



Valószínűségi időjárás modellek és alkalmazásaik magyarországi adatokra

Doktori (PhD) értekezés

Szerző:

NEMODA DÓRA RENÁTA

Témavezető:

DR. BARAN SÁNDOR

Debreceni Egyetem

Természettudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2017



Valószínűségi időjárás modellek és alkalmazásaik magyarországi adatokra

Doktori (PhD) értekezés

Szerző:

NEMODA DÓRA RENÁTA

Témavezető:

DR. BARAN SÁNDOR

Debreceni Egyetem

Természettudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2017

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és alkalmazott matematika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2017. március 23.

.....
Nemoda Dóra Renáta
jelölt

Tanúsítom, hogy Nemoda Dóra Renáta doktorjelölt 2012 – 2015 között a fent megnevezett Doktori Iskola Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és alkalmazott matematika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2017. március 23.

.....
Dr. Baran Sándor
témavezető

Valószínűségi időjárás modellek és alkalmazásaik magyarországi adatokra

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében a matematika tudományágban.

Írta: Nemoda Dóra Renáta okleveles matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori programja (Valószínűségelmélet és matematikai statisztika alprogramja) keretében

Témavezető: Dr. Baran Sándor

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 20... .

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20... .

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik hozzásegítettek engem ahhoz, hogy jelen disszertáció elkészülhessen.

Elsősorban témavezetőmnek, Baran Sándornak köszönöm az elmúlt évek lelkiismeretes munkáját, a belém vetett bizalmát és minden egyes tanácsát, melyek nélkül ez a disszertáció nem készülhetett volna el.

Másodsorban köszönöm a Debrecen Egyetem Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszék, illetve a Miskolci Egyetem Alkalmazott Matematikai Intézeti Tanszék minden oktatójának, akik valamilyen formában segítettek eddigi tanulmányaim folyamán.

Köszönöm Tilmann Gneiting, Michael Scheuerer, Thordis Thorarinsdottir, Sebastian Lerch hasznos tanácsait, illetve a rendelkezésünkre bocsátott **R** kódjait. Köszönöm továbbá Horányi Andrásnak, Szűcs Mihálynak és Mile Máténak, az OMSZ munkatársainak, a hasznos tanácsait és az adatsorokat.

Végül, de nem utolsó sorban megköszönöm a szüleimnek, a nagyszüleimnek, a testvéreimnek, a páromnak és a barátaimnak, hogy mindezt lehetővé tették számomra, mindvégig támogattak és biztattak.

Tartalomjegyzék

Bevezetés, motiváció	1
1. Ensemble előrejelző rendszerek	3
1.1. Modellezési és utófeldolgozási technikák	3
1.1.1. Bayesian Model Averaging	4
1.1.2. Speciális BMA modellek	5
1.1.3. Ensemble Model Output Statistics	9
1.1.4. Speciális EMOS modellek	10
1.1.5. Az R program	12
1.2. Illeszkedési mutatók	13
1.3. Adatok leírása	19
1.3.1. ALADIN-HUNEPS ensemble	19
1.3.2. University of Washington mesoscale ensemble	21
2. Hőmérséklet és szélsőérték előrejelzések	23
2.1. Modellek	23
2.2. Tanuló periódus választása	27
2.3. Eredmények	36
3. Csapadék előrejelzések	43
3.1. Cenzorált, eltolt gamma EMOS model	44
3.2. Eredmények	45
3.2.1. University of Washington mesoscale ensemble	45
3.2.2. ALADIN-HUNEPS ensemble	50
Összefoglalás	55
Summary	59
Irodalomjegyzék	64
Függelék	71

Ábrák jegyzéke

1.1.	A PIT hisztogram jellemző alakjai	18
1.2.	Az ALADIN-HUNEPS hőmérséklet és szélsőbesség előrejelzések vizsgálatai során használt magyarországi megfigyelőállomások térképe . .	20
1.3.	Verification rank hisztogram. 2 méter magasságban mért hőmérséklet és 10 méter magasságban mért szélsőbesség 11 tagú ALADIN-HUNEPS ensemble előrejelzései 2012. április 1. és 2013. március 31. között . . .	21
1.4.	University of Washington mesoscale ensemble, Észak-Amerika északnyugati csendes-óceáni partvidékén lévő 52 megfigyelő állomás	22
1.5.	Verification rank hisztogram. Bal oldal: ALADIN-HUNEPS csapadék ensemble 2010. október 1. - 2011. március 25. Jobb oldal: A 8 tagú UWME csapadék ensemble a 2008-as évre.	22
2.1.	Az ALADIN-HUNEPS ensemble fáklyadiagramja. A vastag folytonos görbe a kontroll tagé, a szaggatott görbe páros sorszámú ensemble tagoké, és a pontozott görbe a páratlan sorszámú ensemble tagoké. . .	24
2.2.	Hőmérséklet előrejelzésre alkalmazott normális BMA lineáris korrekcióval (a és b) és EMOS modell (c és d) 2012. július 2-án Debrecenben. BMA előrejelző eloszlás két- ill. háromcsoportos eset (fekete: együttes, piros: kontroll, világos kék: felcserélhető, sötét kék: páros felcserélhető, zöld: páratlan felcserélhető), EMOS előrejelző eloszlás két- ill. háromcsoportos eset (fekete), ensemble előrejelzések (ugyanolyan színű körök, mint a BMA sűrűségfüggvények), BMA/EMOS medián előrejelzés (fekete függőleges vonal), tényleges megfigyelés (narancssárga függőleges vonal), alsó és felső decilis (szaggatott függőleges vonalak).	26
2.3.	Hőmérséklet előrejelzésre vonatkozó kétcsoportos modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, a BMA/EMOS előrejelzések mediánjainak MAE értékei és a BMA/EMOS előrejelzések átlagainak RMSE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében (BMA: vonal és o; EMOS: szaggatott és □).	28

2.4. Hőmérséklet előrejelzésére alkalmazott kétszoportos modellek különböző hosszúságú tanuló periódusaihoz tartozó 83.33%-os BMA/EMOS előrejelző intervallumok átlagos szélessége illetve lefedettsége (BMA: vonal és $\circ$; EMOS: szaggatott és $\square$).	29
2.5. Hőmérséklet előrejelzésre vonatkozó háromcszoportos modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, a BMA/EMOS előrejelzések mediánjainak MAE értékei és a BMA/EMOS előrejelzések átlagainak RMSE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében (BMA: vonal és $\circ$; EMOS: szaggatott és $\square$).	30
2.6. Hőmérséklet előrejelzésére alkalmazott háromcszoportos modellek különböző hosszúságú tanuló periódusaihoz tartozó 83.33%-os BMA/EMOS előrejelző intervallumok átlagos szélessége illetve lefedettsége (BMA: vonal és $\circ$; EMOS: szaggatott és $\square$).	31
2.7. Szélsebesség előrejelzésre vonatkozó kétszoportos modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, a BMA/EMOS előrejelzések mediánjainak MAE értékei és a BMA/EMOS előrejelzések átlagainak RMSE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében (gamma BMA: vonal és $\circ$; csonkított normális BMA: pontozott és $\diamond$ EMOS: szaggatott és $\square$).	32
2.8. Szélsebesség előrejelzésére alkalmazott kétszoportos modellek különböző hosszúságú tanuló periódusaihoz tartozó 83.33%-os BMA/EMOS előrejelző intervallumok átlagos szélessége illetve lefedettsége (gamma BMA: vonal és $\circ$; csonkított normális BMA: pontozott és $\diamond$ EMOS: szaggatott és $\square$).	33
2.9. Szélsebesség előrejelzésre vonatkozó háromcszoportos modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, a BMA/EMOS előrejelzések mediánjainak MAE értékei és a BMA/EMOS előrejelzések átlagainak RMSE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében (gamma BMA: vonal és $\circ$; csonkított normális BMA: pontozott és $\diamond$ EMOS: szaggatott és $\square$).	34
2.10. Szélsebesség előrejelzésére alkalmazott háromcszoportos modellek különböző hosszúságú tanuló periódusaihoz tartozó 83.33%-os BMA/EMOS előrejelző intervallumok átlagos szélessége illetve lefedettsége (gamma BMA: vonal és $\circ$; csonkított normális BMA: pontozott és $\diamond$ EMOS: szaggatott és $\square$).	35
2.11. Normális BMA (lineáris, additív és korrekció nélküli esetben) és normális EMOS módszerekkel kapott hőmérséklet előrejelzések PIT hisztogramjai a két- és a háromcszoportos esetben	37

2.12. A fagy valószínűségét ábrázoltuk Debrecen városra, 2012. december 01. és 2013. február 28. között. A fekete görbe a lineáris BMA, a kék az additív BMA és a piros a korrekció nélküli BMA módszerekkel kapott előrejelzéseket mutatják, míg a zöld görbe a nyers ensemble előrejelzéseket mutatja. A vízszintes tengelyen a függőleges vonalak jelzik azokat a napokat, amikor ténylegesen fagy történt.	39
2.13. Gamma és csonkított normális BMA, valamint csonkított normális EMOS módszerekkel kapott szélsőérték előrejelzések PIT hisztogramjai a két- és a háromcsoportos esetben	41
3.1. Az UWME csapadék előrejelzéseire vonatkozó CSG EMOS modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, és az előrejelzések mediánjainak MAE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében.	46
3.2. A nyers UWME verification rank hisztogramja, valamint a BMA és EMOS utófeldolgozott előrejelzések PIT hisztogramjai a 2008-as évre.	47
3.3. A nyers ensemble, a CSG és GEV EMOS, valamint a gamma BMA módszerekkel utófeldolgozott előrejelzések megbízhatósági diagramjai az UWME adatsorra a 2008-as évre. A belső hisztogramok az egyes osztópontok log10-es skálán vett gyakoriságát mutatják.	49
3.4. Az ALADIN-HUNEPS csapadék előrejelzéseire vonatkozó CSG EMOS modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, és az előrejelzések mediánjainak MAE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében.	50
3.5. A nyers ALADIN-HUNEPS verification rank hisztogramja, valamint a BMA és EMOS utófeldolgozott előrejelzések PIT hisztogramjai a 2010.11.27. és 2011.03.25. közötti időszakra.	51
3.6. A nyers ensemble, a CSG és GEV EMOS, valamint a gamma BMA módszerekkel utófeldolgozott előrejelzések megbízhatósági diagramjai az ALADIN-HUNEPS adatsorra a 2010.11.27. és 2011.03.25. közötti időszakban. A belső hisztogramok az egyes osztópontok log10-es skálán vett gyakoriságát mutatják.	54

Táblázatok jegyzéke

1.1. A különböző időjárási mennyiségek esetén alkalmazott BMA modellek és a hozzájuk tartozó paraméterek összefoglalása.	9
1.2. A különböző időjárási mennyiségek esetén alkalmazott EMOS modellek és a hozzájuk tartozó paraméterek összefoglalása.	12
2.1. Hőmérséklet esetén a tanuló periódus hosszának optimális hossza az átlagos CRPS, MAE és RMSE értékekre vonatkozóan (Kelvinben adott), a hozzájuk tartozó értékekkel, valamint a 35 nap hosszúságú tanuló periódushoz tartozó értékekkel.	29
2.2. Szélsebesség esetén a tanuló periódus hosszának optimális hossza az átlagos CRPS, MAE és RMSE értékekre vonatkozóan (<i>m/s</i> -ban adott), a hozzájuk tartozó értékekkel, valamint a 43 nap hosszúságú tanuló periódushoz tartozó értékekkel.	33
2.3. Hőmérséklet esetén alkalmazott előrejelző eloszlások PIT értékeinek egyenletességére alkalmazott Kolmogorov-Szmirnov teszt <i>p</i> -értékei. . .	37
2.4. Valószínűségi előrejelzések átlagos CRPS értékei, medián és átlag előrejelzések MAE és RMSE értékei, előrejelző intervallumok átlagos szélessége és a 83.33%-os lefedettség hőmérséklet esetén (Kelvinben megadva). .	38
2.5. Az előrejelző képességet tesztelő CRPS értékeken (<i>felső háromszög</i>) és a medián előrejelző hibáin (<i>alsó háromszög</i>) alapuló Diebold-Mariano teszt eredményei az ALADIN-HUNEPS hőmérséklet előrejelzések esetén (próbastatisztika és <i>p</i> -értékek). A próbastatisztika negatív/pozitív értékei azt jelzik, hogy a sor/oszlop fejlécében levő modell rendelkezik a jobb előrejelző képességgel, a félkövér számok pedig a 0.05 szignifikancia szint alatti <i>p</i> -értéket jelölik.	38
2.6. Szélsebesség esetén alkalmazott előrejelző eloszlások PIT értékeinek egyenletességére alkalmazott Kolmogorov-Szmirnov teszt <i>p</i> -értékei. . .	41
2.7. Valószínűségi előrejelzések átlagos CRPS értékei, medián és átlag előrejelzések MAE és RMSE értékei, előrejelző intervallumok átlagos szélessége és a 83.33%-os lefedettség szélsebesség esetén (<i>m/s</i> -ban megadva). .	42

2.8.	Az előrejelző képességet tesztelő CRPS értékeken (<i>felső háromszög</i>) és a medián előrejelző hibáin (<i>alsó háromszög</i>) alapuló Diebold-Mariano teszt eredményei az ALADIN-HUNEPS szélsőbességek előrejelzéseinek esetén (próbat statisztika és p -értékek). A próbat statisztika negatív/pozitív értékei azt jelzik, hogy a sor/oszlop fejlécében levő modell rendelkezik a jobb előrejelző képességgel, a félkövér számok pedig a 0.05 szignifikancia szint alatti p -értéket jelölik.	42
3.1.	Kolmogorov-Szmirnov teszt p -értékei az UWME PIT értékeinek egyenletességére. Minden esetben egy 10000 darabból álló, darabonként 2500 elemű minta p -értékének vettük az átlagát.	47
3.2.	Valószínűségi előrejelzések átlagos CRPS értékei, a medián előrejelzések MAE értékei, valamint a lefedettség és a 77.78% központi előrejelző intervallumok átlagos szélességei az UWME adatsorra	48
3.3.	Az előrejelző képességet tesztelő CRPS értékeken (<i>felső háromszög</i>) és a medián előrejelző hibáin (<i>alsó háromszög</i>) alapuló Diebold-Mariano teszt eredményei az UWME esetén (próbat statisztika és p -értékek). A próbat statisztika negatív/pozitív értékei azt jelzik, hogy a sor/oszlop fejlécében levő modell rendelkezik a jobb előrejelző képességgel, a félkövér számok pedig a 0.05 szignifikancia szint alatti p -értéket jelölik.	48
3.4.	CRPSS és BSS értékek, referenciaként nyers UWME előrejelzéseket használtuk.	48
3.5.	Kolmogorov-Szmirnov teszt p -értékei az ALADIN-HUNEPS PIT értékeinek egyenletességére. Minden esetben egy 10000 darabból álló, darabonként 2500 elemű minta p -értékeinek vettük az átlagát.	51
3.6.	Valószínűségi előrejelzések átlagos CRPS értékei, a medián előrejelzések MAE értékei, valamint a lefedettség és a 77.78% központi előrejelző intervallumok átlagos szélességei az ALADIN-HUNEPS adatsorra	52
3.7.	Az előrejelző képességet tesztelő CRPS értékeken (<i>felső háromszög</i>) és a medián előrejelző hibáin (<i>alsó háromszög</i>) alapuló Diebold-Mariano teszt eredményei az ALADIN-HUNEPS esetén (próbat statisztika és p -értékek). A próbat statisztika negatív/pozitív értékei azt jelzik, hogy a sor/oszlop fejlécében levő modell rendelkezik a jobb előrejelző képességgel, a félkövér számok pedig a 0.05 szignifikancia szint alatti p -értéket jelölik.	52
3.8.	CRPSS és BSS értékek, referenciaként nyers ALADIN-HUNEPS előrejelzéseket használtuk.	53

Jelölések jegyzéke

add. BMA	Normális BMA additív korrekcióval
ALADIN-	Aire Limitée Adaptation Dynamique Développement
HUNEPS	International - Hungary Ensemble Prediction System
BMA	Bayesian model averaging - Bayes modell átlagolás
BS	Brier score - Brier mutató
BSS	Brier skill score
CSG	Censored, shifted gamma - Cenzorált, eltolt gamma (eloszlás)
CRPS	Continuous ranked probability score
CRPSS	Continuous ranked probability skill score
cs.n. BMA	Csonkított normális BMA
DM	Diebold-Mariano
ECMWF	European Centre for Medium-Range Weather Forecasts
EMOS	Ensemble model output statistics
EPS	Ensemble prediction system
exp	Exponenciális eloszlás
g.BMA	Gamma BMA
GEV	Generalized extreme value - Általánosított extrémérték (eloszlás)
k.n. BMA	Normális BMA korrekció nélkül
lin. BMA	Normális BMA lineáris korrekcióval
LogS	Logarithmic score - Logaritmikus mutató
MAE	Mean absolute error - Átlagos abszolút eltérés
NWP	Numerical weather prediction - Numerikus időjárás előrejelzés
OMSZ	Országos Meteorológiai Szolgálat
PIT	Probability integral transform
RMSE	Root mean square error - Átlagos négyzetes eltérések négyzetgyöke
UWME	University of Washington mesoscale ensemble
$\bar{f}$	Ensemble átlaga
f_k	Ensemble előrejelzés
f_{kst}	s helyre és t időre vonatkozó ensemble előrejelzés
$g_k(y f_k)$	y feltételes sűrűségfüggvénye

$\Gamma(\alpha, \beta)$	Gamma eloszlás
$\mathbb{I}_A$	A halmaz karakterisztikus függvénye
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normális eloszlás
$\mathcal{N}^0(\mu, \sigma^2)$	Nullában alulról csonkított normális eloszlás
Φ	Standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye
S	Ensemble szórása
φ	Standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye

Bevezetés, motiváció

Az időjárás előrejelzés életünk számos területén tölt be fontos szerepet, például a mezőgazdaság szempontjából két aspektusának van kiemelkedően fontos szerepe; a hőmérséklet,- illetve a csapadékmennyiség előrejelzésnek. Az aktuális előrejelzések a légi közlekedés számára is meghatározóak, vegyük például a szél sebességének, irányának vagy a látási viszonyok mértékének előrejelzését. A szélsőséges időjárási események valószínűségének előrejelzése a katasztrófa megelőzés és védelem számára is létfontosságú.

A numerikus időjárás-előrejelzés (NWP) alapjait az 1920-as években alkották meg, de a gyakorlati alkalmazása csak a számítógépek széleskörű megjelenésével vált lehetővé. A numerikus modellek fizikai háttere azon alapszik, hogy a légköri folyamatokat a folyadékok viselkedéséhez hasonlóan írják le, s mint ilyen, a termodinamika és folyadékdinamika egyenleteibe behelyettesítve az adott állapotra jellemző mérési adatokat, előrejelzést kaphatunk a légkör jövőbeli állapotáról. Ezek olyan nemlineáris parciális differenciálegyenletek, melyeket analitikus úton nem lehet megoldani, csak numerikus módon¹. Először előállítják a kezdeti értékeket, vagyis inicializálják a modellt. Ez tényleges mérések, objektív elemzések és előzetesen elvégzett modellezések adatainak, eredményeinek felhasználásával történik. A különböző mérési helyszínekről beérkező adatokat speciális matematikai módszerekkel összesítik, és meghatározzák a modell kiindulási adatait. Ezt felhasználva elvégzik az egyenletrendszer megoldását, mellyel egy adott (rövid) időtartamra kapnak előrejelzést.

A légkör leírásához szükséges folyadékdinamikai elméletek kaotikus természete miatt a pontos időjárás előrejelzése nem lehetséges (Lorenz, 1963), mindemellett a Föld változatos természeti adottságai miatt nem tudunk mindenhol mérési eredményeket gyűjteni. Az előrejelzés folyamán fellépő egyenletek nagyon érzékenyek a kezdeti feltételekre, és ez jelenti a legnagyobb problémát: már kis eltérések is nagy változásokat eredményeznek. Ezt a problémát erősíti az is, hogy a kezdeti értékek mindig tartalmaznak mérési hibákat.

Közel négy évtizeddel ezelőtt dolgozták ki az ensemble (együttes) előrejelzési

¹Például a világ egyik vezető meteorológiai szolgálata, a European Centre for Medium-Range Weather Forecasts által használt numerikus előrejelző modell részletes leírásához lásd: <http://www.ecmwf.int/en/elibrary/17116-part-iii-dynamics-and-numerical-procedures>

technikát (Leith, 1974), hogy jobb képet kapjanak az előrejelzésekben rejlő bizonytalanságokról. Egy előrejelzés családot úgy állítanak elő, hogy egy a légkört leíró NWP modellt különböző kezdeti feltételekkel futtatnak, vagy egyszerűen együtt tekintik a különböző NWP modellek előrejelzéseit. A kezdeti feltételek választására a legegyszerűbb módszer, hogy azokat különböző meteorológiai szolgálatok mérési eredményeiből számolják, ez a multi-analízis ensemble. Eerre példa a dolgozat 1.3.2 fejezetében ismertetett University of Washington mesoscale ensemble (UWME). A különböző kezdeti értékek származtatására a legfejlettebb módszer az, amikor az eredeti kezdeti érték feltételeket kismértékben megváltoztatják (perturbálják), és mindegyik változattal készítenek egy-egy előrejelzést (általában 5 és 100 között van ez a darabszám). Ezzel a módszerrel állítják elő például European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF) 51 tagú ensemble előrejelzését, aminek Magyarországra vonatkozó aktuális hőmérséklet, csapadékösszeg, szélsébség és borultság predikcióit az Országos Meteorológiai Szolgálat (OMSZ) honlapján is megtekinthetünk². A kezdeti értékek perturbációinak előállítására jelenleg két eljárás létezik, a breeding módszer (Toth and Kalnay, 1993, 1997) és a szinguláris vektorok módszere (Buizza and Palmer, 1995; Palmer and Zanna, 2013), a kettő közül az előbbi az elterjedtebb, ezt használja például ECMWF.

Ensemble előrejelzések esetén a hagyományos pontbecsléseket az ensemble átlagaként vagy mediánjaként kapjuk meg. Ezen felül az ensemble előrejelzési technika lehetővé teszi a valószínűségi időjárás előrejelzést, mivel egy előrejelzés családot felhasználva lehetőségünk nyílik egyes események valószínűségére, vagy az előrejelzés bizonytalanságára következtetni (Gneiting and Raftery, 2005). Az ensemble előrejelzésekkel szélsőséges időjárási események valószínűségére is tudunk becslést adni.

Az ensemble előrejelzésekből származó pontbecslések jelentősen csökkentették az NWP modellek előrejelzési hibáit, de még így sem érték el a megfelelő megbízhatóságot. Az esetek többségben az ensemble előrejelzéseknek kicsi a szóródásuk (alul- vagy felülbecslik a tényleges megfigyelést), valamint a belőlük származó előrejelzések nem kalibráltak. Az ensemble előrejelzések pontosságát különböző utófeldolgozó módszerekkel sikerült javítani. Az egyik legnépszerűbb ilyen módszer a Bayes Model Átlagolás (Bayesian Model Averaging, BMA; Raftery *et al.*, 2005). Ez egy olyan előrejelző eloszlást állít elő, mely az egyes ensemble tagokhoz tartozó sűrűségfüggvények keverékeként áll elő. Egy másik, szintén széleskörűen alkalmazott utófeldolgozó módszer az Ensemble Model Output Statistic (EMOS; Gneiting *et al.*, 2005), mely egyetlen sűrűségfüggvényt állít el, amelynek paraméterei az ensemble tagoktól függenek.

Jelen dolgozat 1. fejezetében ezt a két utófeldolgozó módszert, az illeszkedésvizsgálathoz szükséges mutatókat, valamint a modellillesztéshez használt adatsorokat mutatom be részletesen. A 2. fejezetben ismertetem az OMSZ hőmérséklet- és szélsébség-adataira kapott eredményeinket. A 3. fejezetben bemutatom az általunk kifejlesztett csapadék előrejelzésre szolgáló cenzorált, eltolt gamma EMOS modellt, valamint az OMSZ és az UWME csapadékadataira kapott eredményeinket.

²<http://met.hu/idojaras/elorejelzes/valoszinusegi/>

1. fejezet

Ensemble előrejelző rendszerek

1.1. Modellezési és utófeldolgozási technikák

Manapság számos statisztikai utófeldolgozó módszer közül választhatunk, melyekkel javíthatunk az ensemble előrejelzések pontosságán (Gneiting, 2014; Williams *et al.*, 2014). Különböző időjárási események valószínűségének becslésére természetes eljárás a logisztikus regresszió (Hamill *et al.*, 2004), a fejlettebb módszerek azonban a jövőbeli időjárási mennyiség eloszlását modellezik. Ezek közül a két legnépszerűbbet, a Bayes Model Átlagolás (BMA; Raftery *et al.*, 2005) illetve az Ensemble Model Output Statistics (EMOS) módszereket mutatom be részletesen dolgozatomban 1.1.1. és 1.1.3. alfejezetében. Ezeket az utófeldolgozó módszereket az időjárási változók széles skáláján lehet sikeresen alkalmazni. Megemlíthetjük még a BMA eljáráshoz hasonló Best Member Dressing eljárást (Roulston and Smith, 2003; Wang and Bishop, 2005), ami szintén egy keverék eloszlást eredményez.

A modellek paramétereit tanulóadatok segítségével becsüljük meg, melyek valamely megelőző időszak előrejelzéseit és tényleges megfigyeléseit tartalmazzák. A tanuló adatsor így dinamikusán változik, melynek választása szempontjából két módszert különböztetünk meg. Lokális módszerről akkor beszélhetünk, amikor a meteorológiai állomások térbeli elhelyezkedését is figyelembe vesszük, azaz egy adott helyre történő előrejelzéshez, csak az adott helyről származó ensemble előrejelzéseket és tényleges megfigyeléseket vesszük figyelembe. Ezzel szemben a globális módszernél minden paraméterbecsléshez minden adatot felhasználunk, az egyes állomások azonos paraméterhalmazon osztoznak.

1.1.1. Bayesian Model Averaging

A Bayesian Model Averaging (BMA) módszert eredetileg arra fejlesztették ki (Leamer, 1978; Kass and Raftery, 1995; Hoeting *et al.*, 1999), hogy különböző statisztikai modellek következtetéseit és előrejelzéseit kombinálja, majd a társadalomtudomány és egészségügy alkalmazta lineáris regresszió számításához. Az eljárást Raftery *et al.* (2005) fejlesztették tovább az ensemble előrejelzések dinamikus kezelésére, és megmutatták, hogy ez az újonnan kifejlesztett modell egyrészt alkalmazható az ensemble előrejelzések utófeldolgozására, másrészt ilyen módon a jövőbeli időjárási mennyiség kalibrált és éles előrejelző sűrűségfüggvényét adja. A kalibráltság egyfajta statisztikai konzisztenciát jelent az előrejelző eloszlások és a tényleges megfigyelések között, azaz pl. egy adott p valószínűségűnek előrejelzett esemény körülbelül az esetek p -ad részében következik be, míg az élesség az előrejelző intervallumok átlagos szélességére vonatkozik.

Legyen y egy tetszőleges időjárási mennyiség, valamint legyen $f_1, \dots, f_K$ a hozzá tartozó ensemble előrejelzés egy adott helyre és időre vonatkozóan. Az y sűrűségfüggvényét jelölje $g_k(y|f_k)$, feltéve, hogy a tanuló időszakban a legjobb előrejelzést f_k adta. A BMA előrejelző eloszlás (Raftery *et al.*, 2005) az egyes ensemble tagokhoz tartozó feltételes sűrűségfüggvények egy súlyozott átlagaként áll elő, azaz

$$p(y|f_1, \dots, f_K) = \sum_{k=1}^K \omega_k g_k(y|f_k), \quad (1.1.1)$$

ahol ω_k annak a posteori valószínűsége, hogy a tanuló időszakban f_k volt a legjobb előrejelzés. Az ω_k súlyok valószínűségi eloszlást alkotnak, azaz egyrészt nemnegatívak, másrészt $\sum_{k=1}^K \omega_k = 1$.

Az eddig bemutatott módszer akkor alkalmazható, amikor az ensemble előrejelzések egymástól egyértelműen megkülönböztethetők, azaz mindegyik tag azonosítható és visszakövethető, ilyen például a 8 tagú University of Washington mesoscale ensemble (UWME, lásd 1.3.2. fejezet). Manapság a legtöbb NWP modell olyan állományt generál, amely statisztikailag megkülönböztethetetlen ensemble tagokból álló csoportokat tartalmaz, ez a kezdeti érték feltételek véletlen perturbációja miatt jön létre. Ilyen a 11 tagú ALADIN-HUNEPS ensemble, amit az OMSZ állít elő (lásd 1.3.1. fejezet), vagy pedig az 51 tagú European Centre for Medium-Range Weather Forecast ensemble (ECMWF Directorate, 2012).

Az egymástól nem megkülönböztethető ensemble előrejelzéseket felcserélhetőnek tekintjük. Ha az M darab ensemble tagot K darab felcserélhető tagokból álló csoportba osztjuk, jelölje $f_{k,\ell}$ a k -adik csoport ℓ -edik tagját. A BMA előrejelző eloszlás felcserélhető csoportokat tartalmazó ensemble esetén

$$p(y|f_{k,\ell}, k = 1, \dots, K, \ell = 1, \dots, M_k) = \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^{M_k} \omega_k g_k(y|f_{k,\ell}), \quad (1.1.2)$$

ahol az egy csoportba tartozó ensemble tagok ugyanolyan súlyt és paramétereket kapnak.

A különböző időjárási mennyiségek esetén különböző eloszlásokat használnak. Hőmérséklet és tengerszint feletti nyomás előrejelzése esetén Raftery *et al.* (2005) normális eloszlást alkalmazott, a szélesség nemnegativitása és ferdesége miatt Sloughter *et al.* (2010) gamma eloszlást használt, majd Baran (2014) nullában csonkított normális eloszlást alkalmazva javított ez előrejelzések pontosságán. Szélirány előrejelzésére Bao *et al.* (2010) Von Mises eloszláson, szélvektor esetén pedig Sloughter *et al.* (2013) kétváltozós normális eloszláson alapuló BMA modellt dolgozott ki. Végezetül csapadékmennyiség előrejelzés esetén Sloughter *et al.* (2007) egy diszkrét-folytonos gamma eloszlást alkalmazott.

1.1.2. Speciális BMA modellek

Normális BMA modell

Hőmérséklet és tengerszint feletti nyomás modellezésére Raftery *et al.* (2005) normális eloszlást alkalmazott, ahol az (1.1.1) modellben a $g_k(y|f_k)$ függvény egy $\mu_k = b_{0k} + b_{1k}f_k$ várható értékű és σ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye. A paraméterek ensemble tagoktól való függésére természetesen bármilyen más alak is elképzelhető, de a modellalkotásnál törekedni kell a minél egyszerűbb modellek használatára, mert nem elég egy jó előrejelzést megadni, azt az előrejelzést relatíve gyorsan is kell tudni számolni.

A modell paramétereinek becslését a tanuló periódus alapján végezzük el, ahol az affin alaknak köszönhetően a várható érték paramétereit b_{0k} és b_{1k} lineáris regresszióval becsüljük meg, felhasználva a tényleges megfigyeléseket illetve az ensemble előrejelzéseket. Az ω_k súly, valamint a σ szórás paraméter becslésére maximum likelihood módszert alkalmazunk. Az (1.1.1) BMA modell log-likelihood függvénye

$$\ell(\omega_1, \dots, \omega_k, \sigma^2) = \sum_{s,t} \log p(y_{st}|f_{kst}) = \sum_{s,t} \log \left[\sum_{k=1}^K \omega_k g_k(y_{st}|f_{kst}) \right], \quad (1.1.3)$$

ahol f_{kst} az s helyre és t időre vonatkozó k -adik ensemble előrejelzés. A log-likelihood függvény fenti alakját az indokolja, hogy bár az előrejelzendő időjárási mennyiségek között valóban vannak tér- és időbeli összefüggések, itt azonban az ensemble előrejelzésekre vonatkozó feltételes eloszlásukat vizsgáljuk. A tapasztalatok (lásd Raftery *et al.* (2005)) azt mutatják, hogy ezek az összefüggések már benne vannak magukban az ensemble előrejelzésekben, és a paraméterbecslések nem igazán érzékenyek arra, feltesszük-e feltételes függetlenséget. A log-likelihood függvény maximuma analitikus úton nem meghatározható, ezért azt EM-algoritmussal becsüljük meg (McLachlan and Krishnan, 1997).

Vezessünk be a z_{kst} nem megfigyelhető mennyiségeket, $z_{kst} = 1$, ha az s helyen és t időben a legjobb előrejelzést f_k adta, különben $z_{kst} = 0$. Így minden (s, t) párra

a $\{z_{1st}, \dots, z_{Kst}\}$ közül pontosan egy értéke lesz 1, a többi 0. Így az y_{st} tényleges megfigyelésekhez és a z_{kst} mennyiségekhez tartozó teljes log-likelihood függvény az alábbi alakú

$$\ell_C(\omega_1, \dots, \omega_K, \sigma^2) = \sum_{s,t} \sum_{k=1}^K z_{kst} \left[\log(\omega_k) + \log(g_k(y_{st}|f_{kst})) \right].$$

Az EM-algoritmus az E-lépés (expectation-step) és az M-lépés (maximization-step) váltakozásából áll. Először meghatározza a kiinduló értékeket a becslendő paraméterekre. Az E-lépésben $\hat{z}_{kst}$ új értékét adja meg a teljes log-likelihood függvény feltételes várható értékének meghatározásával, melyhez a paraméterek előző lépésbeli becslését használja fel. Az M-lépésben a paraméterek új becslését adja meg a log-likelihood függvény maximumának meghatározásával, melyhez a $\hat{z}_{kst}$ új értékét használja fel.

Megjegyezzük, hogy $\hat{z}_{kst}$ értéke tetszőleges $[0, 1]$ -beli értéket felvehet, továbbá mindegy egyes (s, t) párra $\hat{z}_{kst} \geq 0$, $\sum_{k=1}^K \hat{z}_{kst} = 1$.

A (1.1.1) BMA modellben az E-lépés (j) -edik iterációs lépése

$$\hat{z}_{kst}^{(j+1)} = \frac{\omega_k^{(j)} g(y_{st}|f_{kst}, \sigma^{(j)})}{\sum_{i=1}^K \omega_i^{(j)} g(y_{st}|f_{ist}, \sigma^{(j)})}, \quad (1.1.4)$$

ahol $g(y_{st}|f_{kst})$ a BMA modellben fellépő megfelelő feltételes sűrűségfüggvény. Az M-lépésben $\hat{z}_{kst}^{(j+1)}$ -t felhasználva meghatározzuk a paraméterek új becslését

$$\omega_k^{(j+1)} = \frac{1}{n} \sum_{s,t} \hat{z}_{kst}^{(j+1)},$$

ahol n a tényleges megfigyelések száma a tanuló periódusban (azaz az összes (s, t) pár). Normális eloszlás esetén a szórás paraméterek becslésére van zárt alak

$$\sigma^{2(j+1)} = \frac{1}{n} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^K \hat{z}_{kst}^{(j+1)} (y_{st} - f_{kst})^2.$$

Az iteráció megállási feltétele, hogy a log-likelihood függvény maximuma, a paraméterek vagy a $\hat{z}_{kst}$ becslései egy iteráció után már csak kismértékben változnak. Az E- és M-lépésekkel előállított paraméterek konvergálni fognak azokhoz az értékekhez, ahol a log-likelihood függvény felveszi a lokális maximumát (Wu, 1983). A globális maximumhoz való konvergencia sajnos nem garantálható, mivel ez az algoritmus nagyon érzékeny a kiinduló kezdeti érték feltételekre.

Gamma BMA modell

Szélsőbesség modellezéséhez egy nemnegatív, balra ferdült eloszlásra van szükség. Kezdetben Haslett and Raftery (1989) csonkított normális eloszlással modellezte a

szélsébség négyzetgyökét, majd népszerű lett a Weibull eloszlás, habár Tuller and Brett (1984) bebizonyította, hogy a Weibull eloszlás alkalmazásához szükséges feltételek nem minden esetben teljesülnek. Slougher *et al.* (2010) gamma eloszlást alkalmazott a nyers szélsébség megfigyelésekre, és a szerzők azt tapasztalták, hogy ez jobb előrejelzéseket ad mindenféle transzformáció nélkül. Ekkor az (1.1.1) modellben $g_k(y|f_k)$ az α -rendű β paraméterű gamma eloszlású sűrűségfüggvénye, azaz

$$g_k(y|f_k) = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} y^{\alpha_k-1} \exp(-y/\beta_k).$$

A gamma eloszlás paraméterei az f_k ensemble előrejelzések lineáris függvényeiként állnak elő

$$\mu_k = b_{0k} + b_{1k}f_k \quad \text{és} \quad \sigma_k^2 = c_{0k} + c_{1k}f_k,$$

ahol $\mu_k = \alpha_k \beta_k$ a gamma eloszlás várható értéke és $\sigma_k = \sqrt{\alpha_k} \beta_k$ a szórása. A modell egyszerűsítése érdekében a szórás paramétereit választhatjuk konstansnak, így csökkentve a becsülendő paraméterek számát, amivel gyorsíthatjuk az eljárást. A továbbiakban legyen $c_{0k} = c_0$ és $c_{1k} = c_1$.

A modell a b_{0k} és b_{1k} várható érték paramétereit a normális modellhez hasonlóan Slougher *et al.* (2010) lineáris regresszióval becsüli meg, az ω_k súly és c_0, c_1 szórás paraméterek becsülésére maximum likelihood módszert alkalmaz. A korábbiaktól eltérően a c_0 és c_1 szórás paraméterekre nincs zárt alak, így őket a log-likelihood függvény numerikus optimalizálással kell megbecsülni az $\omega^{(j)}$ súlyok aktuális értékét felhasználva.

Csonkított normális BMA modell

Követve Gneiting *et al.* (2006) és Thorarinsdottir and Gneiting (2010) ötletét, Baran (2014) egy nullában alulról csonkított normális eloszlást alkalmazott szélsébség előrejelzésre. Ennek a $\mathcal{N}^0(\mu, \sigma^2)$ -tel jelölt eloszlásnak a sűrűségfüggvénye

$$g(x|\mu, \sigma) = \frac{\frac{1}{\sigma} \varphi((x - \mu)/\sigma)}{\Phi(\mu/\sigma)}, x \geq 0, \quad \text{és} \quad g(x|\mu, \sigma) = 0, \text{ különben,} \quad (1.1.5)$$

ahol φ és Φ a standard normális eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvényét jelöli. A csonkított normális eloszlás κ várható értéke és ϱ szórása a következő képletekkel adható meg:

$$\kappa = \mu + \frac{\sigma \varphi(\mu/\sigma)}{\Phi(\mu/\sigma)} \quad \text{és} \quad \varrho^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{\mu}{\sigma} \frac{\varphi(\mu/\sigma)}{\Phi(\mu/\sigma)} - \left(\frac{\varphi(\mu/\sigma)}{\Phi(\mu/\sigma)} \right)^2 \right). \quad (1.1.6)$$

Tegyük fel, hogy a μ hely paraméter az ensemble előrejelzések lineáris függvényeként áll elő. Ekkor a BMA előrejelző eloszlás

$$p(y|f_k, b_{0k}, b_{1k}, \sigma_k; k = 1, \dots, K) = \sum_{k=1}^K \omega_k g(y|b_{0k} + b_{1k}f_k, \sigma_k),$$

ahol g az (1.1.5) képletben definiált sűrűségfüggvény. A modell egyszerűsítése érdekében a szórásokat tekintsük azonosnak, azaz $\sigma_1 = \dots = \sigma_K = \sigma$, ezzel a becsülendő paraméterek száma is csökken, így gyorsabb az eljárás.

A modell b_{0k} és b_{1k} várható érték, ω_k súly, valamint σ szórás paramétereinek becslésére maximum likelihood módszert alkalmazunk (Baran, 2014). A módszernek az az előnye, hogy az EM algoritmusban a σ szórás paraméter becslésére van zárt alak (Lee and Scott, 2012), ezzel szemben Sloughter *et al.* (2010) gamma BMA modelljében a c_0 és c_1 szórás paraméterekre nincs, így numerikus optimalizálással kell őket meghatározni. A paraméterek becslése ezzel a modellel sokkal gyorsabban történik, de a különbség az operatív alkalmazás szempontjából elhanyagolható.

Diszkrét-folytonos BMA modell

A csapadékmennyiség előrejelzése több ok miatt is nehéz, ezért egy olyan speciális eloszlásra van szükség, amely egyrészt nemnegatív, másrészt pozitív valószínűséggel vesz fel 0 értéket, illetve amikor nem 0 értékű, akkor erősen ferde. Erre az időjárási mennyiségre kifejlesztett diszkrét-folytonos BMA modell két részből áll. A diszkrét rész annak az eldöntésére szolgál, hogy az adott helyen és időpontban van-e csapadék, ha van akkor a folytonos rész jelzi előre a csapadék mennyiségét egy gamma eloszlással (Sloughter *et al.*, 2007).

A csapadékmennyiség általánosított feltételes sűrűségfüggvénye

$$g_k(y|f_k) = P(y = 0|f_k)\mathbb{I}_{y=0} + P(y > 0|f_k)h_k(y|f_k)\mathbb{I}_{y>0},$$

ahol y csapadék előrejelzések harmadik gyökét jelöli, $\mathbb{I}_A$ az A halmaz karakterisztikus függvénye, azaz 1, ha az A esemény bekövetkezik és 0, ha nem. A pozitív csapadék valószínűségét

$$\text{logit}P(y = 0|f_k) = \log \frac{P(y = 0|f_k)}{P(y > 0|f_k)} = a_{0k} + a_{1k}f_k^{1/3} + a_{2k}\delta_k,$$

logit modell adja meg, ahol $\delta_k = 1$, ha $f_k = 0$, különben 0 és a h_k pedig gamma eloszlás sűrűségfüggvénye, azaz

$$h_k(y|f_k) = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} y^{\alpha_k-1} \exp(-y/\beta_k).$$

Itt jegyezzük meg, hogy a csapadék valószínűségének logisztikus regresszióval való modellezését Hamill *et al.* (2004) javasolta, az előrejelzések negyedik gyökét használva prediktorként. Sloughter *et al.* (2007) tapasztalatai azt mutatták, hogy az

Időjárási mennyiség	Tartomány	g_k	Várható érték/hely	Szórás/skála
Hőmérséklet	$y \in \mathbb{R}$	$\mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$	$b_{0k} + b_{1k}f_k$	σ^2
Légnyomás	$y \in \mathbb{R}$	$\mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$	$b_{0k} + b_{1k}f_k$	σ^2
Szélesség	$y \in \mathbb{R}^+$	$\Gamma(\alpha_k, \beta_k)$	$b_{0k} + b_{1k}f_k$	$c_0 + c_1f_k$
	$y \in \mathbb{R}^+$	$\mathcal{N}^0(\mu_k, \sigma_k^2)$	$b_{0k} + b_{1k}f_k$	σ^2
Csapadékmenny.	$y^{1/3} \in \mathbb{R}^+$	$\Gamma(\alpha_k, \beta_k)$	$b_{0k} + b_{1k}f_k^{1/3}$	$c_0 + c_1f_k$

1.1. táblázat. A különböző időjárási mennyiségek esetén alkalmazott BMA modellek és a hozzájuk tartozó paraméterek összefoglalása.

előrejelzések köbgyöke jobb magyarázóképeséggel bír és ők javasolták a δ_k indikátor használatát is.

A gamma eloszlás paraméterei az eredeti ensemble előrejelzésektől az alábbiak szerint függnek:

$$\mu_k = b_{0k} + b_{1k}f_k + b_{2k}\delta_k \quad \text{és} \quad \sigma_k^2 = c_0 + c_1f_k$$

ahol $\mu_k = \alpha_k\beta_k$ az eloszlás várható érték, $\sigma_k = \sqrt{\alpha_k}\beta_k$ pedig a szórás paramétere. A BMA előrejelző eloszlás ekkor,

$$p(y|f_1, \dots, f_K) = \sum_{k=1}^K \omega_k \left(P(y=0|f_k)\mathbb{I}_{y=0} + P(y>0|f_k)g_k(y|f_k)\mathbb{I}_{y>0} \right),$$

ahol ω_k annak a posteriori valószínűsége, hogy a tanuló időszakban a k -ik tag adta a legjobb előrejelzést.

A nulla csapadék valószínűségének a_{0k} , a_{1k} és a_{2k} paraméterek becslése logisztikus regresszióval történik, felhasználva az ensemble előrejelzések köbgyökét és a δ_k indikátor változót. A b_{0k} , b_{1k} és b_{2k} várható érték paramétereket lineáris regresszióval becslik az eredeti f_k ensemble előrejelzések és a δ_k indikátor változó felhasználásával. Az ω_k súlyok és a c_0 , c_1 szórás paraméterek becslése ismét az EM algoritmussal kombinált ML módszer alkalmazásával történik (Sloughter *et al.*, 2007).

1.1.3. Ensemble Model Output Statistics

Az Ensemble Model Output Statistics (EMOS) (nem-homogén regressziós) módszer egyetlen paraméteres eloszlást állít elő, ahol a paraméterek az ensemble előrejelzésektől függnek. Az EMOS előrejelző eloszlás általános alakja

$$y|f_1, \dots, f_K \sim g(y|f_1, \dots, f_K),$$

ahol y egy tetszőleges időjárási mennyiség, $f_1, \dots, f_K$ pedig a hozzá tartozó megkülönböztethető ensemble előrejelzés egy adott helyre és időre vonatkozóan.

Különböző időjárási mennyiségek esetén eltérő eloszlású EMOS modelleket alkalmazunk. A BMA módszerhez hasonlóan Gneiting *et al.* (2005) hőmérséklet és tengerszint feletti nyomás előrejelzésre normális eloszlást választott. A szélsőbesség nemnegativitása és ferdesége miatt Thorarinsdottir and Gneiting (2010) csonkított normális eloszlást alkalmazott, majd Lerch and Thorarinsdottir (2013) általánosított extrémérték eloszlást (GEV) használt, végül Baran and Lerch (2015, 2016) lognormális eloszlással és eloszlások keverékével javított az előrejelzések pontosságán. Csapadékmennyiség előrejelzése esetén Scheuerer (2014) nullában balról cenzorált általánosított extrémérték (GEV) modellt alkalmazott, majd Scheuerer and Hamill (2015) cenzorált, eltolt gamma eloszláson alapuló többlépcsős modellt fejlesztett ki.

1.1.4. Speciális EMOS modellek

Normális EMOS modell

Gneiting *et al.* (2005) hőmérséklet és nyomás előrejelzéshez az alábbi regressziót használta

$$y = a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_K f_K + \varepsilon, \quad \text{és} \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, b_0 + b_1 S^2),$$

ahol $a_0, \dots, a_K \in \mathbb{R}$ és $b_0, b_1 \in \mathbb{R}^+$ a becsülendő paraméterek, S az ensemble szórása,

$$S^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (f_k - \bar{f})^2,$$

valamin $\bar{f}$ az ensemble átlaga, azaz

$$\bar{f} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K f_k.$$

A normális EMOS előrejelző modell

$$y|f_1, \dots, f_K \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad (1.1.7)$$

melynek $\mu = a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_K f_K$ várható értéke az ensemble előrejelzések, míg a $\sigma^2 = b_0 + b_1 S^2$ szórásnégyzete az ensemble szórásnégyzetének affin függvényeként áll elő.

Felcserélhető ensemble tagok esetén az M darab ensemble tagot osszuk K darab csoportba, és $f_{k,\ell}$ jelölje a k -adik csoport ℓ -edik tagját. Az EMOS előrejelző eloszlás

$$\mathcal{N}\left(a_0 + a_1 \sum_{\ell_1=1}^{M_1} f_{1,\ell_1} + \dots + a_K \sum_{\ell_K=1}^{M_K} f_{K,\ell_K}, b_0 + b_1 S^2\right), \quad (1.1.8)$$

ahol az egy csoportba tartozó ensemble tagok ugyanolyan várható érték paramétert kapnak.

A modellben fellépő $a_0, \dots, a_K$ várható érték és b_0, b_1 szórás paraméterek becslését a tanuló periódus alapján végezzük el, egy megfelelő illeszkedési mutató (1.2 fejezet) optimalizálásával. Gneiting *et al.* (2005) a continuous ranked probability score (CRPS; lásd 1.2 fejezet) minimalizálását javasolja.

Csonkított normális EMOS modell

Szélesebbség előrejelzés esetén Thorarinsdottir and Gneiting (2010) nullában alulról csonkított normális eloszlást alkalmazott, azaz az EMOS előrejelző eloszlás

$$\mathcal{N}^0(a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_K f_K, b_0 + b_1 S^2),$$

ahol a hely paraméter az ensemble előrejelzések, a skála paraméter pedig az ensemble szórásának affin függvényeként áll elő.

A b_0, b_1 skála paramétereknek nemnegatívnak kell lenniük, továbbá az $a_0, \dots, a_K$ hely paramétereket válasszuk nemnegatívnak (Gneiting *et al.*, 2005). Az ismeretlen paramétereket CRPS minimalizációs módszerrel becsljük meg (lásd 1.2 fejezet).

Felcserélhető ensemble tagok esetén az EMOS előrejelző eloszlás

$$\mathcal{N}^0\left(a_0 + a_1 \sum_{\ell_1=1}^{M_1} f_{1,\ell_1} + \dots + a_K \sum_{\ell_K=1}^{M_K} f_{K,\ell_K}, b_0 + b_1 S^2\right),$$

ahol az egy csoportba tartozó ensemble tagok ugyanolyan hely paramétert kapnak.

Általánosított extrémérték EMOS modell

Scheuerer (2014) egy nullában balról cenzorált általánosított extrémérték eloszlású EMOS modellt fejlesztett ki, mely képes a csapadékmennyiség előrejelzés nehézségeit kezelni.

Az általánosított extrémérték (GEV) eloszlás eloszlásfüggvénye

$$G(y) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi(\frac{y-\mu}{\sigma}))^{-1/\xi}), & \xi \neq 0, \\ \exp(-\exp(-(\frac{y-\mu}{\sigma}))), & \xi = 0, \end{cases} \quad \text{ahol} \quad 1 + \xi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \geq 0,$$

valamint μ, σ, ξ a GEV eloszlás hely, skála és alak paramétere.

Ezt az eloszlást nullában balról cenzoráljuk, azaz minden nullánál kisebb érték pontosan nulla lesz. Ebben az esetben az eloszlásfüggvény

$$\tilde{G}(y) = \begin{cases} G(y), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Időjárási mennyiség	Tartomány	Eloszlás
Hőmérséklet	$y \in \mathbb{R}$	Normális
Légnyomás	$y \in \mathbb{R}$	Normális
Szélesség	$y \in \mathbb{R}^+$	Csonkított normális
	$y \in \mathbb{R}^+$	Extrém érték
	$y \in \mathbb{R}^+$	Lognormális
Csapadékmennyiség	$y \in \mathbb{R}^+$	Cenzorált általánosított extrémérték
	$y \in \mathbb{R}^+$	Cenzorált, eltolt gamma

1.2. táblázat. A különböző időjárási mennyiségek esetén alkalmazott EMOS modellek és a hozzájuk tartozó paraméterek összefoglalása.

A cenzorált eloszlás már nemnegatív és pozitív valószínűséggel vesz fel nulla értéket, ezáltal alkalmas csapadékmennyiség modellezésére.

A GEV modell ξ alak paraméterét konstansnak tekintjük, míg a μ hely és σ skála paraméterek az ensemble előrejelzésektől függenek, nevezetesen

$$\mu = a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_K f_K, \quad \sigma = b_0 + b_1 \text{MD},$$

ahol MD az ensemble előrejelzések különbségének az átlaga, azaz

$$\text{MD} = \frac{1}{K^2} \sum_{k, \ell=1}^K |f_k - f_\ell|. \quad (1.1.9)$$

A modell $a_0, \dots, a_m, b_0, b_1$ és ξ paramétereinek becslését CRPS minimalizációs módszerrel kapjuk meg (lásd 1.2 fejezet).

Felcserélhető ensemble esetén a modell μ hely és σ skála paraméterei szintén az ensemble előrejelzésektől függenek, valamint az egy csoportba tartozó ensemble tagok ugyanolyan hely paramétert kapnak, azaz

$$\mu = a_0 + a_1 \sum_{\ell_1=1}^{M_1} f_{1, \ell_1} + \dots + a_K \sum_{\ell_K=1}^{M_K} f_{K, \ell_K}, \quad \sigma = b_0 + b_1 \text{MD}.$$

1.1.5. Az R program

Az ensemble előrejelzések BMA módszerrel való statisztikai utófeldolgozására az R program `ensembleBMA` programcsomagját használtuk (Fralei *et al.*, 2009, 2011). Ez a programcsomag részben tartalmazza a szükséges eloszlásokat: hőmérséklet és tengerszint feletti nyomás előrejelzésére normális eloszlások keverékét; szélesség előrejelzésére gamma eloszlások keverékét; csapadékmennyiség előrejelzésére pedig a folytonos részhez szükséges gamma eloszlások keverékét. Szélesség esetén a csonkított

normális eloszlások keveréke még nincs beépítve, így a témavezetőm által írt saját kódokat használtuk.

A modellező eljárás tudja kezelni a felcserélhető és nem felcserélhető ensemble előrejelzések esetét is, továbbá hiányzó előrejelzéseket is figyelembe tud venni. Tartalmazza továbbá az illeszkedésvizsgálathoz szükséges legfontosabb mutatókat is. A kapott eredményeket grafikai úton is megjeleníti.

Az EMOS módszer esetén az R program `ensembleMOS` programcsomagját használtuk, mely azonban csak hőmérséklet és tengerszint feletti nyomás előrejelzésére használt normális eloszlású modellt tudja kezelni. A többi esetben témavezetőm saját kódjait alkalmaztuk. Ezek közül a szélsőbességek előrejelzésekre szolgáló csonkított normális EMOS modellekhez Thordis Thorarinsdottir, a csapadék előrejelzések kalibrálásához használt általánosított extrémérték (GEV) EMOS modellhez pedig Michael Scheuerer kódjait is felhasználtuk.

1.2. Illeszkedési mutatók

A valószínűségi előrejelzés célja az, hogy maximalizáljuk az előrejelző eloszlás pontosságát, azaz az általunk meghatározott modell minél jobban illeszkedjen a tényleges megfigyelésekre. Egy megfelelő illeszkedési mutató alkalmazásával a valószínűségi előrejelzéshez és a hozzá tartozó tényleges megfigyeléshez egy numerikus értéket tudunk rendelni, így az illeszkedés mértékét számszerűsíteni tudjuk.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető tér, $\mathcal{P}$ pedig konvex valószínűségi mértékek családja ezen a téren. A konvexitás feltétel azt jelenti, hogy ha $F, G \in \mathcal{P}$ és $\alpha \in (0, 1)$, akkor $\alpha F + (1 - \alpha)G \in \mathcal{P}$. Egy Ω -n értelmezett $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ értéket felvevő függvényt $\mathcal{P}$ -kvázi-integrálhatónak nevezünk, ha $\mathcal{A}$ -mérhető és minden $F \in \mathcal{P}$ valószínűségi mértékre nézve kvázi-integrálható. Egy *valószínűségi előrejelzésen* tehát egy $F \in \mathcal{P}$ valószínűségi mértéket értünk. *Illeszkedési mutatón* egy olyan kibővített valós értékű

$$S : \mathcal{P} \times \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

függvényt értünk, melyre minden $F \in \mathcal{P}$ esetén $S(F, \cdot)$ $\mathcal{P}$ -kvázi-integrálható. Azaz, egy olyan $S(F, x)$ függvény, mely numerikus értéket rendel a (F, x) előrejelzés-tényleges megfigyelés párhoz.

Az $S : \mathcal{P} \times \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ illeszkedési mutatót *valódinak* nevezzük a $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$ konvex részhalmazra vonatkozóan, ha

$$\int S(F, x) dF(x) = E_F(S(F, x)) \leq E_F(S(G, x)) = \int S(G, x) dF(x)$$

minden $F, G \in \mathcal{P}_0$ esetén. Az S -et *erősen valódi illeszkedési mutató*-nak nevezzük a $\mathcal{P}_0$ -ra vonatkozóan, ha a fenti képletben egyenlőség pontosan akkor áll, ha $F = G$.

A továbbiakban jelölje x_{st} az s helyre és t időre vonatkozó tényleges megfigyelést, p_{st} illetve P_{st} az s helyre és t időre vonatkozó előrejelzés becslt sűrűség- és eloszlásfüggvényét, $\hat{x}_{st}$ pedig legyen az előrejelző sűrűségfüggvény, vagy az ensemble

alapján számított pontbecslés (medián vagy átlag). Jelölje továbbá n a mintaelemszámot, azaz az összes $s \in \mathcal{S}$ helyhez és $t \in \mathcal{T}$ időponthoz tartozó esetek számát.

Determinisztikus előrejelzések

A determinisztikus vagy pontelőrejelzések (medián, átlag/várható érték) tekinthetők úgy, mint a valószínűségi előrejelzések azon speciális esetei, amikor a kapcsolódó valószínűségi mértékek egyetlen pontra koncentrálnak. Pontelőrejelzések illeszkedésének vizsgálatára a leggyakoribb mutatók az *átlagos abszolút eltérés* (Mean Absolute Error, MAE)

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{s,t} |x_{s,t} - \hat{x}_{s,t}|,$$

és az *átlagos négyzetes eltérések négyzetgyöke* (Root Mean Square Error, RMSE), azaz

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{s,t} (x_{s,t} - \hat{x}_{s,t})^2}.$$

Mindkét mutató negatív irányultságú, vagyis a kisebb értékek jelentik a jobb illeszkedést. MAE esetén az optimális pontelőrejelzés a medián, míg RMSE esetén az átlag (Gneiting, 2011).

Valószínűségi előrejelzések

Eloszlások illeszkedésének vizsgálatára az egyik legnépszerűbb mutató a *logaritmikus mutató* (LogS; Good, 1952), mely csak abszolút folytonos eloszlások esetén alkalmazható. Egy tetszőleges F eloszlás és x valós szám esetén,

$$\log S(F, x) = -\log f(x),$$

ahol f az F eloszlás sűrűségfüggvénye. Ez egy valódi illeszkedési mutató, melynek várható értéke éppen az F entrópiáját adja vissza (Gneiting and Raftery, 2007)

$$E_F(\log S(F, x)) = - \int \log(f(x)) f(x) dx$$

A LogS mutató az összes helyre és időre vonatkozó előrejelző eloszlás és a hozzájuk tartozó tényleges megfigyelések logS értékeinek az átlaga, azaz

$$\text{LogS} = \frac{1}{n} \sum_{s,t} -\log(p_{s,t}(x_{s,t})).$$

Feltételezve a tér- és időbeli függetlenséget, ennek minimuma éppen a paraméterek maximum likelihood becslését adja vissza.

Egy másik, szintén széleskörűen alkalmazott mutató a *continuous ranked probability score* (CRPS; Gneiting and Raftery, 2007), mely egy F eloszlásfüggvény és x érték esetén

$$\text{crps}(F, x) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(y) - \mathbb{I}_{y \geq x})^2 dy = \mathbb{E}|X - x| - \frac{1}{2}\mathbb{E}|X - X'|, \quad (1.2.10)$$

ahol X és X' független, F eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók. Az (1.2.10) képlet jobb oldalán álló alak azt mutatja, hogy a crps értéke a vizsgált időjárási mennyiséggel azonos mértékegységben adható meg. A nyers ensemble esetén az előrejelző eloszlást az empirikus eloszlásfüggvény helyettesíti. A crps egy erősen valódi illeszkedési mutató, és ha F pontelőrejelzés, akkor ez éppen az abszolút eltérést adja vissza (Gneiting and Raftery, 2007).

Az átlagos CRPS mutató az összes helyre és időre vonatkozó előrejelző eloszlás és a hozzájuk tartozó tényleges megfigyelések crps értékeinek az átlaga, azaz

$$\text{CRPS} = \frac{1}{n} \sum_{s,t} \text{crps}(P_{s,t}, x_{s,t}). \quad (1.2.11)$$

A CRPS mutató is negatív irányultságú, vagyis a kisebb értékek jelentik a jobb illeszkedést. A különböző eloszlások esetén zárt alakok adhatók meg a $\text{crps}(F, x)$ kiszámítására. Normális eloszlás esetén (Gneiting *et al.*, 2005)

$$\text{crps}(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), x) = \sigma \left[\frac{x - \mu}{\sigma} \left(2\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) - 1 \right) + 2\varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right],$$

nullában alulról csonkított normális eloszlás esetén pedig (Thorarinsdottir and Gneiting, 2010)

$$\begin{aligned} \text{crps}(\mathcal{N}^0(\mu, \sigma^2), x) &= \sigma \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2} \left[\frac{x - \mu}{\sigma} \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \left[2\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - 2 \right] \right. \\ &\quad \left. + 2\varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi\left(\sqrt{2}\frac{\mu}{\sigma}\right) \right], \end{aligned}$$

ahol $x \geq 0$. Nullában balról cenzorált általánosított extrém érték eloszlás esetén (Scheuerer, 2014), ha $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{crps}(\mathcal{GEV}(\mu, \sigma, \xi), x) &= (\mu - x)(1 - 2p_x) + \mu p_0^2 - 2\frac{\sigma}{\xi} \left[1 - p_x - \Gamma_l(1 - \xi, -\log p_x) \right] \\ &\quad + \frac{\sigma}{\xi} \left[1 - p_0^2 - 2^\xi \Gamma_l(1 - \xi, -2\log p_0) \right], \end{aligned}$$

ahol $p_0 = G(0)$, $p_x = G(x)$ és Γ_l az alsó nem teljes gamma függvény (G a GEV eloszlás eloszlásfüggvénye, lásd 1.1.4 fejezet).

Végül az eltolts, nullában balról cenzorált gamma eloszlás esetén pedig Scheuerer and Hamill (2015) alapján

$$\begin{aligned} \text{crps}(G^0(k, \theta, \delta), x) &= \theta k \left(1 + 2G_{k, \theta}(\delta)G_{k+1, \theta}(\delta) - G_{k, \theta}^2(\delta) - 2G_{k+1, \theta}(y + \delta) \right) \\ &+ (x + \delta) \left(2G_{k, \theta}(x + \delta) - 1 \right) - \frac{\theta k}{\pi} B(1/2, k + 1/2) \left(1 - G_{2k, \theta}(2\delta) \right) - \delta G_{k, \theta}^2(\delta). \end{aligned}$$

BMA esetén is lehet crps értéket számolni, normális eloszlások keverékére az alábbi zárt alak adható meg

$$\text{crps} \left(\sum_{i=1}^m \omega_i \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2), x \right) = \sum_{i=1}^m \omega_i A(x - \mu_i, \sigma_i^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_i \omega_j A(\mu_i - \mu_j, \sigma_i^2 + \sigma_j^2),$$

ahol

$$A(\mu, \sigma^2) = 2\sigma \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \mu \left(2\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - 1 \right)$$

jelöli a μ várható értékű és σ^2 szórású normális eloszlású véletlen változó abszolút értékének a várható értékét.

Itt jegyezzük meg, hogy a fent említett eloszlások crps mutatóinak zárt alakjai implementálva vannak az R nyelv `scoringRules` csomagjában (Jordan *et al.*, 2016).

Az EMOS modellek együtthatóit általában CRPS minimalizációs algoritmussal határozzuk meg. Ebben az esetben numerikus módszerekkel azokat az együtthatókat keressük, melyek minimalizálják az (1.2.11) kifejezést, ehhez az R program beépített optim függvényét a Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS; Byrd *et al.*, 1995; Press *et al.*, 2007) vagy a Nelder-Mead (Nelder and Mead, 1965) algoritmussal alkalmazzuk. Az algoritmushoz szükséges kezdeti értékeket jól kell megválasztani, mert a globális maximumhoz tartó konvergencia érzékeny a kiindulási feltételekre.

A CRPS mutató tulajdonképpen a *Brier mutató* (BS; Wilks, 2011) integráljaként áll elő. Ez utóbbi arra az eseményre vonatkozik, hogy a megfigyelt x időjárási mennyiség meghalad egy y küszöbértéket. Ha $F(y)$ az x mennyiséghez tartozó előrejelző eloszlás, akkor

$$\text{BS}(F, x; y) = (F(y) - \mathbb{I}_{y \geq x})^2.$$

Nyilvánvalóan a BS mutató is negatív orientálságú. A 3.2 fejezet esettanulmányaiban az egyes előrejelzések vizsgálatakor különböző küszöbértékeket tekintettünk (Csapadék esetén UWME: 0, 5, 15, 25, és 30 mm és ALADIN-HUNEPS: 0, 1, 5, 7 és 9 mm, melyek megközelítőleg a nemnulla csapadék megfigyelések 45%-, 75%-, 85%- és 90%-os kvantilisei) és összehasonlítottuk az összes helyre és időre vonatkozó F előrejelző eloszlások és a hozzájuk tartozó x tényleges megfigyelések BS értékeinek az átlagát.

A CRPS és BS mutatók valamely F_{ref} referencia előrejelző eloszláshoz viszonyított javulásának mértékét a *continuous ranked probability skill score* (CRPSS) és *Brier*

skill score (BSS) mutatók alkalmazásával tudjuk mérni (Wilks, 2011; Friederichs and Thorarinsdottir, 2012), ahol

$$\text{CRPSS}(F, x) = 1 - \frac{\text{CRPS}(F, x)}{\text{CRPS}(F_{ref}, x)} \quad \text{és} \quad \text{BSS}(F, x; y) = 1 - \frac{\text{BSS}(F, x; y)}{\text{BSS}(F_{ref}, x; y)}.$$

Ezek a mutatók már pozitív orientáltságúak, vizsgálataink során (lásd 3.2 fejezet) referenciának a nyers ensemble előrejelzéseket használtuk.

Megbízhatósági diagramokkal (Wilks, 2011) azon események valószínűségét hasonlítjuk össze, hogy egy előrejelzett mennyiség, melyet a nyers mintából vagy egy tetszőleges modellből származó előrejelző eloszlásból kapunk, átlép-e egy adott küszöbértéket. Ez a diagram az esemény megfigyelt gyakoriságának gráfját ábrázolja az előrejelzési valószínűségek függvényében, optimális esetben a gráf illeszkedik az egységnégyzet átlójára. Esettanulmányainkban ugyanazokat a küszöbértékeket használtuk, mint a BS mutatónál (Csapadék esetén UWME: 5, 15, 25 és 30 mm és ALADIN-HUNEPS: 1, 5, 7 és 9 mm), az egységnégyzet oldalát pedig 11 egyenlő részre osztottuk, az osztópontok 0.05, 0.15, 0.25, ..., 0.95. Követve Bröcker and Smith (2007) és Scheuerer (2014) javaslatát, egy osztópont megfigyelt relatív gyakorisága a megfelelő valószínűség átlagának függvényében van ábrázolva, továbbá az ábrákhoz belső hisztogramokat is adtunk hozzá, melyek a különböző osztópontok gyakoriságát illusztrálják. Mivel nagyobb mennyiségű csapadék ritkán fordulnak elő, az osztópontok eloszlásának jobb kirajzolódása miatt a belső hisztogramok beosztását log 10-es skálán vettük.

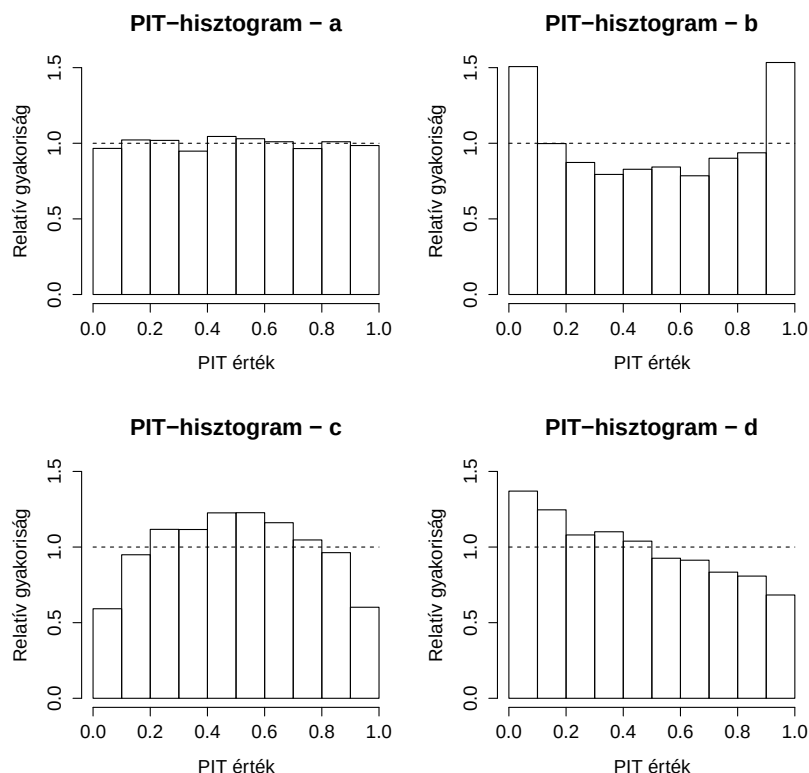
A Diebold-Mariano (DM; Diebold and Mariano, 1995) tesztet alkalmaztuk annak a vizsgálatára, hogy a különböző utófeldolgozó modellekkel kapott illeszkedési mutatók szignifikánsan különbözőek-e. A teszt az előrejelzési hibák közötti függőséget vizsgálja, éppen ezért a közgazdaságtudományban széleskörűen alkalmazott. Tekintsünk két különböző modellből származó F_t és G_t valószínűségi előrejelzést, valamint egy megfelelő S illeszkedési mutatót. Ezen S mutató átlagos értékeit az egyes előrejelzések esetén jelölje

$$\bar{S}(F_t, x_t) = \frac{1}{N} \sum_{t \in T} S(F_t, x_t) \quad \text{és} \quad \bar{S}(G_t, x_t) = \frac{1}{N} \sum_{t \in T} S(G_t, x_t),$$

ahol T tartalmazza a rendelkezésre álló N darab előrejelzést. A DM teszt próbastatisztikája

$$t_N = \sqrt{N} \frac{\bar{S}(F_t, x_t) - \bar{S}(G_t, x_t)}{\hat{\sigma}_N},$$

ahol $\hat{\sigma}_N$ jelöli a $\bar{S}(F_t, x_t) - \bar{S}(G_t, x_t)$ különbségsorozat szórásának egy megfelelő becslését. A nullhipotézis (az előrejelző képességek között nincs különbség) mellett t_N aszimptotikusan standard normális eloszlású. A nullhipotézis elvetése esetén, ha a



1.1. ábra. A PIT hisztogram jellemző alakjai

t_N próbastatisztika negatív értéket vesz fel, akkor a teszt az F előrejelző eloszlást preferálja, pozitív érték esetén pedig a G -t.

Eloszlások illeszkedésének vizsgálatára a széleskörűen alkalmazott *probability integral transform* (PIT; Raftery *et al.*, 2005) hisztogramot használjuk. A PIT értéket általában az előrejelző eloszlásfüggvényt a tényleges megfigyelés helyén kiértékelve kapjuk, melyeket hisztogrammal ábrázolunk. Minél közelebb van ez a hisztogram az egyenleteshez, annál pontosabb az előrejelző eloszlás. A 2.12 ábrán a PIT hisztogram jellemző alakjait szemléltetjük. Az a) esetben egy jó illeszkedést láthatunk, vagyis a hisztogram közel egyenletes eloszlást követ, ezzel szemben a b) esetben egy U-alakú hisztogramot kaptunk, ami azt jelenti, hogy az előrejelző eloszlásnak nem elég nagy a szórása. A c) eset pont az ellenkezőjét jelzi, az előrejelző eloszlásnak túl nagy a szórása, a d) esetben pedig a hisztogram balra ferdült, ami arra enged következtetni, hogy az előrejelző eloszlás várható értéke túl nagy. Csapadék előrejelzéskor a nulla

csapadék esetén a PIT érték a $[0, p_0]$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett érték, ahol p_0 a nulla csapadék előrejelzés valószínűsége (Sloughter *et al.*, 2007).

A nyers ensemble előrejelzések illeszkedésének vizsgálatára a *verification rank hisztogramot* alkalmazzuk, mely a tényleges megfigyelés és az ensemble előrejelzések egymáshoz viszonyított elhelyezkedését illusztrálja. A hisztogramot úgy kapjuk, hogy minden egyes helyre és időre kiszámítjuk a tényleges megfigyelés rangját, azaz az ensemble tagokkal közösen alkotott rangsorban elfoglalt helyét, majd a kapott rangokat hisztogramon ábrázoljuk. Csapadék esetében a hisztogram készítése úgy módosul, hogy nulla csapadék esetén egyenletesen választunk a $\{1, 2, \dots, k + 1\}$ halmazból, ahol k a nulla csapadékot előrejelző ensemble előrejelzések száma. Általában a K tagú nyers ensemble előrejelzések kalibráltak, ha az általuk lefedett tartományban a tényleges megfigyelések $(K - 1)/(K + 1)$ része beleesik (UWME: 8 tag, így a nominális (elvárt) lefedettség $7/9 = 77.78\%$, ALADIN-HUNEPS: 11 tag, $10/12 = 83.33\%$).

Mindezekén túl az előrejelző eloszlások kalibráltságát és élességét az $(1 - \alpha)100\%$ -os ($\alpha \in (0, 1)$) előrejelző intervallumok *lefedettségével* és *átlagos szélességével* tudjuk vizsgálni. A lefedettség az alsó és a felső $\alpha/2$ -kvantilis közé esés aránya, α választása pedig a nyers ensemble nominális lefedettségével van összhangban (UWME: $\alpha = 0.222$, ALADIN-HUNEPS: $\alpha = 0.1667$). Egy kalibrált előrejelző eloszlás esetében ez az arány közel $(1 - \alpha)100\%$. A legjobb előrejelző eloszlást ezek után úgy kapjuk meg, hogy a kalibrált előrejelző eloszlások közül kiválasztjuk azt, amelyik a legszűkebb előrejelző intervallumot szolgáltatja.

1.3. Adatok leírása

1.3.1. ALADIN-HUNEPS ensemble

Ensemble előrejelzések előállítására az Országos Meteorológiai Szolgálat az Aire Limitée Adaptation Dynamique Développement International - Hungary EPS (ALADIN-HUNEPS) rendszert használja, mely a Météo France globális ARPEGE¹ alapú PEARP² rendszerének egy dinamikus leskálázása (Horányi *et al.*, 2006). Az Európa kontinentális részét lefedő ALADIN modellt egy 8 km-es horizontális rácsfelbontással futtatják. A rendszer egy 11 tagú ensemble előrejelzést állít elő, melyek közül 10 perturbált kezdeti értékekkel van generálva, a tizenegyedik a kontroll tag, melyet perturbálatlan kezdeti értékekkel készítenek (Horányi *et al.*, 2011).

A hőmérséklet és szélsébség adatállomány 10 magyarországi nagyváros (Miskolc, Szombathely, Győr, Budapest, Debrecen, Nyíregyháza, Nagykanizsa, Pécs, Kécskemét, Szeged) (1.2 ábra) 2 méter magasságban mért hőmérséklet (Kelvin), valamint 10 méter magasságban mért szélsébség (m/s) előrejelzéseit, és a hozzájuk tartozó tényleges megfigyeléseket tartalmazza. Az előrejelzési időszak 42 órás, ami azt jelenti, hogy a modellt 18 UTC (egyezményes koordinált világidő) időpontban inicializálják

¹ Action de Recherche Petite Echelle Grande Echelle

² PEARP: Prévision d'Ensemble ARPege



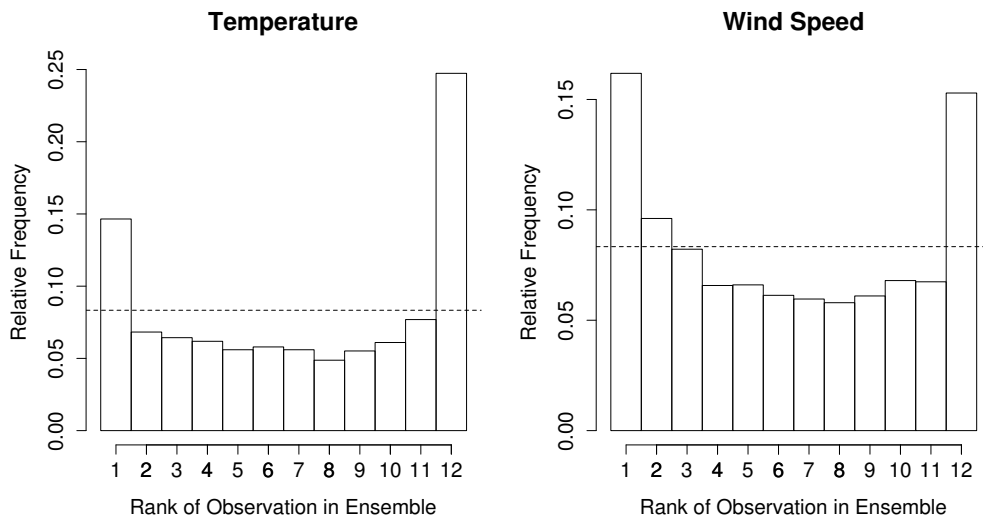
1.2. ábra. Az ALADIN-HUNEPS hőmérséklet és szélesség előrejelzések vizsgálata során használt magyarországi megfigyelőállomások térképe

(nyári időszámítás szerint ez este 8 óra, különben 7 óra), és két nap múlva délre kapnak előrejelzést. A munkánk folyamán egy éves adatsorral (2012. április 1. és 2013. március 31.) dolgoztunk. Ez az adatbázis majdnem teljes volt, csak 6 napról hiányoztak előrejelzések, ezeket a napokat kihagytuk a feldolgozásból.

A 1.3 ábrán a nyers hőmérséklet és szélesség ensemble verification rank hisztogramja látható. Mindkét hisztogram erősen U alakú, az esetek többségében az ensemble előrejelzések alul- vagy felülbecsülik a tényleges megfigyelést. Az ensemble tagok által lefedett tartomány hőmérséklet esetén 60.61%-ban, szélesség esetén 68.52%-ban tartalmazza a tényleges megfigyelést. Az elvárt (nominális) érték mindkét esetben 10/12, vagyis 83.33% lenne. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy az ensemble szórása mindkét esetben kicsi, így a belőlük számolt előrejelzések nem lesznek kalibráltak, utófeldolgozás szükséges.

A csapadék adatállomány ugyancsak 10 magyarországi nagyváros (Miskolc, Sopron, Szombathely, Győr, Budapest, Debrecen, Nyíregyháza, Nagykanizsa, Pécs, Szeged) 24 órás csapadékösszeg 42 órás ensemble előrejelzéseit tartalmazza (a modellt szintén 18 UTC időpontban inicializálják), valamint a hozzájuk tartozó tényleges megfigyeléseket a 2010. október 1-e és 2011. március 25-e közötti időszakban. Az adatbázis szinte teljes, hiszen csupán két nap esetén hiányzott 3-3 ensemble előrejelzés, ezeket a feldolgozás folyamán elhagytuk.

A 1.5 ábra bal oldalán a nyers ALADIN-HUNEPS csapadék ensemble verification rank hisztogramja látható. Az ALADIN-HUNEPS ensemble lefedettsége 84.20%, mely már nagyon közel van a nominális 83.33% értékhez, így ez a hisztogram egy jó kalibrációt mutat.

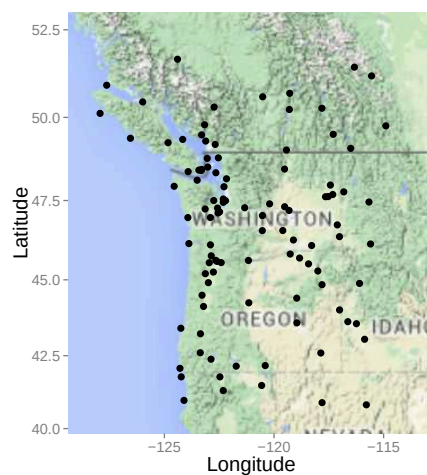


1.3. ábra. Verification rank hisztogram. 2 méter magasságban mért hőmérséklet és 10 méter magasságban mért szélesség 11 tagú ALADIN-HUNEPS ensemble előrejelzései 2012. április 1. és 2013. március 31. között

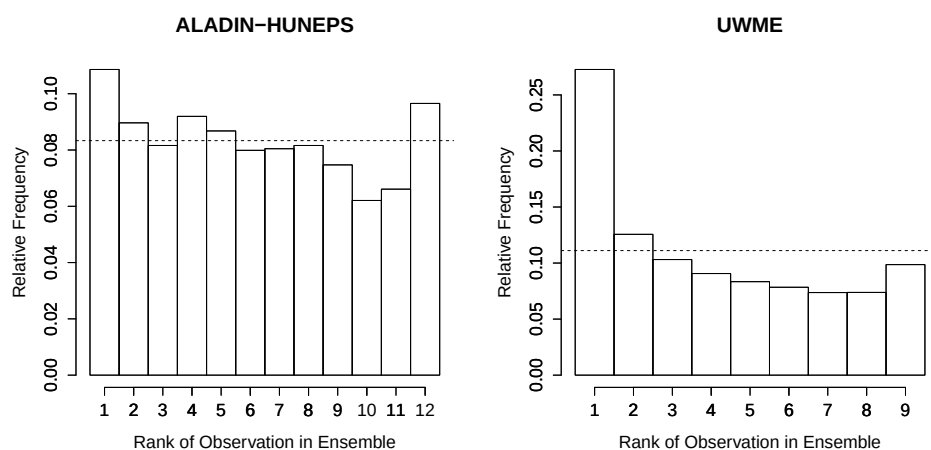
1.3.2. University of Washington mesoscale ensemble

A nyolc tagú University of Washington mesoscale ensemble (UWME) Észak-Amerika északnyugati csendes-óceáni partvidékét fedi le 12 km-es horizontális rácsfelbontással. Az ensemble tagokat az ötödik generációs Pennsylvania State University-National Center for Atmospheric Research (PSU-NCAR MM5, Grell *et al.* (1995)) mesoscale modell különböző futtatásaiból készítik, különböző időjárási központok kezdeti és határ feltételeit felhasználva. A csapadék adatállományt a 152 állomáson (1.4 ábra) mért 48 órás előrejelzések és a hozzájuk tartozó tényleges megfigyelések alkotják. A modellt 0 UTC időpontban inicializálják (ez nyári időszámítás szerint délután 5 órának felel meg, különben délután 4 óra), az előrejelzéseket a 2008-as évre vizsgáltuk, de a paraméterek becsléséhez az előző év utolsó három hónapját is hozzávettük. A hiányzó adatokat tartalmazó sorok elhagyása után 2008-ra 83 állomás 20522 előrejelzése maradt meg.

A 1.5 ábrán a nyers UWME csapadék ensemble verification rank hisztogramja látható. Ez a hisztogram erősen ferde, a legtöbb esetben az ensemble előrejelzések túlbecsülik a tényleges megfigyelést. A validáló megfigyelés mindössze az esetek 67.82%-ban esik az ensemble tagok által lefedett tartományba, míg az elvárt, azaz az ensemble nominális lefedettsége 7/9 vagyis 77.78% lenne. Így a UWME csapadék ensemble előrejelzés nem kalibrált, statisztikai utófeldolgozást igényel.



1.4. ábra. University of Washington mesoscale ensemble, Észak-Amerika északnyugati csendes-óceáni partvidékén lévő 52 megfigyelő állomás



1.5. ábra. Verification rank hisztogram. Bal oldal: ALADIN-HUNEPS csapadék ensemble 2010. október 1. - 2011. március 25. Jobb oldal: A 8 tagú UWME csapadék ensemble a 2008-as évre.

2. fejezet

ALADIN-HUNEPS ensemble előrejelzések statisztikai utófeldolgozása

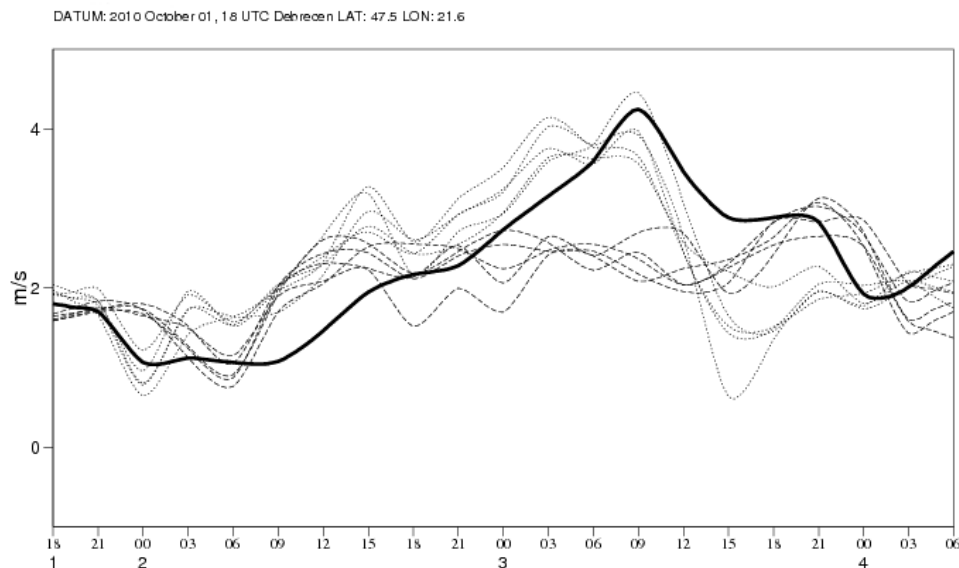
2.1. Modellek

Az ALADIN-HUNEPS hőmérséklet és szélsősebesség adataira különböző modelleket alkalmaztunk, majd meghatároztuk az adatokra legjobban illeszkedőt. Mindkét esetben BMA és EMOS módszereket hasonlítottuk össze. Hőmérséklet esetén normális BMA és normális EMOS modellt használtunk, szélsősebesség esetén gamma BMA, csonkított normális BMA és csonkított normális EMOS modellt illesztettünk. Ebben a fejezetben először ezeket a modelleket részletezem, majd meghatározom az optimális tanuló periódus hosszát, végül bemutatom a modellillesztés eredményeit.

Csoportosítás

Az ALADIN-HUNEPS hőmérséklet és szélsősebesség előrejelzései esetén az ensemble tagok két különböző csoportosítását alkalmaztuk. Az ensemble generálási módjából természetesen adódó kétcsoportos modellben a 11 előrejelzést két csoportba osztottuk ($K = 2$), az egyik csoportba az f_c kontroll tag ($M_1 = 1$), míg a másik csoportba a 10 felcserélhető $f_{p,1}, \dots, f_{p,10}$ ensemble tag került ($M_2 = 10$).

A 2.1 ábrán az ensemble előrejelzések fáklyadiagramja látható. A vastag folytonos görbe a perturbálatlan kezdeti értékekkel kapott kontroll előrejelzéshez, a szaggatott görbe a páros sorszámú ensemble előrejelzésekhez, míg a pontozott görbe a páratlan sorszámú ensemble előrejelzésekhez tartozik. Az ábra jól mutatja, hogy az utóbbi két csoport egymástól jól elkülönül. Ennek az lehet az oka, hogy a felcserélhető ensemble



2.1. ábra. Az ALADIN-HUNEPS ensemble fáklyadiagramja. A vastag folytonos görbe a kontroll tagé, a szaggatott görbe páros sorszámú ensemble tagoké, és a pontozott görbe a páratlan sorszámú ensemble tagoké.

előrejelzéseket pozitív (páratlan sorszámú tagok) illetve negatív (páros sorszámú tagok) perturbálással készítik. Összesen 5 véletlen perturbációt generálnak és az esetek felében hozzáadják a kezdeti feltételekhez, a másik felében pedig kivonják belőlük. Elméletileg ennek nem kellene az ábrán látható hatással járnia és az újabban vizsgált előrejelzéseknél (az ALADIN-HUNEPS rendszert már többször is módosították, finomították) már nincs is látható különbség a felcserélhető tagok között.

Ez az elkülönülés adta a háromcsoportos modell ötletét, ekkor az ensemble tagokat három csoportba osztottuk ($K = 3$). Az első csoportba az f_c kontroll tag ($M_1 = 1$), a másodikba a $f_{p,2}, f_{p,4}, f_{p,6}, f_{p,8}, f_{p,10}$ páros sorszámú ensemble tagok ($M_2 = 5$), míg a harmadikba a $f_{p,1}, f_{p,3}, f_{p,5}, f_{p,7}, f_{p,9}$ páratlan sorszámú ensemble tagok kerülnek ($M_3 = 5$).

Hőmérséklet

Hőmérséklet esetén az adatainkra a Raftery *et al.* (2005) által javasolt normális BMA módszert alkalmaztunk. A (1.1.2) modell speciális alakja a kétcsoportos esetben

$$p(y|f_c, f_{p,1}, \dots, f_{p,10}; b_{0,c}, b_{0,p}, b_{1,c}, b_{1,p}, \sigma) = \omega g_c(y|f_c, b_{0,c}, b_{1,c}, \sigma) + \frac{1-\omega}{10} \sum_{\ell=1}^{10} g_p(y|f_{p,\ell}, b_{0,p}, b_{1,p}, \sigma), \quad (2.1.1)$$

ahol $\omega \in [0, 1]$ és $g(y|f, b_0, b_1, \sigma)$ normális eloszlás sűrűségfüggvénye $b_0 + b_1 f$ várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel (Baran *et al.*, 2014a). Ekkor a két csoportnak különbözőek a várható érték paraméterei ($b_{0,c}, b_{1,c}$ és $b_{0,p}, b_{1,p}$), viszont a szórási paraméterei (σ) megegyeznek.

Ez a lineáris modell, amikor a várható érték paraméter az ensemble előrejelzések affin függvényeként áll elő. Speciális esetként megvizsgáltuk az additív korrekciós modellt, amikor $b_{1,c} = b_{1,p} = 1$, és a korrekció nélküli esetet, amikor $b_{1,c} = b_{1,p} = 1$ és $b_{0,c} = b_{0,p} = 0$.

A háromcsoportos esetben az (1.1.2) modell speciális alakja

$$p(y|f_c, f_{p,1}, \dots, f_{p,10}; b_{0,c}, b_{0,o}, b_{0,e}, b_{1,c}, b_{1,o}, b_{1,e}, \sigma) = \omega_c g_c(y|f_c, b_{0,c}, b_{1,c}, \sigma) + \omega_o \sum_{j=1}^5 g_o(y|f_{p,2j-1}, b_{0,o}, b_{1,o}, \sigma) + \omega_e \sum_{j=1}^5 g_e(y|f_{p,2j}, b_{0,e}, b_{1,e}, \sigma), \quad (2.1.2)$$

ahol $\omega_c, \omega_o, \omega_e \in [0, 1]$, $\omega_c + 5\omega_o + 5\omega_e = 1$, és a g a fentiekhez hasonlóan definiált normális eloszlású sűrűségfüggvény. Hasonlóan a kétcsoportos esethez itt is megvizsgáltuk a speciális eseteket, azaz az additív korrekciós modellt, amikor $b_{1,c} = b_{1,o} = b_{1,e} = 1$, és korrekció nélküli modellt, amikor $b_{1,c} = b_{1,o} = b_{1,e} = 1$ és $b_{0,c} = b_{0,o} = b_{0,e} = 0$.

Az EMOS előrejelző eloszlás egyetlen parametrikus sűrűségfüggvényt állít elő, ahol a paraméterek az ensemble előrejelzések függvényeként állnak elő. Hasonlóan a BMA módszerhez, hőmérséklet esetén normális eloszlást használunk. Az (1.1.8) EMOS előrejelző eloszlás speciális alakja a kétcsoportos esetben

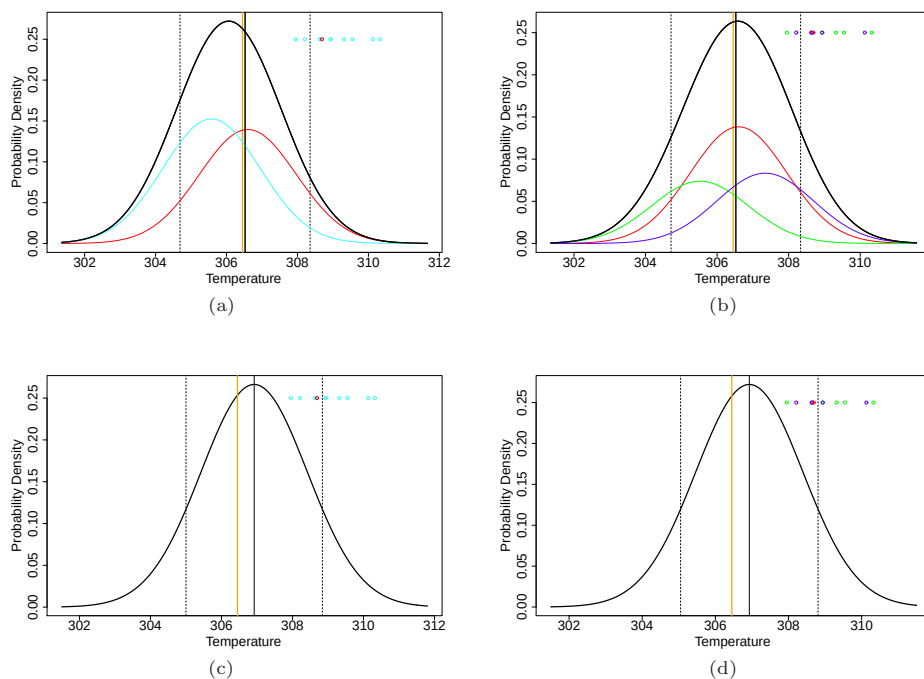
$$\mathcal{N}(a_0 + a_1 f_c + a_2 \sum_{i=1}^{10} f_{p,i}, b_0 + b_1 S^2), \quad (2.1.3)$$

a háromcsoportos esetben pedig

$$\mathcal{N}(a_0 + a_1 f_c + a_2 \sum_{i=1}^5 f_{p,2i-1} + a_3 \sum_{i=1}^5 f_{p,2i}, b_0 + b_1 S^2), \quad (2.1.4)$$

ahol S^2 jelöli az ensemble szórásnégyzetét.

A két különböző csoportosításra (a,c: kétcsoportos; b,d: háromcsoportos) és módszerre (a,b: BMA; c,d: EMOS) illusztrációként tekintsük a 2.2 ábrát, ahol a



2.2. ábra. Hőmérséklet előrejelzésre alkalmazott normális BMA lineáris korrekcióval (a és b) és EMOS modell (c és d) 2012. július 2-án Debrecenben. BMA előrejelző eloszlás két- ill. háromcsoportos eset (fekete: együttes, piros: kontroll, világos kék: felcserélhető, sötét kék: páros felcserélhető, zöld: páratlan felcserélhető), EMOS előrejelző eloszlás két- ill. háromcsoportos eset (fekete), ensemble előrejelzések (ugyanolyan színű körök, mint a BMA sűrűségfüggvények), BMA/EMOS medián előrejelzés (fekete függőleges vonal), tényleges megfigyelés (narancssárga függőleges vonal), alsó és felső decilis (szaggatott függőleges vonalak).

2012. július 2-án Debrecenre vonatkozó hőmérséklet előrejelzések és tényleges megfigyelések láthatóak. Az ábrán a két- illetve háromcsoportos BMA/EMOS előrejelző eloszlás, a különböző csoportokhoz tartozó együttes sűrűségfüggvények, a tényleges megfigyelés, az alsó és a felső decilis, valamint az ensemble előrejelzések láthatóak. Ezen a napon az ensemble tagok szórása viszonylag nagy (terjedelem 2.368 K), ennek ellenére mindegyik felülbecsli a tényleges megfigyelést (306.45 K), ahogy nyilvánvalóan az ensemble medián (308.927 K) is. Ezzel szemben mind a kétcsoportos, mind pedig a háromcsoportos esetben a BMA módszerrel kapott előrejelzés (306.524 K) viszonylag közel van a tényleges értékhez. Az EMOS medián előrejelzés rosszabb eredményt ad,

mint a BMA (306.92 K), de még így is pontosabb előrejelzést nyújt, mint az ensemble medián.

Szélesség

Szélesség modellezésére egy nemnegatív, balra ferdült eloszlásra van szükség, ezért gamma eloszlású BMA módszert alkalmaztunk adatainkra. A (2.1.1) kétszoportos és a (2.1.2) háromsoportos BMA modell szélesség esetén úgy módosul, hogy a $g(y|f, b_0, b_1 c_0, c_1)$ gamma eloszlás sűrűségfüggvénye, $b_0 + b_1 f$ várható érték és $c_0 + c_1 f$ szórás paraméterrel (Baran *et al.*, 2013). A várható érték és a szórás paraméterek is az ensemble előrejelzések affin függvényeiként állnak elő. Az egyes csoportoknak különbözőek a várható érték paraméterei, viszont a szórás paraméterei minden esetben megegyeznek.

Gamma eloszlás mellett a (1.1.5) definiált nullában alulról csonkított normális eloszlást alkalmazunk. Ekkor a (2.1.1) kétszoportos és a (2.1.2) háromsoportos modellben a $g(y|f, b_0, b_1, \sigma)$ csonkított normális eloszlás sűrűségfüggvénye $b_0 + b_1 f$ hely és σ^2 skála paraméterrel. Ekkor a csoportoknak különbözőek a hely paraméterei, viszont a skála paraméterei megegyeznek.

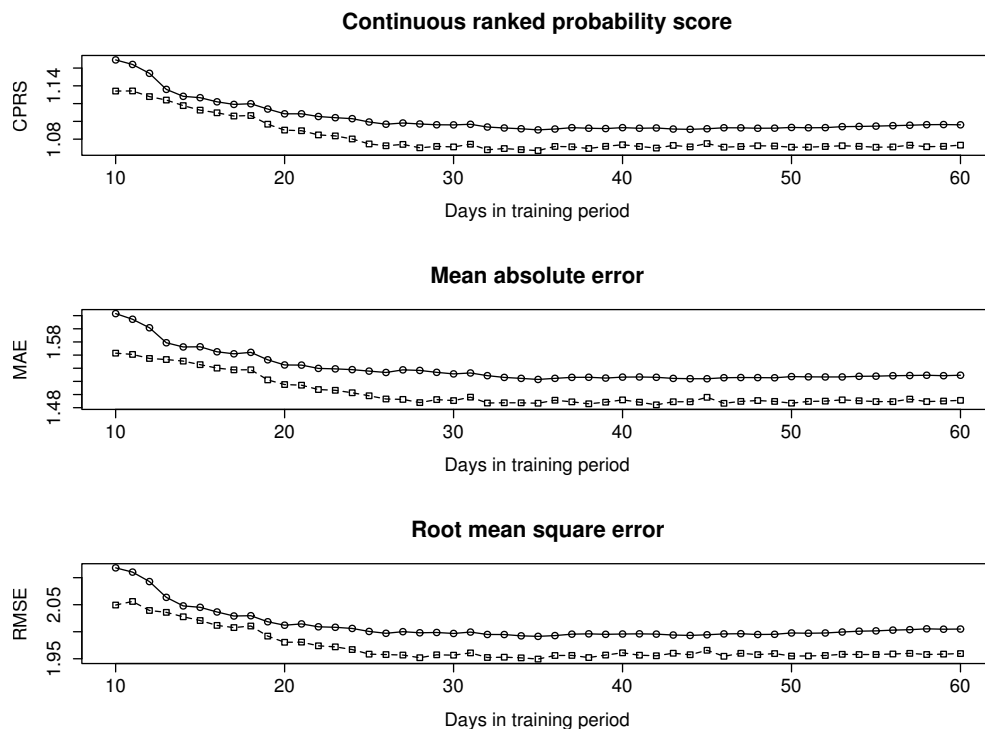
Az EMOS módszer esetén nullában alulról csonkított normális eloszlást alkalmaztunk. Az (2.1.3) kétszoportos és a (2.1.4) háromsoportos EMOS előrejelző eloszlásban a normális eloszlást csonkított normális eloszlással helyettesítjük.

2.2. Tanuló periódus választása

Először a BMA és EMOS modellekhez használt tanuló periódus hosszát határoztuk meg, melyhez az előrejelzések mediánjainak MAE értékét, az előrejelzések átlagának RMSE értékét, az előrejelző eloszlások CPRS értékeit, valamint a 83.33%-os előrejelző intervallumok lefedettségét és átlagos szélességét hasonlítottuk össze úgy, hogy a tanuló periódust 10, ..., 60 napnak választottuk. Annak érdekében, hogy az eredményeink minden tanuló idő esetén egységesek legyenek, 62 napot elhagytunk a hőmérséklet és szélesség adatsorból, így 2012. június 1. és 2013. március 31.-e közötti időre készítettünk előrejelzéseket. (6 napon hiányzott előrejelzés, ezeket már az elején elhagytuk).

Hőmérséklet

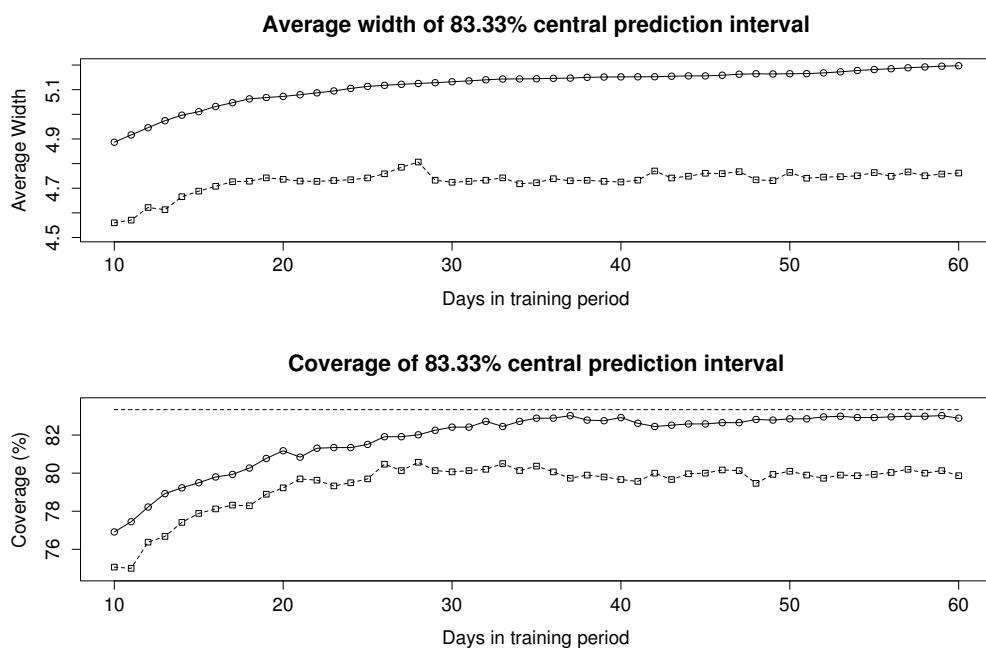
Tekintsük először a kétszoportos esetet. A 2.3 ábrán a BMA és EMOS előrejelző eloszlások CRPS értékei, a előrejelzések mediánjainak MAE értékei és az előrejelzések átlagának RMSE értékei vannak ábrázolva a tanuló periódus hosszának függvényében. Megjegyezzük, hogy az EMOS módszer esetén az előrejelzések mediánja és átlaga nyilvánvalóan egybeesik. Először is azt vehetjük észre, hogy az eredmények minden esetben nagyon hasonlóak, azaz a függvények kismértékben térnek el egymástól.



2.3. ábra. Hőmérséklet előrejelzésre vonatkozó kétcsoportos modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, a BMA/EMOS előrejelzések mediánjainak MAE értékei és a BMA/EMOS előrejelzések átlagainak RMSE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében (BMA: vonal és $\circ$; EMOS: szaggatott és $\square$).

Az EMOS adja a legkisebb értékű illeszkedési mutatókat, és 32 nap után már nem nagyon változik. BMA esetében a CRPS, MAE és RMSE 35 napnál veszi fel a minimumát, valamint ez a tanuló periódus hosszúsága adja az EMOS modell CRPS és RMSE értékének a minimumát is (lásd 2.1 táblázat). Az EMOS modell MAE értéke 42 napnál veszi fel a minimumát, de a 35 naphoz tartozó érték sem tér el nagymértékben tőle.

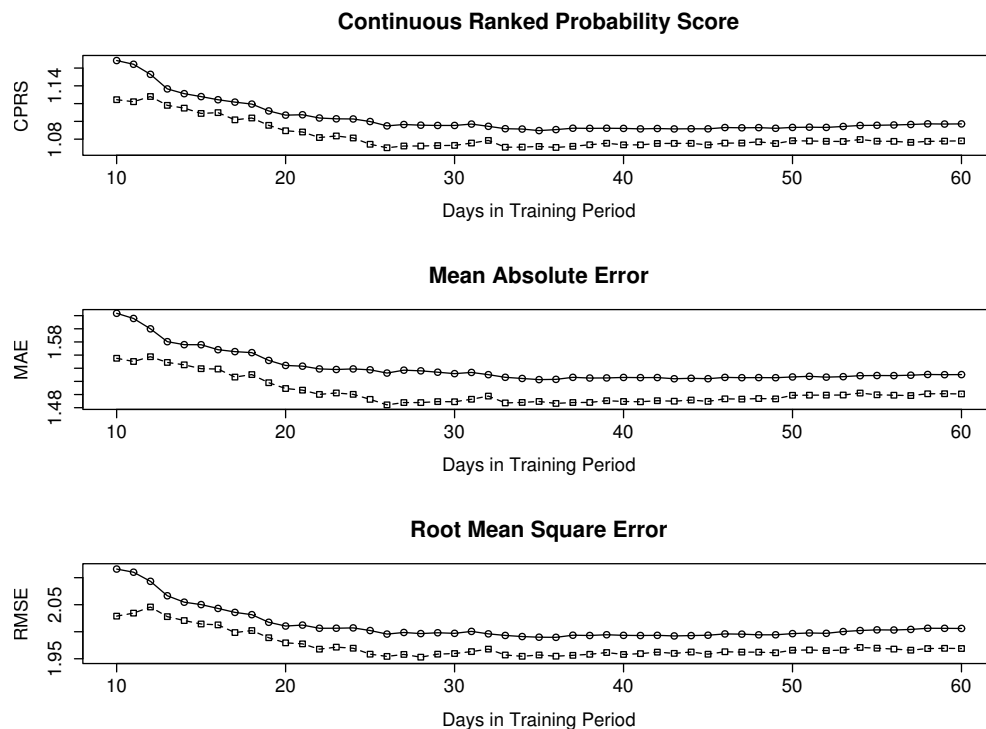
A 2.4 ábra a 83.33%-os előrejelző intervallumok átlagos szélességét és lefedettségét mutatja a BMA és az EMOS módszer esetén. Az előzőekhez hasonlóan, 32 nap után minden görbe enyhe növekedő trendet mutat. Az EMOS módszerrel keskenyebb előrejelző intervallumokat kapunk, viszont a lefedettsége végig a nominális 83.33%-alatt marad. Sajnálatos módon a BMA modell sem éri el a nominális értéket, de 35 nap után már nagyon közel van hozzá. A lefedettség 37 napnál éri el a maximumát.



2.4. ábra. Hőmérséklet előrejelzésére alkalmazott kétszoportos modellek különböző hosszúságú tanuló periódusaihoz tartozó 83.33%-os BMA/EMOS előrejelző intervallumok átlagos szélessége illetve lefedettsége (BMA: vonal és $\circ$; EMOS: szaggatott és $\square$).

	Átl. CRPS			MAE			RMSE		
	opt. nap	opt. érték	35. nap érték	opt. nap	opt. érték	35. nap érték	opt. nap	opt. érték	35. nap érték
Két csoport									
BMA	35	1.090	1.090	35	1.523	1.523	35	1.991	1.991
EMOS	35	1.067	1.067	42	1.484	1.487	35	1.949	1.949
Három csoport									
BMA	35	1.090	1.090	35	1.523	1.523	36	1.990	1.990
EMOS	26	1.070	1.072	26	1.484	1.490	28	1.953	1.957

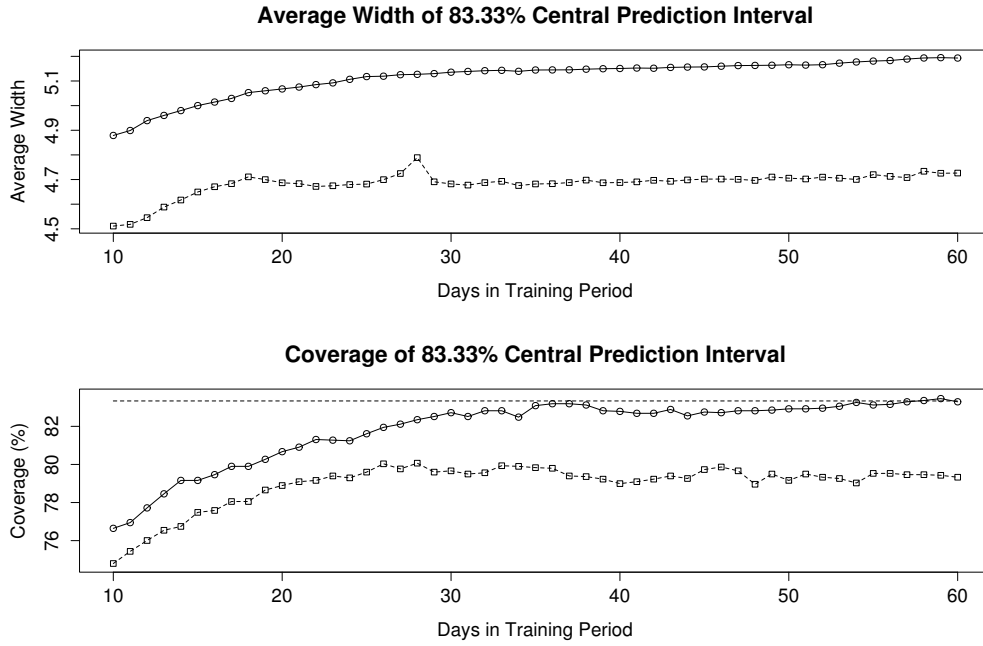
2.1. táblázat. Hőmérséklet esetén a tanuló periódus hosszának optimális hossza az átlagos CRPS, MAE és RMSE értékekre vonatkozóan (Kelvinben adott), a hozzájuk tartozó értékekkel, valamint a 35 nap hosszúságú tanuló periódushoz tartozó értékekkel.



2.5. ábra. Hőmérséklet előrejelzésre vonatkozó háromcsoportos modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, a BMA/EMOS előrejelzések mediánjainak MAE értékei és a BMA/EMOS előrejelzések átlagainak RMSE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében (BMA: vonal és $\circ$; EMOS: szaggatott és $\square$).

Az előrejelző intervallumok átlagos szélességét és lefedettségét összehasonlítva azt figyelhetjük meg, hogy ellentétesen viselkednek, azaz a szűkebb előrejelző intervallumok rövidebb tanuló periódushoz tartoznak, míg a tanuló idő hosszának növelésével a lefedettség nő. Másrészt, 30 nap után az előrejelző intervallumok átlagos szélessége ellaposodik. Ezek alapján a tanuló periódus hosszának egy ésszerű választása 30-40 nap között van.

Összességében azt mondhatjuk, hogy a kétsoportos esetben egy 35 napos tanuló periódus elfogadható választás mind a BMA mind pedig az EMOS modell esetében. A háromcsoportos esetben hasonló következtetéseket vonhatunk le, a különböző illeszkedési mutatók esetén, a két utófeldolgozó módszernek az együttes viselkedése nagyon hasonlít a kétsoportos esethez (2.5 és 2.6 ábra). Az EMOS módszerrel kapjuk a legkisebb CRPS, MAE és RMSE értékeket, továbbá ez adja a legkisebb lefedettséget a



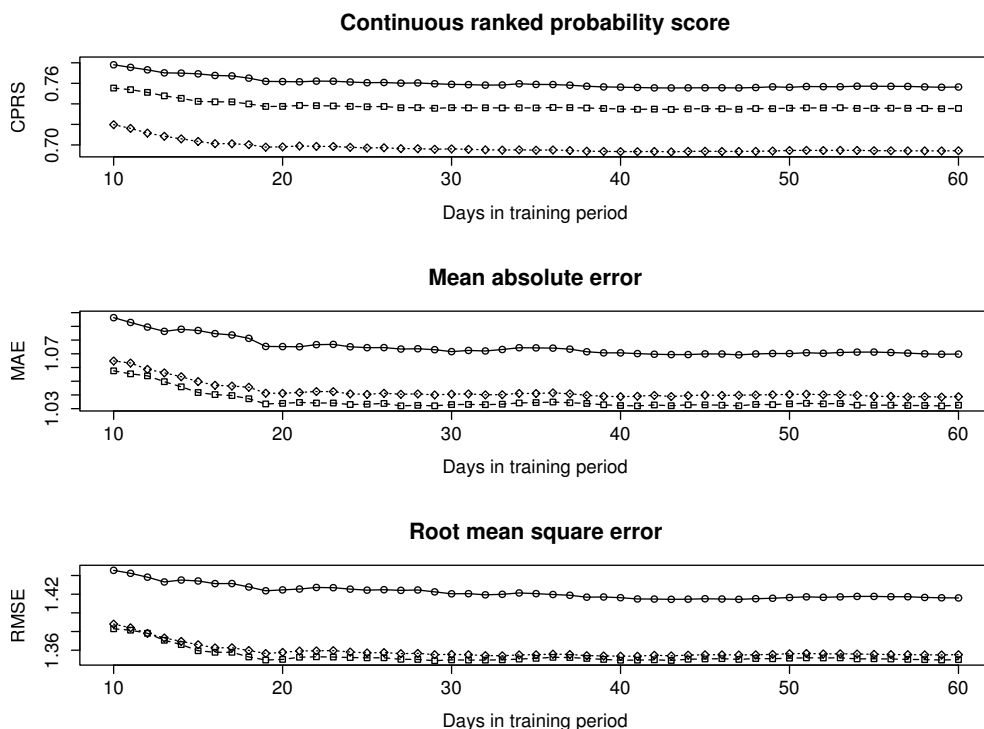
2.6. ábra. Hőmérséklet előrejelzésére alkalmazott háromcsoportos modellek különböző hosszúságú tanuló periódusaihoz tartozó 83.33%-os BMA/EMOS előrejelző intervallumok átlagos szélessége illetve lefedettsége (BMA: vonal és $\circ$; EMOS: szaggatott és $\square$).

legszűkebb előrejelző intervallumokkal. A BMA módszer esetén a CRPS és MAE 35 napnál veszi fel a minimumát, az RMSE pedig 36 napnál (de a 36 naphoz tartozó érték nagyon közel van a minimumhoz, lásd 2.1 táblázat). Az EMOS módszer esetén a CRPS, MAE és RMSE 26-28 nap között veszi fel a minimumát, de a 35 naphoz tartozó értékek szintén nagyon közel vannak hozzá.

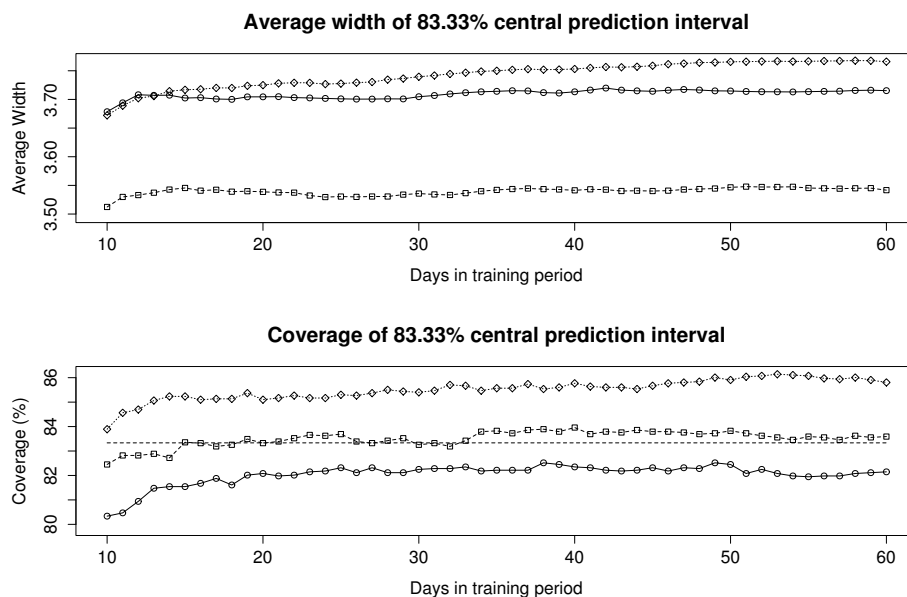
Az előrejelző intervallumok átlagos szélességét illetően, a rövidebb tanuló periódusokhoz szűkebb intervallumok tartoznak. Az EMOS modell lefedettsége mindvégig a nominális 83.33% alatt marad, míg a BMA esetén a lefedettsége 59 napnál veszi fel a maximumát, mely már megközelíti a nominális értéket. Általában a rövidebb tanuló periódusokat részesítjük előnyben, így tekintsünk egy 35-38 nap közötti tanuló periódust, ahol a BMA lefedettsége már elég nagy. Így a kétcsoportos modell esetén alkalmazott 35 napos tanuló időt használhatjuk a háromcsoportos esetben is, mindkét utófeldolgozó módszer esetén.

Szélsébség

Tekintsük először megint a kétcsoportos esetet. Általánosan megfigyelhető, hogy a különböző illeszkedési mutatók görbéi ellaposodnak a tanuló idő növelésével (lásd 2.7 és 2.8 ábrák). Ez különösen a 25 napos tanuló idő átlépése után látszódik, ezért egy legalább 25 napos tanuló periódus választását javasoljuk. Az is megfigyelhető, hogy a különböző módszerek esetén az egyes illeszkedési mutatók értékei nem nagyon változnak a tanuló idő változtatásával. A csonkított normális BMA módszer szolgáltatja a legkisebb CRPS értékeket, míg a legjobb MAE és RMSE értékeket az EMOS módszer adja. A CRPS mindhárom módszernél, az RMSE a gamma BMA módszer esetén 43 napnál veszi fel a minimumát (lásd 2.2 táblázat). A csonkított normális BMA és az EMOS módszer esetén a MAE 59 napnál veszi fel a minimumát,



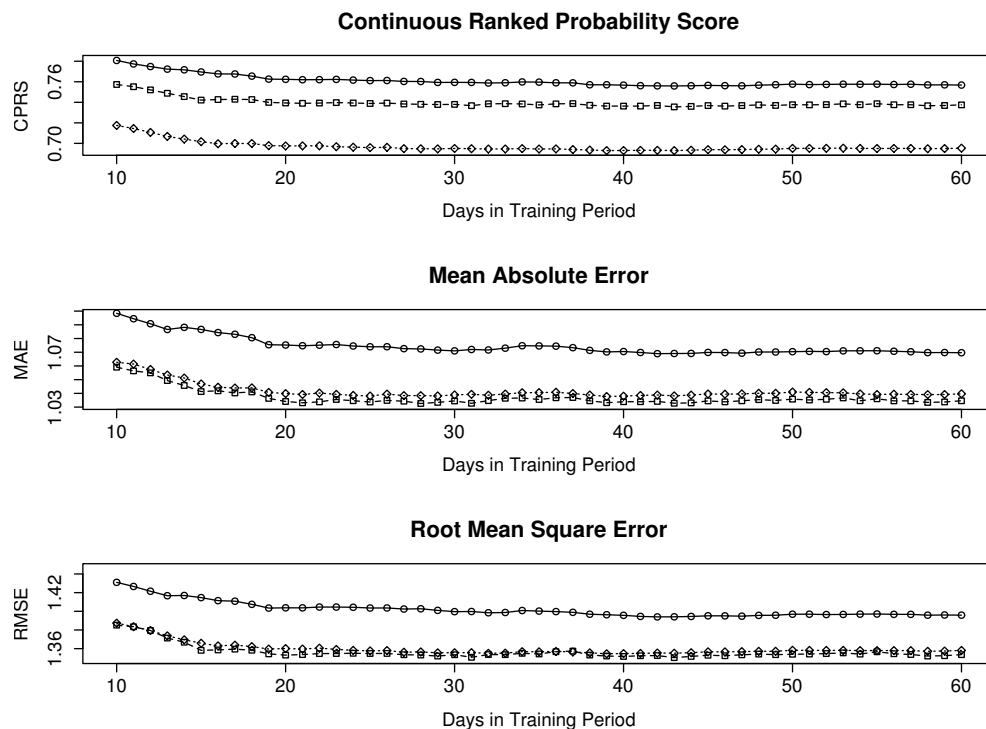
2.7. ábra. Szélsébség előrejelzésre vonatkozó kétcsoportos modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, a BMA/EMOS előrejelzések mediánjainak MAE értékei és a BMA/EMOS előrejelzések átlagainak RMSE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében (gamma BMA: vonal és $\circ$; csonkított normális BMA: pontozott és $\diamond$ EMOS: szaggatott és $\square$).



2.8. ábra. Szélesség előrejelzésére alkalmazott kétszoportos modellek különböző hosszúságú tanuló periódusaihoz tartozó 83.33%-os BMA/EMOS előrejelző intervallumok átlagos szélessége illetve lefedettsége (gamma BMA: vonal és $\circ$; csontkított normális BMA: pontozott és $\diamond$ EMOS: szaggatott és $\square$).

	Átl. CRPS			MAE			RMSE		
	opt. nap	opt. érték	43.nap érték	opt. nap	opt. érték	43.nap érték	opt. nap	opt. érték	43.nap érték
Két csoport									
g. BMA	43	0.755	0.755	47	1.069	1.069	43	1.415	1.415
cs.n. BMA	43	0.693	0.693	59	1.039	1.039	41	1.354	1.354
EMOS	43	0.735	0.735	59	1.032	1.032	29	1.349	1.349
Három csoport									
g. BMA	43	0.756	0.756	42	1.069	1.069	42	1.394	1.394
cs.n. BMA	39	0.693	0.693	39	1.038	1.038	39	1.354	1.354
EMOS	43	0.736	0.736	28	1.033	1.033	43	1.350	1.350

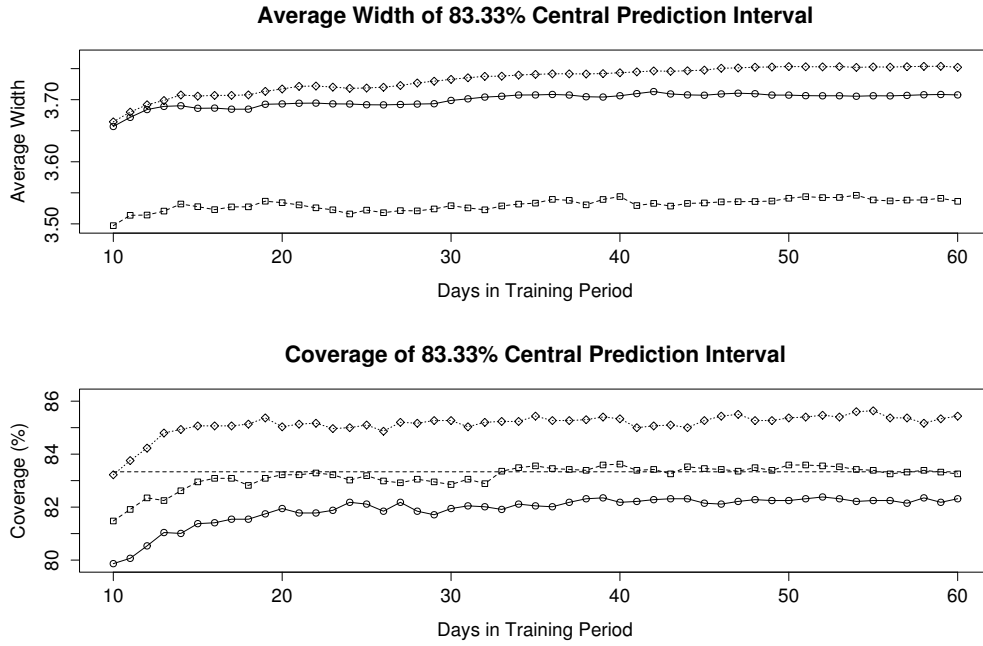
2.2. táblázat. Szélesség esetén a tanuló periódus hosszának optimális hossza az átlagos CRPS, MAE és RMSE értékekre vonatkozóan (m/s -ban adott), a hozzájuk tartozó értékekkel, valamint a 43 nap hosszúságú tanuló periódushoz tartozó értékekkel.



2.9. ábra. Szélsébség előrejelzésre vonatkozó háromcsoportos modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, a BMA/EMOS előrejelzések mediánjainak MAE értékei és a BMA/EMOS előrejelzések átlagainak RMSE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében (gamma BMA: vonal és $\circ$; csonkított normális BMA: pontozott és $\diamond$ EMOS: szaggatott és $\square$).

de a 43 naphoz tartozó érték nem tér el ettől különösebben. Végül pedig a gamma BMA módszer MAE értéke, a csonkított normális BMA és EMOS módszerek RMSE értékei rendre 47, 41 és 29 napnál veszik fel a minimumaikat, de a 43 naphoz tartozó értékeik mindhárom esetben a második legkisebbek. Így a kétcsoportos esetben minden módszer esetén 43 napos tanuló periódus választása ajánlott.

Az EMOS módszer adja a legkeskenyebb előrejelző intervallumokat és a lefedettsége is nagyon közel van a nominális értékhez minden tanuló periódus esetén (lásd 2.8 ábra). A 83.33%-os előrejelző intervallumok a csonkított normális BMA esetén átlagosan szélesebbek, mint az EMOS módszerrel kapott megfelelő intervallumok, a lefedettsége pedig 83.39% és 86.14% között változik. A gamma BMA módszerrel kapjuk a legszélesebb előrejelző intervallumokat, viszont a lefedettsége sosem éri el



2.10. ábra. Szélesség előrejelzésére alkalmazott háromcsoportos modellek különböző hosszúságú tanuló periódusaihoz tartozó 83.33%-os BMA/EMOS előrejelző intervallumok átlagos szélessége illetve lefedettsége (gamma BMA: vonal és $\circ$; csonkított normális BMA: pontozott és $\diamond$ EMOS: szaggatott és $\square$).

a nominális 83.33%-os értéket. A maximális lefedettség 38 és 49 napnál van. Az előrejelző intervallumok tekintetében a 43 napos tanuló periódus választása indokolt.

A háromcsoportos eset elemzésekor is hasonló eredményeket (2.9 és 2.10 ábra) tapasztaltunk. A két csoportosítási mód közötti legfontosabb különbség az, hogy a csonkított normális BMA módszerrel kapott MAE és RMSE értékek már kis eltérést mutatnak az EMOS módszerrel kapott értékektől. A három csoportos esetben az EMOS módszer CRPS és RMSE értéke 43 napnál éri el a minimumát, valamint ekkor kapjuk a gamma BMA módszer CRPS értékének minimumát és a második legkisebb MAE és RMSE értékeket (lásd 2.2 táblázat). Az utóbbi módszer MAE és RMSE mutatók globális minimuma 42 napnál van. A csonkított normális BMA esetén a CRPS, MAE és RMSE mutatók 39 napnál veszik fel a minimumukat, de mivel a görbék eléggé laposak a 43 naphoz tartozó értékek sem térnek el ettől nagyon. Ezek alapján a háromcsoportos módszer esetén is egy 43 napos tanuló periódus használata javasolt.

Ezen fejezet összefoglalásaként azt mondhatjuk, hogy a 11 tagú ALADIN-HUNEPS

ensemble BMA és EMOS utófeldolgozó módszer előrejelző képességének összehasonlítására, hőmérséklet esetén 35 napos, szélsébség esetén egy 43 napos tanuló periódust használtunk.

2.3. Eredmények

Ebben a fejezetben a 11 tagú ALADIN-HUNEPS hőmérséklet és szélsébség ensemble előrejelzésekre alkalmazott BMA és EMOS modellekkel (2.1 fejezet) kapott eredményeimet mutatom be, a 2.2 fejezetben meghatározott tanuló periódust felhasználva.

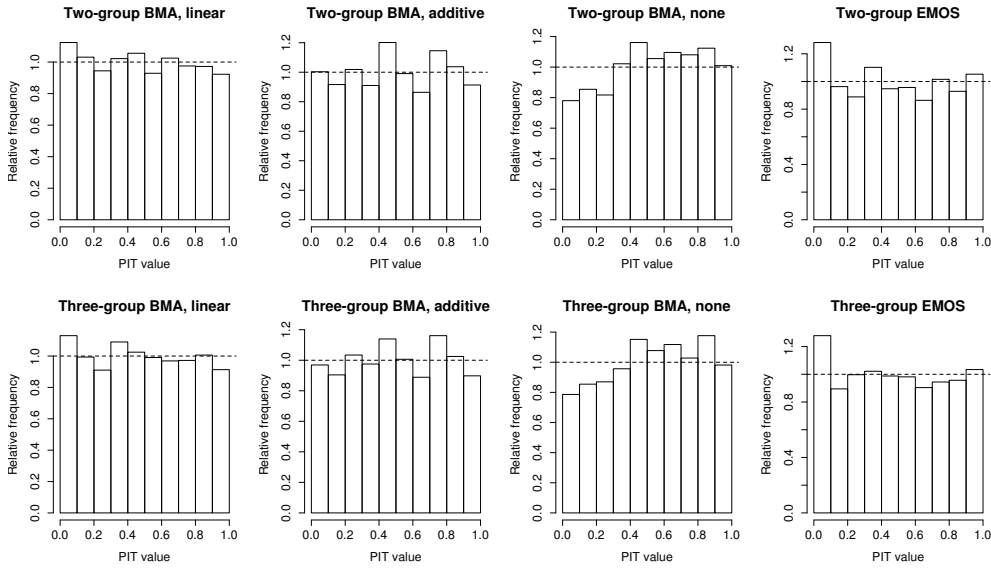
Hőmérséklet

Hőmérséklet ensemble esetén 35 napos tanuló periódussal normális BMA (lineáris, additív és korrekció nélküli esetben) és normális EMOS módszert alkalmaztunk két- illetve háromcsoportos esetben. A BMA módszer esetén alkalmazott különböző korrekciós módszerek alkalmazása az előző rész eredményeit látva indokolt, a legjobb illeszkedési mutatókkal a korrekció nélküli normális BMA módszer rendelkezik.

A 35 napos tanuló periódust használva ensemble előrejelzések, tényleges megfigyelések és előrejelző sűrűségfüggvények 2012. május 7. és 2013. március 31. között állnak rendelkezésünkre (az adatbázis első 35 napját elhagyva 323 nap marad). Ez az időintervallum közel 4 héttel korábban indul, mint amit a tanuló periódus meghatározásához használtunk fel.

Első lépésként a modelljeinkkel készült előrejelzések kalibrációját vizsgáltuk meg probability integral transform (PIT) hisztogramokkal (lásd 1.2 fejezet), mely jól mutatja a nyers ensemble előrejelzések statisztikai utófeldolgozásának hasznosságát. A 2.11 ábrán láthatóak a normális BMA (lineáris, additív és korrekció nélküli esetben) és a normális EMOS módszerek PIT hisztogramjai a két- illetve a háromcsoportos esetben. Ezeket a 1.3 ábra bal oldalán látható nyers hőmérséklet ensemble verification rank hisztogramjával összehasonlítva azt mondhatjuk, hogy a statisztikai utófeldolgozás minden módszer esetében javított az előrejelzések pontosságán. Ezen hisztogramok a lineáris és additív BMA módszer esetén közel egyenletesek, EMOS módszernél kicsit rosszabbak, viszont a korrekció nélküli BMA módszer alkalmazásával a PIT már túlkalibrálttá vált. Ezeket az állításokat konkrét vizsgálattal is megtudtuk erősíteni, a 2.3 táblázat a PIT hisztogramok egyenletességére alkalmazott Kolmogorov-Szmirnov próba p értékeit tartalmazza. Mint látható, a lineáris és additív BMA módszer adja a legjobb PIT értékeket, az EMOS módszer is szintén jónak mondható, viszont a korrekció nélküli BMA módszer adja a leggyengébb eredményt. Megfigyelhető továbbá az is, hogy a háromcsoportos modell jobb mint a kétcsoportos.

Az 2.4 táblázat mutatja a BMA és EMOS módszerrel kapott valószínűségi és pontelőrejelzések értékeit, a nyers mintából számolt mutatók megfelelő értékeivel, a 2.5 táblázat pedig az előrejelzési képességet tesztelő Diebold-Mariano teszt eredménye-



2.11. ábra. Normális BMA (lineáris, additív és korrekció nélküli esetben) és normális EMOS módszerekkel kapott hőmérséklet előrejelzések PIT hisztogramjai a két- és a háromcsoportos esetben

	BMA modell			EMOS modell
	lineáris	additív	kor. nélk.	
Két csoport	0.1393	0.2405	2.2×10^{-10}	0.0062
Három csoport	0.2281	0.4617	4.1×10^{-9}	0.0093

2.3. táblázat. Hőmérséklet esetén alkalmazott előrejelző eloszlások PIT értékeinek egyenletességére alkalmazott Kolmogorov-Szmirnov teszt p -értékei.

it mutatja. Látva ezeket az értékeket, megint megfigyelhető az utófeldolgozás jelentősége, az illeszkedési mutató értékei minden esetben jelentősen javultak a nyers mintából számolt mutatókhoz képest, valamint a különböző módszerek CRPS és MAE értékei szignifikánsan különbözőek. A CRPS, MAE és RMSE értékei csökkentek, a 83.33%-os előrejelző intervallumok lefedettsége nagymértékben nőtt, ezzel szemben az élességük romlott, mert megnőtt az intervallumok átlagos szélessége (a 83.33%-os előrejelző intervallumok 30% – 40%-kal szélesebbek mint a nyers mintáé). Ez a jelenség az ensemble előrejelzések kis szóródásának a következménye, melyet a verification rank hisztogramon is láthattunk (1.3 ábra, bal oldal). Itt is megfigyelhető, hogy a háromcsoportos modell jobb, mint a kétcsoportos. A különböző utófeldolgozó

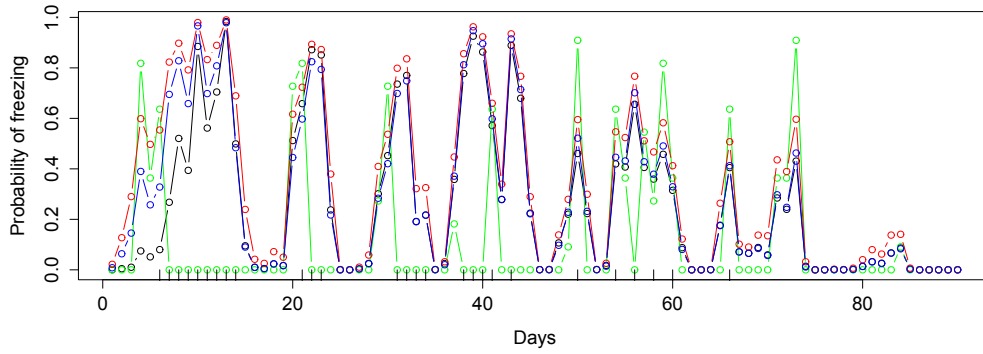
	Átl. CRPS	MAE		RMSE		El.int. átl. szél.	Lefedettség (%)
		med.	átl.	med.	átl.		
Két csoport							
lin. BMA	1.082	1.510	1.510	1.979	1.977	5.138	83.00
add. BMA	1.103	1.540	1.533	2.003	1.987	5.515	84.21
k.nélk. BMA	1.113	1.554	1.544	2.017	2.001	5.719	84.80
EMOS	1.059	1.473	1.473	1.935	1.935	4.720	80.43
Három csoport							
lin. BMA	1.080	1.508	1.506	1.977	1.973	5.137	83.28
add. BMA.	1.100	1.535	1.525	1.996	1.978	5.510	84.12
k.nélk. BMA	1.112	1.551	1.541	2.016	1.999	5.710	85.11
EMOS	1.059	1.469	1.469	1.931	1.931	4.752	80.53
Nyers ensemble	1.228	1.567	1.551	2.043	2.013	3.982	60.53

2.4. táblázat. Valószínűségi előrejelzések átlagos CRPS értékei, medián és átlag előrejelzések MAE és RMSE értékei, előrejelző intervallumok átlagos szélessége és a 83.33%-os lefedettség hőmérséklet esetén (Kelvinben megadva).

Előrejelzés	lin. BMA	add. BMA	k.n. BMA	EMOS	Ensemble
lin. BMA	-	-2.612 (0.009)	-3.392 (0.001)	2.848 (0.004)	-12.042 (0.000)
add. BMA	2.164 (0.031)	-	-1.991 (0.047)	5.149 (0.000)	-14.699 (0.000)
k.n. BMA	2.805 (0.005)	1.617 (0.106)	-	5.304 (0.000)	-19.066 (0.000)
EMOS	-5.211 (0.000)	-5.488 (0.000)	-5.475 (0.000)	-	-14.473 (0.000)
Ensemble	3.403 (0.001)	2.401 (0.016)	1.820 (0.067)	6.078 (0.000)	-

2.5. táblázat. Az előrejelző képességet tesztelő CRPS értékeken (*felső háromszög*) és a medián előrejelző hibáin (*alsó háromszög*) alapuló Diebold-Mariano teszt eredményei az ALADIN-HUNEPS hőmérséklet előrejelzések esetén (próbat statisztika és p -értékek). A próbat statisztika negatív/pozitív értékei azt jelzik, hogy a sor/oszlop fejlécében levő modell rendelkezik a jobb előrejelző képességgel, a félkövér számok pedig a 0.05 szignifikancia szint alatti p -értéket jelölik.

módszereket összehasonlítva egyrészt megfigyelhető, hogy az EMOS adja a legkisebb CRPS, MAE és RMSE értékeket, a legélesebb előrejelző intervallumokat, mind a két-mind pedig a háromcsoportos esetben, viszont a lefedettsége jóval az elvárt 83.33%



2.12. ábra. A fagy valószínűségét ábrázoltuk Debrecen városra, 2012. december 01. és 2013. február 28. között. A fekete görbe a lineáris BMA, a kék az additív BMA és a piros a korrekció nélküli BMA módszerekkel kapott előrejelzéseket mutatják, míg a zöld görbe a nyers ensemble előrejelzéseket mutatja. A vízszintes tengelyen a függőleges vonalkák jelzik azokat a napokat, amikor ténylegesen fagy történt.

alatt van. Ugyanakkor a lineáris BMA módszer CRPS, MAE és RMSE értékei csak kicsit rosszabbak ettől, és ez a módszer adja a legjobb lefedettséget. A PIT hisztogramok eredményeit is figyelembe véve (2.11 ábra és 2.3 táblázat) megállapítható, hogy a négy módszer közül a normális BMA módszer lineáris korrekcióval adja a legjobb illeszkedést.

A 2.12 ábrán egy példával illusztráltuk a statisztikai utófeldolgozás jelentőségét. Az ábrán a fagy (annak a valószínűsége, hogy a hőmérséklet 0 fok alatt lesz) valószínűségét ábrázoltuk Debrecen városra, 2012. december 1. és 2013. február 28. között. A vízszintes tengelyen a függőleges vonalkák jelzik azokat a napokat, amikor ténylegesen fagyott. A fekete görbe a lineáris BMA, a kék az additív BMA és a piros a korrekció nélküli BMA módszerekkel kapott előrejelzéseket, míg a zöld görbe a nyers ensemble előrejelzéseket mutatja. Ránézésre is látszik, hogy amikor ténylegesen fagy történt, akkor a nyers ensemble nulla valószínűséggel jelzett fagyot, míg a BMA módszerrel kapott előrejelzések, rendre jól jelzik előre, hogy fagyni fog. Ez a példa is jól mutatja, mennyire szükségeszerű lenne a nyers ensemble előrejelzések statisztika utófeldolgozása a hétköznapiakban is.

Szélsőbesség

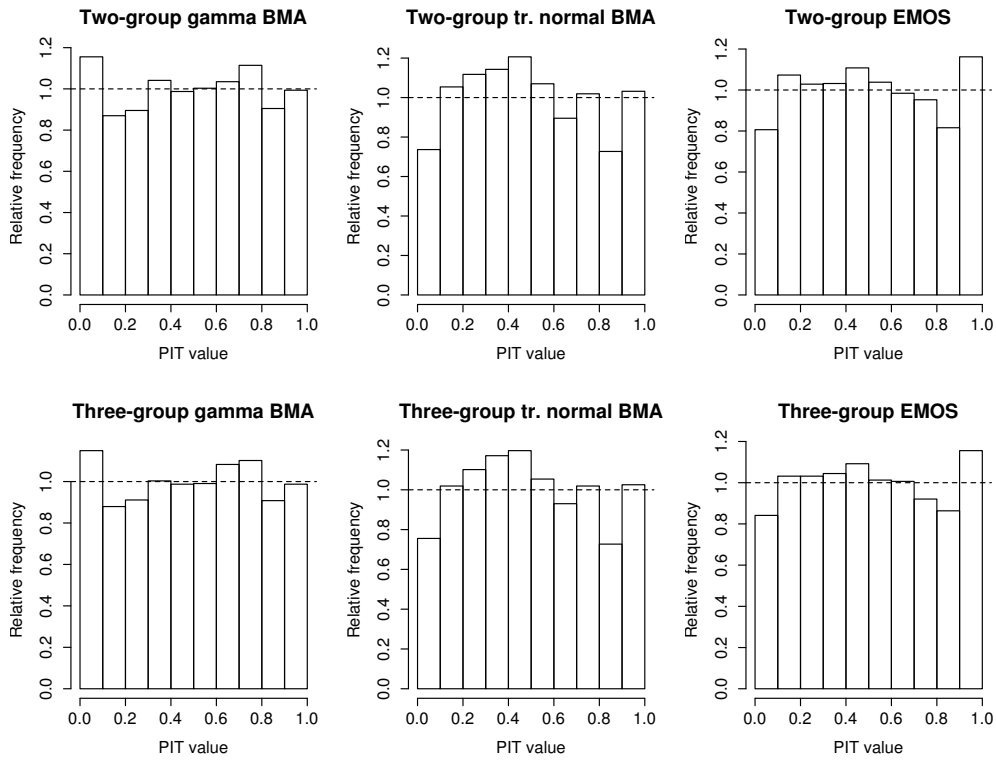
A 11 tagú ALADIN-HUNPES szélsőbesség ensemble esetén 43 napos tanuló periódussal gamma BMA, csonkított normális BMA és csonkított normális EMOS módszert alkalmaztunk, két- illetve háromcsoportos esetben. Így ensemble előrejelzések, tényleges megfigyelések és előrejelző sűrűségfüggvények 2012. május 15. és 2013. március 31.

között állnak rendelkezésiünkre (313 naptári nap).

Először a különböző utófeldolgozó módszerek 2.13 ábrán látható PIT hisztogram-jait hasonlítottuk össze a nyers szélsébség ensemble verification rank hisztogramjával (1.3 ábra, jobb oldal). A statisztikai utófeldolgozás eredménye jól látható, habár a csonkított normális BMA módszer túlkalibráltnak tűnik ez alapján. A 2.6 táblázatban feltüntetett Kolmogorov-Szmirnov próba p -értékei alapján a csonkított normális BMA módszer adja a legrosszabb illeszkedést, míg a gamma BMA és EMOS modellek PIT hisztogramjait egyenletesnek fogadhatjuk el. A BMA módszerek esetén a háromcsoportos modell jobb, mint a kétcsoportos, míg az EMOS módszernél ez pont fordítva van.

Hasonló viselkedés figyelhető meg egyrészt a 2.7 táblázatnál is, ahol a BMA és EMOS módszerekkel kapott valószínűségi és pontelőrejelzések illeszkedési mutatóit láthatjuk a nyers mintából számolt hasonló mutatók megfelelő értékeivel együtt, valamint a 2.8 táblázatnál, ahol a Diebold-Mariano teszt eredményeit láthatjuk. Először a valószínűségi előrejelzéseket tekintve, melyek a CRPS mutató, a 83.33%-os előrejelzési intervallumok átlagos szélessége illetve a lefedettség, a hőmérséklethez hasonló módon az figyelhető meg, hogy az utófeldolgozással készült előrejelzések esetén a CRPS értékek kisebbek, az előrejelzési intervallumok átlagosan szélesebbek és jobb lefedettséget adnak, mint a nyers mintából számolt megfelelő értékek. Másrészt az alkalmazott modellekkel kapott CRPS és MAE értékek szignifikánsan különbözöek. Mind a két- mind a háromcsoportos esetben a legkisebb CPRS értékeket a csonkított normális BMA módszer adja, míg az EMOS szolgáltatja a legszűkebb előrejelző intervallumokat és a legjobb lefedettséget. A pontbecsléseket tekintve a csonkított normális BMA és EMOS előrejelző sűrűségfüggvényekkel kapott MAE és RMSE értékek kisebbek mint, a nyers mintából számoltak. A gamma BMA módszer rosszabbnak bizonyult, hiszen itt az illeszkedési mutató értékei növekedtek. Ennek egy lehetséges magyarázata az, hogy a vizsgált időszakban (2012. május 15. és 2013. március 31. közötti időszak) a nyers ensemble átlaga és mediánja is túlbecsülik a tényleges megfigyelést (az átlagos torzításuk (standard hibájuk) medián esetén: 0.0907 (0.0249) és átlag esetén: 0.0972 (0.0244)). Ezt a kis torzítást egy megfelelő torzítás korrekcióval el kell tüntetni. Másrészt úgy véljük, hogy a gamma BMA módszer nagyon egyszerű torzítás korrekciója nem képes kezelni ezt a pontatlanságot, sőt még további hibákat eredményezne. A két csoportos modell esetén a gamma BMA előrejelző eloszlás mediánjának és átlagának átlagos torzítása -0.1935 és -0.1318 , 0.025 és 0.0253 standard hibával, míg az EMOS módszer adja a legkisebb MAE és RMSE értékeket, a torzításuk pedig -0.0735 és -0.0293 , a standard hiba mindkét esetben 0.0242 . Ilyen módon az EMOS módszer képes a már létező torzítást kompenzálni, hasonlóan a csonkított normális BMA módszer is, de a gamma BMA módszer sajnos nem tudja. A két BMA módszer közötti különbséget az szolgáltatja, hogy a torzítás korrekciós algoritmusuk nagyon eltérő.

Összegzésképp elmondható, hogy a gamma BMA módszer felülmúlja a másik két módszert a PIT értékek esetében, viszont ez a módszer adja a legnagyobb CRPS



2.13. ábra. Gamma és csunkított normális BMA, valamint csunkított normális EMOS módszerekkel kapott szélsőbesség előrejelzések PIT hisztogramjai a két- és a háromcsoportos esetben

	BMA modell		EMOS modell
	gamma	cs. normális	
Két csoport	0.1812	0.0023	0.1272
Három csoport	0.2085	0.0043	0.0967

2.6. táblázat. Szélsőbesség esetén alkalmazott előrejelző eloszlások PIT értékeinek egyenletességére alkalmazott Kolmogorov-Szmirnov teszt p -értékei.

értékeket, és a pontbecslések értékei is nagyon gyengék. Az EMOS és a csunkított normális BMA módszer MAE és RMSE értékei egymáshoz eléggé hasonlóak és jóval kisebbek, mint a nyers mintából számolt megfelelő értékek. Az utóbbi két módszer közül a csunkított normális BMA adja a legkisebb CRPS értékeket, míg az EMOS

	Átl CRPS	MAE		RMSE		El. int. átl. szél.	Lefedettség (%)
		med.	átl.	med.	átl.		
Két csoport							
g. BMA	0.760	1.075	1.090	1.418	1.427	3.715	81.87
cs.n. BMA	0.698	1.045	1.047	1.369	1.363	3.762	85.46
EMOS	0.738	1.037	1.038	1.359	1.357	3.534	83.59
Három csoport							
g. BMA	0.761	1.075	1.083	1.419	1.405	3.706	82.03
cs.n. BMA	0.698	1.044	1.046	1.370	1.364	3.750	85.08
EMOS	0.735	1.038	1.039	1.362	1.360	3.522	83.11
Nyers ensemble	0.803	1.069	1.055	1.398	1.373	2.884	68.22

2.7. táblázat. Valószínűségi előrejelzések átlagos CRPS értékei, medián és átlag előrejelzések MAE és RMSE értékei, előrejelző intervallumok átlagos szélessége és a 83.33%-os lefedettség szélsőbessége esetén (m/s-ban megadva).

Előrejelzés	gamma BMA	cs.n. BMA	EMOS	Ensemble
gamma BMA	-	16.983 (0.000)	5.656 (0.000)	-5.365 (0.001)
cs.n. BMA	-4.732 (0.006)	-	-18.604 (0.000)	-17.452 (0.000)
EMOS	-5.677 (0.001)	-2.285 (0.022)	-	-12.661 (0.000)
Ensemble	-0.501 (0.616)	2.895 (0.004)	4.344 (0.010)	-

2.8. táblázat. Az előrejelző képességet tesztelő CRPS értékeken (*felső háromszög*) és a medián előrejelző hibáin (*alsó háromszög*) alapuló Diebold-Mariano teszt eredményei az ALADIN-HUNEPS szélsőbesség előrejelzések esetén (próbat statisztika és p -értékek). A próbat statisztika negatív/pozitív értékei azt jelzik, hogy a sor/oszlop fejlécében levő modell rendelkezik a jobb előrejelző képességgel, a félkövér számok pedig a 0.05 szignifikancia szint alatti p -értéket jelölik.

adja a legélesebb előrejelző intervallumokat, valamint a PIT hisztogramja is jobb, így azt mondhatjuk, hogy a nyers szélsőbesség ensemble előrejelzések esetén ennek a módszernek van a legjobb előrejelző képessége.

3. fejezet

Csapadék előrejelzések statisztikai utófeldolgozása

A csapadékmennyiség statisztikai utófeldolgozása jóval nehezebb, mint bármely más időjárási mennyiségé, több okból kifolyólag. Először is a diszkrét-folytonos természete megnehezíti, hogy találjunk egy megfelelő parametrizált modellt. Figyelembe kell venni, hogy a nulla csapadéknak lehet pozitív valószínűsége, illetve pozitív mennyiségű csapadékot folytonos eloszlással kell modellezni. Másrészt, az előrejelzési bizonytalanság a várható csapadékmennyiség terjedelmének függvényében nő. Végül pedig a megfigyelések között sok a nulla érték, az ilyen esetek miatt hatalmas mennyiségű adatállományra lenne igény.

Egy olyan nemnegatív eloszlásra van szükségünk, mely pozitív valószínűséget enged a nulla csapadéknak. Egy nullában balról cenzorált folytonos eloszlást fogunk használni, melynek az is az előnye, hogy a nulla csapadék valószínűsége az eredeti eloszlásfüggvényből direkt módon számolható, így együtt kezelhetőek a nulla és a pozitív csapadékmennyiségű esetek is.

Scheuerer (2014) EMOS modellje egy cenzorált, általánosított extrém érték modellt használ fel, melynek paramétere biztosítja a pozitív ferdeséget és a véges várható értéket. Ezzel szemben az általunk készített EMOS módszer (Baran and Nemoda, 2016) egy cenzorált, eltolt gamma (CSG) eloszláson alapszik, mely Scheuerer and Hamill (2015) összetett modelljének egy egyszerűsített továbbfejlesztése. Scheuerer and Hamill (2015) egy háromlépéses eljárást javasol, ahol először egy CSG modellt illesztenek a megfigyelések klimatológiai eloszlására. Ezek után az előrejelzéseket alkalmasan módosítva különböző ensemble jellemzőket számolnak, majd nem-homogén regresszióval e jellemzőket összekapcsolják a CSG modellel. Az általunk javasolt modell egyetlen lépésből áll, azonban a CSG EMOS itt magukat az ensemble előrejelzéseket kalibrálja. Sajnos a megfelelő kódok hiányában a két módszer azonos adatokon való összehasonlítását nem tudtuk megvalósítani.

3.1. Cenzorált, eltolt gamma EMOS model

Tekintsünk a $\Gamma(k, \theta)$ k -adrendű θ paraméterű gamma eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye

$$g_{k,\theta}(y) := \begin{cases} \frac{x^{k-1} e^{-y/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, & y > 0, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

ahol $\Gamma(k)$ jelöli a gamma függvény k -beli értékét. A gamma eloszlást parametrizálhatjuk a $\mu > 0$ várható értékével és $\sigma > 0$ szórásával az alábbi kifejezéseket felhasználva

$$k = \mu^2/\sigma^2 \quad \text{és} \quad \theta = \sigma^2/\mu. \quad (3.1.2)$$

Legyen $\delta > 0$ és jelölje $\Gamma^0(k, \theta, \delta)$ az eltolt, nullában balról cenzorált (CSG) k -adrendű θ skála- δ eltolásparaméterű gamma eloszlást, melynek eloszlásfüggvénye az alábbi szerint definiálható

$$G_{k,\theta,\delta}^0(y) := \begin{cases} G_{k,\theta}(y + \delta), & y \geq 0, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

ahol $G_{k,\theta}$ a $\Gamma(k, \theta)$ eloszlás eloszlásfüggvénye. Ez az eloszlás az origóhoz a $G_{k,\theta}(\delta)$ súlyt rendeli, általánosított sűrűségfüggvénye pedig

$$g_{k,\theta,\delta}^0(y) := \mathbb{I}_{y=0} G_{k,\theta}(\delta) + \mathbb{I}_{y>0} (1 - G_{k,\theta}(\delta)) g_{k,\theta}(y + \delta).$$

Rövid számolással kapjuk a $\Gamma_{k,\theta,\delta}^0$ eloszlás κ várható értékét

$$\kappa = \theta k (1 - G_{k,\theta}(\delta)) (1 - G_{k+1,\theta}(\delta) - \delta (1 - G_{k,\theta}(\delta))^2), \quad (3.1.4)$$

továbbá a (3.1.3) eloszlás q_p ($0 < p < 1$) p -kvantilise egyenlő 0, ha $p \leq G_{k,\theta}(\delta)$, egyébként pedig a $G_{k,\theta}(q_p + \delta) = p$ egyenlet megoldása.

A fent bevezetett CSG modellben az $f_1, f_2, \dots, f_K$ megkülönböztethető ensemble tagok (például UWME, lásd 1.3.1 fejezet) az alapul szolgáló gamma eloszláshoz a

$$\mu = a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_K f_K \quad \text{és} \quad \sigma^2 = b_0 + b_1 \bar{f}, \quad (3.1.5)$$

összefüggéssel kapcsolódnak, ahol $\bar{f}$ jelöli az ensemble átlagát. Felcserélhető ensemble esetén (például ALADIN-HUNEPS, lásd 1.3.2 fejezet) a (3.1.5) modell megfelelő alakja

$$\mu = a_0 + a_1 \sum_{\ell_1=1}^{M_1} f_{1,\ell_1} + \dots + a_K \sum_{\ell_K=1}^{M_K} f_{K,\ell_K} \quad \text{és} \quad \sigma^2 = b_0 + b_1 \bar{f}. \quad (3.1.6)$$

Megjegyezzük, hogy általában az EMOS modellek esetén a várható érték (hely) paraméter az egyes ensemble előrejelzések affin függvényeként áll elő (Thorarinsdottir

and Gneiting, 2010; Scheuerer, 2014; Baran and Lerch, 2015), a szórás paraméter pedig az ensemble különféle jellemzőitől függhet. Esetünkben a variancia az ensemble átlagának affin függvénye, melyhez hasonló esetet Sloughter *et al.* (2007) gamma BMA modellje használ. Így a modellben az előrejelzésekben felmerülő bizonytalanság az ensemble átlaggal arányosan nő. Vizsgálataink során a szórás paraméter különböző előállításait is teszteltük. Megvizsgáltuk a

$$\sigma^2 = b_0 + b_1 S^2 \quad \text{és} \quad \sigma^2 = b_0 + b_1 \text{MD}$$

modelleket, ahol S^2 az ensemble szórásnégyzete, MD pedig az ensemble előrejelzések különbségeinek az átlaga (lásd (1.1.9) definíció), valamint az eddigiek természetes módosításait, a

$$\sigma^2 = b_0 + b_1 S^2 + b_2 \bar{f} \quad \text{és} \quad \sigma^2 = (b_0 + b_1 \bar{f})^2$$

modelleket, de a (3.1.5) és (3.1.6) paraméterezéssel kapott CSG EMOS modell felülmúlja a fenti szórásokkal kapott CSG EMOS modelleket.

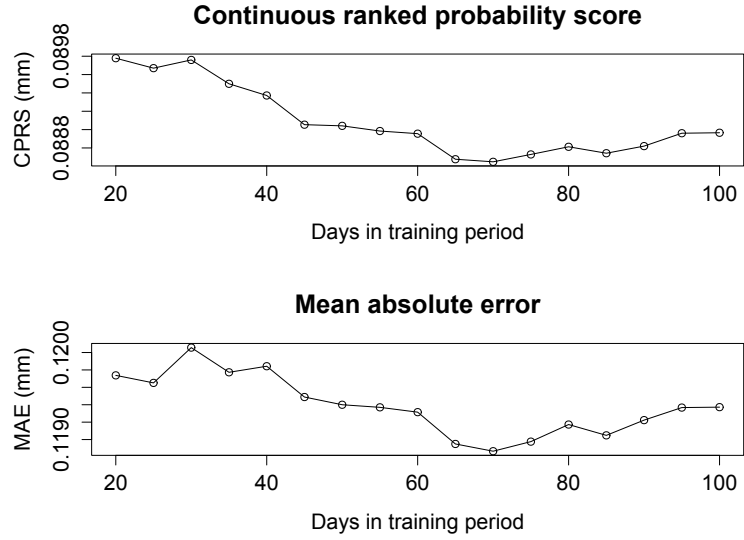
Követve Gneiting and Raftery (2005) valamint Scheuerer (2014) ötletét a (3.1.5) és (3.1.6) modell $a_0, a_1, \dots, a_K \geq 0$ várható érték paramétereit és $b_1, b_1 \geq 0$ szórás paramétereit CRPS minimalizációs módszerrel becsültük meg. Megjegyezzük, hogy az átlagos CRPS mutató minimalizálása mellett megvizsgáltuk a ML becslést is, de az így kapott CSG EMOS modell előrejelző képessége csökkent, így ezeket az értékeket fel sem tüntetjük.

3.2. Eredmények

A cenzorált, eltolt gamma EMOS modellt az UWME és az ALADIN-HUNEPS csapadék ensemble előrejelzéseken teszteltünk, és az eredményeket összehasonlítottuk Scheuerer (2014) általánosított extrémérték EMOS modelljével (GEV EMOS) és Sloughter *et al.* (2007) gamma BMA modelljével, valamint a nyers ensemble illeszkedési mutatóival. Scheuerer (2014) javaslatait figyelembe véve, a GEV EMOS modell adott napra vonatkozó paraméterbecslésekor a BFGS (lásd 1.2 fejezet) optimalizációs algoritmusnál kezdeti értéknek az előző napra vonatkozó becslést használtuk fel. Így a módszer előrejelző képessége valamelyest növekedett, viszont a mi adatainkra a CSG EMOS modellben a rögzített kezdeti érték feltételek szolgáltatnak jobb előrejelzéseket. Esetünkben globális EMOS módszert tekintettünk (lásd Thorarinsdottir and Gneiting (2010)), mely az összes állomásról származó ensemble előrejelzéseket és tényleges megfigyeléseket veszi figyelembe, majd a teljes adatsorra egyetlen paraméterhalmazt állít elő.

3.2.1. University of Washington mesoscale ensemble

Az UWME adatállományt különböző kezdeti és peremfeltételekkel generálják, így ezek az ensemble tagok egymástól egyértelműen megkülönböztethetők. Ezek alapján

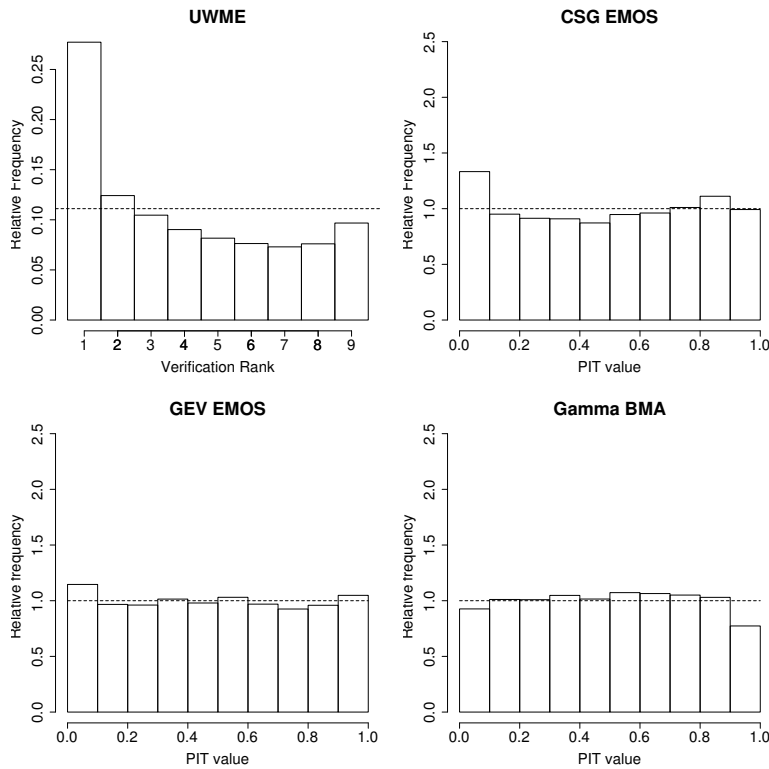


3.1. ábra. Az UWME csapadék előrejelzéseire vonatkozó CSG EMOS modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, és az előrejelzések mediánjainak MAE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében.

a CSG EMOS modellben szereplő gamma eloszlás várható értéke és szórása (3.1.5) képlet alapján függ az ensemble tagoktól, ahol $K = 8$. Nyilvánvalóan a GEV EMOS és a gamma BMA modellek (lásd 1.1.4 és 1.1.2 fejezet) esetében szintén a nem-felcserélhető ensemble tagok esetét tekintettük.

A tanuló periódust 20, 25, ..., 100 napnak tekintve, a CSG EMOS és a gamma BMA modellek CRPS és MAE értékeinek részletes vizsgálatakor azt tapasztaltuk, hogy mindkét mutató globális minimuma 70 napnál van, a 3.1 ábrán a CSG EMOS modellel kapott CRPS és MAE mutatók értékei láthatók. Így a 2008-as évre vonatkozó UWME előrejelzések utófeldolgozása során 70 napos tanuló periódust választottunk.

A 3.2 ábrán a nyers ensemble előrejelzések verification rank hisztogramja valamint a CSG EMOS, GEV EMOS és gamma BMA modellek PIT hisztogramjai láthatóak, egyértelműen mutatva a statisztikai utófeldolgozás előnyét. Sajnálatos módon a Kolmogorov-Szmirnov teszt elveti a modellek PIT értékeinek egyenletességét, a legnagyobb p -értéket a GEV EMOS modell ($5.562 \cdot 10^{-3}$) adja. A kis p -értéket feltehetőleg a nagy mintaelemszám miatt kapott numerikus problémák okozzák (lásd Baran *et al.*, 2013). A 3.1 táblázatban átlagos p -értéket adtunk meg, amiket úgy kaptunk, hogy az átlagát vettük 10000 darab, egyenként 2500 elemű minta p -értékének. Ezek az átlagok már szépen követik a 3.2 ábrán látható hisztogramok alakját.



3.2. ábra. A nyers UWME verification rank hisztogramja, valamint a BMA és EMOS utófeldolgozott előrejelzések PIT hisztogramjai a 2008-as évre.

Model	CSG EMOS	GEV EMOS	Gamma BMA
Átlagos p -érték	0.154	0.310	0.044

3.1. táblázat. Kolmogorov-Szmirnov teszt p -értékei az UWME PIT értékeinek egyenletességére. Minden esetben egy 10000 darabból álló, darabonként 2500 elemű minta p -értékének vettük az átlagát.

A 3.2 táblázat a valószínűségi előrejelzések átlagos CRPS értékeit, a medián előrejelzések MAE értékeit, valamint a 77.78% előrejelző intervallumok lefedettség és átlagos szélességeit tartalmazza a két EMOS módszer, a gamma BMA modell, illetve a nyers ensemble esetén. Ehhez kapcsolódik a 3.3 táblázat, mely a Diebold-Mariano teszt eredményeit mutatja. Ezeket az eredményeket vizsgálva egyértelműen megfi-

Előrejelzés	CRPS	MAE	Lefedettség (%)	Átl. szél.
CSG EMOS	2.252	3.019	80.46	8.350
GEV EMOS	2.283	3.033	79.91	8.683
Gamma BMA	2.357	3.220	83.44	9.515
Nyers ensemble	2.929	3.708	67.95	8.599

3.2. táblázat. Valószínűségi előrejelzések átlagos CRPS értékei, a medián előrejelzések MAE értékei, valamint a lefedettség és a 77.78% központi előrejelző intervallumok átlagos szélességei az UWME adatsorra

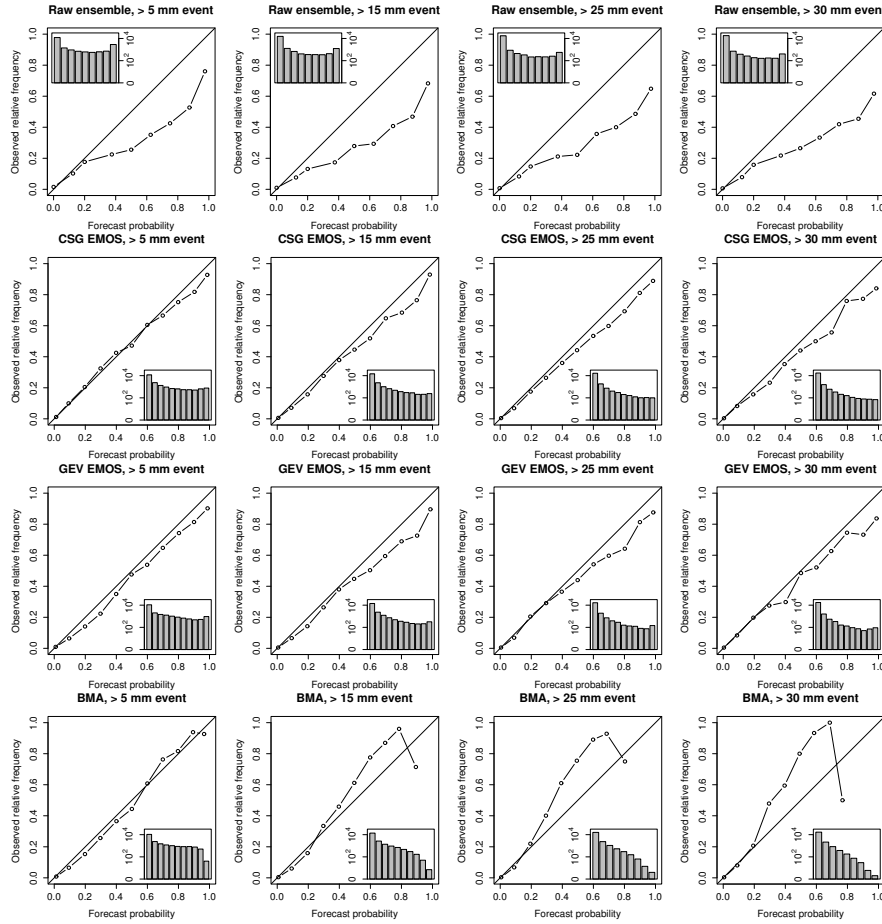
Előrejelzés	CSG EMOS	GEV EMOS	Gamma BMA	Ensemble
CSG EMOS	-	-5.237 (0.000)	-4.909 (0.000)	-29.265 (0.000)
GEV EMOS	1.631 (0.103)	-	-3.688 (0.000)	-26.845 (0.000)
Gamma BMA	5.648 (0.000)	5.892 (0.000)	-	-15.556 (0.000)
Ensemble	21.967 (0.000)	20.504 (0.000)	9.076 (0.000)	-

3.3. táblázat. Az előrejelző képességet tesztelő CRPS értékeken (*felső háromszög*) és a medián előrejelző hibáin (*alsó háromszög*) alapuló Diebold-Mariano teszt eredményei az UWME esetén (próbastatisztika és p -értékek). A próbastatisztika negatív/pozitív értékei azt jelzik, hogy a sor/oszlop fejlécében levő modell rendelkezik a jobb előrejelző képességgel, a félkövér számok pedig a 0.05 szignifikancia szint alatti p -értéket jelölik.

Előrejelzés	CRPSS	Brier Skill Mutató				
		0 mm	5 mm	15 mm	25 mm	30 mm
CSG EMOS	0.231	0.393	0.243	0.268	0.248	0.237
GEV EMOS	0.221	0.403	0.219	0.252	0.239	0.235
Gamma BMA	0.196	0.419	0.231	0.240	0.196	0.188

3.4. táblázat. CRPSS és BSS értékek, referenciaként nyers UWME előrejelzéseket használtuk.

gyelhető a statisztikai utófeldolgozás előnye. A különböző utófeldolgozó modellek CRPS és MAE értékei egyrészt jelentősen csökkentek a nyers ensemble ugyanezen mutatóihoz képest, másrészt nagymértékű fejlődést értünk el a lefedettség tekintetében is. A két EMOS modell CRPS és MAE értékei között nincs nagy különbség, vi-



3.3. ábra. A nyers ensemble, a CSG és GEV EMOS, valamint a gamma BMA módszerekkel utófeldolgozott előrejelzések megbízhatósági diagramjai az UWME adatsorra a 2008-as évre. A belső hisztogramok az egyes osztópontok log10-es skálán vett gyakoriságát mutatják.

szont egyértelműen jobb előrejelzéseket adnak, mint a gamma BMA módszer. A CSG EMOS modell szolgáltatja a szűkebb előrejelző intervallumot és majdnem tökéletes lefedettséget biztosít, míg a másik két módszer esetén kapott hasonló intervallumok még a nyers mintához tartozótól is szélesebbek.

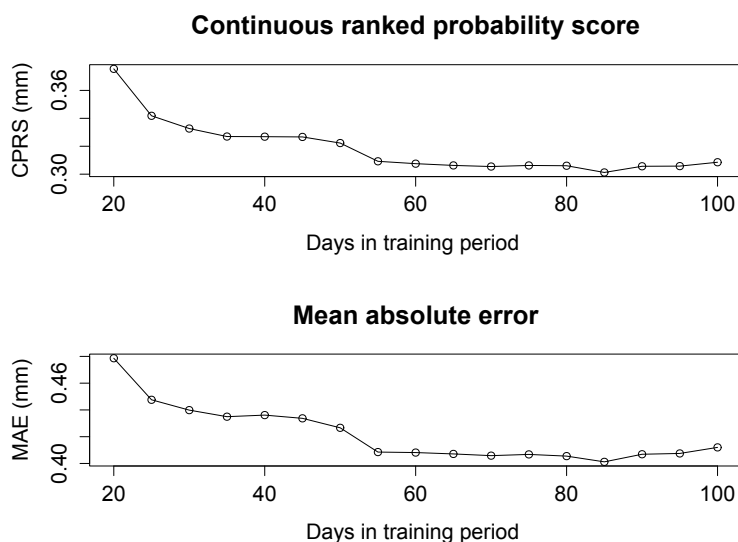
A statisztikai utófeldolgozás eredményességét mutatja továbbá a 3.4 táblázatban látható CRPSS és BSS mutatók értéke és a 3.3 ábrán látható megbízhatósági diagrama-

mok is. A gamma BMA modell jelzi előre legjobban a pozitív mennyiségű csapadék valószínűségét, míg az 5 mm-es küszöbértéket meghaladva az EMOS modellek tekinthetők jobbnak, viszont a CSG EMOS modell felülmúlja a GEV EMOS előrejelző képességét. Így azt a következtetést lehet levonni, hogy az UWME adatállomány esetén mindkét EMOS modell jobb előrejelzést szolgáltat, mint a nyers ensemble vagy a gamma BMA modell, és az általunk készített CSG EMOS modell előrejelző képessége van olyan jó, mint a GEV EMOS modellé.

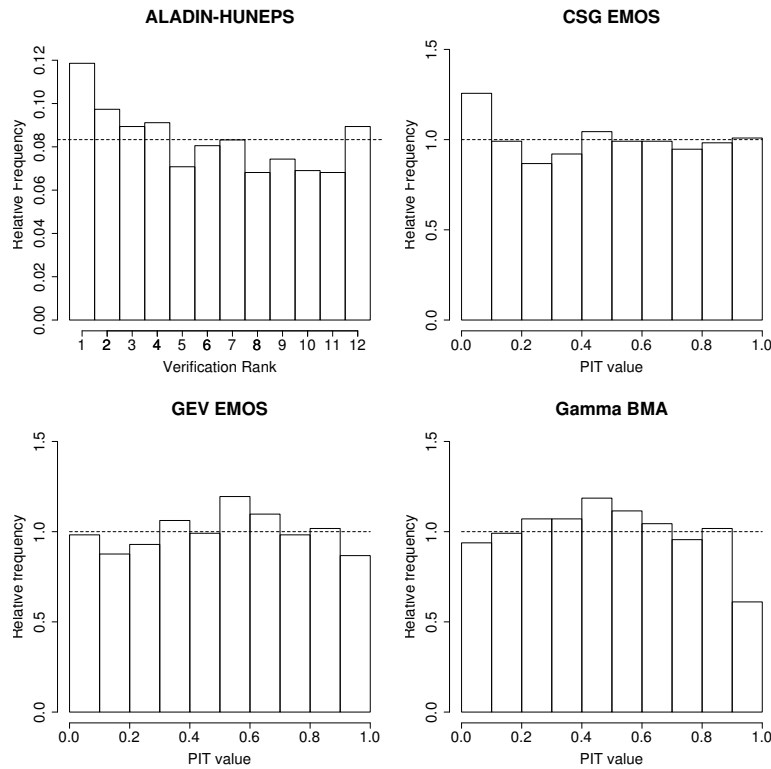
3.2.2. ALADIN-HUNEPS ensemble

A 11 tagú ALADIN-HUNEPS csapadék ensemble egy kontroll és 10 felcserélhető tagból áll, így az ensemble tagok egy természetes csoportosítását alkalmaztuk, azaz az első csoportba a kontroll tag, míg a másodikba a 10 felcserélhető ensemble tag került. Így módon a CSG EMOS (3.1.6) modellben $K = 2$, $M_1 = 1$ és $M_2 = 10$, és ezt a csoportosítást alkalmaztuk a GEV EMOS és a gamma BMA modellnél is.

Először az optimális tanuló periódus hosszát határoztuk meg, amelyhez 20, 25, ..., 100 nap hosszúságú tanuló periódusok átlagos CRPS és MAE értékeit hasonlítottuk össze. Ahhoz, hogy össze tudjuk hasonlítani a különböző hosszúsághoz tartozó eredményeket, minden esetben 2011. január 10. és 2011 március 25. közötti adatsort



3.4. ábra. Az ALADIN-HUNEPS csapadék előrejelzéseire vonatkozó CSG EMOS modell esetén az előrejelző eloszlások átlagos CRPS értékei, és az előrejelzések mediánjainak MAE értékei a tanuló periódus hosszának függvényében.



3.5. ábra. A nyers ALADIN-HUNEPS verification rank hisztogramja, valamint a BMA és EMOS utófeldolgozott előrejelzések PIT hisztogramjai a 2010.11.27. és 2011.03.25. közötti időszakra.

Model	CSG EMOS	GEV EMOS	Gamma BMA
Átlagos p-érték	0.119	0.921	0.003

3.5. táblázat. Kolmogorov-Szmirnov teszt p -értékei az ALADIN-HUNEPS PIT értékeinek egyenletességére. Minden esetben egy 10000 darabból álló, darabonként 2500 elemű minta p -értékeinek vettük az átlagát.

tekintettünk. A tanuló periódus függvényében ábrázolva az átlagos CRPS és MAE mutatók görbéit, azt tapasztaltuk, hogy mindkettőnek globális minimuma van 85 napnál, habár 55 napnál egy erős törés történik, azaz eddig a napig meredek csökkenés látható, majd 55 nap után laposan tart ehhez a minimumhoz. Mivel általában a minél rövidebb tanuló periódus a preferált, az ALADIN-HUNEPS csapadék ensemble

Előrejelzés	CRPS	MAE	Lefedettség (%)	Átl. szél.
CSG EMOS	0.465	0.636	89.15	2.185
GEV EMOS	0.477	0.641	86.53	2.192
Gamma BMA	0.532	0.708	93.73	2.854
Nyers ensemble	0.485	0.640	84.24	2.436

3.6. táblázat. Valószínűségi előrejelzések átlagos CRPS értékei, a medián előrejelzések MAE értékei, valamint a lefedettség és a 77.78% központi előrejelző intervallumok átlagos szélességei az ALADIN-HUNEPS adatsorra

Előrejelzés	CSG EMOS	GEV EMOS	Gamma BMA	Ensemble
CSG EMOS	-	-2.758 (0.006)	-3.978 (0.000)	-2.928 (0.003)
GEV EMOS	0.799 (0.425)	-	-3.586 (0.000)	-1.177 (0.239)
Gamma BMA	2.682 (0.007)	2.697 (0.007)	-	2.498 (0.013)
Ensemble	0.246 (0.806)	-0.078 (0.939)	-2.109 (0.035)	-

3.7. táblázat. Az előrejelző képességet tesztelő CRPS értékeken (*felső háromszög*) és a medián előrejelző hibáin (*alsó háromszög*) alapuló Diebold-Mariano teszt eredményei az ALADIN-HUNEPS esetén (próbatatisztika és p -értékek). A próbatatisztika negatív/pozitív értékei azt jelzik, hogy a sor/oszlop fejlécében levő modell rendelkezik a jobb előrejelző képességgel, a félkövér számok pedig a 0.05 szignifikancia szint alatti p -értéket jelölik.

esetén 55 napos tanuló periódust használtunk, ami alapján ensemble előrejelzések és tényleges megfigyelések 119 napra (2010 november 27. és 2011 március 25. között) érhetők el (ezt az első 55 nap elhagyásával kaptuk). Ez összesen 1180 előrejelzést jelent, mivel 2011. február 15-én 3 előrejelzés hiányzott, így ezt a napot kihagytuk a feldolgozásból. Ez az időintervallum 6 héttel korábban indul, mint az, amit a tanuló periódus optimális hosszának meghatározásához használtunk.

A 3.5 ábrán látható a nyers ensemble verification rank hisztogramja és az utófeldolgozott előrejelzések PIT hisztogramjai, amik jól illusztrálják az utófeldolgozás pozitív hatását. A két EMOS módszernél a Kolmogorov-Szmirnov próba elfogadja az egyenletességet (3.5 táblázat), a gamma BMA modell viszont púpos alakú lett, amely túlzott szórást jelez.

A két EMOS módszert tekintve hasonló eredményeket kaptunk, mint az UWME esetén. A 3.6 táblázat az illeszkedési mutatók értékeit, a 3.7 táblázat pedig a Diebold-

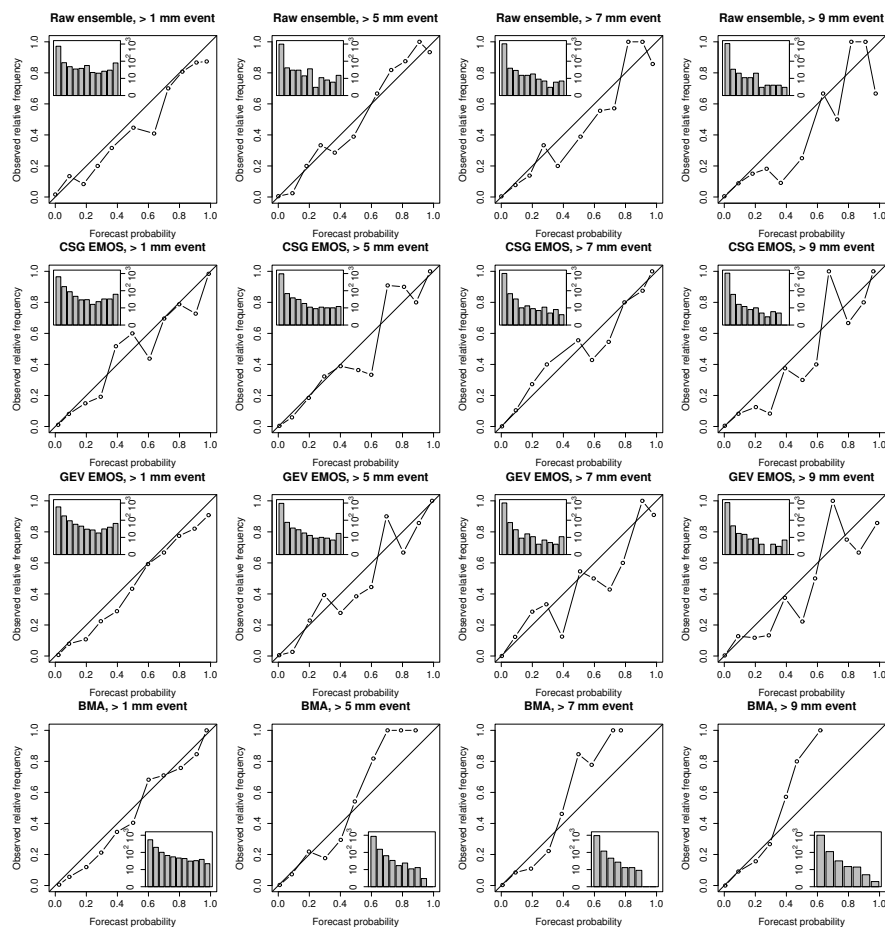
Előrejelzés	CRPSS	Brier Skill Mutató				
		0 mm	1 mm	5 mm	7 mm	9 mm
CSG EMOS	0.042	0.094	0.057	-0.011	-0.025	0.019
GEV EMOS	0.017	0.166	0.008	-0.022	-0.030	0.027
Gamma BMA	-0.098	0.151	-0.070	-0.265	-0.136	-0.023

3.8. táblázat. CRPSS és BSS értékek, referenciaként nyers ALADIN-HUNEPS előrejelzéseket használtuk.

Mariano teszt eredményeit mutatja. A CSG és GEV EMOS módszerek MAE értékei között nincs szignifikáns különbség, viszont a CSG EMOS adja a legkisebb CRPS értékeket és a legélesebb 83.33%-os előrejelző intervallumokat. Emellett mindkét EMOS módszer felülmúlja mind a nyers ensemble, mind pedig a gamma BMA módszerrel kapott előrejelzéseket, annak ellenére, hogy a nyers ensemble előrejelzések sokkal pontosabbak, mint a BMA módszerrel kapott előrejelzések. Megjegyezzük, hogy a gamma BMA modell nagy CRPS értéke és lefedettsége szinkronban van a 3.5 ábrán látható PIT hisztogrammal.

Az ALADIN-HUNEPS ensemble jó előrejelző képessége látható egyrészt a 3.8 táblázatban, itt sok a negatív BSS érték, valamint a 3.6 ábrán látható megbízhatósági diagramokon is. Az UWME-hez hasonlóan a gamma BMA módszer jelzi előre legjobban a pozitív mennyiségű csapadékot, viszont magasabb küszöbértékek esetén a CSG és GEV EMOS módszer, valamint a nyers ensemble előrejelzések adnak jobb előrejelzést. A 3.6 ábrán láthatók gráfok hektikus viselkedése valószínűleg a rövid adatállománynak köszönhető, hiszen összesen 394 darab pozitív mennyiségű csapadék megfigyelés van, mely körülbelül egyharmada a megfigyeléseknek.

A PIT értékek egyenletességét és az illeszkedési mutatók értékeit figyelembe véve (3.6 és 3.8 táblázat) összefoglalásként azt mondhatjuk, hogy az ALADIN-HUNEPS csapadék előrejelzései esetén az általunk kifejlesztett új CSG EMOS modellnek van a legjobb előrejelző képessége.



3.6. ábra. A nyers ensemble, a CSG és GEV EMOS, valamint a gamma BMA módszerekkel utófeldolgozott előrejelzések megbízhatósági diagramjai az ALADIN-HUNEPS adatsorra a 2010.11.27. és 2011.03.25. közötti időszakban. A belső hisztogramok az egyes osztópontok log10-es skálán vett gyakoriságát mutatják.

Összefoglalás

Az időjárás előrejelzés célja az, hogy egy megbízható előrejelzést adjunk az atmoszféra jövőbeli állapotáról, tényleges megfigyelések, korábbi előrejelzések, illetve az atmoszféra dinamikáját leíró matematikai modellek segítségével. Ezek a modellek olyan nemlineáris parciális differenciálegyenletekből állnak, melyeknek csak numerikus megoldása van. A numerikus időjárás-előrejelzés (NWP) problémája az, hogy a megoldás erősen függ a modell kezdeti érték paramétereitől.

Az előrejelzések bizonytalanságának csökkentése érdekében fejlesztették ki az ensemble (együttes) előrejelzési technikát (Leith, 1974). Ezeket úgy készítik, hogy a kezdeti érték feltételeket vagy a modell paramétereit kismértékben megváltoztatják (perturbálják), és mindegyik változattal készítenek egy előrejelzést. Ezen ensemble-együttes átlagát vagy mediánját felhasználva kapnak pontbecsléseket, melyekkel már nagymértékben sikerül csökkenteni az NWP modellek előrejelzési hibáit. Napjainkban minden fontosabb meteorológiai szolgálat üzemeltet valamilyen ensemble előrejelző rendszert (Ensemble prediction system; EPS). Az esetek többségben az ensemble előrejelzéseknek kicsi a szóródásuk, valamint a belőlük származó előrejelzések nem kalibráltak. Az ensemble előrejelzések pontosságát különböző utófeldolgozó módszerekkel sikerült javítani.

Ezen disszertáció témája különböző valószínűségi időjárás modellek bemutatása, illetve azok alkalmazása magyarországi adatokra. A dolgozat három részből tevődik össze. Manapság a Bayesian model averaging (BMA; Raftery *et al.*, 2005) és az Ensemble model output statistics (EMOS; Gneiting *et al.*, 2005) a két legszéleskörűbben alkalmazott statisztikai utófeldolgozó módszer, melyeket az 1.1. alfejezetben mutatok be.

A BMA módszer egy olyan előrejelző eloszlást állít elő, mely az egyes ensemble tagokhoz tartozó sűrűségfüggvények keverékeként adódik. Legyen y egy tetszőleges időjárási mennyiség, valamint legyen $f_1, \dots, f_K$ a hozzá tartozó ensemble előrejelzés egy adott helyre és időre vonatkozóan. Az y sűrűségfüggvényét jelölje $g_k(y|f_k)$, feltéve, hogy a tanuló időszakban a legjobb előrejelzést f_k adta. A BMA előrejelző eloszlás általános alakja

$$p(y|f_1, \dots, f_K) = \sum_{k=1}^K \omega_k g_k(y|f_k),$$

ahol ω_k annak a posteriori valószínűsége, hogy a tanuló időszakban f_k volt a legjobb előrejelzés. Az ω_k súlyok valószínűségi eloszlást alkotnak, azaz egyrészt nemnegatívak, másrészt $\sum_{k=1}^K \omega_k = 1$. A modellek paramétereinek a becslését a tanuló periódus alapján végezzük el, ami az előző n napra vonatkozó tényleges megfigyelésekből és ensemble előrejelzésekből áll.

Az eddig bemutatott módszer akkor alkalmazható, amikor az ensemble előrejelzések egymástól egyértelműen megkülönböztethetők, azaz mindegyik tag azonosítható és visszakövethető. Manapság a legtöbb EPS olyan előrejelzés családot generál, amely statisztikailag megkülönböztethetetlen ensemble tagokból álló csoportokat tartalmaz, ez a kezdeti érték feltételek véletlen perturbációja miatt jön létre. Az egymástól nem megkülönböztethető ensemble előrejelzéseket felcserélhetőnek tekintjük. Ha az M darab ensemble tagot K darab csoportba osztjuk, jelölje $f_{k,\ell}$ a k -adik csoport ℓ -edik tagját. A BMA előrejelző eloszlás felcserélhető ensemble csoportok esetén

$$p(y|f_{k,\ell}, k = 1, \dots, K, \ell = 1, \dots, M_k) = \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^{M_k} \omega_k g_k(y|f_{k,\ell}),$$

ahol az egy csoportba tartozó ensemble tagok ugyanolyan súlyt és paramétereket kapnak.

A BMA modellel szemben az EMOS módszer egyetlen sűrűségfüggvényt állít el, amelynek paraméterei az ensemble tagoktól függenek. Az EMOS előrejelző eloszlás megkülönböztethető ensemble előrejelzések esetén

$$y|f_1, \dots, f_K \sim g(y|f_1, \dots, f_K),$$

ami például a hőmérséklet és légnyomás modellezésére használt normális eloszlás esetén a következő előrejelző eloszlást eredményezi

$$y|f_1, \dots, f_K \sim \mathcal{N}(a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_K f_K, b_0 + b_1 S^2),$$

ahol S az ensemble szórása,

$$S^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (f_k - \bar{f}),$$

valamin $\bar{f}$ az ensemble átlaga, azaz

$$\bar{f} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K f_k.$$

A BMA módszerhez hasonlóan felcserélhető ensemble tagok esetén az egy csoportba tartozó ensemble tagok ugyanolyan hely paramétert kapnak.

A különböző időjárási mennyiségekhez különböző eloszlásokat alkalmazunk, ezek részletesen megtalálhatók dolgozatom 1.1.2. és 1.1.4. alfejezetében.

Az illeszkedésvizsgálat célja az, hogy megmutassuk, hogy az általunk vizsgált előrejelző modell mennyire illeszkedik a tényleges megfigyelésekre. Az 1.2. alfejezet tartalmazza az általunk használt összes illeszkedési mutató részletes leírását.

Végül a 1.3. alfejezetben található az általunk vizsgált adatsorok részletes leírása. Az Országos Meteorológiai Szolgálat az ALADIN-HUNEPS rendszert használja, mely egy 11 tagú ensemble előrejelzést állít elő, ezek közül 10 perturbált kezdeti értékekkel van generálva, a tizenegyedik a kontroll tag, melyet perturbálatlan kezdeti értékekkel készítenek (Horányi *et al.*, 2011). A hőmérséklet, szélsébség és csapadék adatátalomány 10 magyarországi nagyváros előrejelzéseit, és a hozzájuk tartozó tényleges megfigyeléseket tartalmazza. Csapadék esetén egy másik adatsor is rendelkezésünkre állt, ez a nyolc tagú University of Washington mesoscale ensemble (UWME), mely Észak-Amerika északnyugati csendes-óceáni partvidékét fedi le. Ezeket az ensemble tagokat a PSU-NCAR MM5 mesoscale modell különböző futtatásaiból készítik különböző időjárási központok kezdeti és határ feltételeit felhasználva (Grell *et al.*, 1995), így őket megkülönböztethetőnek tekintjük.

A 2. fejezetben az ALADIN-HUNEPS hőmérséklet és szélsébség ensemble előrejelzések statisztikai utófeldolgozásának részletes leírása található. Mindkét adatátalomány esetén az ensemble előrejelzések két különböző csoportosítását alkalmaztuk, az első esetben a 11 előrejelzést két csoportba osztottuk; az egyik csoportba a kontroll tag, míg a másik csoportba a 10 felcserélhető ensemble tag került. A másik esetben az ensemble tagokat három csoportba osztottuk; az első csoportba a kontroll tag, a másodikba a páros sorszámú ensemble tagok, míg a harmadikba a páratlan sorszámú ensemble tagok kerültek. (Baran *et al.*, 2013, 2014a,b)

A 2.1. alfejezetben az alkalmazott speciális modelleket mutatom be. Hőmérséklet esetén normális BMA (Raftery *et al.*, 2005) és normális EMOS (Gneiting *et al.*, 2005) modellt használtunk, szélsébség esetén pedig gamma BMA (Sloughter *et al.*, 2010), csonkított normális BMA (Baran, 2014) és csonkított normális EMOS (Thorarinsdottir and Gneiting, 2010) modellt illesztettünk. Ezt követően mindkét esetben meghatároztuk az optimális tanuló periódus hosszát. Hőmérséklet esetén 35 napos, szélsébség esetén 43 napot tanuló periódust használunk, ezen eredmények indoklását a 2.2. alfejezet tartalmazza.

Végül a 2.3. alfejezetben összefoglaltam a kapott eredményeket megadva az adatainkra legjobban illeszkedő modellt, mely hőmérséklet esetén a normális BMA módszer lineáris korrekcióval, szélsébség esetén pedig a csonkított normális EMOS modell volt.

Az utolsó, 3. fejezetben az ALADIN-HUNEPS és UWME csapadék előrejelzések statisztikai utófeldolgozása van részletezve. A csapadék előrejelzése jóval nehezebb, mint bármely más időjárási mennyiségé, többek között azért, mert a nulla csapadéknak lehet pozitív valószínűsége, emellett a pozitív mennyiségű csapadékot folytonos eloszlással kell modellezni.

A 3.1. alfejezetben az általunk kifejlesztett új EMOS modellt mutatom be, mely egy cenzorált, eltolt gamma (CSG) eloszláson alapszik. A $\Gamma(k, \theta)$ k -adrendű θ pa-

paraméterű gamma eloszlást parametrizálhatjuk a $\mu > 0$ várható értékével és $\sigma > 0$ szórásával az alábbi kifejezéseket felhasználva

$$k = \mu^2/\sigma^2 \quad \text{és} \quad \theta = \sigma^2/\mu.$$

Az eltoló, nullában balról cenzorált k -adrendű θ skála- δ eltolásparaméterű gamma eloszlás eloszlásfüggvénye az alábbi szerint definiálható

$$G_{k,\theta,\delta}^0(y) := \begin{cases} G_{k,\theta}(y + \delta), & y \geq 0, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $G_{k,\theta}$ a $\Gamma(k, \theta)$ eloszlás eloszlásfüggvénye. A fent bevezetett CSG modellben megkülönböztethető ensemble tagok (például UWME) az alapul szolgáló gamma eloszláshoz a

$$\mu = a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_K f_K \quad \text{és} \quad \sigma^2 = b_0 + b_1 \bar{f},$$

összefüggéssel kapcsolódnak, ahol $\bar{f}$ jelöli az ensemble átlagát. Felcserélhető ensemble esetén (például ALADIN-HUNEPS) a fenti modell megfelelő alakja

$$\mu = a_0 + a_1 \sum_{\ell_1=1}^{M_1} f_{1,\ell_1} + \dots + a_1 \sum_{\ell_K=1}^{M_K} f_{K,\ell_K} \quad \text{és} \quad \sigma^2 = b_0 + b_1 \bar{f}.$$

A cenzorált, eltoló gamma EMOS modellt az UWME és az ALADIN-HUNEPS csapadék ensemble előrejelzéseken teszteltünk, és az eredményeket összehasonlítottuk Scheurer (2014) általánosított extrémérték EMOS modelljével és Slougher *et al.* (2007) gamma BMA modelljével. A 3.2. alfejezet egyrészt az optimális tanuló periódus hosszának meghatározását tartalmazza - ez az UWME ensemble esetén 70 nap, míg az ALADIN HUNEPS ensemble esetén 55 nap volt - másrészt itt találhatóak a különböző modellek esetén kapott részletes eredmények. Mindkét adatsor esetén az általunk kifejlesztett új CSG EMOS modellnek van a legjobb előrejelző képessége, amit a különböző illeszkedési mutatók értékei támasztanak alá (Baran and Nemoda, 2016).

Summary

The aim of weather forecasting is to give a reliable prediction of the future state of the atmosphere on the basis of present observations, prior forecasts and mathematical models describing the dynamics of the atmosphere. These models consists of sets of nonlinear partial differential equations which can only be solved numerically. The problem with these numerical weather prediction models (NWP) is that the solutions higly depend on the initial conditions.

Ensemble prediction systems (EPSs) were developped in order to represent the uncertainty of forecasts based on observational data and numerical weather prediction models. One can run these models with different initial conditions or change model physics and produce an ensemble of forecasts with each version (Leith, 1974). The ensemble mean or median on average gives better forecasts of a meteorological quantity than a forecast of a NWP model. Recently all major weather prediction centres have their own operational ensemble prediction systems, e.g. the Consortium for Small-scale Modelling (COSMO-DE) EPS of the German Meteorological Service, the Prévision d'Ensemble ARPEGE (PEARP) EPS of Météo France or the EPS of the independent intergovernmental European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF). However it is often the case that the ensemble is under-dispersive and in this way, uncalibrated, so that calibration is needed to account for this deficiency. By statistical post-processing of the raw ensemble one can correct the possible bias and underdispersion of the original forecasts.

This dissertation describes different calibration method and their applications to Hungarian data sets. It consists of three chapters, where the first gives an overview of the existing methods and the datasets used for model verification. In Chapter 1.1 the Bayesian Model Averaging (BMA; Raftery *et al.*, 2005) and the Ensemble model output statistics (EMOS; Gneiting *et al.*, 2005) methods are introduced, which are probably the most popular approaches in statistical calibration of ensemble forecasts (Gneiting, 2014).

The BMA method generates calibrated and sharp predictive probability density functions, which are weighted averages of individual PDFs corresponding to the ensemble members. Let y be a future weather quantity of interest, and $f_1, \dots, f_K$ be the ensemble forecast for y . Denote by $g_k(y|f_k)$ the conditional PDF of y corresponding

to the k th ensemble member f_k . The general BMA predictive PDF is defined as

$$p(y|f_1, \dots, f_K) = \sum_{k=1}^K \omega_k g_k(y|f_k),$$

where ω_k is the posterior probability, that f_k gives the best forecast in the training period. The ω_k weights form a probability distribution, so they are nonnegative and $\sum_{k=1}^K \omega_k = 1$. The parameters of the model are estimated with the help of the training data, which consists of ensemble forecasts and verifying observations from the previous n days.

The method described so far, is for a situation where ensemble members came from clearly distinguishable sources, that is each ensemble member can be identified and tracked down. Currently most of the EPSs produce ensembles containing groups of statistically indistinguishable members which are obtained with the help of random perturbations of the initial conditions. These ensemble members should be treated as exchangeable. Suppose we have M ensemble members divided into K exchangeable groups, and we denote by $f_{k,\ell}$ the ℓ th member of the k th group. In the case of groups of exchangeable ensemble members the BMA predictive PDF is

$$p(y|f_{k,\ell}, k = 1, \dots, K, \ell = 1, \dots, M_k) = \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^{M_k} \omega_k g_k(y|f_{k,\ell}),$$

where the ensemble members within a given group get the same weight and parameter value.

In contrast with the BMA method, the EMOS predictive PDF is a single parametric density where the parameters are functions of the ensemble members. The general EMOS predictive PDF is

$$y|f_1, \dots, f_K \sim g(y|f_1, \dots, f_K).$$

Particularly, in the case of temperature and pressure a normal distribution seems to be a reasonable choice

$$y|f_1, \dots, f_K \sim \mathcal{N}(a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_K f_K, b_0 + b_1 S^2),$$

where S^2 denotes the ensemble variance

$$S^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (f_k - \bar{f}),$$

and $\bar{f}$ is the ensemble mean

$$\bar{f} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K f_k.$$

Similar to the BMA approach, in the case of exchangeable members, the ensemble members within a given group get the same location parameters.

Different weather quantities require different predictive distributions, these models are introduced in detail in Subsections 1.1.2 and 1.1.4.

The main aim of probabilistic forecasting is to access the maximal sharpness of the predictive distribution subject to calibration. In order to check the overall performance of the calibrated forecasts based on probability distribution functions, in Subsection 1.2 we introduce various kind of scoring rules. To check the performance of a probabilistic forecasts and a corresponding a point forecasts, we compare the mean absolute errors, the root mean square errors, the mean continuous ranked probability scores and the Brier score. Diebold-Mariano tests are applied for investigating the significance of the differences in scores corresponding to the various post-processing methods. Furthermore, one can investigate calibration and sharpness of a predictive distribution with the help of the coverage and average width of the central prediction intervals.

Finally, Subsection 1.3 contains the detailed description of the data sets to which BMA and EMOS models are applied. The Hungarian Meteorological Service operates the ALADIN-HUNEPS EPS, consisting of 11 members, 10 initialized from perturbed initial conditions and one control member from the unperturbed analysis (Horányi *et al.*, 2011). The data set contains temperature, wind speed and precipitation ensemble forecasts for 10 major cities in Hungary together with the corresponding validating observations. In the case of precipitation another data set is available, the 8-member University of Washington mesoscale ensemble (UWME), which covers the Pacific Northwest region of North America. The ensemble members are obtained from different runs of the PSU-NCAR MM5 mesoscale model with initial and boundary conditions from various weather centres (Grell *et al.*, 1995), so we consider them as distinguishable.

Chapter 2 contains the statistical post-processing of temperature and wind speed ensemble forecasts of the ALADIN-HUNEPS system. For both data sets we consider two different groupings of the ensemble members. In the first case we split the 11 member ensemble into two different groups, one contains the control member while in the other are 10 exchangeable ensemble members. In the second case the odd and even numbered exchangeable ensemble members form two separate groups (Baran *et al.*, 2013, 2014a,b).

In Subsection 2.1 the applied special models for temperature and wind speed are introduced. For temperature we used normal BMA (Raftery *et al.*, 2005) and normal EMOS (Gneiting *et al.*, 2005) models, whereas in case of wind speed gamma BMA (Sloughter *et al.*, 2010), truncated normal BMA (Baran, 2014) and truncated normal EMOS (Thorarinsdottir and Gneiting, 2010) models are applied. Then in both cases we determine the optimal lengths of training periods by comparing values of different verification scores corresponding to different training period lengths. In case of temperature a 45, whereas for wind speed a 43 day training period seems to

be a reasonable choice. The detailed results are given in Subsection 2.2.

Finally, Subsection 2.3 contains the verification results corresponding to different post-processing models. By examining these results, one can clearly observe the obvious advantage of statistical post-processing. A comparison of the verification rank histograms of the raw ensemble forecasts of temperature and wind speed and the corresponding PIT histograms of all applied models, shows that post-processing significantly improves the statistical calibration of the forecasts. This visual perception is confirmed by the p -values of Kolmogorov-Smirnov tests for uniformity of the PIT values. In each case the BMA and EMOS models distinguishing three exchangeable groups of ensemble members slightly outperform their two-group counterparts. By comparing the different scores we find that in case of temperature the normal BMA model with linear bias correction, whereas for wind speed the truncated normal EMOS model provides the best fit.

In Chapter 3 the statistical post-processing of precipitation data of ALADIN-HUNEPS ensemble and UWME is given in detail. However, statistical calibration of ensemble forecasts of precipitation is far more difficult than the post-processing of the above mentioned weather quantities. First of all, precipitation has a discrete-continuous nature with a positive probability of being zero, moreover larger expected precipitation amount results in larger forecast uncertainty.

In Subsection 3.1 we introduce a new EMOS model, which is based on a censored and shifted gamma distribution. The gamma distribution $\Gamma(k, \theta)$ with shape $k > 0$ and scale $\theta > 0$ can be parametrized by its mean $\mu > 0$ and standard deviation $\sigma > 0$ using expressions

$$k = \mu^2 / \sigma^2 \quad \text{and} \quad \theta = \sigma^2 / \mu.$$

Then the shifted gamma distribution left censored at zero (CSG) $G_{k,\theta,\delta}^0$ with shape k , scale θ and shift δ can be defined with CDF

$$G_{k,\theta,\delta}^0(y) := \begin{cases} G_{k,\theta}(y + \delta), & y \geq 0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\Gamma(k, \theta)$ is the CDF of a $G_{k,\theta}$ distribution. In the proposed CSG EMOS model the distinguishable ensemble members (e.g. UWME) are linked to the mean μ and variance σ^2 of the underlying gamma distribution via equations

$$\mu = a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_K f_K \quad \text{and} \quad \sigma^2 = b_0 + b_1 \bar{f},$$

where $\bar{f}$ denotes the ensemble mean. In the case of exchangeable ensemble members (e.g. ALADIN-HUNEPS) the above model has the form

$$\mu = a_0 + a_1 \sum_{\ell_1=1}^{M_1} f_{1,\ell_1} + \dots + a_K \sum_{\ell_K=1}^{M_K} f_{K,\ell_K} \quad \text{and} \quad \sigma^2 = b_0 + b_1 \bar{f}.$$

We tested the censored, shifted gamma EMOS model on ensemble forecasts of precipitation accumulation of the ALADIN-HUNEPS ensemble and UWME, then we compared the results with the generalized extreme value EMOS model of Scheuerer (2014) and the gamma BMA model of Sloughter *et al.* (2007). In Subsection 3.2, we determine the optimal length of the training period. In the case of UWME a 70, whereas for ALADIN-HUNEPS a 55 day training period seems to be a reasonable choice. Compared with the verification rank histogram of the raw ensembles, the corresponding PIT histograms of the post-processed forecasts show a substantial improvement in calibration. This can also be observed in skill scores and reliability diagrams. Finally, we compare the different verification scores corresponding to different models, and we find that for both data sets our new EMOS model (Baran and Nemoda, 2016) provides the best fit.

Irodalomjegyzék

- Bao, L., Gneiting, T., Raftery, A. E., Grimit, E. P. and Guttorp, P. (2010) Bias correction and Bayesian model averaging for ensemble forecasts of surface wind direction. *Mon. Wea. Rev.* **138**, 1811–1821.
- Baran, S., Sikolya, K. and Veres, L. (2013) Estimating the risk of a Down’ syndrome term pregnancy using age and serum markers: Comparson of various methods. *Comm. Statist. Simulation Comput.* **42**, 1654–1672.
- Baran, S., Horányi, A. and Nemoda, D. (2013) Statistical post-processing of probabilistic wind speed forecasting in Hungary. *Meteor. Z.* **22**, 273–282.
- Baran, S. (2014) Probabilistic wind speed forecasting using Bayesian model averaging with truncated normal components. *Comput. Stat. Data. Anal.* **75**, 227–238.
- Baran, S., Horányi, A. and Nemoda, D. (2014) Probabilistic temperature forecasting with statistical calibration in Hungary. *Meteor. Atmos. Phys.* **124**, 129–142.
- Baran, S., Horányi, A. and Nemoda, D. (2014) Comparison of BMA and EMOS statistical methods in calibrating temperature and wind speed forecast ensembles. *Időjárás* **118**, 217–241.
- Baran, S. and Nemoda, D. (2016) Censored and shifted gamma distribution based EMOS model for probabilistic quantitative precipitation forecasting. *Environmetrics* **27**, 280–292.
- Baran, S. and Lerch, S. (2015) Log-normal distribution based EMOS models for probabilistic wind speed forecasting. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **141**, 2289–2299.
- Baran, S. and Lerch, S. (2016) Mixture EMOS model for calibrating ensemble forecasts of wind speed. *Environmetrics* **27**, 116–130.
- Bröcker, J. and Smith, L. A. (2007) Increasing the reliability of reliability diagrams. *Wea. Forecasting* **22**, 651–661.
- Buizza, R. and Palmer, T. N. (1995) The singular-vector structure of the atmospheric global circulation. *J. Atmos. Sci.* **52**, 1434–1456.

- Byrd, R.H., Lu, P., Nocedal, J. and Zhu, C. (1995) A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM J. Sci. Comput.* **16**, 1190–1208.
- Diebold, F. X. and Mariano, R. S. (1995) Comparing predictive accuracy. *J. Bus. Econom. Statist.* **13**, 253–263.
- ECMWF Directorate (2012) Describing ECMWF's forecasts and forecasting system. ECMWF Newsletter No. 133 *Autumn 2012*. Elérhető: <http://www.ecmwf.int/sites/default/files/elibrary/2012/14576-newsletter-no133-autumn-2012.pdf> [Letöltve: 2016.09.17.]
- Fräley, C., Raftery, A. E., Gneiting, T. and Sloughter, J. M. (2009) EnsembleBMA: An R package for probabilistic forecasting using ensembles and Bayesian model averaging. *Technical Report* 516R, Department of Statistics, University of Washington.
- Fräley, C., Raftery, A. E. and Gneiting, T. (2010) Calibrating multimodel forecast ensembles with exchangeable and missing members using Bayesian model averaging. *Mon. Wea. Rev.* **138**, 190–202.
- Fräley, C., Raftery, A. E., Gneiting, T., Sloughter, J. M. and Berrocal, V. J. (2011) Probabilistic weather forecasting in R. *The R Journal* **3**, 55–63.
- Friederichs, P. and Thorarinsdottir, T. L. (2012) Forecast verification for extreme value distributions with an application to probabilistic peak wind prediction. *Environmetrics* **23**, 579–594.
- Gneiting, T. and Raftery, A. E. (2005) Weather forecasting with ensemble methods. *Science* **310**, 248–249.
- Gneiting, T., Raftery, A. E., Westveld, A. H. and Goldman, T. (2005) Calibrated probabilistic forecasting using ensemble model output statistics and minimum CRPS estimation. *Mon. Wea. Rev.* **133**, 1098–1118.
- Gneiting, T., Larson, K., Westrick, K., Genton, M.G. and Aldrich, E. (2006) Calibrated probabilistic forecasting at the Stateline wind energy center: the regime-switching space-time method. *J. Amer. Statist. Assoc.* **101**, 968–979.
- Gneiting, T. and Raftery, A. E. (2007) Strictly proper scoring rules, prediction and estimation. *J. Amer. Statist. Assoc.* **102**, 359–378.
- Gneiting, T. (2011) Making and evaluating point forecasts. *J. Amer. Statist. Assoc.* **106**, 746–762.
- Gneiting, T. (2011) Calibration of medium-range weather forecasts. ECMWF Technical Memorandum No. 719. Elérhető: <http://www.ecmwf.int/sites/default/files/elibrary/2014/9607-calibration-medium-range-weather-forecasts.pdf> [Letöltve: 2016.09.17.]

- Good, I. J. (1952) Rational decisions. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **14**, 107–114.
- Grell, G. A., Dudhia, J. and Stauffer, D. R. (1995) A description of the fifth-generation Penn state/NCAR mesoscale model (MM5). *Technical Note* NCAR/TN 398+STR. National Center for Atmospheric Research, Boulder. Elérhető: <http://nldr.library.ucar.edu/repository/assets/technotes/TECH-NOTE-000-000-000-214.pdf> [Letöltve: 2016.09.17.]
- Hamill, T. M., Whitaker, J. S. and Wei, X. (2004) Ensemble re-forecasting: Improving medium-range forecast skill using retrospective forecasts. *Mon. Wea. Rev.* **132**, 1434–1447.
- Haslett, J. and Raftery, A. E. (1989) Space–Time Modelling With Long-Memory Dependence: Assessing Ireland’s Wind Power Resource *J. Roy. Statist. Soc. Ser. C* **38**, 1–50.
- Hoeting, J. A., Madigan, D. M., Raftery, A. E. and C. T. Volinsky (1999) Bayesian model averaging: A tutorial (with discussion). *Stat. Sci.* **14**, 382–401.
- Horányi, A., Kertész, S., Kullmann, L. and Radnóti, G. (2006) The AR-PEGE/ALADIN mesoscale numerical modeling system and its application at the Hungarian Meteorological Service. *Időjárás* **110**, 203–227.
- Horányi, A., Mile, M. and Szűcs, M. (2011) Latest developments around the ALADIN operational short-range ensemble prediction system in Hungary. *Tellus A* **63**, 642–651.
- Jordan, A., Krüger, F. and Lerch, S. (2016) scoringRules: Scoring Rules for Parametric and Simulated Distribution Forecasts. Elérhető <https://cran.r-project.org/web/packages/scoringRules> [Letöltve: 2016.09.17.]
- Kass, R. E. and Raftery, A. E. (1995) Bayes factors. *J. Amer. Stat. Assoc.* **90**, 773–795.
- Leamer, E. E. (1978) *Specification Searches.*, Wiley, New York.
- Lee, G. and Scott, C. (2012) EM algorithms for multivariate Gaussian mixture models with truncated and censored data. *Comput. Stat. Data Anal.* **56**, 2816–2829.
- Leith, C. E. (1974) Theoretical skill of Monte-Carlo forecasts. *Mon. Wea. Rev.* **102**, 409–418.
- Lerch, S. and Thorarinsdottir, T. L. (2013) Comparison of non-homogeneous regression models for probabilistic wind speed forecasting. *Tellus A* **65**, 21206.
- Lorenz, E. N. (1963) Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20**, 130–141.
- McLachlan, G. J. and Krishnan, T. (1997) *The EM algorithm and extensions.* Wiley, New York.

- Nelder, J. A. and Mead, R. (1965) A simplex algorithm for function minimization. *Comput. J.* **7**, 308–313.
- Palmer, T. N. and Zanna, L. (2013) Singular vectors, predictability and ensemble forecasting for weather and climate *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 254018.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. T. (2007) *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Raftery, A. E., Gneiting, T., Balabdaoui, F. and Polakowski, M. (2005) Using Bayesian model averaging to calibrate forecast ensembles. *Mon. Wea. Rev.* **133**, 1155–1174.
- Roulston, M. S. and Smith, L. A. (2003) Combining dynamical and statistical ensembles. *Tellus A* **55**, 16–30.
- Scheuerer, M. (2014) Probabilistic quantitative precipitation forecasting using ensemble model output statistics. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **149**, 1086–1096.
- Scheuerer, M. and Hamill, T. M. (2015) Statistical Post-Processing of Ensemble Precipitation Forecasts by Fitting Censored, Shifted Gamma Distribution *Mon. Wea. Rev.* **143**, 4578–4596.
- Sloughter, J. M., Gneiting, T. and Raftery, A. E. (2007) Probabilistic quantitative precipitation forecasting using Bayesian model averaging. *Mon. Wea. Rev.* **135**, 3209–3220.
- Sloughter, J. M., Gneiting, T. and Raftery, A. E. (2010) Probabilistic wind speed forecasting using ensembles and Bayesian model averaging. *J. Amer. Stat. Assoc.* **105**, 25–35.
- Sloughter, J. M., Gneiting, T. and Raftery, A. E. (2013) Probabilistic wind vector forecasting using ensembles and Bayesian model averaging. *Mon. Wea. Rev.* **141**, 2107–2119.
- Toth, Z. and Kalnay, E. (1993) Ensemble forecasting at the NMC: The generation of perturbations. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **74**, 2317–2330.
- Toth, Z. and Kalnay, E. (1997) Ensemble forecasting at NCEP and the breeding method *Mon. Wea. Rev.* **125**, 3297–3319.
- Tuller, S. E. and Brett, A. C. (1984) The characteristics of wind velocity that favor the fitting of a Weibull distribution in wind speed analysis. *J. Appl. Meteor.* **23**, 124–134.

- Thorarinsdottir, T. L. and Gneiting, T. (2010) Probabilistic forecasts of wind speed: ensemble model output statistics by using heteroscedastic censored regression. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A* **173**, 371–388.
- Wang, X. and Bishop, C. H. (2005) Improvement of ensemble reliability with a new dressing kernel. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **131**, 965–986.
- Wilks, D. S. (2011) *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*. 3rd ed., Elsevier, Amsterdam.
- Williams, R. M., Ferro, C. A. T. and Kwasniok, F. (2014) A comparison of ensemble post-processing methods for extreme events. *Q. J. R. Meteorolog. Soc.* **140**, 1112–1120.
- Wu, C. F. J. (1983) On the convergence properties of the EM algorithm *Ann. Statist.* **11**, 95–103.

A szerző publikációi

Referált folyóiratban megjelent cikkeim, és az azokra kapott független hivatkozások:

1. Baran, S., Horányi, A., Nemoda, D., Statistical post-processing of probabilistic wind speed forecasting in Hungary. *Meteorol. Z.* **22** (2013), no. 3, 273–282. (Impakt faktor: 1.160, Atmospheric Science: Q2)

Független idézők száma: 7

- Gneiting, T., Calibration of medium-range weather forecasts. *ECMWF Technical Memorandum* No. 719, 2014.
- Möller, A., *Multivariate and spatial ensemble postprocessing methods*. PhD thesis, Heidelberg University, 2014.
- El-gindy, A. A. H., El-nashar, Elham S., Probability modelling of wind velocity for assessment of wind energy at Alexandria coast. *Res. J. App. Sci. Eng. Technol.* **8** (2014), 2001–2015.
- Arató, M., Martinek, L., Comparison of reserving and spatial models in insurance. In: Montserrat, G. et al. (ed.) *Current Topics on Risk Analysis: ICRA6 and RISK 2015 Conference*. Barcelona, Spain, May 26–29, 2015. Fundación Mapfre, Madrid, 2015, 71–78.
- Scheuerer, M., Möller, D., Probabilistic wind speed forecasting on a grid based on ensemble model output statistics. *Ann. Appl. Stat.* **9** (2015), 1328–1349.
- Möller, A., Groß, J., Probabilistic temperature forecasting based on an ensemble autoregressive modification. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **142** (2016), 1385–1394.
- Lerch, S., *Probabilistic forecasting and comparative model assessment, with focus on extreme events*. PhD thesis, Karlsruhe Institute of Technology, 2016.

2. Baran, S., Horányi, A., Nemoda, D., Probabilistic temperature forecasting with statistical calibration in Hungary. *Meteorol. Atmos. Phys.* **124** (2014), no. 3-4, 129–142. (Impakt faktor: 1.049, Atmospheric Science: Q3)

Független idézők száma: 1

- Schefzik, R., *Physically coherent probabilistic weather forecasts using multivariate discrete copula-based ensemble postprocessing methods*. PhD thesis, Heidelberg University, 2015.

3. Baran, S., Horányi, A., Nemoda, D., Comparison of the BMA and EMOS statistical methods in calibrating temperature and wind speed forecast ensembles. *Időjárás* **118** (2014), no. 3, 217–241. (Impakt faktor: 0.500, Atmospheric Science: Q3)

Független idézők száma: 2

- Schefzik, R., *Physically coherent probabilistic weather forecasts using multivariate discrete copula-based ensemble postprocessing methods*. PhD thesis, Heidelberg University, 2015.
- Lerch, S., *Probabilistic forecasting and comparative model assessment, with focus on extreme events*. PhD thesis, Karlsruhe Institute of Technology, 2016.

4. Baran, S., Nemoda, D., Censored and shifted gamma distribution based EMOS model for probabilistic quantitative precipitation forecasting. *Environmetrics* **27** (2016), no. 5, 280–292. (Impakt faktor: 1.160, Statistics and Probability: Q2)

Független idézők száma: 1

- Sansom, P. G., Ferro, C. A. T., Stephenson, D. B., Goddard, L., Mason, S. J., Best practices for post-processing ensemble climate forecasts, Part I: Selecting appropriate recalibration methods. *J. Climate*. **29** (2016), 7247–7264.

A szerző konferencia-előadásai

1. *Probabilistic wind speed prediction in Hungary*, 17th Young Statisticians Meeting, Piran, Szlovákia, 2012. október 12-14.
2. *Valószínűségi szélsőbesség előrejelzés*, XXXI. Országos Tudományos Diákköri Konferencia, Budapest, Magyarország, 2013. március 25-27.
3. *Probabilistic temperature forecasting with statistical calibration in Hungary*, The 9th International Conference on Applied Informatics, Eger, Magyarország, 2014. január 29. - február 1.
4. *Comparison of BMA and EMOS statistical calibration methods for temperature and wind speed ensemble weather prediction*, 11th German Probability and Statistics Days, Ulm, Németország, 2014. március 4-7.
5. *Probabilistic temperature forecasting in Hungary*, Summer school on Weather Extremes, Annweiler, Németország, 2014. június 10-13. (poszter)
6. *Censored and shifted gamma distribution based EMOS model for probabilistic quantitative precipitation forecasting*, 12th German Probability and Statistics Days, Bochum, Németország, 2016. március 1-4.

