Tanulmányok a levelező és részismereti tanárképzés tantárgy-pedagógiai tartalmi megújításáért – természettudományok

SZAKTÁRNET

DEBRECENI EGYETEM
TANÁRKÉPZÉSI KÖZPONT

Tanulmányok a levelező és részismereti tanárképzés tantárgy-pedagógiai tartalmi megújításáért – természettudományok

BALLA ÉVA, BUJDOSÓ GYÖNGYI,
CSERNOCH MÁRIA, DOBRÓNÉ TÓTH MÁRTA,
EGRI SÁNDOR, HERENDINÉ KÓNYA ESZTER,
MÁNDY TIHAMÉR, PAULOVITS GYÖRGY,
REVÁKNÉ MARKÓCZI IBOLYA, SARKA LAJOS,
TEPERICS KÁROLY, TÓTH ZOLTÁN, VARGA KLÁRA

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2015

Szaktárnet-könyvek 6.

Sorozatszerkesztő:
Maticsák Sándor

Készült
a SZAKTÁRNET (TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0009)
pályázat keretében

Lektorálta:
Komenczi Bertalan

Technikai szerkesztő:
Buzgó Anita

Borítóterv:
Nagy Tünde

ISBN 978 963 473 842 8

Kiadta a Debreceni Egyetemi Kiadó, az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
www.dupress.hu
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Készült a Kapitális Nyomdában, 2015-ben.

Tartalom

7. FEJEZET

A kombinatorika, valószínűség és statisztika témakörök tanításának szakmódszertana

BALLA Éva – HERENDINÉ KÓNYA Eszter – PAULOVITS György

„A matematika annyira komoly szakterület, hogy egyetlen alkalmat sem szabad elmulasztanunk arra, hogy szórakoztatóbbá tegyük.”
(Pascal)

A kétszintű érettségi 2005-ös bevezetése során a középiskolai matematikatanárok számos új kihívással kellett, hogy szembesüljenek. Amellett, hogy az érettségi rendszere, szerkezete gyökeresen megváltozott, jelentős tartalmi változásokhoz is alkalmazkodniuk kellett. A korábban középponti jelentőségű anyagrészek szerepe jócskán csökkent, az elméleti anyagrészek számonkérése kikerült a középszintű érettségi látóköréből. Új, gyakorlatibb jellegű témakörök, feladattípusok jelentek meg, illetve korábban periférikusan oktatott fejezetek váltak jóval hangsúlyosabbá. Mindez a gyakorló, már hosszabb ideje a pályán lévő pedagógusok mindennapi munkájába is nehezen épült be, de láthatóan a pályát éppen kezdő, az egyetemekről frissen kikerült fiatal kollégák sem mindig tudnak mit kezdeni ezekkel az új, a középiskolában még általuk sem tanult témakörökkel, illetve az új szemlélettel. Amellett, hogy sokan eléggé el nem ítélhető módon szinte azonnal lemondtak a definíciók, tételek, bizonyítások rendszeres tanításáról, valamint számonkéréséről – pedig sok szempontból ez adja a matematika lényegét! – nehezen alakul ki a megnövekedett jelentőségű témakörök – a kombinatorika, valószínűség-számítás és a statisztika – oktatásának helye és módszertana. Az sem segíti ezt a folyamatot, hogy a különböző tankönyvek a tanulási folyamat más és más helyén képzelik el ezen témakörök oktatását, s abban is jelentősen eltérnek, hogy milyen mélységben dolgozzák fel a vonatkozó ismeretanyagot. Tanulmányunkban megmutatjuk, hogyan, illetve milyen mélységben érdemes e fejezetekkel foglalkozni a középszintű érettségire felkészülő csoportokban. A bemutatott feladat-típusok számos példatárban fellelhetők (ezekre utalunk az Irodalomjegyzékben), ugyanakkor az idézett példák többsége a szerzők saját feladata.

1. Kombinatorika

A kombinatorika megalapozása már kisiskolás korban elkezdődik. Általános iskolában a kombinatorikával egyszerűbb alkalmazások szintjén gyakran találkoznak a gyerekek. Az ilyen jellegű feladatokban egy véges halmaz elemeiből valamilyen szabály szerint kell kiválasztani az elemeket, létrehozni a feltételeknek megfelelő elrendezéseket, felírni, felrajzolni az összes lehetőséget. Középiskolában 9-10. évfolyamon kibővítjük a kombinatorikai ismereteiket, ekkor már többnyire nem a konstrukciók megadása, hanem a lehetséges esetek számának meghatározása a feladat. A kombinatorikai fogalmak, tételek tanítása, a kombinatorikai ismeretek rendszerezése általában a 10-11. évfolyam feladata.

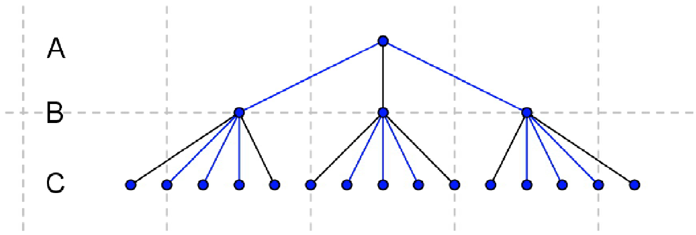
Kilencedik évfolyamon többnyire egyszerű összeszámlálási feladatokkal, illetve sorba rendezésekkel foglalkozunk. Ekkor még a fogalmakat nem tanítjuk, az esetek számának meghatározását felsorolással, ábrázolással, vagy az egyes helyeken előforduló lehetőségek számát feltüntető ábrákkal oldjuk meg.

Példa*:* Az *A* városból *B* városba egy földút és két aszfaltút vezet, *B* városból *C* városba 2 földút és 3 aszfaltút. a.) Hányféle úton juthatunk el *A*-ból *C*-be *B*-n keresztül? b.) Ebből hány útvonal halad végig aszfaltozott úton?

Megoldás*:*(1) Jelöljük az *A-B* utakat f, a_1, a_2-vel, a *B-C* utakat F_1, F_2, A_1, A_2, A_3-mal. Felsorolhatjuk az összes útvonalat: fF_1, fF_2, $\ldots a_2A_3$, illetve kiválaszthatjuk a b.) kérdésnek megfelelő lehetőségeket.

(2) *A*-ból *B*-be összesen *3* út vezet, *B*-ből *C*-be *5*. Bármelyik *A-B* úthoz bármelyik *B-C* út választható, így összesen $3 \cdot 5 = 15$ útvonal van. Hasonlóan végig gondolva $2 \cdot 3 = 6$ aszfaltozott útvonalat számolhatunk össze.

(3) Szemléltessük gráffal! Az eltérő fajta utakat különböző színnel jelölve, az *1. ábráról* mindkét kérdésre leolvasható a válasz.



1. ábra

Megjegyzés: A kombinatorikában és a valószínűség-számításban is sokszor gondot okoz, hogy az egyes lehetőségeket mikor kell szorozni, illetve mikor összeadni. A fenti feladatban a szorzást kellett használni, amit az *1. ábrával* is szemléltethetünk. Általában ha egy A dolgot n-féleképpen, egy másik, az előzőtől független B dolgot k-féleképpen választhatunk, akkor az „A és B" dolgot együttesen $n \cdot k$-féleképpen választhatjuk meg.

Példa: A *0, 1, 2, 3* számjegyek felhasználásával hány darab négyjegyű számot készíthetünk, ha (1) minden számjegy különböző, (2) lehetnek egyforma számjegyek is? (Juhász et al. 2010: 29), (3) Ezek között hány páros szám van?

Megoldás: (1) Az első helyiértéken nem állhat *0*, de a többi számjegy bármelyike szerepelhet, ez *3* lehetőség. A második helyen is *3* lehetőség van, mert nem használhatjuk az ezres helyiértéken álló számot. A harmadik helyre a maradék *2* szám bármelyike kerülhet, az utolsó helyre a maradék *1*. Az összes lehetőség: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.

(2) Az első helyiértéken nem állhat *0*, a többi helyiértékre bármelyik számjegy kerülhet. A lehetőségek száma: $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$.

(3) Páros számot akkor kapunk, ha az utolsó jegy páros. Ha a jegyek különbözők, két esetet vizsgálunk. Ha az utolsó jegy *0*, akkor az első helyre *3*-féle választásunk van, majd minden egyes helyiértékre eggyel kevesebb, ez $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ szám. Ha az utolsó jegy *2*-es, akkor az első helyre csak *1*-es vagy *3*-as kerülhet, a következő helyre már a *0* is, de az ezres helyiértékre került szám már nem, majd a következő helyre a kimaradt jegy, ez $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ szám. Összesen $6+4=10$ páros számot kaptunk. Ha a számjegyek ismétlődhetnek, az első helyre *3*-féle szám kerülhet (*0* nem), a második és harmadik helyre *4*-féle, az utolsó helyre *2*-féle (*0* vagy *2*).

Ez $3{\cdot}4{\cdot}4{\cdot}2=96$ szám.Az eredményt megkaphatjuk úgy is, hogy ez az összes ilyen négyjegyű szám (*192* db) fele, hiszen az utolsó helyiérték dönti el a párosságot, és a felhasználható *4* számjegyből *2* volt páros.

Megjegyzések: Az (1) esetnek megfelelő számokat fel is soroltathatjuk. Bár hasonló feladatokkal szép számban találkozhattak már ekkorra a diákjaink, többeknek gondot okoz az összes lehetőség felsorolása. Meg kell mutatnunk, hogy a felsorolásnál is szükség van valamilyen szisztémára, hogy ne hagyjunk ki semmit.A feladat (3) részének első felében az esetek szétválasztásánál azt használtuk fel, hogy ha egy *A* dolog *n*-féleképpen, egy másik, az előzőtől független *B* dolog *k*-féleképpen lehetséges, akkor az „*A* vagy *B*" dolog együttesen $n+k$-féleképpen fordulhat elő.

A sorba rendezéseken belül 10. évfolyamon már az ismétléses permutációk is előfordulnak, és gyakoroljuk a kiválasztási és sorba rendezési feladatok megoldását is. A 11. évfolyamon tanulók sorrendi kérdésekre (permutációk), kiválasztásra és sorba rendezésre (variációk), kiválasztásra (kombinációk) is látnak kellő számú példát. Ha korábban még nem határoztuk meg a – példákon keresztül megismert – kombinatorikai fogalmakat, ekkor definiáljuk is ezeket. A kiszámításukra vonatkozó tételeket – konkrét példák gondolatmenetét követve – könnyen igazolhatjuk. Ekkorra elvárható, hogy tanulóink képesek legyenek a különböző feladattípusoknak az elkülönítésére, illetve a mintapéldák és a megismert módszerek alapján az egyszerű feladatok megoldására.

Permutáció (sorba rendezés)

Definíció: *n* különböző elem *(ismétlés nélküli) permutációján* az *n* elem egy sorrendjét értjük.

Tétel: *n* különböző elem összes permutációinak a száma *n!*

Definíció: Ha az *n* elem között van olyan, amely többször is előfordul, az *n* elem egy sorrendjét *ismétléses permutációnak* nevezzük.

Tétel: Ha az *n* elem között $n_1, n_2, \dots n_k$ egyforma van, akkor ezek ismétléses permutációinak száma $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots n_k!}$.

Példák: (1) Hányféle sorrendben léphet a terembe egymás után egy osztály 30 tanulója? (2) Hányféle sorrendben léphet a terembe egymás után egy osztály 16 fiú és 14 lány tanulója, ha előbb a lányok lépnek a terembe?

(3) Hányféle sorrendben léphet a terembe egymás után egy osztály 16 fiú és 14 lány tanulója, ha a tanulókat csak nemük szerint különböztetjük meg (személy szerint nem)?

Megoldás: (1) Ismétlés nélküli permutáció: 30! (2) $14!\cdot 16!$ (3) Ismétléses permutáció: $\dfrac{30!}{16!\cdot 14!}$

Megjegyzés: Tanulságos lehet, hogy egy-egy feltétel beiktatásával, megváltoztatásával az eredeti kombinatorikai feladattól eltérő típusú vagy nehézségű feladatot hozhatunk létre.

Példák:(1) Egy baráti társaság *8* tagja moziba megy, egy sorban egymás mellé kapnak jegyet. Hányféle sorrendben ülhetnek le a helyükre?

(2) Hányféle sorrendben ülhet le a moziban a *8* ember, ha Bence Anna mellé szeretne ülni?

(3) Hányféle sorrendben ülhet le a moziban a *8* ember, ha Anna nem szeretne Bence mellé ülni?

(4) Hányféle sorrendben ülhet le a baráti társaság *8* tagja egy kínai étterem kör alakú asztalához? (Különböző sorrendnek számít, ha bárkinek bármelyik oldalán más a szomszédja.)

Megoldás: (1) $8! = 40320$ (2) $7!\cdot 2 = 10080$ (3) Számoljunk a komplementer esettel! $8! - 7!\cdot 2 = 30240$ (4) Ciklikus permutáció: $(n-1)! = 7! = 5040$.

Példa: Egy sakkversenyen az egyik játékosnak *8* parti lejátszása után *6* pontja van. Győzelemért *1* pont, döntetlenért *0,5* pont, vereségért *0* pont jár. Hányféleképpen jöhetett létre ez a végeredmény, ha a mérkőzések sorrendjét is figyelembe vesszük?

Megoldás: Először azt kell megadnunk, hogyan lehet *6* pontja *8* játszmából (esetek szétválasztása):
$6 = 6\cdot 1 + 2\cdot 0 = 5\cdot 1 + 2\cdot 0{,}5 + 1\cdot 0 = 4\cdot 1 + 4\cdot 0{,}5$. Első esetben *6* nyert és *2* vesztett játszmája van, második esetben *5* nyert, *2* döntetlen és *1* vesztett játszmája van, a harmadik eset *4* nyertes és *4* döntetlen játszmát jelent.

Ezeket rendre $\frac{8!}{6!\cdot 2!}=28$, $\frac{8!}{5!\cdot 2!}=168$ és $\frac{8!}{4!\cdot 4!}=70$ féle sorrendben érhette el. Az eredmény tehát *28 + 168 + 70 = 266*- féleképpen jöhetett létre.

Variáció (kiválasztás és sorbarendezés)

Definíció: Ha n különböző elemből kiválasztunk k elemet úgy, hogy számít a kiválasztás sorrendje, és bármely elem legfeljebb egyszer választható ($0<k\le n$), akkor az n elem egy (k-ad osztályú) *ismétlés nélküli variációját* kapjuk.

Tétel: n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Definíció: Ha n különböző elemből kiválasztunk k elemet úgy, hogy számít a kiválasztás sorrendje, és bármely elem többször is választható, akkor az n elem egy (k-ad osztályú) *ismétléses variációját* kapjuk.

Tétel: n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak száma n^k.

Példa: Egy *30* fős osztály tagjai között *3* különböző ajándékot sorsolnak ki. A sorsolás úgy történik, hogy minden tanuló nevét ráírják egy-egy cédulára, a cédulákat egy dobozba teszik, majd ezek közül véletlenszerűen húznak ki hármat egymás után. Hányféle módon történhet az ajándékok kiosztása, ha a cédulákat az egyes húzások után a) nem teszik vissza, b) visszateszik?

Megoldás: *30* elemből *3*-at választunk ki, mivel az ajándékok különbözőek, ezért számít a kiválasztás sorrendje: variációról van szó. a) Bármelyik nevet csak egyszer húzhatják: ismétlés nélküli variáció, $30\cdot 29\cdot 28=24360$ eset. b) Bármely név többször is szerepelhet: ismétléses variáció, $30^3=27000$ féle lehetőség.

Példa*:* Hányféleképpen tölthető ki egy totószelvény? (13 + 1 mérkőzésre tippelhetünk, mindegyik tipp 1 vagy 2 vagy x lehet.)

Megjegyzés: Klasszikus példa az ismétléses variációra. A megoldás: 3^{14}.

3. Kombináció (kiválasztás)

Definíció: Ha n különböző elemből kiválasztunk k elemet úgy, hogy nem számít a kiválasztás sorrendje, és bármely elem legfeljebb egyszer választható ($0 < k \le n$), akkor az n elem egy (k-ad osztályú) *ismétlés nélküli kombinációját* kapjuk.

Tétel: n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Definíció: Ha n különböző elemből kiválasztunk k elemet úgy, hogy nem számít a kiválasztás sorrendje, és bármely elem többször is választható, akkor az n elem egy (k-ad osztályú) *ismétléses kombinációját* kapjuk.

Tétel: n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma $\binom{n+k-1}{k}$.

Megjegyzés: Az ismétléses kombináció fogalma és kiszámítási módja csak kiegészítő anyag. Az ismétlés nélküli kombinációk számát az ismétlés nélküli variációk számából egyszerűen megkaphatjuk, ha a már kiválasztott k elem különböző sorrendjeit (melyek száma $k!$) csak egyszer vesszük figyelembe, vagyis az ismétlés nélküli variációk számát osztjuk $k!$-sal. Az ismétlés nélküli kombináció fogalmát és számítási módját a valószínűség-számításban a visszatevés nélküli mintavételnél használjuk.

Példa: Egy *30* fős osztály tagjai között *3* egyforma ajándékot sorsolnak ki. A sorsolás úgy történik, hogy minden tanuló nevét ráírják egy-egy cédulára, a cédulákat egy dobozba teszik, majd ezek közül véletlenszerűen húznak ki hármat egymás után. Hányféle módon történhet az ajándékok kiosztása, ha a cédulákat az egyes húzások után a) nem teszik vissza, b) visszateszik?

Megoldás: *30* elemből *3*-at választunk ki, mivel az ajándékok egyformák, ezért nem számít a kiválasztás sorrendje: kombinációról van szó. a) Bármelyik nevet csak egyszer húzhatják: ismétlés nélküli kombináció,

$\binom{30}{3} = 4060$ eset. b) Bármely név többször is szerepelhet: ismétléses kombináció, $\binom{30+3-1}{3} = 4960$ féle lehetőség.

Példa: Az ötös lottón *90* számból *5*-öt sorsolnak ki. Hányféle kimenetele lehet a sorsolásnak?

***Példa**:* Hány metszéspontja lehet a síkon *n* általános helyzetű egyenesnek?

***Példa**:* Hány darab *k* elemű részhalmaza van egy *n* elemű halmaznak?

Megjegyzés: A fentiek klasszikus példák az ismétlés nélküli kombinációra. Mindegyik feladatot átfogalmazhatjuk a következő módon: Hányféleképpen választhatunk ki *n* elem közül *k* elemet (nem számít a sorrend)? A kombinációval való számolásnak ez a tipikus kérdése.

4. A Pascal-háromszög

Többnyire a kombinatorikai fejezetek bevezetőjében szoktak szerepelni olyan leszámlálási feladatok, amelyekben arra kell választ adni, hányféle módon lehet bizonyos útvonalakon meghatározott pontokba eljutni, betűs ábrákból hányféleképp lehet szavakat kiolvasni. Az ilyen fajta feladatok megoldására érdemes visszatérni a variációk, kombinációk kiszámítási módjának megismerését követően.

***Példa**:* Hányféleképp olvasható ki a „matematika”és a „feladat” szó az alábbi *2. ábrából*, ha minden lépésben csak jobbra és lefelé lehet haladni?

M	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A

F	E	L	A	D	A	T
E	L	A	D	A	T	
L	A	D	A	T		
A	D	A	T			
D	A	T				
A	T					
T						

2. ábra

Megoldás: Mindkét feladatban megkaphatjuk a Pascal-háromszög egy-egy részletét, ha a betűk helyére írjuk azokat a számokat, amelyek az adott betűhöz vezető útvonalak számát adják meg (*3. ábra*).

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

3. ábra

A példa négyzetes elrendezésű feladatának megoldásához a következő gondolatmenetet is használhatjuk. Összesen *9* lépést kell tennünk, ebből *5*-öt jobbra és *4*-et lefelé. A lépéssorozatot a kezdőbetűkkel leírva minden egyes, *5* darab *J* és *4* darab *L* betűből álló betűsorozat (kölcsönösen egyértelműen) megad egy kiolvasási lehetőséget, vagyis annyiféleképp olvasható ki a szó, ahány ilyen jelsorozat létezik. Ezt ismétléses permutációval számolhatjuk ki: $\frac{9!}{5!\cdot 4!} = 126$. Másik megközelítés, hogy a *9* lépésből azt az *5*-öt (*4*-et) kell kiválasztanunk, amikor jobbra (lefelé) lépünk. Az összes ilyen kombináció száma: $\binom{9}{5}$.

A háromszög alakú elrendezésnél is megadhatjuk a fent említett módokon minden egyes szóvégi *T* betűnél, hogy hányféle útvonalon jutottunk oda. Így a $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \ldots \binom{6}{6}$ számokat kapjuk, melyek összege adja a megoldást. Ennél az elrendezésnél is célt érhetünk a kiolvasások és a megfelelő jelsorozatok kölcsönösen egyértelmű hozzárendelésével. Itt mindig választhatunk, hogy jobbra vagy lefelé lépünk, így egy olyan *6* elemű jelsorozat tartozik egy kiolvasáshoz, amelyben mindegyik betű lehet *J* vagy *L*. Most tehát variációval van dolgunk, az összes lehetőség: $2^6 = 64$.

Megjegyzés: A fenti példákkal bevezethetjük, illetve - ha a halmazok vagy algebra témakörben már szóba került - átismételhetjük a Pascal-háromszöggel (*4. ábra*) kapcsolatos ismereteket.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}$$

4. ábra

A Pascal-háromszög alapórán nem tartozik a kötelező anyaghoz, de sokoldalú használata, érdekes tulajdonságai miatt érdemes gyengébb csoportokban is érinteni. A fenti példa megoldásában a Pascal-háromszögnek a részhalmazok számával kapcsolatban már említett tulajdonsága bukkan elő: az n. sorban álló számok összege $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$, amely állítás egyben a binomiális tételnek is következménye. Akár formális levezetéssel, akár az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható jelentését használva igazolható a Pascal-háromszög további két tulajdonsága.

Tétel: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ és $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ $\quad n-1\ge k\ge 1,\quad n,k\in N$

Megjegyzés: A fenti összefüggések a Pascal-háromszög szimmetriáját és képzési módját fejezik ki, ezért a szemlélet alapján is könnyen megérthetők. A tételek bizonyítása, a Pascal-háromszög további tulajdonságainak vizsgálata lehet szorgalmi feladat.

5. Összetett kombinatorikai feladatok

A kombinatorikai feladatok nehézségét sokszor az adja, hogy nehezen ismerhető fel a feladat típusa, vagy a feladatokban nem tisztán az egyik típus szerepel. A megoldás ellenőrzése sem lehetséges, pl. az egyenleteknél megismert módon. Nézzünk ezekre is néhány példát!

Példa: Az *1, 2, 3, 4, 5, 6* számjegyekből hány olyan négyjegyű számot készíthetünk, amelyben szerepel az *1*-es számjegy?

Megoldás: (1) (hibás) Ha az első helyen szerepel az *1*-es, a többi helyre *6*-féle számot írhatunk, ez $6^3 = 216$ eset. Ha a második jegy az *1*-es, akkor az első, harmadik és negyedik helyre is *6* szám kerülhet, ami szintén $6^3 = 216$ eset. Ugyanígy járhatunk el, ha a harmadik vagy a negyedik helyen áll az *1*-es. Összesen tehát $4 \cdot 6^3 = 864$ ilyen szám van.

(2) Az előbbi megoldásban ugyanazokat az eseteket többször is megszámoltuk, pl. az *1514*-et két esetbe is beszámoltuk: amikor az első helyen, és amikor a harmadik helyen áll az *1*-es. Ezeket az átfedéseket kiküszöböljük. Az előforduló *1*-esek száma szerinti eseteket különböztetünk meg. Ha *1* darab *1*-es van a számban, az *4* helyre kerülhet, a többi helyiértéken pedig csak a többi *5* számjegy szerepelhet, ez $4 \cdot 5^3 = 500$ eset. Ha *2* darab *1*-es van a számban, ezek helyét a *4* hely közül $\binom{4}{2} = 6$ féleképp választhatjuk, a maradék két helyre csak a többi *5* szám kerülhet, ez $6 \cdot 5^2 = 150$ eset. Ha *3* darab *1*-es van a számban, ezek 4-féle helyre kerülhetnek, a 4. számjegy 5-féle lehet, ez 4 · 5 = 20 eset. Ha 4 darab 1-es van a számban, ez *1* eset. Összesen *500 + 150 + 20 + 1 = 671* ilyen szám van.

(3) Az esetek szétválasztása történhet aszerint, hogy azt vizsgáljuk, a számban melyik helyen áll először (balról) az *1*-es. Ha az első jegy *1*-es, a többi *6*-féle lehet, ez $6^3 = 216$ eset. Ha csak a második helyen szerepel először az *1*-es, akkor a legnagyobb helyiértéken csak a többi *5* szám állhat, az *1*-es mögött bármelyik, ez $5 \cdot 6^2 = 180$ eset. Ha az első *1*-es a harmadik helyen áll, akkor az előtte levő két helyen csak *5*-féle számjegy állhat, az utolsó helyre bármelyik szám kerülhet, ez $5^2 \cdot 6 = 150$ eset. Végül, ha csak az utolsó helyen áll *1*-es, $5^3 = 125$ lehetőség. Összesen *216 + 180 + 150 + 125 = 671* ilyen szám létezik.

(4) Rövidebb a megoldás, ha az összes eset számából levonjuk a számunkra kedvezőtlen, ám könnyen számolható esetek számát. Összesen 6^4 négyjegyű számot képezhetünk, ezek közül 5^4 nem tartalmazza az *1*-est (ekkor csak a többi számjegyet használtuk). A keresett számokból tehát $6^4 - 5^4 = 671$ darab van.

Megjegyzés: A komplementer leszámlálás módszere a kombinatorikai és a valószínűség-számítási feladatokban is jól használható eszköz. Érdemes a módszer bemutatása előtt a kitűzött feladatnak egy hosszabb megoldási módját is végignézni, hogy világossá váljon a módszer előnye.

Példa: Egy százlábú reggel véletlenszerű sorrendben húzza fel a lábaira a zoknicskáit és a cipőcskéit. Hányféle sorrendben veheti fel a százlábú a zoknijait és cipőit (feltéve, hogy a százlábú is zoknira húzza a cipőjét)?

Megoldás: Számozzuk meg a százlábú lábait. Minden lábára zokni, majd cipő is kerül, így egy lehetséges öltözködési sorrendet megadunk azzal, hogy *1*-től *100*-ig minden egész számot kétszer felsorolunk valamilyen sorrendben. Tehát *200* elemet állítunk sorba, vagyis ismétléses permutációval számolhatunk. A sorrendek száma: $\frac{200!}{(2!)^{100}}$.

Példa (Kosztolányi et al., 2004: 35): Az *52* lapos francia kártya csomagban *4*-féle színű lap van, és minden színből *13*-féle figura. Hányféleképpen kaphat az első játékos *5* olyan lapot, amelyikben (1) nincs két egyforma figura; (2) pontosan két egyforma figura van; (3) valamelyik figurából négy darab van (póker)?

Megoldás: (1) A *13* különböző figurából *5*-féle van a kezünkben, ez $\binom{13}{5}$-féle módon lehet, és mindegyik figurát *4* szín közül választhatjuk, ami összesen: $\binom{13}{5} \cdot 4^5 = 1317888$ lehetőség.

(2) A két egyforma figurát a *13* közül *13*-féleképp választhatjuk meg, a színére $\binom{4}{2}$ lehetőség van. A többi három lap a maradék *12* figura közül

$\binom{12}{3}$-féleképp kerül ki, mind *4*-féle színben. A lehetőségek száma: $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3 = 1098240$.

(3) A *13* figurából az egyformákat *13*-féleképp választhatjuk, melléjük kerül még egy másik figura, ami *12*-féle lehet, és ez bármely színben előfordulhat. A póker tehát $13 \cdot 12 \cdot 4 = 624$ esetben fordul elő.

A középiskolai matematikatanítás során kombinatorikai problémák előfordulhatnak különböző fejezetekben: a halmazelméletben, a számelméletben, a geometriában, a gráfelméletben. A kombinatorika ismeretére kell alapoznunk a valószínűség-számítás tanításakor. A kombinatív képesség ugyanakkor mindennapi gondolkodásunkban is alapvető szerepet játszik, hiszen a különböző lehetőségek számbavétele nélkülözhetetlen feltétele a helyes döntéseknek.

6. Valószínűség-számítás

A valószínűség-számítás megalapozása már az általános iskolában megkezdődik, a legkülönbözőbb kombinatorikai feladatok megoldásával. A középiskolában a 9. és a 10. évfolyamon kibővítjük, rendszerbe foglaljuk a kombinatorikára vonatkozó ismereteinket. Emellett a 9. évfolyam elején a halmazalgebra, majd a Boole-algebra tárgyalása is segíti az eseményalgebra későbbi bevezetését, azaz a valószínűség-számítás megalapozását. A témakör tárgyalása azonban hagyományosan a 11-12. évfolyamra esik.

E tárgyalás során mindenekelőtt tisztáznunk kell a *véletlen tömegjelenség* fogalmát, bár erre klasszikus matematikai egzaktságú definíciót nem tudunk adni. Elmagyarázzuk, hogy a *kísérlet* a véletlen tömegjelenség egyszeri megfigyelése, vagy előidézése. Mindezeket és a további fogalmak nagy részét is példákkal kell alátámasztanunk – akár úgy is, hogy a nagy klasszikushoz, a kockadobáshoz folyamodunk: minden diákkal hozatunk egy-egy szabályos dobókockát, és azzal szemléltetjük az általunk elmondottakat. Ez a gyakorlati megközelítés segíthet az *esemény, elemi esemény, eseménytér, lehetetlen esemény* és *biztos esemény* fogalmának kialakításában is.

Definíció: Az esemény egy véletlen tömegjelenséggel kapcsolatos kísérlet egyik lehetséges kimenetele.

Így szoktuk definiálni az eseményt, de ezzel a meghatározással azonnal gondjaink is adódhatnak, hiszen a lehetetlen eseményt is eseménynek tekintjük, pedig az éppen nem következik be a kísérlet során.

Definíció: Az elemi esemény olyan esemény, ami az adott kísérlet során csak egyféleképpen fordulhat elő.

Definíció: Az eseménytér egy adott véletlen tömegjelenségre vonatkozó elemi események összessége. Jele: *H*. (A szakirodalomban gyakran *Ω* szerepel, de talán célszerű itt is az egyszerűbb, illetve a halmazelméleti jelölésrendszerhez igazodó szimbólumot választani.)

Példa: Egy dobozban *4* piros, *3* fehér és *5* zöld golyó van. Visszatevés nélkül kihúzunk a dobozból egymás után két golyót. Írjuk fel az eseményteret!

Megjegyzés: Azt, hogy a különböző színű golyók aktuális száma nem játszik szerepet az eseménytér felírásában, a tanulók általában nem látják, megzavarja őket a megoldás szempontjából felesleges adatsor. Az eseménytér: $H = \{ff.fp, fz, pf, pp, pz, zf, zp, zz\}$; célszerű arra biztatni a diákokat, hogy az egyes elemi eseményeket valamilyen rendszerben, például lexikografikus sorrendben írják le, hogy biztosan ne hagyjanak ki egyet sem. Számos ilyen feladat fekete és fehér golyókkal dolgozik, de ezekben feleslegesen megnehezíti a leírást az azonos kezdőbetű.

Az eseménytér meghatározása után az eseményekre már elegendő e halmaz részhalmazaiként hivatkozni. Ahhoz, hogy ezt megtehessük, itt is szükségünk van a tartalmazási reláció megfelelőjére.

Definíció: Legyen *A* és *B* egy eseménytér két eseménye. Azt mondjuk, hogy *A maga után vonja B-t*, ha A csak azokban az esetekben következik be, ha *B* is bekövetkezik. Jele $A \subseteq B$.

Definíció: A lehetetlen esemény olyan esemény, ami az adott véletlen tömegjelenség megfigyelése során nem következhet be. Jele: *Ø* vagy $\{\ \}$.

Definíció: A biztos esemény olyan esemény, ami az adott véletlen tömegjelenség megfigyelése során mindenképpen bekövetkezik. Jele: *I*. (A biztos eseményt egy-egy konkrét véletlen tömegjelenséggel kapcsolatban sokféleképpen megadhatjuk, talán emiatt alakult ki ez a jelölés. Bárhogyan is adjuk meg, a halmazelméleti analógiák következetes alkalmazása miatt itt tulajdonképpen a H eseménytérről – alaphalmazról – van szó.)

Jól kell látnunk – és láttatnunk – tehát az analógiát a halmaz- és a Boole-algebrával. Miután az eseményalgebra megadásakor már jócskán túl vagyunk az előző két algebrához tartozó ismeretek átadásán, könnyen hivatkozhatunk a tanulók akkor megszerzett tudására. A műveletek elnevezése, megfogalmazása azonban más, és a jelölésük is. Ez utóbbi nem egyértelmű: a tankönyvek, példatárak egy része a halmazelméleti jelöléseket veszi át ($\cap, \cup$), másik részük a számok között használatos műveleti jelek mellett teszi le a voksot ($\cdot, +$).Mi ez utóbbi megoldást választjuk, de mindenki a saját tanítási gyakorlatában következetesen kell, hogy használja az általa előnyben részesített változatot – a diákok figyelmét azonban mindenképpen érdemes felhívni erre a jelölésbeli kettősségre.

Definíció: Legyen adott a H eseménytér, és legyen $A \subseteq H$ tetszőleges esemény. Ekkor az A esemény <u>ellentett eseménye</u> az a H-beli esemény, ami akkor következik be, ha A nem. Jele: $\overline{A}$.

Definíció: Legyen adott a H eseménytér, és legyenek $A, B \subseteq H$ tetszőleges események. Ekkor az A és a B események *<u>összege</u>* $(A+B)$ az az esemény, ami akkor következik be, ha A vagy B teljesül.

Definíció: Legyen adott a H eseménytér, és legyenek $A, B \subseteq H$ tetszőleges események. Ekkor az A és a B események *<u>szorzata</u>* $(A \cdot B)$ az az esemény, ami akkor következik be, ha A és B is teljesül.

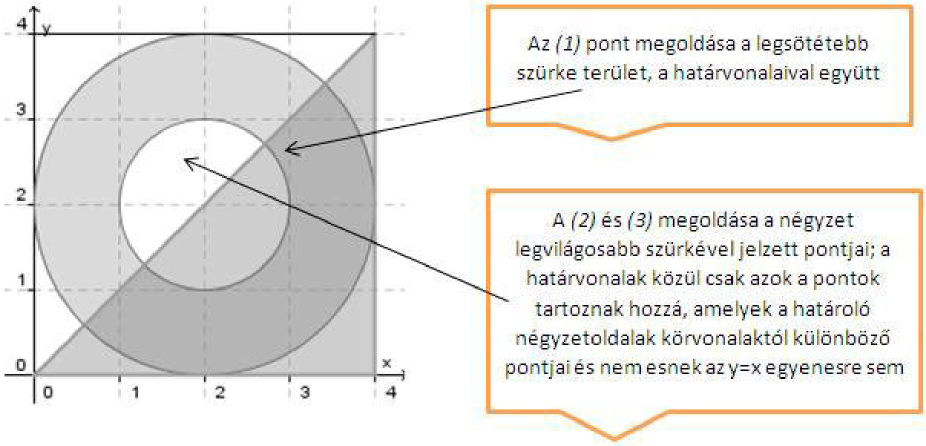
A definíciók mellett mindenképen ki kell térnünk a legfontosabb tulajdonságokra, mindenekelőtt a kommutativitásra, az asszociativitásra és a két disztributív törvény teljesülésére, továbbá a nagyon jól használható de Morgan-azonosságokra. Ki kell térnünk a különbség definiálására is, amit persze megtehetünk az eddigi műveletek segítségével is ($A \setminus B = A \cdot \overline{B}$), továbbá az *egymást kizáró események* fogalmára, ami a halmazelmélet „diszjunkt halmazok” fogalmával analóg ($A \cdot B = \emptyset$).A műveletek rögzítését, begyakorlását példákkal érdemes segítenünk.

Példa: Egy diák vonattal Budapestre utazik. Legyen A az az esemény, hogy az út során zenét hallgat, B az, hogy internetezik, C pedig az, hogy olvas. Írja le szövegesen, mit jelentenek az alábbi események: (1) $A+B+C$, (2) $A \cdot B \cdot \overline{C}$, (3) $\overline{A+B}$, (4) $\overline{A}+\overline{B}+A\overline{C}$!

Megjegyzés: Az (1) megfogalmazása egyszerű: *„A diák vagy zenét hallgat, vagy internetezik, vagy olvas."* Itt arra érdemes felhívni a figyelmet, hogy a vagy ebben az esetben természetesen megengedő értelmű. A (2)-t sem nehéz megadni: *„A diák zenét hallgat és internetezik, de nem olvas."* Itt a *„de"* kötőszó használata érdemel figyelmet és magyarázatot. A (3) pont megválaszolása már nagyobb körültekintést igényel: a kissé nehézkes *„Nem igaz az, hogy a diák zenét hallgat vagy internetezik."* elfogadása mellett hívjuk fel a figyelmet a de Morgan-azonosság alkalmazásával érvényesíthető *„A diák nem hallgat zenét és nem is internetezik."* alakra! A (4) válasz megadása az előzmények ismeretében nem nehéz: *„A diák vagy nem hallgat zenét, vagy nem internetezik, vagy zenét hallgat, de nem olvas."*

Példa: Legyen az eseménytér a koordináta-rendszer azon pontjainak halmaza, amelyek x, y koordinátáira $0 \leq x, y \leq 4$ teljesül. Véletlenszerűen jelöljük meg e ponthalmaz egyik pontját! Legyen az *A* esemény az, hogy e pont koordinátáira teljesül az $1 \leq (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4$ összefüggés, a *B* esemény pedig az, hogy a koordinátákra igaz az $x - y \geq 0$ egyenlőtlenség! Ábrázoljuk a következő műveleteknek megfelelő ponthalmazokat: a.) $A \cdot B$ b.) $\overline{A+B}$ c.) $\overline{B} \setminus$ A !

Megjegyzés:Az *A* és a *B* eseményeknek megfelelő ponthalmazok közös koordináta-rendszerben történő ábrázolása *(5. ábra)* után (GeoGebrában vagy interaktív táblán is akár) a megfelelő területek jelölhetők – vigyáznunk kell azonban a határvonalak jelölésére! Fel kell ismernünk – és érdemes azonos átalakításokkal igazolni is – hogy a *(2)* és a *(3)* pontnak megfelelő ponthalmaz azonos!



5. ábra

Ezt a példát természetesen akkor célszerű kitűzni, ha a koordinátageometria fejezet tárgyalása után foglalkozunk az eseményalgebrával. Ott azonban nagyon hasznos lehet: egyrészt visszautal a korábban megtanult ismeretekre, másrészt előkészíti a geometriai valószínűség feldolgozását. Külön érdemes odafigyelni az egyes alpontok megoldása során a határvonalak pontjaira, azok tudatos ábrázoltatására.

A fentiek mellett a szokásos kockadobás, pénzfeldobás, kártyahúzás feladataiból is érdemes válogatnunk a gyakorlás során.

A *valószínűség* fogalmának megközelítése két irányból történhet: tapasztalati és axiomatikus úton. A legcélszerűbbnek az tűnik, ha mindkettőt megbeszéljük a diákokkal, segítve ezzel a fogalom elmélyítését.

A tapasztalati megközelítéshez megint jó a kockadobásos gyakorlatokhoz fordulni: néhány ilyen kísérlet elvégzése után tisztázhatjuk a *gyakoriság(k,* $0 \le k \le n$*)* és a *relatív gyakoriság* fogalmát $\left(0 \le \frac{k}{n} \le 1\right)$, s a diákok kísérleti eredményeit összevetve bevezethető *„az esemény valószínűsége az az érték, ami körül az adott esemény relatív gyakorisága ingadozik”* meghatározás. Ezt azután kiegészíthetjük az elméleti definícióval.

Definíció: Legyen adott a *H* eseménytér. Az eseménytérhez tartozó események halmazán értelmezett *P* valós értékű függvényt *valószínűségnek* nevezzük, ha

(1) $P(A) \geq 0, \quad \forall\ A \subset H$ -ra

(2) $P(H) = 1$

(3) $P(A+B) = P(A) + P(B), \quad \forall\ A, B \subset H,\ A \cdot B =$ Ø esetén.

E két megközelítés egymást kiegészítve adhatja meg a diákok számára azt a valószínűség-fogalmat, amit aztán sikerrel használhatnak feladatmegoldásaik során is.

Nem szabad megfeledkeznünk a tulajdonságok megemlítéséről, amelyek közül a két legfontosabbat számtalanszor használnunk kell a későbbiek során.

Tulajdonságok:

(1) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B), \quad \forall\ A, B \subset H$ esetén;

(2) $P(A) + P(\overline{A}) = 1, \quad \forall\ A \subset H -$ ra.

A továbbiakban a középiskolában elsősorban az úgynevezett klasszikus valószínűségi mezőn dolgozunk, ahol a lehetséges kimenetelek száma véges és mind azonos valószínűségű. A klasszikus valószínűségi mezőn egy esemény valószínűsége megadható az esemény szempontjából kedvező esetek és az összes eset hányadosaként:

$$P = \frac{kedvező\ esetek\ száma}{összes\ eset\ száma}$$

Számos példán keresztül kell elmélyítenünk ezt a kiszámítási módot, ügyelve a fokozatosság elvére, illetve figyelve arra, hogy mind a kedvező, mind az összes eset kiszámítása többnyire kombinatorikai eszközöket igényel, így mindenképpen célszerű ezeket feleleveníteni. Mindezt az ismert tankönyvek, példatárak alapján nem könnyű megtervezni, hiszen ezek egy része a kombinatorikai, illetve a valószínűség-számítással kapcsolatos feladatokat nem a leglogikusabb, didaktikailag legmegfelelőbb sorrendben közli.

Példa: Egy debreceni COMENIUS-találkozón *12* magyar, *6* francia, *8* német és *4* spanyol diák vesz részt, más nem. Véletlenszerűen kiválasztva egy diákot, mi annak a valószínűsége, hogy ez a diák (1) magyar; (2) nem spanyol; (3) japán; (4) európai?

Megjegyzés: Mindenekelőtt azt kell tisztázni, hogy az összes eset ebben a feladatban *30*, hiszen ennyien vannak a találkozón. A kedvező esetek száma az (1) feladatrészben *12*, így a keresett valószínűség $P=\frac{12}{30}\left(=\frac{4}{10}\right)$. A(2) pontban az ellentett esemény valószínűségének kiszámítására vonatkozó képlet használatát is megmutathatjuk: $P=1-\frac{4}{30}=\frac{26}{30}$. A (3) a lehetetlen $(P=0)$, míg a (4) a biztos eseményre mutat példát: $P=\frac{30}{30}=1$.

Példa: Egy szabályos dobókockával egyszer dobva, mi a valószínűsége annak, hogy a dobott szám (1) prím; (2) *3*-nál nem kisebb; (3) egyjegyű?

***Megjegyzés*:** Az előző feladathoz hasonló módon számolhatunk, de ügyeljünk az (1) részben a prímszám fogalmának helyes használatára $\left(P=\frac{3}{6}\right)$, a (2) pontban a *„nem kisebb”* feltételre $\left(P=\frac{4}{6}\right)$. A(3)-ban újra felismertethetjük a biztos eseményt $(P=1)$.

Példa: Egy csomag francia kártyából – amelyben *4* szín mindegyikéből *13-13* különböző figura található – véletlenszerűen kihúzva egy lapot, mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap (1) a treff ász; (2) treff; (3) ász; (4) nem kőr?

Megjegyzés: Az előző feladatokhoz hasonlóan dolgozhatunk; az eredmények: (1) $P=\frac{1}{52}$; (2) $P=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$; (3): $P=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$; (4) $P=1-\frac{13}{52}=\frac{3}{4}$.

A fenti feladatokhoz még semmilyen kombinatorikai ismeret nem szükséges, csupán a számítási mód elmélyítését szolgálják ügyelve arra, hogy a diák lásson példát a lehetetlen és a biztos eseményre, illetve az esemény ellentettjének kiszámítására. Emellett azt is bevéshetjük a segítségükkel, hogy a valószínűség értéke mindig 0 és 1 közötti szám.

A korábbi példák módosításával már olyan feladatokat adhatunk meg, ahol a kedvező esetek, illetve összes eset megadása kombinatorikai megfontolásokat igényel.

Példa: Egy debreceni COMENIUS-találkozón *12* magyar, *6* francia, *8* német és *4* spanyol diák vesz részt, más nem. Véletlenszerűen kiválasztva két diákot, mi annak a valószínűsége, hogy a két diák (1) spanyol; (2) azonos nemzetiségű?

Megjegyzés: Mindenekelőtt rá kell vezetnünk a diákokat, hogy mind a kedvező, mind az összes eset megadása az ismétlés nélküli kombináció eszközével történhet. Az (1) rész megoldása így egyszerűen adódik: $P=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{30}{2}}=\frac{6}{435}=\frac{2}{145}$. Felmerülhet a diákokban, hogy miért nem vettük figyelembe a kiválasztás sorrendjét. A válaszunk az lehet, hogy a feladat szövegében semmi nem utal arra, hogy figyelembe kellene vennünk. Ha következetesen, azaz a számláló és a nevező kiszámításakor is figyelembe vennénk, azaz mindkét helyen az ismétlés nélküli variáció elvét követnénk, a megoldásunk akkor is ugyanezt az eredményt adná $\left(P=\frac{4\cdot 3}{29\cdot 30}=\frac{2}{145}\right)$. A(2) pont megoldása során először tisztázzuk, hogy az *„azonos nemzetiségű”* ebben az esetben azt jelenti, hogy mindkettő vagy magyar, vagy francia, vagy német, vagy spanyol. A „vagy” kötőszó használata segítheti a diákokat abban, hogy a felismerjék: a kedvező eseteket össze kell adnunk. Így az eredmény: $P=\frac{\binom{12}{2}+\binom{6}{2}+\binom{8}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{30}{2}}=\frac{115}{435}$

Példa: Egy szabályos dobókockával kétszer dobva, mi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok (1) összege prím; (2) szorzata prím; (3) összege *9*-nél kisebb?

Megjegyzés: E feladat megoldása során – különösen a gyengébb tanulók számára – hasznos lehet, ha egyszerűen felrajzoljuk egy *6x6*-os mátrix elemeiként a lehetséges dobásokat, és az így kialakult táblázatból válasszuk ki a kedvező eseteket.

2.dobás / 1.dobás	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	4	**5**	6	7
2	**3**	4	**5**	6	7	8
3	4	**5**	6	7	8	9
4	**5**	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	**11**
6	7	8	9	10	**11**	12

1. táblázat

Az *1. táblázatból* kiolvasható az (1) rész megoldása (a kedvező esetek a táblázat kiemelt értékei, $P=\frac{15}{36}$), valamint a (3) ponté (a kedvező esetek a körülhatárolt terület számai, $P=\frac{26}{36}$).

A (2) esetben még táblázatot sem szükséges készítenünk, hiszen végiggondolhatjuk, hogy a prímek közül csupán a *2, 3, 5* állhat elő dobott pontok szorzataként, és mindegyik kétféleképpen. Így a keresett valószínűség: $P=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Példa: Egy csomag francia kártyából – amelyben *4* szín mindegyikéből *13-13* különböző figura található – véletlenszerűen kihúzva *8* lapot, mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok közül *4* treff, *2* pedig ász?

Megjegyzés: E feladat megoldása során meg kell értetnünk a diákokkal, hogy a kedvező lehetőségek összeszámlálása során fontos megkülönböztetnünk két esetet:

(1) ha ugyanis kihúztuk a treff ászt, akkor mellé még *3* treffet kell kiválasztanunk a maradék *12* treff közül, *1* ászt a maradék *3* ász közül, illetve *3*(!) további lapot a fennmaradó *36*(!) egyéb lap közül;

(2) ha viszont nincs a kezünkben a treff ász, akkor *4* treffet választhatunk a *12*(!) ilyen színű lap közül, *2* ászt a *3* nem treff ász közül, és *2* további lapot a fennmaradó *36* lap közül.

Ezek után még feltehető az a kérdés is, hogy vajon összeadni, vagy összeszorozni kell-e az így kiszámolt két számot. Biztosan lesz, nem is egy olyan diák, aki szorozni szeretné a megfelelő értékeket. Célszerű ilyenkor megint az összeadás≈VAGY-művelet, illetve szorzás≈ÉS-művelet analógiára hivatkozni: ha az esetek közé értelmesen a „vagy” kötőszó illeszthető, akkor az összeadást, egyébként pedig a szorzást kell választani.

A végeredmény tehát: $P = \dfrac{\binom{12}{3}\binom{3}{1}\binom{36}{3} + \binom{12}{4}\binom{3}{2}\binom{36}{2}}{\binom{52}{8}} \approx 0{,}00127$

Tűzzünk ki olyan feladatokat is, amelyek során az eseményalgebra műveleteit használtathatjuk!

Példa: Helyezzük el egy dobozban a *0, 2, 3, 5, 5, 6* számokat tartalmazó kártyákat, majd egyesével kivéve a dobozból, rakjuk őket egymás mellé! Legyen *A* az az esemény, hogy így *4*-gyel osztható hatjegyű számot kapunk, *B* pedig az, hogy az így kapott szám *5*-tel osztható. Határozzuk meg a következő események valószínűségét: $A + B$, $A \cdot B$, $\overline{A} + \overline{B}$!

Megjegyzés: Amellett, hogy ezzel a példával gyakorolhatjuk az eseményalgebra műveleteit és azonosságait, valamint a valószínűségre vonatkozó tulajdonságokat, ismét ráirányíthatjuk a figyelmet az esetszétválasztás fontosságára, hiszen másképpen kell számolnunk azokban az esetekben, amikor a szám *0*-ra végződik (az *5*-tel oszthatóság esetén) vagy az utolsó két pozíció valamelyikén *0* áll (ha a *4*-gyel oszthatóság eseteit akarjuk számba venni), és másképpen, ha ezek nem teljesülnek. Fontos felismertetni a feladatmegoldás célszerű lépéseit is: a $P(A)$ és a $P(B)$ kiszámítása után érdemes a $P(A \cdot B)$-vel foglalkozni, hiszen a $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ és az $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B}$ azonosság segítségével a másik két kérdés könnyen megválaszolható. Ezen megfontolások alapján tehát először kiszámoljuk az összes esetet: ismétléses permutációval ez $\dfrac{6!}{2!} = 360$. A *4*-gyel osztható számok végződései alapján három csoportot különíthetünk el:

(1) az elsőbe a *20* és a *60* végű számok tartoznak, ilyenből összesen $2 \cdot \dfrac{4!}{2!} = 24$ van;

(2) a másodikba a *32* és a *36* végűek, ezek száma összesen $2\cdot\left(\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}\right)=18$;

(3) a harmadikba az *52*-re és az *56*-ra végződőek, amelyekből $2\cdot 3\cdot 3!=36$ van.

A B esemény egyszerűbben kezelhető:

(1) a *0*-ra végződő esetek száma $\frac{5!}{2!}=60$,

(2) az *5*-re végződőeké pedig $4\cdot 4!=96$.

Így $P(A)=\frac{78}{360}=\frac{13}{60}$, $P(B)=\frac{156}{360}=\frac{26}{60}$.

Az $A\cdot B$ a *20* és *60* végű számokat jelenti, tehát $P(A\cdot B)=\frac{24}{360}=\frac{4}{60}$.

Ebből $P(A+B)=\frac{13}{60}+\frac{26}{60}-\frac{4}{60}=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$,

$$P\left(\overline{A}+\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cdot B}\right)=1-\frac{4}{60}=\frac{56}{60}=\frac{14}{15}$$

A fenti példa egyébként határeset: a kerettanterv inkább csak emelt szinten várja el, hogy a diákok ennyire otthon legyenek az eseményalgebrában. De eddig is láthattuk: ugyanazt a feladatot többféleképpen megfogalmazva, vagy a megoldást többféle úton elképzelve e képzeletbeli határvonalnak hol egyik, hol másik oldalán sétálunk. Jó példa az előbb elmondottakra a nevezetes eloszlások kérdésköre. A kétszintű érettségi bevezetésekor úgy tűnt a gyakorló középiskolai tanárok számára, hogy a hipergeometrikus és a binomiális eloszlás csupán emelt szinten fog megjelenni az érettségi követelmények közt. Aztán néhány év múlva tapasztalhatták – több, a középszinten kitűzött feladat kapcsán is – hogy érdemes megismertetni ezeket diákjaikkal. Ezen feladatok többsége persze tisztán kombinatorikus megfontolások alapján is megoldható – de hát a diákok egy része számára nagyon fontos, hogy legyen elméleti fogódzó, legyen „séma” az ilyen feladatok megoldására. Persze nem képleteket akarunk tanítani – a matematika lényege veszne el, ha ezt tennénk – mégis sokat segítünk a „séma” megmutatásával a tanulóknak. Nézzünk mindenre néhány példát.

Példa: Egy *16* fős diákcsoport minden tagja véletlenszerűen, egyenlő eséllyel indul tanítás után moziba, tanulni, illetve a sportolni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük valaki tanulni indul?

Megjegyzés: A megoldás során fel kell ismertetnünk, hogy könnyebb az ellentett esemény („senki sem indul tanulni") valószínűségét kiszámolni. A diákok többsége azonban ezzel is elakad: nem ismerik fel, hogy mind az összes eset, mind a kedvező esetek kiszámítása az ismétléses variáció elvén történhet. Segíthetjük ezt a felismerést azzal, hogy *M,T,S* feliratú kártyákkal modellezzük az eseményt. Az összes eset megadásához mindenki tetszés szerint választhat a – megfelelően sok példányban létező – háromféle kártya közül (ez 3^{16}-féle módon történhet), az ellentett esemény kedvező eseteinek összeszámlálásához viszont mindenki csak az *M* és az *S* feliratú kártyák valamelyikét veheti el (e lehetőségek száma 2^{16}). Így a feladat végeredménye: $P = 1 - \frac{2^{16}}{3^{16}} \approx 0{,}9985$.

Mielőtt rátérnénk a binomiális eloszlással történő megoldásra, megemlítjük, hogy ha emelt szinten már tárgyaltuk az események függetlenségének témakörét, akkor a következő gondolatmenetet is követhetjük: $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy egy diák nem tanulni indul. Az egyes diákok ilyen irányú választása független egymástól, és mivel független események valószínűsége összeszorzódik, így a „senki sem indul tanulni" valószínűsége $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{16}$.

A <u>*visszatevéses mintavétel*</u>, azaz a <u>*binomiális eloszlás*</u> képlete is jól illeszthető a problémára.

Tétel: Annak a valószínűsége, hogy egy *n*-szer elvégzett kísérletsorozat során egy *p* valószínűségű esemény éppen *k*-szor fordul elő: $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

A fenti példánkban $n = 16,\ p = \frac{1}{3},\ k = 0$, azaz a „senki sem indul tanulni" valószínűsége most is $P = \binom{16}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^{16}$.

A *visszatevés nélküli mintavétel*, vagyis a *hipergeometrikus eloszlás* feladatai tulajdonképpen képlet nélkül, „józan ésszel" is megoldhatók.

Példa: Mi annak a valószínűsége, hogy a hatoslottón éppen *4* találatot érünk el? (A hatoslottón *6* számot kell *45* közül eltalálni.)

Megjegyzés: Az összes eset: $\binom{45}{6}$. A kedvező esetek összeszámolása során azt kell figyelembe vennünk, hogy a *4* találat úgy áll elő, hogy a *6* kihúzott szám közül *4*-et találunk el $\left(\binom{6}{4}\right)$, ÉS a *39* nem kihúzott szám közül is bejelölünk *2*-t $\left(\binom{39}{2}\right)$. Így a keresett valószínűség:

$$P=\frac{\binom{6}{4}\binom{39}{2}}{\binom{45}{6}}\approx 0{,}00136.$$

Egy ilyen bevezető feladat alkalmat ad a számunkra, hogy ismertessük a visszatevés nélküli mintavételre vonatkozó összefüggést.

Tétel: Legyen adott *N* számú elem, közülük legyen *K* valamilyen szempontból kitüntetett. Annak a valószínűsége, hogy a *N* elem közül *n*-et kiválasztva a kiválasztottak közt éppen *k* darab kitüntetett legyen:

$$P=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Mindkét nevezetes eloszlás használatára nagyon jó feladatokat találunk az újabb példatárakban. A diákok számára azonban olykor annak eldöntése okoz gondot, hogy egy adott feladat esetén melyik képletet kell használni. Ha a szövegből egyértelműen kiderül, hogy visszatevéssel vagy anélkül vesszük a mintát, akkor persze nincs gond. Ha nem derül ki, akkor azzal segíthetünk, hogy rámutatunk: ha az összes elem száma adott, akkor a többnyire a hipergeometrikus, ha nem, akkor pedig a binomiális eloszlás célszerűbb választani.

Példa: Egy városban a kutatások szerint a középiskolás diákok *5%*-a küzd tanulási nehézségekkel. Megvizsgálva *20* véletlenszerűen kiválasztott diákot, mi a valószínűsége annak, hogy közülük (1) pontosan ketten; (2) legalább hárman küzdenek ilyen nehézséggel?

Megjegyzés: A binomiális eloszlás szerint az (1) részben most $p = 0{,}05,\ n = 20,\ k = 2$, így a keresett valószínűség $P = \binom{20}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} \approx 0{,}1887$. A (2)pontban nyilván érdemesebb az ellentett esemény („legfeljebb ketten”) valószínűségét kivonni *1*-ből: $P = 1 - 0{,}95^{20} - \binom{20}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{19} - \binom{20}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} \approx 0{,}0755$.

Azt is megmutathatjuk, hogy elég nagy *N* elemszám esetén e két eloszlás megfelelő értékei jól közelítik egymást. Ha tehát például feltételezzük, hogy az adott városban *N=10000* középiskolás él, akkor kiszámíthatjuk, hogy közülük nagyjából *K=500*-an küzdenek tanulási nehézségekkel. Így az (1) részben hipergeometrikus eloszlással számolva $P = \dfrac{\binom{500}{2} \cdot \binom{9500}{18}}{\binom{10000}{20}} \approx 0{,}1888$ adódik, ami valóban jól közelíti a korábban kapott értéket. Sajnos, az ilyen számítások elvégzése esetén hátrányba kerülnek azok a diákok, akik a számológépükkel nem tudnak binomiális együtthatókkal számolni. Figyelnünk kell erre is idejekorán, ha a szülők számológép-vásárlási tanácsot kérnek tőlünk!

Ezekkel a feladatokkal, mint említettük, már az emelt szintű tananyag határmezsgyéjén sétálgattunk. Emelt szinten emellett nem feledkezhetünk el a *feltételes valószínűségről, a Bayes-tételről, a teljes valószínűség tételéről, a valószínűségi változó várható értékéről, szórásáról és a nagy számok törvényéről* sem.

7. Statisztika

A statisztikai ismeretek oktatása csupán néhány éve került be az alap- és a középfokú matematika kerettantervekbe. A mindennapi életben, gazdasági, közvélemény-kutatási tárgyú elemzésekben rendkívül gyakran találkozik az átlagember adathalmazokkal, ábrázolásukkal, feldolgozásukkal, így indokolt volt a témakör beemelése az iskolai oktatásba. Az ilyen irányú ismeretek átadásában a matematika tanárának mindenképpen célszerű együttműködni az informatika, illetve az esetlegesen az iskolában megjelenő gazdasági alapozó tantárgyak oktatóival, elkerülendő a felesleges párhuzamosságokat.

A témakör alapozása már az általános iskola alsó tagozatán megkezdődik: ekkor – például meteorológiai – adatokat gyűjtenek, grafikonon ábrázolják azokat, kiszámolják a terjedelmüket. A felső tagozaton folytatódik az adatgyűjtés, és rendszerezés, megismerik a diákok a módusz és a medián, valamint az átlag fogalmát, diagramokat készítenek, elemeznek.

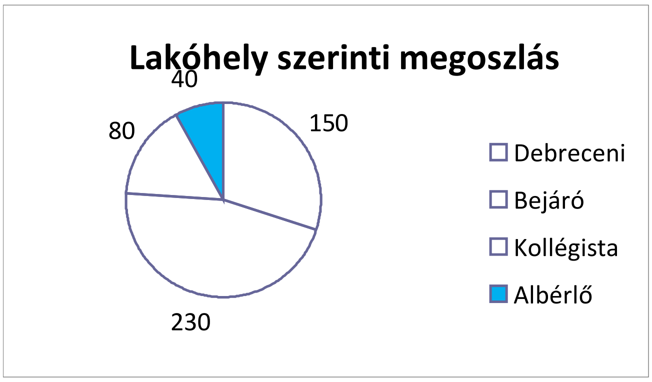
A középiskolában mindenekelőtt táblázatba rendezett adatok különböző diagramokon történő megjelenítésével foglalkozunk. A számtalan diagramtípus közül az oszlop-, a kör és a vonaldiagramot részesítjük előnyben. Az oszlop-(illetve a sáv-)diagram az adatok összehasonlítását, nagyságrendi viszonyait láttatja. A kördiagram a százalékos megoszlás bemutatására kiválóan alkalmas, míg a vonaldiagram például az időbeli változásokat szemlélteti jól. Mindegyik esetben nagyon fontos az arányos ábrázolás, a tengelyek megfelelő beosztása és feliratozása – mindezt az informatika órákon, az Excel program alkalmazása során is begyakorolhatják diákjaink, de persze ezt a programot, vagy más csomagokat a matematika órán is segítségül hívhatjuk. A pontos ábrázolás mellett fontos a részletszámítások megfelelő megjelenítése is.

Példa: Az alábbi, *2. táblázatban* egy középiskola diákjainak lakóhely szerinti megoszlását látjuk. Készítsünk kördiagramot, illetve oszlopdiagramot az adatok alapján!

Lakóhely	Debreceni	Bejáró	Kollégista	Albérlő
Diákok száma	150	230	80	40

2. táblázat

Megjegyzés: A kördiagram (*6. ábra*) készítéséhez meg kell határoznunk, hogy az egyes adatokhoz hány fokos középponti szögű körcikk tartozik. Mivel diákok összlétszáma *500* fő, így az egyes értékek:



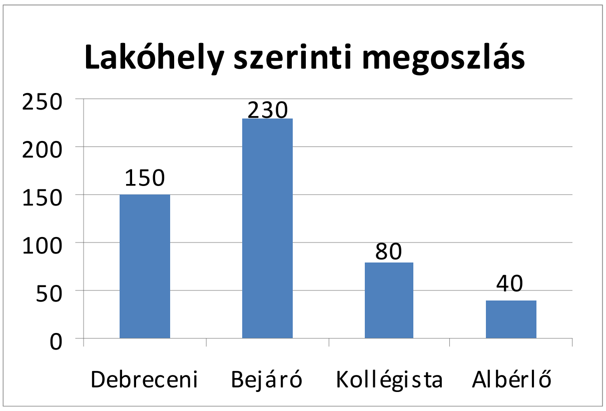
6. ábra

Debreceni: $\frac{150}{500}\cdot 360^\circ = 108^\circ$ Bejáró: $\frac{230}{500}\cdot 360^\circ = 165{,}6^\circ$

Kollégista: $\frac{80}{500}\cdot 360^\circ = 57{,}6^\circ$ Albérlő: $\frac{40}{500}\cdot 360^\circ = 28{,}8^\circ$

Ki kell térnünk arra, hogy a *150, 230, 80, 40* értékeket az egyes adatok *gyakoriságának*, a $\frac{150}{500};\frac{230}{500};\frac{80}{500};\frac{40}{500}$ hányadosokat pedig a *relatív gyakoriságuknak* nevezzük, a valószínűség-számítás fogalmaival szinkronban. Az ábrázoláshoz feltétlenül szükséges körző és szögmérő, bár ezek használatára néha nem könnyű rávenni a diákokat. A*6. ábrán* nem tüntethetjük fel a középponti szög nagyságát, hiszen ez felesleges adat, csupán a számadatokat, vagy a százalékos megoszlást.

A megfelelő oszlopdiagram készítése során a korábban már leírtak szerint kell eljárnunk. Itt a vonalzó használatára kell rábírnunk a diákokat *(7. ábra)*.



7. ábra

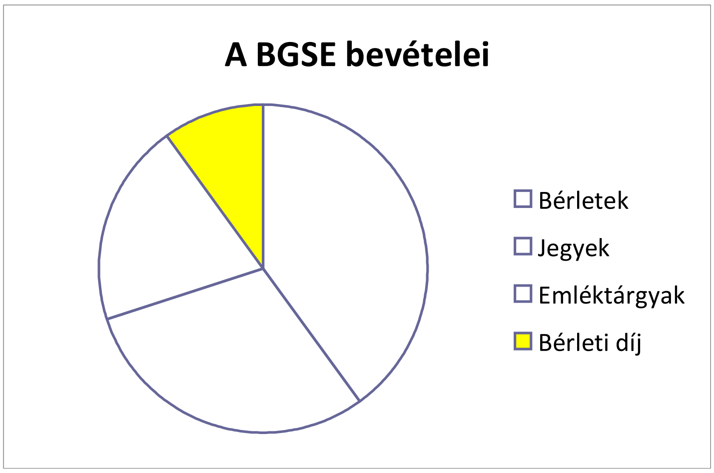
A diagramok adatainak feldolgozását célzó feladatokat is ki kell tűznünk.

Példa: A Bethlen Gábor Sportegyesület éves bevételeinek megoszlását tartalmazza a következő kördiagram *(8. ábra)*. Tudjuk, hogy a bérleti díjból származó bevétele *600.000* forint volt, és a hozzá tartozó körcikk *36*°-os. Az emléktárgyak eladásából származó bevétel összege *1,2 millió* forint, a bérletek értékesítéséből származó bevétel középponti szöge pedig *144*°. Határozzuk meg

(1) a bérletekből származó bevételt;

(2) a jegyekhez tartozó összeget és középponti szöget;

(3) a teljes bevételt!



8. ábra

Megjegyzés: A (3) kérdésre tudunk először válaszolni. Egyszerű egyenes arányossággal kiszámítható, hogy a teljes bevétel *6 millió* forint $\left(\frac{600.000}{36}\cdot 360\right)$. Az (1)-re adandó válasz akár ebből az adatból is megadható $\left(6\cdot\frac{144}{360}=2{,}4\ \text{millió forint}\right)$. Mivel az emléktárgyakhoz tartozó szög *72°*-os, így a jegyekre *360°-36°-72°-144°=108°*-os szög marad, így a jegybevétel értéke *1,8 millió* forint ((2) kérdés).

A továbbiakban fel kell elevenítenünk a – korábban már megismert – középértékek fogalmát.

Definíció: Adathalmaz *móduszán* a leggyakrabban előforduló értékét értjük.

Amennyiben a vizsgált adathalmaz számokból áll, megadhatjuk a következő fogalmakat is.

Definíció: Páratlan elemszámú adathalmaz *mediánja* a rendezett minta középső eleme, páros elemszám esetén pedig a rendezett minta két középső elemének számtani közepe.

Definíció: Az $x_1, x_2, \dots x_n$ n elemű adathalmaz számtani közepe $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}$.

Példa: *30* családban vizsgáltuk meg a gyermekek számát. A következő adatsort kaptuk *(3. táblázat)*:

2	1	2	2	2	2	0	1	3	1	1	0	4	2	2	1	0	3	5	1	0	0	2	2	1	3	3	2	0	6

3. táblázat

Határozza meg a fenti adatsor móduszát, mediánját, és az átlagos gyermekszámot!

Megjegyzés: Mindenekelőtt célszerű az adatokat egy újabb, úgyneve-zett gyakorisági táblázatba rendezni (*4. táblázat*):

Gyermekszám	0	1	2	3	4	5	6
Családok száma	6	7	10	4	1	1	1

4. táblázat

A fenti táblázatból jól látszik, hogy az adatsor módusza *2*, átlaga pedig $\dfrac{6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 + 5 + 6}{30} = 1{,}8$. A medián most a *15.* és a *16.* elem átlaga, azaz $\dfrac{2+2}{2} = 2$. A diákok elsősorban ez utóbbi meghatározásában szoktak tévedni, elfeledkeznek ugyanis a minta rendezéséről.

Példa: Egy hatelemű adatsor elemei *1; 3; 4; 9; 11* és *x*. Mekkora lehet az *x* értéke, ha az adatsor mediánja megegyezik az átlagával?

Megjegyzés: Az átlag értéke $\dfrac{28 + x}{6}$. A medián értéke azonban attól függ, hol helyezkedik el a rendezett mintában *x*. Ez alapján három esetet kell megkülönböztetnünk:

(1) ha $x \le 3$, akkor $\dfrac{28 + x}{6} = \dfrac{3+4}{2} \to x = -7$, és ez benne van az alaphalmazban;

(2) ha $3 < x < 9$, akkor $\frac{28+x}{6} = \frac{x+4}{2} \rightarrow x = 8$, ez is megfelel a feltételnek;

(3) ha $x \geq 9$, akkor pedig $\frac{28+x}{6} = \frac{4+9}{2} \rightarrow x = 11$, ez is megoldás.

A középértékek mellett a szóródási mutatók meghatározásával is kell foglalkoznunk, hiszen a középértékek nem mindig mutatják jól az adathalmaz szerkezetét. Adathalmazunk továbbra is számokat tartalmaz.

Definíció: Az adatsor terjedelme a legnagyobb és legkisebb értékének különbsége.

Definíció: Legyen az $x_1, x_2, \ldots x_n$ n elemű adathalmaz számtani közepe $\overline{x}$. Ekkor az adathalmaz szórása:

$$D = \sqrt{\frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2}{n}}.$$

Definíció: Legyen adott az a szám, továbbá az $x_1, x_2, \ldots x_n$ n elemű adathalmaz. A adathalmaz a-tól való átlagos abszolút eltérése:

$$S(a) = \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \ldots + |x_n - a|}{n}.$$

Példa: Az iskolai kosárlabda foglalkozás résztvevőinek testmagasságát tartalmazza az alábbi táblázat*(5. táblázat)*:

Magasság(cm)	188	191	193	194	199	201
Fő	2	3	1	2	2	1

5. táblázat

Állapítsa meg az adathalmaz terjedelmét, szórását, továbbá a mediántól való átlagos abszolút eltérését!

Megoldás: A terjedelem értéke: *201 – 188 = 13 cm*. A szóráshoz először az átlagot kell kiszámítanunk: $\overline{x} = \frac{2 \cdot 188 + 3 \cdot 191 + 193 + 2 \cdot 194 + 2 \cdot 199 + 201}{11} = 193{,}5 \text{ cm}$, majd ennek segítségével a szórást:

$$D=\sqrt{\frac{2\left(188-\bar{x}\right)^2+3\left(191-\bar{x}\right)^2+\left(193-\bar{x}\right)^2+2\left(194-\bar{x}\right)^2+2\left(199-\bar{x}\right)^2+\left(201-\bar{x}\right)^2}{11}}=4{,}23\cdot$$

A medián értéke *193*, így a harmadik keresett érték:

$$S(193)=\frac{2|188-193|+3|191-193|+|193-193|+2|194-193|+2|199-193|+|201-193|}{11}=3{,}45$$

Példa: Adjon meg egy-egy olyan négyelemű adathalmazt, amelynek átlaga *4*, továbbá (1) módusza 2; (2) mediánja 3; (3) szórása 0!

Megjegyzés: Az ilyen típusú feladatok általában határozatlanságuk miatt okoznak gondot a diákok többségének, továbbá a fogalmak pontos ismeretét, valamint kreativitást követelnek tőlük. Mindenekelőtt azt kell észrevenni, hogy a négy szám összege mindegyik esetben *16* kell, hogy legyen. Egy-egy lehetséges adatsor:

(1) *2; 2; 5; 7*

(2) *2; 3; 3;* 8

(3) *4; 4; 4; 4* (itt természetesen ez az egyetlen lehetséges megoldás).

A statisztika témakörnek a középiskolai tananyagban nincs még szilárd helye: a tankönyvek, tanmenetek a leggyakrabban a 10., továbbá a 11. évfolyam végére helyezik a statisztikát – ennek viszont sokszor az a következménye, hogy időhiány miatt kevesebbet foglalkozunk vele az elvárhatónál. A témakörre visszautalhatunk a valószínűség-számítás tanításakor a mintavétellel kapcsolatos problémáknál, illetve kiaknázhatjuk a két fejezet analógiáját a valószínűségi változó várható értékével, szórásával kapcsolatos fogalmak és feladatok tárgyalása során is.

8. Összegzés

Tanulmányunkban három olyan matematika témakör tanításának kérdéseivel foglalkoztunk, melyek csupán az utóbbi tíz évben váltak a középiskolai matematika tananyag szerves részévé. A kétszintű érettségi mint kimeneti szabályozó eszköz biztosítja ugyan, hogy ezek a témakörök tárgyalásra kerülnek a matematika órákon, ám tapasztalatunk szerint tanításuk megtervezéséhez és kivitelezéséhez nem minden esetben áll elegendő szakmódszertani ismeret, gyakorlat a matematikatanárok rendelkezésére. E témakörök ismereteinek apróbb fejezetekre tagolása, az egyes évfolyamok tananyagába való „szétszórása” nem könnyíti meg a tanárok munkáját. A „hagyományos” nagy témaköröktől (algebra, geometria) eltérően a vizsgált három tematikai egység tanítása nem feltétlenül igényli a szigorúan spirális felépítést, egy-egy téma egy-egy tanév anyagába építve is teljes egészében tanítható lenne, s a többi tanévben a már elsajátított ismeretek felszínen tartására figyelhetnénk.

Munkánkban egy lehetséges feldolgozási módot mutattunk be a három – egyébként szorosan összefüggő – anyagrész tanításához. Hangsúlyt helyeztünk az elsajátítandó elméleti ismeretek strukturált bemutatására és a típusfeladatok részletes tárgyalására is. A példákat követő megjegyzések a továbbgondolásra és a lehetséges kapcsolódási pontokra hívják fel a figyelmet.

A kombinatorika, valószínűség-számítás, statisztika tanítása a fogalmak, eljárások sablon-szerű alkalmazásánál többről szól. A gyakran hétköznapi kontextusba ágyazott problémák a szövegértés képessége mellett a matematikai modellalkotás képességét is fejlesztik. A feladatok megoldásának kulcsa sokszor az, hogy fel kell ismerni a látszólag teljesen különböző feladatokban az azonos matematikai tartalmat. Ez esetenként a probléma átfogalmazását is igényli, ami a tanulók kreativitását fejleszti. Ugyancsak a kreativitást fejlesztjük, ha egy-egy feladatnak több megoldási módját megismertetjük, és képessé tesszük tanítványainkat arra, hogy eldöntsék, az adott esetben melyiket célszerű választani. A többféleképpen megoldott feladat a megoldás ellenőrzését is jelenti, hiszen a végeredményeknek mindegyik esetben meg kell egyezni.

A vizsgált témakörök nem csupán egymással, hanem a többi matematikai témakörrel is szorosan összekapcsolhatók. A feladatok ezért sokszor tartalmilag is komplexek. A számelméleti, geometriai, halmazelméleti, logikai témájú problémákkal találkozunk a leggyakrabban. A belső koncentráció mellett a tantárgyak közötti koncentrációra is jó lehetőség nyílik. A matematika órákon támaszkodhatunk (és egyúttal megerősíthetjük) az informatika órán elsajátított táblázatkezelői ismeretekre, de történelmi, földrajzi témájú statisztikai feladatokkal is foglalkozhatunk. A kísérletezés és a játék nélkülözhetetlen eleme a tanulásnak. A valószínűségi kísérletek, a páros játékok hozzájárulnak a véletlen, a gyakoriság, a relatív gyakoriság, a valószínűség fogalmának elmélyítéséhez.

A matematika tanári munkának alapvető követelménye a világos fogalmazás, a pontos és egyértelmű kérdésfeltevés és a szakkifejezések korrekt használata. Mindez az általunk tárgyalt témakörökre fokozottan igaz. Elég egy szó elhagyása vagy megváltozatása például egy kombinatorikai feladatban ahhoz, hogy az teljesen más értelmet nyerjen. A tanulók egyéni gondolkodásmódjának megértése és továbbgondolása ugyancsak nyilvánvaló elvárás egy tanártól. Tekintettel azonban arra, hogy a kombinatorikai, valószínűségi problémák tág teret nyújtanak az egyéni gondolkodási stratégiák kialakításához, ez esetünkben sokszor nem is egyszerű. Tanulmányunkkal ezt a fajta munkát kívánjuk segíteni.

Felhasznált irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó, Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten*. Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né., dr. Gyapjas, F-né., dr. Kántor, S-né. & dr .Pintér, L-né(2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né., dr. Gyapjas, F-né., Hack, F., dr. Kántor, S-né & dr. Korányi, E (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Gerőcs L., Orosz Gy., Paróczay J. & Szászné Simon J. (2009): *Matematika. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári,P., Pálmay, L., Pósfai,P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I,II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

Herendiné Kónya E. (szerk.).(2013): *A matematika tanítása az alsó tagozaton*. Budapest: Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó.

Juhász I., Orosz Gy., Paróczay J. & Szászné Simon J. (2010): *Matematika 9. Az érthető matematika*, Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J. & Vincze I. (2004): *Sokszínű matematika 11.*, Szeged: Mozaik Kiadó.