

Függvényegyenletek és egyenletrendszerek
tárgyalásának lehetőségei szakkörön
Ph.D. értekezés tézisei
Functional equations and systems of
functional equations for studies
in the preparatory circles
Theses of Ph.D. paper

Dályay Pál Péter

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen, 2003

Tartalomjegyzék

Contents	1
Magyar nyelvű rész	3
1 Bevezetés, célkitűzések	3
2 Egy feladathoz kapcsolódó függvényegyenletrendszer	4
3 A Cauchy-egyenlethez kapcsolódó feladatok	5
4 $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ alakú függvényegyenletek a folytonos függvények halmazában	6
In English	6
5 Introduction and objectives	6
6 A system of functional equations	8
7 Problems leading to Cauchy's equation	8
8 Functional equations of form $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ with continuous unknown functions	9
Közlemények jegyzéke/List of publications	10
Referált publikációk / Referred publications	10
Egyéb lapokban közölt publikációk / Publications in other reviews	10
I. tanári fokozat megszerzése céljából írt dolgozat / Paper to obtain teachers' degree I	11
Egyéb dolgozatok / Other papers	11

Folyóiratokban közölt feladatok /	
Published problems in reviews	12
Közölt feladatmegoldások / Published solutions	12
Feladatmegoldásokhoz fűzött közölt megjegyzések /	
Published remarks related to solutions of problems . . .	13
Matematika versenyeken közölt feladatok /	
Problems proposed in mathematical competitions	13
A marosvásárhelyi tanári szakkörön tartott előadások/	
Presentations in the teachers' circle in Marosvásárhely .	14
Országos tehetség gondozó táborokban tartott előadások Ro-	
mániában / Presentations in country-wide preparatory	
camps of students in Roumania	14

1 Bevezetés, célkitűzések

A hazai és főleg a nemzetközi diák matematikaversenyeken feladott nehéz függvényegyenletek és függvényegyenlet-rendszerek szükségessé teszik a versenyző tanulók felkészítését ebből a témakörből is. A jelen dolgozat célkitűzése, hogy olyan anyagot bocsásson a középiskolás szakkörök rendelkezésére, amely segítségével a mutatkozó hiányosságok részben pótolhatók. A teljes anyagot úgy próbáltam megírni, hogy azt egy jól felkészült középiskolás megéthesse. A középiskolásokhoz szóló eddigi anyagokban szereplő függvényegyenletekhez szeretnék e dolgozattal hozzátenni olyanokat, amelyek szerintem nehéznek bizonyultak az eddigi versenyeken, vagy amelyek megoldása eddig sehol sem jelent meg, ugyanakkor a tanulók érdeklődése igényt fogalmazott meg ezekre.

A fejezetek címei nagyban utalnak tartalmukra. Az első fejezet egy függvényegyenletrendszerrel foglalkozik, amelyen jól szemléltethető néhány függvényegyenletrendszerknél használható eljárás.

A második fejezet első alfejezetében egy nehéz feladat megoldása a Cauchy-egyenletre vezethető vissza. A megoldás során használt fogások tanulságosak lehetnek. A második fejezet második alfejezete egy az American Mathematical Monthly 2001/Dec számában közölt $f(x^2 + y + f(y)) = 2y + (f(x))^2$ alakú függvényegyenlet egy, a jelen dolgozat szerzője által adott és érdekesnek tartott általánosításának bemutatásával foglalkozik. A második fejezet utolsó alfejezete, ugyan nem eredeti, de nem közismert, ugyanakkor a függvényegyenletek egy látványos alkalmazását mutatja be a geometriában, ezért mindenképpen tanácsosnak tartom a középiskolai felkészítő programokba való beemelését.

A harmadik fejezet az $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ alakú függvényegyenletekkel foglalkozik, amelyek az utóbbi években gyakran jelentek meg rangos nemzetközi diákversenyeken, mint pl. a 2001. évi Gillis-Turán Matematikaversenyen, vagy az ugyanazon évi William Lowell Putnam

Matematikaversenyen. Az itt bemutatott anyagban nagyrészt a szerző megoldásai és bizonyításai jelennek meg. A fejezet tárgyalja a függvényegyenlet megoldási eseteit $b \neq 0$ esetén. Ez a fejezet tartalmaz egy a szerző által kidolgozott megoldási módszert is, amely a dolgozat 76.-84. oldalán jelenik meg, amelyben két megfelelő tulajdonságokkal rendelkező monoton függvényből kiindulva jutunk el egy megoldásig. A dolgozat ezen része csakis egyetemi hallgatók szintjén olvasható, viszont ezzel párhuzamosan bemutatott másik módszer megérthető olyan középiskolások által, akik középiskolában matematikai analízist is tanulnak.

2 Egy feladathoz kapcsolódó függvényegyenletrendszer

Az első fejezet a KöMaL egyik feladatához kapcsolódik. Az anyag egy a feladattal kapcsolatos tanulók által megfogalmazott kérdésre ad választ. A válasz egy függvényegyenletrendszerhez vezet, amelynek megoldása során bevezethetünk érdekes matematikai fogalmakat is, olyanokat mint a transzformációcsoport, egy elem adott transzformáció csoportra vonatkozó orbitja stb. Ez a függvényegyenletrendszer:

$$\begin{cases} g(t) + g(1 - t) = 1, & (\forall t \in \mathbb{R}) \\ g(t) = t \cdot g\left(\frac{1}{t}\right), & (\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \end{cases}$$

A függvényegyenletrendszer megoldásával folytatódik a fejezet, felírjuk a függvényegyenletrendszer általános megoldását, amelyben két paraméter van, az egyik egy függvény a másik egy valós szám. Majd az első fejezet utolsó része egy megoldáscsaládot szemléltet.

3 A Cauchy-egyenlethez kapcsolódó feladatok

Ez a fejezet három részre tagolt. A első alfejezet a KöMaL-ban közölt **N206.** feladat megoldását tartalmazza. Ez a feladat kapcsolódik az:

$$f(xy) = f(x)f(y) + f(-x)f(-y)$$

függvényegyenlethez. A választás azért esett erre, mert a megoldás eddig nem jelent meg az említett folyóiratban és valószínű nem is fog (1999-ben közölt feladatról van szó), viszont a szerző szerint a feladat megoldása rendkívül tanulságos, sok olyan eszköz jelenik meg benne, ami egy versenyre készülő tanulónak hasznára lehet. A második alfejezet az $f(g(x) + y + f(y)) = ag(f(x)) + by$ alakú függvényegyenletek egy családjával foglalkozik. Az American Mathematical Monthly egy függvényegyenletének a jelen dolgozat szerzője által adott általánosításáról van szó. Míg az eredeti feladatnak egyetlen megoldása van, az általánosított egyenletnek a g függvény és az a és b valós paraméterek alkalmas megválasztása esetén lehet több vagy kevesebb megoldása is. Az itt bemutatott függvényegyenletek megoldása jó alkalom a Cauchy-egyenlethez vezető technikák szemléltetésére. A második fejezet harmadik alfejezete egy ismert, a szerző által Radó Ferenc tanár úr egy kolozsvári előadásán hallott anyag, ami a sík affin transzformációinak jellemzésével foglalkozik. A szerző szerint annyira látványos az a folyamat, amely során tiszta geometriai megfontolásokból eljutunk egy függvényegyenletig, hogy a követése által kapott élmény hozzájárul a tanulók érdeklődésének felkeltésére a téma iránt.

4 $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ alakú függvényegyenletek a folytonos függvények halmazában

A dolgozat leghosszabb fejezete a címben szereplő függvényegyenlettel foglalkozik. Az első alfejezet egy a Gillis-Turán matematikai versenyen adott feladathoz fűz kiértékelő megjegyzéseket, amelyek a szerző szerint a függvényegyenlet tárgyalásának szükségességét húzzák alá. A második alfejezet az egyenletre vonatkozó általános tudnivalókkal foglalkozik. Többek között megemlítem a megoldások egzisztencia tételét, a megoldások iteráltjainak általános alakját és a fixpontokra vonatkozó általános tulajdonságokat. A második alfejezet eredményei szükségesek a harmadik alfejezet olvasásához. A harmadik alfejezet szakaszokra tagolódik. A szakaszok egymástól függetlenül olvashatók és szakkörön is külön feldolgozhatók. Egy szakasz az egyenlet paramétereit által meghatározott megoldási esettel foglalkozik. Vannak nagyon egyszerűen kezelhető esetek is, ezért szakkörön ezeket az egyszerűbb, látványosabb eseteket tartom ajánlatosnak, míg a többit szelektív módon olvasmányként bocsájthatjuk a tanulók rendelkezésére. A bevezetésben említett módszert középiskolásoknak nem ajánlom. A téma folytatható az affin transzformációkra invariáns grafikonú függvények meghatározásával, de erre terjedelmi okok miatt a dolgozat nem tér ki. Ezt a részt egy bővebb és az adott függvényegyenletre vonatkozó dolgozatomban kifejtettem, azonban terjedelmi okok miatt ezt nem volt lehetőségem közölni.

5 Introduction and objectives

The difficult functional equations and systems of functional equations that were given to secondary school students and university students

in international mathematical competitions in the past years need the preparation of competitors for these themes. This paper presents some functional equations and systems of functional equations to complete the existent material for secondary school students helping the preparation for these competitions. The functional equations presented there are selected on the criteria that they were very difficult and their solutions have not been published, but the students have formulated their curiosity for these problems. The first section and the first subsection of second section deal with such problems. The second subsection of second section studies a family of functional equations that are generalizations of functional equation $f(x^2 + y + f(y)) = 2y + (f(x))^2$ published in the American Mathematical Monthly, 2001/Dec. The third subsection of second section is not original, but is not a common knowledge and present a spectacular application of functional equations. I consider that same themes give an impulse in the study of mathematics and I think that it is a good idea to introduce it in the secondary mathematical preparatory programs. The third section deals with functional equations of form $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$. Equations of this form were given in the Gillis-Turan Mathematical Competition in 2001 and in the William Lowell Putnam Competition in the same year. The presented proofs and solutions have been given by the author of this thesis in majority of this section and are accessible for secondary students. All the situations of solving equation are treated if the condition $b \neq 0$ is fulfilled. At the same time an original method of solving this equation is presented on page 76, where I construct a solution of the equation starting from two monotone functions with certain properties. This part is accessible only for university students; the parallel presentation is accessible for secondary school students as well who study mathematical analysis.

6 A system of functional equations

The first section is connected to a KöMaL problem. The material gives answer to a solvers' question. The answer leads to a system of functional equations. The system is:

$$\begin{cases} g(t) + g(1 - t) = 1, & (\forall t \in \mathbb{R}) \\ g(t) = t \cdot g\left(\frac{1}{t}\right), & (\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \end{cases}$$

Solving this system we may introduce interesting mathematical notions as transformation groups, the orbit of an element relative to a transformation group etc. The section follows with solving the system of functional equation and finally we give examples of solutions corresponding to a linear function and a value of a real parameter.

7 Problems leading to Cauchy's equation

This section is divided into three subsections. The first subsection contains the solution of problem **N206**. published in KöMaL (journal for secondary schools) in 1999. This problem is connected to functional equation:

$$f(xy) = f(x)f(y) + f(-x)f(-y)$$

I have selected this problem because its solution has not appeared up till now and it is not likely to appear either. On the other hand, solving this problem contains many elements which are useful for students who are going to prepare for competitions. The second subsection deals with a class of functional equations of form $f(g(x) + y + f(y)) = ag(f(x)) + by$. This is a generalization of functional equation appeared in American Mathematical Monthly mentioned in introduction. The original problem has one solution, whereas the generalized equation

may have more or fewer solutions. The third subsection deal with a known material which I heard from professor Radó Ferenc at a symposium in Kolozsvár. This theme is the characterization of affine transformations of the plane. According to the author the process during which we can achieve a functional equation from a geometrical fact is so spectacular that the experience results in an increasing interest in this theme.

8 Functional equations of form $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ with continuous unknown functions

This is the longest section and deals with the functional equation of title. The first subsection give remarks to a problem of mathematical competition Gillis-Turán concluding that the studying of equations of this form is necessary in the preparatory circles. The second subsection of section deals with the general properties referred to our equation. Among them I remark the theorem of existence of solutions, the general form of iterates and generalities about the fixed points. The results of the second subsection are necessary for reading of the third subsection. The third subsection is divided into paragraphs that are independent and may be read separately and may be independent themes for preparatory circles. One paragraph is engaged in a case of solving equation. There are very simple and interesting cases which are recommended for study in preparatory circles, and the others may be recommended for reading in a selective fashion. I do not recommend the method mentioned in the introduction for secondary school students. The theme may be continued with the determination of functions with invariant graphs to an affine transformation, but the size reasons do not permit it.

Közlemények jegyzéke¹ / List of publications²

Referált publikációk / Referred publications

- [1*] Dályay, Pál Péter; SIMPLE PROOF OF AN EXISTENCE THEOREM, Octogon Mathematical Magazine, Vol 11 nr 2 / 2003
- [2*] Dályay, Pál Péter; A CLASS OF FUNCTIONAL EQUATIONS OF FORM $f(g(x) + y + f(y)) = ag(f(x)) + by$, Octogon Mathematical Magazine, közlésre elfogadva / accepted for publication
- [3*] Dályay, Pál Péter; A *KöMaL* PROBLEM IN A NEW VIEW, Teaching Mathematics and Computer Science, közlésre benyújtva / presented for publication
- [4] Dályay, Pál Péter; A FUNCTION WITH INTERESTING PROPERTIES, Octogon Mathematical Magazine, közlésre elfogadva / accepted for publication

Egyéb lapokban közölt publikációk /

Publications in other reviews

- [5] Dályay, Pál Péter; Balogh, Zoltán EGYENLETESEN FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK, Matematikai Lapok, Kolozsvár, XCI évf., 11-12. szám, 1986, nov.-dec.
- [6] Dályay, Pál Péter; AZ ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK PERIÓDIKUS-SÁGÁRÓL, Matematikai Lapok, Kolozsvár, XCVII évf., 6.. szám, 1992, június

¹A csillaggal megjelölt cikkek szorosan kapcsolódnak a jelen dolgozathoz

²The articles marked with asterisk are closely connected to the present paper

- [7] Dályay, Pál Péter; EGYENLŐTLENSÉGEK, II Matematikai folyóirat, 92/93 I, Miskolci Egyetem
- [8] Dályay, Pál Péter; HIBAIGAZÍTÁS (A HLAWKA-EGYENLŐTLENSÉG EGY ÚJ BIZONYÍTÁSA), Matematika Tanítása, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1997/1
- [9*] Dályay, Pál Péter; MÉG EGYSZER A B.3438. FELADATRÓL, KöMaL, 52. évfolyam 3. szám, Budapest, 2002, március
- [10] Dályay, Pál Péter; A k SÜLLYEDÉSES PERMUTÁCIÓK SZÁMA, POLYGN, XI. köt., 1. szám 2002, jún.
- [11] Dályay, Pál Péter; NÉHÁNY ÖSSZESZÁMLÁLÁSI MÓDSZER, Matematikai Lapok, Kolozsvár, közlésre benyújtva / presented for publication

I. tanári fokozat megszerzése céljából írt dolgozat / Paper to obtain teachers' degree I

- [12] Dályay, Pál Péter; PRIMITIVE ŞI INTEGRALE, Lucrare metodico-ştiintifică pentru obţinerea gradului didactic I, Universitatea "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, Facultatea de matematică, 1983

Egyéb dolgozatok / Other papers

- [13*] Dályay, Pál Péter; A FÜGGVÉNYEGYENLETEK, SZAKKÖRI TEVÉKENYSÉG A TANÁRJELÖLT ÉS SZAKVEZETŐ SZEMSZÖGÉBŐL, Szakvezetői vizsgadolgozat, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, Szeged, 1998
- [14*] Dályay, Pál Péter; KÉT FÜGGVÉNYEKSEL KAPCSOLATOS NEHÉZ FELADAT, Rácz László Vándorgyűlés-továbbképzési dolgozat, 2000

Folyóiratokban közölt feladatok / Published problems in reviews

- [15] A THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY-ban / In THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY: 10878/Monthly **108**, May 2001
- [16] A MATEMATIKA TANÍTÁSÁ-ban / in MATEMATIKA TANÍTÁSA: 77/1996/3, 99/1997/2, 124/1999/1-2, 127/1999/3, 134/1999/4, 141/2000/1, 158/2000/4, 169/2000/1, 224/2003/2
- [17] POLYGON-ban / in POLYGON: 28/1992/II. kötet/1, 105/1999/IX/1, 106/1999/IX/1, 121/2002/XI/1
- [18] A következő romániai folyóiratokban közölt feladatok /
Math. problems published in the following Roumanian reviews:
GAZETA MATEMATICĂ - SERIA A, GAZETA MATEMATICĂ - SERIA B, MATEMATIKAI LAPOK - KOLOZSVÁR, REVISTA DE MATEMATICĂ A ELEVILOR DIN TIMIȘOARA

Közölt feladatmegoldások / Published solutions

- [19] A MATEMATIKA TANÍTÁSÁBAN / in MATEMATIKA TANÍTÁSA: 43/1996/1, 49/1996/2, 52/1996/2, 55/1996/3, 57/1996/4, 59/1997/1, 80/1997/2, 84/1997/2, 89/1997/5, 78/1998/5, 91/1998/1-2, 93/1998/1-2, 94/1998/1-2, 101/1998/5, 102/1998/5, 104/1998/5, 106/1999/1-2, 107/1999/3, 112/1999/3, 122/1999/5, 123/1999/5, 129/2000/1, 132/2000/2, 133/2000/2, 157/2001/2, 158/2001/2, 165/2001/4, 171/2001/5, 172/2001/5, 176/2002/1, 179/2002/1, 181/2002/2, 187/2002/3, 188/2002/3, 188/2002/3, 199/2002/5, 214/2003/3
- [20] A POLYGON-ban / In POLYGON: 72/1998/VIII. kötet /2, 73/1998/VIII/2, 74/1998/VIII/2,

76/1999/IX/1, 77/1999/IX/1, 78/1999/IX/1, 79/1999/IX/1,
86/1999/IX/2, 91/2000/X/1, 95/2000/X/2, 100/2002/XI/1
(3 megoldás / 3 solutions), 101/2002/XI/1 (2 megoldás / 2 so-
lutions), 102/2002/XI/2, 104/2002/XI/2

Feladatmegoldásokhoz fűzött közölt megjegyzések / Published remarks related to solutions of problems

- [21] A MATEMATIKA TANÍTÁSÁ-ban / In MATEMATIKA TANÍTÁSA:
50/1996/2, 88/1997/5, 142/2000/4, 147/2000/5, 157/2001/2,
165/2001/4, 166/2001/4, 170/2001/5, 195/2002/5

Matematika versenyeken közölt feladatok / Problems proposed in mathematical competitions

- [22] BARAJ PENTRU OLIMPIADA INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ,
1973;
- [23] BARAJ PENTRU OLIMPIADA INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ,
1974;
- [24] CONCURSUL DE MATEMATICĂ PENTRU LICEE, ETAPA FINALĂ,
CL. A XII-A, 1975;
- [25] BARAJ PENTRU OLIMPIADA INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ,
1975;
- [26] CONCURSUL DE MATEMATICĂ PENTRU LICEE, ETAPA JUDE-
ȚEANĂ, CL. A XI-A, 1977;
- [27] BARAJ PENTRU OLIMPIADA INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ,
1979;

- [28] CONCURSUL DE MATEMATICĂ PENTRU LICEE, ETAPA JUDEȚEANĂ, CL. A IX-A, 1982;
- [29] CONCURSUL DE MATEMATICĂ PENTRU LICEE, ETAPA FINALĂ, CL. A XI-A, 1982;
- [30] BARAJ PENTRU OLIMPIADA INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ, 1982, társszerző Dorin Andrica / co-author Dorin Andrica;
- [31] NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY, Komárom, 1992

A marosvásárhelyi tanári szakkörön (Cercul de Matematică al Profesorilor din Târgu-Mureș) tartott előadások/

Presentations in the teachers' circle in Marosvásárhely

- [32] FUNCȚII UNIFORM CONTINUE,1983;
- [33] DESPRE PRIMITIVABILITATEA UNOR CLASE DE FUNCȚII,1985;
- [34] TEOREMA LUI LAPLACE ȘI DETERMINANTUL PRODUSULUI,1989;

Országos tehetség gondozó táborokban tartott előadások Romániában / Presentations in country-wide preparatory camps of students in Roumania

- [35] RECURENȚA LINIARĂ ȘI TEOREMA LUI HAMILTON-CAYLEY, București, 1986;
- [36] PINCIPIUL LUI DIRICHLET, Sinaia, 1987;
- [37] PROBLEME DE DENSITATE, TEOREMA LUI KRONECKER, Curtea de Argeș, 1988