

Dr. Darvasi Gyula

EGY FELADAT – TÖBBFÉLE MEGOLDÁS

Tanítási ötletek az elemi geometria néhány
témaköréhez

ONE PROBLEM – MORE SOLUTIONS

Teaching Ideas to Certain Themes in Elementary
Geometry

című PhD értekezés tézisei

Témavezető: Dr. Kovács Zoltán



Debreceni Egyetem
Debrecen, 2005.

1. Bevezetés

Az értekezésben - alcímének megfelelően - tanítási ötleteket kívánunk adni az elemi geometria néhány témaköréhez, mégpedig azáltal, hogy a kiválasztott témakörök bizonyos problémáira többféle megoldást ismertetünk, jóllehet eközben nem kizárólag elemi geometriai, hanem trigonometriai, analitikus geometriai és vektoralgebrai eszközöket is használunk. A több megoldás bemutatásával az a legfőbb célunk, hogy a tanulót különféle gondolkodási műveletek elvégzésére, s ennek során újabb és magasabb szintű ismeretek megszerzésére készítsük. A másik megoldás utáni kutatás igényének kialakítása és továbbfejlesztése a matematika tanításának egyik legfontosabb feladata. Ezen cél és feladat együttes figyelembe vételével az euklideszi háromszög- és körgeometria területéről válogattunk néhány problémát, amelyek feldolgozása közben arra törekedtünk, hogy az összeállított anyag jól hasznosítható legyen a középfokú, sőt esetenként még a felsőfokú oktatásban is.

Az értekezés felépítéséből adódik, hogy szinte minden egyes témakör magába foglalja a már ismert tények felsorolását, vagy az azokra történő utalásokat, továbbá a választott probléma újszerű feldolgozását és több esetben új eredményeket is.

2. Háromszög-geometria

A háromszög-geometriai rész öt önálló témája közül az első három átdarabolással foglalkozó

problémákat tartalmaz, s éppen ezért szükség volt a sokszögek (és poliéderek) átdarabolásával kapcsolatos alapismeretek előzetes összefoglalására, amiből számunkra legfontosabb a Bolyai-Gerwien-tétel és annak megfordítása, miszerint két sokszög akkor és csak akkor darabolható át egymásba, ha egyenlő a területük. A negyedik téma a háromszög szögfelezőinek hosszával, az ötödik pedig az Euler-egyenessel foglalkozik.

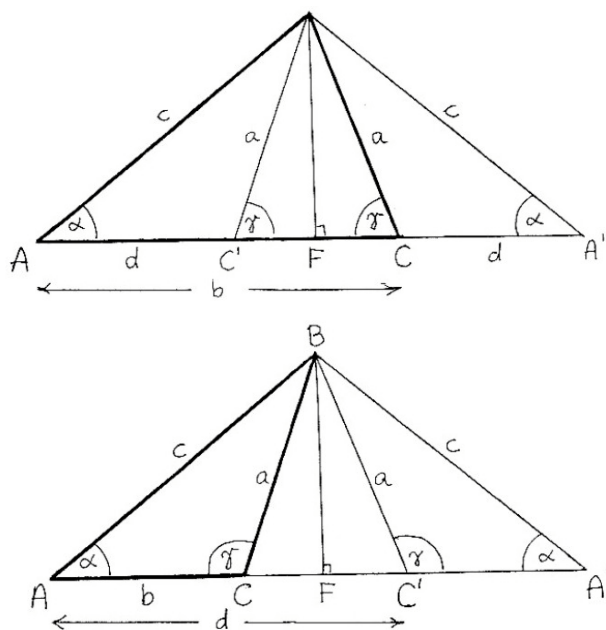
2.1. A pitagorasz-i tételecsoport

Ez a témakör három közismert tételt foglal magába: a Pitagorasz-tételt, a befogótételt és a magasságtételt. A Pitagorasz-tételre öt ismert átdarabolásos és egy szintén ismert kiegészítéses bizonyítást mutatunk be, amelyek a viszonylag egyszerű konstrukció miatt alkalmasak arra, hogy bevezetőként megismerjük az átdarabolások illetve kiegészítések révén történő bizonyítások folyamatát. A befogótétel átdarabolásos bizonyításának alapja a tekintett befogó fölé rajzolt négyzet felszeletelése, ami a nem kisebb befogó esetén három, a kisebb befogó esetén viszont legalább három részre vágáshoz vezet. Ez az utóbbi dolog nagyszámú részek esetén már kevésbé áttekinthető. Bemutatjuk még a befogótétel egy ismert kiegészítéses bizonyítását is, ami az átdarabolásosnál jóval egyszerűbben elvégezhető. A magasságtétel átdarabolásos bizonyítása csak a befogók speciális aránya esetében volt ismert. Értekezésünkben az általános esetre két átdarabolásos és három kiegészítéses bizonyítást adunk a teljesség igénye nélkül.

A Pitagorasz-tétel általánosításával foglalkozó fejezetben nem a jól ismert általánosítási módokat kívántuk felsorolni, hanem ehelyett két nem közismert elemi általánosítást tárgyalunk. E kettő közül tekintsük elsőként a Hoehn által leírtak az alábbi változatát:

Ha az ABC háromszög C csúcsának a B csúcsból megrajzolt magasságvonalra vonatkozó tükörképét C' -vel, az A és C' pontok távolságát d -vel jelöljük, akkor $\gamma \geq 90^\circ$ esetén $c^2 = a^2 + bd$.

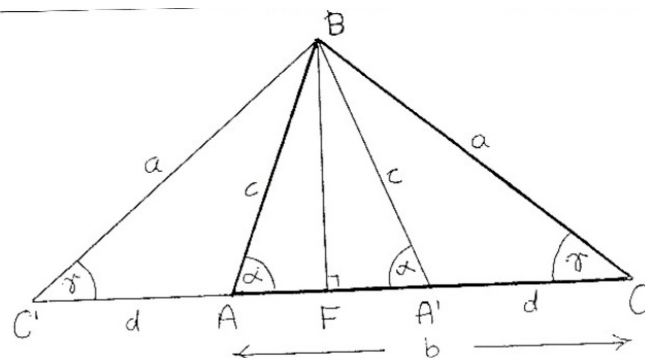
Hoehn ezt a Pitagorasz-tétel egy mellőzött általánosításának nevezi, és háromféleképpen bizonyítja: elsőként két koszinusz tétel, majd két Pitagorasz-tétel, s végül a Stewart-tétel segítségével. Itt először is megmutatjuk, hogy ez az általánosítás nem csupán $\gamma \geq 90^\circ$, hanem $\gamma \geq \alpha \Leftrightarrow c \geq a$ esetén is érvényes. Ugyanis $\gamma = \alpha \Leftrightarrow c = a$ esetén $C' = A$ miatt $d = 0$, s így a $c^2 = a^2 + bd$ formula nyilvánvalóan igaz. Ha viszont $\gamma > \alpha \Leftrightarrow c > a$, akkor $\gamma < 90^\circ$ esetén C' az $\overline{AC}$ szakasz belső pontja, s így $d = AC' = AC - CC'$ és $CC' = 2a \cos \gamma$ miatt a koszinusz tétel alapján $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b(b - 2a \cos \gamma) = a^2 + bd$ adódik (2.1.1a ábra). Ha pedig



2.1.1. ábra

$\gamma > \alpha \Leftrightarrow c > a$ esetén $\gamma > 90^\circ$, akkor C az $\overline{AC'}$ szakasz belső pontja, azaz $d = AC' = AC + CC'$ és $CC' = 2a \cos(180^\circ - \gamma) = -2a \cos \gamma$, s így a koszinusztétel alapján $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b[b + 2a \cos(180^\circ - \gamma)] = a^2 + bd$ kapható (2.1.1b ábra). De mi a helyzet $\gamma < \alpha \Leftrightarrow c < a$ esetén? Ekkor a B csúcsból megrajzolt magasságvonalra vonatkozó tükrözés után A elválasztja C és C' pontokat (2.1.2. ábra), és a keletkező ABC' háromszögre $a > c$ miatt

teljesül az $a^2 = c^2 + bd$ összefüggés, ahonnan $c^2 = a^2 - bd$ kapható.



2.1.2. ábra

A továbbiakban $\gamma > \alpha \Leftrightarrow c > a$ feltételt megtartva a $c^2 = a^2 + bd$ formulára egy olyan bizonyítást keresünk, amely függetlenné tehető a Pitagorasz-tételtől. Ehhez a Heron-képletből kiindulva meghatározzuk az ABC és ABA' háromszögek (2.1.1. ábra) területét, ahol A' az A tükörképe a $\overline{BF}$ magasságvonalra:

$$\begin{aligned}
t(ABC\Delta) &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} = \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c)+a][(b+c)-a][a-(b-c)][a+(b-c)]} = \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
t(ABA'\Delta) &= \sqrt{\frac{2c+b+d}{2} \cdot \frac{b+d}{2} \cdot \frac{b+d}{2} \cdot \frac{2c-b-d}{2}} = \frac{1}{4} (b+d) \sqrt{[2c+(b+d)][2c-(b+d)]} = \\
&= \frac{1}{4} (b+d) \sqrt{4c^2 - (b+d)^2}
\end{aligned}$$

Mínt hogy az ABC és ABA' háromszögekben közös a $\overline{BF}$ magasság, ezért

$$\left(\frac{b}{b+d} \right)^2 = \left(\frac{t(ABC\Delta)}{t(ABA'\Delta)} \right)^2 = \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{(b+d)^2 [4c^2 - (b+d)^2]}$$

, ahonnan

$$c^4 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2b^3d - b^2d^2 = 0,$$

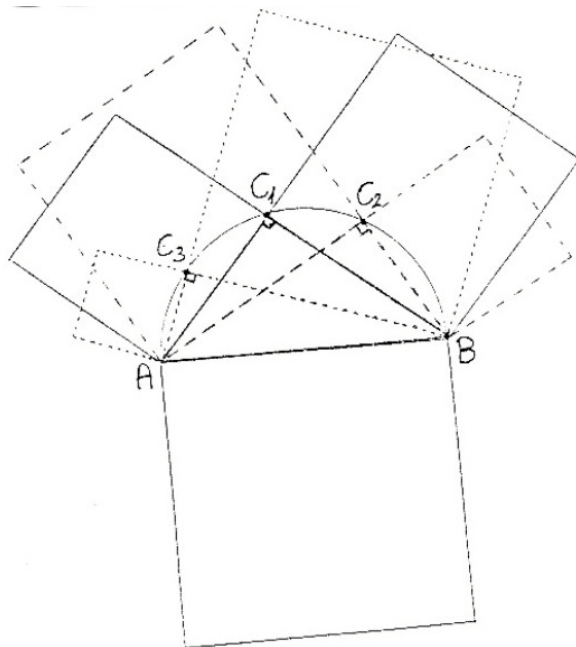
s ezt szorzattá alakítva

$(c^2 - a^2 - bd)(c^2 - a^2 + bd + 2b^2) = 0$, ahol $c > a$ miatt $c^2 - a^2 + bd + 2b^2 > 0$, s ennél fogva $c^2 - a^2 - bd = 0$, amiből a kívánt $c^2 = a^2 + bd$ formula kapható.

A $\gamma < \alpha \Leftrightarrow c < a$ esetre a fenti bizonyítás hasonló módon elvégezhető.

Ezáltal a $c^2 = a^2 \pm bd$ formula a Pitagorasz-tétel egy általánosításának tekinthető: ugyanis $\gamma = 90^\circ$ esetén $C' = C$ miatt $d = b$, s így $c^2 = a^2 + b^2$ adódik, azaz visszajutunk a Pitagorasz-tételhez. Ez az állítás Hoehn által csak részleges, értekezésünkben viszont így teljes leírást kap, sőt a kapott formula egy alkalmazásán túl még egy átdarabolásos bizonyítást is megadjuk.

A Pitagorasz-tétel másik nem közismert általánosítása Schmitz azon ötletére alapozható, hogy a Thalész- és Pitagorasz-tétel összekapcsolása esetén az $\overline{AB}$ átfogójú ABC_i ($i=0,1,2,\dots$) derékszögű háromszögek C_i csúcsai az $\overline{AB}$ átmérőjű körre illeszkednek és ugyanekkor teljesül az $AC_i^2 + BC_i^2 = AB^2$ összefüggés is. Mindez geometriailag azt jelenti, hogy az ABC_i derékszögű háromszögek $\overline{AC_i}$ és $\overline{BC_i}$ befogói fölé rajzolt négyzetek területeinek összege a C_i csúcs minden lehetséges helyzetére egyenlő az $\overline{AB}$ átfogó fölé rajzolt négyzet (2.1.3. ábra) területével, ami az A és B pontok rögzítése után egy állandó érték.



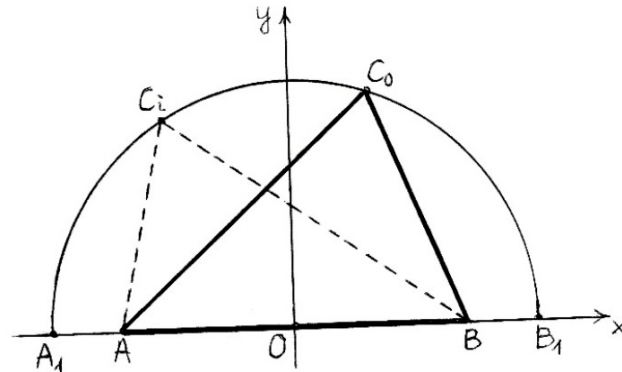
2.1.3. ábra

A fenti tényállásból kiindulva általánosítást keresünk a Pitagorasz-tételre. E célból válasszuk az ABC_i háromszöget úgy, hogy a C_i csúcsnál lévő szöge egyelőre ne legyen derékszög, és vizsgáljuk meg, hogy rögzített $\overline{AB}$ oldal és C_0 csúcs esetén a C_i csúcsok milyen alakzatot futnak be, ha azt kívánjuk, hogy az $\overline{AC_i}$ és $\overline{BC_i}$ oldalak fölé rajzolt négyzetek területeinek összege mindig $AC_0^2 + BC_0^2$ legyen, vagyis állandó maradjon. Ehhez a vizsgálathoz az ABC_0 háromszöget Descartes-féle derékszögű

koordináta- rendszerben helyezzük el úgy, hogy $c=AB$ jelöléssel az $A\left(-\frac{c}{2};0\right)$, $B\left(\frac{c}{2};0\right)$ és $C_0(x_0;y_0)$ megadási módot választjuk (2.1.4. ábra), a mozgó C_i pont koordinátáira pedig bevezetjük az $(x;y)$ jelölést. Ekkor az $AC_i^2 + BC_i^2 = AC_0^2 + BC_0^2$ feltétel

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x_0 + \frac{c}{2}\right)^2 + y_0^2 + \left(x_0 - \frac{c}{2}\right)^2 + y_0^2$$

alakba írható, ahonnan $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ kapható, és minthogy $C_0 \notin \overrightarrow{AB}$ miatt



2.1.4. ábra

$x_0^2 + y_0^2 > 0$, ezért a C_i pontok egy olyan körvonalon vannak, amelynek középpontja az $\overline{AB}$ oldal O felezőpontja és sugara az ABC_0 háromszög C_0

csúcsához tartozó s_c súlyvonala, amelynek hossza a koszinusztételnek az ABC_0 és AOC_0 háromszögekre történő alkalmazásával ismert módon kifejezhető az $a=BC_0$, $b=C_0A$, $c=AB$ adatokkal:

$$s_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}, \quad \text{ahonnan}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cos \gamma \quad \text{miatt} \quad s_c = \sqrt{\frac{c^2}{4} + ab \cos \gamma}$$

adódik, s ennél fogva $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ esetén $s_c > \frac{c}{2}$,

míg $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ esetén $s_c < \frac{c}{2}$. Ha ezek után

bevezetjük a $k(O, s_c) \cap \overleftrightarrow{AB} = \{A_1, B_1\}$ jelölést, akkor egyrészt k nyilván az $\overline{A_1 B_1}$ szakasz Thalész-köre, másrészt az O pontra vonatkozó szimmetria miatt az $\overline{AA_1}$ és $\overline{BB_1}$ szakaszok hossza egyenlő. Jelöljük d -vel ezt a közös hosszat, amire tehát esetünkben

$$d = \left| s_c - \frac{c}{2} \right| = \begin{cases} s_c - \frac{c}{2}, & \text{ha } 0^\circ < \gamma < 90^\circ \\ \frac{c}{2} - s_c, & \text{ha } 90^\circ < \gamma < 180^\circ \end{cases}$$

érvényes.

Tekintsük elsőként a $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ esetet, amikor is

$$d = s_c - \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}} - \frac{c}{2}, \quad (1)$$

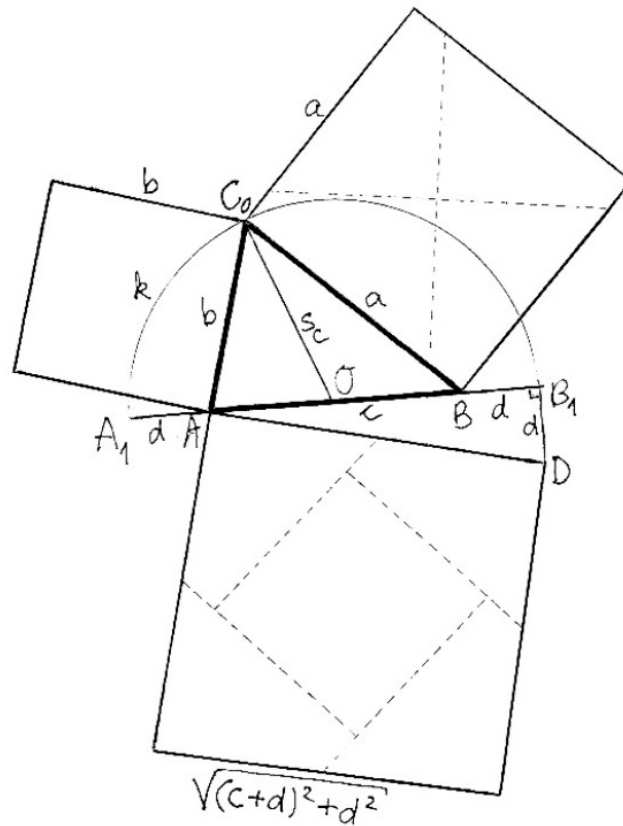
ahonnan

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}} = d + \frac{c}{2},$$

s ebből pedig

$$a^2 + b^2 = (c + d)^2 + d^2 \quad (2)$$

kapható. Ezen összefüggés szerint az ABC_0 háromszög $\overline{AC_0}$ és $\overline{BC_0}$ oldalai fölé rajzolt négyzetek területeinek összege egy olyan négyzet területével egyenlő, amelynek oldala $AD = \sqrt{(c + d)^2 + d^2}$ hosszúságú (2.1.5. ábra). S minthogy $C_i \in k(O, s_c) \setminus \{A_I, B_I\}$ esetén



2.1.5. ábra

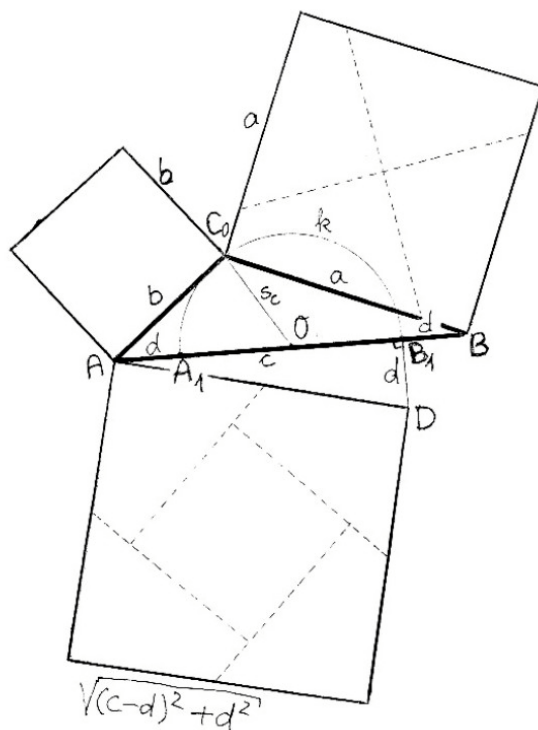
az ABC_i háromszögre
 $AC_i^2 + BC_i^2 = AC_0^2 + BC_0^2 = a^2 + b^2$ teljesül, ezért az
 $\overline{AC_i}$ és $\overline{BC_i}$ oldalak fölé rajzolt négyzetek
 területeinek összege is mindig az $\overline{AD}$ oldalú négyzet
 területével egyenlő, ami az A, B, C_0 pontok rögzítése
 után állandó. S ez a tény még az olyan megengedett

C_i pontokra is változatlanul igaz, amelyekre az α és β szögek valamelyike éppen derék- vagy tompaszög. Ezen lehetőségek egyike sem kizárt. Ha ugyanis C_i' jelöli a C_i csúcsnak az $\overrightarrow{AB}$ egyenesre vonatkozó merőleges vetületét, akkor az ABC_i háromszög $C_i' \in \{A, B\}$ esetén derékszögű, $C_i' \in (\text{int } \overline{AA_1}) \cup (\text{int } \overline{BB_1})$ esetén tompaszögű, továbbá $C_i' \in \text{int } \overline{AB}$ esetén hegyesszögű, de nem a C_i csúcsnál.

Másodjára maradt még a $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ eset, amikor $d = \frac{c}{2} - s_c$, s ekkor az előzővel analóg módon jutunk az

$$a^2 + b^2 = (c - d)^2 + d^2 \quad (3)$$

összefüggéshez, ami a (2)-vel hasonló geometriai tartalommal rendelkezik (2.1.6. ábra).



2.1.6. ábra

Mindezek alapján megállapítható, hogy $\gamma \neq 90^\circ$ esetén (2) és (3) alapján fennáll az

$$a^2 + b^2 = (c \pm d)^2 + d^2 \quad (4)$$

összefüggés, ami $\gamma = 90^\circ$ esetén $d = 0$ miatt a jól ismert Pitagorasz-tételre vezet, s ennél fogva (4) a Pitagorasz-tétel egy lehetséges általánosítása.

2.2. Derékszögű háromszög átdarabolása téglalappá

A derékszögű háromszög téglalappá történő átdarabolására értekezésünkben három olyan nem közismert módot mutatunk be, amikor a keresett téglalap egyik oldalát valamilyen speciális feltételhez kapcsolva adjuk meg. Az első változatban az ABC derékszögű háromszög $\overline{AB}$ átfogójának szerkesztendő olyan D belső pontja, amelyben az $\overline{AB}$ -re merőleges a $\overline{BC}$ egyenest egy E pontban metszi úgy, hogy $\overline{AD}$ és $\overline{DE}$ az ABC háromszöggel egyenlő területű keresett téglalap oldalai. A második változatban az ABC derékszögű háromszöget olyan téglalapba kívánjuk átdarabolni, amelynek egyik oldala a befogók számtani, mértani, harmonikus vagy négyzetes középértéke. A harmadik változatban pedig azt az ismert tényt használjuk fel, hogy ha P az ABC derékszögű háromszög beírt körének és az $\overline{AB}$ átfogónak az érintési pontja, akkor az $AP \cdot BP$ szorzat egyenlő az ABC háromszög területével. Itt csak a legutolsó változatra térünk ki.

Az $\overline{AB}$ átfogójú ABC derékszögű háromszögre a szokásos jelöléseket megtartva teljesüljön az $a \leq b < c$ feltétel, továbbá az O középpontú és r sugarú beírt kör érintse az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ oldalakat a P , Q , R pontokban. Válasszuk ki az átfogót és próbáljuk meg felosztani azt két olyan szakaszra, amelyek egy ugyanakkora területű téglalapnak az oldalai lesznek. Ha ezen szakaszok hosszát x és $y = c - x$ jelöli, akkor az

$xy = t(ABC\Delta)$ területi feltétel az $x^2 - cx + \frac{ab}{2} = 0$ másodfokú egyenletre vezet, amelynek gyökei

$$\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 2ab}}{2} = \frac{c \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}}{2} = \frac{c \pm \sqrt{(b-a)^2}}{2} = \frac{c \pm (b-a)}{2}$$

,

$$\text{vagyis } x = \frac{c+b-a}{2} = s-a \text{ és } y = \frac{c-b+a}{2} = s-b,$$

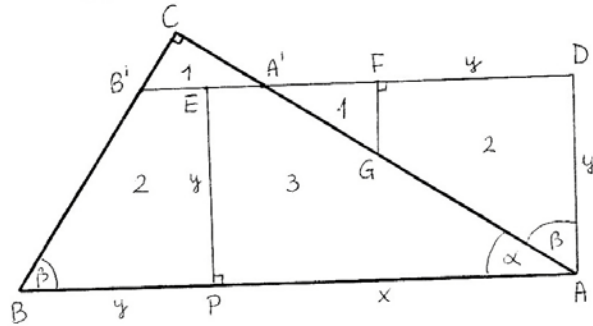
ahol s az ABC háromszög félkerülete. Ennek alapján azonnal észrevehető, hogy az a pont, amely az átfogót az x és y hosszúságú két szakaszra osztja, egyúttal a beírt kör és az átfogó érintési pontja. Elérkeztünk tehát a következő tételhez:

Ha P az ABC derékszögű háromszög beírt körének és az $\overline{AB}$ átfogónak az érintési pontja, akkor az $AP \cdot BP$ szorzat egyenlő az ABC háromszög területével.

Ez a tény a derékszögű háromszögnek egy különleges tulajdonsága, amelyre a következő direkt bizonyítás adható:

$$\begin{aligned} AP \cdot BP &= (s-a)(s-b) = \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} = \frac{[c-(a-b)]}{2} \cdot \frac{[c+(a-b)]}{2} = \\ &= \frac{c^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{(a^2 + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)}{4} = \frac{ab}{2} = t(ABC\Delta). \end{aligned}$$

Az értekezésben erre a tételre alapozva három átdarabolást tárgyalunk, amelyek közül itt csak az elsőt mutatjuk be két változatban. Az elsőhöz megszerkesztjük azt az $APED$ téglalapot, amelyre $AD = BP$, s ekkor $m)y$ miatt a $\overline{DE}$ egyenes az $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ befogókat az A' és B' pontokban metszi (2.2.1. ábra). Így az ABC háromszög felbomlik az $A'B'C'$ háromszögre, valamint az $APEA'$ és $BPEB'$ trapézokra. Az $ABC \rightarrow APED$ átdarabolást megkönnyíti, hogy az $APEA'$ trapéz már részét képezi az $APED$ téglalapnak, továbbá a $BPEB'$ trapéz átrakható az $ADFG$ trapézba, ahol F a $\overline{DE}$ szakasz olyan pontja, amelyre $DF = y$, G pedig az $\overline{AC}$ befogó olyan pontja, amelyre $AG = BB'$. Ekkor



2.2.1. ábra

$$B'C = BC - BB' = a - \frac{y}{\sin \beta} = a - \frac{(s-b)c}{b} = \frac{s-b}{b} \left(\frac{2ab}{a-b+c} - c \right) = \frac{(s-b)(b-a)}{a}$$

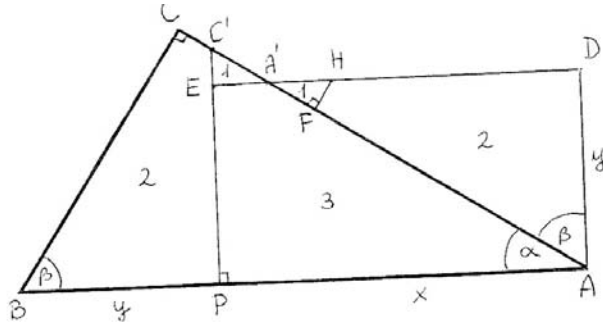
és

$$FG = AD - AG \cdot \cos \beta = (s-b) - \frac{(s-b)a}{b} = \frac{(s-b)(b-a)}{b}$$

miatt az ASA szerint $A'B'C\Delta \cong A'GF\Delta$, s így az átdarabolás három részre bontással elvégezhető:

$$ABC \rightarrow A'B'C + BPEB' + APEA' \rightarrow A'GF + ADFG + APEA' \rightarrow APED$$

A második változat analóg módon tárgyalható (2.2.2. ábra).



2.2.2. ábra

Mindkét változat bármely $\alpha \in (0^\circ, 45^\circ]$ esetén kivitelezhető átdarabolást ad, jóllehet az $\alpha = 45^\circ$ esetben az 1 jelű háromszögek eltűnnek, továbbá a 2 és 3 jelű trapézokból egybevágó háromszögek lesznek, s ezáltal az egyenlőszárú derékszögű háromszögre közismert alakzatot kapjuk.

Végezetül tételezzük fel, hogy a fenti átdarabolások alapját adó tételben leírt tulajdonság érvényes lenne egy tetszőleges ABC háromszögre,

amelynek legnagyobb oldala $\overline{AB}$ és az azzal szemközi szöge γ . Ha az $\overline{AB}$ oldal valamely P belső pontja az $\overline{AB}$ egyenes és az ABC háromszög beírt körének az érintési pontja, azaz $AP = s - a$ és $BP = s - b$ úgy, hogy az $AP \cdot BP = t(ABC\Delta)$ területi feltétel teljesül, akkor

$$\begin{aligned} AP \cdot BP &= (s - a)(s - b) = \frac{1}{4}[c + (b - a)] \cdot [c - (b - a)] = \frac{1}{4}[c^2 - (b - a)^2] = \\ &= \frac{1}{4}[(a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma) - (b^2 - 2ab + a^2)] = \frac{ab(1 - \cos \gamma)}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{ahonnan } t(ABC\Delta) = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2} \text{ miatt } \sin \gamma + \cos \gamma = 1,$$

és ennél fogva $\gamma = 90^\circ$, mivel $0^\circ < \gamma < 180^\circ$. Így tehát az ABC háromszög derékszögű, és kimondható a következő tétel:

Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha valamelyik oldalát a beírt kör érintési pontja úgy osztja két szakaszra, hogy azok hosszainak szorzata egyenlő a háromszög területével.

Ez a derékszögű háromszög egyik különleges tulajdonsága, ami több más módon is igazolható. Közülük itt bemutatunk egyet, amely a Heron képletre alapul, s ahol x, y, z jelöli az A, B, C pontokból húzható érintőszakaszok hosszát, valamint T az ABC háromszög területét:

$$T = xy = \frac{(x+y+z)xyz}{(x+y+z)z} = \frac{T^2}{\frac{T \cdot z}{r}} = T \cdot \frac{r}{z},$$

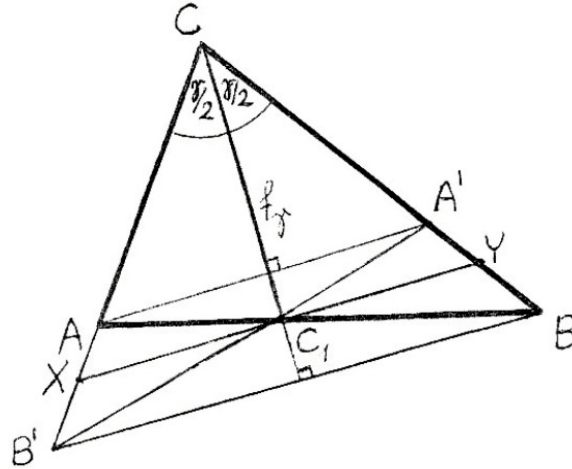
ahonnan $z = r$, s emiatt $\gamma = 90^\circ$.

Megjegyezzük még, hogy a befogókra is próbálkozhatunk hasonló jellegű felosztással, ami azonban a rövidebb befogóra egyáltalán nem, és a hosszabbik befogóra is csak $b \geq 2a$ esetén jár sikerrel.

2.3. A háromszög szögfelezőinek hossza

A háromszög belső szögfelezői hosszának az oldalakkal történő meghatározása utolsó feladata volt a 2001. május 21-én délutánra kitűzött közös írásbeli érettségi-felvételi feladatsornak. Ebben a feladatban egy ismert, de a tanulók számára ismeretlennek feltételezhető összefüggés bizonyítását kellett megadni, ami csak a középiskolai matematika anyag alapján is többféleképpen elvégezhető.

Az értekezésben tárgyalt sokféle bizonyítás közül itt csak egyre térünk ki. Ehhez azt az ismert tényt használjuk fel, hogy a trapéz átlóinak metszéspontján át az alapokkal párhuzamosan húzott szakasz az alapok harmonikus középértéke. Az ABC háromszögre az $AC < BC$ feltételt megtartva jelölje A' az A és B' a B pontnak az ACB szögfelezőjére vonatkozó tükörképét (2.3.1. ábra). Minthogy a tükörtengely merőlegesen felezi az $\overline{AA'}$ és $\overline{BB'}$ szakaszokat, így az $AA'BB'$ négyszög egy olyan szimmetrikus trapéz,



2.3.1. ábra

melynek az $\overline{AB}$ és $\overline{A'B'}$ átlói a tekintett szögfelező C_1 végpontjában metszik egymást. Ha ezen a ponton át párhuzamost húzunk az alapokkal, akkor e párhuzamosból a szárak által közrefogott $\overline{XY}$ szakasz az $\overline{AA'}$ és $\overline{BB'}$ alapok harmonikus közepe, azaz $XY = \frac{2 AA' \cdot BB'}{AA' + BB'}$, ahonnan $AA' = 2b \sin \frac{\gamma}{2}$ és $BB' = 2a \sin \frac{\gamma}{2}$ helyettesítéssel $XY = \frac{4ab}{a+b} \sin \frac{\gamma}{2}$. S minthogy a konstrukció miatt fennáll az $AA'C\Delta \sim BB'C\Delta \sim XYC\Delta$ hasonlóság, ezért az XYC egyenlőszárú háromszög CX oldala is harmonikus közepe az $AC = b$ és $B'C = BC = a$ megfelelő

oldalakkal, vagyis $CX = \frac{2ab}{a+b}$ teljesül. Mindezek alapján a CXC_1 derékszögű háromszögből

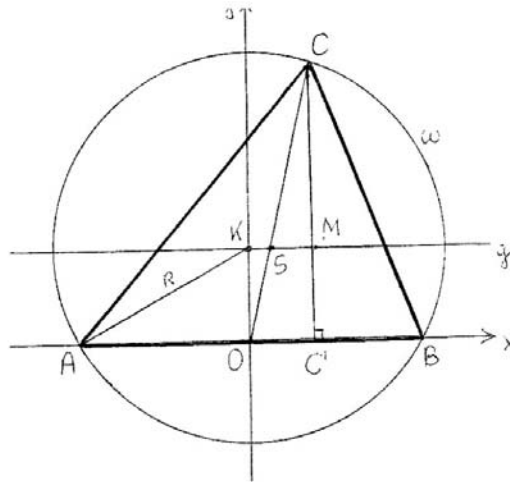
$$f_\gamma = CC_1 = CX \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

Értekezésünkben az írásbeli dolgozat javítási útmutatójában közölt három megoldást is beleszámítva húsznál is több különböző bizonyítási módot mutatunk be azzal a kettős céllal, hogy egyrészt minél jobban átfogjuk a felhasználható tételeket, másrészt ezt a témát minél több területen megjeleníthetővé tegyük. Ezt a célt szem előtt tartva bizonyítjuk a Steiner-Lehmus-tételt, megvizsgáljuk a háromszög szögfelezőin a beírt kör középpontja által létrehozott szakaszok egybevágóságának az eseteit, továbbá megmutatjuk, hogy a három szögfelező ismeretében nem szerkeszthető háromszög.

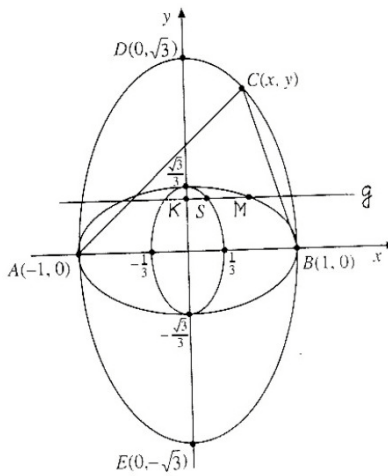
2.4. Euler egyenes

Az Euler-egyenestől ismert, hogy a háromszög egyik oldalával pontosan akkor párhuzamos, ha az ezen az oldalon lévő belső szögek tangenseinek szorzata hárommal egyenlő. Ehhez kapcsolódva Diemente és Klamkin is megmutatta, hogy az Euler-egyenest egy rögzített oldallal való párhuzamosságát feltételezve a háromszög harmadik csúcsa egy olyan ellipsziszre illeszkedik, melynek kistengelye az adott oldal. Az alábbiakban ugyanerre a problémára bemutatunk egy szintén analitikus, de tárgyalásmódjában mégis eltérő leírást. Ehhez

válasszuk x -tengelynek a rögzített $\overline{AB}$ szakasz egyenesét, y -tengelynek az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegesét, s ezáltal az O origónak az $\overline{AB}$ felezőpontját. Legyen $A(-1,0)$, $B(1,0)$ és keressük azon $C(x,y)$ pontok halmazát, amelyekre az ABC háromszög g Euler-egyenesé párhuzamos az $\overline{AB}$ oldallal. Minthogy a $g \parallel \overline{AB}$ helyzethez az ABC háromszög csak hegyesszögű és nem-egyenlőszárú lehet, ezért az M , S és K pontok különbözök, s így az Euler-egyenes egyértelműen megadható például az $S\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$ és $K\left(0, \frac{y}{3}\right)$ pontokkal (2.4.1. ábra), miközben S és K helyzete, valamint az $\omega(K, R)$ körülírt kör sugara a mozgó C pont elhelyezkedésétől függően változik. Ekkor bármely lehetséges C pontra az ABC háromszög $\omega(K, R)$ körülírt körének egyenlete $x^2 + \left(y - \frac{y}{3}\right)^2 = R^2$, ahonnan az $R^2 = 1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2$ összefüggést felhasználva $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$, vagyis C egy origó középpontú olyan ellipszisre illeszkedik, amelynek féltengelyei 1 és $\sqrt{3}$ hosszúak, kivéve az A, B, D és E tengelypontokat (2.4.2. ábra).



2.4.1. ábra



2.4.2. ábra

Ezen probléma általánosításaként az értekezésben analitikus geometriai eszközökkel vizsgáljuk azt az esetet, amikor az Euler-egyenes egy rögzített oldallal valamilyen 0° és 90° közötti adott szöget zár be, s azt a választ kapjuk, hogy a harmadik csúcs mindig egy másodrendű görbére illeszkedik, ami a szög nagyságától függően ellipszis, párhuzamos egyenespár vagy hiperbola.

3. Körgeometria

A körgeometriai részben három egymáshoz szorosan kapcsolódó témát dolgozunk fel: a pont körre vonatkozó hatványát, továbbá a pont inverzének és két kör hatványvonalának a szerkesztését.

3.1. Pont körre vonatkozó hatványa

A pont körre vonatkozó hatványának bevezetése a legtöbb geometria könyvben hasonló háromszögekre alapul, amiből az előkészítő tételre eleve egyetlen bizonyítási lehetőség adódik. Éppen ezért választunk más utat az értekezésünkben, ahol a tekintett fogalmat a következő vektoralgebrai megfogalmazású tétel készíti elő:

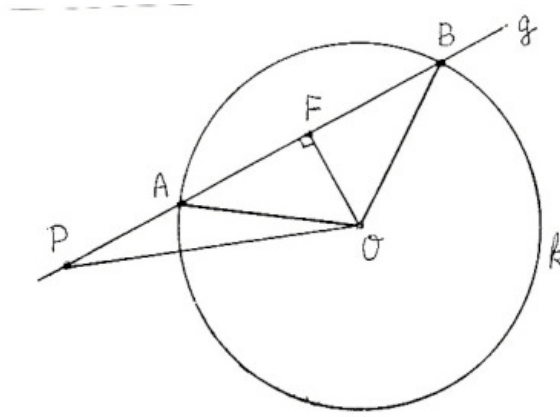
Az O középpontú r sugarú k kör síkjának legyen P egy tetszőleges pontja és g egy P -re illeszkedő olyan egyenes, amelyre $g \cap k = \{A, B\}$. Igazolandó, hogy a $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ szorzat értéke a g szelő helyzetétől függetlenül $OP^2 - r^2$.

A bizonyításhoz (3.1.1. ábra) a $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorokat kéttagú összegekre bontjuk úgy, hogy egy nevezetes azonosság alkalmazható legyen:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FA}) \cdot (\overrightarrow{PF} - \overrightarrow{FA}) = \overrightarrow{PF}^2 - \overrightarrow{FA}^2,$$

majd az OPF és OAF derékszögű háromszögekre egy-egy Pitagorasz-tételt alkalmazva

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (OP^2 - OF^2) - (OA^2 - OF^2) = OP^2 - r^2.$$

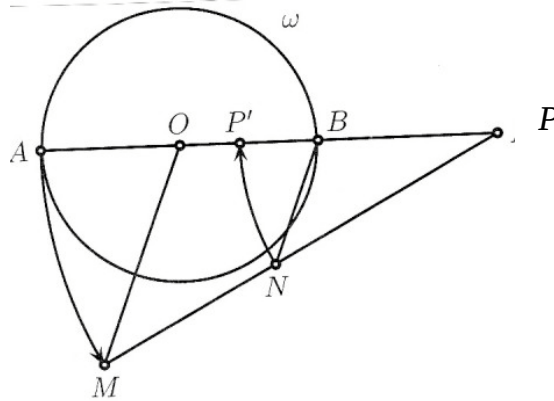


3.1.1. ábra

Erre a tételre az értekezésben még további négy bizonyítást ismertetünk.

3.2. Pont inverze

A pont inverzének megszerkesztése megint egy olyan probléma, amire szintén többféle megoldás adható: értekezésünkben tizennégy módot



3.1.2. ábra

ismertetünk. Ezek közül az első négy közismert, viszont a többi, amelyekhez mélyebb ismeretek szükségesek, csak alig vagy egyáltalán nem ismertek. Itt e gazdag választékból kettőt mutatunk be.

1. mód (3.1.2. ábra):

Ha $\overrightarrow{OP} \cap \omega = \{A, B\}$, akkor $P \leftrightarrow P'$ miatt a P pont ω körre vonatkozó hatványára $PA \cdot PB = OP^2 - a^2 = OP^2 - OP \cdot OP' = OP(OP - OP') = OP \cdot PP'$, amiből a $\overline{PP'}$ szakasz megszerkeszthető.

Az A és B pontok előállítását követően $\overline{PP'}$ szakasz a $PO : PA = PB : PP'$ arány alapján szerkeszthető. Ehhez P kezdőponttal felvesszünk egy (az $\overline{AB}$ egyenes

által nem tartalmazott) félegyenest, ezen $PM = PA$ feltétellel szerkesztünk egy M pontot, azt O -val összekötjük, majd a B -n át $\overline{OM}$ -mel párhuzamos metszi $\overline{PM}$ félegyenest egy N pontban, amit P körül leforgatunk az $\overline{AB}$ egyenesre: az így kapott pont P' . Hogy ez a P' pont az $\overline{OB}$ szakasz belsejében van, ahhoz igazolni kell a $PB \angle PP' \angle PO$ egyenlőtlenséget,

ami $PP' = \frac{PA \cdot PB}{PO}$ miatt egyenértékű a

$PO \cdot PB \angle PA \cdot PB \angle PO^2$ egyenlőtlenséggel. Ennek bal oldala $PO \angle PA$, míg jobb oldala

$PA \cdot PB = (PO + a)(PO - a) = PO^2 - a^2 \angle PO^2$ miatt

teljesül. Az $OP \cdot OP' = a^2$ összefüggés pedig

$PA \cdot PB = OP^2 - a^2$ miatt, ugyanis

$OP \cdot OP' = OP(OP - PP') = OP^2 - PA \cdot PB = OP^2 - (OP^2 - a^2) = a^2$.

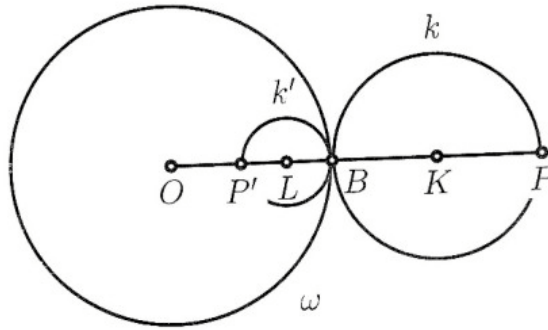
2. mód (3.1.3. ábra):

Legyen $\overrightarrow{OP} \cap \omega = B$ és k a $\overline{BP}$ szakasz fölé rajzolt Thalész-kör, ami nem halad át az O centrumon.

Ekkor $P \leftrightarrow P'$ és $B' = B$ miatt k kör képe a $\overline{BP'}$ szakasz fölé rajzolt k' Thalész-kör, miközben a k és k' köröknek O a külső és B a belső hasonlósági

pontja. Ezen hasonlóságból $\frac{OP}{OB} = \frac{BP}{BP'}$, ahonnan a

$\overline{BP'}$ szakasz megszerkeszthető, s ezáltal P' is.



3.1.3. ábra

A $\overline{BP'}$ szakasz a fenti arány alapján megszerkesztve $BP < OP$ miatt az $\overline{OB}$ szakasznál rövidebb, s így P' az $\overline{OB}$ sugár belső pontja.

3.3. Két kör hatványvonala

Minthogy két nem koncentrikus kör hatványvonala olyan egyenes, amely merőleges a két kör középpontjait összekötő egyenesre, ezért a két kör felvételét követően elegendő a keresett hatványvonal egy pontját ismerni. Közös ponttal rendelkező két kör esetén a közös pont nyilvánvalóan megfelelő, így erre az esetre itt nem térünk ki, de még a két egybevágó kör esetére sem, mivel ekkor a centrális szakasz felezőpontja rajta van a keresett hatványvonalon. A fennmaradó általános esetben, amikor a két diszjunkt kör nem koncentrikus és nem egybevágó, a két kör hatványvonalának megszerkesztésére az értekezésben tizenegy különböző módot ismertetünk, amihez a hatványvonal pontjainak a hatványvonal

értelmezéséből következő tulajdonságain túl felhasználjuk az inverzió mélyebb tételei alapján adódó lehetőségeket, sőt az egyik módnak még egy általánosítását is tárgyaljuk. Itt egyelőre be kell értnünk az alábbi két szerkesztési móddal.

1. mód (3.3.1. ábra):

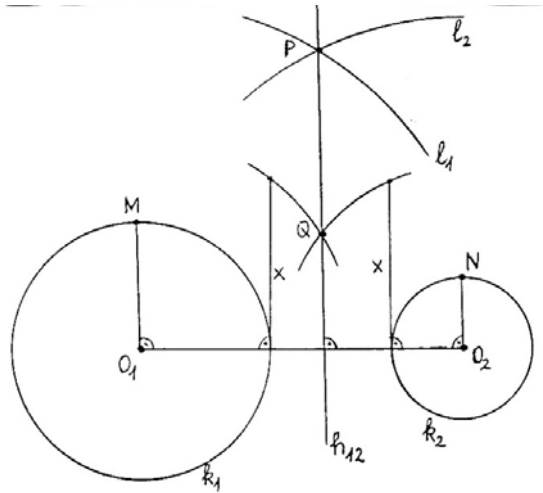
Legyenek $M \in k_1$ és $N \in k_2$ olyan pontok, amelyekre $\overrightarrow{O_1M} \perp \overrightarrow{O_1O_2}$ és $\overrightarrow{O_2N} \perp \overrightarrow{O_1O_2}$ teljesül, továbbá legyen P az $l_1(O_1, O_2M)$ és $l_2(O_2, O_1N)$ körök valamelyik metszéspontja. Ekkor P -nek a k_1 és k_2 körökre vonatkozó hatványa

$$h_1(P) = O_2M^2 - r_1^2 = O_1O_2^2 \text{ és}$$

$$h_2(P) = O_1N^2 - r_2^2 = O_1O_2^2,$$

azaz $h_1(P) = h_2(P)$ miatt P rajta van a h_{12} hatványvonalon, ami egyúttal az l_1 és l_2 körök közös szelő egyenese.

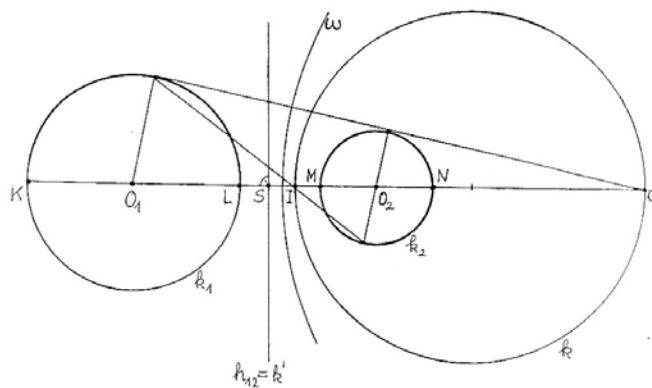
Megjegyezhető, hogy $O_2M > r_1$ és $O_1N > r_2$ miatt P kívül van az adott k_1 és k_2 körökön, s ezért P -ből a körökhöz húzható érintőszakaszok hossza O_1O_2 -vel egyenlő. Ezen érintőszakaszok hossza másként is megválasztható: valamely $x > 0$ valós szám pontosan akkor megengedett, ha $\sqrt{r_1^2 + x^2} + \sqrt{r_2^2 + x^2} \geq O_1O_2$ teljesül.



3.3.1. ábra

2. mód (3.3.2. ábra)

Jelölje I és O a k_1 és k_2 körök belső és külső hasonlósági pontját, továbbá legyen $\overrightarrow{O_1O_2} \cap (k_1 \cup k_2) = \{K, L, M, N\}$, ahol a $K - L - M - N$ elrendezés teljesül. Válasszuk az O centrumú $a^2 = OL \cdot OM$ hatványú inverziót, amelynek alapköre az $\omega(O, a)$ kör. Ekkor az $\overline{OI}$ átmérőjű k kör k' inverze azonos a k_1 és k_2 körök h_{12} hatványvonalával.



3.3.2. ábra

Az $\omega(O, a)$ kör könnyebben megszerkeszthető, ha felhasználjuk, hogy ω merőleges az $\overline{LM}$ és $\overline{KN}$ átmérőjű körökre.

4. Módszertani elemzés

A módszertani elemzés alapjául a 2001. május 21-én délutánra kitűzött érettségi-felvételi feladatsor utolsó feladata szolgált, ami a háromszög egyik belső szögfelezője hosszának az oldalakkal történő meghatározását írta elő bizonyításos formában, s így ez az értekezés egyik előző fejezetéhez szorosan kapcsolódik.

Feladat: Egy háromszög oldalainak hossza a , b , c . Mutassa meg, hogy az a és b oldalak által közbezárt

szögfelező hossza: $\frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}$.

Ez a feladat két okból is a nevezett feladatsor legnehezebb feladatának tartható: egyrészt nem egyszerűen számításos, hanem direkt bizonyításos jellegű, jóllehet némi könnyítést jelenthetett a bizonyítandó formula megadása, másrészt a háromszög szögfelezőjének hossza a középiskolai matematika anyagában eléggé mellőzött téma, bár éppen ezért a bizonyítás elvégzése nem válhatott reprodukív folyamattá.

A fenti feladathoz kapcsolódva módszertani felmérést végeztem a Debreceni Egyetem Közgazdaságtudományi Karára jelentkezők hozzáférhető felvételi dolgozatai alapján. A felméréshez a problémamegértés, problémamegoldás és az ismeretek alkalmazása szintjeinek mérése céljából a következő itemsort állítottam össze:

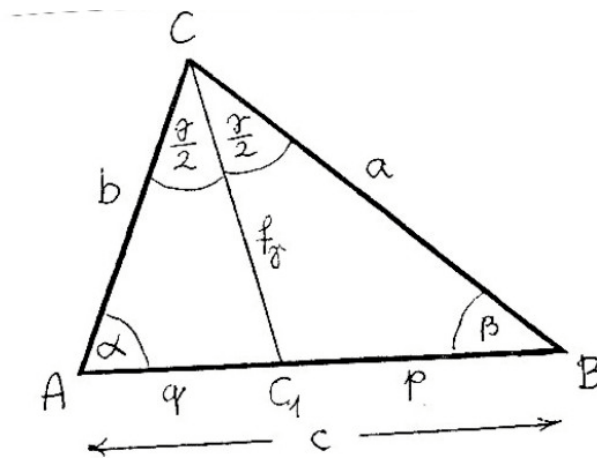
1. Hozzákezd a feladathoz.
2. Van értékelhető a munkájában.
3. Készít ábrát.
4. Helyes ábrát készít.
5. Jelöléseket jól alkalmazza.
6. Az alapábrát kiegészíti.
7. Az adott kiegészítés felhasználható valamely megoldáshoz.
8. Az ábra általános háromszögre utal.
9. Ismeri a szögfelező fogalmát.
10. Ismeri a szögfelezőre vonatkozó arányossági tételt.
11. Minden más felhasznált fogalom vagy tétel ismerete helyes.
12. Minden más felhasznált tétel alkalmazása helyes.
13. A bizonyítás lépéseit indokolja.

14. Teljesen és hibátlanul megoldotta a feladatot.
15. Az adott megoldás általános.
16. A bizonyítandóból indul ki, de nem jut megoldásra.

Ezen itemsor konkrét működésére egy példaként tekintsük a központilag kiadott alábbi első megoldási változatot.

Megoldás:

Legyen a C -nél lévő szög γ , a szögfelező $\overline{AB}$ -vel közös pontja C_1 és a $\overline{CC_1}$ szakasz hossza f_γ .



Az ACC_1 háromszög területe $\frac{bf_\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, a BCC_1

háromszöge $\frac{af_\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Ezek összege az ABC háromszög területével egyenlő

$$\frac{bf_\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{af_\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{ab}{2}\sin\gamma.$$

Mivel $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, ezért $\sin\frac{\gamma}{2}$ -vel osztva

mindkét oldalt ($\sin\frac{\gamma}{2} \neq 0$):

$$(a+b)f_\gamma = 2ab \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Ebből $ab \neq 0$ miatt

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{a+b}{2ab} f_\gamma.$$

Írjuk fel az ABC háromszögre a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma,$$

amelyből

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Helyettesítsük ezt és a $\cos \frac{\gamma}{2}$ -re kapott kifejezést a

$$2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 1 + \cos \gamma \text{ egyenlőségbe:}$$

$$2 \left(\frac{a+b}{2ab} f_{\gamma} \right)^2 = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ebből

$$\frac{(a+b)^2}{ab} f_{\gamma}^2 = 2ab + a^2 + b^2 - c^2,$$

azaz

$$f_{\gamma}^2 = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}.$$

Mivel f_{γ} pozitív, ezért

$$f_{\gamma} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

E megoldásból az alábbi konkrét itemsor adódik:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0

A feladat megoldása után kövessük végig a megoldás fejlődésének menetét, azaz a megoldás felfedezése során kialakuló gondolatok láncolatát. Felfedezni a megoldást annyit jelent, mint megtalálni az összefüggést a rendelkezésre álló adatok és az ismeretlen között. A megoldó a feladat első felvázolásakor még nagyon egyszerű képet alkot, osztatlan és összetett egészként látja a háromszöget és a kijelölt belső szög felezőjét, szinte minden további részlet nélkül, s csak annyit tud, hogy mi az ismeretlen valamint mik az adatok és a feltételek. A megoldó figyelmét kezdetben hol az egyik, hol a másik részlet vonja magára, de egy idő után ez a figyelem szelektálni kezd, vagyis nem törődik tovább a probléma szempontjából lényegtelen dolgokkal, viszont megragadja mindazt, aminek jelentősége van vagy lehet. A megoldó igen fontos tennivalója, hogy figyelmét az elérendő célra összpontosítsa, azt a megoldás közben soha ne veszítse szem elől, vagyis állandóan figyelje a végét. Erre a végcélra irányuló vágy az, ami megváltoztatja a megoldó egész gondolkodását, ezáltal a problémát sajátjának érzi, s a megoldás akarása a probléma lényeges részévé válik.

A problémamegoldó értelmi működése összetett, s amint előrejut, egyre több és több anyagot gyűjt össze. Elsőként azt nézi meg, hogy mivel rendelkezik: mi az ismeretlen és mik az adatok. Jelenlegi feladata éppen az, hogy kitöltse a közöttük meglévő űrt, vagyis bebizonyítsa a megadott összefüggést. Ehhez alaposan

szemügyre veszi az ismeretlent: ez egy szakasz hossza, aminek meghatározására több ötlet is kínálkozhat. Talán ki kellene egészíteni úgy az ábrát, hogy ez a szakasz egy derékszögű háromszög valamelyik oldala legyen. Ilyen kiegészítés viszonylag egyszerűen adódik a felezett szög csúcsából kiinduló magasság berajzolása révén, ámde ezáltal két másik ismeretlen szakasz is belép. S mivel az újabb ismeretleneknek az adatokkal történő közvetlen meghatározása túl hosszadalmasnak látszik, így ez az irány mégsem a legcélszerűbb. A megoldó éppen ezért nem indul el ezen az úton, hanem másikkal próbálkozik. Egy ismeretlen szakasz meghatározásának további szokásos módja, hogy e szakaszt valamely oldalként tartalmazó hasonló háromszögeket keresünk, de általános háromszöget tekintve az alapábrán nem fedezhető fel két hasonló háromszög. Talán alkalmas kiegészítéssel adódna erre lehetőség, ám ha a megoldó nem akarja kiegészíteni az ábrát, akkor vissza kell térnie az ismeretlen szakasz értelmezéséhez vagy annak valamely ismert tulajdonságához. Értelmezés szerint a szögfelező a felezett szöget két egyenlő részre osztja, s bár ezáltal első pillanatra megint két ismeretlen van: egy szög és a fele, de a megoldó mégis azt reméli, hogy ebben az irányban haladva közelebb juthat a célhoz. Most már csak a döntő gondolatra van szüksége, ami általában nem kívánságra jön, hanem többnyire spontán ötlik fel, és megváltoztathatja a megoldónak a feladatról való elképzelését. A megoldó tehát még egyszer megnézi az ismeretlent, s rádöbben arra, hogy ez a szögfelező szakasz az eredeti háromszöget két

diszjunkt háromszögre vágja szét. Így az ismeretlen szakasz új jelentést kap: közös oldala lesz két olyan háromszögnek, melynek területe célszerűen kifejezhető két oldal és a közrefogott szög segítségével. A terület additivitása miatt pedig ezen két részháromszög területeinek összege egyenlő az eredeti háromszög területével, amit most szintén a két oldal és a közrefogott szög segítségével érdemes kifejezni. Ezáltal a megoldó összefüggést talált az ismeretlen és bizonyos adatok közt, bár ez még egyáltalán nem a végcél, mivel tartalmaz nem kívánt segédismerlent, és ugyanakkor nincs benne mindegyik adat. Mégis ez lehet a döntő gondolat, aminek felötlése után a megoldó egyre több kapcsolatot lát meg. Innentől kezdve az előrehaladás üteme felgyorsul, sőt már a megoldás közelsége is élenken érezhető. A megoldó észreveszi a kétszeres szögek szinuszára vonatkozó azonosság alkalmazási lehetőségét, a koszinusz-tétel révén bevonja a megoldásba az eddig kimaradt harmadik oldalt, majd a félszögek koszinuszára vonatkozó azonosságot alkalmazva olyan összefüggéshez jut, amelyben már csak az ismeretlen és az adatok szerepelnek, s ebből az ismeretlen kifejezésével célba is ér: a bizonyítás kész.

Mint minden bizonyítás, ez is érvek és következtetések viszonylag nem túl hosszú lánc, de ha csak egyetlen láncszem is hiányozna, akkor megszakadna az érvek láncolata, s a bizonyítás nem állná ki a próbát. Az a tény pedig, hogy a megoldó az ismeretlen értelmezését használta fel és az alapábrát nem egészítette ki, azért volt szerencsésnek tartható, mert társult e folyamathoz egy döntő ötlet, aminek

révén a cél elérhetővé vált. Egy másik megoldás kezdetén megtehető, hogy az ismeretlenek továbbra is az értelmezését használjuk fel, vagy pedig valamilyen lényeges tulajdonságát. Mindkét eset tovább kombinálható egy-egy alkalmas kiegészítéssel, ami többnyire újabb szakasz és csak nagyon ritkán körív. A megoldáshoz elvezető logikai összefüggések rendszere, s ezáltal a döntő gondolat is lényegesen eltérő lehet. Az így előálló különböző megoldások közül az tekinthető egyszerűbbnek, amihez kevesebb háttérismeretre van szükségünk, jóllehet mélyebb matematikai tételek birtokában rövidebb és elegánsabb megoldás is adható.

Az erre vonatkozó felmérésben vizsgáltam az adott probléma megértésének, megoldásának és az ehhez felhasználható, de csak a középiskolában tanult matematikai ismeretek alkalmazásának a szintjeit. A felméréshez szükséges adatbázist a Debreceni Egyetem Közgazdaságtudományi Karára jelentkezők hozzáférhető dolgozatai alapján állítottam össze. Ezen felméréshez kapcsolódva kitérek még a vizsgált feladat valamely megoldásához felhasználható tételekre, továbbá annak bemutatására, hogy ezek közül melyeket alkalmazták a jelentkezők. Mindezek alapján arra a megállapításra juthatunk, hogy a felvételizők többsége számára nagyobb problémát jelent valamely tétel alkalmazhatóságának a felismerése, mint az alkalmazás tényleges kivitelezése, s ez egyértelműen az összetett gondolkodási műveletek hiányosságára utal.

Végezetül az elemzés egy az egész értekezést átfogó kitekintéssel zárul, amelyben arra a nem

könnyű kérdésre keressük a választ, hogy egyáltalán miért is van szükség bizonyításra és többféle megoldásra.

Teaching Ideas of Certain Themes in Elementary Geometry

Introduction

The main purpose of the present dissertation is to describe how to train students' mathematical thinking so that they want to search after more solutions of the same problem. Students have to realize that the work doesn't really end after they had found the first solution, but they have to look for simplified ones with less theoretical background, while they carry out certain thinking operations, and can attain additional knowledges.

We also have to get students not to accept their first conjecture without making a thorough examination of its universal validity, that is, they must understand the importance of proving their statements. Thus, the search either for more solutions or for new proofs enables students to become a person being not passively but creatively receptive. And this is one of the most important tasks of teaching mathematics.

According to the above aims, I have selected some problems from the following themes in elementary Euclidean geometry of triangles and circles.

Geometry of triangles

The Pythagorean theorem group

The present purpose isn't to treat the whole literature connected with this theorem-group, but to describe some dissection proofs that offer excellent

possibilities to discover any of these theorems in a very early playful form. The mathematical background is the converse of the fundamental theorem of polygonal dissections, that is, the Bolyai-Gerwien theorem, inclusive of the congruency proofs given in an exact manner. As to the Pythagorean theorem, I detail five known dissection proofs, as well as two neglected elementary generalizations that aren't common or usual in the mathematical literature. The first generalization is of the form $c^2 = a^2 \pm bd$ where a, b, c are the lengths of sides of an oblique triangle ABC and d is the distance between A and the image of C by the symmetry about the line of the altitude to side $\overline{AC}$. The second one is given by the formula $a^2 + b^2 = (c \pm d)^2 + d^2$ where d denotes something unlike before, namely the absolute value of the difference $m_c - \frac{c}{2}$.

For the theorem on the mean property of the altitude to the hypotenuse, as well as for the theorem on the two legs, we demonstrate some general dissection proofs containing also certain new ideas.

On dissections of a right triangle into a rectangle

After presenting the well-known dissections of a triangle into a rectangle of the same area, we detail a special dissection possibility based on the following theorem:

If P is the point of tangency of the inscribed circle and the hypotenuse $\overline{AB}$ of right triangle ABC , then the product $AP \cdot BP$ equals the area of triangle ABC .

This fact is a unique property of the right triangle we want to deal with. Its direct proof is very simple or even boring, but all the more challenging and interesting are the dissections we have presented here.

The length of the angle bisector of a triangle

The original problem is to prove the formula for the lengths of the interior angle bisectors of a triangle in terms of the sides. We present twenty-four different proofs by applying either similar triangles or trigonometric and vector calculations or even the Theorem of Stewart. And finally, we present also three applications of the proved formula. Of course, this great variety should not be taught in one lesson, but in several teaching situations.

On the the Euler line of a triangle

The first question, whether Euler's line is ever parallel to a side of a triangle, has been investigated algebraically. To this investigation we considered a non-isosceles triangle ABC with fixed vertices A and B , and searched for the locus of C when Euler's line is parallel to side $\overline{AB}$. The result is an ellipse centered at the midpoint of side $\overline{AB}$, with semiminor axis $\frac{AB}{2}$ and semimajor axis $\frac{AB\sqrt{3}}{2}$, except the endpoints of its axes.

The second question, on what condition intersects Euler's line a certain side under a given angle φ with

$0^\circ < \varphi < 90^\circ$, can be treated in a very similar way, but the result is more complex than before. Now the locus we sought after is an ellipse, a pair of parallel lines or a hyperbola, according as $0^\circ < \varphi < 60^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ or $60^\circ < \varphi < 90^\circ$.

Geometry of circles

The power of a point with regard to a circle

The power of a point with regard to a circle is generally based on the following theorem: „If a line is drawn from a fixed point P to intersect a circle $k(O;r)$ at A and B , then the product $PA \cdot PB$ is constant.” Its proof can simply be treated using similar triangles. However, the constant result $PA \cdot PB = OP^2 - r^2$ involves the problem how to sign the left side of this equation if previously the length of a line segment was accepted to be non-negative. Well, if we do vectoralgebraic treatment, the sign derives from inner properties of the scalar product. That’s why we choose this way, and then present five proofs using vectors.

How to construct the inverse of a point?

Since the inversion in a circle is involutonic, and each point exterior to the circle of inversion is uniquely associated an interior point, it is enough to deal with the construction of the inverse of a point outside the circle of inversion. Then, for an interior point, we can mostly use the converse of the construction process used before. The beauty at the construction of the inverse of a point is involved in its great variety. It can be done using elementary or even deeper theorems, as well as using either compass or lineal alone. The

presented fourteen ways don't want to suggest that there is no more chance of finding another new one.

How to construct the radical axis of two circles?

Since the radical axis of two non-concentric circles is a certain line perpendicular to the line of centers, it is enough to know one of its points if we want to draw this line. Such a point can be constructed in many different ways. The two common ways are based either on the construction of the radical center of three circles, or on the construction of the intersection point of the radical axis and the line of centers of the two given circles. We present three ways for the construction of this intersection point, three ways for the construction of a proper point outside the two circles, from where tangents of equal length can be drawn, and again three ways using certain properties of the inversion in a circle.

Methodological investigation

The proof of the formula for the length of the interior angle bisector of a triangle was the 8th problem in a central entrance exam organized 2001 by the Faculty of Economic Science of the University of Debrecen. This problem formed the subject of our methodological investigation based on the available works written by the participants. The purpose of this investigation was to measure the level of understanding and solving the problem, as well as to measure also the level of adapting certain necessary mathematical theorems, furthermore to compare and analyse the given solutions.

Throughout all of the above themes, we have sought after very new ideas that can be fitted in a certain solution of a given problem, as well as after the converse and the generalization of a selected theorem in elementary geometry. This is why one can make good use of the compiled teaching material not only in secondary but also in higher education.

A szerzőnek az értekezéshez kapcsolódó fontosabb publikációi:

1. Darvasi, Gy.: A középérték-egyenlőtlenségek egy geometriai leírása
A Matematika Tanítása ,1975, 54-57.
2. Darvasi, Gy.: A dissection property of right triangles
Octagon Math. Magazine, April 1996, 71-74.
3. Darvasi, Gy.: A property of right triangles revisited
Mathematics Teacher, May 1996, 442.
4. Darvasi, Gy.: Derékszögű háromszög speciális átdarabolása téglalappá
A Matematika Tanítása ,1997, 10-14.
5. Darvasi, Gy.: A háromszög szögfelezőinek hosszáról
A Matematika Tanítása, 2001, 6-9.
6. Darvasi, Gy.: How to construct the radical axis of two circles?
Octagon Math. Magazine, 2001, Vol. 9, No. 1, 431-437.
7. Darvasi, Gy.: More notes on a neglected Pythagorean-like formula
Math. Gazette 85(Nov. 2001), 483-486.
8. Darvasi, Gy.: Összefoglaló a magasságtételről
A Matematika Tanítása, 2002, 7-17.
9. Darvasi, Gy.: Triangles with Euler line parallel to a side
Mathematics Teacher, May 2002, 367.

10. Darvasi, Gy.: From the weighted mean to the mean-inequalities
Math. Gazette, July 2002, 290-292.
11. Darvasi, Gy.: Vier besondere Dreiecke mit seitenparalleler Eulergeraden
Praxis der Math. in der Schule, 2002, 167-168.
12. Darvasi, Gy.: Derékszögű háromszög átdarabolása téglalappá
Nyíregyházi Főiskola TTFK Természettudományi Közl., 2002, 37-48.
13. Darvasi, Gy.: Triangles whose Euler line is parallel to a side
Math. Spectrum 35(2002/2003), No. 1, 18.
14. Darvasi, Gy.: A unique property of right-angled triangles
Math. Gazette, March 2003, 51-59.
15. Darvasi, Gy.: Über den verallgemeinerten Höhensatz
Praxis der Math. in der Schule, 2004, 24-25.
16. Darvasi, Gy.: Generalizing a construction of the radical axis
Octagon Math. Magazine, April 2004, 243-247.
17. Darvasi, Gy.: Triangles with Euler lines in special positions
Octagon Math. Magazine, April 2004, 275-283.
18. Darvasi, Gy.: A Pitagorasz-tétel egy nem közismert általánosítása
A Matematika Tanítása, 2004, 5. szám, 25-27.
19. Darvasi, Gy.: Converse of a property of right triangles
Math. Gazette, March 2005, 72-76.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Háromszög-geometria	2
2.1. A pitagoraszti tételcsoport	3
2.2. Derékszögű háromszög átdarabolása téglalappá	15
2.3. A háromszög szögfelezőinek hossza	20
2.4. Euler-egyenes	22
3. Körgeometria	25
3.1. Pont körre vonatkozó hatványa	25
3.2. Pont inverze	27
3.3. Két kör hatványvonala	29
4. Módszertani elemzés	32
Angol nyelvű összefoglaló	41
A szerző kapcsolódó publikációi	47

Contents

1. Introduction	2
2. Geometry of triangles	2
2.1. The Pythagorean theorem group	3
2.2. Some dissections of the right triangle into a rectangle	15
2.3. The length of the angle bisectors of a triangle	20
2.4. On the Euler line	22
3. Geometry of circles	25
3.1. The power of a point	25
3.2. The inverse of a point	27
3.3. The radical axis of two circles	29
4. Methodological investigation	32
Summary in English	41
Related publications of the author	47