M_\theta^{(2)}(m)$ a d_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, és a δ_j , $j = 1, 2, \dots, m-1$, argumentumaik szerint Schur-konkáv függvények. A $M_\theta(n, m)$ függvény a maximumát tehát éppen a $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1}$ és $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{m-1}$ esetben éri el. $\square$

2.3.2. Kovariancia paraméterek becslése

Monoton megfigyelések

A kovariancia paraméterek becslése esetén az OU mező α és β paramétereit kívánjuk becsülni. Pázman (2007), valamint Xia, Miranda és Gelfand (2006) eredményei alapján az $r = (\alpha, \beta)^\top$ szerinti Fisher-féle információs mátrix a következőképpen írható fel:

$$M_r(n) = \begin{bmatrix} M_\alpha(n) & M_{\alpha, \beta}(n) \\ M_{\alpha, \beta}(n) & M_\beta(n) \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

ahol

$$\begin{aligned} M_\alpha(n) &:= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ C^{-1}(n, r) \frac{\partial C(n, r)}{\partial \alpha} C^{-1}(n, r) \frac{\partial C(n, r)}{\partial \alpha} \right\}, \\ M_\beta(n) &:= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ C^{-1}(n, r) \frac{\partial C(n, r)}{\partial \beta} C^{-1}(n, r) \frac{\partial C(n, r)}{\partial \beta} \right\}, \\ M_{\alpha, \beta}(n) &:= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ C^{-1}(n, r) \frac{\partial C(n, r)}{\partial \alpha} C^{-1}(n, r) \frac{\partial C(n, r)}{\partial \beta} \right\}, \end{aligned}$$

$C(n, r)$ a (2.3) által definiált kovariancia mátrix, $M_\alpha(n)$, illetve $M_\beta(n)$ pedig az α , valamint a β paraméterekre vonatkozó Fisher-féle információk.

A következő tétel megadja az $M_r(n)$ Fisher-féle információs mátrix elemeinek egzakt alakját.

2.6. TÉTEL. (*Baran és Stehlík (2014)*) Tekintsük az $\{(s_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ D -feltételt kielégítő mintapontokban megfigyelt (2.2) kovariancia struktúrával rendelkező (2.1) modellt. Ekkor

$$M_\alpha(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i^2 \pi_i^2 (1 + \pi_i^2)}{(1 - \pi_i^2)^2}, \quad M_\beta(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_i^2 \pi_i^2 (1 + \pi_i^2)}{(1 - \pi_i^2)^2},$$

$$M_{\alpha, \beta}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i \delta_i \pi_i^2 (1 + \pi_i^2)}{(1 - \pi_i^2)^2},$$

ahol $d_i := s_{i+1} - s_i$, $\delta_i := t_{i+1} - t_i$ és $\pi_i := \exp(-\alpha d_i - \beta \delta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

A 2.6. Tételben meghatározott egzakt formulák segítségével Baran és Stehlík (2014) igazolta, hogy az α , β kovariancia paraméterek becslésére vonatkozó D -optimális mintavétel nem létezik.

Szabályos rács

Szabályos rácson megfigyelt (2.1) folyamat esetén az ε OU mező α és β paramétereire vonatkozó Fisher-féle információs mátrix (Pázman, 2007; Xia, Miranda és Gelfand, 2006)

$$M_r(n, m) = \begin{bmatrix} M_\alpha(n, m) & M_{\alpha, \beta}(n, m) \\ M_{\alpha, \beta}(n, m) & M_\beta(n, m) \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

ahol a korábbiakhoz hasonlóan

$$\begin{aligned} M_\alpha(n, m) &:= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ C^{-1}(n, m, r) \frac{\partial C(n, m, r)}{\partial \alpha} C^{-1}(n, m, r) \frac{\partial C(n, m, r)}{\partial \alpha} \right\}, \\ M_\beta(n, m) &:= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ C^{-1}(n, m, r) \frac{\partial C(n, m, r)}{\partial \beta} C^{-1}(n, m, r) \frac{\partial C(n, m, r)}{\partial \beta} \right\}, \\ M_{\alpha, \beta}(n, m) &:= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ C^{-1}(n, m, r) \frac{\partial C(n, m, r)}{\partial \alpha} C^{-1}(n, m, r) \frac{\partial C(n, m, r)}{\partial \beta} \right\}, \end{aligned}$$

$C(n, m, r)$ az $\{Y(s_i, t_j), i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m\}$ megfigyelések (2.5) alakú kovariancia mátrixa, $M_\alpha(n, m)$ és $M_\beta(n, m)$ pedig az α , illetve β szerinti Fisher-féle információk. Itt jegyeznénk meg, hogy mind monoton halmaz, mind pedig szabályos rács esetén az OU folyamat σ paraméterét ismertnek tekintjük.

Az alábbi tétel megadja az $M_r(n, m)$ Fisher-féle információs mátrix elemeinek zárt alakját.

2.7. TÉTEL. *Tekintsük az $\{(s_i, t_j), i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m\}$ $n \times m$ -es szabályos rács mintapontjaiban megfigyelt (2.2) kovariancia struktúrával rendelkező (2.1) folyamatot. Ekkor*

$$\begin{aligned} M_\alpha(n, m) &= m \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i^2 p_i^2 (1 + p_i^2)}{(1 - p_i^2)^2}, \quad M_\beta(n, m) = n \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\delta_j^2 q_j^2 (1 + q_j^2)}{(1 - q_j^2)^2}, \quad (2.11) \\ M_{\alpha, \beta}(n, m) &= 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i p_i^2}{1 - p_i^2} \right) \left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\delta_j q_j^2}{1 - q_j^2} \right), \end{aligned}$$

ahol $d_i := s_{i+1} - s_i$, $\delta_j := t_{j+1} - t_j$ és $p_i := \exp(-\alpha d_i)$, $q_j := \exp(-\beta \delta_j)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, m-1$.

BIZONYÍTÁS. A (2.5) kovariancia struktúra és a Kronecker-szorzat 3. tulajdonságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} M_\alpha(n, m) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \left(\left(P^{-1}(n, r) \otimes Q^{-1}(m, r) \right) \left(\frac{\partial P(n, r)}{\partial \alpha} \otimes Q(m, r) \right) \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \left(P^{-1}(n, r) \frac{\partial P(n, r)}{\partial \alpha} \right)^2 \otimes \mathcal{I}_m \right\} = \frac{m}{2} \text{tr} \left\{ \left(P^{-1}(n, r) \frac{\partial P(n, r)}{\partial \alpha} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{I}_m$ az $m \times m$ dimenziós egységmátrix. A (2.11) első egyenlősége a 2.6. Tétel alapján adódik (lásd még Baldi Antognini és Zagoraiou, 2010, Proposition 6.1), az

$M_\beta(n, m)$ alakja pedig a szimmetria miatt egyértelműen következik. Végezetül,

$$\begin{aligned} M_{\alpha, \beta}(n, m) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ (P^{-1}(n, r) \otimes Q^{-1}(m, r)) \left(\frac{\partial P(n, r)}{\partial \alpha} \otimes Q(m, r) \right) \right. \\ &\quad \times \left. (P^{-1}(n, r) \otimes Q^{-1}(m, r)) \left(P(n, r) \otimes \frac{\partial Q(m, r)}{\partial \beta} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \left(\left(P^{-1}(n, r) \frac{\partial P(n, r)}{\partial \alpha} \right) \otimes \mathcal{I}_m \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\mathcal{I}_n \otimes \left(Q^{-1}(m, r) \frac{\partial Q(m, r)}{\partial \beta} \right) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ P^{-1}(n, r) \frac{\partial P(n, r)}{\partial \alpha} \right\} \operatorname{tr} \left\{ Q^{-1}(m, r) \frac{\partial Q(m, r)}{\partial \beta} \right\}, \end{aligned}$$

és így a 2.7. Tétel utolsó állítása következik Zagoraiou és Baldi Antognini (2009), Theorem 3.1 eredményéből (vagy lásd még Baldi Antognini és Zagoraiou (2010), Proposition 6.1). $\square$

2.8. MEGJEGYZÉS. Ha a (2.11) formulákban megfigyeljük az egyes paraméterekre (α vagy β) vonatkozó Fisher-féle információkat, akkor megállapíthatjuk, hogy ezek a mennyiségek mindkét esetben csak az adott paraméterre vonatkozó mintapontoktól függnék, azaz $M_\alpha(n, m) = m M_\alpha(n)$, ahol $M_\alpha(n)$ egy az $[a_1, b_1]$ intervallum $\{s_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ pontjaiban megfigyelt OU folyamat α paramétere szerinti Fisher-féle információ.

Baran és Stehlík (2014) monoton esetbeli állításának, miszerint az α, β kovariancia paraméterek becslésére vonatkozó D-optimális mintavétel nem létezik, igaz a szabályos rácson megfigyelt folyamatbeli megfelelője is. A tétel kimondásához szükségünk van a D-optimalitásnak egy módosított definíciójára, az úgynevezett korlátozott D-optimalitásra.

2.9. DEFINÍCIÓ. *Tekintsük az $\{(s_i, t_j) : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\} \subset \mathcal{X} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ szabályos rácsot alkotó megfigyelési pontokat és tegyük fel, hogy $a_1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq b_1$ és $a_2 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq b_2$. Korlátozott D-optimális mintavételről beszélhetünk, ha $s_1 = a_1$, $s_n = b_1$ és $t_1 = a_2$, $t_m = b_2$, azaz amikor az optimális minta az $\mathcal{X}$ határának rádspontjait is tartalmazza. Ellenkező esetben szabad mintavételezésről beszélhetünk.*

A szabad mintavételezésnek egy speciális esete, amikor a mintavételi rádspontjainak horizontális, valamint vertikális távolságai rendre azonosak és az optimalitást ezen két paraméter szerint értelmezzük.

2.10. TÉTEL. Az α , β kovariancia paraméterek becslésére vonatkozó korlátozott D -optimális mintavétel nem létezik.

BIZONYÍTÁS. Először tekintsük azt az esetet, amikor az α és β paraméterek közül csak az egyiket nem ismerjük és a többi paraméter értéke adott. Ekkor a 2.8. Megjegyzés miatt a tétel állítása azonnal adódik Zagoraiou és Baldi Antognini (2009), Theorem 4.2 OU folyamatra kapott eredményéből. Most térjünk át arra az esetre, amikor mind az α , mind pedig a β paraméterek ismeretlenek. Ekkor a (2.10) és (2.11) összefüggéseket felhasználva a maximalizálandó függvény

$$\begin{aligned} \Phi(d_1, \dots, d_{n-1}, \delta_1, \dots, \delta_{m-1}) &= \det(M_r(n, m)) \\ &= nm \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i^2 p_i^2 (1 + p_i^2)}{(1 - p_i^2)^2} \right) \left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\delta_j^2 q_j^2 (1 + q_j^2)}{(1 - q_j^2)^2} \right) \\ &\quad - 4 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i p_i^2}{1 - p_i^2} \right)^2 \left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\delta_j q_j^2}{1 - q_j^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

ami a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség értelmében biztosan nemnegatív. Rövid számolás után adódik, hogy

$$\begin{aligned} \Phi(d_1, \dots, d_{n-1}, \delta_1, \dots, \delta_{m-1}) &= \left(n \sum_{i=1}^{n-1} g(d_i, \alpha) \right) \left(m \sum_{j=1}^{m-1} g(\delta_j, \beta) - 2 \left(\sum_{j=1}^{m-1} h(\delta_j, \beta) \right)^2 \right) \\ &\quad + 2 \left(\sum_{j=1}^{m-1} h(\delta_j, \beta) \right)^2 \left(n \sum_{i=1}^{n-1} g(d_i, \alpha) - 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} h(d_i, \alpha) \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

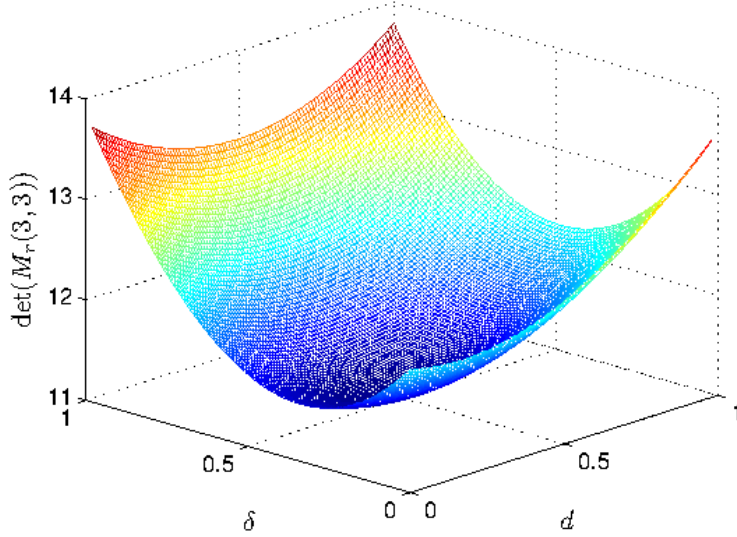
ahol

$$g(x, \gamma) := \frac{x^2 (\exp(2\gamma x) + 1)}{(\exp(2\gamma x) - 1)^2} \quad \text{és} \quad h(x, \gamma) := \frac{x}{\exp(2\gamma x) - 1}. \quad (2.14)$$

Ilyen módon a horizontális, illetve vertikális koordináták külön kezelhetők. Adott γ esetén mind a $g(x, \gamma)$ (Zagoraiou és Baldi Antognini, 2009, Theorem 4.2) mind pedig a $h(x, \gamma)$ (Baldi Antognini és Zagoraiou, 2010, Theorem 4.2) az x változó konvex függvénye, és így a Marshall és Olkin (1979), Proposition C1, (64. o) értelmében

$$\sum_{i=1}^{n-1} g(d_i, \alpha) \quad \text{és} \quad \left(\sum_{j=1}^{m-1} h(\delta_j, \beta) \right)^2$$

rendre a $[0, 1]^{n-1}$ és $[0, 1]^{m-1}$ hiperkockákon értelmezett Schur-konvex függvények, azaz a maximumukat csak a határpontokban érhetik el. Végezetül, tekintsük



2.1. ábra. $n = m = 3$ és $\alpha = 0.6$, $\beta = 1$ esetén az (α, β) korrelációs paraméterekre vonatkozó Fisher-féle információ a $d = d_1$ és $\delta = \delta_1$ függvényében.

például a következő

$$\Psi(d_1, \dots, d_{n-1}) := n \sum_{i=1}^{n-1} g(d_i, \alpha) - 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} h(d_i, \alpha) \right)^2$$

függvény optimumát a $\sum_{i=1}^{n-1} d_i = 1$ feltétel mellett. A

$$\Lambda(d_1, \dots, d_{n-1}; \lambda) := \Psi(d_1, \dots, d_{n-1}) + \lambda(d_1 + \dots + d_{n-1} - 1)$$

Lagrange-függvény parciális deriváltjait nullával téve egyenlővé kapjuk az

$$ng'(d_k, \alpha) - 4 \left(\sum_{i=1}^{n-1} h(d_i, \alpha) \right) h'(d_k, \alpha) + \lambda = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

egyenletrendszert, amiből következik, hogy a Ψ feltételes optimuma a $[0, 1]^{n-1}$ tartományon éppen a $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1} = 1/(n-1)$ ekvidisztáns minta. $\square$

2.11. PÉLDA. Legyen a mintaterünk $\mathcal{X} = [0, 1]^2$ és $\alpha = 0.6$, $\beta = 1$ választással tekintsük az $n = m = 3$ kilencpontos mintavételt, ahol $s_1 = t_1 = 0$, $s_2 := d$, $t_2 := \delta$, $s_3 = t_3 = 1$. Ezen korlátozott minta esetén nyilvánvaló, hogy $d_1 = d$, $d_2 = 1 - d$, $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = 1 - \delta$. A 2.1. ábra ebben az esetben ábrázolja a $\det(M_r(3, 3))$ információmennyiséget a d és δ függvényében. Az ábrán egyértelműen látható, hogy a maximális információ a határpontokban éretik el, azaz amikor $d \in \{0, 1\}$ vagy $\delta \in \{0, 1\}$.

2.12. PÉLDA. Tekintsünk egy iránymenti ekvidisztáns szabad mintavételt, azaz amikor $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1} =: d$ és $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{m-1} =: \delta$. Ekkor a D-optimalis minta megadásához a

$$\det(M_r(n, m)) = \frac{(n-1)(m-1)d^2\delta^2}{(e^{2\alpha d} - 1)^2(e^{2\beta\delta} - 1)^2} \times (nm(e^{2\alpha d} + 1)(e^{2\beta\delta} + 1) - 4(n-1)(m-1)) \quad (2.15)$$

függvény maximumhelyére van szükségünk.

2.13. MEGJEGYZÉS. OU folyamat esetén ez a kérdés nem merülhet fel, hiszen n darab ekvidisztáns mintapontot tekintve a kovariancia paraméter szerinti Fisher-féle információ lineárisan függ a kétpontos mintavétel Fisher-féle információjától (Kiseľák és Stehlík, 2008).

2.14. TÉTEL. Ha $nm \geq 2(n-1)(m-1)$, akkor $\det(M_r(n, m))$ mindkét változójában szigorúan monoton csökkenő függvény, melynek maximuma a $d = \delta = 0$ esetben van. Ha $nm < 2(n-1)(m-1)$, akkor elég kicsi rögzített d (δ) esetén a $\det(M_r(n, m))$ függvénynek d (δ) szerint egyetlen maximumhelye van.

BIZONYÍTÁS. Vegyük észre, hogy a (2.15) képlettel megadott $\det(M_r(n, m))$ helyett elegendő a

$$G(x, y) := \frac{x^2 y^2}{(e^x - 1)^2 (e^y - 1)^2} (nm(e^x + 1)(e^y + 1) - 4(n-1)(m-1))$$

függvény viselkedését vizsgálunk $x, y \geq 0$ esetén. A

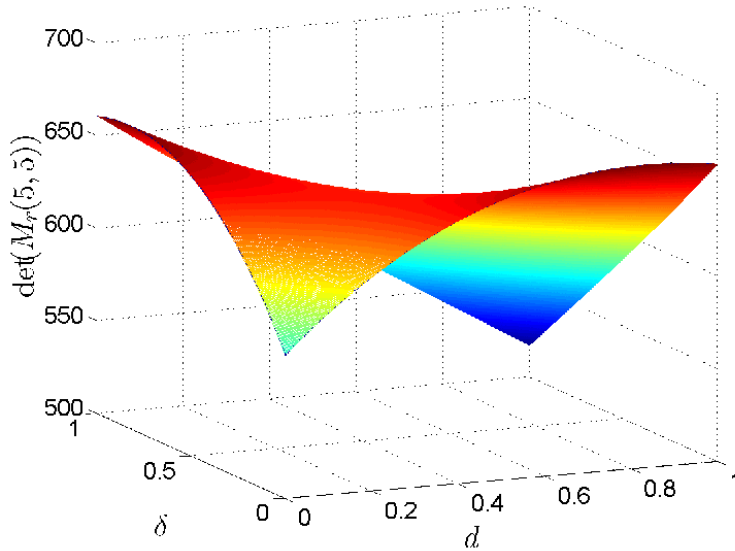
$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} &= \frac{xy^2}{(e^x - 1)^3 (e^y - 1)^2} \\ &\times (nm(e^y + 1)((2 - x)e^{2x} - 3xe^x - 2) + 8(n-1)(m-1)(1 - (1 - x)e^x)), \end{aligned}$$

akkor és csakis akkor egyenlő 0-val, ha

$$\frac{1 - (1 - x)e^x}{(x - 2)e^{2x} + 3xe^x + 2} = \frac{nm(e^y + 1)}{8(n-1)(m-1)}. \quad (2.16)$$

A (2.16) bal oldalán álló kifejezés egy szigorúan monoton csökkenő függvény, melynek értékkészlete $[0, 1/2]$. Ha $nm \geq 2(n-1)(m-1)$, akkor $y > 0$ esetén a (2.16) jobb oldala nagyobb, mint $1/2$, így ebben az esetben $\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} < 0$. Végezetül, ha $nm < 2(n-1)(m-1)$ és y egy rögzített, elegendően kicsi érték, akkor a (2.16) egyenlet jobb oldala kisebb, mint $1/2$, tehát ekkor egyetlen olyan x pont létezik, amikor $\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = 0$, ez pedig nem más, mint $G(x,y)$ maximumhelye. $\square$

2.15. MEGJEGYZÉS. Vegyük észre, hogy $1 < n = m \in \mathbb{N}$ esetén a 2.14. Tételben szereplő $nm \geq 2(n-1)(m-1)$ feltétel az $n \leq 3$ alakra redukálható. Mindemellett, ha $nm \leq 2(n-1)(m-1)$ akkor a 2.14. Tétel nem garantálja a D-optimális minta létezését. A 2.2. ábrán láthatunk példát arra, hogy $\det(M_r(n, m))$ extrémális pontja egy nyeregpont, a maximumát pedig $d = 0$ vagy $\delta = 0$ esetén éri el.



2.2. ábra. Az ekvidisztáns szabad mintavételhez tartozó (α, β) korrelációs paraméterekre vonatkozó Fisher-féle információs mátrix determinánása az $n = m = 5$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ esetben.

2.3.3. Az összes paraméter becslése

Monoton megfigyelések

Tekintsük most a legáltalánosabb esetet, amikor mind az α , β , mind pedig a θ paraméter ismeretlen. Ekkor a Fisher-féle információs mátrix alakja

$$M(n) = \begin{bmatrix} M_\theta(n) & 0 \\ 0 & M_r(n) \end{bmatrix},$$

ahol $M_\theta(n)$ és $M_r(n)$ rendre a θ , illetve az $r = (\alpha, \beta)^\top$ paraméterek szerinti (2.6), illetve (2.9) által definiált Fisher-féle információs mátrixokat jelöli. A legáltalánosabb esetben Baran és Stehlík (2014) igazolták, hogy az α , β kovariancia paraméterek és a θ trend paraméter becslése szerinti D-optimális mintavétel nem létezik.

Szabályos rács

A monoton esethez hasonlóan keressük a D-optimális mintavételt, amikor a σ szórásparaméter kivételével az összes paraméter ismeretlen, azaz tegyük fel, hogy α , β és θ nem adottak. Ekkor a Fisher-féle információs mátrix

$$M(n, m) = \begin{bmatrix} M_\theta(n, m) & 0 \\ 0 & M_r(n, m) \end{bmatrix},$$

ahol $M_\theta(n, m)$ és $M_r(n, m)$ a megfelelő paraméterek szerinti (2.7), illetve (2.10) által definiált Fisher-féle információs mátrixok. A maximalizálandó függvényünk tehát nem más, mint

$$\det(M(n, m)) = M_\theta(n, m) \det(M_r(n, m)).$$

2.16. PÉLDA. Tekintsük a 2.11. példabeli kilencpontos korlátozott mintát, azaz $\mathcal{X} = [0, 1]^2$, $n = m = 3$ és $s_1 = t_1 = 0$, $s_2 := d$, $t_2 := \delta$, $s_3 = t_3 = 1$, tehát $d_1 = d$, $d_2 = 1 - d$, $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = 1 - \delta$. A (2.7) és (2.11) felhasználásával könnyen

látható, hogy

$$\begin{aligned} \det(M(3, 3)) &= \left(1 + \frac{e^{\alpha d} - 1}{e^{\alpha d} + 1} + \frac{e^{\alpha(1-d)} - 1}{e^{\alpha(1-d)} + 1}\right) \left(1 + \frac{e^{\beta \delta} - 1}{e^{\beta \delta} + 1} + \frac{e^{\beta(1-\delta)} - 1}{e^{\beta(1-\delta)} + 1}\right) \\ &\times \left(9 \left(\frac{d^2(e^{2\alpha d} + 1)}{(e^{2\alpha d} - 1)^2} + \frac{(1-d)^2(e^{2\alpha(1-d)} + 1)}{(e^{2\alpha(1-d)} - 1)^2}\right)\right. \\ &\times \left(\frac{\delta^2(e^{2\beta \delta} + 1)}{(e^{2\beta \delta} - 1)^2} + \frac{(1-\delta)^2(e^{2\beta(1-\delta)} + 1)}{(e^{2\beta(1-\delta)} - 1)^2}\right) \\ &\left.- 4 \left(\frac{d}{e^{2\alpha d} - 1} + \frac{1-d}{e^{2\alpha(1-d)} - 1}\right)^2 \left(\frac{\delta}{e^{2\beta \delta} - 1} + \frac{1-\delta}{e^{2\beta(1-\delta)} - 1}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

A $\det(M_r(3, 3))$ függvény (2.13) alapján vett felbontása

$$\begin{aligned} \det(M(3, 3)) &= \left[3(1 + \phi(d, \alpha) + \phi(1-d, \alpha))(g(d, \alpha) + g(1-d, \alpha))\right] \\ &\times \left[1 + \phi(\delta, \beta) + \phi(1-\delta, \beta)\right] \\ &\times \left[3(g(\delta, \beta) + g(1-\delta, \beta)) - 2(h(\delta, \beta) + h(1-\delta, \beta))^2\right] \\ &+ \left[1 + \phi(d, \alpha) + \phi(1-d, \alpha)\right] \\ &\times \left[3(g(d, \alpha) + g(1-d, \alpha)) - 2(h(d, \alpha) + h(1-d, \alpha))^2\right] \\ &\times \left[2(1 + \phi(\delta, \beta) + \phi(1-\delta, \beta))(h(\delta, \beta) + h(1-\delta, \beta))^2\right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

ahol $g(x, \gamma)$ és $h(x, \gamma)$ a (2.14) által definiált függvények, valamint

$$\phi(x, \gamma) := \frac{\exp(\gamma x) - 1}{\exp(\gamma x) + 1}.$$

A vizsgálandó függvényt így fel tudjuk bontani d -től, illetve δ -tól függő tagokra és elegendő a

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, \gamma) &:= \Psi_1(x, \gamma)\Psi_2(x, \gamma), & \Phi_2(x, \gamma) &:= \Psi_1(x, \gamma)(\Psi_2(x, \gamma))^2, \\ \Phi_3(x, \gamma) &:= \Psi_1(x, \gamma)\left(3\Psi_2(x, \gamma) - 2(\Psi_3(x, \gamma))^2\right), \end{aligned}$$

függvények viselkedését vizsgálni, ahol $x \in [0, 1]$, $\gamma > 0$, valamint

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, \gamma) &:= 1 + \phi(x, \gamma) + \phi(1-x, \gamma), & \Psi_2(x, \gamma) &:= g(x, \gamma) + g(1-x, \gamma), \\ \Psi_3(x, \gamma) &:= h(x, \gamma) + h(1-x, \gamma). \end{aligned}$$

A $\Psi_1(x, \gamma)$, $\Psi_2(x, \gamma)$ és $\Psi_3(x, \gamma)$ függvények az x változóban $1/2$ -re szimmetrikusak, és analóg módon ez a tulajdonság a $\Phi_1(x, \gamma)$, $\Phi_2(x, \gamma)$, $\Phi_3(x, \gamma)$ függvényekre is teljesül. Mindemellett, a $\frac{\partial \phi(x, \gamma)}{\partial x}$ szigorú monoton csökkenése, illetve a $\frac{\partial g(x, \gamma)}{\partial x}$ és $\frac{\partial h(x, \gamma)}{\partial x}$ szigorú monoton növekedése miatt a Ψ_1 szigorúan konkáv, a Ψ_2 és Ψ_3 függvények pedig x szerint szigorúan konvexek. Tekintsük először a $\Phi_1(x, \gamma)$ -t. Mivel $x \in [0, 1]$,

$$\Psi_1(0, \gamma) \leq \Psi_1(x, \gamma) \leq \Psi_1(1/2, \gamma) \quad \text{és} \quad \Psi_2(1/2, \gamma) \leq \Psi_2(x, \gamma) \leq \Psi_2(0, \gamma),$$

így

$$\frac{\partial \Phi_1(x, \gamma)}{\partial x} \begin{cases} \leq \mathcal{Y}(x, \gamma), & \text{ha } 0 < x < 1/2; \\ \geq \mathcal{Y}(x, \gamma), & \text{ha } 1/2 \leq x < 1, \end{cases} \quad (2.19)$$

ahol

$$\mathcal{Y}(x, \gamma) := \frac{\partial \Psi_1(x, \gamma)}{\partial x} \Psi_2(0, \gamma) + \frac{\partial \Psi_2(x, \gamma)}{\partial x} \Psi_1(0, \gamma) = \Upsilon(x, \gamma) - \Upsilon(1-x, \gamma), \quad (2.20)$$

és

$$\begin{aligned} \Upsilon(x, \gamma) &:= \frac{\partial \phi(x, \gamma)}{\partial x} \frac{e^{2\gamma} + 1}{(e^{2\gamma} - 1)^2} + \frac{\partial g(x, \gamma)}{\partial x} \frac{2e^\gamma}{e^\gamma + 1} \\ &= \frac{2\gamma e^{\gamma x} (e^{2\gamma} + 1)}{(e^\gamma + 1)^2 (e^{2\gamma} - 1)^2} - \frac{4xe^\gamma (3\gamma x e^{2\gamma x} - e^{4\gamma x} + \gamma x e^{4\gamma x} + 1)}{(e^{2\gamma x} - 1)^3 (e^\gamma + 1)}. \end{aligned}$$

Legyen továbbá

$$\frac{\partial \Upsilon(x, \gamma)}{\partial x} = \frac{\Upsilon^{(1)}(x, \gamma)}{\Upsilon^{(2)}(x, \gamma)},$$

ahol $x > 0$ esetén a $\Upsilon^{(2)}(x, \gamma) = (e^{2\gamma x} - 1)^4 (e^{2\gamma} - 1)^2$ nevező nyilvánvalóan pozitív, a számláló pedig az

$$\begin{aligned} \Upsilon^{(1)}(x, \gamma) &= 4e^\gamma (e^{2\gamma} - 1)(e^\gamma - 1) \left(e^{6\gamma x} (2\gamma^2 x^2 - 4\gamma x + 1) + e^{4\gamma x} (16\gamma^2 x^2 - 8\gamma x - 1) \right. \\ &\quad \left. + e^{2\gamma x} (6\gamma^2 x^2 + 12\gamma x - 1) + 1 \right) - 2\gamma^2 (e^{2\gamma} + 1) e^{\gamma x} (e^{\gamma x} - 1)^5 (e^{\gamma x} + 1) \end{aligned}$$

alakba írható fel. Ha $x \in [0, 1]$, akkor az

$$2e^\gamma (e^{2\gamma} - 1)(e^\gamma - 1) > \gamma^2 (e^{2\gamma} + 1), \quad \gamma > 0,$$

egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\Upsilon^{(1)}(x, \gamma) \geq \gamma^2 e^\gamma (e^{2\gamma} + 1) S(\gamma x), \quad (2.21)$$

ahol

$$S(y) := e^{6y} (y^2 - 2y) + 2e^{5y} + e^{4y} (8y^2 - 4y - 3) + e^{2y} (3y^2 + 6y + 2) - 2e^y + 1.$$

Rövid számolást követően látható az is, hogy $S(y)$ pozitív, ha $y > 0$, amiből a (2.21) egyenlőtlenség miatt következik $\Upsilon^{(1)}(x, \gamma)$ pozitivitása, ha $0 < x \leq 1$. Így $\Upsilon(x, \gamma)$ szigorúan monoton növekvő és a (2.20) összefüggést felhasználva könnyen igazolható, hogy $x < 1/2$ esetén $\mathcal{V}(x, \gamma) < 0$. A (2.19) miatt a $\Phi_1(x, \gamma)$ függvénynek $1/2$ -ben egyetlen globális minimuma van, így tehát a maximumát 0 , illetve 1 esetén veszi fel. Teljesen analóg módon belátható, hogy ugyanilyen tulajdonságokkal rendelkeznek a $\Phi_2(x, \gamma)$ és $\Phi_3(x, \gamma)$ függvények is, és mivel a (2.18) képletben szereplő együtthatók mindegyike nemnegatív, a $\det(M(3, 3))$ függvénynek egyetlen helyen, a $d = \delta = 1/2$ esetben van globális minimuma, maximuma pedig az $\mathcal{X}$ mintatér négy sarokpontjában, nevezetesen a $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ és $(1, 1)$ pontokban. Sikertült tehát igazolni, hogy ebben a speciális esetben korlátozott D-optimális mintavétel nem létezik.

2.17. PÉLDA. Vizsgáljuk meg a D-optimalitást a 2.12. példában bevezetett d és δ irányok szerinti ekvidisztáns szabad mintapontok esetén is. A keresett optimális mintát meghatározó maximalizálandó függvény ekkor

$$\det(M(n, m)) = \frac{(n-1)(m-1)d^2\delta^2}{(e^{2\alpha d} - 1)^2(e^{2\beta\delta} - 1)^2(e^{\alpha d} + 1)(e^{\beta\delta} + 1)}(n(e^{\alpha d} - 1) + 2) \\ \times (m(e^{\beta\delta} - 1) + 2)(nm(e^{2\alpha d} + 1)(e^{2\beta\delta} + 1) - 4(n-1)(m-1)). \quad (2.22)$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $n = m$.

2.18. TÉTEL. Ha $n = 2$, akkor $\det(M(n, n))$ mind a d , mind pedig a δ változójában szigorúan monoton csökkenő, tehát a maximumát $d = \delta = 0$ esetén veszi fel. Ha $n \geq 3$, akkor a $\det(M(n, n))$ függvénynek van globális maximuma, mégpedig azon (d^*, δ^*) pontban, melyet az

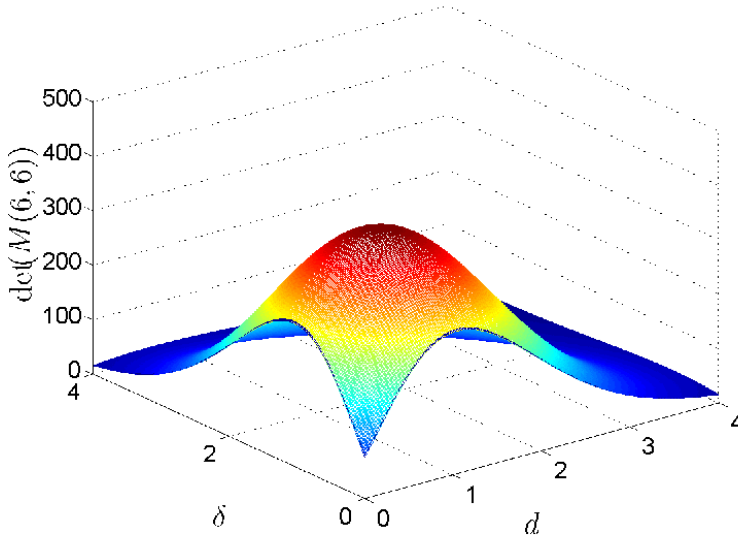
$$n^2(e^{\beta\delta} + 1)g_1(\alpha d, n) = 4(n-1)^2g_2(\alpha d, n), \quad (2.23) \\ n^2(e^{\alpha d} + 1)g_1(\beta\delta, n) = 4(n-1)^2g_2(\beta\delta, n)$$

egyenletrendszer megoldásaként kapunk, ahol

$$g_1(x, n) := e^{5x}n(1-x) + e^{4x}(2nx - 3x - n + 2) + e^{3x}x(1-4n) + e^{2x}x(4n-7) \\ + e^x(x - n - nx) + n - 2, \quad (2.24) \\ g_2(x, n) := e^{3x}n(1-2x) + e^{2x}(3nx - 5x + 2 - n) + e^x(x - n - nx) + n - 2.$$

BIZONYÍTÁS. A 2.14. Tétel bizonyításához hasonlóan a (2.22) által meghatározott $\det(M(n, n))$ helyett tekintsük a

$$G(x, y) := \frac{x^2y^2(n(e^x - 1) + 2)(n(e^y - 1) + 2)}{(e^{2x} - 1)^2(e^{2y} - 1)^2(e^x + 1)(e^y + 1)}(n^2(e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1) - 4(n-1)^2),$$



2.3. ábra. Az ekvidisztáns szabad mintavételhez tartozó és (θ, α, β) paraméterekre vonatkozó Fisher-féle információs mátrix determinánsa az $n = m = 6$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ esetben.

$x, y \geq 0$ függvényt. Rövid számolást követően kapjuk, hogy

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = \frac{2xy^2(n(e^y - 1) + 2)}{(e^{2x} - 1)^3(e^{2y} - 1)^2(e^x + 1)(e^y + 1)} \times \left(n^2(e^{2y} + 1)g_1(x, n) - 4(n - 1)^2g_2(x, n) \right),$$

ahol a $g_1(x, n)$ és $g_2(x, n)$ függvényeket a (2.24) definiálja. Így a $G(x, y)$ szélsőérték pontjait az alábbi két egyenlet megoldásai adják:

$$n^2(e^y + 1)g_1(x, n) = 4(n - 1)^2g_2(x, n), \quad n^2(e^x + 1)g_1(y, n) = 4(n - 1)^2g_2(y, n).$$

A tétel ezen állítása tehát igazolva van.

Tegyük fel először, hogy $n = 2$. Ekkor $g_2(x, n)/g_1(x, n)$ szigorúan monoton csökkenő és az értékeit a $[0, 3/2]$ intervallumban veszi fel, amíg $n^2(e^{2y} + 1)/(4(n - 1)^2) > 3/2$. Ebben az esetben tehát $\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} < 0$. Most tegyük fel, hogy $y > 0$

rögzített és $n \geq 3$. Ekkor

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = \frac{(n-1)^2 y^2 (n(e^y - 1) + 2)}{4(e^{2y} - 1)^2 (e^y + 1)} (n^2(e^{2y} - 1)(n - 3) + 2(4n^2 - 11n + 5)) > 0$$

és $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = 0$, így a $G(x, y) \geq 0$ függvénynek van globális maximuma valamely $x > 0$ pontban. Hasonló eredményt kapunk, ha egy pozitív x értéket rögzítünk és a $G(x, y)$ függvényt az y változó szerint vizsgáljuk. Összefoglalva tehát, ha $n \geq 3$, akkor $G(x, y)$ függvénynek létezik globális maximuma valamely nemnulla koordinátájú pontban. $\square$

A 2.18. Tétel segítségével sikerült igazolni, hogy ekvidisztáns szabad mintapontok esetén létezik az összes paraméter becslésére szolgáló optimális mintavétel, ellentétben azzal a korábbi esettel, amikor csak a kovariancia paramétereket tekintettük ismeretlennek. Ezt jól tükrözi a 2.3. ábrán látható, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ paraméterértékekhez tartozó, $\det(M(6, 6))$ függvény.

2.4. IMSPE kritérium

A paraméterbecsléseken túl lehetőség van arra is, hogy egy folyamat előrejelzéséhez készítsünk optimális mintavételi elrendezést. Az egyik lehetséges eljárás a krigelés technikáján alapszik, amikor a folyamat a mintatér egy nem megfigyelhető pontjában felvett értékének becsléséhez felhasználjuk az összes környezetében lévő, nem független megfigyelt mintapontot. Az Integrated Mean Squared Prediction Error (IMSPE) kritérium a folyamat ezen új pontbeli becsült értékének az átlagos négyzetes hibáján alapszik. OU folyamat esetén Baldi Antognini és Zagoraiou (2010) megadták az IMSPE kritérium egzakt alakját és igazolták, hogy ebben az esetben az ekvidisztáns minta lesz az optimális. Ezeket az eredményeket általánosítjuk a térbeli OU mezőre.

Monoton megfigyelések

Induljunk ki abból, hogy a (2.1) által definiált $Y(s, t)$ folyamatot a mintatér $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n)\}$ D-feltételt kielégítő mintapontjaiban figyeljük meg. Célunk az $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ pontban tekintett folyamatérték krigelés szerinti optimális mintavételének meghatározása. Ehhez tekintsük az $Y(x)$ folyamatérték

$$\hat{Y}(x) = \hat{\theta} + \mathcal{Q}^\top(x) C^{-1}(n, r) (\mathbf{Y} - \mathbf{1}_n \hat{\theta})$$

képlettel megadott legjobb lineáris torzítatlan becslését, ahol $\mathbf{Y} = (Y(s_1, t_1), \dots, Y(s_n, t_n))^\top$ a megfigyelések vektora, $C(n, r)$ az $\mathbf{Y}$ kovariancia mátrixa, $\mathcal{Q}(x)$ az $Y(x)$ és az $\mathbf{Y}$ elemei közötti korrelációkból álló vektor, azaz

$$\mathcal{Q}(x) = (\varrho(x, s_1, t_1), \dots, \varrho(x, s_n, t_n))^\top,$$

ahol

$$\varrho(x, s_i, t_i) := \exp(-\alpha|x_1 - s_i| - \beta|x_2 - t_i|), \quad i = 1, \dots, n,$$

és $\hat{\theta}$ a θ legkisebb négyzetes becslése, tehát

$$\hat{\theta} = (\mathbf{1}_n^\top C^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top C^{-1}(n, r) \mathbf{Y}.$$

Az α , β korrelációs paraméterek általában nem adottak, ezeket maximum likelihood módszerrel becsülik. Így a krigeléssel készített becslésbe az (α, β) -t az $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ML becsléssel helyettesítik (Santner, Williams és Notz, 2003), ami kritériumként természetes módon adja a becslés

$$\text{MSPE}(\hat{Y}(x)) := \sigma^2 \left[1 - (1, \mathcal{Q}^\top(x)) \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \mathbf{1}_n^\top \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1}_n & \vdots & C(n, r) \end{bmatrix}^{-1} (1, \mathcal{Q}^\top(x))^\top \right] \quad (2.25)$$

átlagos négyzetes hibájának (MSPE) minimumát. Mivel a becslés pontossága általában függ a teljes $\mathcal{X}$ mintatértől, az IMSPE kritérium szerinti optimális mintavételt az

$$\text{IMSPE}(\hat{Y}) := \sigma^{-2} \int_{\mathcal{X}} \text{MSPE}(\hat{Y}(x)) dx \quad (2.26)$$

integrál optimumaként kapjuk. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a továbbiakban a mintatér $\mathcal{X} = [0, 1]^2$, valamint ezen feltételek mellett az extrapoláció elkerülése végett legyen $t_1 = s_1 = 0$ és $t_n = s_n = 1$.

Ebben az esetben sikerült egzakt alakot adni az IMSPE kritériumra, amit a következő tétel foglal magába.

2.19. TÉTEL. *A fenti feltételek mellett az Y folyamat $x \in \mathcal{X}$ helyen felvett értékek $\hat{Y}(x)$ becsléséhez tartozó MSPE függvény*

$$\begin{aligned} \text{MSPE}(\hat{Y}(x)) = & \sigma^2 \left[1 - \varrho(x, s_n, t_n)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\varrho(x, s_i, t_i) - \varrho(x, s_{i+1}, t_{i+1})\pi_i)^2}{1 - \pi_i^2} \right. \\ & \left. + \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \pi_i}{1 + \pi_i} \right)^{-1} \left(1 - \varrho(x, s_n, t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varrho(x, s_i, t_i) - \varrho(x, s_{i+1}, t_{i+1})\pi_i}{1 + \pi_i} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

ahol $\pi_i := \exp(-\alpha d_i - \beta \delta_i)$, valamint $d_i := s_{i+1} - s_i$ és $\delta_i := t_{i+1} - t_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, a kapcsolódó IMSPE mutató értéke pedig

$$\text{IMSPE}(\hat{Y}) = 1 - A_n + \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \pi_i}{1 + \pi_i} \right)^{-1} B_n, \quad \text{ahol} \quad (2.27)$$

$$A_n = R_{1,1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_{i,i}\pi_i^2 - 2R_{i+1,i}\pi_i + R_{i+1,i+1}}{1 - \pi_i^2}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} B_n = 1 - 2\omega_n + R_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} & \left(\frac{R_{i,i} - 2R_{i+1,i}\pi_i + R_{i+1,i+1}\pi_i^2}{(1 + \pi_i)^2} \right. \\ & + 2 \frac{(R_{n,i} - \omega_i) - (R_{n,i+1} - \omega_{i+1})\pi_i}{1 + \pi_i} \Big) \\ & + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{R_{i,j} - R_{i+1,j}\pi_i - R_{i,j+1}\pi_j + R_{i+1,j+1}\pi_i\pi_j}{(1 + \pi_i)(1 + \pi_j)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \omega_i = -\frac{1}{\alpha\beta} & \left[2 - e^{-\alpha(d_1 + \dots + d_{i-1})} e^{-\alpha(d_i + \dots + d_{n-1})} \right] \\ & \times \left[2 - e^{-\beta(\delta_1 + \dots + \delta_{i-1})} - e^{-\beta(\delta_i + \dots + \delta_{n-1})} \right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} R_{i,j} = & \left[\frac{1}{2\alpha} \left(2e^{-\alpha(d_j + \dots + d_{i-1})} - e^{-\alpha(2d_1 + \dots + 2d_{j-1} + d_j + \dots + d_{i-1})} \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{-\alpha(d_j + \dots + d_{i-1} + 2d_i + \dots + 2d_{n-1})} \right) + (d_j + \dots + d_{i-1})e^{-\alpha(d_j + \dots + d_{i-1})} \right] \\ & \times \left[\frac{1}{2\beta} \left(2e^{-\beta(\delta_j + \dots + \delta_{i-1})} - e^{-\beta(2\delta_1 + \dots + 2\delta_{j-1} + \delta_j + \dots + \delta_{i-1})} \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{-\beta(\delta_j + \dots + \delta_{i-1} + 2\delta_i + \dots + 2\delta_{n-1})} \right) + (\delta_j + \dots + \delta_{i-1})e^{-\beta(\delta_j + \dots + \delta_{i-1})} \right], \end{aligned} \quad (2.31)$$

ahol $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq i \leq n$.

BIZONYÍTÁS. A rövidebb formulák érdekében a $\varrho(x, t_i, s_i)$ helyett a továbbiakban a ϱ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, jelölést fogjuk használni. Induljunk ki a (2.25) összefüggéssel megadott $\text{MSPE}(\hat{Y}(x))$ alakjából. Egyszerű mátrixműveletek igazolják, hogy

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{1}_n^\top \\ \hline \mathbf{1}_n & C(n, r) \end{array} \right]^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{0}_n^\top \\ \hline \mathbf{0}_n & C^{-1}(n, r) \end{array} \right] - (\mathbf{1}_n^\top C^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n)^{-1} \\ &\times \left[\begin{array}{c|c} 1 & -(C^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n)^\top \\ \hline -C^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n & C^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n (C^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n)^\top \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Felhasználva a Baran és Stehlík (2014) által meghatározott, a θ trend paraméter becslésére vonatkozó Fisher-féle információ (2.6) által megadott zárt alakját

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \text{MSPE}(\widehat{Y}(x)) &= \sigma^2 \left[1 - \mathcal{Q}^\top(x) C^{-1}(n, r) \mathcal{Q}(x) + (\mathbf{1}_n^\top C^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n)^{-1} \right. \\
 &\quad \left. \times (1 - \mathcal{Q}^\top(x) C^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n)^2 \right] \\
 &= \sigma^2 \left[1 + \frac{\varrho_1^2 - 2\varrho_1\varrho_2\pi_1}{\pi_1^2 - 1} + \frac{\varrho_n^2}{\pi_{n-1}^2 - 1} - \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{2\varrho_i\varrho_{i+1}\pi_i}{\pi_i^2 - 1} + \frac{\varrho_i^2(1 - \pi_i^2\pi_{i-1}^2)}{(\pi_i^2 - 1)(\pi_{i-1}^2 - 1)} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \pi_i}{1 + \pi_i} \right)^{-1} \left(1 + \frac{\varrho_1 - (\varrho_1 + \varrho_2)\pi_1}{\pi_1^2 - 1} + \frac{\varrho_n}{\pi_{n-1}^2 - 1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{(\varrho_i + \varrho_{i+1})\pi_i}{\pi_i^2 - 1} + \frac{\varrho_i(1 - \pi_i^2\pi_{i-1}^2)}{(\pi_i^2 - 1)(\pi_{i-1}^2 - 1)} \right) \right)^2 \right] \\
 &= \sigma^2 \left[1 - \varrho_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\varrho_i - \varrho_{i+1}\pi_i)^2}{1 - \pi_i^2} + \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \pi_i}{1 + \pi_i} \right)^{-1} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(1 - \varrho_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varrho_i - \varrho_{i+1}\pi_i}{1 + \pi_i} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Ezek után az IMSPE függvény (2.26) definíciójának értelmében

$$\text{IMSPE}(\widehat{Y}) = 1 - A_n + \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \pi_i}{1 + \pi_i} \right)^{-1} B_n,$$

ahol

$$\begin{aligned}
 A_n &:= \int_{\mathcal{X}} \mathcal{Q}^\top(x) C^{-1}(n, r) \mathcal{Q}(x) dx = \text{tr} [C^{-1}(n, r) \mathcal{R}], \\
 B_n &:= 1 - 2 \mathbf{1}_n^\top C^{-1}(n, r) \mathcal{W} + \mathbf{1}_n^\top C^{-1}(n, r) \mathcal{R} C^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n,
 \end{aligned}$$

valamint

$$\mathcal{W} = (\omega_1, \dots, \omega_n)^\top := \int_{\mathcal{X}} \mathcal{Q}(x) dx \quad \text{és} \quad \mathcal{R} = \{R_{i,j}\} := \int_{\mathcal{X}} \mathcal{Q}(x) \mathcal{Q}^\top(x) dx.$$

Nyilvánvalóan,

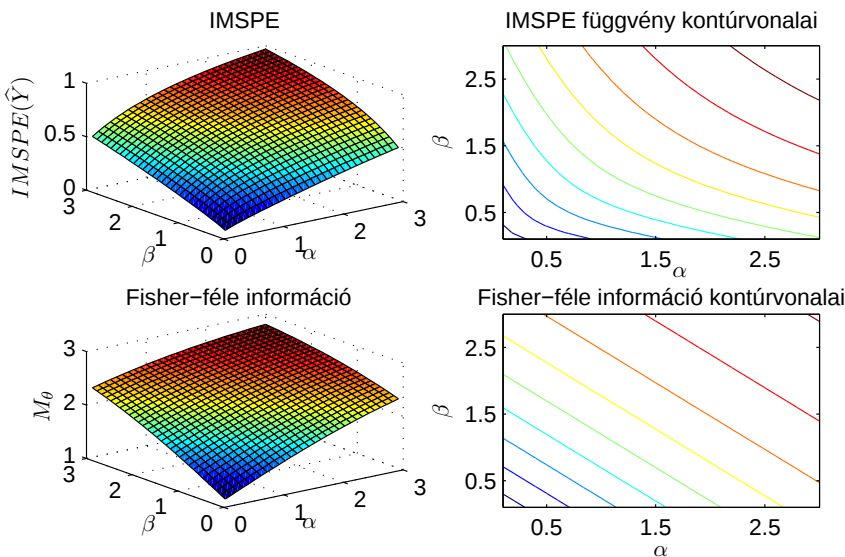
$$\begin{aligned}
 \omega_i &= \frac{1}{\alpha\beta} \left[2 - e^{-\alpha s_i} - e^{-\alpha(1-s_i)} \right] \left[2 - e^{-\beta t_i} - e^{-\beta(1-t_i)} \right] \\
 &= \frac{1}{\alpha\beta} \left[2 - e^{-\alpha(d_1 + \dots + d_{i-1})} - e^{-\alpha(d_i + \dots + d_{n-1})} \right] \\
 &\quad \times \left[2 - e^{-\beta(\delta_1 + \dots + \delta_{i-1})} - e^{-\beta(\delta_i + \dots + \delta_{n-1})} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{i,j} &= \left[\frac{1}{2\alpha} \left(2e^{-\alpha|s_i-s_j|} - e^{-\alpha(s_i+s_j)} - e^{-\alpha(2-s_i-s_j)} \right) + |s_i - s_j| e^{-\alpha|s_i-s_j|} \right] \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2\beta} \left(2e^{-\beta|t_i-t_j|} - e^{-\beta(t_i+t_j)} - e^{-\beta(2-t_i-t_j)} \right) + |t_i - t_j| e^{-\beta|t_i-t_j|} \right] \\
&= \left[\frac{1}{2\alpha} \left(2e^{-\alpha(d_{i\wedge j} + \dots + d_{i\vee j-1})} - e^{-\alpha(2d_1 + \dots + 2d_{i\wedge j-1} + d_{i\wedge j} + \dots + d_{i\vee j-1})} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{-\alpha(d_{i\wedge j} + \dots + d_{i\vee j-1} + 2d_{i\vee j} + \dots + 2d_{n-1})} \right) \right. \\
&\quad \left. + (d_{i\wedge j} + \dots + d_{i\vee j-1}) e^{-\alpha(d_{i\wedge j} + \dots + d_{i\vee j-1})} \right] \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2\beta} \left(2e^{-\beta(\delta_{i\wedge j} + \dots + \delta_{i\vee j-1})} - e^{-\beta(2\delta_1 + \dots + 2\delta_{i\wedge j-1} + \delta_{i\wedge j} + \dots + \delta_{i\vee j-1})} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{-\beta(\delta_{i\wedge j} + \dots + \delta_{i\vee j-1} + 2\delta_{i\vee j} + \dots + 2\delta_{n-1})} \right) \right. \\
&\quad \left. + (\delta_{i\wedge j} + \dots + \delta_{i\vee j-1}) e^{-\beta(\delta_{i\wedge j} + \dots + \delta_{i\vee j-1})} \right],
\end{aligned}$$

ahol $i \wedge j := \min\{i, j\}$, $i \vee j := \max\{i, j\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, az üres összegeket pedig tekintjük nullának. Így tehát

$$\begin{aligned}
A_n &= R_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_{i,i} - 2R_{i+1,i}\pi_i + R_{i+1,i+1}\pi_i^2}{1 - \pi_i^2} \\
&= R_{1,1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_{i,i}\pi_i^2 - 2R_{i+1,i}\pi_i + R_{i+1,i+1}}{1 - \pi_i^2}, \\
B_n &= 1 - 2\omega_n - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\omega_i - \omega_{i+1}\pi_i}{1 + \pi_i} + R_{n,n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_{n,i} - R_{n,i+1}\pi_i}{1 + \pi_i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{R_{i,j} - R_{i+1,j}\pi_i - R_{i,j+1}\pi_j + R_{i+1,j+1}\pi_i\pi_j}{(1 + \pi_i)(1 + \pi_j)} \\
&= 1 - 2\omega_n + R_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{R_{i,i} - 2R_{i+1,i}\pi_i + R_{i+1,i+1}\pi_i^2}{(1 + \pi_i)^2} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{(R_{n,i} - \omega_i) - (R_{n,i+1} - \omega_{i+1})\pi_i}{1 + \pi_i} \right) \\
&\quad + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{R_{i,j} - R_{i+1,j}\pi_i - R_{i,j+1}\pi_j + R_{i+1,j+1}\pi_i\pi_j}{(1 + \pi_i)(1 + \pi_j)}.
\end{aligned}$$

□



2.4. ábra. $n = 3$ esetén az IMSPE szerinti optimum, valamint a θ paraméter szerinti Fisher-féle információ optimális értéke az (α, β) korrelációs paraméterek függvényében.

2.20. PÉLDA. Tekintsünk egy hárompontos mintavételt, azaz $n = 3$, $s_1 = t_1 = 0$, $s_2 := d$, $t_2 := \delta$, $s_3 = t_3 = 1$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $d_1 = d$, $d_2 = 1 - d$, $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = 1 - \delta$. Az $IMSPE(\hat{Y})$ parciális deriváltjait megvizsgálva könnyen látható, hogy ez a függvény $d = \delta = 1/2$ esetén lesz minimális, tehát $n = 3$ esetén az ekvidisztáns minta adja az optimumot. A 2.4. ábrán az IMSPE szerinti optimum, valamint a θ paraméter szerinti Fisher-féle információ optimális értéke látható az (α, β) korrelációs paraméterek függvényében $n = 3$ esetén. A két függvényt összevetve megállapíthatjuk, hogy az (α, β) korrelációs paraméterek becsléséhez és a folyamat előrejelzéséhez kapcsolódó kritériumok jelentősen eltérnek egymástól. Ez az eltérés még jobban érzékelhető a függvények kontúrvonalait vizsgálva meg, melyek a két kritérium korrelációs paraméterek szerinti érzékenységet mutatják.

Az IMSPE (2.27) által megadott alakjára az alábbi szimmetria tulajdonságot sikerült igazolni.

2.21. TÉTEL. A (2.27) által meghatározott IMSPE szimmetrikus abban az értelemben, hogy a (d_i, δ_i) és (d_{n-i}, δ_{n-i}) , $i = 1, 2, \dots, n-1$, távolság párok felcserélésével az $IMSPE(\hat{Y})$ értéke változatlan marad.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\tilde{d}_i := d_{n-i}$, $\tilde{\delta}_i := \delta_{n-i}$, $\tilde{\pi}_i := \exp(-\alpha\tilde{d}_i - \beta\tilde{\delta}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, és jelölje $\tilde{\omega}_k$ és $\tilde{R}_{k,\ell}$ a (2.30) és (2.31) által meghatározott értékeket a $(\tilde{d}_i, \tilde{\delta}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, távolságok esetén. Legyenek továbbá π_i , ω_k és $R_{k,\ell}$ az eredeti (d_i, δ_i) , $i = 1, 2, \dots, n-1$, távolságoknak megfelelő mennyiségek. Könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_i &= \pi_{n-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{és} \quad \tilde{\omega}_k = \omega_{n-k+1}, \\ \tilde{R}_{k,\ell} &= R_{n-k+1, n-\ell+1}, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.32)$$

és ezek alapján

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \tilde{\pi}_i}{1 + \tilde{\pi}_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \pi_i}{1 + \pi_i}.$$

Jelölje továbbá $\tilde{A}_n$ és $\tilde{B}_n$ a $(\tilde{d}_i, \tilde{\delta}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, távolságok szerinti (2.28) és (2.29) mennyiségeket. A (2.32) felhasználásával egyszerű számítással adódik, hogy $\tilde{A}_n = A_n$ és $\tilde{B}_n = B_n$. $\square$

A 2.21. Tétel segítségével sikerült képet adni az IMSPE kritérium szerinti optimális minta egy fontos jellemzőjéről.

2.22. KÖVETKEZMÉNY. Az IMSPE kritérium szerinti optimális minta szimmetrikus, azaz ha az $\text{IMSPE}(\hat{Y})$ függvénynek az optimumhelye $(d_1^*, d_2^*, \dots, d_{n-1}^*, \delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_{n-1}^*)$, akkor $d_i^* = d_{n-i}^*$ és $\delta_i^* = \delta_{n-i}^*$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

2.23. PÉLDA. Tekintsünk egy ötpontos mintát, azaz $n = 5$ és $s_1 = t_1 = 0$, $s_5 = t_5 = 1$. A 2.22. Következmény értelmében az optimális mintavételre teljesülnie kell, hogy $d_1^* = d_4^*$, $d_2^* = d_3^*$ és $\delta_1^* = \delta_4^*$, $\delta_2^* = \delta_3^*$. A 2.5. ábrán láthatóak az ötpontos mintavétel optimumát adó d_1^* , d_2^* és δ_1^* , δ_2^* távolságok a 0 és 3 között változó α és β korrelációs paraméterek függvényében. A szimmetria miatt fennáll a $d_1^* + d_2^* = \delta_1^* + \delta_2^* = 1/2$ összefüggés.

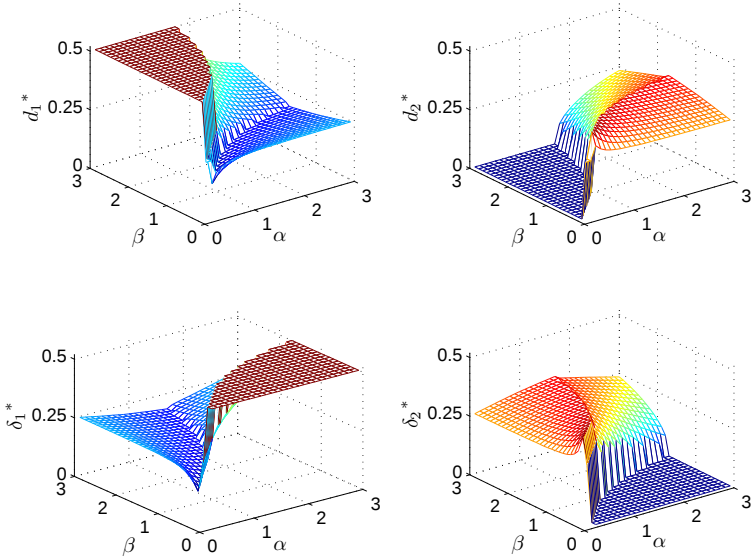
Szabályos rács

Figyeljük meg ismét a (2.1) által definiált $Y(s, t)$ folyamatot a mintatér egy szabályos rácsot alkotó ponthalmazán. Az optimális elrendezést meghatározó IMSPE kritériumot a monoton halmazt alkotó megfigyelések esetéhez teljesen analóg módon fejezzük ki. Ismételten a folyamatnak a mintatér egy még nem megfigyelt $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ pontjában felvett értékét becsüljük az

$$\hat{Y}(x_1, x_2) = \hat{\theta} + R^\top(x_1, x_2)C^{-1}(n, m, r)(\mathbf{Y} - \mathbf{1}_{nm}\hat{\theta})$$

mennyiséggel, ahol $\mathbf{Y} = (Y(s_1, t_1), Y(s_1, t_2), \dots, Y(s_n, t_m))^\top$ a megfigyelésekből álló vektor, $\hat{\theta}$ a θ legkisebb négyzetes becslése, tehát

$$\hat{\theta} = (\mathbf{1}_{nm}^\top C^{-1}(n, m, r) \mathbf{1}_{nm})^{-1} \mathbf{1}_{nm}^\top C^{-1}(n, m, r) \mathbf{Y},$$



2.5. ábra. $n = 5$ esetén az (α, β) korrelációs paraméterek függvényében az IMSPE optimumát adó d_1^* , d_2^* és δ_1^* , δ_2^* értékek.

$R(x_1, x_2)$ pedig az $Y(x_1, x_2)$ és az $\mathbf{Y}$ vektor elemei közötti korrelációk vektora, azaz

$$R(x_1, x_2) = (\varrho(x_1, x_2, s_1, t_1), \dots, \varrho(x_1, x_2, s_i, t_j), \dots, \varrho(x_1, x_2, s_n, t_m))^\top, \quad \text{ahol}$$

$$\varrho(x_1, x_2, s_i, t_j) := \varrho_1(x_1, s_i)\varrho_2(x_2, t_j), \quad \varrho_1(x_1, s_i) := \exp(-\alpha|x_1 - s_i|),$$

$$\varrho_2(x_2, t_j) := \exp(-\beta|x_2 - t_j|),$$

$i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Ebben az esetben az átlagos négyzetes hiba (MSPE), illetve az abból származó IMSPE függvény a következőképpen alakul:

$$\text{MSPE}(\hat{Y}(x_1, x_2)) := \sigma^2 \left[1 - (1, R^\top(x_1, x_2)) \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \mathbf{1}_{nm}^\top \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{1}_{nm} & C(n, m, r) & \vdots \end{bmatrix}^{-1} \right. \\ \left. \times (1, R^\top(x_1, x_2))^\top \right], \quad (2.33)$$

$$\text{IMSPE}(\hat{Y}) := \sigma^{-2} \iint_{\mathcal{X}} \text{MSPE}(\hat{Y}(x_1, x_2)) \, dx_1 \, dx_2.$$

Az általánosság csorbítása nélkül ismét feltehető, hogy $\mathcal{X} = [0, 1]^2$, illetve az extrapoláció elkerülése végett legyen $s_1 = t_1 = 0$ és $s_n = t_m = 1$. Szabályos rácsot alkotó mintapontok esetén is sikerült meghatározni az MSPE, illetve az IMSPE függvény zárt alakjait, amiket az alábbi tétel tartalmaz.

2.24. TÉTEL. *A fenti feltételek esetén*

$$\begin{aligned} \text{MSPE}(\hat{Y}(x_1, x_2)) = & \sigma^2 \left[1 - \left(\varrho_1^2(x_1, s_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\varrho_1(x_1, s_i) - \varrho_1(x_1, s_{i+1})p_i)^2}{1 - p_i^2} \right) \right. \\ & \times \left(\varrho_2^2(x_2, t_m) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(\varrho_2(x_2, t_j) - \varrho_2(x_2, t_{j+1})q_j)^2}{1 - q_j^2} \right) + \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - p_i}{1 + p_i} \right)^{-1} \\ & \times \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1 - q_j}{1 + q_j} \right)^{-1} \left(1 - \left(\varrho_1(x_1, s_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varrho_1(x_1, s_i) - \varrho_1(x_1, s_{i+1})p_i}{1 + p_i} \right) \right. \\ & \left. \left. \times \left(\varrho_2(x_2, t_m) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\varrho_2(x_2, t_j) - \varrho_2(x_2, t_{j+1})q_j}{1 + q_j} \right) \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

ahol $p_i := \exp(-\alpha d_i)$, $q_j := \exp(-\beta \delta_j)$, $d_i := s_{i+1} - s_i$ és $\delta_j := t_{j+1} - t_j$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, valamint

$$\begin{aligned} \text{IMSPE}(\hat{Y}) = & 1 - \left(\frac{n-1}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i p_i^2}{1 - p_i^2} \right) \left(\frac{m-1}{\beta} - 2 \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\delta_j q_j^2}{1 - q_j^2} \right) \\ & + \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - p_i}{1 + p_i} \right)^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1 - q_j}{1 + q_j} \right)^{-1} \\ & \times \left[1 - \frac{8}{\alpha \beta} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - p_i}{1 + p_i} \right) \left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1 - q_j}{1 + q_j} \right) \right. \\ & \left. + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - p_i^2 + 2\alpha d_i p_i}{\alpha(1 + p_i)^2} \right) \left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1 - q_j^2 + 2\beta \delta_j q_j}{\beta(1 + q_j)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Az IMSPE kritérium szerinti optimális mintavételt az iránymenti ekvidisztáns minta adja, azaz amikor $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1}$ és $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{m-1}$.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás során ki fogjuk használni, hogy az $R(x_1, x_2)$ vektor elemei szorzat alakban állnak elő, azaz $R(x_1, x_2) = R_1(x_1) \otimes R_2(x_2)$, ahol $R_1(x_1) = (\varrho_{1,1}, \varrho_{1,2}, \dots, \varrho_{1,n})^\top$ és $R_2(x_2) = (\varrho_{2,1}, \varrho_{2,2}, \dots, \varrho_{2,m})^\top$. A rövidebb formulák érdekében $\varrho_1(x_1, s_i)$ és $\varrho_2(x_2, t_j)$ helyett a $\varrho_{1,i}$, illetve $\varrho_{2,j}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, jelöléseket használjuk.

Először induljunk ki az $\text{MSPE}(\hat{Y}(x_1, x_2))$ függvénynek a (2.33) által megadott alakjából. Az $R(x_1, x_2)$ szorzat alakját, a 2.19. Tétel bizonyítása során kihasznált mátrixaritmetikai műveleteket, valamint a kovariancia mátrix inverzének (2.8) felbontást használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{MSPE}(\hat{Y}(x_1, x_2)) &= \sigma^2 \left[1 - R^\top(x_1, x_2) C^{-1}(n, m, r) R(x_1, x_2) \right. \\ &\quad \left. + M_\theta^{-1}(n, m) (1 - R^\top(x_1, x_2) C^{-1}(n, m, r) \mathbf{1}_{nm})^2 \right] \\ &= \sigma^2 \left[1 - (R_1^\top(x_1) P^{-1}(n, r) R_1(x_1)) (R_2^\top(x_2) Q^{-1}(m, r) R_2(x_2)) \right. \\ &\quad \left. + M_\theta^{-1}(n, m) \left(1 - (R_1^\top(x_1) P^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n) (R_2^\top(x_2) Q^{-1}(m, r) \mathbf{1}_m) \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

amelyből már következik a kívánt (2.34) alak. Ezek után az IMSPE függvény definíciójának értelmében

$$\begin{aligned} \text{IMSPE}(\hat{Y}) &= 1 - A_n^{(1)} A_m^{(2)} + \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1-p_i}{1+p_i} \right)^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1-q_j}{1+q_j} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(1 - 2B_n^{(1)} B_m^{(2)} + D_n^{(1)} D_m^{(2)} \right), \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} A_n^{(1)} &:= \text{tr} [P^{-1}(n, r) \mathcal{R}_1], & B_n^{(1)} &:= \mathbf{1}_n^\top P^{-1}(n, r) \mathcal{W}_1, \\ D_n^{(1)} &:= \mathbf{1}_n^\top P^{-1}(n, r) \mathcal{R}_1 P^{-1}(n, r) \mathbf{1}_n, & A_m^{(2)} &:= \text{tr} [Q^{-1}(m, r) \mathcal{R}_2], \\ B_m^{(2)} &:= \mathbf{1}_m^\top Q^{-1}(m, r) \mathcal{W}_2, & D_m^{(2)} &:= \mathbf{1}_m^\top Q^{-1}(m, r) \mathcal{R}_2 Q^{-1}(m, r) \mathbf{1}_m, \end{aligned}$$

valamint

$$\mathcal{W}_s = \{\omega_{s,i}\} := \int_0^1 R_s(x) dx \quad \text{és} \quad \mathcal{R}_s = \{R_{s,i,j}\} := \int_0^1 R_s(x) R_s^\top(x) dx, \quad s=1, 2.$$

Nyilvánvalóan,

$$\begin{aligned} \omega_{1,i} &= \frac{1}{\alpha} \left[2 - e^{-\alpha s_i} - e^{-\alpha(1-s_i)} \right], & \omega_{2,i} &= \frac{1}{\beta} \left[2 - e^{-\beta t_i} - e^{-\beta(1-t_i)} \right], \\ R_{1,i,j} &= \frac{1}{2\alpha} \left(2e^{-\alpha|s_i-s_j|} - e^{-\alpha(s_i+s_j)} - e^{-\alpha(2-s_i-s_j)} \right) + |s_i-s_j| e^{-\alpha|s_i-s_j|}, \\ R_{2,i,j} &= \frac{1}{2\beta} \left(2e^{-\beta|t_i-t_j|} - e^{-\beta(t_i+t_j)} - e^{-\beta(2-t_i-t_j)} \right) + |t_i-t_j| e^{-\beta|t_i-t_j|}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ezek után kifejtve például az

$$\begin{aligned}
 A_n^{(1)} &= R_{1,n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_{1,i,i} - 2R_{1,i+1,i}p_i + R_{1,i+1,i+1}p_i^2}{1 - p_i^2}, \\
 B_n^{(1)} &= \omega_{1,n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\omega_{1,i} - \omega_{1,i+1}p_i}{1 + p_i}, \\
 D_n^{(1)} &= R_{1,n,n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_{1,n,i} - R_{1,n,i+1}p_i}{1 + p_i} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{R_{1,i,j} - R_{1,i+1,j}p_i - R_{1,i,j+1}p_j + R_{1,i+1,j+1}p_i p_j}{(1 + p_i)(1 + p_j)},
 \end{aligned}$$

kifejezéseket, valamint felhasználva a (2.37) összefüggést egyszerű számolás után az

$$A_n^{(1)} = \frac{n-1}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i p_i^2}{1 - p_i^2}, \quad B_n^{(1)} = \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - p_i}{1 + p_i}, \quad D_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - p_i^2 + 2\alpha d_i p_i}{\alpha(1 + p_i)^2}$$

alakok adódnak. Hasonló módon kapjuk $A_m^{(2)}$, $B_m^{(2)}$ és $D_m^{(2)}$ zárt alakjait is. Nyilvánvaló, hogy az $\text{IMSPE}(\hat{Y})$ mind $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$, mind pedig $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}$ szerint permutáció-invariáns. Tekintsük például a $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}$ távolságokat rögzítettnek és vizsgáljuk a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \text{IMSPE}(\hat{Y})}{\partial d_i} &= 2 \frac{\partial h(d_i, \alpha)}{\partial d} \left(\frac{m-1}{\beta} - 2H_m(\boldsymbol{\delta}, \beta) \right) + \frac{4}{\alpha} \left(\frac{\partial \varphi(d_i, \alpha)}{\partial d} - 1 \right) \\
 &\quad \times \frac{\Psi_m(\boldsymbol{\delta}, \beta) - 2(\Phi_m(\boldsymbol{\delta}, \beta) - 1)/\beta}{\Phi_n(\mathbf{d}, \alpha)\Phi_m(\boldsymbol{\delta}, \beta)} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial \psi(d_i, \alpha)}{\partial d} - \frac{4}{\alpha} \left(\frac{\partial \varphi(d_i, \alpha)}{\partial d} - 1 \right) \right) \frac{\Psi_m(\boldsymbol{\delta}, \beta)}{\Phi_n(\mathbf{d}, \alpha)\Phi_m(\boldsymbol{\delta}, \beta)} - \frac{\partial \varphi(d_i, \alpha)}{\partial d} \\
 &\quad \times \frac{1 - 8(\Phi_m(\mathbf{d}, \alpha) - 1)(\Phi_m(\boldsymbol{\delta}, \beta) - 1)/(\alpha\beta) + \Psi_n(\mathbf{d}, \alpha)\Psi_m(\boldsymbol{\delta}, \beta)}{\Phi_n(\mathbf{d}, \alpha)^2\Phi_m(\boldsymbol{\delta}, \beta)}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

d_i változók szerinti parciális deriváltakat, ahol

$$h(x, \gamma) := \frac{x}{\exp(2\gamma x) - 1}, \quad \varphi(x, \gamma) := x + \frac{\exp(\gamma x) - 1}{\exp(\gamma x) + 1},$$

$$\psi(x, \gamma) := \frac{\exp(2\gamma x) - 1 + 2\gamma x \exp(\gamma x)}{\gamma(\exp(\gamma x) + 1)^2},$$

valamint $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ esetén

$$H_n(\mathbf{x}, \gamma) := \sum_{i=1}^{n-1} h(x_i, \gamma), \quad \Phi_n(\mathbf{x}, \gamma) := \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(x_i, \gamma), \quad \Psi_n(\mathbf{x}, \gamma) := \sum_{i=1}^{n-1} \psi(x_i, \gamma).$$

Rövid számolást követően (lásd például Baldi Antognini és Zagoraiou (2010)) kapjuk, hogy a $[0, 1]$ intervallumon $\varphi(x, \gamma)$ konkáv, $h(x, \gamma)$ és $\psi(x, \gamma) - 4(\varphi(x, \gamma) - x)/\gamma$ pedig konvex függvénye az x változónak. Mindemellett, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, esetén $\Psi_n(\mathbf{x}, \gamma) \geq 0$, az $\exp(x) - 1 \geq x$, $x \in \mathbb{R}$, egyenlőtlenség miatt $2H_n(\mathbf{x}, \gamma) \leq (n-1)/\gamma$, továbbá a $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 1$ feltétel teljesülése esetén $\Phi_n(\mathbf{x}, \gamma) \geq 1$ és $\gamma\Psi_n(\mathbf{x}, \gamma) \leq 2\Phi_n(\mathbf{x}, \gamma) - 2$. Végezetül, az IMSPE függvény (2.36) alakjából adódik, hogy (2.38) utolsó tagjának számlálója nemnegatív, így $\frac{\partial \text{IMSPE}(\hat{Y})}{\partial d_i}$ a d_i változóknak egy monoton növekvő függvénye.

Rögzített $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}$ esetén tehát $\text{IMSPE}(\hat{Y})$ egy Schur-konvex függvény (lásd például Marshall és Olkin (1979), Theorem A.4, 57 o.), így a minimumát $d_i = 1/(n-1)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, esetén éri el. Teljesen analóg eredményt kapunk, ha $d_1, d_2, \dots, d_n$ rögzítése esetén vizsgáljuk az $\text{IMSPE}(\hat{Y})$ mennyiséget $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}$ függvényében. Ez azt igazolja, hogy az optimumot valóban az iránymenti ekvidisztáns minta adja. $\square$

2.25. MEGJEGYZÉS. Itt szeretnénk megemlíteni, hogy a (2.35) által megadott IMSPE függvény éppen Baldi Antognini és Zagoraiou (2010, Proposition 4.1) OU folyamatra meghatározott eredményének kiterjesztése, az optimumra kapott állítás pedig Baldi Antognini és Zagoraiou (2010), Proposition 4.2 általánosítása.

2.5. Entrópia kritérium

Az IMSPE kritérium mellett az előrejelzésre vonatkozó optimális mintavétel meghatározásának egy igen elterjedt módja az úgynevezett entrópia kritérium. Ezen módszer alap gondolata, hogy azokat a helyeket keressük, ahol a megszerzett információ mennyisége a lehető legnagyobb. Shewry és Wynn (1987) ötletét követve tehát az optimális mintát a megfigyelések $\text{Ent}(\mathbf{Y})$ entrópiájának maximalizálásával határozzuk meg. Eddig ebben az esetben is csak OU folyamatra születtek eredmények, amiket Baldi Antognini és Zagoraiou (2010) dolgozatában találhatunk meg.

Monoton megfigyelések

Ismert, hogy Gauss esetben, amikor az n darab megfigyelés egy $\sigma^2 C(n, r)$ kovariancia mátrixú normális eloszlású véletlen vektort alkot, a megfigyelések entrópiája

$$\text{Ent}(\mathbf{Y}) = \frac{n}{2} (1 + \ln(2\pi\sigma^2)) + \frac{1}{2} \ln \det C(n, r).$$

Speciális, abban az esetben amikor a (2.1) által definiált $Y(s, t)$ folyamatunkat egy a D-feltételt kielégítő monoton pontrendszeren figyeljük meg, az entrópia alakja ekkor a következőképpen alakul.

2.26. TÉTEL. *Monoton halmazt alkotó mintavételi pontok esetén a megfigyelések entrópiája*

$$\text{Ent}(\mathbf{Y}) = \frac{n}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \ln(1 - \pi_i^2). \quad (2.39)$$

Az entrópia kritérium szerinti optimális mintavételt az az ekvidisztáns minta adja, ahol $\alpha d_i + \beta \delta_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, (azaz a π_i) konstans.

BIZONYÍTÁS. A (2.3) alakú $C(n, r)$ kovariancia mátrix determinánsának kiszámításához tekintsük annak a Baldi Antognini és Zagoraiou (2010), Lemma 3.1-ben használt felbontását, azaz

$$C(n, r) = LDL^\top,$$

ahol L egy csupa egyesekből álló főátlójú alsó trianguláris mátrix, D pedig egy olyan diagonális mátrixot jelöl, melynek az átlója $(1, 1 - \pi_1^2, 1 - \pi_2^2, \dots, 1 - \pi_{n-1}^2)$. Így tehát

$$\det C(n, r) = \det D = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \pi_i^2), \quad (2.40)$$

amiből a (2.39) alak azonnal adódik. Az optimális mintavételi elrendezés megtalálásához az

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}) := \sum_{i=1}^{n-1} \ln(1 - \pi_i^2)$$

függvény maximumát keressük a $\sum_{i=1}^{n-1} \ln \pi_i = \alpha + \beta$ feltétel mellett. Az első parciális deriváltak, valamint a

$$\Lambda(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}; \lambda) := \sum_{i=1}^{n-1} \ln(1 - \pi_i^2) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n-1} \ln \pi_i - \alpha - \beta \right)$$

Lagrange-függvény Hesse-mátrixának vizsgálatából kapjuk, hogy a keresett maximum csakis akkor érhető el, ha $\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_{n-1}$. $\square$

2.27. MEGJEGYZÉS. A $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1}$ és $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{n-1}$ egyenlő távolságú monoton minta az entrópia kritérium szerint optimális.

2.28. MEGJEGYZÉS. Ha az $\mathcal{X}$ mintatér az egységnégyzet, akkor az entrópia optimális értéke

$$\frac{n}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2)) + \frac{n-1}{2} \ln(1 - \exp(-(\alpha + \beta)/(n-1))) \rightarrow -\infty,$$

ha $n \rightarrow \infty$.

Szabályos rács

Szabályos rácson megfigyelt Gauss folyamat esetén a $\sigma^2 C(n, m, r)$ kovariancia mátrixú, nm dimenziós megfigyelésvektor entrópiája

$$\text{Ent}(\mathbf{Y}) = \frac{nm}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2)) + \frac{1}{2} \ln \det C(n, m, r).$$

2.29. TÉTEL. Szabályos rácsot alkotó minta esetén az $\text{Ent}(\mathbf{Y})$ entrópia a következő alakban áll elő:

$$\text{Ent}(\mathbf{Y}) = \frac{nm}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2)) + \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \ln(1 - p_i^2) + \frac{n}{2} \sum_{j=1}^{m-1} \ln(1 - q_j^2). \quad (2.41)$$

Ekkor az entrópia kritérium szerinti optimális mintavételt a $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1}$ és $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{m-1}$ iránymenti ekvidisztáns minta adja.

BIZONYÍTÁS. Az entrópia alakjának meghatározásához szükségünk van a (2.5) által megadott $C(n, m, r)$ kovariancia mátrix determinánsára. A determináns kiszámolásához használjuk fel a (2.5) kovariancia struktúrát, illetve a Kronecker-szorzatnak a determinánsra vonatkozó 5. tulajdonságát, azaz

$$\det C(n, m, r) = (\det P(n, r))^m (\det Q(m, r))^n.$$

Így

$$\text{Ent}(\mathbf{Y}) = \frac{nm}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2)) + \frac{m}{2} \ln \det P(n, r) + \frac{n}{2} \ln \det Q(m, r).$$

A $P(n, r)$ és $Q(m, r)$ mátrixok speciális alakját kihasználva a (2.40) kiszámításához analóg módon kapjuk (lásd még Baldi Antognini és Zagoraiou (2010), Lemma 3.1), hogy

$$\det P(n, r) = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - p_i^2) \quad \text{és} \quad \det Q(m, r) = \prod_{j=1}^{m-1} (1 - q_j^2),$$

melyekkel már a (2.41) alak azonnal adódik. Az optimális minta megtalálásához az

$$F(p_1, \dots, p_{n-1}, q_1, \dots, q_{m-1}) := \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \ln(1 - p_i^2) + \frac{n}{2} \sum_{j=1}^{m-1} \ln(1 - q_j^2)$$

függvény feltételes maximumát keressük a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \ln p_i = -\alpha \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{m-1} \ln q_j = -\beta$$

feltételek mellett. A korábbiakhoz hasonlóan az első parciális deriváltak, valamint a

$$\begin{aligned} \Lambda(p_1, \dots, p_{n-1}, q_1, \dots, q_{m-1}; \lambda, \mu) &:= \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \ln(1 - p_i^2) + \frac{n}{2} \sum_{j=1}^{m-1} \ln(1 - q_j^2) \\ &+ \lambda \left(\sum_{i=1}^{n-1} \ln p_i + \alpha \right) + \mu \left(\sum_{j=1}^{m-1} \ln q_j + \beta \right) \end{aligned}$$

Lagrange-függvény Hesse-mátrixának vizsgálatából kapjuk, hogy a keresett maximum csakis akkor érhető el, ha $p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1}$ és $q_1 = q_2 = \dots = q_{m-1}$. $\square$

2.6. Numerikus eredmények

Ebben a fejezetben az optimális mintavételi elhelyezésekre kapott elméleti eredményekre adunk néhány speciális számítógépes szimulációt. A numerikus eredmények segítségével valós adatokon keresztül összehasonlítjuk az IMSPE és az entrópia kritériumot, valamint megvizsgáljuk a két mintavételi elrendezés viselkedését mindhárom kritérium esetén.

2.6.1. Az IMSPE és az entrópia kritérium összehasonlítása

A folyamat értékének előrejelzésére vonatkozó két optimalitási kritérium összehasonlításának céljából Matlab programcsomag segítségével készítettünk néhány szimulációt. Az $\text{IMSPE}(\hat{Y})$ optimumát az *fmincon* beépített függvény segítségével határoztuk meg, amíg entrópia esetén 2.26. Tétel értelmében elegendő volt az ekvidisztáns mintát tekinteni. A 2.1. táblázat tartalmazza az IMSPE, illetve az entrópia optimális értékeit, valamint ezek relatív hatékonyságát különböző nagyságú monoton halmazt alkotó minták és az (α, β) kovariancia paraméterek kombinációi esetén.

Technikai korlátok miatt sajnos tíznél nagyobb mintaelemszámra már nem tudtuk elvégezni a szimulációkat, mivel egy n pontból álló minta esetén egy $2n - 2$ változós függvény feltételes minimumát keressük, ami már $n = 10$ esetén is igen nehéz feladat.

Megfigyelve a 2.1. táblázat eredményeit azt tapasztaljuk, hogy a szimmetrikus modell esetén $(\alpha = \beta)$ a relatív hatékonyság közel 100%, amíg különböző kovariancia paramétereket tekintve szignifikánsan kisebb értékek adódnak. Külön figyelmet fordítottunk ezen eset megvizsgálására és azt tapasztaltuk, hogy a szimmetrikus esetben a kapott optimális minták nagyon hasonlóak, de a két kritérium mégsem egyezik meg. Erre mutat példát a 2.2. táblázat, amelyben egy négyponthas IMSPE kritérium szerinti optimális minta távolságait láthatjuk három különböző $\alpha = \beta$

		$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 3$
		$\beta = 0.8$	$\beta = 1$	$\beta = 10$	$\beta = 1.5$	$\beta = 3$
$n = 4$	optimális	0.2602	0.4008	0.9266	0.6549	0.8487
	ekvidisztáns	0.2693	0.4010	0.9326	0.6598	0.8493
	rel. hat. (%)	96.62	99.95	99.36	99.26	99.93
$n = 5$	optimális	0.2309	0.3699	0.8290	0.5981	0.7866
	ekvidisztáns	0.2473	0.3700	0.8409	0.6065	0.7873
	rel. hat. (%)	93.37	99.97	98.58	98.62	99.91
$n = 6$	optimális	0.2130	0.3529	0.7593	0.5640	0.7502
	ekvidisztáns	0.2351	0.3530	0.7766	0.5763	0.7509
	rel. hat. (%)	90.60	99.97	97.77	97.87	99.91
$n = 7$	optimális	0.2007	0.3423	0.7066	0.5241	0.7269
	ekvidisztáns	0.2274	0.3424	0.7288	0.5571	0.7275
	rel. hat. (%)	88.26	99.97	96.95	94.08	99.92
$n = 8$	optimális	0.1692	0.3351	0.6655	0.5007	0.7111
	ekvidisztáns	0.2222	0.3352	0.6918	0.5441	0.7115
	rel. hat. (%)	76.15	99.97	96.20	92.02	99.94
$n = 9$	optimális	0.1620	0.3300	0.6325	0.4858	0.6997
	ekvidisztáns	0.2184	0.3301	0.6626	0.5348	0.7001
	rel. hat. (%)	74.18	99.97	95.46	90.84	99.94

2.1. táblázat. Az IMSPE, illetve az entrópia optimális értékei, valamint ezek relatív hatékonysága monoton minta esetén.

választással. Nyilvánvaló, hogy mindhárom esetben $d_1 + \delta_1 \neq d_2 + \delta_2$, így tehát a 2.26. Tétel értelmében a 2.2. táblázatban kapott minták az entrópia kritérium szerint nem optimálisak.

	$\alpha = \beta = 0.5$	$\alpha = \beta = 1$	$\alpha = \beta = 1.5$
$d_1 = d_3$	0.3372	0.3401	0.3421
d_2	0.3256	0.3199	0.3158
$\delta_1 = \delta_3$	0.3372	0.3401	0.3421
δ_2	0.3256	0.3199	0.3158

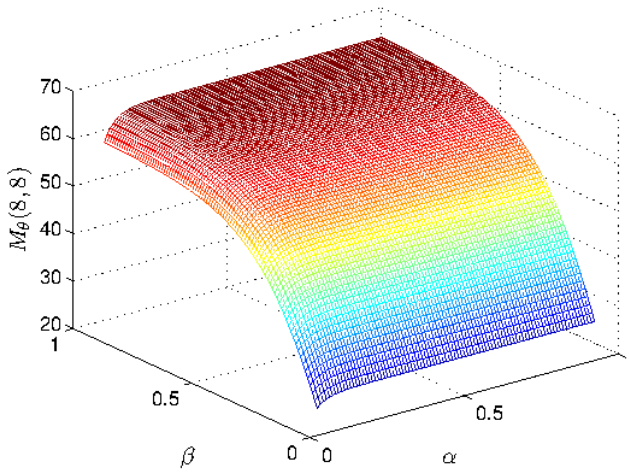
2.2. táblázat. IMSPE kritérium szerinti négyponos optimális minta

		$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$
		$\beta = 0.01$	$\beta = 1$	$\beta = 1$	$\beta = 10$
D-optimalitás	monoton	1.3118	29.8651	61.2545	63.9937
	sz. rács	1.3328	57.4388	63.7483	64.00
	rel. hat.(%)	98.43	51.99	96.09	99.99
Entrópia	monoton	-33.0446	86.1318	90.7964	90.8121
	sz. rács	-51.1507	90.7111	90.8119	90.8121
	rel. hat.(%)	64.60	94.95	99.98	100

2.3. táblázat. A Fisher-féle információ determinánsának, valamint az entrópia függvénynek az értékei az optimális monoton mintavétel, valamint az optimális szabályos rács esetén.

2.6.2. A két minta statisztikai hatékonyságának összehasonlítása

Mint korábban már említettük, az OU folyamatok és mezők széleskörű alkalmazásokkal bírnak a statisztikai modellezés terén. Például, bár a metán kibocsátása egy igen komplikált sztochasztikus folyamattal írható le (Addiscott, 2010; Sabolová *et al.*, 2013), megfigyelték, hogy a metán kinetikus reakciói jól modellezhetők egy kétdimenziós OU folyamat segítségével. Így lehetőségünk nyílt valós adatokon keresztül összehasonlítást végezni a különböző minták statisztikai hatékonyságára az egyes kritériumok segítségével. Először tekintsük a Vaghjani és Ravishankara (1991) által alkalmazott modellt, amelyet a légköri metán áramlásának mérésére használtak. A 2.3. Tételben, illetve a 2.5. Tételben sikerült egzakt alakot adni a D-optimalitás alapját képző Fisher-féle információra mindkét vizsgált mintavételi elrendezés esetén. Kíváncsiak voltunk az $n \times m$ pontból álló monoton halmazt alkotó mintavételi elrendezés esetén az $M_\theta(n \cdot m)$ optimális értékének, valamint az ugyanennyi pontból álló szabályos rácshoz tartozó $M_\theta(n, m)$ optimális értékének viszonyára. Mivel Vaghjani és Ravishankara (1991) egy 62 pontból álló mintát tekintett, így az összehasonlítást a Vaghjani és Ravishankara (1991) cikkben található $[223, 420] \times [0.84, 43.51]$ mintatéren 64 pontos monoton mintát, illetve 8×8 -as szabályos rácsot tekintve hajtottuk végre az $\alpha, \beta \in \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 10\}$ kovariancia paraméterek különböző kombinációi esetén. A 2.3. táblázat az $M_\theta(64)$, illetve az $M_\theta(8, 8)$ optimális értékeit, valamint azok relatív hatékonyságait tartalmazza az (α, β) korrelációs paraméterek néhány kombinációjára. Megfigyelve a táblázat értékeit azt mondhatjuk, hogy például $\alpha = 0.1, \beta = 1$ választása mellett a monoton halmazt alkotó minta esetén jóval alacsonyabb a θ paraméterre vonatkozó Fisher-féle információ, mint szabályos rács esetén, amíg a paraméterek többi kombinációját tekintve a relatív hatékonyság közel 100%. A 2.6. ábrán láthatjuk



2.6. ábra. $n = 8$ és $m = 8$ esetén a θ paraméterre vonatkozó Fisher-féle információ optimuma az (α, β) korrelációs paraméterek függvényében.

$n = 8$, $m = 8$ esetén a θ paraméterre vonatkozó Fisher-féle információmennyiség optimumát az (α, β) paraméterek függvényében. A vizsgálatokat elvégeztük a 2.26. Tételben és 2.29. Tételben meghatározott entrópia kritériumok esetén is. Ekkor teljesen hasonló eredményeket kaptunk, mint a D-optimalitás során. Ahogy a 2.6.1. fejezetben láthattuk, az IMSPE kritériummal végzett numerikus szimulációk végrehajtását erősen befolyásolja a minta nagysága, így Vaghjiani és Ravishankara

		$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 3$
		$\beta = 0.8$	$\beta = 1$	$\beta = 10$	$\beta = 1.5$	$\beta = 3$
$n = 4$	monoton	0.2602	0.4008	0.9266	0.6549	0.8487
	sz. rács	0.3580	0.5389	1.1449	0.8370	1.0094
	rel. hat. (%)	137.59	134.46	123.56	127.81	118.93
$n = 9$	monoton	0.1620	0.3300	0.6325	0.4858	0.6997
	sz. rács	0.1527	0.3018	0.5762	0.4850	0.7011
	rel. hat. (%)	94.26	91.45	91.10	99.84	100.20

2.4. táblázat. Az IMSPE optimális értékei monoton halmazt és szabályos rácsot alkotó minta esetén, valamint ezek relatív hatékonyságai.

		$\alpha=0.001$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.1$	$\alpha=1$	$\alpha=1$
		$\beta=0.01$	$\beta=0.01$	$\beta=1$	$\beta=1$	$\beta=10$
D-opt.	Bonard <i>et al.</i> (2002)	3.13	8.78	8.99	9.00	9.00
	mon., $n = 9$	3.21	8.91	9.00	9.00	9.00
	3×3 sz. rács	3.03	7.67	9.00	9.00	9.00
Entrópia	Bonard <i>et al.</i> (2002)	9.86	12.77	12.77	12.77	12.77
	mon., $n = 9$	11.22	12.77	12.77	12.77	12.77
	3×3 sz. rács	9.22	12.72	12.77	12.77	12.77

2.5. táblázat. Bonard *et al.* (2002), Table 1 mintavételi elrendezéseinek összehasonlítása a megfelelő optimális monoton halmazon és optimális szabályos rácson megfigyelt mintával.

(1991) eredményeire ebben az esetben nem tudjuk az összehasonlítást elvégezni. Ehelyett a 2.19. Tételben, illetve a 2.24. Tételben meghatározott egzakt alakok segítségével az $n = m^2 < 10$ pontból álló monoton, illetve szabályos rácsot alkotó minták esetén végeztük el a numerikus optimalizálásokat. A 2.4. táblázat tartalmazza a kapott optimális értékeket, valamint azok relatív hatékonyságait különböző nagyságú minták és (α, β) korrelációs paraméterek esetén. Összehasonlítva a kapott értékeket elmondhatjuk, hogy a négyponos mintavételt tekintve a monoton halmazt alkotó minta esetén az IMSPE optimális értékei jobbak, mint szabályos rács esetén, az $n = 9$, $\alpha = \beta = 3$ választással pedig a relatív hatékony-

		$\alpha=0.001$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.1$	$\alpha=1$	$\alpha=1$
		$\beta=0.01$	$\beta=0.01$	$\beta=1$	$\beta=1$	$\beta=10$
$D - opt.$	Bonard <i>et al.</i> (2002)	1.19	6.91	7.09	8.78	9.25
	mon., $n = 10$	1.19	9.52	9.72	10.00	10.00
	2×5 sz. rács	1.19	2.05	6.35	6.35	10.00
	5×2 sz. rács	1.19	5.12	9.92	9.92	10.00
Entrópia	Bonard <i>et al.</i> (2002)	-0.82	11.93	12.51	14.07	14.13
	mon., $n = 10$	2.78	14.19	14.19	14.19	14.19
	2×5 sz. rács	-2.58	-0.72	13.82	13.82	14.19
	5×2 sz. rács	0.63	8.25	14.19	14.19	14.19

2.6. táblázat. Bonard *et al.* (2002), Table 2 mintavételi elrendezéseinek összehasonlítása a megfelelő optimális monoton halmazon és optimális szabályos rácson megfigyelt mintával.

ság közel 100%.

2.6.3. A két mintavételi elrendezés összehasonlítása a metánnak a hidroxillal való reakciója esetén

A metán kibocsátása és elnyelése nagyon fontos szerepet játszik mind a légkörben (lásd például Vaghjani és Ravishankara (1991)) mind pedig a Föld felszínén (lásd például Li, Huang és Song (2010)). Néhány jelentős ökológiai folyamat, mint például a metán égése és ennek a természetben fellelhető mikroergodicitásai esetén azt tapasztalták, hogy a különböző mintavételek közül az optimális kiválasztásával csökkenthető a paraméterbecslések során megjelenő bizonytalanság (Jordanova, Dušek és Stehlík, 2013). Így kulcsfontosságú, hogy mérés előtt megadjuk azokat a helyeket, ahol a megfigyeléseket célszerű elvégezni. A metán légköri koncentrációját a troposzférában az OH hidroxil-gyökkel való reakciója szabályozza. A metán légköri koncentrációja nagyban hozzájárul a Föld légkör rendszerének energiamérlegéhez, illetve az üvegházhatáshoz. Ha ugyanis a globális felszíni hőmérséklet emelkedik, nő a metánkoncentráció, ezáltal pedig nő az üvegházhatás. Tehát a metánnak a hidroxillal való reakcióját a hőmérséklet erősen befolyásolja. Bonard *et al.* (2002) például a $295 - 618K$ hőmérséklet tartományban vizsgálta az OH és a metán reakciójának a sebességi állandóját. A 2.5.–2.8. táblázatban a Fisher-féle információs mátrix determinánsát és az entrópia értékét adjuk meg mind a megfelelő optimális monoton halmaz és szabályos rács, mind pedig Bonard *et al.* (2002) által alkalmazott mintavételi elrendezés esetére. A táblázatokat megfigyelve elmondható, hogy a legtöbb esetben mind a monoton halmazt, mind pedig a szabályos rácsot tekintve a kapott optimum értékek felülmúlják az eredeti

		$\alpha=0.001$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.1$	$\alpha=1$	$\alpha=1$
		$\beta=0.01$	$\beta=0.01$	$\beta=1$	$\beta=1$	$\beta=10$
$D - opt.$	Bonard <i>et al.</i> (2002)	1.18	6.73	6.92	7.63	9.02
	mon., $n = 12$	1.18	10.86	11.22	12.00	12.00
	3×4 sz. rács	1.19	3.07	8.68	8.68	12.00
	4×3 sz. rács	1.19	4.09	10.45	10.45	12.00
Entrópia	Bonard <i>et al.</i> (2002)	-5.78	3.08	12.33	12.95	16.46
	mon., $n = 12$	1.91	17.01	17.02	17.03	17.03
	3×4 sz. rács	-4.05	1.14	16.79	16.79	17.03
	4×3 sz. rács	-2.94	4.50	16.98	16.98	17.03

2.7. táblázat. A Bonard *et al.* (2002), Table 3 mintavételi elrendezéseinek összehasonlítása a megfelelő optimális monoton halmazon és optimális szabályos rácson megfigyelt mintával.

		$\alpha=0.001$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.1$	$\alpha=1$	$\alpha=1$
		$\beta=0.01$	$\beta=0.01$	$\beta=1$	$\beta=1$	$\beta=10$
<i>D – opt.</i>	Bonard (2002), $n = 7$	1.01	1.15	1.56	2.22	4.50
	Bonard (2002), $n = 6$	1.01	1.15	1.56	2.22	4.49
	mon., $n = 7$	1.01	1.15	1.57	2.86	5.44
	mon., $n = 6$	1.01	1.15	1.57	2.83	5.07
	2×3 sz. rács	1.01	1.15	1.62	2.69	5.60
	3×2 sz. rács	1.01	1.15	1.61	3.17	4.54
Entrópia	Bonard (2002), $n = 7$	-8.31	-6.44	4.98	5.18	8.94
	Bonard (2002), $n = 6$	-5.43	-3.56	5.55	5.75	8.38
	mon., $n = 7$	-6.79	2.95	6.48	8.96	9.86
	mon., $n = 6$	-4.97	3.13	6.00	7.91	8.49
	2×3 sz. rács	-8.73	-2.25	6.19	7.38	8.51
	3×2 sz. rács	-9.25	-0.33	5.50	8.10	8.41

2.8. táblázat. A Bonard *et al.* (2002), Table 4 mintavételi elrendezéseinek összehasonlítása a megfelelő optimális monoton halmazon és optimális szabályos rácson megfigyelt mintával.

mintavételi eljárás által adott értékeket. Dunlop és Tully (1993) két esetben vizsgálták az abszolút reakciósebességi állandót: az OH -nak egyrészt a CH_4 metánnal (k_1), másrészt pedig a d_4 (k_2) deuterált metánnal való reakcióját tekintve. A k_1 és

		$\alpha=0.001$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.1$	$\alpha=1$	$\alpha=1$
		$\beta=0.01$	$\beta=0.01$	$\beta=1$	$\beta=1$	$\beta=10$
<i>D – opt.</i>	Dunlop és Tully (1993)	4.57	9.49	10.00	10.00	10.00
	mon., $n = 10$	4.76	9.97	10.00	10.00	10.00
	2×5 sz. rács	4.91	7.87	10.00	10.00	10.00
	5×2 sz. rács	2.50	9.99	10.00	10.00	10.00
Entrópia	Dunlop és Tully (1993)	12.23	14.14	14.19	14.19	14.19
	mon., $n = 10$	13.36	14.19	14.19	14.19	14.19
	2×5 sz. rács	12.97	14.09	14.19	14.19	14.19
	5×2 sz. rács	8.20	14.19	14.19	14.19	14.19

2.9. táblázat. A Dunlop és Tully (1993), Table 1 (k_1) mintavételi elrendezéseinek összehasonlítása a megfelelő optimális monoton halmazon és optimális szabályos rácson megfigyelt mintával.

		$\alpha=0.001$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.1$	$\alpha=1$	$\alpha=1$
		$\beta=0.01$	$\beta=0.01$	$\beta=1$	$\beta=1$	$\beta=10$
Dunlop és Tully (1993)		3.08	11.77	11.98	12.00	12.00
$D - opt.$	mon., $n = 12$	3.15	11.85	12.00	12.00	12.00
	3×4 sz. rács	3.37	8.09	12.00	12.00	12.00
	4×3 sz. rács	3.12	9.96	12.00	12.00	12.00
Dunlop és Tully (1993)		11.26	17.03	17.03	17.03	17.03
Entrópia	mon., $n = 12$	13.70	17.03	17.03	17.03	17.03
	3×4 sz. rács	12.98	16.67	17.03	17.03	17.03
	4×3 sz. rács	11.32	16.94	17.03	17.03	17.03

2.10. táblázat. A Dunlop és Tully (1993), Table 2 (k_2) mintavételi elrendezéseinek összehasonlítása a megfelelő optimális monoton halmazon és optimális szabályos rácson megfigyelt mintával.

k_2 meghatározása a $293 - 800K$ hőmérséklet tartományban történt. Felhasználva Dunlop és Tully (1993), Table 1, illetve Table 2 eredményeit a korábbi reakciós eredményekhez hasonlóan elkészítettük a 2.9. és 2.10. táblázatokat. Az értékeket megfigyelve ugyanarra a következtetésre jutunk, mint Bonard *et al.* (2002) adatai esetén, azaz mind a monoton, mind pedig a szabályos rácst alkotó minta sokkal hatékonyabb, mint az eredeti.

Összefoglalás

Ezen disszertáció témája különféle térbeli sztochasztikus modellek paraméterbecslésének, valamint optimális mintavételezésének vizsgálata. Az értekezés két részből tevődik össze.

A dolgozat 1. fejezete Gauss mezőkkel meghajtott lineáris modellek paraméterbecsléseivel foglalkozik. Az 1. fejezet első része a témakör egy részleges irodalmi áttekintését adja, kihangsúlyozva a már meglévő eredményeknek és az értekezés új eredményeinek csatlakozási pontjait. A paraméterbecslések vizsgálatának lényegi részét az 1.3. és 1.4. alfejezetek adják, amelyek a szerzőnek Baran Sándorral elért új eredményeit tartalmazzák. A vizsgált térbeli regressziós modell

$$Z(s, t) := m_1 g_1(s, t) + \dots + m_p g_p(s, t) + U(s, t),$$

amelyet egy speciális G tartomány felett figyelünk meg, ahol $g_1, \dots, g_p$ ismert függvények, U pedig egy Wiener vagy pedig egy Ornstein-Uhlenbeck (OU) mezőt jelöl. Célunk az $m_1, \dots, m_p$ ismeretlen paraméterek maximum likelihood becslésének meghatározása.

Bizonyos speciális esetekben többen foglalkoztak ezen problémakörrel, mint például Rozanov (1968) $p = 1$, $g_1 \equiv 1$ esetén, amikor a standard Wiener mezővel meghajtott folyamatot egy téglalapon figyelte meg. Ezt általánosította Arató, N. M (1997a) olyan módon, hogy a megfigyelési tartományt bonyolultabbá tette. Baran, Pap és Zuilen (2003, 2004, 2011) három eltérő egyre komplexebb tartomány felett figyelte meg a folyamatot és jóval általánosabb körülmények között $p = 1$ esetén a Rozanov (1990) és Arató, N. M (1997a) által használt sztochasztikus parciális differenciálegyenletek helyett az úgynevezett diszkrét approximáció segítségével igazolta, hogy az m_1 eltolásparaméter maximum likelihood becslése normális eloszlású.

Mi Baran, Pap és Zuilen (2011) cikkében leírt eredményt általánosítottuk úgy, hogy a regressziós modellben az ismeretlen paraméterek számát tetszőleges p tagra növeltük. A fejezet fő eredménye (1.3. Tétel) ezen általános esetben a maximum likelihood becslés alakjának meghatározása és p -dimenziós normalitásának igazolása diszkrét approximáció segítségével. Erre az eredményre támaszkodva alkalmas transzformációk segítségével megadtuk az $(m_1, \dots, m_p)^\top$ paramétervektor

becslését azokban az esetekben is, amikor a meghajtó folyamat stacionárius, illetve nulla kezdeti értékű OU mező. Arató, N. M (1997a), Baran, Pap és Zuiljen (2003, 2004, 2011) egyes állításait, valamint a dolgozatban ismertetett új eredményeket a fejezet végén szimulációs vizsgálatokkal támasztottuk alá. A fenti eredmények Baran és Sikolya (2012a, b) cikkekben kerültek közlésre.

A 2. fejezetben különböző kritériumok szerinti optimális mintavételi elhelyezések meghatározását vizsgáltuk konstans trenddel eltolt OU mező esetén. Az itt leírt eredményeket Baran Sándorral és Milan Stehlíkkal közösen értük el és a Baran, Sikolya és Stehlík (2013, 2014) dolgozatokban közzöltük.

A vizsgált modell $\mathbb{R}^2$ egy a tengelyekkel párhuzamos $\mathcal{X}$ téglalapján értelmezett

$$Y(s, t) = \theta + \varepsilon(s, t)$$

stacionárius folyamat, ahol θ konstans, $\varepsilon(s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, pedig egy $\alpha > 0$, $\beta > 0$ paraméterű stacionárius OU mező. Az optimális mintavételi terv meghatározásának többféle típusa van. Az értekezés második felében ezek közül két eljárást vizsgáltunk, nevezetesen a paraméterbecslésen, illetve az előrejelzésen alapulót. Mindkét esetben a folyamatot a mintapontoknak két különböző típusú halmazán megfigyelve határoztuk meg az egyes esetekhez tartozó kritériumok alakjait és optimumait. A mintapontok halmazának két típusa, melyek a monoton halmaz és a szabályos rács, valamint az ezeken megfigyelt folyamat kovariancia struktúrája a 2. fejezet elején kerül részletezésre. Az $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n)\} \subset \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, mintapontok monoton halmazt alkotnak, ha $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ és $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ feltételek teljesülnek, szabályos rács esetén pedig az $\{(s_1, t_1), (s_1, t_2), \dots, (s_n, t_m)\} \subset \mathcal{X}$, $n, m \in \mathbb{N}$, megfigyelési helyek egy $n \times m$ -es téglalap rácsponthai.

Ezt követően a 2.3. fejezetben a paraméterbecslésen alapuló D-optimalitási kritériumot vizsgáltuk az összes lehetséges esetben. A D-optimális mintavételi eljárás alatt azt értjük, amikor a mintapontoknak egy olyan elrendezését keressük, amely szerint a $\Phi(M) := \det(M)$ célfüggvény maximális, ahol M az Y véletlen mező megfigyeléseinek Fisher-féle információs mátrixa. Az első esetben a θ trend paraméter becslésére vonatkozó D-optimális mintavételt tekintettük. Ekkor a folyamatot meghajtó ε OU mező kovariancia struktúrájának paraméterei mind adottak és csak a θ trend paraméter becslésére vonatkozó optimális elrendezést keressük. Monoton halmazt alkotó mintapontok esetén először Baran és Stehlík (2014) eredményeit ismertettük, amely szerint a θ trend paraméter becslésére szolgáló D-optimális mintavételt egy olyan alakú minta adja, ahol $\alpha d_i + \beta \delta_i$, $d_i := s_{i+1} - s_i$, $\delta_i := t_{i+1} - t_i$ $i = 1, 2, \dots, n-1$, mennyiség konstans. Ezek után szabályos rács esetén új eredményként megadtuk a D-optimalitáshoz szükséges Fisher-féle információ egzakt alakját és megmutattuk, hogy a θ paraméter becslésére vonatkozó D-optimális mintavételt az iránymenti ekvidisztáns minta adja.

A következő lépésként az OU mező kovariancia paramétereinek becslésére vonatkozó D-optimalitást vizsgáltuk. A trend paraméter becslésére vonatkozó esethez

hasonlóan monoton halamazt alkotó mintapontok esetén Baran és Stehlík (2014) meghatározta a Fisher-féle információs mátrix egzakt alakját és igazolta, hogy az α , β kovariancia paraméterek becslésére vonatkozó D-optimális mintavétel nem létezik. Ennek analógiáját követve szabályos rácson megfigyelt folyamat esetén a 2.7. Tételben megadtuk a Fisher-féle információs mátrix elemeinek zárt alakját, majd két speciális D-optimalitási mintavételt bevezetve, nevezetesen a korlátozott és szabad mintavételezést, igazoltuk, hogy az α , β kovariancia paraméterek becslésére vonatkozó korlátozott D-optimális mintavétel nem létezik. Korlátozott D-optimális mintavétel alatt azt értjük, amikor az optimális minta az $\mathcal{X}$ mintatér határának rácspontjait is tartalmazza, ellenkező esetben szabad mintavételezésről beszélhetünk. Vizsgáltuk a szabad mintavételezésnek egy speciális esetét is, amikor a mintavétel rácspontjainak horizontális, valamint vertikális távolságai rendre azonosak és az optimalitást ezen két paraméter szerint értelmezzük. Ebben a speciális esetben igazoltuk a D-optimális minta megadásához szükséges Fisher-féle információs mátrix determinánsának maximumáról szóló 2.14. Tételt.

A legáltalánosabb esetben, amikor mind az α , β , mind pedig a θ paraméter ismeretlen, monoton megfigyelések esetén Baran és Stehlík (2014) igazolta, hogy az α , β kovariancia paraméterek és a θ trend paraméter becslése szerinti D-optimális mintavétel nem létezik. Szabályos rácson az optimális mintavételi eljárás megadásához szükséges Fisher-féle információs mátrix determinánsfüggvényének nehezen kezelhetősége miatt két speciális esetben, nevezetesen az $\mathcal{X} = [0, 1]^2$ mintatéren egy kilencpontos korlátozott minta, valamint egy ekvidisztáns szabad minta esetén határoztuk meg a D-optimális mintavételi elrendezést.

A 2.4. és 2.5. fejezetekben egy folyamat előrejelzésén alapuló két kritérium szerinti optimális mintavételi elrendezést vizsgáltunk a mintapontok mindkét rendszerét tekintve.

Az első tárgyalt kritérium az úgynevezett Integrated Mean Squared Prediction Error (IMSPE), amely a folyamat egy új megfigyelési pontbeli krigelemssel elkészített becsült értékének az átlagos négyzetes hibáján alapszik. Mivel a becslés pontossága általában függ a teljes $\mathcal{X}$ mintatértől, az IMSPE kritérium szerinti optimális mintavételt a mintatér felett tekintett átlagos négyzetes hiba integráljának minimumhelyeként kapjuk. Monoton megfigyelések esetén a 2.19. Tételben megadtuk az IMSPE kritérium egzakt alakját. Ezen alakot megvizsgálva a 2.21. Tételben igazoltuk, hogy az IMSPE szimmetrikus abban az értelemben, hogy a (d_i, δ_i) és (d_{n-i}, δ_{n-i}) , $d_i := s_{i+1} - s_i$, $\delta_i := t_{i+1} - t_i$ $i = 1, 2, \dots, n-1$, távolság párok felcserélésével az IMSPE értéke változatlan marad. Ennek egyenes következménye, hogy az IMSPE kritérium szerinti optimális minta szimmetrikus. Szabályos rácsot alkotó mintapontok esetén is meghatároztuk az MSPE, illetve az IMSPE függvények zárt alakját, valamint igazoltuk, hogy az IMSPE kritérium szerinti optimális mintavételt az iránymenti ekvidisztáns minta adja. A szabályos rács esetén kapott eredmények Baldi Antognini és Zagoraiou (2010) OU folyamatra megfogalmazott állításainak kiterjesztése két dimenzióra.

Az IMSPE kritériumon kívül az általunk vizsgált másik előrejelzésen alapuló optimális mintavétel meghatározására szolgáló mennyiség az úgynevezett entrópia kritérium. Shewry és Wynn (1987) ötletét követve az optimális mintát a megfigyelések entrópiájának maximalizálásával határoztuk meg a mintapontok mindkét különböző halmaza esetén. Mindkét pontrendszer esetén megadtuk az eljárás alapjául szolgáló entrópia alakját és igazoltuk, hogy monoton halmazt alkotó mintavételi pontokat tekintve az entrópia kritérium szerinti optimális mintavételt az az ekvidisztáns minta adja, ahol $\alpha d_i + \beta \delta_i$, $d_i := s_{i+1} - s_i$, $\delta_i := t_{i+1} - t_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, konstans, szabályos rácsot alkotó minta esetén pedig a $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1}$ és $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{m-1}$, $d_i := s_{i+1} - s_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $\delta_j := t_{j+1} - t_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, iránymenti ekvidisztáns minta.

Az utolsó szakaszban szimuláció keretében hasonlítottuk össze az IMSPE és az entrópia kritériumot, valamint megvizsgáltuk a két mintavételi elrendezés viselkedését mindhárom kritérium esetén. Ez utóbbi esetben kihasználva, hogy a metán kinetikus reakciói jól modellezhetők egy térbeli OU mező segítségével, lehetőségünk volt valós adatokon (Vaghjani és Ravishankara, 1991; Bonard *et al.*, 2002; Dunlop és Tully, 1993) keresztül is elvégezni a különböző minták statisztikai hatékonyságának összehasonlítását.

Summary

This Ph. D thesis contains new results on the parameter estimation and optimal design problems of spatial stochastic models. It consists of two parts, which can be treated separately.

In the first part we deal with the problem of estimating the parameters of a linear regression model driven by a Gaussian sheet. We consider a random field

$$Z(s, t) := m_1 g_1(s, t) + \cdots + m_p g_p(s, t) + U(s, t)$$

observed on a domain G , where $g_1, \dots, g_p$ are known functions and U is either a Wiener or an Ornstein-Uhlenbeck (OU) sheet, and we determine the maximum likelihood estimator (MLE) of the unknown parameters $m_1, \dots, m_p$.

In principle, the Radon-Nikodym derivative of Gaussian measures might be derived from the general Feldman-Hajek theorem (Kuo, 1975), but in most of the cases explicit calculations cannot be carried out. In the case when U is a standard Wiener sheet, $p = 1$ and $g_1 \equiv 1$ (shifted Wiener sheet), the MLE of the unknown parameter is given, e.g., in Rozanov (1968), where the estimator is expressed as a function of a usually unknown random variable satisfying some characterizing equation. In several cases the exact form of this random variable can be derived by a method proposed by Rozanov (1990), based on linear stochastic partial differential equations. Arató, N. M (1997a) used Rozanov's method to find the MLE of the shift parameter of a shifted Wiener sheet observed on a special domain. Baran, Pap and Zuiljen (2004) considered the model of Arató, N. M (1997a) and, applying an essentially simpler direct discrete approximation approach, the authors found the MLE of the shift parameter under much weaker conditions. Later this discrete approximation was used to determine the MLE of the unknown parameter for the investigated model with $p = 1$ and a more complicated domain of observations, when U is a standard Wiener sheet.

Arató, N. M. (1997b) also studied the case when U is an OU sheet, $p = 1$ and $g_1 \equiv 1$, and using stochastic partial differential equations found the MLE of the unknown parameter based on the observation of the random field Z on a rectangular domain. This result was generalized by Baran, Pap and Zuiljen (2003) for the case $p = 1$ and given g_1 with slight analytic restrictions.

In Chapter 1 we consider the same type of domain G as in Baran, Pap and Zuiljen (2011) and extend their result for the general model $Z(s, t) := m_1 g_1(s, t) + \dots + m_p g_p(s, t) + W(s, t)$. We also consider the cases when the driving process U is either a stationary or a zero start OU sheet and generalize the results of Arató, N. M. (1997b) and Baran, Pap and Zuiljen (2011). At the end of this chapter we present some simulation results to illustrate the theoretical ones where the driving Gaussian random sheets are simulated with the help of their Karhunen-Loève expansions. These results are published in Baran and Sikolya (2012a, b).

In the second part of the dissertation we deal with optimal design problems for parameter estimation and prediction of shifted OU sheets. A common problem in spatial statistics is how to choose a set of sample locations in order to induce accurate prediction of a random process, considerable amount of experimental information and also efficient estimation of the unknown parameters of the model. Each of these goals identify a different design criterion, which can be optimized in order to derive the corresponding optimal experimental plan.

In Chapter 2 we study optimal design problem for parameter estimation and prediction of a shifted OU sheet. We consider the stationary process

$$Y(s, t) = \theta + \varepsilon(s, t)$$

defined on a rectangle $\mathcal{X} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ of $\mathbb{R}^2$ where ε is a stationary OU field with covariance parameters $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Two different settings of design points are considered, monotonic set and regular grid. In the first case the design points $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n)\} \subset \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, satisfy $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ and $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, while in the second the design $\{(s_i, t_j) : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\} \subset \mathcal{X}$, $n, m \in \mathbb{N}$, are grid points of a rectangular lattice.

Section 2.3. deals with D-optimality – a design criterion for parameter estimation based on Fisher information. We are looking for an arrangement of design points that maximizes the determinant of the Fisher information matrix of observations of the random field Y corresponding to the parameters to be estimated. First we are interested merely in the estimation of the trend parameter θ assuming that all covariance parameters of the OU sheet ε are given. In the case of a monotonic set Baran and Stehlík (2014) showed that the equidistant design where $\alpha d_i + \beta \delta_i$, $d_i := s_{i+1} - s_i$, $\delta_i := t_{i+1} - t_i$ $i = 1, 2, \dots, n-1$, is constant is optimal for estimation of θ . As a new result we derive the exact form of the Fisher information on the trend parameter in case of a regular grid design and show that the directionally equidistant design $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1}$ and $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{m-1}$, $d_i := s_{i+1} - s_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $\delta_j := t_{j+1} - t_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$ is optimal.

In the next step we investigate D-optimality for estimation of the covariance parameters α and β of the OU sheet provided the trend is known. For monotonic sets Baran and Stehlík (2014) derived the exact form of the Fisher information matrix and they showed that the design which is optimal for estimation of the covariance parameters α , β does not exist. In a similar way, in Theorem 2.7. we

specify the exact form of the Fisher information matrix for regular grid designs. However, for regular grids two different notions of D-optimality are considered: restricted and boundary free. Usually the grid containing the design points can be arranged arbitrary in the design space $\mathcal{X}$ (boundary free design), but we may also require that it should contain the vertices of $\mathcal{X}$ (and the lattice points of the boundary as well). In the latter case we talk about restricted D-optimality and similar to the monotonic case we prove that the restricted D-optimal design for estimation of the covariance parameters does not exist. We also investigate boundary free directionally equidistant designs, that is designs where $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1} =: d$ and $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{m-1} =: \delta$, $d_i := s_{i+1} - s_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $\delta_j := t_{j+1} - t_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$ and we prove Theorem 2.14., which gives us some idea about the behaviour of the determinant of Fisher information matrix.

In the most general case, when both the covariance parameters α , β and the trend parameter θ are unknown, Baran and Stehlík (2014) proved that the monotonic design which is optimal for estimation of all three parameters does not exist. In case of a regular grid the main problem is the extremely complex form of the Fisher information matrix. Hence, we study only two special cases. We derive the D-optimal arrangement of observation points for a restricted nine-point design and for the boundary free equidistant design.

In Sections 2.4. and 2.5. we investigate the optimal design for prediction of the random field Y with respect to two different optimality criteria for both arrangements of design points. First we study the so-called Integrated Mean Squared Prediction Error (IMSPE) criterion. It is well-known that the main aim of the kriging technique consists in predicting output of the simulator on the experimental region, and for any untried location $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ the estimation procedure is focused on the best linear unbiased estimator of $\hat{Y}(x_1, x_2)$ of $Y(x_1, x_2)$. Thus natural criteria will minimize suitable functionals of the Mean Squared Prediction Error (MSPE). Since the prediction accuracy is often related to the entire prediction region $\mathcal{X}$ the design criterion IMSPE is given by

$$\text{IMSPE}(\hat{Y}) := \sigma^{-2} \iint_{\mathcal{X}} \text{MSPE}(\hat{Y}(x_1, x_2)) dx_1 dx_2.$$

In Theorem 2.19. we derive the exact form of the IMSPE function for a shifted OU sheet observed in points satisfying the monotonicity condition. Then we show that IMSPE is symmetric in the sense that the interchange of pairs of distances (d_i, δ_i) and (d_{n-i}, δ_{n-i}) , $d_i := s_{i+1} - s_i$, $\delta_i := t_{i+1} - t_i$ $i = 1, 2, \dots, n-1$, does not change the value of $\text{IMSPE}(\hat{Y})$. As a consequence we immediately obtain that the optimal design with respect to IMSPE criterion is symmetric, that is if the optimum of $\text{IMSPE}(\hat{Y})$ is reached at $(d_1^*, d_2^*, \dots, d_{n-1}^*, \delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_{n-1}^*)$ then $d_i^* = d_{n-i}^*$ and $\delta_i^* = \delta_{n-i}^*$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. For regular grid designs we also determine the closed forms of MSPE and IMSPE functions and we show that the directionally equidistant design $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1}$ and $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{m-1}$

$d_i := s_{i+1} - s_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $\delta_j := t_{j+1} - t_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, is optimal with respect to the IMSPE criterion. We remark that this result generalizes the IMSPE criterion for classical OU processes and the optimality result of Baldi Antognini and Zagoraiou (2010).

Another possible approach to optimal design is to find locations which maximize the amount of obtained information. Following the ideas of Shewry and Wynn (1987) one has to maximize the entropy of the observations corresponding to the chosen design. In Theorems 2.26. and 2.29. we derive the exact forms of the entropy function for both arrangements of observation points and we show that for monotonic sets the equidistant design where $\alpha d_i + \beta \delta_i$, $d_i := s_{i+1} - s_i$, $\delta_i := t_{i+1} - t_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, is constant, while for regular grids the directionally equidistant design is the optimal one.

In the last part of Chapter 2 we present some numerical experiments in order to compare the performance of IMSPE and entropy criteria and to give a comprehensive comparison of the statistical information of designs for OU sheets. These results are published in Baran, Sikolya and Stehlík (2013, 2014).

Irodalomjegyzék

Addiscott, T.M., 2010. Entropy, non-linearity and hierarchy in ecosystems. *Geoderma* **160**, 57–63.

Arató, M., 1982. *Linear stochastic systems with constant coefficients. A statistical approach*. Springer-Verlag, Berlin; in Russian: Nauka, Moscow, 1989.

Arató, N. M., 1997a. Mean estimation of Brownian sheet. *Comput. Math. Appl.* **33**, no. 8, 13–25.

Arató, N. M., 1997b. Mean estimation of Brownian and Ornstein–Uhlenbeck sheets. *Teor. Veroyatnost i Primen* **42**, 375–376.

Baldi Antognini, A., Zagoraiou, M., 2010. Exact optimal designs for computer experiments via Kriging metamodeling, *J. Statist. Plann. Inference* **140**, 2607–2617.

Baran, S., Pap, G. and Zuijlen, M. v., 2003. Estimation of the mean of stationary and nonstationary Ornstein-Uhlenbeck processes and sheets. *Comput. Math. Appl.* **45**, no. 4-5, 563–579.

Baran, S., Pap, G. and Zuijlen, M. v., 2004. Estimation of the mean of a Wiener sheet. *Stat. Inference Stoch. Process.* **7**, no. 3, 279–304.

Baran, S., Pap, G., Zuijlen M. v., 2011. Parameter estimation of a shifted Wiener sheet. *Statistics* **45**, no. 4, 319–335.

Baran, S., Sikolya, K., 2012a. Parameter estimation in linear regression driven by a Gaussian sheet. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **78** no. 3-4, 689–713.

Baran, S., Sikolya, K., 2012b. Parameter estimation in linear regression driven by a Wiener sheet. *Ann. Math. Inform.* **39**, 3–15.

Baran, S., Sikolya, K., Stehlík, M., 2013. On the optimal designs for prediction of Ornstein-Uhlenbeck sheets. *Statist. Probab. Lett.* **83**, 1580–1587.

- Baran, S., Sikolya, K., Stehlík, M., 2014. Optimal designs for the methane flux in troposphere. *Chemometr. Intell. Lab. Syst.*, benyújtva.
- Baran, S., Stehlík, M., 2014. Optimal designs for parameters of shifted Ornstein-Uhlenbeck sheets measured on monotonic sets, *Statist. Probab. Lett.*, benyújtva (arXiv:1312.0099).
- Bonard, A., Daële, V., Delfau, J.-L., Vovelle, C., 2002. Kinetics of OH radical reactions with methane in the temperature range 295-660 K and with dimethyl ether and methyl-tert-butyl ether in the temperature range 295-618 K, *J. Phys. Chem. A*. **106**, 4384–4389.
- Deheuvels, P., Peccati, G., Yor, M., 2006. On quadratic functionals of the Brownian sheet and related processes. *Stochastic Process Appl.* **116**, 493–538.
- Douglas, J. F., 1996. Swelling and growth of polymers, membranes, and sponges. *Physical Review E*. **54**, 2677–2689.
- Dunlop, J. R., Tully, F. P., 1993. A kinetic study of OH radical reactions with methane and perdeuterated methane, *J. Phys. Chem.* **97**, 11148–11150.
- Feyel, D., de La Pradelle, A., 1995. On infinite dimensional sheets. *Potential Anal.* **4**, 345–349.
- Goldstein, R., 2000. The term structure of interest rates as a random field, *Rev. Financ. Stud.* **13**, 365–384.
- Jaimez, R. G., Bonnet, M. J. V., 1987. On the Karhunen-Loève expansion for transformed processes. *Trabajos Estadíst* **2**, 81–90.
- Jordanova, P., Dušek, J., Stehlík, M., 2013. Microergodicity effects on ebullition of methane modelled by Mixed Poisson process with Pareto mixing variable. *Chemom. Intell. Lab. Syst.* **128**, 124–134.
- Kisefák, J., Stehlík, M., 2008. Equidistant D-optimal designs for parameters of Ornstein-Uhlenbeck process. *Statist. Probab. Lett.* **78**, 1388–1396.
- Kuroda, K., Manaka, H., 1987. The interface of the Ising model and the Brownian sheet. *J. Stat. Phys.* **47**, 979–984.
- Kuo, H. H., 1975. *Gaussian Measures in Banach Spaces*. Springer, Berlin.
- Li, T., Huang, Y., Zhang, W., Song, Ch., 2010. CH₄MODwetland: a biogeophysical model for simulating methane emissions from natural wetlands, *Ecol. Model.* **221**, 666–680.
- Marshall, A. W., Olkin, I., 1979. *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*. Academic Press, New York.

- Matheron, G., 1962. *Traité de Géostatistique Appliquée, vol. 1, Mémoires du Bureau de Recherches Géologiques et Minières*. Editions Bureau de Recherches Géologiques et Minières, vol. 24., Paris.
- Müller, W. G., Stehlík, M., 2009. Issues in the optimal design of computer simulation experiments. *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.* **25**, 163–177.
- Pázman, A., 2007. Criteria for optimal design for small-sample experiments with correlated observations, *Kybern.* **43**, 453–462.
- Pham, H. (Editor), 2006. *Springer Handbook of Engineering Statistics*. Springer Verlag, London.
- Ripley, B., 1981. *Spatial Statistics*. Wiley, New York.
- Rozanov, Yu. A., 1968. *Gaussian Infinite-dimensional Distributions*. (in Russian). Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, Nauka, Moscow.
- Rozanov, Yu. A., 1990. Some boundary problems for generalized random fields. *Theor. Probab. Appl.* **35**, no. 4, 707–724.
- Sabolová, R., Seckarova, V., Dusek, J., Stehlík, M., 2013. Stochasticity versus chaos of methane modelled by moving average. Technical Report.
- Santa-Clara, P., Sornette, D., 2001. The dynamics of the forward interest rate curve with stochastic string shocks. *Rev. Financ. Stud.* **14**, 149–185.
- Santner, T. J., Williams, B. J., Notz, W. I., 2003. *The Design and Analysis of Computer Experiments*. Springer-Verlag, New York.
- Shampine, L. F., 2008. Matlab program for quadrature in 2D. *Appl. Math. Comput.* **202**, 266–274.
- Shewry, M. C., Wynn, H. P., 1987. Maximum entropy sampling. *J. Appl. Stat.* **14**, 165–170.
- Stehlík, M., 2007. D-optimal designs and equidistant designs for stationary processes. In : López-Fidalgo, J., Rodríguez-Díaz, J.M. and Torsney, B. (eds). Proc. mODa8, 205–211.
- Vaghjiani, G. L., Ravishankara, A. R., 1991. New measurement of the rate coefficient for the reaction of OH with methane, *Nature* **350**, 406–409.
- Zagoraiou, M., Baldi Antognini, A., 2009. Optimal designs for parameter estimation of the Ornstein-Uhlenbeck process. *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.* **25**, 583–600.

- Zhu, Z., Stein, M. L., 2005. Spatial sampling design for parameter estimation of the covariance function. *J. Statist. Plann. Inference* **134**, 583–603.
- Xia, G., Miranda, M. L. and Gelfand, A. E., 2006. Approximately optimal spatial design approaches for environmental health data. *Environmetrics* **17**, 363–385.

A szerző publikációi

Referált folyóiratban megjelent, illetve elfogadott cikkek:

1. Baran, S., Sikolya, K., Veress, L., Estimating the risk of a Down's syndrome term pregnancy using age and serum markers: Comparison of various methods. *Comm. Statist. Simulation Comput.* **42** (2013), no. 7, 1654–1672. (IF: 0.288; Math.Rev.: MR3042791; Zbl pre06175740; Scopus)
2. Baran, S., Sikolya, K., Parameter estimation in linear regression driven by a Gaussian sheet. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **78** (2012), no. 3-4, 689–713. (Math.Rev.: MR3057694; Scopus)
3. Baran, S., Sikolya, K., Parameter estimation in linear regression driven by a Wiener sheet. *Ann. Math. Inform.* **39** (2012), 3–15. (Math.Rev.: MR2959877; Zbl 1265.60097; Scopus)
4. Baran, S., Sikolya, K., Stehlík, M., On the optimal designs for prediction of Ornstein-Uhlenbeck sheets. *Statist. Probab. Lett.* **83** (2013), no. 6, 1580–1587. (IF: 0.531; Math.Rev.: MR3048326; Zbl pre06236673; Scopus)
5. Baran, S., Pap, G., Sikolya, K., Testing stability in a spatial unilateral autoregressive model. *Comm. Statist. Theory and Methods* (2014), elfogadva, doi:10.1080/03610926.2013.853792. (IF: 0.284)

Közlésre benyújtott cikkek:

1. Baran, S., Sikolya, K., Stehlík, M., Optimal designs for the methane flux in troposphere. *Chemometr. Intell. Lab. Syst.*, benyújtva (arXiv:1404.1839).

A szerző konferencia-előadásai

1. *A Down szindróma kockázatának elemzése az anya életkora és különböző biokémiai markerek szintje alapján*, XXIX. Országos Tudományos Diákköri Konferencia, I. helyezés, Debrecen, Magyarország, 2008. április 8–10.
2. *Estimating the risk of Down's syndrome term pregnancy using age and serum markers*, 14th Young Statisticians Meeting, Basovizza (Trieste), Olaszország, 2009. október 16–18.
3. *Estimating the risk of a Down's syndrome term pregnancy: comparison of various methods*, 8th International Conference on Applied Informatics, Eger, Magyarország, 2010. január 27–30. (poszter)

4. *Parameter estimation in linear regression driven by a Wiener sheet*, Conference on Stochastic Models and their Applications, Debrecen, Magyarország, 2011. augusztus 22–24. (poszter)
5. *Estimating the risk of a Down's syndrome term pregnancy using age and serum markers*, 2nd Conference of the Central European Network, Zürich, Svájc, 2011. szeptember 12–16,
6. *Estimating the risk of a Down's syndrome term pregnancy using age and serum markers*, ITSM 2011, Debrecen, Magyarország, 2011. október 27.
7. *Parameter estimation in linear regression driven by a Gaussian sheet*, 10th German Probability and Statistics Days, Mainz, Németország, 2012. március 5–9.
8. *Parameter estimation in a spatial linear regression model*, The Third Conference of PhD Students in Mathematics, Szeged, Magyarország, 2012. június 28–30.
9. *Testing stability in a spatial unilateral autoregressive model*, 8th World Congress in Probability and Statistics, Isztambul, Törökország, 2012. július 9–14.
10. *On the optimal designs for prediction of Ornstein-Uhlenbeck sheets*, 15th Applied Stochastic Models and Data Analysis, Mataró (Barcelona), Spanyolország, 2013. június 25–28.
11. *Optimal designs for prediction of shifted Ornstein-Uhlenbeck sheets*, 29th European Meeting of Statisticians, Budapest, Magyarország, 2013. július 20–25.
12. *Stability testing for a special Pickard model*, 18th European Young Statisticians Meetings, Osijek, Horvátország, 2013. augusztus 26–30.
13. *Optimal designs for the methane flux in troposphere*, 11th German Probability and Statistics Days, Ulm, Németország, 2014. március 4–7.
14. *Optimal designs for parameters of shifted Ornstein-Uhlenbeck sheets and of modified Arrhenius model observed on a regular grid*, 3rd Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis, Lisszabon, Portugália, 2014. június 11–14.