



Metrikus terek pályatartó leképezései

doktori (PhD) értekezés tézisei

Papp Ildikó

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2005.

Tartalomjegyzék

Tézisek

1. Vizsgálatok Riemann terekben	1
Alapvető fogalmak és tételek	1
Majdnem konformszimmetrikus Riemann terek	3
2. Vizsgálatok Finsler terekben.....	7
Alapvető fogalmak és tételek	7
Rekurrens Finsler terek geodetikus leképezései.....	11
Általánosított Douglas terek	15
*P-Finsler terek	16

Thesis

1. Investigations in Riemannian spaces.....	20
Some important notations and theorems	20
Nearly conformally symmetric Riemannian spaces	22
2. Investigations in Finsler spaces.....	26
Some important notations and theorems	26
On geodesic mappings of recurrent Finsler spaces	30
A note on a generalized Douglas space.....	34
*P-Finsler spaces with vanishing Douglas tenzor	35

Irodalomjegyzék.....	39
-----------------------------	-----------

A szerző publikációi	42
-----------------------------------	-----------

1. Vizsgálatok Riemann terekben

Egy Riemann tér nem más, mint egy metrikus tenzorral ellátott tér, ahol g_{ij} metrikus tenzor szimmetrikus, pozitív definit, és megadja, hogyan lehet meghatározni a tér két pontja közötti távolságot.

Egy Riemann térben az ívhossz variáció stacionárius megoldásait geodetikusoknak nevezzük. A síkon az egyenes vonalak, a gömbön a főkörök a geodetikusok. Egy tér geodetikusai a Riemann metrika által vannak meghatározva.

Elsőként vizsgáltam a majdnem konformszimmetrikus Riemann tereket. Arra kérdésre kerestem a választ, hogy milyen feltételnek kell teljesülnie egy majdnem konformszimmetrikus Riemann térben, ha a tér geodetikusán leképezhető egy másik Riemann térre. (1. Tétel)

1.1. Alapvető fogalmak és tételek

Egy V^n n -dimenziós differenciálható sokaságot *Riemann térnek* nevezzük, ha megadunk rajta egy kétszer kovariáns, szimmetrikus g_{ij} tenzormezőt. A $g_{ij}(x)$ tenzor egy pozitív definit kvadratikusságot adó együttható rendszere.

A $g_{ij}(x)$ a Riemann tér *metrikus tenzora*, amely meghatározza a mérés alapformuláit.

Legyen V^n egy Riemann tér. A g_{ij} metrikus tenzor parciális deriváltjainak felhasználásával a tér összefüggési koefficiensei határozhatók meg:

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2} g^{h\alpha} (\partial_j g_{i\alpha} + \partial_i g_{j\alpha} - \partial_\alpha g_{ij}), \quad (1.1.1)$$

melyeket a V^n *másodfajú Christoffel féle szimbólumainak* nevezünk.

Minden Riemann tér affinösszefüggő tér. A V^n Riemann tér Christoffel–féle szimbólumai kielégítik az összefüggési koefficiensek transzformációs formuláit.

Egy Riemann térben az ívhossz variáció stacionárius megoldásait geodetikusoknak nevezzük. A geodetikusok kanonikus paraméterre vonatkoztatott egyenlete:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (1.1.2)$$

alakú, ahol a Γ_{jk}^i a tér másodfajú Christoffel-féle szimbólumai.

Az V^n térnek az \bar{V}^n térre történő *geodetikus leképezésén* értjük azt a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a pontjaik között, amelynél az V^n tér minden geodetikus vonala az \bar{V}^n tér geodetikus vonalaiba megy át.

Vonatkoztassuk az V^n teret az x^1, x^2, \dots, x^n koordinátarendszerre, \bar{V}^n teret az $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ koordinátarendszerre. Legyen $x^i = x^i(\bar{x})$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a két tér között. Ezzel \bar{V}^n -ben olyan koordinátatranszformációt hajtunk végre, amely során a két tér egymásnak megfelelő pontjai azonos koordinátákkal rendelkeznek. A továbbiakban ezt a közös koordinátarendszert fogjuk használni.

Tétel:[Szin] Az $f: V^n \rightarrow \bar{V}^n$ leképezés akkor és csak akkor geodetikus leképezés, ha az összefüggési egyenletek kielégítik a

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x) \delta_j^h + \psi_j(x) \delta_i^h \quad (1.1.3)$$

feltételt, ahol ψ_i a V^n egy gradiens vektora.

Ezzel ekvivalens a következő feltétel:

Tétel:[Szin] Az $f: V^n \rightarrow \bar{V}^n$ leképezés akkor és csak akkor geodetikus leképezés, ha a V^n tér $\bar{g}_{ij}(x)$ metrikus tenzora V^n -ben kielégíti a következő egyenletet:

$$\bar{g}_{ij,k}(x) = 2\psi_k(x) \bar{g}_{ij} - \psi_i(x) \bar{g}_{kj} + \psi_j(x) \bar{g}_{ki} \quad (1.1.4)$$

ahol a \bar{g}_{ij} a V^n -beli kovariáns deriváltat jelöl.

Az (1.1.3) és az (1.1.4) a Riemann terek geodetikus leképezéseinek alapegyenletei és ezeket *Levi-Civita f ele egyenleteknek* nevezz uk. [Szin]

Ezzel az adott t r összes geodetikus leképezéseinek halmaza csoportot alkot. A Riemann terek halmazában a geodetikus leképezések egy osztályozást indukálnak, egy osztályban azok a terek vannak, amelyeknek van ugyanarra a V^n Riemann térre geodetikus leképezésük.

Ezt az osztályt az V^n tér *geodetikus osztályának* nevezz uk [Szin] .

A Riemann terek geodetikus leképezései vizsgálata során az első igen fontos eredmény Beltrami nevez hez fűződik. [Szin]

Tétel: Ha létezik $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$ ($n > 2$) geodetikus leképezés, ahol V_n konstans görbületű, akkor \bar{V}_n is konstans görbületű. Bármely konstans görbületű V_n ($n > 2$) térnek létezik bármely konstans görbületű \bar{V}_n térre geodetikus leképezése.

1.2. Majdnem konformszimmetrikus Riemann terek

Definíció: [Ge] Egy n -dimenziós ($n > 3$) V^n Riemann teret majdnem konformszimmetrikus térnek nevezz uk, ha Ricci-tenzora kielégíti a következő felt tetet:

$$R_{ij,k} - R_{ik,j} = \frac{1}{2(n-1)} (R_{,k} \cdot g_{ij} - R_{,j} \cdot g_{ik}), \quad (1.2.1)$$

ahol a “,” szimbólum a V^n -beli kovariáns deriválást jelöli.

A majdnem konformszimmetrikus Riemann tereket az angol elnevezés (nearly conformally symmetric) alapján (NCS)ⁿ-nel jel lj k. Minden konformszimmetrikus t r egyben majdnem konformszimmetrikus tér is. [Ge] Ezen kívül minden n -dimenziós ($n > 3$) harmonikus Ricci-tenzonnal rendelkező Riemann t r ($R_{ij,k} - R_{ik,j} = 0$) is majdnem konformszimmetrikus.

Most tekintsünk egy példát a nem-triviális $(NCS)^n$ létezésére [Rot].

Legyen $M = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^1$ ($n \geq 5$), és a g_{ij} metrikus tenzor a következőképpen adható meg:

$$g_{ij} dx^i dx^j = ((n-1)x^n)^{\frac{2}{n-1}} \cdot f_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (dx^n)^2$$

ahol $i, j=1, 2, \dots, n$ és $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-1$ értékeket vehetnek fel, az $f_{\alpha\beta}(x^1, \dots, x^n)$ tetszőleges Ricci-sík metrika. Ekkor ha a p egy csak x^n -től függő sima függvény, akkor a $\bar{g} = (\exp 2p)g$ majdnem konformszimmetrikus metrika.

1.3. Geodetikus leképezés

Tétel: [Szin] Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a V^n Riemann térnek létezzen nem-triviális geodetikus leképezése egy másik Riemann térre az, hogy az

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}. \quad (1.3.1)$$

$$n\lambda_{i,l} = \mu g_{il} + a_{\alpha i} R^\alpha_l - a_{\alpha\beta} R^\alpha_{il}{}^\beta. \quad (1.3.2)$$

$$(n-1)\mu_{,k} = 2(n+1)\lambda_\alpha R^\alpha_k + a_{\alpha\beta} (R^\alpha_{k,}{}^\beta - R^{\alpha\beta}_{,k}), \quad (1.3.3)$$

differenciálegyenlet-rendszernek létezzen nem-triviális a_{ij} (szimmetrikus tenzormező), λ_i (zérustól különböző vektormező) és μ (skalármező) megoldása.

Tegyük fel, hogy egy majdnem konformszimmetrikus Riemann tér geodetikusan leképezhető egy másik Riemann térre. Legyen az a feladatunk, hogy olyan feltételt keressünk, amely az $(NCS)^n$ -ben szükségképpen teljesül.

A számítások egyszerűsítése érdekében elsőként olyan kisebb összefüggéseket sorolunk fel, melyek teljesülnek $(NCS)^n$ -ben.

1. Lemma: Egy majdnem konformszimmetrikus Riemann térben teljesülnek a következők:

$$R_{k,\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} R_{,k} \quad (1.3.4)$$

$$a_{\alpha i} R_{,\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \cdot a_{\alpha i} R_{,\alpha} \quad (1.3.5)$$

$$a_{\alpha\beta} R_{i,\gamma}^{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2(n-1)} (a \cdot R_{,i} - a_{\alpha i} R_{,\alpha}) \quad (1.3.6)$$

ahol a_{ij} szimmetrikus, reguláris tenzor és $a = a_{\alpha\beta} \cdot g^{\alpha\beta}$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a görbületi tenzor kovariáns deriváltjaira érvényes a Bianchi-azonosság:

$$R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0.$$

Kontraháljuk az egyenlőséget g^{jm} -mel, és az (1.2.1)-t alkalmazva:

$$R_{ilk,\alpha}^\alpha = \frac{1}{2(n-1)} (R_{,k} \cdot g_{ij} - R_{,l} \cdot g_{ik}).$$

Egy újabb, g^{jm} -mel történő kontrakciót alkalmazva (1.3.4)-t kapjuk. Az (1.3.5) és (1.3.6) az (1.3.4) következménye.

2. Lemma: Tegyük fel, hogy egy majdnem konformszimmetrikus Riemann tér geodetikusan leképezhető egy másik Riemann térre, ekkor teljesülnek a következők:

$$a^{\alpha\beta} R_{\alpha i,\beta} = \frac{1}{2(n-1)} (a_{\alpha i} R_{,\alpha} - a R_{,i}) + a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{,i} \quad (1.3.7)$$

$$a_{\alpha\beta} (2R_{i,\alpha}^{\alpha\beta} - R_{,\alpha}^{\alpha\beta} - (n-1)R_{i,\gamma}^{\alpha\gamma\beta}) = a^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta,i} + \frac{n+1}{2(n-1)} (a_{\alpha i} R_{,\alpha} - a R_{,i}) \quad (1.3.8)$$

$$n(\lambda_{i,kj} + \lambda_{j,ki})g^{ij} = (n+1)\mu_{,i} + a_{\alpha i,\beta} R^{\alpha\beta} + a_{\alpha i} R^{\alpha\beta}_{,\beta} - a_{\alpha\beta,\gamma} R_{i,\gamma}^{\alpha\gamma\beta} - a_{\alpha\beta} R_{i,\gamma}^{\alpha\gamma\beta} \quad (1.3.9)$$

Bizonyítás: Az (1.2.1)-ben helyettesítjük az indexeket: $i=\alpha, j=i, k=\beta$, majd az $a^{\alpha\beta}$ -val kontraháljuk. Ekkor (1.3.7)-ot kapjuk.

Az (1.3.8)-as egyenlőség az (1.2.1), (1.3.4) és (1.3.7) egyenlőségek következménye.

Az (1.3.2)-ben legyen $l=k$, majd x^j szerint kovariánsan deriváljuk:

$$n\lambda_{i,kj} = \mu_{,j} g_{ik} + a_{\alpha i,j} R_{,k}^\alpha + a_{\alpha i} R_{k,j}^\alpha - a_{\alpha\beta,j} R_{il}^{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} R_{il}^{\alpha\beta}_{,j}.$$

Az i, j indexekre szimmetrizálva és g^{jk} -val kontrahálva kapjuk az (1.3.9)-t.

1. Tétel: Tegyük fel, hogy egy majdnem konformszimmetrikus Riemann tér geodetikusan leképezhető egy másik Riemann térre, ekkor $(NCS)^n$ -ben szükségképpen teljesül

$$-a_i^\alpha R_{,\alpha} + 2(n-1)^2 \lambda_\alpha R_i^\alpha = 0, \quad (1.3.10)$$

melyben szereplő λ_i és $a_{ij} = a_i^\alpha g_{\alpha j}$ megoldása az (1.3.4), (1.3.5) és (1.3.6) differenciálegyenlet-rendszernek.

Bizonyítás: Most tekintsük az (1.3.1) egyenletet. x^l szerint kovariánsan deriváljuk, majd az l és k indexekre alternálva:

$$a_{ij,kl} - a_{ij,lk} = \lambda_{i,l} g_{jk} + \lambda_{j,l} g_{ik} - \lambda_{i,k} g_{jl} - \lambda_{j,k} g_{il}. \quad (1.3.11)$$

Az a_{ij} tenzorra alkalmazzuk a Bianchi-azonosságot:

$$a_{ij,kl} - a_{ij,lk} = a_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha + a_{\alpha i} R_{jkl}^\alpha. \quad (1.3.12)$$

Az (1.3.11) és (1.3.12) egyenlőségek jobb oldalait egyenlővé téve, x^m szerint kovariánsak deriválva, g^{lm} -mel kontrahálva

$$\begin{aligned} \lambda_{i,\alpha} g_{jk} + \lambda_{j,\alpha} g_{ik} - \lambda_{i,kj} - \lambda_{j,ki} = \\ = a_{\alpha j,\beta} R_{ik}^{\alpha\beta} + a_{\alpha i,\beta} R_{jk}^{\alpha\beta} + a_{\alpha j} R_{ik,\beta}^{\alpha\beta} + a_{\alpha i} R_{jk,\beta}^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Az (1.3.13)-ba helyettesítjük a következő kifejezést

$$n\lambda_{i,\alpha} = \frac{4n}{n-1} \lambda_\alpha R_i^\alpha + \lambda_i R + \frac{1}{n-1} a^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta,i} - \frac{n+1}{2(n-1)^2} a R_{,\alpha} + \frac{(n-1)^2 + n + 1}{2(n-1)^2} a_i^\alpha R_{,\alpha} \quad (1.3.14)$$

melyet úgy kaptunk, hogy (1.3.2)-t x^k szerint kovariánsan deriváltunk, és az (1.3.1) és (1.3.2) helyettesítése után g^{lk} -val kontraháltunk.

Az (1.3.13)-be az (1.3.14)-t helyettesítve, végrehajtva a j, k indexekre való kontrakciót, az előbbi lemmákat és a definíciót alkalmazva a (1.3.10) összefüggést kapjuk. Ezzel beláttuk a tételt.

2. Vizsgálatok Finsler terekben

Bár az általánosított metrikus differenciálgeometriai - később Finsler - tér fogalmát Riemann [R] 1854-ben vetette fel a habilitációs előadásában, amelyben az n -dimenziós tér metrizálhatóságának különböző módzatait vizsgálta, de a Finsler-geometria számos, figyelemre méltó eredménye az utóbbi évtizedekben született meg.

A Finsler téren lényegében minden pont érintőterében egy-egy általánosított normafüggvény van megadva, amely nem szükségképpen származik belső szorzatból. Meglepő módon a Riemann tér ilyenfajta általánosítása több mint hatvan évre feledésbe merült. Riemann maga, bonyolultságra hivatkozva vetette el az - ekkor még „általánosított metrikának” nevezett - új lehetőséget.

Az alkalmazások köre az utóbbi időben jelentősen bővült, a fizika, a biológia mellé egyéb tudományterületek is felsorakoztak [AIM], [AM].

Ebben a fejezetben a Dr. Bácsó Sándorral közös munka eredményei szerepelnek. (1.-2. Állítás, 1.-5. Tétel) Bebizonyítottuk, hogy egy nemzérus skalárgörbületű rekurrens F^n ($n > 2$) Finsler tér mindig egy nemzérus konstans görbületű Riemann tér. Ezenkívül olyan tereket vizsgáltunk, melyek geodetikusan leképezhetők egy rekurrens Finsler térre. Az általánosított Douglas terekről beláttuk, hogy a geodetikus leképezésekre nézve zárt halmazzal alkotnak. Végül igazoltuk azt is, hogy egy olyan háromnál nagyobb dimenziós *P-Randers tér, melynek a Douglas tenzora eltűnik, Riemann tér. Eredményeimet a [BP1], [BP2], [BP3], [BGYPSZ] dolgozatokban jelentettem meg.

2.1. Alapvető fogalmak és tételek

Legyen M egy n dimenziós differenciálható sokaság és $L(x,y)$ egy valós függvény M érintőterén, TM -en. Legyen $x^i = x^i(t)$ $a \leq t \leq b$ valamely c

görbe egy U koordinátakörnyezetbe eső szeletének az egyenlete. Ezen görbedarab s ívhosszát a következő integrál adja meg:

$$s = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (2.1.1)$$

Definíció: [AIM], [M4] Egy a fenti ívhosszfogalommal ellátott M sokaságot egy L alapfüggvényű, n dimenziós *Finsler térnek* mondunk, ha L teljesíti az alábbi feltételeket:

Differenciálgeometriai céljaink érdekében fel kell tételeznünk, hogy L differenciálható x^i -ben és y^i -ben. Hacsak más nem szerepel, legyen L mindig C^∞ -osztályú.

Továbbá:

1. Tetszőleges irányított görbe ívhossza független a paraméter megválasztásától, vagyis L elsőfokú pozitív homogén y -ban.
2. Az L egy reguláris variációszámítási problémát eredményez, azaz a

$$g_{ij} := \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}, \quad F := L^2/2 \quad (2.1.2)$$

determinánsa nem zérus.

3. Tetszőleges $x \in M$ pont $T_x M$ érintőterében van egy olyan $T_x M^*$ tartomány, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal: L differenciálható y^i -ben, ha $y^i \in T_x M^*$, $T_x M^*$ nem tartalmazza a nullvektort, pozitívan kúpszerű tartomány, tehát olyan nem nulla $y \in T_x M^*$ érintővektorokból áll, amelyekre $py \in T_x M^*$ tetszőleges $p > 0$ esetén.

Eképpen $M^* := \bigcup_{x \in M} T_x M^*$ az L alapfüggvény értelmezési tartománya.

4. Az L alapfüggvény pozitív értékű $T_x M^*$ -on.

Definíció: [AIM] Az ívhosszintegrál extrémális görbét az adott tér geodetikusanak nevezzük

Egy $F^n(M^n, L)$ Finsler tér geodetikusait kanonikus paraméter esetén az

$$d^2 x_i / ds^2 + 2G^i(x, dx/ds) = 0 \quad (2.1.3)$$

differenciálegyenlet szolgáltatja, ahol

$$G^i = g^{ij} G_j, \quad 2G_j = (\dot{\partial}_j \partial_i F) y^i - \partial_j F \quad (2.1.4)$$

és F az energiafüggvény (azaz $F = \frac{1}{2} L^2$). Ha a geodetikuskok lokálisan felírhatók $x^i = x^i(t)$ alakban, akkor az előbbi differenciálegyenlet a

$$d^2 x_i / dt^2 + 2G^i(x, dx/dt) = \gamma(t) dx^i / dt \quad (2.1.5)$$

alakot ölti, ahol

$$\gamma(t) := (dx^2 / dt^2) / (ds/dt).$$

A Berwald konnexió G_j^i és G_{jk}^i koefficienseit a G^i -ből deriválással nyerjük, nevezetesen:

$$G_j^i = \dot{\partial}_j G^i \quad (2.1.6)$$

$$G_{jk}^i = \partial_k G_j^i. \quad (2.1.7)$$

Definíció:[AIM], [She3] Tekintsünk két Finsler teret ugyanazon sokaság felett. Ha az F^n tér minden geodetikusa egybeesik az \bar{F}^n tér valamely geodetikusával (mint ponthalmaz) és fordítva, akkor azt mondjuk, hogy az F^n tér projektív az \bar{F}^n térhez, és a metrikus alapfüggvények közötti $L(x, y) \rightarrow \bar{L}(x, y)$ megfeleltetést *projektívnek* nevezzük.

Legyen $c: x^i = x^i(t)$ az M^n egy olyan görbéje, amely közös geodetikusa F^n -nek és \bar{F}^n -nek. Ekkor c egyenletét F^n -ben (2.1.5) szolgáltatja, míg \bar{F}^n -ben

$$d^2 x_i / dt^2 + 2\bar{G}^i(x, dx/dt) = \bar{\gamma}(t) dx^i / dt$$

alakban írható, melyből:

$$2\bar{G}^i(x, dx/dt) - 2G^i(x, dx/dt) = (\bar{\gamma}(t) - \gamma(t)) dx^i / dt.$$

Mivel a fenti egyenlőségnek bármely x pontban és bármely dx/dt irányban teljesülnie kell, így igaz a következő tétel:

Tétel: [K] Egy F^n Finsler tér pontosan akkor projektív egy \bar{F}^n Finsler térhez, ha létezik olyan $p(x, y)$ y -ban elsőfokú pozitív homogén skalármező, amely kielégíti a

$$\bar{G}^i(x,y) = G^i(x,y) + p(x,y)y^i. \quad (2.1.8)$$

egyenlőséget. A $p(x,y)$ skalármezőt a projektív transzfomáció *projektív faktorának* nevezzük.

A (2.1.8)-ból következnek

$$\bar{G}_j^i = G_j^i + p_j y^i + p \delta_j^i \quad (p_j = \hat{\partial}_j p) \quad (2.1.9)$$

$$\bar{G}_{jk}^i = G_{jk}^i + p_{jk} y^i + p_j \delta_k^i + p_k \delta_j^i \quad (p_{jk} = \hat{\partial}_k p_j = \hat{\partial}_k \hat{\partial}_j p) \quad (2.1.10)$$

Definíció: [M14] Az F^n Finsler tereket *skalár görbületűnek* nevezzük, ha

$$H_j^i = h_j^i H, \quad (2.1.11)$$

ahol $h_j^i = \delta_j^i - l^i l_j$, $l^i = y^i / L$ és $l_i = L_{(i)}$.

Definíció: [M14] A $H_j^i(x,y)$ $(1,1)$ -típusú görbületi tenzor a következőképpen adható meg:

$$H_j^i = 2 \partial G^i / \partial x^j - y^\alpha \partial G^i / \partial x^\alpha + 2 G_{j\alpha}^i G^\alpha - G_\alpha^i G_j^\alpha \quad (2.1.12)$$

és $H_\alpha^\alpha = (n-1)H$.

A Berwald-féle $H_{ijk}^h = \frac{1}{3}(H_{k(j)}^h - H_{j(k)}^h)_{(i)}$ görbületi tenzorból kapjuk, hogy $H_k^h = H_{00k}^h$, ahol a 0 index az y^α -val való kontrakciót jelöli: $H_k^h = H_{\alpha\beta k}^h y^\alpha y^\beta = H_{00k}^h$.

Feltettük, hogy létezik az F^n és az \bar{F}^n Finsler terek között geodetikus leképezés, ekkor a terek $(1,1)$ -típusú görbületi tenzorai között a

$$\bar{H}_j^i = H_j^i + y^i Q_{j0} + \delta_j^i Q_0 - y^i Q_j = 0 \quad (2.1.13)$$

kapcsolat áll fenn, ahol $Q_j = p_{;j} - p p_j$, $Q_{jk} = p_{k;j} - p_{j;k}$.

Az egyik legfontosabb tenzor a projektív Finsler geometriában a J. Douglas nevét viselő tenzor :

$$D_{ijk}^h := G_{ijk}^h - \frac{1}{n+1} (y^h G_{ijk} + \delta_i^h G_{jk} + \delta_j^h G_{ik} + \delta_k^h G_{ij}) \quad (2.1.14)$$

A projektív leképezések esetén a Douglas tenzor invariáns, azaz

$$\bar{D}_{ijk}^h = D_{ijk}^h.$$

Ezenkívül még két invariáns tenzort ismerünk:

$$W_{jk}^i := R_{ijk}^i + \frac{1}{n+1} (y^i H_{jk} + \delta_j^i H_k - \delta_k^i H_j), \quad (2.1.15)$$

melyet Weyl-féle torzió tenzornak nevezünk; illetve a Weyl-féle görbületi-tenzor

$$W_{hjk}^i := H_{hjk}^i + \frac{1}{n+1} (y^i H_{jk \cdot h} + \delta_h^i H_{jk} + \delta_j^i H_{k \cdot h} - \delta_k^i H_{j \cdot h}). \quad (2.1.16)$$

2.2. Rekurrens Finsler terek geodetikus leképezése

Definíció: [Mo3] Az F^n Finsler teret *rekurrensnek* nevezzük, ha az F^n tér Berwald-féle görbületi tenzora kielégíti a következő feltételt:

$$H_{ijk;l}^h = \lambda_l(x, y) H_{ijk}^h, \quad (2.2.1)$$

ahol $\lambda_l(x, y)$ egy y -ban 0-ad fokú homogén függvény.

Több szerző is tanulmányozta a rekurrens Finsler tereket. [Mi], [Mo4], [PM], [Se]

Definíció: [M2] Az F^n Finsler teret *Landsberg térnek* nevezzük, ha az

$$y_\alpha G^\alpha_{jkl} = -2P_{jkl} = 0 \quad (2.2.2)$$

feltétel teljesül, ahol $-2P_{jkl} = g_{jk;l}$, és $G_{jkl}^i = G_{jk(l)}^i$.

1. Állítás: [BP1] A rekurrens Finsler terek esetén, ha a λ_l zérustól különböző, akkor az egyedül a hely függvénye.

Bizonyítás: A (2.2.1)-t alkalmazzuk a következő integrálhatósági feltételre:

$$T_{j;k(l)}^i - T_{j(l);k}^i = T_j^\alpha G_{\alpha kl}^i - T_\alpha^i G_{jkl}^\alpha.$$

Ekkor

$$H_{jk}^i \lambda_{l(h)} = H_{jk}^\alpha G_{\alpha lh}^i + H_{\alpha j}^i G_{klh}^\alpha - H_{\alpha k}^i G_{jlh}^\alpha, \quad (2.2.3)$$

ahol $H_{jk}^i = H_{\alpha jk}^i y^\alpha$. Ezután a (2.2.3)-re egy y^k szerinti kontrakciót alkalmazunk:

$$H_j^i \lambda_{l(h)} = H_j^\alpha G_{\alpha lh}^i - H_\alpha^i G_{jih}^\alpha. \quad (2.2.4)$$

A (2.2.4)-t az i, j indexek szerint kontrahálva a következőt kapjuk: $(n-1)H \lambda_{l(h)} = 0$. Ha feltesszük azt, hogy $H \neq 0$, akkor $\lambda_{l(h)} = 0$ (azaz az λ_l csak a hely függvénye).

Az 1. állításból és (2.2.4)-ből következik

$$H_j^\alpha G_{\alpha lh}^i - H_\alpha^i G_{jih}^\alpha = 0. \quad (2.2.5)$$

Ha F^n konstans görbületű, akkor a (2.2.5)-be az (2.1.11)-t és (2.2.2)-t helyettesítve kapjuk:

$$\frac{H}{L} P_{jih} = 0,$$

ahol $H = R(x, y)L^2$ és $R(x, y)$ a görbületi függvény. Ebből következik, hogy ha $H \neq 0$, akkor $P_{jih} = 0$ és ezzel F^n Landsberg tér. Numata [Nu1] eredményét felhasználva, mely szerint egy nemzéro skalár görbületű Landsberg tér az egy nemzérus konstans görbületű Riemann tér, teljesül a következő:

2. Állítás: [BP1] Egy nemzérus skalárgörbületű rekurrens F^n ($n > 2$) Finsler tér mindig egy nemzérus konstans görbületű Riemann tér.

Ebben a részben feltesszük, hogy a vizsgált Finsler terek legalább kétdimenziósak, az $F^n \rightarrow \bar{F}^n$ geodetikus leképezés esetén az F^n egy tetszőleges Finsler tér, míg az \bar{F}^n egy rekurrens Finsler tér.

Figyelembe véve a (2.1.9) és (2.1.10) összefüggéseket, adódik

$$\bar{H}_{i;k}^h - (2p_k + \bar{\lambda}_k)\bar{H}_i^h - \bar{H}_{i(k)}^h p + \bar{H}_i^\alpha (p_\alpha \delta_k^h + p_{k\alpha} y^h) - \bar{H}_k^h p_i = 0 \quad (2.2.6)$$

Tudjuk, hogy \bar{F}^n rekurrens tér, ezért teljesül

$$\bar{H}_{ijk\bar{l}}^h = \bar{\lambda}_l \bar{H}_{ijk}^h,$$

melyből következik

$$\bar{H}_{i;\bar{k}}^h = \bar{\lambda}_{\bar{k}} \bar{H}_i^h;$$

illetve az ismert azonosságok [M14]:

$$\bar{H}_{i0}^h = 2\bar{H}_i^h \quad \text{és} \quad \bar{H}_0^h = 0,$$

ahol ” $\bar{\cdot}$ ” az \bar{F}^n térben a Berwald-féle kovariáns deriválást jelöli.

Feltettük, hogy létezik az F^n és az \bar{F}^n Finsler terek között geodetikus leképezés, ekkor a terek (1,1)-típusú görbületi tenzorai között a

$$\bar{H}_j^i = H_j^i + y^i Q_{j0} + \delta_j^i Q_0 - y^i Q_j = 0$$

kapcsolat áll fenn, ahol $Q_j = p_{;j} - pp_j$, $Q_{jk} = p_{k;j} - p_{j;k}$.

A (2.2.6)-ba helyettesítjük a (2.1.13)-t. és a h_h^l tenzonnal kontrahálunk:

$$\begin{aligned} H_{i;k}^h - h_i^l Q_{0;k} - (2p_k + \bar{\lambda}_{\bar{k}})(H_i^l - h_i^l Q_0) - H_k^l p_i - h_\alpha^l H_{i(k)}^\alpha p + \\ + h_i^l (Q_0)_{(k)} p + h_k^l H_i^\alpha p_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

A (2.2.7)-t y^k -val kontrahálva és az i, l indexekre összegzést végrehajtva:

$$H_{;0} - Q_{0;0} y(4p - \bar{\lambda})H + (4p + \bar{\lambda})Q_0 = 0, \quad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_\alpha y^\alpha. \quad (2.2.8)$$

Ez utóbbi két egyenlet felhasználásával

$$A_{i;0}^l = (4p + \bar{\lambda})A_i^l, \quad (2.2.9)$$

ahol $A_i^l = H_i^l - Hh_i^l$. Ha $A_i^l = 0$, akkor F^n konstans görbületű tér. A (2.2.9) egyenlet a szemi-rekurrens Finsler tereket jellemzi [Ba1]. Ezzel beláttuk a következő tételt:

1. Tétel: [BP1] Ha egy F^n Finsler tér geodetikusan leképezhető egy \bar{F}^n rekurrens Finsler térre, akkor az F^n térnek szükségképpen szemi-rekurrens térnek kell lennie.

Speciális esetek:

Két esetet vizsgáltunk. Az első esetben azt tételeztük fel, hogy az F^n tér Riemann tér, míg a másik esetben azt, hogy F^n is rekurrens Finsler tér.

A) Riemann tér esete

Ismeretes a következő azonosság: $g_{i\alpha}H_j^\alpha - g_{j\alpha}H_i^\alpha = 0$, melyet felhasználva a (2.2.7)-ből a

$$\begin{aligned} & H_i^h h_j^\alpha p_\alpha - H_j^h h_i^\alpha p_\alpha - h_i^h H_j^\alpha p_\alpha + h_i^h H_j^\alpha p_\alpha + \\ & + 2P_{j\alpha}^h H_i^\alpha - 2P_{i\alpha}^h H_j^\alpha + 2pC_{j\alpha}^h H_i^\alpha - 2pC_{i\alpha}^h H_j^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

egyenlőséget kapjuk.

Feltettük, hogy F^n Riemann tér, ekkor

$$\frac{1}{2}g_{ij(k)} = C_{ijk} = 0 \text{ és } P_{ijk} = 0. \quad (2.2.11)$$

A h és i indexekre kontrakciót végezve és (2.2.11)-t felhasználva

$$H_\alpha^h p^\alpha = H h_\alpha^h p_\alpha, \quad p^\alpha = g^{\alpha\beta} p_\beta$$

azaz

$$A_\alpha^i p^\alpha = 0. \quad (2.2.12)$$

A (2.2.10)-t, (2.2.11)-t és (2.2.12)-t behelyettesítve kapjuk:

$$A_i^h h_\beta^\alpha p_\alpha p^\beta = 0,$$

amely azt jelenti, hogy $A_i^h = 0$, ha $h_\beta^\alpha p_\alpha p^\beta = p_\alpha p^\alpha - L^2 p^2 \neq 0$.

Mindezeket összefoglalva:

2. Tétel: [BP1] Ha F^n egy olyan Riemann tér, amely geodetikusan leképezhető egy \bar{F}^n rekurrens Finsler térre, akkor az F^n konstans görbületű Riemann tér, ha $p_\alpha p^\alpha - L^2 p^2 \neq 0$.

B) rekurrens Finsler tér esete

Legyen F^n is rekurrens Finsler tér. A definiálójó $H_{ijk;l}^h = \lambda_l H_{ijk}^h$ egyenlőségből a következőket nyerjük.

$$H_{i;l}^h = \lambda_l H_i^h, \quad H_{;l} = \lambda_l H, \quad \lambda = \lambda_\alpha y^\alpha.$$

Így

$$A_{i;l}^h = \lambda_l A_i^h \quad (2.2.13)$$

A (2.2.9) és (2.2.13) felhasználásával

$$(4p + \bar{\lambda} - \lambda)A_i^h = 0.$$

Ha $4p + \bar{\lambda} - \lambda \neq 0$, akkor $A_i^h = 0$. A 2. állítást figyelembe véve:

3. Tétel: [BP1] Ha az F^n rekurrens Finsler tér geodetikusan leképezhető egy \bar{F}^n rekurrens Finsler térre, akkor az F^n konstans görbületű Riemann tér, ha $4p + \bar{\lambda} - \lambda \neq 0$.

2.3. Általánosított Douglas terek

Definíció: Az $F^n(M^n, L)$ Finsler teret *általánosított Douglas térnek* nevezzük, ha

$$h_\alpha^h D_{ijk;\beta}^\alpha y^\beta = 0, \quad (2.3.1)$$

ahol $h_\alpha^h = \delta_\alpha^h - l^h l_\alpha$, $l_\alpha = \partial L / \partial y^\alpha$ és $l^h = y^h / L$.

A általánosított Douglas terekkel T. Sakaguchi [Sa] és Vattamány Szabolcs [Va] foglalkozott.

4. Tétel: [BP2] Az általánosított Douglas-terek a projektív leképezésre nézve zárt halmazt alkotnak.

Bizonyítás: Tekintsük az $F^n \rightarrow \bar{F}^n$ projektív leképezést, ahol az F^n tetszőleges Finsler tér, míg az \bar{F}^n általánosított Douglas tér. Az \bar{F}^n térben teljesül:

$$\bar{h}_\alpha^h \bar{D}_{ijk;\beta}^\alpha y^\beta = 0, \quad (2.3.2)$$

ahol a ” $\bar{\cdot}$ ” az \bar{F}^n térben a Berwald-féle kovariáns deriválást jelöli. A \bar{D}_{ijk}^α

Douglas tenzorra alkalmazva a kovariáns deriválást a (2.3.2)-ből következik:

$$\begin{aligned} & \bar{h}_\alpha^h (\partial \bar{D}_{ijk}^\alpha / \partial x^\beta - \partial \bar{D}_{ijk}^\alpha / \partial y^\gamma \bar{G}_\beta^\gamma + \\ & \bar{G}_{\beta\gamma}^\alpha \bar{D}_{ijk}^\gamma - \bar{G}_{\beta i}^\gamma \bar{D}_{\gamma jk}^\alpha - \bar{G}_{\beta j}^\gamma \bar{D}_{i\gamma k}^\alpha - \bar{G}_{\beta k}^\gamma \bar{D}_{ij\gamma}^\alpha) y^\beta = 0 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

A (2.1.9) és (2.1.10) egyenlőségeket a (2.3.2)-be helyettesítve

$$\begin{aligned}
& \bar{h}_\alpha^h [\partial \bar{D}_{ijk}^\alpha / \partial x^\beta - \partial \bar{D}_{ijk}^\alpha / \partial y^\gamma (G_\beta^\gamma + p \delta_\beta^\gamma + p_\beta y^\gamma) + \\
& (G_{\beta\gamma}^\alpha + p_\beta \delta_\gamma^\alpha + p_\gamma \delta_\beta^\alpha + p_{\beta\gamma} y^\alpha) \bar{D}_{ijk}^\gamma - \\
& (G_{\beta i}^\gamma + p_\beta \delta_i^\gamma + p_i \delta_\beta^\gamma + p_{\beta i} y^\gamma) \bar{D}_{\gamma jk}^\alpha - \\
& (G_{\beta j}^\gamma + p_\beta \delta_j^\gamma + p_j \delta_\beta^\gamma + p_{\beta j} y^\gamma) \bar{D}_{i\gamma k}^\alpha - \\
& (G_{\beta k}^\gamma + p_\beta \delta_k^\gamma + p_k \delta_\beta^\gamma + p_{\beta k} y^\gamma) \bar{D}_{i\gamma j}^\alpha] y^\beta = 0. \tag{2.3.4}
\end{aligned}$$

Vegyük figyelembe, hogy a Douglas-tenzor invariáns a projektív leképezésre nézve ($D = \bar{D}$), így a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\bar{h}_\alpha^h [D_{ijk;\beta}^\alpha y^\beta + p_\gamma D_{ijk}^\gamma y^\alpha] = 0.$$

Felhasználjuk, hogy $\bar{h}_\alpha^h y^\alpha = 0$, ekkor az egyenletünk a

$$\bar{h}_\alpha^h D_{ijk;\beta}^\alpha y^\beta = 0 \tag{2.3.5}$$

alakúra redukálódik. Egyszerű számolással igazolható, hogy $h_h^l \bar{h}_\alpha^h = h_\alpha^l$.

Ugyanis:

$$\begin{aligned}
h_h^l \bar{h}_\alpha^h &= (\delta_h^l - l^l l_h) (\delta_\alpha^h - \bar{l}^h \bar{l}_\alpha) = \delta_\alpha^l - \bar{l}^l \bar{l}_\alpha - l^l l_\alpha + l^l l_h \bar{l}^h \bar{l}_\alpha = \\
&= \delta_\alpha^l - \bar{l}^l \bar{l}_\alpha - l^l l_\alpha + \frac{y^l}{L} l_h \frac{y^h}{L} \bar{l}_\alpha = \delta_\alpha^l - \bar{l}^l \bar{l}_\alpha - l^l l_\alpha + \frac{y^l}{L} L \frac{l}{L} \bar{l}_\alpha = \\
&= \delta_\alpha^l - \bar{l}^l \bar{l}_\alpha - l^l l_\alpha + \bar{l}^l \bar{l}_\alpha = \delta_\alpha^l - l^l l_\alpha = h_\alpha^l.
\end{aligned}$$

Ezért, ha kontraháljuk a (2.3.5) egyenletet h_h^l -val, akkor a

$$h_\alpha^l D_{ijk;\beta}^\alpha y^\beta = 0$$

teljesül.

Vagyis, ha az $F^n \rightarrow \bar{F}^n$ projektív leképezés esetén az \bar{F}^n egy általánosított Douglas tér, akkor az F^n is egy általánosított Douglas tér. Ez azt jelenti, hogy az általánosított Douglas terek csoportja zárt a projektív leképezésre nézve.

2.4. * P-Finsler terek

Definíció: [AIM] Egy M^n n -dimenziós differenciálható sokaságon $L(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$ metrikát Randers metrikának nevezzük, ha

$\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ egy Riemann metrika az M^n sokaságon és $\beta(x, y) = b_i(x)y^i$ egy differenciál 1-forma. Egy $F^n = (M^n, L = \alpha + \beta)$ Randers metrikával ellátott Finsler teret Randers térnek nevezünk.

Definíció: [AIM] Az $L = \alpha^2/\beta$ Finsler metrikát Kropina metrikának nevezzük. Egy $F^n = (M^n, L = \alpha^2/\beta)$ Kropina metrikával ellátott Finsler teret Kropina térnek nevezzük.

Definíció: [AIM] Az $F^n(M^n, L)$ Finsler teret *C-reducibilis*nek nevezzük, ha

$$C_{ijk} = \frac{1}{n+1} (h_{ij}C_k + h_{ik}C_j + h_{jk}C_i),$$

ahol $C_k = C_{ijk}g^{ij}$.

Könnyen igazolható, hogy minden kétdimenziós Finsler-tér C-reducibilis. Ezenkívül egy (α, β) metrikájú F^n ($n \geq 3$) Finsler tér pontosan akkor C-reducibilis, ha Randers-, vagy Kropina-metrikával rendelkezik.

Definíció: [Iz1], [Iz2] Az F^n Finsler teret **P-Finsler tér*nek nevezzük, ha a $P_{ijk} = \frac{1}{2}g_{ij;k}$ tenzor a következő alakban adható meg:

$$P_{ijk} = \lambda(x, y)C_{ijk}, \quad (2.4.2)$$

ahol $\lambda(x, y)$ egy skalármező.

Tétel: [Iz1] Egy C-reducibilis *P-Finsler térben ($n > 3$) teljesül

$$\lambda(x, y) = k(x)L(x, y)$$

és $k(x)$ csak a hely függvénye.

Definíció: [BM1] Egy Finsler teret *Douglas típusú*nak, vagy *Douglas tér*nek nevezzük, ha a $G^i y^j - G^j y^i$ függvények (y^i) -ben harmadfokú homogén polimonomok.

Tétel: [BM1] Egy Finsler tér Douglas tér pontosan akkor, ha Douglas-tenzora azonosan eltűnik.

Tétel: [Iz2] Egy C-reducibilis *P-Finsler tér ($n > 3$) Douglas-tenzora eltűnik, azaz $D_{jkl}^i = 0$.

Legyen $\beta(x, y)$ egy zárt 1-forma. Ekkor az

$$\bar{L}(x, y) = L(x, y) + \beta(x, y)$$

metrikák között egy *Randers-transzformáció*. Ebben az esetben a metrikák közötti $\bar{L} \rightarrow L$ transzformáció projektív.

Tétel: [Ba2] Tegyük fel, hogy létezik egy Landsberg-tér és egy *P-Finsler tér közötti Randers-transzformáció, ahol a transzformáció projektív faktora $p(x, y)$. Ekkor a $p(x, y)$ következő egyenlőséggel adható meg:

$$p(x, y) = e^{\varphi(x)} \bar{L}(x, y), \quad (2.4.3)$$

ahol $\bar{L}(x, y)$ a *P-Finsler tér metrikus alapfüggvénye és $\varphi(x)$ egy tetszőleges differenciálható, csak helytől függő függvény.

Tudjuk, hogy a Riemann terek a Landsberg terek speciális esetei. A Riemann terekben a Douglas tenzor eltűnik, és a $\beta(x, y)$ zárt 1-formával adott *P-Randers tér egy eltűnő Douglas tenzorra rendelkező Finsler-tér.

Tétel: [BM1] Egy Randers tér pontosan akkor Douglas tér, ha $\beta(x, y)$ zárt 1-forma. Ekkor

$$2G^i = \gamma_{jk}^i y^j y^k + \frac{r_{lm} y^l y^m}{\alpha + \beta} y^i, \quad (2.4.4)$$

ahol γ_{jk}^i a Riemann tér Levi-Civita konnexitásának együtthatói, és $r_{ij} = b_{i,j} + b_{j,i}$.

A (2.4.3) és (2.4.4) ből következik, hogy

$$\frac{r_{lm}y^l y^m}{\alpha + \beta} = e^{\varphi(x)}(\alpha + \beta),$$

azaz

$$\frac{r_{lm}y^l y^m}{\bar{L}} = e^{\varphi(x)}\bar{L}. \quad (2.4.5)$$

A (2.4.5) egyenlőségből kapjuk:

$$r_{lm}y^l y^m = e^{\varphi(x)}\bar{L}^2. \quad (2.4.6)$$

A (2.4.6)-t kétszer differenciálva (y^l és y^m szerint) adódik:

$$b_{i;j} = e^{\varphi(x)}\bar{g}_{ij}.$$

Ez utóbbi egyenlőség mutatja, hogy \bar{g}_{ij} csak x -től függ, és kimondhatjuk a következő tételt:

5. Tétel: [BP3] Egy olyan háromnál nagyobb dimenziós *P -Randers tér, melynek a Douglas -tenzora eltűnik, Riemann tér.

Ha olyan *P -C-reducibilis tereket keresünk, melyek Douglas tenzora eltűnik, de nem Riemann terek, akkor ilyet csak a *P -Kropina terek között találhatunk.

1. Investigations in Riemann spaces

A Riemannian manifold is a manifold possessing a metric tensor. The metric tensor g_{ij} is symmetric and positive definite and tells how to compute the distance between any two points in a given space.

In a Riemannian space the stationary curves of the variation of length are said to be geodesic curves. In the plane, the geodesics are straight lines. On the sphere, the geodesics are great circles. The geodesics in a space depend on the Riemannian metric, which affects the notions of distance and acceleration.

I investigated the nearly conformally symmetric (NCS)ⁿ spaces. I studied the following question: Which property has the nearly conformally symmetric space if it admits a geodesic mapping into another Riemannian space. (Lemma 1.-2., Theorem 1.)

1.1 Some important notations and theorems

Definition: An n -dimensional differential manifold V^n is said to be Riemannian space, if there exists a g_{ij} tensorfield in V^n which satisfies the following three conditions:

- g_{ij} is symmetric, that is $g_{ij} = g_{ji}$
- g_{ij} is a tensor of (0,2) type
- g_{ij} is a coefficient of a positive definite quadratic form, that is $g_{ij}x^i x^j > 0 \quad \forall x^i \neq 0$.

The g_{ij} is called metric tensor of V^n .

The notions of distance, length and angle can be explained by using the metric tensor. We can define coefficients of connection of Riemannian space from the partial derivatives of metric tensor.

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} (\partial_j g_{k\alpha} + \partial_k g_{j\alpha} - \partial_\alpha g_{jk}) \quad (1.1.1)$$

Γ_{jk}^i is called Christoffel-symbols of V^n .

In a Riemannian space the stationary curves of the variation of length are said to be geodesic curves. The geodesic curves with respect to length-parameter t are defined by a differential equation of the form

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i(x(t)) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0, \quad (1.1.2)$$

where Γ_{jk}^i are Christoffel symbols.

A geodesic mapping between Riemannian spaces V^n and \bar{V}^n is a one to one mapping between points of spaces, where all geodesic curves of V^n correspond some geodesic curves of \bar{V}^n . [Szin]

There is a coordinate system x^1, x^2, \dots, x^n in V^n and there is another system $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ in \bar{V}^n . Let $x^i = x^i(\bar{x})$ is a one to one mapping of V^n onto \bar{V}^n . This mapping means a coordinate transformation in \bar{V}^n and after this the points corresponding each other has the same coordinates. We will use this common coordinate system.

I use the following theorems in the study of geodesic mappings:

Theorem [Szin]: The mapping between Riemannian spaces V^n and \bar{V}^n is geodesic if and only if the Christoffel symbols of spaces satisfy the condition

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x) \delta_j^h + \psi_j(x) \delta_i^h, \quad (1.1.3)$$

where ψ_i is a covariant and gradient vector in V^n .

There is an equivalent condition to previous:

Theorem [Szin]: The mapping between V^n and \bar{V}^n Riemannian spaces is geodesic if and only if the \bar{g}_{ij} metric tensor of \bar{V}^n satisfies the condition in V^n

$$\bar{g}_{ij,k}(x) = 2\psi_k(x) \bar{g}_{ij} + \psi_i(x) \bar{g}_{kj} + \psi_j(x) \bar{g}_{ki}, \quad (1.1.4)$$

where symbol “,” denotes covariant derivative in V^n .

These equations ((1.1.3) and (1.1.4)) are basic equations of geodesic mappings between Riemannian spaces and they are called Levi-Civita equations.

All geodesic mappings of a given V^n make a group, where the operation is “carrying out consecutive”. The geodesic mappings induce a classification in the set of Riemannian spaces. A class is determined by the spaces having a geodesic mapping onto the same V^n Riemannian space. This class is called to be the geodesic class of V^n . [Szin]

Beltrami [Szin] has proved the first essential results in the examination of geodesic mappings between Riemannian spaces:

Theorem (Beltrami): If there exists a geodesic mapping between Riemannian spaces V^n and \bar{V}^n ($n>2$), where \bar{V}^n has constant curvature, then V^n has constant curvature too. Any V^n ($n>2$) space with constant curvature has geodesic mapping to any \bar{V}^n space with constant curvature.

1.2. Nearly conformally symmetric Riemannian spaces

Definition: [Ge] An n -dimensional ($n>3$) Riemannian space V^n is called nearly conformally symmetric, if its Ricci-tensor satisfies the condition

$$R_{ij,k} - R_{ik,j} = \frac{1}{2(n-1)} (R_{,k} \cdot g_{ij} - R_{,j} \cdot g_{ik}), \quad (1.2.1)$$

where the symbol “,” means the covariant derivative in V^n .

Any conformally symmetric manifold (its Weyl conformal curvature tensor is parallel) is nearly conformally symmetric.[Ge] Moreover every n -dimensional ($n>3$) Codazzi manifold (manifold of harmonic curvature) is also nearly conformally symmetric.

In [Rot] we can find the following example of existence of non-trivial (NCS)ⁿ space. Let $M = R^{n-1} \times R_+^1$ ($n \geq 5$) be endowed with the metric g_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) given by

$$g_{ij} dx^i dx^j = \left((n-1)x^n \right)^{\frac{2}{n-1}} \cdot f_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (dx^n)^2,$$

where α, β run over the range $1, \dots, n-1$, and $f_{\alpha\beta}(x^1, \dots, x^{n-1})$ is an arbitrary non-flat Ricci-flat metric. Then for any smooth function p depending on x^n only, the metric $\bar{g} = (\exp 2p)g$ is nearly conformally symmetric.

1.3. Geodesic mappings

Theorem [Szin]: A Riemannian space V^n has a non-trivial geodesic mapping to another Riemannian space iff the differential equations

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} \quad (1.3.1)$$

$$n\lambda_{i,l} = \mu g_{il} + a_{\alpha i} R_{\alpha l} - a_{\alpha\beta} R_{il}^{\alpha\beta} \quad (1.3.2)$$

$$(n-1)\mu_{,k} = 2(n+1)\lambda_{\alpha} R_{\alpha k} + a_{\alpha\beta} (R_{k,\alpha}^{\alpha\beta} - R_{,\alpha k}^{\alpha\beta}) \quad (1.3.3)$$

have non-trivial solutions in a_{ij} (a symmetric tensorfield), λ_i (non-zero vectorfield) and the scalarfield μ .

Lemma 1. Let us assume that a nearly conformally symmetric Riemannian space $(NCS)^n$ admits a geodesic mapping to another Riemannian space. Then in this $(NCS)^n$ space it holds the followings:

$$R_{k,\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} R_{,k} \quad (1.3.4)$$

$$a_{\alpha i} R_{,\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \cdot a_{\alpha i} R_{,\alpha} \quad (1.3.5)$$

$$a_{\alpha\beta} R_{i,\gamma}^{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2(n-1)} (a \cdot R_{,i} - a_{,\alpha}^{\alpha} R_{,\alpha}) \quad (1.3.6)$$

where $a = a_{\alpha\beta} \cdot g^{\alpha\beta}$.

Proof: Using the Bianchi-identity

$$R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0.$$

Transvecting it by g^{jm} , and using (1.2.1) implies

$$R_{ilk,\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2(n-1)} (R_{,k} \cdot g_{ij} - R_{,l} \cdot g_{ik}).$$

Contracting above equation with g^{il} (inverse matrix of g_{ij}) we get (1.3.4).

Last two properties ((1.3.5) and (1.3.6)) follow from (1.3.4). \square

Lemma 2. Let us assume that a nearly conformally symmetric Riemannian space $(NCS)^n$ admits a geodesic mapping to another Riemannian space.

Then in this $(NCS)^n$ space it holds the following:

$$a^{\alpha\beta} R_{\alpha i, \beta} = \frac{1}{2(n-1)} (a_i^\alpha R_{, \alpha} - a R_{, i}) + a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{, i} \quad (1.3.7)$$

$$a_{\alpha\beta} (2R_{i, \beta}^\alpha - R_{, i}^{\alpha\beta} - (n-1)R_{i, \gamma}^{\alpha\gamma}) = a^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta, i} + \frac{n+1}{2(n-1)} (a_i^\alpha R_{, \alpha} - a R_{, i}) \quad (1.3.8)$$

$$n(\lambda_{i, kj} + \lambda_{j, ki})g^{ij} = (n+1)\mu_{, i} + a_{\alpha i, \beta} R^{\alpha\beta} + a_{\alpha i} R^{\alpha\beta}_{, \beta} - a_{\alpha\beta, \gamma} R_{i, \gamma}^{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} R_{i, \gamma}^{\alpha\gamma} \quad (1.3.9)$$

Proof: Put $i=\alpha, j=i, k=\beta$ in (1.2.1), and transvecting it by $a^{\alpha\beta}$, we get (1.3.7).

If we use (1.2.1), (1.3.4) and (1.3.7) we get (1.3.8).

Put $l=k$ in (1.3.2) and differentiating it covariantly by x^j we obtain

$$n\lambda_{i, kj} = \mu_{, j} g_{ik} + a_{\alpha i, j} R_{, k}^\alpha + a_{\alpha i} R_{k, j}^\alpha - a_{\alpha\beta, j} R_{il}^{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} R_{il}^{\alpha\beta}_{, j} \quad (1.3.2')$$

Symmetrizing (1.3.2') in i and j , and contracting by g^{jk} we have (1.3.9).

Theorem 1. Let us assume that a nearly conformally symmetric Riemannian space $(NCS)^n$ admits a geodesic mapping to another Riemannian space.

Then in this $(NCS)^n$ space it necessarily holds the following:

$$-a_i^\alpha R_{, \alpha} + 2(n-1)^2 \lambda_\alpha R_{i\beta}^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.3.10)$$

(a_{ij} and λ_i are non-trivial solutions of differential equations (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3).)

Proof: Differentiate (1.3.1) covariantly by x^l , and alternate by the indices l and k we obtain:

$$a_{ij, kl} - a_{ij, lk} = \lambda_{i, l} g_{jk} + \lambda_{j, l} g_{ik} - \lambda_{i, k} g_{jl} - \lambda_{j, k} g_{il} \quad (1.3.11)$$

Using Ricci-identity for a_{ij} we get:

$$a_{ij, kl} - a_{ij, lk} = a_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha + a_{\alpha i} R_{jkl}^\alpha \quad (1.3.12)$$

Differentiating (1.3.11) and (1.3.12) covariantly by x^m , then contracting by the indices l and m we obtain:

$$\begin{aligned}
& \lambda_{i, \alpha}^{\alpha} g_{jk} + \lambda_{j, \alpha}^{\alpha} g_{ik} - \lambda_{i,kj} - \lambda_{j,ki} = \\
& = a_{\alpha j, \beta} R_{ik}^{\alpha \beta} + a_{\alpha i, \beta} R_{jk}^{\alpha \beta} + a_{\alpha j} R_{ik, \beta}^{\alpha \beta} + a_{\alpha i} R_{jk, \beta}^{\alpha \beta}.
\end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Differentiating (1.3.2) covariantly by x^k , substituting (1.3.1) and (1.3.2), and contracting it by g^{lk} we have:

$$n\lambda_{i, \alpha}^{\alpha} = \frac{4n}{n-1} \lambda_{\alpha} R_i^{\alpha} + \lambda_i R + \frac{1}{n-1} a^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta, i} - \frac{n+1}{2(n-1)^2} a R_{,i} + \frac{(n-1)^2 + n+1}{2(n-1)^2} a_i^{\alpha} R_{, \alpha} \tag{1.3.14}$$

Substitute (1.3.14) into (1.3.13) and transvect it by g^{jk} . After applying our lemmas above, using (1.3.3), and substituting equality (1.2.1) once again, we obtain (1.3.10). \square

2. Investigations in Finsler spaces

Introduction

The notion of generalized metric space - although later named as Finsler space - was introduced by Riemann [R] in 1854 in his famous thesis in which he studied the various methods of understanding the n dimensional space. Riemann introduced the notion of a metric, which was the squareroot of a positive definite quadratic form. He also mentioned the possible generalization of this metric, nowadays known as the Finsler metric.

In the tangent space of each point of a Finsler space, there is a general norm defined, which is not necessarily induced by an inner product. Surprisingly this kind of generalization of a Riemann space has been forgotten for sixty years. Riemann refused this approach because of its difficulty.

Finsler geometry also has remarkable applications in physics, biology and other branches of science areas too [AIM], [AM].

Results of the author came out in a fruitful collaboration with professor Dr. Sándor Bácsó. (Proposition 1.-2., Theorem 1.-5.) We studied some properties in recurrent Finsler spaces. First we proved that a recurrent Finsler space of nonzero scalar curvature is a Riemannian space of nonzero constant curvature. Further on we investigated the geodesic mappings of special Finsler spaces into a recurrent Finsler space. We determined a new class of Finsler spaces which are generalizations of Douglas spaces and these spaces also are closed under projective relations. We proved that a *P-Randers space with vanishing Douglas tensor is a Riemannian space if the dimension is greater than three. My results were published in the following papers: [BP1], [BP2], [BP3], [BGYPSZ].

2.1. Some important notations and theorems

Let M be differentiable manifold of dimension n and $L(x,y)$ a real function on TM . Then we define the notion of length of a curve. Let

$x^i = x^i(t)$ $a \leq t \leq b$ be the equations of a segment of a curve c in a coordinate neighborhood U . The length s of the segment is given by the integral

$$s = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (2.1.1)$$

Definition [AIM] The manifold M equipped with this notion of length is called an n -dimensional Finsler space with the fundamental function L if L fulfills the conditions below

- (1) The length of any oriented curve does not depend on the choice of parameter. That is the fundamental function L is positively homogeneous of degree one in y .
- (2) The length integral (2.1.1) gives rise to the regular variational problem. An important special case is

$$g_{ij} := \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}, \quad F := L^2/2 \quad (2.1.2)$$

has non-zero determinant.

- (3) In each tangent space $T_x M$ we have a region $T_x M^*$ such that $L(x, y)$ is differentiable in y^i , where $T_x M^*$ does not contain $y=0$ and is a positively conical region, that consists of non-zero tangent vectors $y \in T_x M^*$ for which $py \in T_x M^*$ for any $p > 0$. Thus $M^* := \bigcup_{x \in M} T_x M^*$ is the domain of the definition of L .
- (4) The fundamental function $L(x, y)$ is positive-valued for any y belonging to the positively conical region $T_x M^*$.

Definition [AIM] The extremal of the length integral $s = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt$ is called the *geodesic* of the space.

A geodesic is a curve given by the differential equations

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + 2G^i(x, dx/ds) = 0, \quad (2.1.3)$$

where s is the normalized parameter, that is the arc-length,

$$G^i = g^{ij} G_j, \quad 2G_j = (\dot{\partial}_j \partial_i F) y^i - \partial_j F. \quad (2.1.4)$$

and $F(x, y) = (L(x, y))^2 / 2$.

If the geodesic is written locally as $x^i = x^i(t)$ in a parameter t , then the equations (2.1.3) are written in the form

$$d^2 x_i / dt^2 + 2G^i(x, dx/dt) = \gamma(t) dx^i / dt \quad (2.1.5)$$

where

$$\gamma(t) := (dx^2 / dt^2) / (ds / dt).$$

The Berwald connection coefficients G_j^i and G_{jk}^i can be derived from the function G^i , namely

$$G_j^i = \dot{\partial}_j G^i \quad (2.1.6)$$

$$G_{jk}^i = \partial_k G_j^i. \quad (2.1.7)$$

Definition [AIM], [She3] If any geodesic of F^n coincides with a geodesic of \bar{F}^n as a set of points and vice versa, then the change $L(x, y) \rightarrow \bar{L}(x, y)$ of the metric is called projective and F^n is said to be projective to \bar{F}^n .

Let $c: x^i = x^i(t)$ be a curve of M^n which is a geodesic of both F^n and \bar{F}^n as a set of points. Then c is written as (2.1.5) in F^n and also in \bar{F}^n as

$$d^2 x_i / dt^2 + 2\bar{G}^i(x, dx/dt) = \bar{\gamma}(t) dx^i / dt,$$

thus

$$2\bar{G}^i(x, dx/dt) - 2G^i(x, dx/dt) = (\bar{\gamma}(t) - \gamma(t)) dx^i / dt.$$

Since the above must hold for any point x and any direction dx/dt we have

Theorem [K] Finsler space F^n is projective to another Finsler space \bar{F}^n if and only if there exists a positively homogeneous of degree one scalar field $p(x, y)$ satisfying

$$\bar{G}^i(x, y) = G^i(x, y) + p(x, y) y^i. \quad (2.1.8)$$

A scalar field $p(x, y)$ is called the *projective factor* of the projective change under consideration.

From (2.1.8) we obtain

$$\bar{G}_j^i = G_j^i + p_j y^i + p \delta_j^i \quad (p_j = \dot{\partial}_j p) \quad (2.1.9)$$

$$\bar{G}_{jk}^i = G_{jk}^i + p_{jk} y^i + p_j \delta_k^i + p_k \delta_j^i \quad (p_{jk} = \dot{\partial}_k p_j = \dot{\partial}_k \dot{\partial}_j p). \quad (2.1.10)$$

Definition: [M14] A Finsler space F^n is said to be of scalar curvature if

$$H_j^i = h_j^i H, \quad (2.1.11)$$

where $h_j^i = \delta_j^i - l^i l_j$, $l^i = y^i / L$ and $l_i = L_{(i)}$.

Definition: [M14] $H_j^i(x, y)$ is the deviation tensor of F^n which is given by

$$H_j^i = 2 \partial G^i / \partial x^j - y^\alpha \partial G^i / \partial x^\alpha + 2 G_{j\alpha}^i G^\alpha - G_\alpha^i G_j^\alpha \quad (2.1.12)$$

and $H_\alpha^\alpha = (n-1)H$.

From the curvature tensor $H_{ijk}^h = \frac{1}{3}(H_{k(j)}^h - H_{j(k)}^h)_{(i)}$ we have $H_k^h = H_{00k}^h$. The index 0 denotes as usual the transvection by y^α , for instance $H_k^h = H_{\alpha\beta k}^h y^\alpha y^\beta = H_{00k}^h$.

Assume that there exists a geodesic mapping between F^n and \bar{F}^n . Then the deviation tensors satisfy the relation

$$\bar{H}_j^i = H_j^i + y^i Q_{j0} + \delta_j^i Q_0 - y^i Q_j \quad (2.1.13)$$

where $Q_j = p_{;j} - p p_j$, $Q_{jk} = p_{j;k} - p_{k;j}$

In the studies of projective Finsler geometry the following tensor introduced by J. Douglas is very important [D]

$$D_{ijk}^h := G_{ijk}^h - \frac{1}{n+1} (y^h G_{ijk} + \delta_i^h G_{jk} + \delta_j^h G_{ik} + \delta_k^h G_{ij}) \quad (2.1.14)$$

The Douglas tensor invariants under projective change, that is

$$\bar{D}_{ijk}^h = D_{ijk}^h.$$

Furthermore there are two more invariant tensors. The W -tensor is called the Weyl torsion tensor,

$$W_{jk}^i := R_{ijk}^i + \frac{1}{n+1} \left(y^i H_{jk} + \delta_j^i H_k - \delta_k^i H_j \right) \quad (2.1.15)$$

The other invariant tensor (W_{hjk}^i) that is,

$$W_{hjk}^i := H_{hjk}^i + \frac{1}{n+1} \left(y^i H_{jk \cdot h} + \delta_h^i H_{jk} + \delta_j^i H_{k \cdot h} - \delta_k^i H_{j \cdot h} \right) \quad (2.1.16)$$

is called the projective Weyl curvature tensor.

2.2. On geodesic mappings of recurrent Finsler spaces

Definition: [Mo3] A Finsler space F^n is called recurrent if the curvature tensor of F^n satisfies the following condition

$$H_{ijk;l}^h = \lambda_l(x, y) H_{ijk}^h, \quad (2.2.1)$$

where $\lambda_l(x, y)$ is a positively homogeneous function of degree 0 in y .

Several authors have studied the recurrent Finsler spaces and their generalizations (e.g. [Mi], [Mo4], [PM], [Se]).

Definition: [M2] A Finsler space F^n is called a Landsberg space if the condition

$$y_\alpha G^\alpha_{jkl} = -2P_{jkl} = 0 \quad (2.2.2)$$

holds, where $-2P_{jkl} = g_{jk;l}$, és $G_{jkl}^i = G_{jk(l)}^i$.

Proposition 1: [BP1] For a recurrent Finsler space with the nonzero vector λ_l depends on the position x alone.

Proof. Using the equation (2.2.1) from the integrability condition

$$T_{j;k(l)}^i - T_{j(l);k}^i = T_j^\alpha G_{\alpha kl}^i - T_\alpha^i G_{jkl}^\alpha,$$

we get

$$H_{jk}^i \lambda_{l(h)} = H_{jk}^\alpha G_{\alpha lh}^i + H_{\alpha j}^i G_{klh}^\alpha - H_{\alpha k}^i G_{jlh}^\alpha, \quad (2.2.3)$$

where $H_{jk}^i = H_{\alpha jk}^i y^\alpha$. Contracting (2.2.3) by y^k we have

$$H_j^i \lambda_{l(h)}^\alpha = H_j^\alpha G_{\alpha lh}^i - H_\alpha^i G_{j lh}^\alpha. \quad (2.2.4)$$

After contracting (2.2.4) by the indices i and j we obtain $(n-1)H\lambda_{l(h)} = 0$. If we assume that $H \neq 0$, then $\lambda_{l(h)} = 0$ (λ_l depends on the position).

From Proposition 1 and from (2.2.4) follows

$$H_j^\alpha G_{\alpha lh}^i - H_\alpha^i G_{j lh}^\alpha = 0. \quad (2.2.5)$$

If F^n has scalar curvature, then substituting (2.1.11), (2.2.2) in (2.2.5) we obtain

$$\frac{H}{L} P_{j lh} = 0,$$

where $H = R(x, y)L^2$ and $R(x, y)$ is the curvature function. Therefore if $H \neq 0$, then we have $P_{j lh} = 0$ and F^n is a Landsberg space. From Numata's result [Nu1], by which a Landsberg space of nonzero scalar curvature is a Riemannian space of nonzero constant curvature, follows the

Proposition 2: [BP1] A recurrent Finsler space F^n ($n > 2$) of nonzero scalar curvature is a Riemannian space of nonzero constant curvature.

Geodesic mapping of recurrent Finsler spaces

In this section we suppose that $n > 2$. We are concerned with a geodesic mapping $F^n \rightarrow \bar{F}^n$, where F^n is an arbitrary but \bar{F}^n is a recurrent Finsler space. In virtue of (2.1.9) and (2.1.10)

$$\bar{H}_{i;k}^h - (2p_k + \bar{\lambda}_k) \bar{H}_i^h - \bar{H}_{i(k)}^h p + \bar{H}_i^\alpha (p_\alpha \delta_k^h + p_{k\alpha} y^h) - \bar{H}_k^h p_i = 0 \quad (2.2.6)$$

Here we use that \bar{F}^n is a recurrent space

$$\bar{H}_{ijk;l}^h = \bar{\lambda}_l \bar{H}_{ijk}^h,$$

from which

$$\bar{H}_{i;\bar{k}}^h = \bar{\lambda}_k \bar{H}_i^h;$$

and the well-known identities [M14]:

$$\bar{H}_{i0}^h = 2\bar{H}_i^h \quad \text{and} \quad \bar{H}_0^h = 0,$$

where ” $\bar{\cdot}$ ” means covariant derivation of Berwald type in \bar{F}^n .

Substituting (2.1.13) into (2.2.6) and contracting it by the tensor h_h^l we have

$$\begin{aligned} H_{i;k}^h - h_i^l Q_{0;k} - (2p_k + \bar{\lambda}_k)(H_i^l - h_i^l Q_0) - H_k^l p_i - h_\alpha^l H_{i(k)}^\alpha p + \\ + h_i^l (Q_0)_{(k)} p + h_k^l H_i^\alpha p_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Contracting (2.2.7) by y^k and indices i, l we receive

$$H_{;0} - Q_{0;0} y(4p - \bar{\lambda})H + (4p + \bar{\lambda})Q_0 = 0, \quad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_\alpha y^\alpha. \quad (2.2.8)$$

From (2.2.7) and (2.2.8) we can conclude that

$$A_{i;0}^l = (4p + \bar{\lambda})A_i^l, \quad (2.2.9)$$

where $A_i^l = H_i^l - Hh_i^l$. (If $A_i^l = 0$, then F^n is a space of scalar curvature.)

The semi-recurrent Finsler space is characterized by the equation (2.2.9) [Ba1]. Therefore the following theorem is valid:

Theorem 1: [BP1] If a Finsler space F^n can be geodesically mapped onto a recurrent Finsler space \bar{F}^n , then F^n must be semi-recurrent.

Special cases:

A) With help of the well-known identity $g_{i\alpha} H_j^\alpha - g_{j\alpha} H_i^\alpha = 0$ from (2.2.7) we obtain

$$\begin{aligned} H_i^h h_j^\alpha p_\alpha - H_j^h h_i^\alpha p_\alpha - h_i^h H_j^\alpha p_\alpha + h_i^h H_j^\alpha p_\alpha + \\ + 2P_{j\alpha}^h H_i^\alpha - 2P_{i\alpha}^h H_j^\alpha + 2pC_{j\alpha}^h H_i^\alpha - 2pC_{i\alpha}^h H_j^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Suppose that the F^n is a Riemannian space, then

$$\frac{1}{2} g_{ij(k)} = C_{ijk} = 0 \quad \text{és} \quad P_{ijk} = 0. \quad (2.2.11)$$

Contracting (2.2.11) by the indices h and i , then we get

$$H_{\alpha}^h p^{\alpha} = H h_{\alpha}^h p_{\alpha}, \quad p^{\alpha} = g^{\alpha\beta} p_{\beta}$$

i.e.

$$A_{\alpha}^i p^{\alpha} = 0. \quad (2.2.12)$$

Substituting (2.2.11), (2.2.12) and (2.2.10) we have

$$A_i^h h_{\beta}^{\alpha} p_{\alpha} p^{\beta} = 0,$$

which means that $A_i^h = 0$ if $h_{\beta}^{\alpha} p_{\alpha} p^{\beta} = p_{\alpha} p^{\alpha} - L^2 p^2 \neq 0$. Thus we have proved the following

Theorem 2: [BP1] If F^n is a Riemannian space which can be geodetically mapped onto a recurrent Finsler space \bar{F}^n , then F^n must be a Riemannian space of constant curvature if $p_{\alpha} p^{\alpha} - L^2 p^2 \neq 0$.

B) Let F^n be also a recurrent Finsler space. From the equation $H_{ijk;l}^h = \lambda_l H_{ijk}^h$ we obtain

$$H_{i;l}^h = \lambda_l H_i^h, \quad H_{;l} = \lambda_l H, \quad \lambda = \lambda_{\alpha} y^{\alpha}.$$

Thus

$$A_{i;l}^h = \lambda_l A_i^h. \quad (2.2.13)$$

Considering (2.2.9) and (2.2.13) we get

$$(4p + \bar{\lambda} - \lambda) A_i^h = 0.$$

If $4p + \bar{\lambda} - \lambda \neq 0$, then we get $A_i^h = 0$. Consequently from Proposition 2 we have the following

Theorem 3: [BP1] If a recurrent Finsler space F^n can be geodesically mapped onto a recurrent Finsler space \bar{F}^n , then F^n must be a Riemannian space of constant curvature if $4p + \bar{\lambda} - \lambda \neq 0$.

2.3. A note on a generalized Douglas space

Definition: A Finsler space $F^n(M^n, L)$ is called a *generalized Douglas space* if

$$h_\alpha^h D_{ijk;\beta}^\alpha y^\beta = 0, \quad (2.3.1)$$

where $h_\alpha^h = \delta_\alpha^h - l^h l_\alpha$, $l_\alpha = \partial L / \partial y^\alpha$, and $l^h = y^h / L$.

T. Sakaguchi [Sa] and Sz. Vattamány [Va] studied these generalized Douglas spaces and all Finsler spaces of scalar curvature belong to generalized Douglas spaces.

Theorem 4: [BP2] The generalized Douglas spaces are closed under projective relations.

Proof: We are now concerned with a projective relation $F^n \rightarrow \bar{F}^n$, where F^n is an arbitrary but \bar{F}^n is a generalized Douglas space, that is

$$\bar{h}_\alpha^h \bar{D}_{ijk;\beta}^\alpha y^\beta = 0, \quad (2.3.2)$$

where ” $\bar{\cdot}$ ” means covariant derivation of Berwald type in \bar{F}^n .

From (2.3.2) we have

$$\begin{aligned} & \bar{h}_\alpha^h (\partial \bar{D}_{ijk}^\alpha / \partial x^\beta - \partial \bar{D}_{ijk}^\alpha / \partial y^\gamma \bar{G}_\beta^\gamma + \\ & \bar{G}_{\beta\gamma}^\alpha \bar{D}_{ijk}^\gamma - \bar{G}_{\beta i}^\gamma \bar{D}_{\gamma jk}^\alpha - \bar{G}_{\beta j}^\gamma \bar{D}_{i\gamma k}^\alpha - \bar{G}_{\beta k}^\gamma \bar{D}_{ij\gamma}^\alpha) y^\beta = 0 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Substituting (2.1.9) and (2.1.10) into (2.3.2) we obtain

$$\begin{aligned} & \bar{h}_\alpha^h [\partial \bar{D}_{ijk}^\alpha / \partial x^\beta - \partial \bar{D}_{ijk}^\alpha / \partial y^\gamma (G_\beta^\gamma + p \delta_\beta^\gamma + p_{\beta\gamma} y^\gamma) + \\ & (G_{\beta\gamma}^\alpha + p_\beta \delta_\gamma^\alpha + p_\gamma \delta_\beta^\alpha + p_{\beta\gamma} y^\alpha) \bar{D}_{ijk}^\gamma - \\ & (G_{\beta i}^\gamma + p_\beta \delta_i^\gamma + p_i \delta_\beta^\gamma + p_{\beta i} y^\gamma) \bar{D}_{\gamma jk}^\alpha - \\ & (G_{\beta j}^\gamma + p_\beta \delta_j^\gamma + p_j \delta_\beta^\gamma + p_{\beta j} y^\gamma) \bar{D}_{i\gamma k}^\alpha - \end{aligned}$$

$$(G_{\beta k}^{\gamma} + p_{\beta} \delta_k^{\gamma} + p_k \delta_{\beta}^{\gamma} + p_{\beta k} y^{\gamma}) \bar{D}_{ij\gamma}^{\alpha}] y^{\beta} = 0. \quad (2.3.4)$$

If we use the fact that the Douglas tensor is invariant under projective relation $D = \bar{D}$, then we get the following

$$\bar{h}_{\alpha}^h [D_{ijk;\beta}^{\alpha} y^{\beta} + p_{\gamma} D_{ijk}^{\gamma} y^{\alpha}] = 0.$$

Using $\bar{h}_{\alpha}^h y^{\alpha} = 0$, this equation reduces to

$$\bar{h}_{\alpha}^h D_{ijk;\beta}^{\alpha} y^{\beta} = 0 \quad (2.3.5)$$

A contraction of the tensor \bar{h}_{α}^h with h_h^l we get h_{α}^l . In fact

$$\begin{aligned} h_h^l \bar{h}_{\alpha}^h &= (\delta_h^l - l^l l_h) (\delta_{\alpha}^h - \bar{l}^h \bar{l}_{\alpha}) = \delta_{\alpha}^l - \bar{l}^l \bar{l}_{\alpha} - l^l l_{\alpha} + l^l l_h \bar{l}^h \bar{l}_{\alpha} = \\ &= \delta_{\alpha}^l - \bar{l}^l \bar{l}_{\alpha} - l^l l_{\alpha} + \frac{y^l}{L} l_h \frac{y^h}{L} \bar{l}_{\alpha} = \delta_{\alpha}^l - \bar{l}^l \bar{l}_{\alpha} - l^l l_{\alpha} + \frac{y^l}{L} L \frac{1}{L} \bar{l}_{\alpha} = \\ &= \delta_{\alpha}^l - \bar{l}^l \bar{l}_{\alpha} - l^l l_{\alpha} + \bar{l}^l \bar{l}_{\alpha} = \delta_{\alpha}^l - l^l l_{\alpha} = h_{\alpha}^l. \end{aligned}$$

Therefore contracting (3.5) with h_h^l we have

$$h_{\alpha}^l D_{ijk;\beta}^{\alpha} y^{\beta} = 0.$$

Thus we have proved the Theorem.

2.4. *P-Finsler spaces with vanishing Douglas tensor

Definition: [AIM] A Finsler metric $L(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$ in an n -dimensional differentiable manifold M^n is called Randers metric, where $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}$ is a Riemannian metric in M^n and $\beta(x, y) = b_i(x) y^i$ is a differential 1-form in M^n . The Finsler space $F^n = (M^n, L = \alpha + \beta)$ with Randers metric is called Randers space.

Definition: [AIM] The Finsler metric $L = \alpha^2 / \beta$ is called Kropina metric. The Finsler space $F^n = (M^n, L = \alpha^2 / \beta)$ with Kropina metric is called Kropina space.

Definition: [AIM], [MH] A Finsler space of dimension $n > 2$ is called C-reducible if the tensor C_{ijk} can be written in the form

$$C_{ijk} = \frac{1}{n+1} (h_{ij}C_k + h_{ik}C_j + h_{jk}C_i), \quad (2.4.1)$$

where $C_k = C_{ijk}g^{ij}$.

Theorem: [AIM] A Finsler space F^n , $n \geq 3$, is C-reducible iff the metric is a Randers metric or a Kropina metric.

Definition: [Iz1], [Iz2] A Finsler space F^n is called *P-Finsler space if the tensor $P_{ijk} = \frac{1}{2}g_{ij;k}$ can be written in the form

$$P_{ijk} = \lambda(x, y)C_{ijk}, \quad (2.4.2)$$

where $\lambda(x, y)$ is a scalarfield.

Theorem: [Iz1] For $n > 3$ in a C-reducible *P-Finsler space

$$\lambda(x, y) = k(x)L(x, y)$$

holds and $k(x)$ is only the function of position.

Definition: [BM1] A Finsler space is said to be of Douglas type or *Douglas space*, iff the functions $G^i y^j - G^j y^i$ are homogeneous polynomials in (y^i) of degree three.

Theorem: [BM1] A Finsler space is of Douglas type iff the Douglas tensor vanishes identically.

Theorem: [Iz2] For $n > 3$, in a C-reducible *P-Finsler space $D_{jkl}^i = 0$ holds.

If we consider a *Randers change*

$$\bar{L}(x, y) = L(x, y) + \beta(x, y),$$

where $\beta(x, y)$ is a closed one-form, then this change $\bar{L} \rightarrow L$ is projective.

Definition: [AIM] A Finsler space is called Landsberg space if the condition $P_{ijk} = 0$ holds.

Theorem: [Ba2] If there exists a Randers change with respect to a projective scalar $p(x, y)$ between a Landsberg and a *P-Finsler space (fulfilling the condition $\bar{P}_{ijk} = p(x, y)\bar{C}_{ijk}$), then $p(x, y)$ can be given by the equation

$$p(x, y) = e^{\varphi(x)}\bar{L}(x, y), \quad (2.4.3)$$

where $\bar{L}(x, y)$ is the fundamental function of the *P-Finsler space and $\varphi(x)$ is a differentiable function of the position.

It is well-known that the Riemannian space is a special case of the Landsberg space. In a Riemannian space we have $D_{jkl}^i = 0$, and a *P-Randers space with a closed one-form $\beta(x, y)$ is a Finsler space with vanishing Douglas tensor.

Theorem: [BM1] A Randers space is a Douglas space iff $\beta(x, y)$ is a closed form. Then

$$2G^i = \gamma_{jk}^i y^j y^k + \frac{r_{lm} y^l y^m}{\alpha + \beta} y^i, \quad (2.4.4)$$

where γ_{jk}^i is the Levi-Civita connection of a Riemannian space, $r_{ij} = b_{i,j} + b_{j,i}$.

From (2.4.3) and (2.4.4) follows that

$$\frac{r_{lm} y^l y^m}{\alpha + \beta} = e^{\varphi(x)}(\alpha + \beta),$$

that is

$$\frac{r_{lm} y^l y^m}{\bar{L}} = e^{\varphi(x)}\bar{L}. \quad (2.4.5)$$

From (2.4.5) we obtain

$$r_{lm} y^l y^m = e^{\varphi(x)}\bar{L}^2. \quad (2.4.6)$$

Differentiating twice this equation by y^l and y^m we get

$$b_{i;j} = e^{\varphi(x)} \bar{g}_{ij}.$$

This means that the metrical tensor \bar{g}_{ij} depends only on x , so we get the following

Theorem 5: [BP3] A *P-Randers space with vanishing Douglas tensor is a Riemannian space if the dimension is greater than three.

The theorems mentioned above follow that only the *P-Kropina spaces can be *P-C reducible spaces with vanishing Douglas tensor which are different from Riemannian spaces.

Irodalomjegyzék

- [AM] P. Antonelli, R. Miron: *Lagrange and Finsler Geometry*, Applications to Physics and Biology, volume **76** of FTPH, Kluwer Academic Publishers, (1995)
- [AIM] P. Antonelli, R. Ingarden, M. Matsumoto: *The theory of sprays and Finsler spaces with applications in physics and biology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, (1993)
- [B1] L. Berwald: *Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus*, Math. Z. 25, (1926), 40-73, 26, (1927), 176.
- [B2] L. Berwald: *Parallelübertragung in allgemeinen Räumen*, Atti Congr. Intern. Mat. Bologna, 4, (1928), 263-270.
- [B3] L. Berwald: *On Finsler and Cartan geometries III, Two dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals*, Ann. of Math. 42, (1941), 84-112.
- [B4] L. Berwald: *Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung*, Ann. of Math. 48, (1947), 755-781.
- [B5] L. Berwald: *Über die n -dimensionalen geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die Kürzesten sind*, Math. Z. 30, (1929), 449-469.
- [B6] L. Berwald: *Über die Beziehungen zwischen den Theorien der Parallelübertragung in Finslerschen Räumen*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 49, (1946), 642-647. = Indag. Math. 8, (1946), 401-406.
- [Ba1] S. Bácsó, *A note on geodesic mapping on Finsler spaces*, Topics in Differential Geometry, (Debrecen, 1984) 131-136., Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, **46**, North-Holland, Amsterdam, New York, 1988

- [Ba2] S. Bácsó: *On geodesic mappings of special Finsler spaces*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl. 59, (1999), 83-87.
- [BGYPSZ] S. Bácsó, E. Gyöngyösi, I. Papp, B. Szilágyi: *On some special Finsler metrics in psychometry*, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, (2003), 30. 23-30.
- [BM1] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler spaces of Douglas type. A generalization of the notion Berwald space*, Publ. Math. Debrecen 51, (1997), 385-406.
- [BP1] S. Bácsó, I. Papp: *On geodesic mappings of recurrent Finsler spaces*, Math.Pannonica, **6** (1995), 175-180.
- [BP2] S. Bácsó, I. Papp: *A note on a generalized Douglas spaces*, Period. Math. Hungarica, **48** (2004), 181-184.
- [BP3] S. Bácsó, I. Papp: **P-Finsler spaces with vanishing Douglas tensor*, Acta Acad. Paed. Agriensis, **25** (1998), 91-95.
- [D] J. Douglas: *The general geometry of paths*, Ann. of Math., **29** (1927-1928), 143-168.
- [Ge] A. Gebarowski: *Nearly conformally symmetric warped product manifolds*. Bulletin of the Institute of Mathematica Academia Sinica **20** (1992) 289-303.
- [Iz1] H. Izumi. *On *P-Finsler spaces I., II.* Memoirs of the Defense Academy, Japan, **16** (1976), 133-138, **17** (1977), 1-9.
- [Iz2] H. Izumi: *On *P-Finsler spaces of scalar curvature*, Tensor, N. S. **38** (1982), 220222.
- [K] M. S. Knebelman: *Collineations and notions in generalized spaces*, Amer. J. of Math., **51** (1927), 527-567.
- [M2] M. Matsumoto: *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces*, Kaiseisha Press, Japan, (1986)
- [M4] M. Matsumoto: *Finsler Geometry in the 20th-Century*

- [M14] M. Matsumoto: *Projective changes of Finsler metrics and projectively flat Finsler spaces*, Tensor (N.S.), **34** (1980), 303-315.
- [MH] M. Matsumoto, S. Hojo: *A conclusive theorem on C-reducible Finsler spaces*, Tensor, N. S. **32** (1978), 225-230.
- [Mo3] A. Moór: *Untersuchungen über Finslerräume von recurrenter Krümmung*, Tensor (N.S.), **13** (1963), 1-18.
- [R] B. Riemann: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Göttingen, (1854)
- [Sa] T. Sakaguchi, *On Finsler spaces of scalar curvature*, Tensor, N. S., **38** (1982), 211-219.
- [She3] Z. Shen: *Differential geometry of spray and Finsler spaces*, Kluwer Academic Press, (2001)
- [Szin] N. Sz. Szinjukov: *Geodezicseszkije otobrazsenijja rimanovih prostranstv (Riemann terek geodetikuskij leképezései)*, Moszkva, Nauka, 1979.
- [Va] Sz. Vattamány: *Projection onto the indicatrix bundle of a Finsler manifold*, Publ. Math. Debrecen, **58** (2001), 193-221

Publikációs lista

Nemzetközi folyóiratokban megjelent cikkek az értekezés témakörében

- [BP1] S. Bácsó, I. Papp: *On geodesic mappings of recurrent Finsler spaces*, Math.Pannonica, **6** (1995), 175-180.
- [BP2] S. Bácsó, I. Papp: *A note on a generalized Douglas spaces*, Period. Math. Hungarica, **48** (2004), 181-184.
- [BP3] S. Bácsó, I. Papp: **P-Finsler spaces with vanishing Douglas tensor*, Acta Acad. Paed. Agriensis, **25** (1998), 91-95.
- [BGYPSZ] S. Bácsó, E. Gyöngyösi, I. Papp, B. Szilágyi: *On some special Finsler metrics in psychometry*, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, (2003), 30. 23-30.

Előadások az értekezés témakörében

XXII.OTDK. 1995. Gödöllő, II. Helyezés

Az előadás címe: *Speciális Riemann terek geodetikus leképezései*

Konstruktív geometria. Balatonföldvár 1999.

Az előadás címe: *On geodesic mapping of special Riemannian spaces*

Geometry and graphics in teaching contemporary engineer, Wisla 2000.

Az előadás címe: **P-Finsler spaces with vanishing Douglas tensor*

Colloquium on Differential geometry, Debrecen, 2000

Az előadás címe: **P-Finsler spaces with vanishing Douglas tensor*

Geometry and graphics in teaching contemporary engineer, Sczyrk 2003.

Az előadás címe: *Nearly conformally symmetric Riemannian spaces*

Colloquium on Finsler geometry, Debrecen 2003

Az előadás címe: *On a new class of Finsler spaces, which are closed under projective relations*