Debreceni Egyetem

Informatikai Kar

TÖBBÉRTÉKŰ LOGIKÁK

Témavezető:
Dr. Mihálydeák Tamás
egyetemi docens

Készítette:
Muzsnai Adrienn
PTM

Debrecen

2007

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A klasszikus kétértékű logikában:

1. pontosan két igazságérték létezik: az Igaz és a Hamis (kizárt harmadik elve),
2. minden állításról egyértelműen el lehet dönteni, hogy Igaz vagy Hamis,
3. a nyelv bármely mondatának igazságértékét a mondat részeinek igazságértékei határozzák meg.

A többértékű logikák cáfolják ezeket. Megjelenik egy harmadik érték, amelyet sokan sokféleképpen értelmeznek. A harmadik érték a „lehetséges”, vagy a „határozatlan” kifejezést hordozza magában. Jelölésben is eltérnek a különböző logikák. Például: 0, ½, 1 vagy F, I, T.
A 20. század elején merültek föl olyan problémák, amik megkérdőjelezték az arisztotelészi logikát.

Korai motivációk:

- vannak olyan állítások, amik nem rendelkeznek valódi igazságértékkel, határozatlanok,
- a nyelvben lehetnek olyan mondatok, amik nem fejeznek ki állítást, például a jövőre vonatkozó mondatok,
- személyes meggyőződés, valami „kicsit igaz”, például: Esik az eső.

Továbbgondolva ezt az elvet eljuthatunk az n-értékű, majd a végtelen értékű logikához is. A szemléletmód hasonló a háromértékűhöz. Az n-értékű logika estén az igazságértékek egyik lehetséges halmazát úgy kaphatjuk meg, hogy a [0, 1] zárt intervallumot n egyenlő részre felosztjuk: {0, 1/(n-1), 2/(n-1), ..., (n-2)/(n-1), 1}, ahol 0 a hamis érték, és felfelé haladva egyre „igazabb” értékeket kapunk.

Modern használat:

- nem determinisztikus folyamatok elmélete,
- Post algebrák (többértékű halmazok).

Łukasiewicz 1920 és 1922 között dolgozta ki logikai rendszerét. Tőle függetlenül Post is ebben az időben jutott hasonló eredményekhez. Ők készítették az első publikált leírásokat a többértékű logikai rendszerről.
Majdnem húsz évvel később Bochvar és Kleene, külön - külön, kidolgozták saját többértékű logikai rendszerüket egyedi konnektívumokkal.

Łukasiewicz többértékű rendszere

Az arisztotelészi logikát tagadja, és a nem-euklideszi geometriához hasonlítja logikáját. Elutasítja a kizárt harmadik törvényét. A harmadik érték: ’lehetséges’, jelölés: ½.

Łukasiewicz 3-értékű logikája (1920)

A 3-értékű logikai rendszere két konnektívumon alapul, melyek bázist alkotnak: ⊃ és ¬, amelyek az implikációt és a negációt jelölik. Ezek igazságtáblái a következők:

⊃	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

p	¬p
0	1
½	½
1	0

A 0 a ’hamis’, 1 az ’igaz’ és ½ a ’lehetséges’ értéket jelenti. A negációt tükrözésként értelmezi. Mivel {⊃, ¬} bázis, ezrét a kifejezhető velük a többi konnektívum:

- $p \vee q \Leftrightarrow (p \supset q) \supset q$
- $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
- $p \equiv q \Leftrightarrow (p \supset q) \wedge (q \supset p)$

Megjegyzés: a klasszikus logikából ismert $p\vee q \Leftrightarrow (\neg p \supset q)$ állítás nem teljesül 3 érték esetén!

Nézzük meg hogyan jutott Łukasiewicz a fenti táblázathoz? Nem igazán határozott a kritikus pontban. Csak azt mondja, hogy a „kívánt eredmény” eléréséhez erre van szükség. Ebben az esetben a „kívánt eredmény” nem más, mint hogy a $(p \supset p)$ tautológia legyen.

Def: Egy formulát 3-értékű *tautológiá*nak nevezünk, ha mindig az 1 értéket veszi fel.
Az 1 értéket kitüntetett értéknek nevezzük

Tekintsük az igazságértékeket a klasszikus igazságértékek halmazainak:

$0 = \{F\}$, $1 = \{T\}$, $½ = \{T, F\}$

A cél az, hogy a klasszikus értékek minden egyes halmaza azoknak az értékeknek a halmazát reprezentálja, amelyeket a kijelentés a jövőben felvehet.

$\supset$	{F}	{T, F}	{T}
{F}	{T}	{T}	{T}
{T, F}	{T, F}		{T}
{T}	{F}	{T, F}	{T}

p	¬p
{F}	{T}
{T, F}	{T, F}
{T}	{F}

Hogyan tölthető ki a hiányzó elem? A reprezentáció szerint {T, F} kellene oda. Ebben az esetben azonban nem lenne tautológia a $(p \supset p)$ formula.

Łukasiewicz kritika nélkül átvesz két elvet a klasszikus logikából:

1. Principia Mathematica elve: a logikát az axiómák, a helyettesítés és a modus ponens segítségével kell felépíteni.
2. Az összetett állítások értékét részei értékének függvényeként kell megadni.

Bizonyítható, hogy Łukasiewicz 3-értékű logikájában az alábbi sémák tautológiák:

1. $A \supset (B \supset A)$
2. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$
3. $((A \supset \neg A) \supset A) \supset A$
4. $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

<u>Tétel:</u> (Wajsberg, 1931)

$Ł_3$ axiómatizálható a fenti sémák, a helyettesítési szabály és a modus ponens segítségével.

Łukasiewicz n-értékű, végtelen értékű logikája (1922)

Az n-értékű logika estén az igazságértékek halmaza:

$L_n = \{0, 1/(n-1), 2/(n-1), ..., (n-2)/(n-1), 1\}$

A végtelen értékű logika esetén:

$L_N = \{s/w: 0 \leq s \leq w, s, w \in N, w \neq 0\}$

Ez a definíció valójában a [0, 1] intervallumon értelmezett racionális számok halmazát adja.

A kitüntetett érték mindkét esetben az 1.

A konnektívumok értelmezése:

- $|\neg p| = 1 - |p|$
- $|p \supset q| = \min(1, 1 - |p| + |q|)$
- $|p \wedge q| = \min(|p|, |q|)$
- $|p \vee q| = \max(|p|, |q|)$
- $|p \equiv q| = 1 - \mathrm{abs}(|p| - |q|)$

Łukasiewicz igazságszabályai esetén a {0, 1} halmaz zárt bármely konnektívumra nézve, és a bevezetett konnektívumok ezen a halmazon ugyanúgy működnek, mint a klasszikus igazságértékelések, ezért $Taut_n \subseteq Taut_2$ minden n-re.

<u>Lindenbaum tétel:</u>

$\forall n, m \geq 2$ esetén teljesül, hogy $Taut_n \subseteq Taut_m$ akkor és csak akkor, ha $m-1 \mid n-1$.

Post többértékű rendszere (1921)

Post m-értékű rendszerét a {0, 1, ..., m-1} értékhalmazon definiálta. Kitüntetett érték az m-1.
Két operátort vezet be a halmazon:

- diszjunkció: $|p \vee q| = \max(|p|, |q|)$,
- negáció: $|\neg p| = |p| + 1 \pmod m$.

Megjegyzés: a negációt léptetésként, eltolásként értelmezi.

Az m = 2 esetben a rendszer megegyezik a klasszikus logikával, de ha m > 2, akkor a rendszer nem tartalmazza a klasszikus logikát, nem konzervatív bővítése.

A kizárt harmadik törvényének megfelelője tautológia: $|p \vee \neg p \vee \neg\neg p \vee \ldots \vee \neg\ldots\neg p| = m-1$

Konnektívumai ($\vee$, $\neg$) bázist, és funkcionálisan komplett rendszert alkotnak.
f: $\{0,1, ..., m-1\}^{(n)} \rightarrow \{0,1, ..., m-1\}$.

Például m = 4 esetén a következő igazságtáblákat kapjuk:

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$	$p\vee\neg p\vee\neg\neg p\vee\neg\neg\neg p$
0	1	2	3	3
1	2	3	0	3
2	3	0	1	3
3	0	1	2	3

A fenti táblázatból jól látható, hogy a kizárt harmadik elvének Post logikájában megfelelő formula tautológia lesz, mivel mindig a kitüntetett elemet (m-1 = 3) veszi fel.

Bochvar többértékű rendszere (1939)

A klasszikus logika és a halmazelmélet paradoxonjainak a megoldására törekedett.

Russell paradoxon: a ’rendes halmazok’ elmélet. Legyen $R = \{X \mid X \text{ halmaz}, X \notin X\}$. Vizsgáljuk meg, hogy ekkor az R halmaz rendes halmaz-e:

- ha R rendes, akkor teljesül rá, hogy $R \notin R$, tehát $R \in R$ lenne,
- ha R nem rendes, akkor $R \in R$ teljesül, vagyis $R \notin R$.

Erre a paradoxonra keres megoldást Bochvar úgy, hogy kétféle konnektívumot vezet be.

Belső konnektívumok

Konzervatív általánosításai a klasszikus logika konnektívumainak. A harmadik érték az I, ami a határozatlanságot, az értékhiányt jelöli. Az egyetlen kitüntetett érték a T, így a rendszerben nincsenek tautológiák.

$\wedge$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	F	I	F

p	$\neg$p
T	F
I	I
F	T

Külső konnektívumok

- Ap: ’állítás operátor’, jelentése: ’p igaz’.
- $\sim p \Leftrightarrow \neg Ap$
- $p \,\&\, q \Leftrightarrow Ap \wedge Aq$

p	Ap
T	T
I	F
F	F

p	~p
T	F
I	T
F	T

&	T	I	F
T	T	F	F
I	F	F	F
F	F	F	F

A külső konnektívumok az állítások igazságértékei közötti kapcsolatot jelenítik meg.

Bochvar többértékű rendszerében $|p| = |\neg p|$ pontosan akkor teljesül, ha $|p| = I$. Ekkor a Russell paradoxon már nem paradoxon többé.

Kleene többértékű rendszere

A határozatlanságot akarja bevezetni a logikai rendszerbe. Az eredeti motiváció a rekurzív függvények elméletéből származik.

Egy olyan gépet kell elképzelni, amely arra szolgál, hogy bizonyos kérdésekre igaz vagy hamis választ adjon. Speciális esetekben viszont előfordulhat, hogy a gép nem ad választ. Lehet például, hogy végtelen ciklusba kerül, vagy egy számítási folyamat felemészti erőforrásait, és ezekben az esetekben a gép válasza nem definiált.

Bochvarral ellentétben az erős Kleene rendszerben egy összetett mondatnak akkor is lehet valódi igazságértéke (F vagy T), ha valamely komponensei nem rendelkeznek igazságértékkel, azaz definiálatlanok.

A harmadik érték a határozatlanság, definiálatlanság: I.

Erős konnektívumok (1938)

$\wedge$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	F
F	F	F	F

$\vee$	T	I	F
T	T	T	T
I	T	I	I
F	T	I	F

$\supset$	T	I	F
T	T	I	F
I	T	I	I
F	T	T	T

Megjegyzés: konjunkció és diszjunkció esetén hasonlít Łukasiewicz 3-értékű logikájára, ha az értékeket átkonvertáljuk a következő módon: F = 0, I = ½, T = 1.

$|\neg p| = 1 - |p|$

$|p \wedge q| = \min (|p|, |q|)$

$|p \vee q| = \max (|p|, |q|)$

$p \supset q \Leftrightarrow \neg p \vee q$, ekkor $|p \supset q| = \max (1 - |p|, q)$

Az erős Kleene rendszerben nincsenek tautológiák, mert ha minden bemenet határozatlan, akkor a kimenet is az lesz.

Gyenge konnektívumok (1952)

$\wedge$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	F	I	F

$\vee$	T	I	F
T	T	I	T
I	I	I	I
F	T	I	F

$\supset$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	T	I	T

A gyenge Kleene rendszerben megjelenik a rekurzió. Ha egy számolási folyamat során fellép a determinálatlanság, akkor az egész eljárás determinálatlanná válik.

Megjegyzés: Bochvar belső konnektívumaira hasonlít.

A mátrix módszer

A továbbiakban egy rögzített általános nulladrendű nyelven olyan $L = (LC, Pr, Form)$ rendezett hármast értünk, amelyre teljesülnek a következők:

- $LC = \{ -, *, (,) \}$ logikai konstansok halmaza,
- $Pr = \{p, q, r, p_1, q_1, r_1, ...\}$ állításparaméterek nem üres, megszámlálható halmaza,
- Form az a halmaz, amely eleget tesz a következőknek:
    - $Pr \subseteq Form$,
    - ha $A \in Form$, akkor $-A \in Form$,
    - ha $A, B \in Form$, akkor $(A * B) \in Form$.

Def: Az L nyelv *mátrix*án egy (U, D) rendezett párt értünk, melyre teljesül, hogy

- $U = (A, f_1^{(1)}, f_2^{(2)})$ egy absztrakt algebra,
- $D \subseteq A$, az A kitüntetett elemeinek nem üres halmaza.

Példa: Łukasiewicz 3-értékű rendszere esetén

- $A = \{0, ½, 1\}$,
- $D = \{1\}$,
- $f_1(x) = \neg x$,
- $f_2(x, y) = x \supset y$.

Az L nyelv egy (U, D) mátrixra vonatkozó *interpretáció*ján egy $g: Pr \rightarrow A$ függvényt értünk. Az interpretáció generál egy értékelést az L nyelven:

- Ha $p \in Pr$, akkor $|p| = g(p)$.
- Ha $A \in Form$, akkor $|-A| = f_1(|A|)$.
- Ha $A, B \in Form$, akkor $|A * B| = f_2(|A|, |B|)$.

Def: Legyenek $U_1 = (A_1, f_1', f_2')$ és $U_2 = (A_2, f_1'', f_2'')$ absztrakt algebrák. Ekkor az (U_1, D_1) *részmátrixa* az (U_2, D_2) mátrixnak, ha

- $A_1 \subseteq A_2$,
- f_1', f_2' az f_1'', illetve az f_2'' függvényeknek az A_1 halmazra való leszűkítései.

A klasszikus logika mátrixa az összes eddigi 3-értékű logika mátrixának részmátrixa.

Következményreláció

Def: Legyen Γ, $\Delta \subseteq$ Form, Γ, Δ véges. Δ *következménye* a Γ halmaznak az M mátrixra nézve, $\Gamma \models_M \Delta$, ha teljesül a következő: ha minden M mátrixra támaszkodó g interpretáció esetén, ha $|A| \in D$ minden $A \in \Gamma$ formulára, akkor $|B| \in D$ valamely $B \in \Delta$ formulára.

Def: Az A formula *tautológia* az M mátrixra nézve, ha $0 \models_M A$ ($\models_M A$).

Az L nyelv bármely mátrixa esetén teljesülnek a következők:

1. Ha $\Gamma \cap \Delta \neq 0$, akkor $\Gamma \models_M \Delta$.
2. Ha $\Gamma \models_M \Delta$, akkor $\Gamma \cup \Sigma \models_M \Delta \cup \Pi$ (bővítési tulajdonság).
3. Ha $\Gamma, A \models_M \Delta$ és $\Gamma \models_M A, \Delta$, akkor $\Gamma \models_M \Delta$ (metszet tulajdonság).

Def: A *következményreláció* egy olyan reláció, amely teljesíti a fenti három tulajdonságot.

Def: *Absztrakt következményreláció*nak nevezzük azokat a véges formulahalmazok közötti relációkat, amelyek teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

1. Ha $\Gamma \cap \Delta \neq 0$, akkor $\Gamma \vdash \Delta$.
2. Ha $\Gamma \vdash \Delta$, akkor $\Gamma \cup \Sigma \vdash \Delta \cup \Pi$ (bővítési tulajdonság).
3. Ha $\Gamma, A \vdash \Delta$ és $\Gamma \vdash A, \Delta$, akkor $\Gamma \vdash \Delta$ (metszet tulajdonság).

Def: Ha egy absztrakt $\vdash$ következményreláció egybeesik egy M mátrix által definiált $\models_M$ következményrelációval, akkor M a $\vdash$ következményreláció *karakterisztikus mátrixa*.

A $\models_M$ következményreláció tulajdonságai:

1. *Uniformitás*: Ha $\Gamma \models \Delta$, akkor $\Gamma' \models \Delta'$, ahol Γ', Δ' úgy keletkezik Γ-ból és Δ-ból, hogy a bennük szereplő formulákban valamely állításparamétert ugyanazzal a formulával helyettesítjük.
2. *Γ-prím*: Egy következményrelációt Γ–prímnek nevezünk, ha formulák bármely véges Δ halmaza esetén, amennyiben $\Gamma \models \Delta$, úgy $\Gamma \models A$ valamely $A \in \Delta$ esetén.

Tétel: Ha $\models$ egy uniform következményreláció, akkor van karakterisztikus mátrixa.

Biz: Először megmutatjuk, hogy bármely véges Θ, Δ formulahalmazok esetén, amelyekre nem igaz, hogy $\Theta \models \Delta$, van olyan $M(\Theta, \Delta)$ mátrix, ahol $\models \subseteq \models_M$, de nem igaz, hogy $\Theta \models_M \Delta$. Ahhoz, hogy ilyen mátrixot találjunk, legyen $\models_1$ következményreláció Θ-prím kiterjesztése a $\models$ következményrelációnak úgy, hogy $\Theta \models_1 \Delta$ nem teljesül. Definiáljuk az $M = M(\Theta, \Delta)$ mátrixot a következő módon: a mátrix elemei legyenek az L nyelv formulái, ahol $p+q = (p*q)$, $f(p) = -p$. Az M kitüntetett elemei azok a p formulák, melyekre $\Theta \models_1 p$ igaz, így következik, hogy $\Theta \models_M \Delta$ nem teljesül. Ahhoz, hogy M érvényes legyen a $\models$ következményrelációra, feltesszük, hogy $\Pi \models \Sigma$, és van olyan g értékelés, melyre $g(\Pi) \subseteq D$. Egy értékelés annyit jelent, mint a helyettesítés Π^g, Σ^g, így az uniformitás tulajdonság miatt, ha $\Pi^g \models_1 \Sigma^g$, akkor $\Pi^g \models \Sigma^g$. Mivel $q \in \Pi^g$, ezért $\Theta \models_1 p$, és a metszet szabály miatt kapjuk, hogy $\Theta \models_1 \Sigma^g$. Mivel a $\models_1$ következményreláció Θ-prím, $\Theta \models_1 p$ igaz kell, hogy legyen minden $p \in \Sigma^g$–ra, tehát legalább egy Σ-beli formula felveszi a kitüntetett elemet.

Ahhoz, hogy találjunk egy M karakterisztikus mátrixot a $\models$ következményrelációhoz, elegendő venni a szorzatát az összes $M(\Theta, \Delta)$ mátrixnak, ahol $\Theta \models \Delta$ nem teljesül, mivel egy szekvent akkor és csak akkor tartalmazza a $\Pi_{i \in I} M_i$ szorzatmátrixot, ha minden M_i mátrixot tartalmaz.

Łukasiewicz véges értékű következményrelációja

Łukasiewicz m+1–értékű logikájában ($Ł_{m+1}$-ben) az igazságértékek halmaza: {0,1, ..., m}.
A konnektívumok értelmezése:

- $|p \supset q| = |p| \div |q|$, ahol $x \div y =_{def} x - y$, ha $x \geq y$, egyébként 0.
- $|\neg p| = m \div |p|$
- $p \vee q \Leftrightarrow (p \supset q) \supset q$, ekkor $|p \vee q| = \min(|p|, |q|)$
- $p \wedge q \Leftrightarrow (p \vee q)$, ekkor $|p \wedge q| = \max(|p|,|q|)$

Például $Ł_4$ igazságtáblázata a következő:

$\supset$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	0	0	1	2
2	0	0	0	1
3	0	0	0	0

A fenti táblázatban 0 a ’legigazabb’ és m = 3 a ’leghamisabb’ érték.

<u>Def:</u> Ha $k \in \{0, ..., m\}$, akkor legyen $J_k(x) = 0$, ha $x = k$; egyébként m. Egy függvényt, melyet a {0, ..., m} halmazon értelmezünk *$Ł_{m+1}$-definiálható*nak nevezzük, ha kifejezhető a negáció és az implikáció segítségével.

<u>Lemma:</u> Bármely $k \in \{0, ..., m\}$ esetén J_k $Ł_{m+1}$-definiálható.

Legyen $\vdash_{m+1}$ az a legszűkebb uniform következményreláció, amely $\forall x, y, z \in \{0, 1, ..., m\}$ esetén tartalmazza a következő szekvenseket:

1. $\vdash J_0(p), J_1(p), ..., J_m(p)$
2. $J_x(p), J_y(p) \vdash$, ha $x \neq y$
3. $J_x(p), J_y(q) \vdash J_{y \div x}(p \supset q)$
4. $J_x(p) \vdash J_{m-x}(\neg p)$
5. $J_0(p) \vdash p$
6. $p \vdash J_0(p)$

Tétel: $\Sigma \vdash_{m+1} \Theta$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \models_{m+1} \Theta$.

Biz: (teljesség)

- Ha nem teljesül, hogy $\Sigma \vdash_{m+1} \Theta$, akkor van olyan $\vdash$ következményreláció, amely Σ-prím kiterjesztése $\vdash_{m+1}$-nek és amelyre nem igaz, hogy $\Sigma \vdash \Theta$.
- Legyen a g az $Ł_{m+1}$ nyelv egy olyan interpretáló függvénye, amelyre teljesül, hogy $g(p) = k$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vdash J_k(p)$. 1. és 2. által a g függvény jól definiált.
- 3. és 4. segítségével bebizonyítható, hogy bármely $A \in$ Form esetén $\Sigma \vdash_{m+1} J_k(A)$ akkor és csak akkor, ha $g(A) = k$.
- 5. és 6. segítségével beláthatjuk, hogy Θ egyetlen eleme sem veszi fel a kitüntetett értéket.
- 6. segítségével megmutatható, hogy Σ minden eleme a kitüntetett értéket veszi fel.

Egy hagyományos axiómatikus felépítése $Ł_3$-nak (Wajsberg, 1931):

1. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$
2. $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$
3. $((p \supset \neg p) \supset p) \supset p$

Lindenbaum tétel:

$\models_m \subseteq \models_n$ (azaz $\models_n$ kiterjesztése $\models_m$-nek) akkor és csak akkor, ha $n - 1$ osztója $m - 1$-nek.

Biz: Először vegyük az $m < n$ esetet. Legyen $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Minden g értékelés esetén $Ł_m$–ben $g(\varphi \leftrightarrow \psi) = |g(\varphi) - g(\psi)|$, ahol $|x|$ az x abszolút értéke. Ha $k > 1$, akkor legyen δ_k az összes $p_i \leftrightarrow p_j$ $(i \neq j,\ 0 \leq i,j \leq k)$ alakú formula diszjunkciója. A δ_k egy tautológiája $Ł_m$–nek akkor és csak akkor, ha $m \leq k$. Ha k, vagy annál kevesebb igazságérték van, akkor legalább két különböző változó ugyanazt az értéket vesz fel δ_k-ban, így δ_k a 0 értéket veszi fel. Ha több mint k igazságérték van, akkor egyszerűen minden változóhoz különböző értéket rendel.

Ha $m \geq n$, akkor megmutatjuk, hogy $\models_{m+1} \subseteq \models_{n+1}$ akkor és csak akkor, ha n osztja m-et. Ha $m = qn$, akkor az $Ł_{n+1}$ mátrixa izomorf az $Ł_{m+1}$ egyik részmátrixával az $f: x \to qx$ leképezésen át, így $\models_{m+1} \subseteq \models_{n+1}$.

Łukasiewicz végtelen értékű következményrelációja

A [0,1] intervallum racionális számain definiált végtelen értékű logika:

$L_N = \{s/w: 0 \leq s \leq w, s, w \in N, w \neq 0\}$

Tétel: Legyen R az $\supset$ és a $\neg$ műveletek által definiált mátrix. Ekkor R karakterisztikus mátrixa a $\models_\omega$ következményrelációnak.

Biz: Legyenek $\gamma_1, ..., \gamma_n$ racionális számok a [0, 1] intervallumon, ahol $\gamma_i = a_i/b_i$, és legyen k a b_i –k legkisebb közös többszöröse. Az $\supset$ és a $\neg$ operátorok alkalmazása az R mátrixon csak olyan racionális számokat állít elő, amelyek kifejezhetőek c/k alakban, így az R legkisebb részmátrixa, amely tartalmazza a $\gamma_1, ..., \gamma_n$ elemeket, véges. Ebből következik, hogy $\Sigma \models_R \Theta$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \models_M \Theta$ teljesül az R minden M véges részmátrixa esetén.

Megjegyzés: A $\models_\omega$ következményrelációnak nincs véges karakterisztikus mátrixa.

Minden tautológia bizonyítható a következő axióma sémák:

1. $p \supset (q \supset p)$
2. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$
3. $((p \supset q) \supset q) \supset ((q \supset p) \supset p)$
4. $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$
5. $((p \supset q) \supset (q \supset p)) \supset (q \supset p)$

továbbá a helyettesítési szabály és a ’modus ponens’ segítségével.

Kleene következményrelációja

Vegyük a $\wedge$ és a $\neg$ operátorokat alapul. Ekkor a többi (erős) konnektívum definíciója:

- $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$
- $p \supset q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- $p \equiv q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Legyen $\vdash_K$ az a legszűkebb uniform következményreláció, amely tartalmazza a következő szekvenseket:

$p \vdash_K \neg\neg p$ $p \wedge q \vdash_K p$ $p \wedge q \vdash_K q$ $p, q \vdash_K p \wedge q$	$p, \neg p \vdash_K$	$\neg\neg p \vdash_K p$ $\neg p \vdash_K \neg (p \wedge q)$ $\neg q \vdash_K \neg (p \wedge q)$ $\neg(p \wedge q) \vdash_K \neg p, \neg q$

Belátható, hogy $\Sigma \vdash_K p \wedge q$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vdash_K p$ és $\Sigma \vdash_K q$, továbbá $\Sigma \vdash_K \neg(p \wedge q)$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vdash_K \neg p, \neg q$.
Jelölje $\models_K$ a Kleene logika mátrixa által meghatározott következményrelációt.

<u>Tétel:</u> $\Theta \vdash_K \Sigma$ akkor és csak akkor, ha $\Theta \models_K \Sigma$.

<u>Biz:</u> Indirekt tegyük fel, hogy $\Theta \vdash_K \Sigma$ nem teljesül. Akkor van olyan $\vdash$ következményreláció, amely Θ–prím kiterjesztése $\vdash_K$-nak, és amelyre nem igaz, hogy $\Theta \vdash \Sigma$.
Definiáljuk a g függvény értékeit a következő módon:

- $g(p) = T$, ha $\Theta \vdash p$,
- $g(p) = F$, ha $\Theta \vdash \neg p$,
- $g(p) = I$ egyébként.

Ez a hozzárendelés konzisztens, mert ha $\Theta \vdash p$ és $\Theta \vdash \neg p$, akkor $\Theta \vdash \Sigma$ teljesül a bővítés és metszet szabály miatt.

Bochvar következményrelációja

Jelölje $\models_B$ a Bochvar logika mátrixa által meghatározott következményrelációt. Az egyetlen kitüntetett elem: T.

<u>Tétel:</u> $\Sigma \models_B \Theta$ akkor és csak akkor, ha van olyan Θ', hogy $\Theta' \subseteq \Theta$, és Θ' kielégíti a következő feltételeket:

- $\Sigma \models \Theta'$ a klasszikus logika értelmében helyes.
- A Θ' minden állításparamétere előfordul Σ–ban.

Véges axiómatizálhatóság

Az eddigi véges mátrixok által generált következményrelációk végesen axiómatizálhatók voltak: véges sok séma + véges sok levezetési szabály.

Kérdés: $\forall$ véges mátrix által generált következményreláció végesen axiómatizálható-e?
(Válasz: NEM!)

Wronski (1979): A következő 3-értékű mátrix által generált következményreláció nem axiómatizálható végesen. Az egyetlen kitüntetett elem a 2.

.	0	1	2
0	2	0	2
1	2	2	2
2	2	2	2

Funkcionális komplettség

<u>Def:</u> Egy logikai mátrix *funkcionálisan komplett*, ha bármely M halmazon definiált $f(\underline{d})$ függvény kifejezhető egy $\varphi(\underline{p})$ formulával (azaz, megadható véges sok állításparaméter és az értelmezett konnektívumok segítségével). $\underline{d}= (i_1, i_2, ..., i_k)$, $i_j \in M$, és $\underline{p}= (p_1, p_2, ..., p_k)$, $p_j \in Pr$

<u>Def:</u> Legyen F az $M = \{0, 1, ..., m\}$ halmazon definiált függvények egy tetszőleges halmaza. A konstansokat 0 argumentumú függvényeknek tekintjük. Az $N \subseteq M$ halmazt *F-zárt*nak nevezzünk, ha N zárt az F halmazba tartozó függvények alkalmazására nézve.

<u>Def:</u> Az $X \subseteq M$ halmaz *F-lezárt*ja az a legszűkebb F-zárt halmaz, amely tartalmazza az X halmazt. Jelölés: $F_{CL}(X)$

<u>Tétel:</u> Post m+1-értékű logikája funkcionálisan komplett.

Definiálható függvények

Def: Legyen $M = \{0, 1, ..., m\}$ és F az M halmazon definiált függvények olyan halmaza, melyre teljesül, hogy min, max, $J_k \in F$, ha $k \in M$. Ekkor az M halmazon definiált n-változós f függvényt *F-definiálható*nak nevezzük, ha $f(\underline{x}) \in F_{CL}(\{x_1, x_2, ... x_n\})$ minden $\underline{x} \in M^{(n)}$ esetén.

$Ł_{m+1}$-ben definiálható függvények

Łukasiewicz logikai rendszerei nem funkcionálisan komplettek. Ha egy formulában szereplő állításparaméterek csak a klasszikus igazságértékeknek megfelelő 0-t, illetve m-et veszik fel, akkor a formula is csak ezen értékek valamelyikét veheti fel.
$Ł_3$ úgy tehető komplettté, hogy hozzávesszük azt a függvényt, amely mindig az ½ értéket veszi fel. Valójában bármely nem definiálható függvény felvétele komplettté teszi $Ł_3$-at

Def: Az m-értékű konnektívumoknak az S halmazát *prekomplett*nek nevezzük, ha nem funkcionálisan komplett, de bármely S-ben nem definiálható függvény hozzáadásával funkcionálisan komplettté válik.

Következmény: Az $Ł_{m+1}$ konnektívumai akkor és csak akkor alkotnak prekomplett halmazt, ha m prímszám. Például $Ł_6$ prekomplett, de $Ł_7$ nem az.

Lemma: Legyen F az $Ł_{m+1}$-definiálható függvények halmaza. Ha $X \subseteq \{0, 1, ..., m\}$ F-lezárt, akkor $\gcd(x, y) \in X$ minden $x, y \in X$ esetén. (gcd = legnagyobb közös osztó)
Biz: Minden $x, y \in X$ esetén, ha $x > y$, akkor $x–y \in X$. Így a kivonás ismétlésével kapott (x/y) osztás maradéka is benne van X–ben. Az Euklideszi algoritmus, amely a legnagyobb közös osztót határozza meg, a maradék kiszámításának ismétlését végzi. Tehát $\gcd(x, y) \in X$.

Tétel: Az $M = \{0, 1, ..., m\}$halmazon definiált n-argumentumú f függvény akkor és csak akkor $Ł_{m+1}$–definiálható, ha bármely $\underline{a}$ rendezett n-es esetén $\gcd(\{a_1, a_2, ..., a_n, m\})$ osztója $f(\underline{a})$-nak.

Biz: A feltétel szükségszerűsége abból a tényből következik, hogy ha x és y osztható K-val, akkor x-y is osztható vele. Elegendő azt belátni, hogy csak az $Ł_{m+1}$-lezárt halmazok jellemzésére van szükség.

- Legyen X_k a k többszöröseinek halmaza M-ben. Most megmutatjuk, hogy az $Ł_{m+1}$-lezárt halmazok pontosan azok az X_k halmazok, ahol k az m osztója. Könnyen belátható, hogy X_k zárt k-ra nézve.
- Viszont ha X egy $Ł_{m+1}$-lezárt halmaz, akkor legyen k = gcd(X). Az előző lemma miatt $k \in X$. Mivel m benne van minden $Ł_{m+1}$-lezárt halmazban és k osztója m-nek, ezért m = qk. Most legyen y = pk a k egy többszöröse M-ben. Ekkor y = m – (q – p)k, így $y \in X$, tehát $X = X_k$.

Az $Ł_{m+1}$–definiálható függvények jellemzése az $Ł_{m+1}$–lezárt halmazok leírásából következik.

Irodalomjegyzék

Alasdair Urquhart: Many-valued logic, in: D. Gabbay, F. Güenther: Handbook of philosophical logic, Vol. III, pp. 71_117.

References:

- Bochvar D. A.:1939, 'On a 3-valued logical calculus and its application to the analysis of contradictions', Matémaitceskij sbornik 4, 287-308.
- Kleene, S. C.: 1938, 'On a notation for ordinal numbers', J. Symbolic Logic 3, 150-155.
- Łukasiewicz, J.: 1970, Selected Works, ed. by L. Borkowski, North-Holland, Amsterdam, London.
- Post, E.: 1921, 'Introduction to a general theory of elementary propositions', Amer J. Math., 43, 163-185.

Ruzsa Imre – Máté András: Bevezetés a modern logikába, Osiris Kiadó, Budapest, 2001.

Mihálydeák Tamás: Többértékű logikák – értékréses logika (2007.május) elektronikus jegyzet http://www.inf.unideb.hu/~mihalydeak/

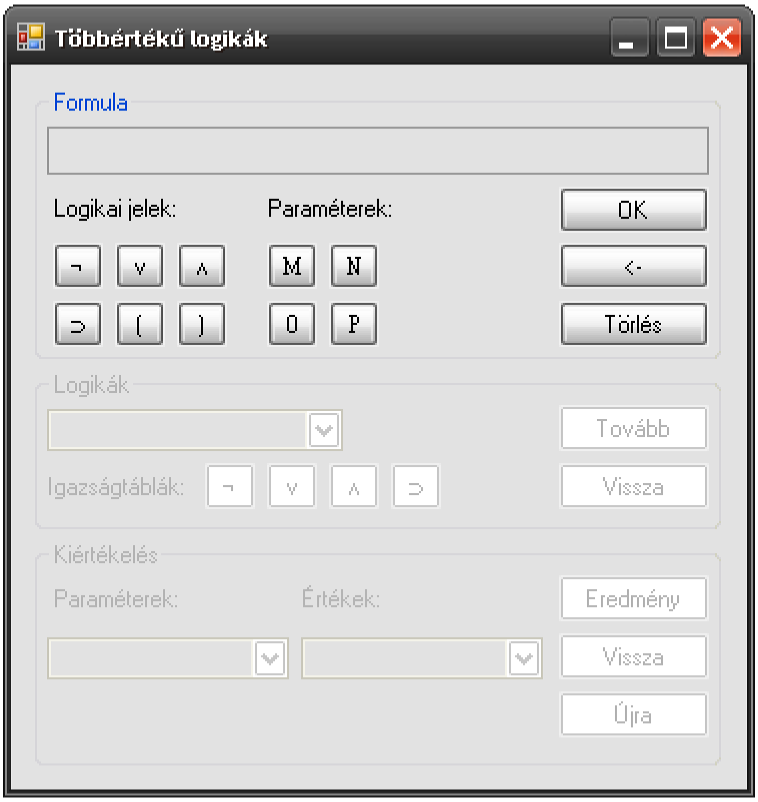
Függelék

ManyValuedLogic.exe

A diplomamunka elméleti anyagának szemléltetésére készítettem egy nagyon egyszerűen kezelhető programot. A felhasználónak nem kell a különböző logikai jelek, állításparaméterek és azok értékeinek begépelésével bajlódnia. Gombok segítségével kényelmesen és gyorsan kiválaszthatja a kívánt elemeket.

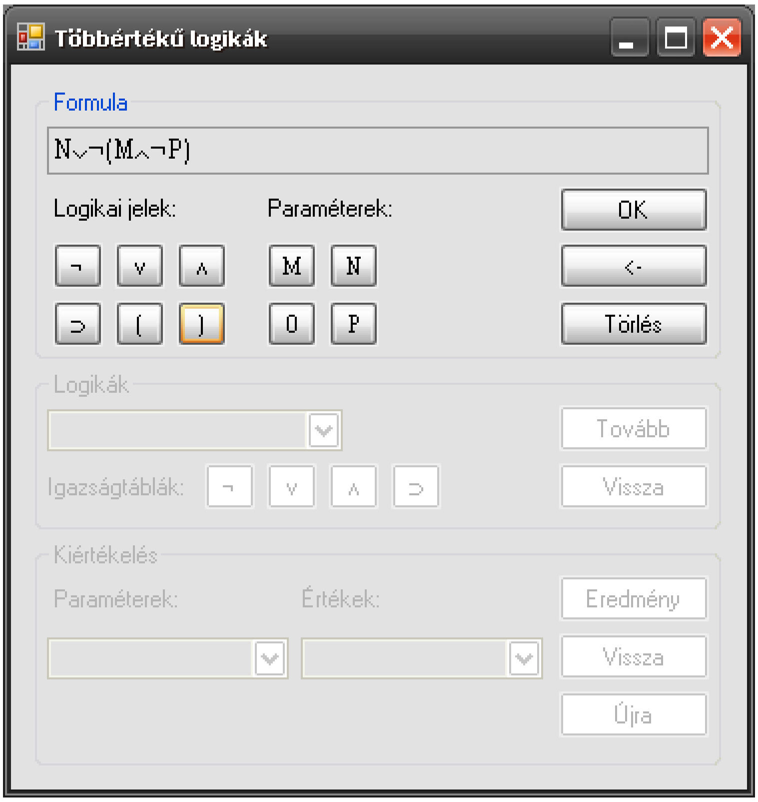
A program működése és használata

A program logikailag három különálló részből épül fel. Kezdetben csak az első rész aktív.



1. ábra A program indítása után

Ebben a részben a formula beolvasása, és szintaktikai ellenőrzése történik meg. A logikai jelek és az állításparaméterek külön gombokon vannak. A kiválasztott elem megjelenik a legfelső szövegmezőben. Hátrány, hogy mindig csak a formula végéhez tudunk hozzáfűzni egy újabb karaktert, így a javítás kicsit körülményes.



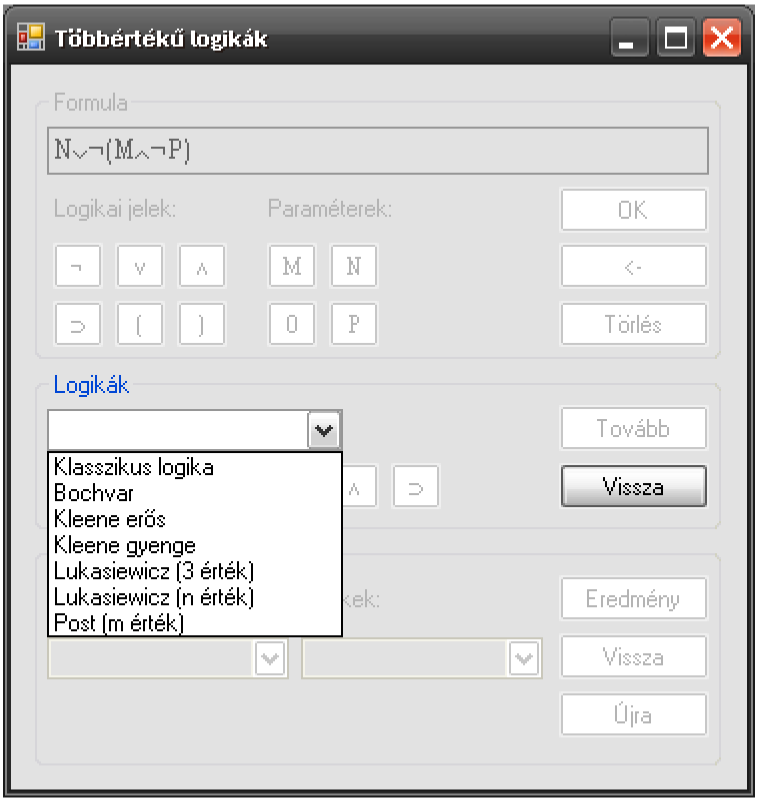
2. ábra A formula bevitele

A Törlés gomb az egész eddigi formulát kitörli, míg a ← gomb csak az utolsó karakterét. Az OK gombra kattintva megtörténik a szintaktikai ellenőrzés. Hiba esetén figyelmeztetést kapunk, és visszatérhetünk a formula szerkesztéséhez.

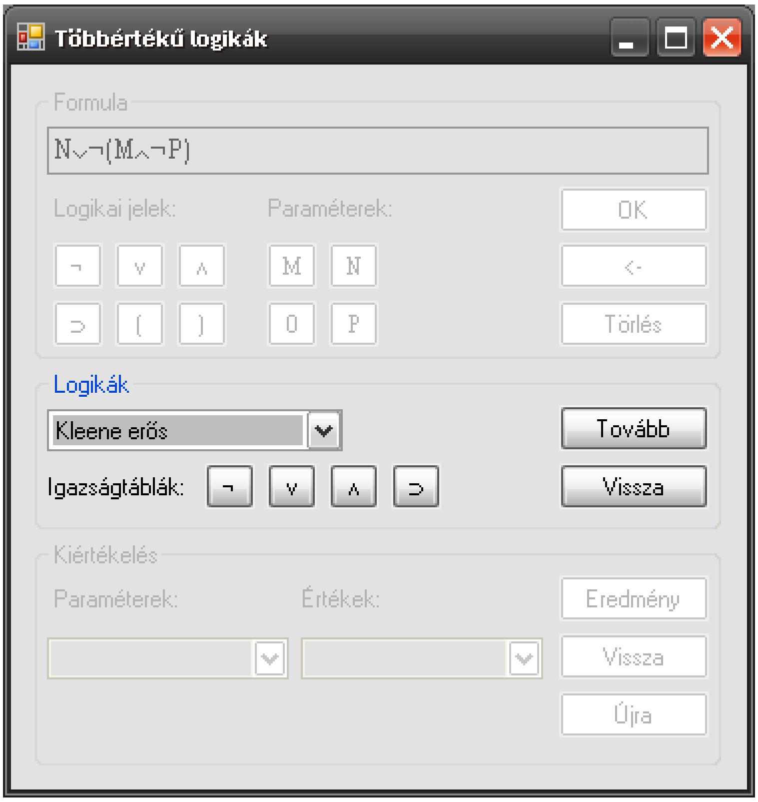
3. ábra Hiba

Ha a formula helyes volt, akkor a szerkesztő ablak inaktívvá válik, és következik a második szakasz. Választanunk kell a lehetséges logikák közül, hogy melyik szerint értékelődjön ki a megadott formula. Egy lenyíló lista tartalmazza ezeket.

A Vissza gombbal tudunk változtatni a formulán, ha mégis meggondolnánk magunkat.

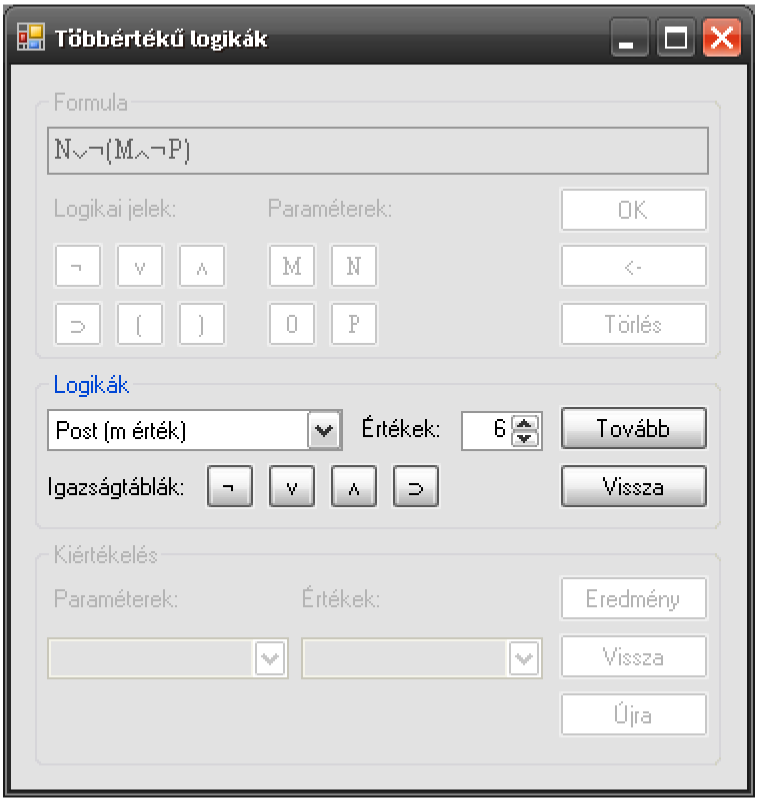


4. ábra Logikák listája



5. ábra Logika kiválasztása

Bochvar és Kleene esetében természetesen 3-értékű logikákról van szó, azonban Lukasiewicz n-értékű és Post m-értékű logikái esetén meg kell adni az értékek darabszámát is.



6. ábra m érték megadása

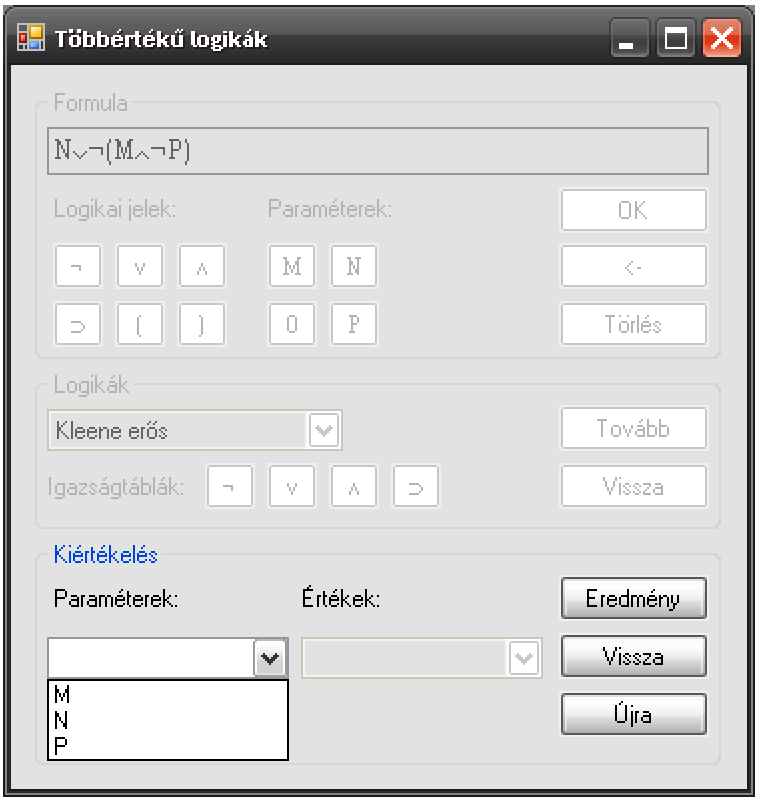
Az Igazságtáblák felirat mellett található négy gomb, amelyekkel az adott művelet táblázatát lehet megnézni egy külön ablakban. Pl Lukasiewicz 4-értékű logikájában az implikáció a köv:

Lukasiewicz (4 érték)

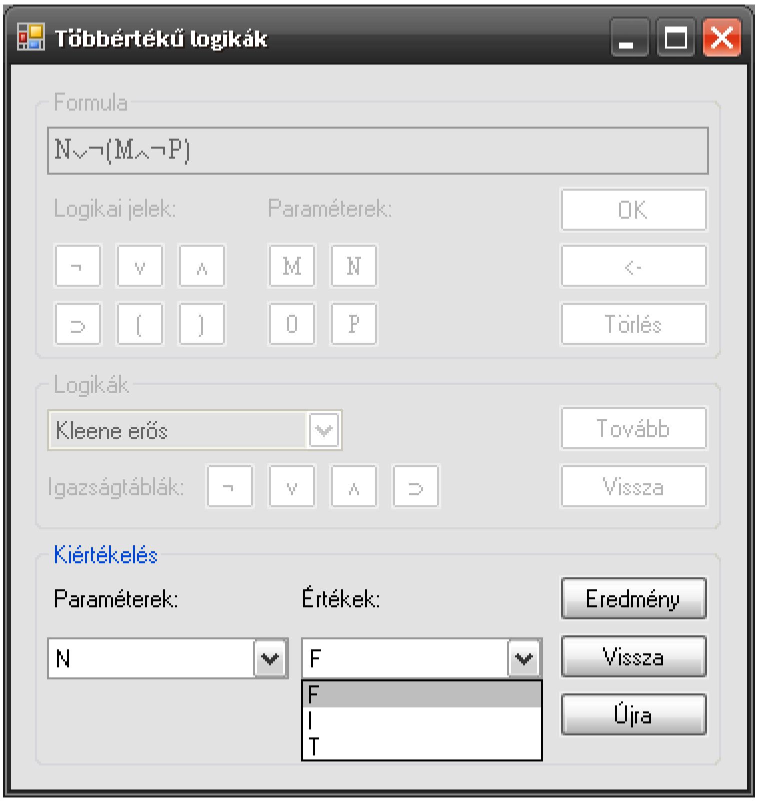
⊃	0	1/3	2/3	1
0	1	1	1	1
1/3	2/3	1	1	1
2/3	1/3	2/3	1	1
1	0	1/3	2/3	1

7. ábra Igazságtábla

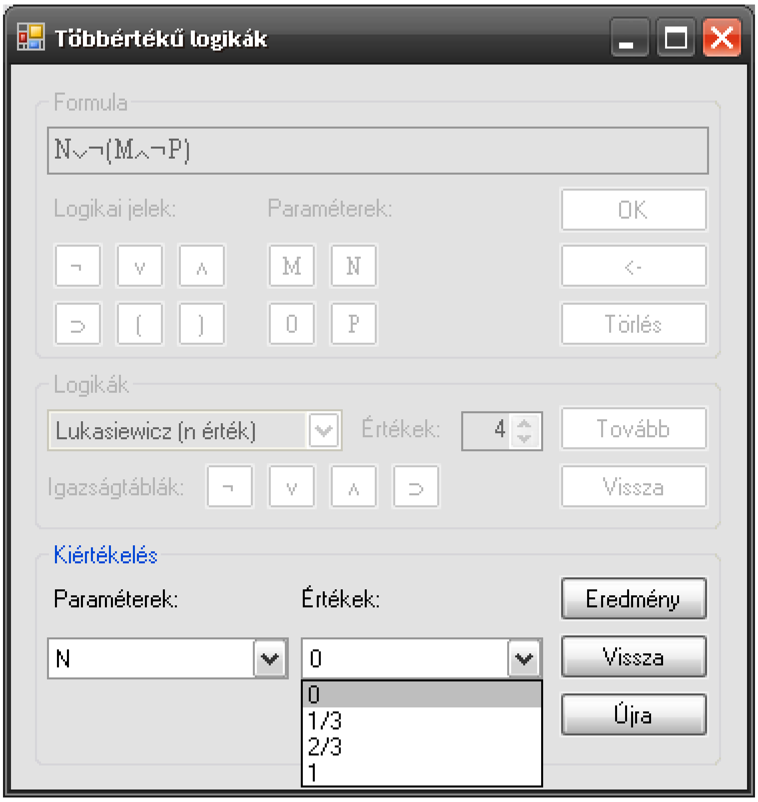
Az Tovább gombra kattintva eljutunk a harmadik szakaszhoz. A paraméterekhez külön – külön értékeket rendelhetünk hozzá. A listában csak azok a változók jelennek meg, amik előfordulnak a megadott formulában. Ha egy paraméternek nem adunk értéket, akkor az alapértelmezés szerint hamis lesz (0 vagy F). A lehetséges értékek halmaza függ a logikától.



8. ábra Paraméter lista



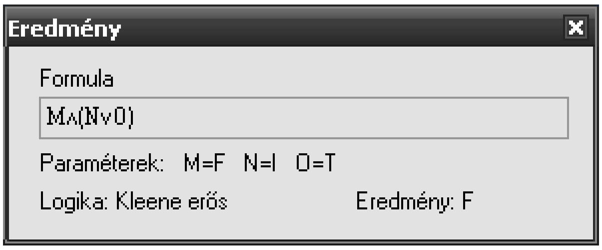
9. ábra Lehetséges értékek – Kleene logikájában



10. ábra Lehetséges értékek – Lukasiewicz 4-értékű logikájában

Az Eredmény gomb hatására megtörténik a formula kiértékelése. Az eredmény mindig egy új ablakban jelenik meg. Itt látható, hogy mi volt az eredeti formula, melyik logikát választottuk ki, az egyes paraméterekhez milyen értékeket rendeltünk hozzá, és végül az eredmény.

11. ábra Eredmény – Klasszikus



12. ábra Eredmény – Kleene

A Vissza gomb segítségével változtatni tudunk a logikán. Ha egy szintet visszalépünk, akkor ugyanazt a formulát megnézhetjük egy másik logikában.
Az Újra gombra kattintva elölről kezdhetjük az egész folyamatot.

A program megvalósítása

A ManyValuedLogic program C# nyelven készült.
A nyelv könnyen kezelhető, kényelmes fejlesztőkörnyezettel rendelkezik többek között a Form alkalmazások készítéséhez. Nagyon hasonlít a Java–hoz, objektumorientált eszközöket tartalmaz, melyek lehetővé teszik például az osztályok származtatását.

A **Parse** osztályban lévő metódusok végzik a formula szintaktikai ellenőrzését. Van olyan közöttük, amely megkeresi a fő konnektívumot és visszatérési értékben megadja, hogy az adott formula mely indexén található, illetve jelzi, ha nem talál benne ilyet. Ebben az esetben csak atomi formuláról lehet szó. A fő konnektívum által elválasztott részformulákat megvizsgálja rekurzívan. Negáció esetén persze csak egy részformula marad.
A logikai összekötő jelek erősorrendje csökkenőleg: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$. Fontos megjegyezni, hogy itt a konjunkció erősebb, mint a diszjunkció.

A **FormulaTree** osztály egy formulafát épít fel a szintaktikailag helyes formulából. A fa bejárásával történik meg a kiértékelés. (EvaluateFormula metódus)
Ebben található az a metódus, amely megadja, hogy a formulában milyen paraméterek fordulnak elő.

Az **Evaluator** egy absztrakt ősosztály, ennek a leszármazottai tartalmazzák a különböző logikák szerinti kiértékelést. Minden leszármazott osztály megvalósít két absztrakt Evaluate metódust. Az egyiknek 2 paramétere van, egy konnektívum és egy érték, a másiknak 3 paramétere van, egy konnektívum, és két érték, ezek a kétoperandusú műveletek (konjunkció, diszjunkció, implikáció). Mindegyik kiértékelő képes visszaadni az adott logikában felvehető értékek listáját.

A **FormTable** osztály az igazságtáblák dinamikus kezelését végzi. A táblázat cellái valójában gombok, amelyek a .Net Button osztályából származnak, lehetővé téve az egyedi igények egyszerű beállítását. A Form példányosításakor meg kell adni a felépítéséhez szükséges információkat: a kért logika kiértékelő objektumát, és a kiválasztott konnektívumot. Ezek alapján épül fel a táblázat, és a Form mérete beállítódik a táblázatnak megfelelően. Ez az ablak nem tűnik el, több is készíthető belőle, és használható súgóként.

A **FormLogic** osztály valósítja meg a program lényegét. Az eszközök (gombok, listák, stb.) értékeinek, tulajdonságainak beállítása és az események hozzárendelése mind itt történik meg.