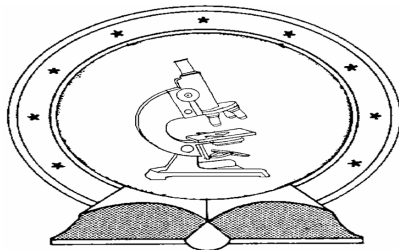


DE TTK



1949

Kamatlábmodellek statisztikai vizsgálata

Doktori (PhD) értekezés

Fülöp Erika

Témavezető: Dr. Pap Gyula

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2014.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika– és Számítástudományok Doktori Iskola Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és alkalmazott matematika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2014. június 18.

.....

Fülöp Erika
jelölt

Tanúsítom, hogy Fülöp Erika doktorjelölt 2005–2014 között a fent megnevezett Doktori Iskola Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és alkalmazott matematika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2014. június 18.

.....

Dr. Pap Gyula
témavezető

Kamatlábmodellek statisztikai vizsgálata

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.

Írta: Fülöp Erika okleveles matematikus, alkalmazott matematikus.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori
Iskolája (Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és alkalmazott
matematika) programja keretében.

Témavezető: Dr. Pap Gyula

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 20

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20... ..

Köszönetnyilvánítás ¹

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek abban, hogy ez a disszertáció elkészüljön.

Először is kisfiamnak Leventének és férjemnek Gergelynek az ezen időszak alatt nyújtott óriási szeretetükért és türelmükért.

Témavezetőmnek, Dr. Pap Gyulának, aki elindított a tudományos pályán és komoly támogatást nyújtott a kutatásaim során. Külön köszönöm a kedvességét, segítőkészségét és a rám áldozott hétvégéit.

Ugyancsak köszönettel tartozom munkatársaimnak, akik szakmai kérdéseim során készségesen álltak rendelkezésemre és igyekeztek tehermentesíteni az utóbbi időkben.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm szüleimnek és barátaimnak, hogy mellettem álltak és biztattak.

¹A kutatás a TÁMOP-4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Előzmények	3
2.1. Kamatlábmodellek, történeti megjegyzések	3
2.2. Diszkrét idejű HJM típusú kamatlábmodellek	7
3. Konzisztencia	11
3.1. Az ML becslés konzisztenciája	11
3.2. Erős konzisztencia függő minta esetén	15
4. Erős konzisztencia a HJM-típusú modellben	21
4.1. Erős konzisztencia n^2 -tel arányos minta esetén	22
4.2. Erős konzisztencia n -el arányos minta esetén	37
4.3. Szimulációk	46
4.4. Függelék A	50
4.5. Függelék B	55
5. Lokális aszimptotikus normalitás	59
5.1. Lokális aszimptotikus normalitás	60
5.2. LAN a kamatlábmodellben	63
5.3. Aszimptotikusan optimális próba	84
Összefoglalás	87
Summary	90

Irodalomjegyzék	93
A jelölt publikációi	97

1. fejezet

Bevezetés

A valószínűségszámítás és sztochasztikus kalkulus egyik legnagyobb alkalmazási területe a pénzügyi matematika. Mindhárom terület hatalmas fejlődésen esett át az elmúlt évtizedekben. A határidős ügyletek, opciók a közgazdasági ismeretek dinamikusan fejlődő része és több, ezen eszközöket leíró, matematikai modellel tállkozhatunk. A modellillesztésnél felmerülő statisztikai kérdések vizsgálata azonban nem túl gyakori. Így ezen dolgozatban ezzel a kérdéskörrel foglalkozunk. Egy általános, határidős kamatlábfolyamatokat leíró modell a folytonos idejű Heath-Jarrow-Morton (HJM) modell. Ezen HJM modell diszkrét idejű verziójának véletlen folyamat helyett véletlen mezővel meghajtott általánosított esetét vizsgáljuk, melyet Gáll, Pap és Zuijlen javasolt diszkrét időben [11]. A véletlen mező bevezetésével rugalmasabb kamatlábmodellek alkothatók, mint a klasszikus modellek esetén, amelyeket egyetlen folyamat hajt meg. Továbbá a véletlen mezős kamatlábmodellek ötlete a folytonos idejű kamatlábmodellek irodalmában merült fel először, azonban az ezekhez tartozó pénzügyi kalkulussal kapcsolatban jelentkező bizonyos problémák azt sugallják, hogy a diszkrét idejű megközelítés ezen problémákban is segíthet és így akár a folytonos idejű modellek fejlődéséhez is hozzájárulhat.

A dolgozatban paraméterbecslés aszimptotikáját tanulmányozzuk különböző szituációkban, statisztikai kísérletsorozat viselkedését vizsgáljuk és statisztikai tesztelésről is esik szó. A felépítés a következő.

Az 2. fejezetben összefoglaljuk a HJM-típusú kamatlábmodelleket, a szükséges alapfogalmakat, illetve megadjuk az általunk tanulmányozott, Gáll, Pap és Zuijlen

által bevezetett, arbitrázsmentes (lásd [6]), Gauss-típusú autoregresszív mezővel meghajtott diszkrét idejű határidős kamatlábmodellt.

A 3. fejezetben maximum likelihood becslések konzisztenciájával foglalkozunk függő minta esetén. Felelevenítjük Heijmans és Magnus [15] gyenge konzisztenciával kapcsolatos eredményeit, amik arra sarkalltak minket, hogy hasonlóan jól használható feltételeket találjunk erős konzisztenciára. Majd bemutatjuk az általunk kidolgozott feltételrendszert a maximum likelihood becslés erős konzisztenciájára szintén függő minta esetén.

A 4. fejezetben leellenőrizzük az erős konzisztencia előző fejezetbeli elégséges feltételét a kamatlábmodellünkben, és több esetben bizonyítjuk az autoregressziós paraméter maximum likelihood becslésének erős konzisztenciáját. Továbbá összefoglaljuk az R [24] statisztikai programcsomag segítségével készített szimulációs eredményeinket, ahol az autoregressziós paraméter maximum likelihood becslésének aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk.

Kísérletsorozatok vizsgálatánál fontos kérdés a lokális aszimptotikus normalitás vizsgálata és a kísérletsorozatok konvergenciája egy határkísérlethez. Az 5. fejezetben bizonyítjuk, hogy a kamatlábmodellhez kapcsolódó kísérletsorozat az autoregressziós paraméter több értéke esetén is lokálisan aszimptotikusan normális. Ennek fő előnye, hogy egyben aszimptotikusan optimális próbát is tudunk konstruálni van der Vaart [28] munkája alapján.

Az ebben a doktori értekezésben található eredmények alapját a [2], [3], [4] és [5] munkáim jelentik. Ezek, a [2] munka kivételével, közös publikációk témavezetőmmel, Pap Gyula (Szegedi Tudományegyetem) professzorral.

2. fejezet

Előzmények

Ezen fejezetben egy áttekintést adunk a HJM modellekről, bevezetjük a szükséges alapvető pénzügyi matematikai fogalmakat és részletezzük az általunk tanulmányozott modellt.

2.1. Kamatlábmodellek, történeti megjegyzések

Az irodalomban több megközelítést találhatunk a kamatlábstruktúrák formalizálására, és ebből a kötvények és más kamatlábfüggő pénzügyi eszközök származtatására. Egy ilyen áttekintést találhatunk [22]-ben.

Az általunk vizsgált modell Heath, Jarrow és Morton megközelítésén alapszik [14]. Az említett szerzőhármas megadott egy határidős kamatlábmodellt, majd ebből származtatták a kötvényárakat. Később sok szerző vizsgált hasonló modelleket, különböző paraméterezésekkel. Az alap Heath-Jarrow-Morton (HJM) modellt a következőképpen foglalhatjuk össze.

Jelölje $f(t, x)$ a pillanatnyi kamatlábat a t időpontban x lejáratig hátralévő idővel, ahol $t, x \in \mathbb{R}_+$. Kiemelnénk, hogy mi az úgynevezett Musiela paraméterezést követjük (bővebben lásd [20]), ahol x nem a lejáratidőt, hanem a *lejáratig* hátralévő időt jelöli. A HJM modellben a határidős kamatlábakat leíró sztochasztikus differenciálegyenlet

$$d_t f(t, x) = \alpha(t, x)dt + \beta(t, x)dW(t), \quad (2.1)$$

ahol $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ standard Wiener folyamat (mely lehet egy, illetve általánosabb esetben több (véges) dimenziós).

A kamatlábfolyamat ismeretében megadható a kötvényár. Ha $P(t, s)$ jelöli a kamatszelvény nélküli kötvényt a t időpontban s lejáratú idővel, akkor a Heath, Jarrow és Morton által javasolt kötvényár:

$$P(t, s) = \exp \left\{ - \int_0^{s-t} f(t, u) du \right\}, \quad 0 \leq t \leq s.$$

A (2.1) által megadott $\{f(t, x)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ határidős kamatlábmodell minden $x \geq 0$ esetén ugyanazzal a Wiener folyamattal van meghajtva. Ha például azt az esetet tekintjük, mikor $\beta(t, x)$ determinisztikus, akkor minden kamatlábat ugyanaz a hatás éri, ami nem tűnik túl valószínűnek. Emiatt természetes általánosítása a modellnek, ha véletlen mezőt vezetünk be véletlen folyamat helyett. Egy ilyen modellben a különböző lejáratú idejű kamatlábak különböző folyamattal lehetnek meghajtva. A folytonos idejű modell ilyen általánosítását Kennedy [18] vezette be. Később Goldstein [12], továbbá Santa-Clara és Sornett [25] is vizsgáltak ilyen modelleket. A fő gondolatot a következőképpen foglalhatjuk össze. Legyen $\{Z(t, s)\}_{t, s \in \mathbb{R}_+}$ egy véletlen mező, és minden rögzített $x \in \mathbb{R}_+$ esetén legyen a határidős kamatlábfolyamatot megadó differenciálegyenlet

$$d_t f(t, x) = \alpha(t, x) dt + \beta(t, x) Z(dt, x), \quad (2.2)$$

ahol minden $s \in \mathbb{R}_+$ esetén $\{Z(t, s)\}_{t, s \in \mathbb{R}_+}$ egy alkalmas szemimartingál, és α meg β eleget tesznek a megfelelő regularitási feltételeknek, hogy a fenti differenciálegyenlethez tartozó integrálok létezzenek.

Egy ilyen (véletlen mező által hajtott) általánosított (2.2) modellt *véletlen mezős modellnek* fogunk nevezni szemben a szakirodalom korábbi, a fenti értelemben egyszerűbb (nem véletlen mezős) (2.1) modelljeivel, amelyeket *klasszikusnak* fogunk nevezni. A fő feladat egy ilyen modell definiálásánál a megfelelő meghajtó folyamat vagy mező kiválasztása. Bár a leggyakrabban alkalmazott meghajtó folyamat a klasszikus modellek esetén a Brown-mozgás (ld. pl. [14]), ennél általánosabb modellek is ismertek a szakirodalomban. Schmidt [26] például a Brown mozgás egy természetes alternatíváját, nevezetesen az Ornstein-Uhlenbeck folyamatot javasolta, amelyet úgy is tekinthetünk, mint a diszkrét idejű AR(1) folyamat analógja.

A HJM modell (lásd [14]), továbbá a fent említett [18], [12], [25] munkákban tanulmányozott modellek folytonos idejűek. Találhatunk azonban a klasszikus HJM

modell diszkrét idejű verziójával kapcsolatos munkákat is, lásd például Heath, Jarrow és Morton [13], Jarrow [16] vagy Pliska [23] munkáit. A klasszikus diszkrét idejű HJM-típusú modelleket a következőképpen foglalhatjuk össze.

Jelölje $f_{k,\ell}$ a határidős kamatlábat a k időpontban ℓ lejáratig hátralevő idővel, azaz $f_{k,\ell}$ a $[k+\ell, k+\ell+1)$ intervallumon érvényes $(k, \ell \in \mathbb{Z}_+)$. Feltesszük, hogy az $f_{0,\ell}$ $(\ell \in \mathbb{Z}_+)$ kezdeti értékek ismertek. Ekkor a határidős kamatlábak a következőképpen vannak megadva:

$$f_{k+1,\ell} = f_{k,\ell} + \alpha_{k,\ell} + \beta_{k,\ell}(S_{k+1} - S_k), \quad (2.3)$$

ahol $\{S_k, \alpha_{k,\ell}, \beta_{k,\ell}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ adaptált egy adott $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ szűréshez minden $\ell \in \mathbb{Z}_+$ esetén.

Ha a $[k, k+1)$ periódusban értelmezett kamatlábra bevezetjük az $r_k := f_{k,0}$ jelölést $(k \in \mathbb{Z}_+)$, akkor a szokásos diszkontáló tényező

$$D_k := \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{k-1} r_j \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

A folytonos idejű modellhez hasonlóan a kamatlábfolyamat ismeretében megadható a kötvényár. Ha $P_{k,\ell}$ jelöli a kamatszelvény nélküli kötvényt a k időpontban ℓ lejáratú idővel, akkor a javasolt kötvényár:

$$P_{k,\ell} = \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{\ell-k-1} f_{k,j} \right\}, \quad 0 \leq k \leq \ell,$$

ahol $P_{k,k} := 1$.

A folytonos esethez hasonlóan diszkrét esetben is ésszerű és praktikus elvárás, hogy a határidős kamatlábak véletlen mezővel legyenek meghajtva. Ilyen modellt vezetett be (2.2) analógiájára Gáll, Pap és Zuijlen (lásd [11]). Az általuk javasolt határidős kamatlábstruktúra az

$$f_{k+1,\ell} = f_{k,\ell} + \alpha_{k,\ell} + \beta_{k,\ell}(S_{k+1,\ell} - S_{k,\ell}) \quad (2.4)$$

dinamikát követik, ahol $\{S_{k,\ell}\}_{k,\ell \in \mathbb{Z}_+}$ egy véletlen mező és $\{S_{k,\ell}, \alpha_{k,\ell}, \beta_{k,\ell}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ adaptált egy adott $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ szűréshez minden $\ell \in \mathbb{Z}_+$ esetén.

Kutatásaink során nagyrészt ezen Gáll, Pap és Zuijlen [11] által javasolt modellt vizsgáltuk, mikor a határidős kamatlábakat egy térbeli autoregressziós típusú Gauss véletlen mező hajtja meg (részletesen lásd a 2.2. alfejezetet). A Gauss

jelző arra utal, hogy a mező véges dimenziós eloszlásai normálisak. A modell legfőbb tulajdonsága az, hogy a különböző lejáratig hátralevő idő különböző értékeihez tartozó határidős kamatlábak különböző diszkrét idejű folyamatokkal lehetnek meghajtva, ennél fogva különböző piaci változások lehetnek hatással a különböző határidős kamatlábak folyamatára.

Egy fontos elvárás a pénzügyi matematikában, hogy kizárjuk az arbitrázs, kockázatmentes profit, lehetőségét. Felidézzük az ehhez kapcsolódó definíciókat (bővebben lásd [7]).

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező egy $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ filtrációval.

2.1. Definíció. Jelölje β_i^n ($0 \leq i \leq N$, $N \in \mathbb{Z}_+$) a kötvények darabszámát az n -edik időpontban $n+i$ lejáratú idővel, $\sigma(\beta_i^n) \subset \mathcal{F}_n$ ($0 \leq i \leq N$). A piacon egy π pénzügyi stratégia alatt a $\pi_n = (\beta_0^n, \beta_1^n, \dots, \beta_N^n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ portfóliók sorozatát értjük. Egy ilyen stratégia portfóliójának értéke az n időpontban $X_n^\pi = \sum_{i=0}^N \beta_i^n P_{n,n+i}$.

2.2. Definíció. Egy π stratégiát önfinanszírozónak nevezzük, ha előrejelezhető, azaz $\sigma(\beta_i^n) \subset \mathcal{F}_{n-1}$, ($0 \leq i \leq N$) és $X_{n-1}^\pi = \sum_{i=0}^N \beta_i^{n-1} P_{n-1,n+i}$.

Ez azt jelenti, hogy az $(n-1)$ -edik időpontban kiválasztott π_n portfólió összeállításánál nincs se plusz befektetésünk, se kivét, azaz csak az $(n-1)$ -edik időpontban rendelkezésre álló $X_{n-1}^\pi = \sum_{i=0}^N \beta_i^{n-1} P_{n-1,n+i}$ tőkét használjuk fel.

2.3. Definíció. Egy π önfinanszírozó stratégiát arbitrázsnek, vagy arbitrázsstratégiának nevezzük, ha valamely rögzített $K \in \mathbb{Z}_+$ esetén

- $P(X_0^\pi = 0) = 1$,
- $P(X_n^\pi \geq 0) = 1$, $n = 1, \dots, K$,
- $P(X_K^\pi > 0) > 0$.

Az arbitrázsmentességgel ekvivalens tulajdonságként szokták emlegetni azt, hogy a piacon létezik egy ekvivalens martingálmérték.

2.4. Definíció. Az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett P^* mértéket ekvivalens martingálmértéknek nevezzük, ha

- P^* és P ekvivalensek, azaz a nullmértékű halmazok megegyeznek mindkét mérték szerint,

- a $\{D_k P_{k,\ell}\}_{0 \leq k \leq \ell}$ diszkontált kötvényár folyamat martingál a P^* mérték szerint az $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ filtrációra nézve minden $\ell \in \mathbb{Z}_+$ esetén, azaz $E^*(D_k P_{k,\ell} | \mathcal{F}_k) = D_{k-1} P_{k-1,\ell}$ ($0 \leq k \leq \ell$).

Könnyen megmutatható, hogy egy önfinanszírozó stratégia $\{D_n X_n^\pi\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ diszkontált folyamata martingál egy P^* ekvivalens martingálmérték szerint. Így, $X_0^\pi = 0$ feltétel mellett $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén $E^* X_n^\pi = 0$, tehát nem következhet be egyszerre $P(X_K^\pi \geq 0) = 1$ és $P(X_K^\pi > 0) > 0$ valamely rögzített K -ra, azaz nincs arbitrázslehetőség.

Gyakorta a modellek egy ekvivalens martingál mérték alatt vannak felírva. Így a modellek nyilván kizárják az arbitrázs lehetőségét. Megjegyezzük, hogy nem feltétlenül szükséges így megadnunk a modellt ahhoz, hogy no-arbitrázs modellekhez jussunk. Mindamellet ezen megközelítés elég gyakori a kötvények piacán, mivel könnyen kezelhetőek. Viszont statisztikai kérdések szempontjából ez a megközelítés nem könnyen kezelhető. Az arbitrázsmentességet viszont mi is szeretnénk, hogy teljesüljön, ezért feltesszük az alábbi tulajdonság teljesülését.

2.5. Tulajdonság. A $\{D_k P_{k,\ell}\}_{0 \leq k \leq \ell}$ diszkontált kötvényár folyamat martingál a valódi P mérték szerint minden $\ell \in \mathbb{N}$ esetén.

Ezen feltétel mellett a modell "martingál" modell, azaz teljesül az arbitrázsmentesség.

2.2. Diszkrét idejű HJM típusú kamatlábmodellek

Az alábbiakban az általunk vizsgált diszkrét idejű autoregressziós mezővel megajtott HJM-modell részletes leírását adjuk meg.

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ egy valószínűségi mező, és definiáljuk rajta az $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ szűrést a következőképp: $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ a triviális σ -algebra és legyen $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{F}_k := \sigma(\eta_{i,j} : 1 \leq i \leq k \text{ és } j \geq 0),$$

ahol $\eta_{i,j} \sim \mathcal{N}(0,1)$ független valószínűségi változók minden $i, j \in \mathbb{Z}_+$ esetén.

Tekintsünk minden $\varrho \in \mathbb{R}$ esetén egy $\{S_{k,\ell}^{(\varrho)}\}_{k,\ell \in \mathbb{Z}_+}$ térbeli autoregressziós típusú Gauss véletlen mezőt (lepedőt) a következőképpen megadva

$$\begin{cases} S_{k,\ell}^{(\varrho)} = S_{k-1,\ell}^{(\varrho)} + \varrho S_{k,\ell-1}^{(\varrho)} - \varrho S_{k-1,\ell-1}^{(\varrho)} + \eta_{k,\ell}, \\ S_{k,-1}^{(\varrho)} = S_{0,\ell}^{(\varrho)} = S_{0,-1}^{(\varrho)} := 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \quad \ell \in \mathbb{Z}_+.$$

A $\Delta_1 S_{k,\ell}^{(\varrho)} = S_{k+1,\ell}^{(\varrho)} - S_{k,\ell}^{(\varrho)}$ differenciaoperátor bevezetése mellett ($k, \ell \in \mathbb{Z}_+$)

$$\Delta_1 S_{k,\ell+1}^{(\varrho)} = \varrho \Delta_1 S_{k,\ell}^{(\varrho)} + \eta_{k+1,\ell+1},$$

azaz $\{\Delta_1 S_{k,\ell}^{(\varrho)}\}_{\ell \in \mathbb{Z}_+}$ egy AR(1) autoregressziós folyamat ϱ együttthatóval.

Más alakban felírva a meghajtó mezőt

$$S_{k,\ell}^{(\varrho)} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} \varrho^{\ell-j} \eta_{i,j},$$

ahonnan látható, hogy $\{S_{k,\ell}^{(\varrho)}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ adaptált az $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ filtrációra nézve minden $\ell \in \mathbb{Z}_+$ esetén, és a mező véges dimenziós eloszlásai normálisak.

Ekkor $\varrho \in \mathbb{R}$ esetén az $\{f_{k,\ell}^{(\varrho)}\}_{k,\ell \in \mathbb{Z}_+}$ diszkrét idejű határidős kamatlábmodell leíró sztochasztikus differenciaegyenlet

$$f_{k+1,\ell}^{(\varrho)} = f_{k,\ell}^{(\varrho)} + \alpha_{k,\ell} + \beta_{k,\ell} \Delta_1 S_{k,\ell}^{(\varrho)}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}_+,$$

ahol $\{\alpha_{k,\ell}\}_{\ell \in \mathbb{Z}_+}$ drift tag és $\{\beta_{k,\ell}\}_{\ell \in \mathbb{Z}_+}$ volatilitás $\mathcal{F}_k$ -mérhető valószínűségi változók minden $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén, továbbá az $\{f_{0,\ell}^{(\varrho)}\}_{\ell \in \mathbb{Z}_+}$ kezdeti értékek ismert valós számok.

Egy ilyen modellre Gáll, Pap és Zuijlen [11] olyan elégséges feltételt is levezetett, amely mellett a piacok kizárják az arbitrázs lehetőségét, azaz teljesül a 2.5 Tulajdonság. Az ilyen típusú feltételeket gyakran drift feltételeknek is nevezik a kamatlábmodellek irodalmában, mert ilyen feltételek mellett a drift tag $(\alpha_{k,\ell}, k, \ell \in \mathbb{Z}_+)$ meghatározható a modell egyéb tulajdonságai által. Továbbá, feltettük, hogy a volatilitás determinisztikus, sem az időtől sem a lejáratig hátralevő időtől nem függ, azaz $\beta_{k,\ell} := \beta$ ($k, \ell \in \mathbb{Z}_+$).

Ekkor Gáll József disszertációja [6] alapján a 2.5. Tulajdonság által biztosított arbitrázsmentesség az $\{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : k, \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ ($\varrho \in \mathbb{R}$) véletlen Gauss mező által meghajtott diszkrét idejű határidős kamatlábmodellben a következőre egyszerűsödik

$$\begin{cases} f_{k,\ell}^{(\varrho)} - f_{k-1,\ell+1}^{(\varrho)} - \varrho(f_{k,\ell-1}^{(\varrho)} - f_{k-1,\ell}^{(\varrho)}) = \beta \eta_{k,\ell} + \beta^2 G_\ell(\varrho), & k, \ell \in \mathbb{N}, \\ f_{k,0}^{(\varrho)} - f_{k-1,1}^{(\varrho)} = \beta \eta_{k,0} + \beta^2 G_0(\varrho), & k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2.5)$$

ahol

$$G_\ell(\varrho) := \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2\ell} \varrho^j.$$

Használni fogjuk még az alábbi ekvivalens alakokat is ($k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$):

$$f_{k,\ell}^{(\varrho)} - f_{k-1,\ell+1}^{(\varrho)} = \sum_{j=0}^{\ell} \varrho^{\ell-j} (\beta \eta_{k,j} + \beta^2 G_j(\varrho)), \quad (2.6)$$

$$f_{k,\ell}^{(\varrho)} - f_{0,\ell+k}^{(\varrho)} = \sum_{i=\ell+1}^{\ell+k} \sum_{j=0}^{i-1} \varrho^{i-1-j} (\beta \eta_{\ell+k-i+1,j} + \beta^2 G_j(\varrho)). \quad (2.7)$$

Bevezetve a $\diamond_{\varrho}$ és $\tilde{\diamond}_{\varrho}$ módosított differencia operátor jelöléseket

$$\diamond_{\varrho} x_{k,\ell} := \begin{cases} x_{k,\ell} - x_{k-1,\ell+1} - \varrho(x_{k,\ell-1} - x_{k-1,\ell}), & \text{ha } k, \ell \in \mathbb{N}, \\ x_{k,0} - x_{k-1,1}, & \text{ha } k \in \mathbb{N}, \ell = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\tilde{\diamond}_{\varrho} x_{k,\ell} := x_{k,\ell} - x_{0,k+\ell} - \varrho(x_{k,\ell-1} - x_{0,k+\ell-1}), \quad \text{ha } k, \ell \in \mathbb{N}, \quad (2.9)$$

a fenti (2.5) arbitrázsmentes modell felírható az alábbi rövidebb alakban is

$$\diamond_{\varrho} f_{k,\ell}^{(\varrho)} = \beta \eta_{k,\ell} + \beta^2 G_{\ell}(\varrho), \quad (2.10)$$

vagy a kezdeti értékek segítségével az alábbi ekvivalens alakban

$$\tilde{\diamond}_{\varrho} f_{k,\ell}^{(\varrho)} = \sum_{j=\ell}^{\ell+k-1} (\beta \eta_{\ell+k-j,j} + \beta^2 G_j(\varrho)). \quad (2.11)$$

Az $\{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : k, \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ térbeli autoregressziós mezővel meghajtott kamatlábformátumot *stabilnak*, *instabilnak* vagy *felrobbanónak* nevezzük, ha $|\varrho| < 1$, $|\varrho| = 1$, vagy $|\varrho| > 1$.

3. fejezet

Konzisztencia

Ezen fejezetben összefoglaljuk a maximum likelihood (ML) becslés konzisztenciájával kapcsolatos fogalmakat, felidézzük Heijmans és Magnus [15] munkájából az ML becslés gyenge konzisztenciájára vonatkozó feltételeket függő minta esetén, majd bemutatjuk az ennek hatására általunk kidolgozott, ML becslés erős konzisztenciájára vonatkozó feltételrendszert szintén függő minta esetén.

3.1. Az ML becslés konzisztenciája

Először definiáljuk a statisztikai kísérlet fogalmát.

3.1. Definíció. *Statisztikai kísérlet alatt egy $(X, \mathcal{X}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ hármast értünk, ahol*

- $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér,
- $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ valószínűségi mértékek családja
- Θ paramétertér az $\mathbb{R}^p$ nyílt részhalmaza.

A Θ halmazt **paraméterternek**, egy $x \in X$ elemet **megfigyelésnek**, egy $T : X \rightarrow \Theta$ mérhető függvényt **statisztikának** nevezünk.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező és minden $\theta \in \Theta$ esetén legyen $\xi^{(\theta)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy olyan valószínűségi változó (minta), hogy az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -n

értelmezett P_θ eloszlása abszolút folytonos a Lebesgue mértékre nézve. Jelölje $L: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto L(x; \theta)$ a $\xi^{(\theta)}$ sűrűségfüggvényét (likelihoodfüggvényét). Ekkor a loglikelihood függvény $\Lambda(x; \theta) := \log L(x; \theta) \in [-\infty, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^d$, ahol legyen $\log 0 := -\infty$.

Tekintsünk egy $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ statisztikai kísérletet. Statisztikai kísérlet paraméterbecslésénél a fő feladat egy $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \Theta$ statisztika megtalálása a $\theta_0 \in \Theta$ igazi (de ismeretlen) paraméterérték becslésére a $\xi^{(\theta_0)}$ minta alapján úgy, hogy T jó legyen abban az értelemben, hogy a $T(\xi^{(\theta_0)}) := T \circ \xi^{(\theta_0)}$ valószínűségi változó közel van θ_0 -hoz.

3.2. Definíció. Az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ statisztikai kísérletben a θ paraméter $x \in \mathbb{R}^d$ mintán alapuló **maximum likelihood becslése** egy $\hat{\theta}(x) \in \Theta$ érték, melyre

$$L(x; \hat{\theta}(x)) = \sup_{\theta \in \Theta} L(x; \theta). \quad (3.1)$$

Azt mondjuk, hogy létezik **mérhető maximum likelihood becslése** a paraméternek az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ statisztikai kísérletben, ha létezik egy $\hat{\theta}: \mathbb{R}^d \rightarrow \Theta$ mérhető függvény (statisztika) úgy, hogy (3.1) teljesül minden $x \in \mathbb{R}^d$ esetén.

Egy statisztikai kísérletben nem feltétlenül létezik ML becslés, és ha létezik sem feltétlenül egyértelmű. Ha $\hat{\theta}: \mathbb{R}^d \rightarrow \Theta$ egy mérhető függvény, akkor $\hat{\theta} \circ \xi^{(\theta)}: \Omega \rightarrow \Theta$ valószínűségi változó (mérhető függvény) minden $\theta \in \Theta$ esetén. A következő lemma elégséges feltételt ad a mérhető ML becslés létezésére.

3.3. Lemma. (Jennrich [17, Lemma 2]) Ha minden $x \in \mathbb{R}^d$ esetén a $\theta \mapsto L(x; \theta)$ függvény folytonos Θ -n, akkor az $x \mapsto \sup_{\theta \in \Theta} L(x; \theta)$ függvény mérhető $\mathbb{R}^d$ -n. Ha ezen kívül Θ kompakt, akkor létezik mérhető maximum likelihood becslése a paraméternek a $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ statisztikai kísérletben.

Legyen $d_n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$), és minden $n \in \mathbb{N}$ és $\theta \in \Theta$ esetén legyen $\xi_n^{(\theta)}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_n}$ egy valószínűségi változó, melynek $P_{n,\theta}$ eloszlása abszolút folytonos a Lebesgue mértékre nézve, a sűrűségfüggvénye $L_n: \mathbb{R}^{d_n} \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto L_n(x; \theta)$ és a loglikelihood függvénye $\Lambda_n(x; \theta) := \log L_n(x; \theta)$, $x \in \mathbb{R}^{d_n}$. Tekintsük a statisztikai kísérletek $(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{P_{n,\theta} : \theta \in \Theta\})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatát.

3.4. Definíció. Legyen $T_n: \mathbb{R}^{d_n} \rightarrow \Theta$ egy mérhető függvény minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot a $\theta_0 \in \Theta$ igazi paraméterérték **gyengén konzisztens becslésének** nevezzük, ha $n \rightarrow \infty$ esetén

$$T_n(\xi_n^{(\theta_0)}) \xrightarrow{P} \theta_0,$$

azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n(\xi_n^{(\theta_0)}) - \theta_0| > \varepsilon) = 0;$$

illetve **erősen konzisztens becslésnek** nevezzük, ha $n \rightarrow \infty$ esetén

$$T_n(\xi_n^{(\theta_0)}) \rightarrow \theta_0 \quad P\text{-majdnem biztosan (P-m.b.)}$$

azaz

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\xi_n^{(\theta_0)}) = \theta_0\right) = 1.$$

Ökonometriai vizsgálatokban az ML becsléseket gyakran tekintik gyengén konzisztensnek, ami indokolt, de egyáltalán nem triviális. A probléma fő oka, hogy a megfigyelések általában nem függetlenek és nem azonos eloszlásúak. Sajnos a konzisztens ML becslések irodalmában csak kis részt találhatunk, ami függő megfigyelésekkel foglalkozik. Heijmans és Magnus [15, (1986)] adnak egy összefoglalást arról, kik foglalkoztak ezzel a kérdéssel. Eszerint gyakorlatilag minden, az ML becslés konzisztenciájára feltételt adó cikk, Cramer [1, (1946)] vagy Wald [29, (1949)] megközelítésén alapul. Majd az említett szerzőpáros Wald független, azonos eloszlású eredményének a függő mintára való általánosításaként a korábbiaknál gyengébb és könnyebben ellenőrizhető feltételeket adnak. Felidézzük két fontosabb állításukat, melyek a későbbiek során motiváló hatással voltak ránk.

A $\theta \in \Theta$ pont N környezete alatt a Θ olyan nyílt részhalmazát értjük, mely tartalmazza θ -t.

3.5. Tétel. (Heijmans és Magnus [15, Theorem 1]) *Tegyük fel, hogy*

- (i) a $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ paramétertér kompakt,
- (ii) minden (rögzített) $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}^{d_n}$ esetén a $\theta \mapsto L_n(x; \theta)$ likelihood függvény folytonos Θ -n.

Ekkor a $\theta_0 \in \Theta$ igazi paraméterértéknek létezik $\hat{\theta}_n$ mérhető ML becslése. Továbbá egy tetszőleges $\{\hat{\theta}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ becsléssorozat akkor és csak akkor gyengén konzisztens, ha

(iii) minden $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$ esetén létezik egy $N(\theta, \theta_0)$ környezete a θ -nak, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left[\sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} \left(\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0) \right) < 0 \right] = 1.$$

Heijmans és Magnus az erős konzisztenciára is kimondanak egy feltételt, de bizonyítás nélkül. Ezt a hiányt pótoljuk a következő alfejezetben (lásd 3.7. Tétel (ii) $\Rightarrow$ (iii) ága).

Másik tételükben egy k_n normalizáló függvényt vezetnek be, mely nem csak n hatványa, hanem függhet θ -tól és kissé szigorúbb, viszont könnyebben ellenőrizhetőbb feltételeket adnak.

3.6. Tétel. (Heijmans és Magnus [15, Theorem 2]) *Tegyük fel, hogy*

- (i) a $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ paramétertér kompakt,
- (ii) minden (rögzített) $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}^{d_n}$ esetén a $\theta \mapsto L_n(x; \theta)$ likelihood függvény folytonos Θ -n,
- (iii) minden $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$ esetén létezik egy $k_n(\theta, \theta_0)$ nemnegatív, nem véletlen sorozat, mely függhet θ -tól és θ_0 -tól, $\liminf_{n \rightarrow \infty} k_n(\theta, \theta_0) > 0$ és teljesül, hogy

$$\frac{1}{k_n(\theta, \theta_0)} \left(\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0) \right) \xrightarrow{\mathbf{P}} -1, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

- (iv) minden $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$ esetén létezik egy $N(\theta, \theta_0)$ környezete a θ -nak, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left[\frac{1}{k_n(\theta, \theta_0)} \sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} \left(\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta) \right) < 1 \right] = 1.$$

Ekkor a $\theta_0 \in \Theta$ igazi paraméterértéknek létezik $\hat{\theta}_n$ mérhető ML becslése, és minden $\{\hat{\theta}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ becsléssorozat gyengén konzisztens.

Míg a 3.5 tétel (iii) feltétele a loglikelihood hányados lokális viselkedésére koncentrált, addig a 3.6 tétel (iv) része a normalizált loglikelihood hányados viselkedését vizsgálja. Heijmans és Magnus javaslata szerint a normalizáló tényező a Kullback-Leibler információval áll kapcsolatban, nevezetesen

$$k_n(\theta, \theta_0) = -\mathbf{E} \left(\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0) \right),$$

ha a várható érték létezik. A standard független, azonos eloszlású esetben $k_n(\theta, \theta_0)$ az n pozitív kitevőjű hatványa lesz, általános esetben azonban nem.

3.2. Erős konzisztencia függő minta esetén

A 3.1 alfejezetben felidézttük Heijmans és Magnus [15] eredményeit a ML becslés gyenge konzisztenciájáról függő minta esetén, és említettük, hogy kimondtak egy erősebb feltételt az erős konzisztenciára is, azonban bizonyítás nélkül. Ez az állítás megtalálható a következő tételünkben ((ii) $\Rightarrow$ (iii) ág).

3.7. Tétel. (Fülöp, Pap [4, Theorem 1.4]) *Tegyük fel, hogy a $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ paraméterter kompakt, és minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}^{d_n}$ esetén a $\theta \mapsto L_n(x; \theta)$ likelihood függvény folytonos Θ -n. Legyen $\theta_0 \in \Theta$. Tekintsük a következő állításokat:*

- (i) *létezik egy $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitív valós számsorozat, melyre $\liminf_{n \rightarrow \infty} k_n > 0$, és minden $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$ esetén létezik a θ -nak $N(\theta, \theta_0)$ környezete, továbbá $I(\theta, \theta_0)$ mennyiség úgy, hogy $\inf_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} I(\phi, \theta_0) > 0$, és*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} \left| \frac{1}{k_n} (\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)) + I(\phi, \theta_0) \right| = 0 \quad \text{P-m.b.} \quad (3.2)$$

- (ii) *minden $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$ esetén létezik a θ -nak $N(\theta, \theta_0)$ környezete, melyre*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} (\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)) < 0 \quad \text{P-m.b.} \quad (3.3)$$

- (iii) *a $\theta_0 \in \Theta$ mérhető maximum likelihood becsléseinek minden $(\hat{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata erősen konzisztens;*

- (iv) *a θ_0 minden N környezete esetén*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{\phi \in \Theta \setminus N} \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \sup_{\phi \in N} \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) \right] \leq 0 \quad \text{P-m.b.} \quad (3.4)$$

Ekkor (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

A 3.3. Lemma alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik a paraméternek $\hat{\theta}_n : \mathbb{R}^{d_n} \rightarrow \Theta$ (nem feltétlenül egyértelmű) mérhető ML becslése az $(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{P_{n,\theta} : \theta \in \Theta\})$ statisztikai kísérletben.

Továbbá szintén a 3.3. Lemma alapján $\sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi)$ egy $[0, +\infty]$ értékű valószínűségi változó, és így $\sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi)$ is egy $[-\infty, +\infty]$ értékű valószínűségi változó. Továbbá

$$\sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} (\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)) = \left(\sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) \right) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)$$

majdnem mindenütt értelmezett, mivel $\mathbf{P}(\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0) = -\infty) = 0$, hiszen

$$\mathbf{P}(L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0) = 0) = \int_{\{x \in \mathbb{R}^{d_n} : L_n(x; \theta_0) = 0\}} L_n(x; \theta_0) dx = 0.$$

Megjegyezzük, hogy (3.3) és (3.4) a következő alakba is írható

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)} \sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) < 1 \quad \mathbf{P}\text{-m.b.} \quad (3.5)$$

és

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_{\phi \in \Theta \setminus N} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi)}{\sup_{\phi \in N} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi)} \leq 1 \quad \mathbf{P}\text{-m.b.} \quad (3.6)$$

Bizonyítás (3.7 tétel): (i) $\Rightarrow$ (ii) Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_n} \sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} (\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)) \\ & \leq \sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} \left| \frac{1}{k_n} (\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)) + I(\phi, \theta_0) \right| - \inf_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} I(\phi, \theta_0), \end{aligned}$$

így (i)-ből következik, hogy 1 valószínűséggel

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} (\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)) \leq - \inf_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} I(\phi, \theta_0) < 0.$$

Ekkor, azon 1 valószínűségű halmazon, ahol a fenti egyenlőtlenség teljesül, $\forall \delta_1 > 0$ esetén $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n > n_0$ esetén

$$\frac{1}{k_n} \sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} (\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)) \leq -\delta_1 < 0,$$

továbbá $\liminf_{n \rightarrow \infty} k_n > 0$ miatt $\exists \delta_2 > 0$, hogy $n > n_0$ esetén $k_n \geq \delta_2 > 0$, így $n > n_0$ esetén

$$k_n \left(\frac{1}{k_n} \sup_{\phi \in N(\theta, \theta_0)} (\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)) \right) \leq -\delta_1 \delta_2 < 0.$$

Ebből következik (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Egy $H \subset \Theta$ részhalmaz esetén tekintsük a majdnem biztosan definiált

$$S_n(H) := \frac{1}{L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)} \sup_{\phi \in H} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi),$$

valószínűségi változót. (ii) szerint minden $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$ esetén létezik a θ -nak $N(\theta, \theta_0)$ környezete, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(N(\theta, \theta_0)) < 1 \quad \text{P-m.b.} \quad (3.7)$$

Meg kell mutatnunk, hogy a θ_0 minden N környezete esetén elég nagy n -re a maximum likelihood becslés majdnem biztosan ezen környezetbe esik. Pontosabban, minden N környezet esetén létezik egy $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ egy valószínűségű esemény ($P(\Omega_0) = 1$) úgy, hogy minden $\omega \in \Omega_0$ esetén létezik egy $n_0(N, \omega) \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy $n \geq n_0(N, \omega)$ esetén $\hat{\theta}_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega)) \in N$. A $\Theta \setminus N$ halmaz kompakt (mivel zárt és Θ kompakt) és

$$\bigcup_{\theta \in \Theta \setminus N} N(\theta, \theta_0) \supset \Theta \setminus N$$

egy nyílt lefedése $\Theta \setminus N$ -nek. Ekkor létezik véges részlefedés is, azaz létezik véges sok $\theta_1, \dots, \theta_r \in \Theta \setminus N$ pont, melyekre

$$\bigcup_{k=1}^r N(\theta_k, \theta_0) \supset \Theta \setminus N.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sup_{\phi \in \Theta \setminus N} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) &\leq \sup_{\phi \in \bigcup_{k=1}^r N(\theta_k, \theta_0)} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) \\ &= \max_{1 \leq k \leq r} \sup_{\phi \in N(\theta_k, \theta_0)} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi). \end{aligned}$$

Idézzük fel, hogy $P(L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0) > 0) = 1$, így ezen egyenlőtlenség mindkét oldalát $L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)$ -al osztva azon a halmazon, ahol ez nem nulla

$$\frac{1}{L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)} \sup_{\phi \in \Theta \setminus N} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) \leq \max_{1 \leq k \leq r} S_n(N(\theta_k, \theta_0)) \quad \text{P-m.b.}$$

Következésképpen (3.7) szerint

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)} \sup_{\phi \in \Theta \setminus N} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq r} S_n(N(\theta_k, \theta_0)) \\ &= \max_{1 \leq k \leq r} \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(N(\theta_k, \theta_0)) < 1 \end{aligned}$$

majdnem biztosan. Így minden $\omega \in \Omega_0$ esetén létezik egy $n_0(N, \omega) \in \mathbb{N}$ küszöb-szám, hogy $n \geq n_0(N, \omega)$ esetén

$$\sup_{\phi \in \Theta \setminus N} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega); \phi) < L_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega); \theta_0).$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}^d$ esetén a $\sup_{\phi \in \Theta \setminus N} L_n(x; \phi) < L_n(x; \theta_0)$ egyenlőtlenség alapján $\hat{\theta}_n(x) \in N$, mivel $\hat{\theta}_n$ maximum likelihood becslés. Következésképpen

$$\hat{\theta}_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega)) \in N \quad \text{minden } \omega \in \Omega_0 \text{ és } n \geq n_0(N, \omega) \text{ esetén,}$$

azaz megkaptuk (iii)-t.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Minden N környezet esetén (iii) szerint létezik egy $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ egy valószínűségű esemény ($P(\Omega_0) = 1$) úgy, hogy minden $\omega \in \Omega_0$ esetén létezik egy $n_0(N, \omega) \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy $\hat{\theta}_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega)) \in N$, ha $n \geq n_0(N, \omega)$. Így

$$\sup_{\phi \in \Theta \setminus N} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega); \phi) \leq \sup_{\phi \in N} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega); \phi), \quad \text{ha } n \geq n_0(N, \omega).$$

Következésképpen θ_0 minden N' környezete esetén, melyre $N' \subset N$ kapjuk, hogy minden $\omega \in \Omega_0$ és $n \geq n_0(N, \omega)$ esetén

$$\sup_{\phi \in \Theta \setminus N} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega); \phi) \leq \sup_{\phi \in N'} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega); \phi).$$

Az N' környezet θ_0 pontra szűkítése által és figyelembe véve a $\theta \mapsto L_n(x; \theta)$ likelihood függvény folytonosságát Θ -n, minden $\omega \in \Omega_0$ és $n \geq n_0(N, \omega)$ esetén

$$\sup_{\phi \in \Theta \setminus N} L_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega); \phi) \leq L_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega); \theta_0),$$

így minden $\omega \in \Omega_0$ esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\phi \in \Theta \setminus N} (L_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega); \phi) - L_n(\xi_n^{(\theta_0)}(\omega); \theta_0)) \leq 0.$$

Ezzel megkaptuk (iv)-t. □

Az (i) feltétel a loglikelihoodok különbségére ad egy majdnem biztos kifejtést ϕ -ben egyenletesen, azaz

$$\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0) = -I(\phi, \theta_0)k_n + o(k_n) \quad \text{P-m.b.}$$

egyenletesen ϕ -ben az $N(\theta, \theta_0)$ környezetben, ha $n \rightarrow \infty$. A Heijmans és Magnus által javasolt normalizáló tényező analógiájaképp $I(\phi, \theta_0)k_n$ -re a Kullback-Leibler információ fő tagja a természetes választás, azaz

$$\mathbb{E}(\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)}; \theta_0)) = -I(\phi, \theta_0)k_n + o(k_n).$$

A fenti tétel fő előnye, hogy ezen (i) feltétel sok esetben ellenőrizhető, és így egy hasznos eszközt kapunk az ML becslés erős konzisztenciájának ellenőrzésére függő minta esetén.

4. fejezet

Erős konzisztencia a HJM-típusú modellben

Ezen fejezet fő célja a 2.2 alfejezetben bemutatott (2.5) arbitrázsmentes, diszkrét idejű HJM-típusú véletlen autoregressziós mezővel meghajtott határidős kamatlábfolyamat $\varrho \in \mathbb{R}$ autoregressziós paraméterének statisztikai vizsgálata. Ehhez vegyünk alapul egy mintát, majd vizsgáljuk meg, hogy a mintaelemszám növelésével mit mondhatunk a becslés viselkedéséről. Mivel az $f_{k,\ell}$ határidős kamatláb függ a k időtől és az ℓ lejáratig hátralevő időtől, így a mintánk is kétdimenziós lesz. A mintaelemszám növelését viszont többféleképpen is érthetjük. Első vizsgálataink alkalmával mindkét időtényezővel tartottunk a végtelenbe. Később azonban a lejáratig hátralevő idő felső korlátját lerögzítettük, hisz természetesen felmerülő akadály, hogy nem állnak rendelkezésünkre adatok tetszőlegesen hosszú lejáratig hátralevő idővel. Azaz a második esetben minden időpontban a határidős kamatlábak ugyanolyan lejáratig hátralevő időkkkel rendelkeznek.

Legyenek K, L és $\{K_n, L_n : n \in \mathbb{N}\}$ pozitív egészek. Az általunk tanulmányozott esetek

(i) $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)} := \{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : 1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ és $L_n = nL + o(n)$ ha $n \rightarrow \infty$,

(ii) $\mathbf{f}_n^{(\varrho)} := \{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : 1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ ha $n \rightarrow \infty$, L fix.

Ezekre a következő fejezetekben úgy hivatkozunk, hogy n^2 -tel illetve n -nel arányos minták.

A következő alfejezetekben az autoregressziós paraméter ML becslésének erős konzisztenciáját bizonyítjuk a 3.7. Tételre támaszkodva. Mivel a bizonyítás menete nem függ a volatilitástól, a számítások egyszerűsítése végett feltesszük, hogy $\beta := 1$ a 4.1. és 4.2. alfejezetekben.

4.1. Erős konzisztencia n^2 -tel arányos minta esetén

Tekintsük előbb azt az esetet, mikor a mintát mindkét irányban növeljük, azaz a mintaelemszám n^2 -tel arányos. Ekkor bebizonyítjuk az ML becslés erős konzisztenciáját stabil és mindkét instabil esetben is.

4.1. Tétel. (Fülöp, Pap [5, Theorem 1]) *Legyenek $K, L \in \mathbb{N}$ és legyenek $\{K_n, L_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ és $L_n = nL + o(n)$, ha $n \rightarrow \infty$. Legyen $\varrho_0 \in [-1, +1]$, és válasszuk úgy az $a, b \in \mathbb{R}$ határokat, hogy $-1 < a < b < +1$ és $\varrho_0 \in \Theta$, ahol*

$$\Theta := \begin{cases} [-1, b], & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ [a, b], & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ [a, +1], & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\widehat{\varrho}_n$ egy az $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho_0)} := (f_{k,\ell}^{(\varrho_0)})_{1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n}$ mintán alapuló tetszőleges mérhető ML becslése az igazi ϱ_0 paraméternek. Ekkor a $(\widehat{\varrho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat egy erősen konzisztens becslése ϱ_0 -nak.

Bizonyítás. A 3.7. Tétel (i) $\Rightarrow$ (iii) részéből és a 4.1. Állításból következik. $\square$

4.2. Állítás. (Fülöp, Pap [5, Proposition 1]) *Legyen $\{K_n, L_n : n \in \mathbb{N}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, Θ és ϱ_0 , mint a 4.1. Tételben. Ekkor*

$$\sup_{\varrho \in [a,b]} \left| r_{n,\varrho_0} \left(\Lambda_{K_n,L_n} \left(\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)}; \varrho_0 \right) - \Lambda_{K_n,L_n} \left(\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)}; \varrho \right) \right) - I(\varrho, \varrho_0) \right| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad (4.1)$$

ha $n \rightarrow \infty$, ahol

$$r_{n,\varrho_0} := \begin{cases} n^{-3}, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ n^{-2}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ n^{-6}, & \text{ha } \varrho_0 = +1, \end{cases}$$

és

$$I(\varrho, \varrho_0) := \begin{cases} \frac{(1+\varrho)^2}{4} KL^2, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \frac{(\varrho_0 - \varrho)^2}{2(1-\varrho_0^2)} KL + \frac{(\varrho_0 - \varrho)^2(2-\varrho_0-\varrho)^2}{8(1-\varrho_0)^4(1-\varrho)^2} (KL + \frac{1}{2}K^2), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \frac{(1-\varrho)^2}{40} KL^5 + \frac{(1-\varrho)^2}{8} (\frac{1}{2}K^2L^4 + \frac{2}{3}K^3L^3 + \frac{5}{12}K^4L^2 + \frac{2}{15}K^5L + \frac{1}{54}K^6), & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

Továbbá minden $\varrho \in [a, b] \setminus \{\varrho_0\}$ és ϱ minden N környezete esetén, melyre $\varrho_0 \notin \overline{N}$ (ahol $\overline{N}$ az N lezártját jelöli) teljesül, hogy $\inf_{\phi \in N} I(\phi, \varrho_0) > 0$.

Bizonyítás. Tekintsük az $\mathbf{f}^{(\varrho)} = (f_{k,\ell}^{(\varrho)})_{1 \leq k \leq K, 0 \leq \ell \leq L}$ mintát. Az (2.10) egyenlet alapján $f_{k,\ell}^{(\varrho)}$ -t kifejezhetjük az $f_{k,\ell-1}^{(\varrho)}$, $f_{k-1,\ell}^{(\varrho)}$, $f_{k-1,\ell+1}^{(\varrho)}$ és $\eta_{k,\ell}$ segítségével. Az $f_{k,L}^{(\varrho)}$ esetben viszont nem használhatjuk ugyanezt az elvet, ugyanis $f_{k-1,L+1}^{(\varrho)}$ nem eleme a mintának, így ekkor a (2.11) egyenletet alkalmazzuk, mely szerint $f_{k,L}^{(\varrho)}$ kifejezhető az $f_{k,L-1}^{(\varrho)}$ korábbi mintaelem, az $f_{0,k+L-1}^{(\varrho)}$, $f_{0,k+L}^{(\varrho)}$ kezdeti értékek valamint az $\eta_{1,L+k-1}, \eta_{2,L+k-2}, \dots, \eta_{k,L}$ véletlenek segítségével. Követve a [6, Lemma 3.1] bizonyításában található gondolatmenetet, a mintára vonatkozó loglikelihood függvény

$$\begin{aligned} \Lambda_{K,L}(\mathbf{x}; \varrho, \beta) = & -\frac{K(L+1)}{2} \log(2\pi\beta^2) - \frac{1}{2} \log(K!) \\ & - \frac{1}{2\beta^2} \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=0}^{L-1} (\diamond_{\varrho} x_{k,\ell} - \beta^2 G_{\ell}(\varrho))^2 - \frac{1}{2\beta^2} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k} \left(\tilde{\diamond}_{\varrho} x_{k,L} - \beta^2 \sum_{\ell=L}^{L+k-1} G_{\ell}(\varrho) \right)^2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

ahol $\mathbf{x} := (x_{k,\ell})_{1 \leq k \leq K, 0 \leq \ell \leq L} \in \mathbb{R}^{K(L+1)}$, és $x_{0,\ell} := f_{0,\ell}$ ha $\ell \geq 1$. Ebből következik

a $\beta = 1$ feltevésünk mellett, hogy

$$\begin{aligned} & \Lambda_{K_n, L_n}(\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)}; \varrho_0) - \Lambda_{K_n, L_n}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)}; \varrho) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left[\left(\diamond_{\varrho} f_{k,\ell}^{(\varrho_0)} - G_{\ell}(\varrho) \right)^2 - \left(\diamond_{\varrho_0} f_{k,\ell}^{(\varrho_0)} - G_{\ell}(\varrho_0) \right)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\widetilde{\diamond}_{\varrho} f_{k,L_n}^{(\varrho_0)} - \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} G_{\ell}(\varrho) \right)^2 - \left(\widetilde{\diamond}_{\varrho_0} f_{k,L_n}^{(\varrho_0)} - \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} G_{\ell}(\varrho_0) \right)^2 \right], \end{aligned}$$

ahol $\diamond_{\varrho_0}$ és $\widetilde{\diamond}_{\varrho_0}$ a (2.8) és (2.9)-ben bevezetett rövidítések.

Fejezzük ki ezen mennyiségeket az $\{\eta_{k,\ell} : 1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n + K_n - k\}$ valószínűségi változók segítségével. (2.10) és (2.11) alapján

$$\diamond_{\varrho_0} f_{k,\ell}^{(\varrho_0)} - G_{\ell}(\varrho_0) = \eta_{k,\ell}, \quad \widetilde{\diamond}_{\varrho_0} f_{k,L_n}^{(\varrho_0)} - \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} G_{\ell}(\varrho_0) = \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j,j}.$$

Továbbá a

$$\diamond_{\varrho} f_{k,\ell}^{(\varrho_0)} - G_{\ell}(\varrho) = \left(\diamond_{\varrho_0} f_{k,\ell}^{(\varrho_0)} - G_{\ell}(\varrho_0) \right) - \left(\diamond_{\varrho_0} f_{k,\ell}^{(\varrho_0)} - \diamond_{\varrho} f_{k,\ell}^{(\varrho_0)} + G_{\ell}(\varrho) - G_{\ell}(\varrho_0) \right)$$

felbontás alapján, felhasználva az $\diamond_{\varrho_0} f_{k,\ell}^{(\varrho_0)} - \diamond_{\varrho} f_{k,\ell}^{(\varrho_0)} = (\varrho - \varrho_0)(f_{k,\ell-1}^{(\varrho_0)} - f_{k-1,\ell}^{(\varrho_0)})$ összefüggést és (2.6)-t, kapjuk a

$$H_{\ell}(\varrho, \varrho_0) := G_{\ell}(\varrho) - G_{\ell}(\varrho_0) + (\varrho - \varrho_0) \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} G_i(\varrho_0).$$

determinisztikus rész különválasztásával, hogy

$$\diamond_{\varrho} f_{k,\ell}^{(\varrho_0)} - G_{\ell}(\varrho) = \eta_{k,\ell} - H_{\ell}(\varrho, \varrho_0) - (\varrho - \varrho_0) \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i}.$$

Hasonlóan levezethető (2.7) segítségével, hogy

$$\begin{aligned} \widetilde{\diamond}_{\varrho} f_{k,L_n}^{(\varrho_0)} - \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} G_{\ell}(\varrho) &= \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j,j} \\ &- \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(H_{\ell}(\varrho, \varrho_0) + (\varrho - \varrho_0) \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{L_n+k-\ell,i} \right). \end{aligned}$$

Ekkor a loglikelihood-ok különbségének alábbi alakját kapjuk

$$\Lambda_{K_n, L_n}(\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)}; \varrho_0) - \Lambda_{K_n, L_n}(\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)}; \varrho) = -M_n^{(\varrho, \varrho_0)} + \frac{1}{2}A_n^{(\varrho, \varrho_0)},$$

ahol az $M_n^{(\varrho, \varrho_0)}$ és $A_n^{(\varrho, \varrho_0)}$ valószínűségi változók a következők

$$\begin{aligned} M_n^{(\varrho, \varrho_0)} &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k,\ell} \left(H_\ell(\varrho, \varrho_0) + (\varrho - \varrho_0) \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j, j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(H_\ell(\varrho, \varrho_0) + (\varrho - \varrho_0) \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{L_n+k-\ell, i} \right), \\ A_n^{(\varrho, \varrho_0)} &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(H_\ell(\varrho, \varrho_0) + (\varrho - \varrho_0) \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i} \right)^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(H_\ell(\varrho, \varrho_0) + (\varrho - \varrho_0) \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{L_n+k-\ell, i} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Tehát (4.1) igazolásához elegendő megmutatnunk, hogy

$$\sup_{\varrho \in [a, b]} r_{n, \varrho_0} \left| M_n^{(\varrho, \varrho_0)} \right| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.}, \quad (4.3)$$

$$\sup_{\varrho \in [a, b]} r_{n, \varrho_0} \left| A_n^{(\varrho, \varrho_0)} - \mathbb{E} A_n^{(\varrho, \varrho_0)} \right| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.}, \quad (4.4)$$

$$\sup_{\varrho \in [a, b]} \left| r_{n, \varrho_0} \mathbb{E} A_n^{(\varrho, \varrho_0)} - 2I(\varrho, \varrho_0) \right| \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

ha $n \rightarrow \infty$.

Vizsgáljuk előbb (4.5)-t. $A_n^{(\varrho, \varrho_0)}$ várható értéke $\varrho \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E} A_n^{(\varrho, \varrho_0)} &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left[H_\ell(\varrho, \varrho_0)^2 + (\varrho - \varrho_0)^2 \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{2(\ell-i-1)} \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) \right)^2 + (\varrho - \varrho_0)^2 \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{2(\ell-i-1)} \right]. \end{aligned}$$

Mivel $\varrho \in [a, b]$ esetén

$$G_\ell(\varrho) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2\ell} \varrho^i = \frac{1 - \varrho^{2\ell+1}}{2(1 - \varrho)},$$

és

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} G_i(\varrho_0) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^i \right)^2 = \begin{cases} \frac{(1-(-1)^\ell)^2}{8}, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \frac{(1-\varrho_0^\ell)^2}{2(1-\varrho_0)^2}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \frac{\ell^2}{2}, & \text{ha } \varrho_0 = +1, \end{cases}$$

kapjuk, hogy minden $\varrho \in [a, b]$ esetén

$$H_\ell(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} \frac{1-\varrho^{2\ell+1}}{2(1-\varrho)} - \frac{1}{2} + (\varrho+1) \frac{(1-(-1)^\ell)^2}{8} \\ = \frac{1}{2(1-\varrho)} + \frac{\varrho-1}{4} - \frac{\varrho+1}{4} (-1)^\ell + O(|\varrho|^{2\ell}) = O(1), & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \frac{1}{2(1-\varrho)} - \frac{1}{2(1-\varrho_0)} + \frac{\varrho-\varrho_0}{2(1-\varrho_0)^2} + O\left(\frac{|\varrho|^{2\ell+1}}{1-|\varrho|}\right) + O(|\varrho_0|^\ell) \\ = \frac{(\varrho-\varrho_0)(2-\varrho_0-\varrho)}{2(1-\varrho_0)^2(1-\varrho)} + O(|\varrho|^{2\ell}) + O(|\varrho_0|^\ell), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \frac{1-\varrho^{2\ell+1}}{2(1-\varrho)} - \frac{2\ell+1}{2} - (1-\varrho) \frac{\ell^2}{2} \\ = -(1-\varrho) \frac{\ell^2}{2} + O(\ell), & \text{ha } \varrho_0 = +1, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$H_\ell(\varrho, \varrho_0)^2 = \begin{cases} O(1), & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \frac{(\varrho-\varrho_0)^2(2-\varrho_0-\varrho)^2}{4(1-\varrho_0)^4(1-\varrho)^2} + O(|\varrho|^{2\ell}) + O(|\varrho_0|^\ell), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ (1-\varrho)^2 \frac{\ell^4}{4} + O(\ell^3), & \text{ha } \varrho_0 = +1, \end{cases}$$

és

$$\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} O(k), & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \frac{k(\varrho-\varrho_0)(2-\varrho_0-\varrho)}{2(1-\varrho_0)^2(1-\varrho)} + O(|\varrho|^{2L_n}) + O(|\varrho_0|^{L_n}), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ -\frac{1-\varrho}{2} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell^2 + O(k(L_n+k)), & \text{ha } \varrho_0 = +1, \end{cases}$$

$$\left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) \right)^2 = \begin{cases} O(k^2), & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \frac{k^2(\varrho-\varrho_0)^2(2-\varrho_0-\varrho)^2}{4(1-\varrho_0)^4(1-\varrho)^2} + O(k|\varrho|^{2L_n}) + O(k|\varrho_0|^{L_n}), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \frac{(1-\varrho)^2}{4} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell^2 \right)^2 + O(k^2(L_n+k)^3), & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{2(\ell-i-1)} &= \begin{cases} \frac{1}{1-\varrho_0^2} + O(|\varrho_0|^{2\ell}), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \ell, & \text{ha } |\varrho_0| = 1, \end{cases} \\ \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{2(\ell-i-1)} &= \begin{cases} \frac{k}{1-\varrho_0^2} + O(|\varrho_0|^{2L_n}), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \frac{k(2L_n+k-1)}{2}, & \text{ha } |\varrho_0| = 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

így $\varrho \in [a, b]$ esetén

$$\mathbb{E}A_n^{(\varrho, \varrho_0)} = \begin{cases} (1+\varrho)^2 \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \ell + O(n^2) = (1+\varrho)^2 \frac{KL^2}{2} n^3 + O(n^2) \\ = 2I(\varrho, \varrho_0) n^3 + O(n^2), & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \left(KL + \frac{K^2}{2} \right) \frac{(\varrho_0 - \varrho)^2 (2 - \varrho_0 - \varrho)^2}{4(1 - \varrho_0)^4 (1 - \varrho)^2} n^2 + \frac{KL(\varrho_0 - \varrho)^2}{1 - \varrho_0^2} n^2 + O(n) \\ = 2I(\varrho, \varrho_0) n^2 + O(n), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \frac{(1-\varrho)^2}{4} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \ell^4 + \frac{(1-\varrho)^2}{4} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell^2 \right)^2 + O(n^5) \\ = \frac{(1-\varrho)^2}{4} \frac{KL^5}{5} n^6 + \frac{(1-\varrho)^2}{4} \left(\frac{K^2 L^4}{2} + \frac{2K^3 L^3}{3} + \right. \\ \quad \left. + \frac{5K^4 L^2}{12} + \frac{2K^5 L}{15} + \frac{K^6}{54} \right) n^6 + O(n^5) \\ = 2I(\varrho, \varrho_0) n^6 + O(n^5), & \text{ha } \varrho_0 = +1, \end{cases}$$

amiből következik (4.5).

Folytassuk (4.4) vizsgálatával. Tekintsük az alábbi felbontást $\varrho \in \mathbb{R}$ esetén

$$A_n^{(\varrho, \varrho_0)} - \mathbb{E}A_n^{(\varrho, \varrho_0)} = 2(\varrho - \varrho_0) \left(a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0) + a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0) \right) + (\varrho - \varrho_0)^2 \left(a_n^{(3)}(\varrho_0) + a_n^{(4)}(\varrho_0) \right),$$

ahol

$$\begin{aligned} a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i}, \\ a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} H_j(\varrho, \varrho_0) \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{L_n+k-\ell,i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} H_j(\varrho, \varrho_0) \sum_{\ell=1}^k \sum_{i=0}^{L_n+k-\ell-1} \varrho_0^{L_n+k-\ell-i-1} \eta_{\ell,i}, \\
a_n^{(3)}(\varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left[\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i} \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i} \right)^2 \right], \\
a_n^{(4)}(\varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{L_n+k-\ell,i} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{L_n+k-\ell,i} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{\ell=1}^k \sum_{i=0}^{L_n+k-\ell-1} \varrho_0^{L_n+k-\ell-i-1} \eta_{\ell,i} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \sum_{i=0}^{L_n+k-\ell-1} \varrho_0^{L_n+k-\ell-i-1} \eta_{\ell,i} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Megvizsgáljuk az egyes tagokat egyenként. Kezdjük $a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)$ -el. Bevezetjük a

$$\xi_{k,\ell,n}^{(1)} := \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i} \sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{2i} \right).$$

valószínűségi változókat. A $|\varrho_0| = 1$ instabil esetekben a

$$H_\ell(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} O(1), & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ O(\ell^2), & \text{ha } \varrho_0 = +1 \end{cases} \quad (4.8)$$

aszimptotika szerint

$$a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(1) \xi_{k,\ell,n}^{(1)}, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(\ell^2) \xi_{k,\ell,n}^{(1)}, & \text{ha } \varrho_0 = +1, \end{cases}$$

és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$|a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \leq \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(1) \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2}, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(\ell^4) \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2}, & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

Alkalmazva a 4.6. Lemmát, $\alpha = 3$ és $\lambda = 4$ választással, $|\varrho_0| = 1$ esetén

$$n^{-3} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(\left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2 - \mathbb{E} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2 \right) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Mivel $\mathbb{E} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2 = \ell$, így

$$n^{-3} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2 \rightarrow \frac{KL^2}{2}, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

és ekkor

$$n^{-3} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2 \rightarrow \frac{KL^2}{2} \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(1) = O(n^2) \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(\ell^4) = O(n^6), \quad (4.10)$$

kapjuk, hogy $|\varrho_0| = 1$ instabil esetekben

$$\sup_{\varrho \in [a,b]} r_{n,\varrho_0} |a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

A $|\varrho_0| < 1$ stabil esetben a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség önmagában nem elegendő. A $H_\ell(\varrho, \varrho_0)$ (4.6) aszimptotikája alapján

$$|a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \leq \frac{|\varrho - \varrho_0|(2 - \varrho_0 - \varrho)}{2(1 - \varrho_0)^2(1 - \varrho)} \left| \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right| + \left| \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(|\varrho|^{2\ell} + |\varrho_0|^\ell) \xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right|.$$

Alkalmazva a 4.8. Lemmát $\alpha = 2$ és $\lambda = 0$ választással $|\varrho_0| < 1$ esetén

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \xi_{k,\ell,n}^{(1)} \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$\left| \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(|\varrho|^{2\ell} + |\varrho_0|^\ell) \xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(|\varrho|^{4\ell} + |\varrho_0|^{2\ell}) \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right)^2}.$$

Alkalmazva a 4.6 Lemmát, $\alpha = 2$ és $\lambda = 0$ választással, a $|\varrho_0| < 1$ stabil esetben

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(\left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right)^2 - \mathbb{E} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right)^2 \right) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Mivel $\mathbb{E} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right)^2 = \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{2(\ell-i-1)}$, így (4.7) alapján

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right)^2 \rightarrow \frac{KL}{1-\varrho_0^2} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

és ebből

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right)^2 \rightarrow \frac{KL}{1-\varrho_0^2} \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel

$$\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(|\varrho|^{4\ell} + |\varrho_0|^{2\ell}) = O(n), \quad (4.13)$$

így a $|\varrho_0| < 1$ stabil esetben

$$\sup_{\varrho \in [a,b]} r_{n,\varrho_0} |a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Következzen $a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)$ vizsgálata. Bevezetve a

$$\xi_{k,\ell,n}^{(2)} := \sum_{i=0}^{L_n+k-\ell-1} \varrho_0^{L_n+k-\ell-i-1} \eta_{l,i} \sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{i=0}^{L_n+k-\ell-1} \varrho_0^{2i} \right)$$

valószínűségi változókat a

$$\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} O(k), & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ O(k), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ O(k(L_n+k)^2), & \text{ha } \varrho_0 = +1 \end{cases} \quad (4.15)$$

aszimptotika szerint

$$a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k) \sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)}, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k) \sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k(L_n+k)^2) \sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)}, & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$|a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)| \leq \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^2) \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)} \right)^2}, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^2) \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)} \right)^2}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^2(L_n+k)^4) \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)} \right)^2}, & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

A $|\varrho_0| < 1$ stabil esetben alkalmazva a 4.9. Lemmát $\alpha = 2$ és $\lambda = 0$ választással

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)} \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)} \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

Mivel $\mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)} \right)^2 = \sum_{\ell=1}^k \sum_{i=0}^{L_n+k-\ell-1} \varrho_0^{2i}$, így (4.7) alapján

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

melyből

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Tehát a $|\varrho_0| < 1$ stabil esetben

$$\sup_{\varrho \in [a, b]} r_{n, \varrho_0} |a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

A $|\varrho_0| = 1$ instabil esetekben tekintsük az alábbi átírást

$$\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k, \ell, n}^{(2)} \right)^2 = n \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k, \ell, n}^{(2)} \right)^2.$$

A 4.9. Lemmát $\frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k, \ell, n}^{(2)}$ -re alkalmazva $\alpha = 2$ és $\lambda = 0$ választással

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k, \ell, n}^{(2)} \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k, \ell, n}^{(2)} \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.18)$$

Mivel $\mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k, \ell, n}^{(2)} \right)^2 = \sum_{\ell=1}^k \sum_{i=0}^{L_n + k - \ell - 1} \frac{1}{n} = O(k)$, így

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k, \ell, n}^{(2)} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

melyből

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k, \ell, n}^{(2)} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Figyelembe véve

$$\sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} O(k^2) = O(n^2) \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} O(k^2 (L_n + k)^4) = O(n^6), \quad (4.19)$$

következik, hogy $|\varrho_0| = 1$ esetben

$$\sup_{\varrho \in [a, b]} r_{n, \varrho_0} |a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

Instabil esetben (4.9), stabil esetben (4.12) alapján

$$r_{n, \varrho_0} a_n^{(3)}(\varrho_0) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.21)$$

Instabil esetben (4.16), stabil esetben (4.18) alapján

$$r_{n,\varrho_0} a_n^{(4)}(\varrho_0) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.22)$$

A (4.11), (4.14), (4.17), (4.20), (4.21) és (4.22) eredményeket összegyűjtve teljesül a (4.4)-beli konvergencia.

Következzen (4.3) igazolása. Tekintsük az $M_n^{(\varrho, \varrho_0)}$ -t alábbi felbontását $\varrho \in \mathbb{R}$ esetén

$$M_n^{(\varrho, \varrho_0)} = (m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0) + m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)) + (\varrho - \varrho_0)(m_n^{(3)}(\varrho_0) + m_n^{(4)}(\varrho_0)),$$

ahol

$$\begin{aligned} m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) \eta_{k,\ell}, \\ m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} H_j(\varrho, \varrho_0) \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-\ell,\ell} \\ &= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} H_j(\varrho, \varrho_0) \sum_{\ell=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell}, \\ m_n^{(3)}(\varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k,\ell} \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i}, \\ m_n^{(4)}(\varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j,j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{L_n+k-\ell,i} \\ &= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \eta_{j, L_n+k-j} \sum_{\ell=1}^k \sum_{i=0}^{L_n+k-\ell-1} \varrho_0^{L_n+k-\ell-i-1} \eta_{\ell,i}. \end{aligned}$$

Megvizsgáljuk az egyes tagokat egyenként. Kezdjük $m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)$ -al. A $|\varrho_0| = 1$ instabil esetben a $H_\ell(\varrho, \varrho_0)$ (4.8)-as aszimptotikája szerint

$$m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(1) \eta_{k,\ell}, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(\ell^2) \eta_{k,\ell}, & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$|m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \leq \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(1) \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k,\ell}^2}, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(\ell^4) \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k,\ell}^2}, & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

Alkalmazva a 4.6. Lemmát $\alpha = 2$ és $\lambda = 0$ választással

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\eta_{k,\ell}^2 - \mathbb{E} \eta_{k,\ell}^2) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E} \eta_{k,\ell}^2 \rightarrow KL \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

így

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k,\ell}^2 \rightarrow KL \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

Figyelembe véve (4.10)-et a $|\varrho_0| = 1$ instabil esetekben

$$\sup_{\varrho \in [a,b]} r_{n,\varrho_0} |m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.24)$$

A $|\varrho_0| < 1$ stabil esetben a $H_\ell(\varrho, \varrho_0)$ (4.6)-os aszimptotikája szerint

$$|m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \leq \frac{|\varrho - \varrho_0|(2 - \varrho_0 - \varrho)}{2(1 - \varrho_0)^2(1 - \varrho)} \left| \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k,\ell} \right| + \left| \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(|\varrho|^{2\ell} + |\varrho_0|^\ell) \eta_{k,\ell} \right|.$$

Alkalmazva a 4.8. Lemmát $\alpha = 2$ és $\lambda = 0$ választással

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k,\ell} \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$\left| \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(|\varrho|^{2\ell} + |\varrho_0|^\ell) \eta_{k,\ell} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(|\varrho|^{4\ell} + |\varrho_0|^{2\ell}) \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k,\ell}^2}.$$

Figyelembe véve a (4.13) és (4.23) eredményeket, a $|\varrho_0| < 1$ stabil esetben

$$\sup_{\varrho \in [a, b]} r_{n, \varrho_0} |m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.25)$$

Következzen $m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)$ vizsgálata. A (4.15) aszimptotika szerint

$$m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k) \sum_{l=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell}, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k) \sum_{l=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k(L_n+k)^2) \sum_{l=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell}, & \text{ha } \varrho_0 = +1, \end{cases}$$

melyből a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$|m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)| \leq \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^2) \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell} \right)^2}, & \text{ha } \varrho_0 = -1, \\ \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^2) \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell} \right)^2}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^2(L_n+k)^4) \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell} \right)^2}, & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

Alkalmazva a 4.9. Lemmát $\alpha = 2$ és $\lambda = 0$ választással

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{\ell=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell} \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell} \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel $\mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell} \right)^2 = k$, így

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell} \right)^2 \rightarrow K \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

melyből

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k \eta_{\ell, L_n+k-\ell} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Figyelembe véve (4.19)-et, mind a $|\varrho| < 1$ stabil, mind a $|\varrho| = 1$ instabil esetekben

$$\sup_{\varrho \in [a, b]} r_{n, \varrho_0} |m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.26)$$

Következzen $m_n^{(3)}(\varrho_0)$ vizsgálata. Vezessük be a következő valószínűségi változókat

$$\zeta_{k,\ell,n}^{(3)} := \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i} \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{2i}\right).$$

Alkalmazva a 4.7. Következményt a $|\varrho| < 1$ stabil esetben $\alpha = 2$ és $\lambda = 0$ választással, és a $|\varrho| = 1$ instabil esetekben $\alpha = 3$ és $\lambda = 4$ választással

$$n^{-3} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(\eta_{k,\ell} \zeta_{k,\ell,n}^{(3)} - \mathbb{E} \eta_{k,\ell} \zeta_{k,\ell,n}^{(3)} \right) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel $\eta_{k,\ell}$ és $\zeta_{k,\ell,n}^{(3)}$ függetlenek minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, így

$$\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E} \eta_{k,\ell} \zeta_{k,\ell,n}^{(3)} = 0,$$

amiből következik, hogy mind a $|\varrho| < 1$ stabil, mind a $|\varrho| = 1$ instabil esetekben

$$r_{n,\varrho_0} m_n^{(3)}(\varrho_0) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.27)$$

Végül következzen $m_n^{(4)}(\varrho_0)$ vizsgálata. Bevezetve a

$$\begin{aligned} \xi_{k,\ell,n}^{(4)} &:= \eta_{\ell, L_n+k-\ell} \sim \mathcal{N}(0,1), \\ \zeta_{k,\ell,n}^{(4)} &:= \sum_{i=0}^{L_n+k-\ell-1} \varrho_0^{L_n+k-\ell-i-1} \eta_{\ell,i} \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{L_n+k-\ell-1} \varrho_0^{2i}\right) \end{aligned}$$

valószínűségi változókat

$$m_n^{(4)}(\varrho_0) = \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \zeta_{k,\ell,n}^{(4)} \right).$$

Alkalmazva a 4.10. Következményt $\alpha = 2$ és $\lambda = 0$ választással a $|\varrho| < 1$ stabil esetben

$$r_{n,\varrho_0} m_n^{(4)}(\varrho_0) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.28)$$

Instabil esetben a

$$m_n^{(4)}(\varrho_0) = \sqrt{n} \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \zeta_{k,\ell,n}^{(4)} \right).$$

átírás alapján, alkalmazva a 4.10. Lemmát a $\xi_{k,j,n}^{(4)}$ és $\frac{1}{\sqrt{n}} \zeta_{k,\ell,n}^{(4)}$ valószínűségi változókra $\alpha = 2$ és $\lambda = 0$ választással a $|\varrho| = 1$ instabil esetekben

$$r_{n,\varrho_0} m_n^{(4)}(\varrho_0) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.29)$$

A (4.24), (4.25), (4.26), (4.27), (4.28) és (4.29) eredményeket összegyűjtve kapjuk (4.3)-t. Ezzel igazoltuk a (4.1) állítást. $\square$

4.2. Erős konzisztencia n -el arányos minta esetén

Mint említettük, felmerült a kérdés, vajon hogyan viselkedik a ML becslés, ha a lejáratig hátralevő maximális időt lerögzítjük, és csak a megfigyelési időpontok számával tartunk a végtelenbe. Ekkor az egyik instabil esetben, nevezetesen $\varrho = -1$ esetén, nem sikerült bizonyítanunk az erős konzisztenciát (az ellenkezőjét sem). De az is érdekes eredmény, hogy $\varrho = +1$ instabil esetben teljesül, mert instabil esetben általában csak gyenge konzisztencia várható. Meglepő módon, azon esetekben, ahol sikerült bizonyítanunk az erős konzisztenciát, a skálázó tényezők megegyeznek az n^2 -tel arányos mintánál kapott skálázó tényezőkkel, tehát nem csökkentek.

4.3. Tétel. (Fülöp [2, Theorem 4.1.]) *Legyenek $K, L \in \mathbb{N}$ és legyenek $\{K_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ ha $n \rightarrow \infty$. Legyen $\varrho_0 \in (-1, +1]$, és válasszunk úgy az $a, b \in \mathbb{R}$ határokat, hogy $-1 < a < b < +1$ és $\varrho_0 \in \Theta$, ahol*

$$\Theta := \begin{cases} [a, b], & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ [a, +1], & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\widehat{\varrho}_n$ egy, az $\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)} := (f_{k,\ell}^{(\varrho_0)})_{1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L}$ mintán alapuló, tetszőleges mérhető ML becslése az igazi ϱ_0 paraméternek. Ekkor a $(\widehat{\varrho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat egy erősen konzisztens becslése ϱ_0 -nak.

Bizonyítás. A 3.7. Tétel (i) $\Rightarrow$ (iii) részéből és a következő állításból következik. $\square$

4.4. Állítás. (Fülöp [2, Proposition 4.2.]) *Legyenek $K, L, \{K_n : n \in \mathbb{N}\}, a, b, \Theta$ és ϱ_0 mint a 4.3. Tételben. Ekkor*

$$\sup_{\varrho \in [a, b]} \left| r_{n, \varrho_0} \left(\Lambda_{K_n, L} \left(\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)}; \varrho_0 \right) - \Lambda_{K_n, L} \left(\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)}; \varrho \right) \right) - I(\varrho, \varrho_0) \right| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad (4.30)$$

ha $n \rightarrow \infty$, ahol

$$r_{n, \varrho_0} := \begin{cases} n^{-2}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ n^{-6}, & \text{ha } \varrho_0 = +1, \end{cases}$$

$$I(\varrho, \varrho_0) := \begin{cases} \frac{(\varrho_0 - \varrho)^2 (2 - \varrho_0 - \varrho)^2}{16(1 - \varrho_0)^4 (1 - \varrho)^2} K^2, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \frac{(1 - \varrho)^2}{432} K^6, & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

Továbbá minden $\varrho \in [a, b] \setminus \{\varrho_0\}$ és ϱ minden N környezete esetén, melyre $\varrho_0 \notin \overline{N}$ (ahol $\overline{N}$ az N lezártját jelöli) teljesül, hogy $\inf_{\phi \in N} I(\phi, \varrho_0) > 0$.

Bizonyítás. A 4.1. Állítás bizonyítása alapján (4.30) igazolásához elegendő leellenőriznünk a (4.3), (4.4) és (4.5) konvergenciákat $L_n := L$, $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Foglalkozzunk először (4.5) bizonyításával. A $H_\ell(\varrho, \varrho_0)$ -al kapcsolatos aszimptotikák megváltoznak, nevezetesen tetszőleges $\varrho \in [a, b]$ esetén

$$H_\ell(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} \frac{(\varrho - \varrho_0)(2 - \varrho_0 - \varrho)}{2(1 - \varrho_0)^2(1 - \varrho)} + O(|\varrho|^{2\ell}) + O(|\varrho_0|^\ell) = O(1), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ -(1 - \varrho) \frac{\ell^2}{2} + O(\ell) = O(1), & \text{ha } \varrho_0 = 1, \end{cases} \quad (4.31)$$

$$H_\ell(\varrho, \varrho_0)^2 = \begin{cases} \frac{(\varrho - \varrho_0)^2 (2 - \varrho_0 - \varrho)^2}{4(1 - \varrho_0)^4 (1 - \varrho)^2} + O(|\varrho|^{2\ell}) + O(|\varrho_0|^\ell) = O(1), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ (1 - \varrho)^2 \frac{\ell^4}{4} + O(\ell^3) = O(1), & \text{ha } \varrho_0 = 1, \end{cases}$$

és

$$\sum_{\ell=L}^{L+k-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} \frac{k(\varrho - \varrho_0)(2 - \varrho_0 - \varrho)}{2(1 - \varrho_0)^2(1 - \varrho)} + O(1) = O(k), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ -\frac{1 - \varrho}{2} \left(\frac{(L+k)^3}{3} - \frac{L^3}{3} \right) + O(k^2) \\ = -\frac{1 - \varrho}{6} k^3 + O(k^2) = O(k^3), & \text{ha } \varrho_0 = 1, \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\left(\sum_{\ell=L}^{L+k-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) \right)^2 = \begin{cases} k^2 \frac{(\varrho - \varrho_0)^2 (2 - \varrho_0 - \varrho)^2}{4(1 - \varrho_0)^4 (1 - \varrho)^2} + O(k), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ k^6 \frac{(1 - \varrho)^2}{36} + O(k^5), & \text{ha } \varrho_0 = 1. \end{cases}$$

Következésképpen $\varrho \in [a, b]$ esetén

$$\mathbb{E}A_n^{(\varrho, \varrho_0)} = \begin{cases} \frac{K^2}{2} \frac{(\varrho_0 - \varrho)^2 (2 - \varrho_0 - \varrho)^2}{4(1 - \varrho_0)^4 (1 - \varrho)^2} n^2 + O(n) \\ = 2I(\varrho, \varrho_0) n^2 + O(n), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \frac{(1 - \varrho)^2}{4} \frac{K^6}{54} n^6 + O(n^5) \\ = 2I(\varrho, \varrho_0) n^6 + O(n^5), & \text{ha } \varrho_0 = 1, \end{cases}$$

ami maga után vonja (4.5)-t.

Folytassuk (4.4) igazolásával. Ehhez használjuk a korábbi

$$A_n^{(\varrho, \varrho_0)} - \mathbb{E}A_n^{(\varrho, \varrho_0)} = 2(\varrho - \varrho_0)(a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0) + a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)) + (\varrho - \varrho_0)^2(a_n^{(3)}(\varrho_0) + a_n^{(4)}(\varrho_0))$$

felbontást ($\varrho \in \mathbb{R}$), melynek tényezői a

$$\begin{aligned} \xi_{k,\ell,n}^{(1)} &:= \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i} \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{2i}\right), \\ \xi_{k,\ell,n}^{(2)} &:= \sum_{i=0}^{L+k-\ell-1} \varrho_0^{L+k-\ell-i-1} \eta_{\ell,i} \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=0}^{L+k-\ell-1} \varrho_0^{2i}\right) \end{aligned}$$

valószínűségi változók bevezetése után a következő egyszerűbb alakba írhatóak

$$\begin{aligned} a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) \xi_{k,\ell,n}^{(1)} \\ a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L}^{L+k-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) \sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(1)}, \\ a_n^{(3)}(\varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \left[\left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right)^2 - \mathbb{E} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)} \right)^2 \right], \\ a_n^{(4)}(\varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)} \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^k \xi_{k,\ell,n}^{(2)} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Kezdjük $a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)$ vizsgálatával. A $H_\ell(\varrho, \varrho_0)$ (4.31)-beli aszimptotikája és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján a $|\varrho_0| < 1$ stabil és a $\varrho_0 = 1$ instabil

esetben egyaránt

$$|a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} O(1) \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2}.$$

Alkalmazva a 4.13. Lemmát $\alpha = 1$ mellett

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \left(\left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2 - \mathbb{E} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2 \right) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b. ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.33)$$

Mivel

$$\mathbb{E} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2 = \begin{cases} \frac{1-\varrho_0^{2\ell}}{1-\varrho_0^2}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \ell, & \text{ha } \varrho_0 = 1, \end{cases}$$

és így

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbb{E} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2 \rightarrow \begin{cases} K \left(\frac{L}{1-\varrho_0^2} - \frac{1-\varrho_0^{2L}}{(1-\varrho_0^2)^2} \right), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \frac{KL^2}{2}, & \text{ha } \varrho_0 = 1, \end{cases}$$

$n \rightarrow \infty$ esetén, (4.33) alapján

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \left(\xi_{k,\ell,n}^{(1)}\right)^2 \rightarrow \begin{cases} K \left(\frac{L}{1-\varrho_0^2} + \frac{1-\varrho_0^{2L}}{(1-\varrho_0^2)^2} \right), & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \frac{KL^2}{2}, & \text{ha } \varrho_0 = 1, \end{cases} \quad \text{P-m.b. ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel $\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} O(1) = O(n)$, így mind a $|\varrho_0| < 1$ stabil, mind a $\varrho_0 = 1$ instabil esetben

$$\sup_{\varrho \in [a,b]} r_{n,\varrho_0} |a_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b. ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.34)$$

Következzen $a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)$ vizsgálata. Tekintve a (4.32)-beli aszimptotikát

$$a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k) \sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(2)}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^3) \sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(2)}, & \text{ha } \varrho_0 = 1, \end{cases}$$

melyből a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$|a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)| \leq \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^2) \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^6) \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2}, & \text{ha } \varrho_0 = 1. \end{cases}$$

A 4.15. Lemma alkalmazása előtt le kell ellenőriznünk a $\sup_{j \leq k \leq K_n} E(\xi_{k,j,n}^{(2)})^8 < \infty$ feltételt.

$$E(\xi_{k,j,n}^{(2)})^8 = 105 \left(\sum_{i=0}^{L+k-j-1} \varrho_0^{2i} \right)^4 = \begin{cases} 105 \left(\frac{1-\varrho_0^{2(L+k-j)}}{1-\varrho_0^2} \right)^4, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ 105(L+k-j)^4, & \text{ha } \varrho_0 = 1. \end{cases}$$

Ezek szerint a stabil esetben teljesül a feltétel, az instabil esetben azonban más módszerhez kell folyamodnunk.

Tekintsük előbb a $|\varrho_0| < 1$ stabil esetet. A 4.15. Lemma alapján $\alpha = 2$ mellett

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad (4.35)$$

ha $n \rightarrow \infty$. Mivel

$$\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 = \sum_{j=1}^k \mathbb{E} \left(\xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{L+k-j-1} \varrho_0^{2i} = \sum_{j=1}^k \frac{1-\varrho_0^{2(L+k-j)}}{1-\varrho_0^2} = O(k),$$

így

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

amiből (4.35) alapján

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b. ha } n \rightarrow \infty.$$

Figyelembe véve

$$\sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} O(k^2) = O(n^2), \quad (4.36)$$

kapjuk, hogy a $|\varrho_0| < 1$ esetben

$$\sup_{\varrho \in [a,b]} r_{n,\varrho_0} |a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b. ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.37)$$

A $\varrho_0 = 1$ instabil esetben a következő átalakítást hajtsuk végre

$$\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 = n \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2.$$

Ekkor teljesül a

$$\sup_{k,j,n \in \mathbb{N}} E \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^8 = \sup_{j \leq k \leq K_n \in \mathbb{N}} 105 \frac{(L+k-j)^4}{n^4} < \infty$$

feltétel és alkalmazhatjuk a 4.15. Lemmát a $\frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k,j,n}^{(2)}$ valószínűségi változókra $\alpha = 2$ választása mellett:

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 - E \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad (4.38)$$

ha $n \rightarrow \infty$. Mivel $E \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{L+k-j-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} O(k^2)$, így

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} E \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 = n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O \left(\frac{k^2}{n} \right) \rightarrow 0,$$

ha $n \rightarrow \infty$, és (4.38) alapján

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k,j,n}^{(2)} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Figyelembe véve

$$\sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} O(k^6) = O(n^6), \quad (4.39)$$

kapjuk, hogy a $\varrho_0 = +1$ instabil esetben

$$\sup_{\varrho \in [a,b]} r_{n,\varrho_0} |a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.40)$$

A stabil és a $\varrho_0 = +1$ instabil esetben (4.33) alapján

$$r_{n,\varrho_0} a_n^{(3)}(\varrho_0) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.41)$$

Továbbá a stabil esetben (4.35) alapján, az instabil esetben pedig (4.38) alapján

$$r_{n,\varrho_0} a_n^{(4)}(\varrho_0) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.42)$$

A (4.34), (4.37), (4.40), (4.41), és (4.42) konvergenciákból következik (4.4).

Végül következzen (4.3) ellenőrzése. Ehhez használjuk a korábbi

$$M_n^{(\varrho, \varrho_0)} = (m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0) + m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)) + (\varrho - \varrho_0)(m_n^{(3)}(\varrho_0) + m_n^{(4)}(\varrho_0))$$

felbontást ($\varrho \in \mathbb{R}$), melynek tényezői a

$$\begin{aligned} \zeta_{k,\ell,n}^{(3)} &:= \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{\ell-i-1} \eta_{k,i} \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho_0^{2i}\right), \\ \xi_{k,j,n}^{(4)} &:= \eta_{j,L+k-j} \sim \mathcal{N}(0,1), \\ \zeta_{k,\ell,n}^{(4)} &:= \sum_{i=0}^{L+k-\ell-1} \varrho_0^{L+k-\ell-i-1} \eta_{\ell,i} \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=0}^{L+k-\ell-1} \varrho_0^{2i}\right) \end{aligned}$$

valószínűségi változók bevezetése után a következő egyszerűbb alakba írhatóak

$$\begin{aligned} m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) \eta_{k,\ell}, \\ m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L}^{L+k-1} H_\ell(\varrho, \varrho_0) \sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)}, \\ m_n^{(3)}(\varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \eta_{k,\ell} \zeta_{k,\ell,n}^{(3)}, \\ m_n^{(4)}(\varrho_0) &:= \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \zeta_{k,\ell,n}^{(4)} \right). \end{aligned}$$

Kezdjük az $m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)$ vizsgálatával. A $H_\ell(\varrho, \varrho_0)$ (4.31)-beli aszimptotikája és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján a $|\varrho_0| < 1$ stabil és a $\varrho_0 = 1$ instabil esetben egyaránt

$$|m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} O(1) \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \eta_{k,\ell}^2}.$$

Alkalmazva a 4.13. Lemmát $\alpha = 1$ mellett

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} (\eta_{k,\ell}^2 - \mathbb{E} \eta_{k,\ell}^2) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbb{E} \eta_{k,\ell}^2 \rightarrow KL \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

így

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \eta_{k,\ell}^2 \rightarrow KL \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel $\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} O(1) = O(n)$, így mind a $|\varrho_0| < 1$ stabil, mind a $\varrho_0 = 1$ instabil esetben

$$\sup_{\varrho \in [a,b]} r_{n,\varrho_0} |m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.43)$$

Következzen $m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)$ vizsgálata. Tekintve a (4.32)-beli aszimptotikát

$$m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k) \sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^3) \sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)}, & \text{ha } \varrho_0 = 1, \end{cases}$$

melyből a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$|m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)| \leq \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^2) \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right)^2}, & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ \sqrt{\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} O(k^6) \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right)^2}, & \text{ha } \varrho_0 = 1. \end{cases}$$

Alkalmazva a 4.15. Lemmát $\alpha = 2$ mellett

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.}$$

ha $n \rightarrow \infty$. Mivel $\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right)^2 = k$, így

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right)^2 \rightarrow K \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

és ekkor

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Figyelembe véve a (4.36) és (4.39) aszimptotikákat, a $|\varrho_0| < 1$ stabil és a $\varrho_0 = 1$ instabil esetben egyaránt

$$\sup_{\varrho \in [a,b]} r_{n,\varrho_0} |m_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0)| \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.44)$$

Következzen $m_n^{(3)}(\varrho_0)$ vizsgálata. Mind a stabil, mind a $\varrho = +1$ instabil esetben alkalmazhatjuk a 4.14. Következményt $\alpha = 1$ mellett:

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \left(\eta_{k,\ell} \zeta_{k,\ell,n}^{(3)} - \mathbb{E} \eta_{k,\ell} \zeta_{k,\ell,n}^{(3)} \right) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel $\eta_{k,\ell}$ és $\zeta_{k,\ell,n}^{(3)}$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek

$$\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbb{E} \eta_{k,\ell} \zeta_{k,\ell,n}^{(3)} = 0,$$

és így a $|\varrho_0| < 1$ stabil és a $\varrho_0 = 1$ instabil esetben egyaránt

$$r_{n,\varrho_0} m_n^{(3)}(\varrho_0) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.45)$$

Végül következzen $m_n^{(4)}(\varrho_0)$ vizsgálata. Itt újra külön kell kezelnünk a két esetet.

A $|\varrho_0| < 1$ stabil esetben a 4.16. Következmény alapján, $\alpha = 2$ mellett

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \zeta_{k,\ell,n}^{(4)} \right) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

A $\varrho_0 = +1$ instabil esetben a 4.16. Következményt a $\xi_{k,j,n}^{(4)}$ és $\frac{1}{\sqrt{n}} \zeta_{k,\ell,n}^{(4)}$ valószínűségi változókra alkalmazva $\alpha = 2$ mellett

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n}^{(4)} \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \zeta_{k,\ell,n}^{(4)} \right) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Így a $|\varrho_0| < 1$ stabil és a $\varrho_0 = 1$ instabil esetben egyaránt teljesül, hogy

$$r_{n,\varrho_0} m_n^{(4)}(\varrho_0) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (4.46)$$

A (4.43), (4.44), (4.45) és (4.46) konvergenciákból következik (4.3). Ezzel igazoltuk a (4.30) állítást. $\square$

4.5. Megjegyzés. A $\varrho_0 = -1$ instabil esetben az eddig alkalmazott módszerrel nem jön ki az erős konzisztencia. Ennek oka, hogy a (4.5) konvergencia n^{-2} skálázótényezővel teljesül, viszont ez a skálázótényező mind (4.4), mind (4.3) igazolásához kevésnek bizonyult. Az

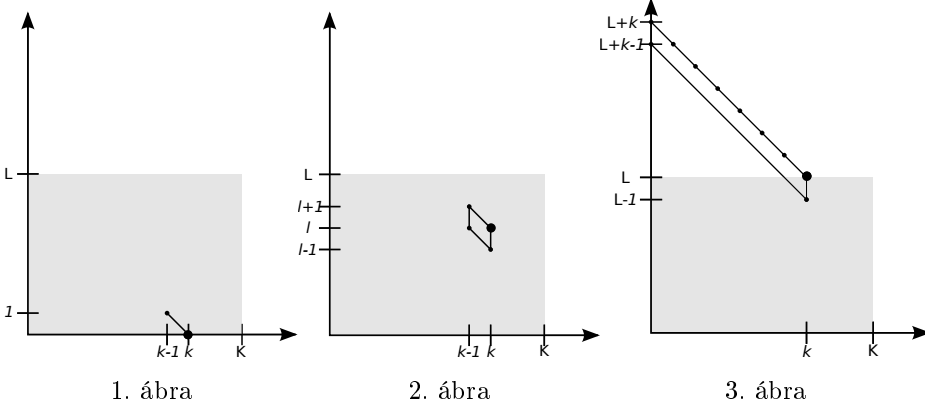
$$r_{n,\varrho_0} a_n^{(2)}(\varrho, \varrho_0), \quad r_{n,\varrho_0} |m_n^{(1)}(\varrho, \varrho_0)|, \quad r_{n,\varrho_0} m_n^{(4)}(\varrho_0) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

konvergenciákat nem tudtuk bizonyítani. A 4.1. Állításban az $I(\varrho, \varrho_0)$ mennyiség $\varrho_0 = -1$ esetbeli értékéből látszik, hogy az n -el arányos minta esetén (ahol $L_n = L$, $n \in \mathbb{N}$) a nagyságrend különbözik az n^2 -tel arányos eset nagyságrendjétől.

4.3. Szimulációk

Ebben az alfejezetben a ϱ paraméter becslésének empirikus viselkedését vizsgáljuk szimulációk segítségével. Megvizsgáljuk az ML becslések konvergenciáját és normalitását, bár utóbbira nincsenek elméleti eredményeink. A szimulációkat és

becsléseket az R [24] statisztikai programcsomag segítségével végeztük.



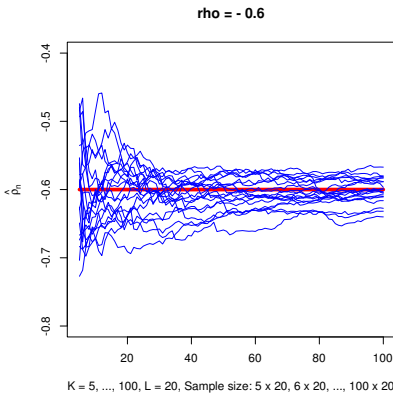
Becsléseinket egy $K \times L$ méretű $\{f_{k,\ell} : 1 \leq k \leq K, 1 \leq \ell \leq L\}$ minta alapján végezzük, melyet az arbitrázsmentes modellünk (lásd (2.10), (2.11)) alapján generáltunk adott β volatilitás és $\{f_{0,\ell} : \ell \geq 0\}$ kezdeti értékek esetén. A (2.10) egyenlet alapján az $f_{k,\ell}$ határidős kamatláb 3 korábbi időponttól függ, plusz egy véletlen változótól (lásd 2. ábra). A téglalap tetején azonban ezt az összefüggést nem használhatjuk, mivel az $f_{k-1,L+1}$ nincs benne a mintában, így ebben az esetben a (2.11) egyenlet alapján egy korábbi mintaelem, két kezdeti érték és véletlen változók segítségével tudjuk $f_{k,L}$ -et generálni (lásd 3. ábra).

A határidős kamatlábak kezdőértékeire $f_{k,0} := 0.03$ ($0 \leq k \leq K+L$), a volatilitásra $\beta = 0.2$ rögzített értéket vettünk. Mivel az a valóságghűbb eset, mikor a lejáratig hátralevő időt nem tudjuk tetszőlegesen nagyra választani, arra törekedtünk, hogy az n -nel arányos mintanövekedést szimuláljuk az n^2 helyett.

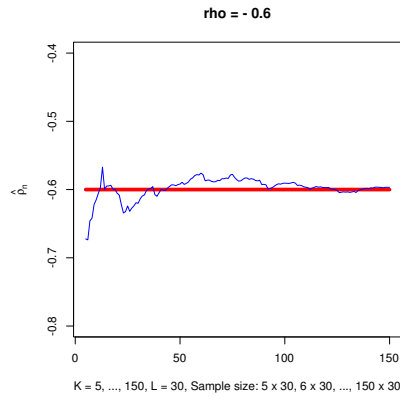
A maximum likelihood becslések a (4.2) loglikelihood függvény maximumhelyei, mely az ismeretlen ϱ paraméter magas fokú polinomja. Emiatt nem tudunk explicit megoldást adni $\hat{\varrho}$ -ra, csak numerikus eljárással tudjuk megkapni a becsléseinket. Ehhez az R beépített `optim` függvényét használtuk, mely a Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) módszeren alapul.

Először a stabil esetet teszteltük $\varrho = -0.6$ valódi paraméterértékkel. Generáltunk egy 100×20 méretű mintát és ennek egyre növekvő részmintáiból számoltattuk az ML becslést. A 4. ábrán az ML becslés változása látható miközben

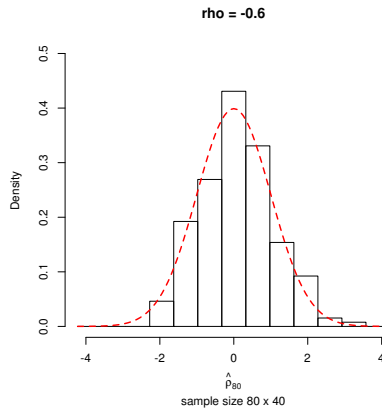
a becsléshez használt részminta mérete $5 \times L, 6 \times L, \dots, 100 \times L$ és $L = 20$. 20 ilyen számolást lefuttatva láthatjuk, hogy az ML becslések sorozata a valódi paraméterértékhez tart. A 2. ábrán egyetlen sorozatot látunk egy nagyobb minta, $K = 5, \dots, 150$ és $L = 30$ esetén. Ez már sokkal több időt igénylő számolás, egy átlagos laptopon (Intel Core2Duo T9400 processzor, 2x2GB DDR3 memória) több óráig tart.



4. ábra



5. ábra



6. ábra

Ezután 200-szor generáltunk 80×40 -es mintát és ebből becsültük az ML becslést. Minden becslésből levontuk a valódi paraméterértéket és osztottuk a becslések mintából számolt szórásával. A 3. ábrán ezen standardizált becslések hisztogramját láthatjuk, és a standard normális eloszlás haranggörbjét.

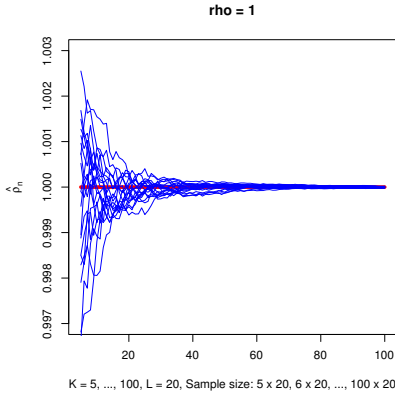
Az ábra alapján a hisztogram jól illeszkedik a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényére. Teszteltük a normalitást Kolmogorov-Szmirnov és Shapiro-Wilk próbával is:

Kolmogorov-Smirnov normality test: $D = 0.0527$, $p\text{-value} = 0.6356$.

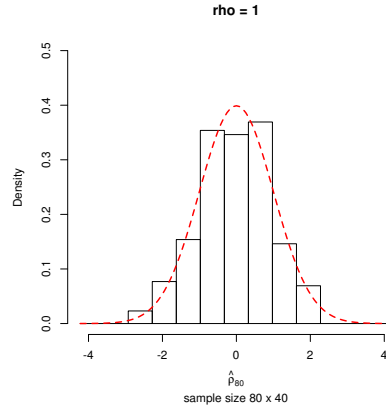
Shapiro-Wilk normality test: $W = 0.9935$, $p\text{-value} = 0.5345$.

A nagy p -érték tisztán jelzi a becslések normalitását. Így mondhatjuk, hogy a stabil esetben az ML becslések az elméleti eredményeknek megfelelően viselkednek, konzisztensek és aszimptotikusan normálisak.

A $\varrho = +1$ instabil esetben az ábrák és eredmények az alábbiak:



7. ábra.

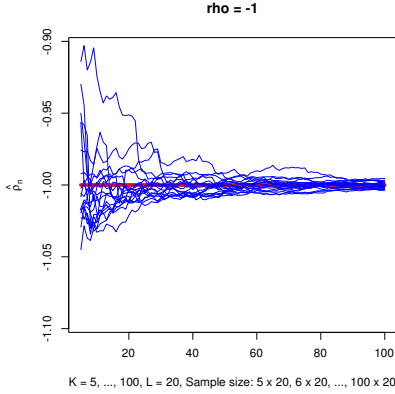


8. ábra

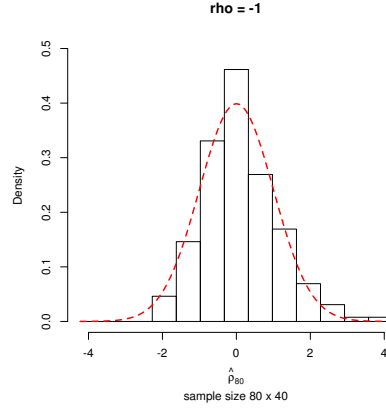
Kolmogorov-Smirnov normality test: $D = 0.0421$, $p\text{-value} = 0.8694$.

Shapiro-Wilk normality test: $W = 0.9916$, $p\text{-value} = 0.3058$.

Illetve a $\varrho = -1$ instabil esetben kapott ábrák és eredmények:



9. ábra.



10. ábra.

Kolmogorov-Smirnov normality test: $D = 0.0529$, $p\text{-value} = 0.6315$

Shapiro-Wilk normality test: $W = 0.973$, $p\text{-value} = 0.0006713$

Azt mondhatjuk, hogy az $\varrho = +1$ esetben az ML becslés az elméleti eredményeknek megfelelően viselkedik, azaz konzisztens, és a 9. ábra azt sugallja, hogy a $\varrho = -1$ esetben is teljesül a konzisztencia, habár ezt elméleti eredménnyel még nem tudjuk alátámasztani.

Úgy tűnik, hogy a $\varrho = +1$ esetben (mindkét próba alapján) az ML becslés aszimptotikusan normális szemben a $\varrho = -1$ esettel, ahol a Shapiro-Wilk próba alapján elvetjük a normalitást (érzékenyebb a ferdeségre, mint a Kolmogorov-Smirnov próba).

4.4. Függelék A

Az erős konzisztencia esetén a 4.2. Következmény bizonyításánál nagy számok erős törvényei típusú állításokat használtunk nem független minta esetén. Hasonló állításokat találhatunk [10] és [6] munkákban, azonban ezeknél kissé általánosabb esetekre volt szükségünk. A Függelék A-ban található lemmák az n^2 -tel arányos mintára vonatkoznak, míg a Függelék B az n -nel arányos mintára vonatkozó állításokat foglalja össze.

4.6. Lemma. Legyenek $K, L \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n, L_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ és $L_n = nL + o(n)$, ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,\ell,n} : k, \ell, n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,\ell,n} : \ell \in \mathbb{N}\}$ halmazok különböző $k \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,\ell,n} : \ell \in \mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$ σ -algebrák függetlenek), és $E\xi_{k,\ell,n}^8 = O(\ell^\lambda)$ valamely $\lambda \geq 0$ esetén (azaz $\sup_{k,\ell,n \in \mathbb{N}} \ell^{-\lambda} E\xi_{k,\ell,n}^8 < \infty$). Ekkor minden $\alpha > (7 + \lambda)/4$ esetén

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n} (\xi_{k,\ell,n}^2 - E\xi_{k,\ell,n}^2) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.,} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Elegendő megmutatnunk, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\zeta_n| > \varepsilon n^\alpha) < \infty,$$

ahol

$$\zeta_n := \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n} (\xi_{k,\ell,n}^2 - E\xi_{k,\ell,n}^2).$$

A Markov-egyenlőtlenség alapján $P(|\zeta_n| > \varepsilon n^\alpha) \leq \varepsilon^{-4} n^{-4\alpha} E\zeta_n^4$, így elegendő megmutatnunk, hogy $E\zeta_n^4 = O(n^{4\alpha-1-\delta})$ valamely $\delta > 0$ esetén.

$$E\zeta_n^4 = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=1}^{K_n} \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4=1}^{L_n} E\zeta_{k_1, \ell_1, n} \zeta_{k_2, \ell_2, n} \zeta_{k_3, \ell_3, n} \zeta_{k_4, \ell_4, n},$$

ahol $\zeta_{k,\ell,n} := \xi_{k,\ell,n}^2 - E\xi_{k,\ell,n}^2$. A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$|E\zeta_{k_1, \ell_1, n} \zeta_{k_2, \ell_2, n} \zeta_{k_3, \ell_3, n} \zeta_{k_4, \ell_4, n}| \leq (E\zeta_{k_1, \ell_1, n}^4 E\zeta_{k_2, \ell_2, n}^4 E\zeta_{k_3, \ell_3, n}^4 E\zeta_{k_4, \ell_4, n}^4)^{1/4}.$$

Továbbá

$$E\zeta_{k,\ell,n}^4 = E(\xi_{k,\ell,n}^2 - E\xi_{k,\ell,n}^2)^4 \leq 2^3 (E\xi_{k,\ell,n}^8 + (E\xi_{k,\ell,n}^2)^4) \leq 16E\xi_{k,\ell,n}^8 = O(\ell^\lambda).$$

Így kapjuk, hogy

$$E\zeta_{k_1, \ell_1, n} \zeta_{k_2, \ell_2, n} \zeta_{k_3, \ell_3, n} \zeta_{k_4, \ell_4, n} = O\left((\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4)^{\lambda/4}\right).$$

Mivel a feltétel szerint a $\{\zeta_{k,\ell,n} : \ell \in \mathbb{N}\}$, $k \in \mathbb{N}$, halmazok függetlenek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $E\zeta_{k,\ell,n} = 0$ minden $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ esetén, így

$$\begin{aligned}
E\zeta_n^4 &= \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4=1}^{L_n} \left(\sum_{k=1}^{K_n} E\zeta_{k,\ell_1,n} \zeta_{k,\ell_2,n} \zeta_{k,\ell_3,n} \zeta_{k,\ell_4,n} \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq K_n} E\zeta_{k_1,\ell_1,n} \zeta_{k_1,\ell_2,n} \zeta_{k_2,\ell_3,n} \zeta_{k_2,\ell_4,n} \right) \\
&= \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4=1}^{L_n} \left(\sum_{k=1}^{K_n} O((\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4)^{\lambda/4}) + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq K_n} O((\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4)^{\lambda/4}) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{K_n} \left(\sum_{\ell=1}^{L_n} \ell^{\lambda/4} \right)^4 + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq K_n} \left(\sum_{\ell=1}^{L_n} \ell^{\lambda/4} \right)^4 \\
&= O(n^{6+\lambda}).
\end{aligned}$$

Következésképpen $E\zeta_n^4 = O(n^{4\alpha-1-\delta})$ ha $\delta := \frac{7+\lambda}{4} - \alpha > 0$. $\square$

4.7. Következmény. Legyenek $K, L \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n, L_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ és $L_n = nL + o(n)$, ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,\ell,n}, \zeta_{k,\ell,n} : k, \ell, n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,\ell,n}, \zeta_{k,\ell,n} : \ell \in \mathbb{N}\}$ halmazok különböző $k \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,\ell,n}, \zeta_{k,\ell,n} : \ell \in \mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$, σ -algebrák függetlenek), és $E(\xi_{k,\ell,n}^8 + \zeta_{k,\ell,n}^8) = O(\ell^\lambda)$ valamely $\lambda \geq 0$ esetén (azaz $\sup_{k,\ell,n \in \mathbb{N}} \ell^{-\lambda} E(\xi_{k,\ell,n}^8 + \zeta_{k,\ell,n}^8) < \infty$). Ekkor minden $\alpha > (7+\lambda)/4$ esetén

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n} (\xi_{k,\ell,n} \zeta_{k,\ell,n} - E\xi_{k,\ell,n} \zeta_{k,\ell,n}) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.}, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Mivel

$$\begin{aligned}
\xi_{k,\ell,n} \zeta_{k,\ell,n} - E\xi_{k,\ell,n} \zeta_{k,\ell,n} &= \frac{1}{4} \left[\left\{ (\xi_{k,\ell,n} + \zeta_{k,\ell,n})^2 - E(\xi_{k,\ell,n} + \zeta_{k,\ell,n})^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ (\xi_{k,\ell,n} - \zeta_{k,\ell,n})^2 - E(\xi_{k,\ell,n} - \zeta_{k,\ell,n})^2 \right\} \right],
\end{aligned}$$

így a $\{\xi_{k,\ell,n} + \zeta_{k,\ell,n} : k, \ell, n \in \mathbb{N}\}$ és $\{\xi_{k,\ell,n} - \zeta_{k,\ell,n} : k, \ell, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségi változókra alkalmazva a 4.6. Lemmát, kapjuk az állítást. $\square$

4.8. Lemma. Legyenek $K, L \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n, L_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ és $L_n = nL + o(n)$, ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,\ell,n} : k, \ell, n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,\ell,n} : \ell \in \mathbb{N}\}$ halmazok különböző $k \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,\ell,n} : \ell \in \mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$ σ -algebrák függetlenek), és $E\xi_{k,\ell,n}^4 = O(\ell^\lambda)$ valamely $\lambda \geq 0$ esetén (azaz $\sup_{k,\ell,n \in \mathbb{N}} \ell^{-\lambda} E\xi_{k,\ell,n}^4 < \infty$). Ekkor minden $\alpha > (7 + \lambda)/4$ esetén

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n} (\xi_{k,\ell,n} - E\xi_{k,\ell,n}) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.,} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Hasonló a 4.6. Lemma bizonyításához. □

4.9. Lemma. Legyen $K \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,j,n} : k, j, n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,j,n} : k \in \mathbb{N}\}$ halmazok különböző $j \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,j,n} : k \in \mathbb{N})$, $j \in \mathbb{N}$ σ -algebrák függetlenek), és $E\xi_{k,j,n}^8 = O(j^\lambda)$ valamely $\lambda \geq 0$ esetén (azaz $\sup_{k,j,n \in \mathbb{N}} j^{-\lambda} E\xi_{k,j,n}^8 < \infty$). Ekkor minden $\alpha > (7 + 3\lambda)/4$ esetén

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} \left[\left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n} \right)^2 - E \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n} \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.,} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Nyilván

$$\left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n} \right)^2 - E \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n} \right)^2 = \sum_{j_1=1}^k \sum_{j_2=1}^k (\xi_{k,j_1,n} \xi_{k,j_2,n} - E\xi_{k,j_1,n} \xi_{k,j_2,n}).$$

Mint a 4.6. Lemma bizonyításában, elegendő megmutatnunk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4\alpha} E\zeta_n^4 < \infty$, ahol

$$\zeta_n := \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} \sum_{j_1=1}^k \sum_{j_2=1}^k \zeta_{k,j_1,j_2,n}$$

és

$$\zeta_{k,j_1,j_2,n} := \xi_{k,j_1,n} \xi_{k,j_2,n} - E\xi_{k,j_1,n} \xi_{k,j_2,n}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\zeta_n^4 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=1}^{K_n} (k_1 k_2 k_3 k_4)^{-1} \times \\ &\times \sum_{j_1, j_2=1}^{k_1} \sum_{j_3, j_4=1}^{k_2} \sum_{j_5, j_6=1}^{k_3} \sum_{j_7, j_8=1}^{k_4} \mathbb{E}\zeta_{k_1, j_1, j_2, n} \zeta_{k_2, j_3, j_4, n} \zeta_{k_3, j_5, j_6, n} \zeta_{k_4, j_7, j_8, n}. \end{aligned}$$

Mint a 4.6. Lemma bizonyításában, megmutatható, hogy

$$\mathbb{E}\zeta_{k_1, j_1, j_2, n} \zeta_{k_2, j_3, j_4, n} \zeta_{k_3, j_5, j_6, n} \zeta_{k_4, j_7, j_8, n} = O\left((j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 j_6 j_7 j_8)^{\lambda/2}\right).$$

Az $\{\xi_{k,j,n} : k \in \mathbb{N}\}$, $j \in \mathbb{N}$ halmazok függetlensége miatt

$$\mathbb{E}\zeta_{k_1, j_1, j_2, n} \zeta_{k_2, j_3, j_4, n} \zeta_{k_3, j_5, j_6, n} \zeta_{k_4, j_7, j_8, n} = 0$$

ha a $\{j_1, j_2\}$, $\{j_3, j_4\}$, $\{j_5, j_6\}$, $\{j_7, j_8\}$ halmazok közül valamelyik diszjunkt a másik háromtól. Következésképpen

$$\sum_{j_1, j_2=1}^{k_1} \sum_{j_3, j_4=1}^{k_2} \sum_{j_5, j_6=1}^{k_3} \sum_{j_7, j_8=1}^{k_4} \mathbb{E}\zeta_{k_1, j_1, j_2, n} \zeta_{k_2, j_3, j_4, n} \zeta_{k_3, j_5, j_6, n} \zeta_{k_4, j_7, j_8, n} = O(n^{6+3\lambda}).$$

Mivel $\sum_{k=1}^n k^{-1} = O(\log n)$, így $\mathbb{E}\zeta_n^4 = O(n^{6+3\lambda}(\log n)^4)$, tehát $n^{-4\alpha}\mathbb{E}\zeta_n^4 = O(n^{6+3\lambda-4\alpha}(\log n)^4)$, ahol $6+3\lambda-4\alpha < -1$, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4\alpha}\mathbb{E}\zeta_n^4 < \infty$. $\square$

4.10. Következmény. Legyen $K \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,j,n}, \zeta_{k,j,n} : k, j, n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,j,n}, \zeta_{k,j,n} : k \in \mathbb{N}\}$ halmazok különböző $j \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,j,n}, \zeta_{k,j,n} : k \in \mathbb{N})$, $j \in \mathbb{N}$ σ -algebrák függetlenek), és $\mathbb{E}(\xi_{k,j,n}^8 + \zeta_{k,j,n}^8) = O(j^\lambda)$ valamely $\lambda \geq 0$ esetén (azaz $\sup_{k,j,n \in \mathbb{N}} j^{-\lambda} \mathbb{E}(\xi_{k,j,n}^8 + \zeta_{k,j,n}^8) < \infty$). Ekkor minden $\alpha > (7+3\lambda)/4$ esetén

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} \left[\left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n} \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \zeta_{k,\ell,n} \right) - \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n} \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \zeta_{k,\ell,n} \right) \right] \rightarrow 0$$

P-m.b., ha $n \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. Hasonló a 4.7. Következmény bizonyításához. $\square$

4.11. Lemma. Legyen $K \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,j,n} : k, j, n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,j,n} : k \in \mathbb{N}\}$ halmazok különböző $j \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,j,n} : k \in \mathbb{N})$, $j \in \mathbb{N}$ σ -algebrák függetlenek), és $E\xi_{k,j,n}^4 = O(j^\lambda)$ valamely $\lambda \geq 0$ esetén (azaz $\sup_{k,j,n \in \mathbb{N}} j^{-\lambda} E\xi_{k,j,n}^4 < \infty$). Ekkor minden $\alpha > (3+\lambda)/4$ esetén

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} \sum_{j=1}^k (\xi_{k,j,n} - E\xi_{k,j,n}) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.,} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Hasonló a 4.9. Lemma bizonyításához. $\square$

4.12. Lemma. Legyen $K \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,j,n} : k, j, n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,j,n} : k \in \mathbb{N}\}$ halmazok különböző $j \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,j,n} : k \in \mathbb{N})$, $j \in \mathbb{N}$ σ -algebrák függetlenek), és $E\xi_{k,j,n}^4 = O(j^\lambda)$ valamely $\lambda \geq 0$ esetén (azaz $\sup_{k,j,n \in \mathbb{N}} j^{-\lambda} E\xi_{k,j,n}^4 < \infty$). Ekkor minden $\alpha > (7+\lambda)/4$ esetén

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{j=1}^k (\xi_{k,j,n} - E\xi_{k,j,n}) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.,} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Hasonló a 4.9. Lemma bizonyításához. $\square$

4.5. Függelék B

A 4.4. Következmény bizonyításánál az alábbi, nem független mintára vonatkozó, nagy számok erős törvényei típusú állításokat használtuk. Ezek szintén analógiát mutatnak a [10] meg [6] munkákban található és az előző alfejezetbeli lemmákkal, viszont n^2 helyett n -nel arányos mintára vonatkoznak.

4.13. Lemma. Legyenek $K, L \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$, ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,\ell,n} : k, n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq L\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,\ell,n} : 1 \leq \ell \leq L\}$ halmazok különböző $k \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,\ell,n} : 1 \leq \ell \leq L)$, $k \in \mathbb{N}$ σ -algebrák

függetlenek), és $M_8 := \sup_{k,n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq L} E\xi_{k,\ell,n}^8 < \infty$. Ekkor

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^L (\xi_{k,\ell,n}^2 - E\xi_{k,\ell,n}^2) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.,} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

minden $\alpha > 3/4$ esetén.

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló a 3.15. Lemma bizonyításához [6]-ban, illetve az előző alfejezetbeli 4.6. Lemma bizonyításához. $\square$

4.14. Következmény. Legyenek $K, L \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$, ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,\ell,n}, \zeta_{k,\ell,n} : k, n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq L\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,\ell,n}, \zeta_{k,\ell,n} : 1 \leq \ell \leq L\}$ halmazok különböző $k \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,\ell,n}, \zeta_{k,\ell,n} : 1 \leq \ell \leq L)$, $k \in \mathbb{N}$ σ -algebrák függetlenek), és $\sup_{k,n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq L} E(\xi_{k,\ell,n}^8 + \zeta_{k,\ell,n}^8) < \infty$. Ekkor

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^L (\xi_{k,\ell,n} \zeta_{k,\ell,n} - E\xi_{k,\ell,n} \zeta_{k,\ell,n}) \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.,} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

minden $\alpha > 3/4$ esetén.

Bizonyítás. Hasonló a 4.7. Következmény bizonyításához. $\square$

4.15. Lemma. Legyen $K \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$, ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,j,n} : k, j, n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,j,n} : k \in \mathbb{N}\}$ halmazok különböző $j \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,j,n} : k \in \mathbb{N})$, $j \in \mathbb{N}$ σ -algebrák függetlenek), és $\sup_{j \leq k \leq K_n} E\xi_{k,j,n}^8 < \infty$. Ekkor

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} \left[\left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n} \right)^2 - E \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n} \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{P-m.b.,} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

minden $\alpha > 7/4$ esetén.

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló a 3.19. Lemma bizonyításához [6]-ban, illetve az előző alfejezetbeli 4.9. Lemma bizonyításához. $\square$

4.16. Következmény. Legyen $K \in \mathbb{N}$, és legyenek $\{K_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$, ha $n \rightarrow \infty$. Legyenek továbbá $\{\xi_{k,j,n}, \zeta_{k,j,n} : k, j, n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{\xi_{k,j,n}, \zeta_{k,j,n} : k \in \mathbb{N}\}$ halmazok különböző $j \in \mathbb{N}$ esetén függetlenek (azaz a $\sigma(\xi_{k,j,n}, \zeta_{k,j,n} : k \in \mathbb{N})$, $j \in \mathbb{N}$ σ -algebrák függetlenek), és $\sup_{j \leq k \leq K_n} \mathbb{E}(\xi_{k,j,n}^8 + \zeta_{k,j,n}^8) < \infty$. Ekkor

$$n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{K_n} k^{-1} \left[\left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n} \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \zeta_{k,\ell,n} \right) - \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k \xi_{k,j,n} \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \zeta_{k,\ell,n} \right) \right] \rightarrow 0$$

P-m.b., ha $n \rightarrow \infty$ minden $\alpha > \frac{7}{4}$ esetén.

Bizonyítás. Hasonló a 4.14. Következmény bizonyításához. □

5. fejezet

Lokális aszimptotikus normalitás

Ebben a fejezetben betekintést nyerünk a kísérletsorozatok konvergenciájával kapcsolatos alapfogalmak körébe, majd a kamatlábmodellünkhöz tartozó statisztikai kísérletsorozat lokális aszimptotikus normalitását (LAN) bizonyítjuk, ami a kísérletsorozat konvergenciáját is maga után vonja. Határértékszámítással nagyobb betekintést nyerhetünk a statisztikai kísérletek struktúrájába. Nem csak becslések vagy próbák lehetnek aszimptotikusan normálisak, hanem gyakran statisztikai modellek egész sorozata tart egy normális megfigyelésen alapuló modellhez.

A statisztikai problémák viszonylag kis számához létezik egzakt, optimális megoldás. Például a Neyman-Pearson elmélet bizonyos exponenciális modellek családjában ad optimális (egyenletesen legerősebb) próbát; a Rao-Blackwell elmélet szerint a torzítatlan becslések közül bizonyos becslések minimális szórásúak. A Crámer-Rao korlát a torzítatlan becslések szórására vonatkozó fontos és általános eredmény, de gyakran nem ad túl éles határt. Ha az egzakt optimalitás nem ad eredményt, mert a probléma nehezen kezelhető, vagy nincs optimális eljárás, akkor segíthet az aszimptotikus optimalitás elmélete. A fejezet végén [28, Theorem 15.4] alapján aszimptotikusan optimális próbát konstruálunk.

5.1. Lokális aszimptotikus normalitás

Egy statisztikai kísérletsorozat LAN, ha a likelihood hányados folyamatai hasonlóak ahhoz, amit a normális eloszlás hely paraméterére kapunk, azaz ha a likelihood hányados folyamat bizonyos kvadratikus kifejtési alakot vesz fel. Tekintsük át a szükséges fogalmakat és állításokat.

5.1. Definíció. Legyenek P és Q valószínűségi mértékek az $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren. Ekkor Q abszolút folytonos részének P -re vett Radon-Nikodym deriváltja

$$\frac{dQ}{dP} : X \rightarrow [0, \infty).$$

A statisztikában a Radon-Nikodym derivált elterjedtebb neve a likelihood hányados. Úgy tekintünk rá, mint $\frac{dQ}{dP} : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ valószínűségi változóra az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn és vizsgáljuk a P szerinti eloszlását.

5.2. Definíció. Az $(X, \mathcal{X}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ statisztikai kísérlet $\theta_0 \in \Theta$ pontra vonatkoztatott **likelihood hányados folyamata**

$$\left(\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} \right)_{\theta \in \Theta}.$$

Ha $(X, \mathcal{X}, P)$ valószínűségi mező, $(Y, \mathcal{Y})$ egy mérhető tér, akkor jelölje a $\xi : X \rightarrow Y$ mérhető leképezés **eloszlását** $\mathcal{L}(\xi | P)$:

$$\mathcal{L}(\xi | P)(B) := P(\xi \in B), \quad B \in \mathcal{Y}.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $d_n \in \mathbb{N}$ és tekintsük az $(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{P_{n,\theta} : \theta \in \Theta\})$ statisztikai kísérletet. Jelölje $\xi_n^{(\theta)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) valószínűségi vektorváltozók egy sorozatát. Ekkor a $\xi_n^{(\theta)} = o_{P_{n,\theta}}(1)$ rövidítés alatt azt értjük, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$P_{n,\theta}(|\xi_n^{(\theta)}| > \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty.$$

5.3. Definíció. Az $(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{P_{n,\theta} : \theta \in \Theta\})_{n \in \mathbb{N}}$ statisztikai kísérletsorozatot **lokálisan aszimptotikusan normálisnak (LAN)** nevezzük a $\theta \in \Theta$ ($\mathbb{R}^p$ nyílt részhalmaza) pontban, ha léteznek olyan

$$- r_{n,\theta} \in \mathbb{R}^{p \times p} \text{ nemszinguláris mátrixok, } n \in \mathbb{N}, \quad r_{n,\theta}^{-1} \rightarrow 0,$$

- $I_\theta \in \mathbb{R}^{p \times p}$, pozitív szemidefinit, szimmetrikus mátrix,
- $\Delta_{n,\theta} : \mathbb{R}^{d_n} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $n \in \mathbb{N}$, mérhető függvények,

hogy minden $h_n \rightarrow h$ esetén, ahol $h_n, h \in \mathbb{R}^p$, $n \in \mathbb{N}$, teljesül, hogy

$$\log \frac{dP_{n,\theta+r_{n,\theta}^{-1}h_n}}{dP_{n,\theta}} = h^\top \Delta_{n,\theta} - \frac{1}{2} h^\top I_\theta h + o_{P_{n,\theta}}(1), \quad (5.1)$$

$$\mathcal{L}(\Delta_{n,\theta} | P_{n,\theta}) \rightarrow \mathcal{N}(0, I_\theta), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

5.4. Példa. Tekintsünk a LAN teljesülésére egy példát, az ismételt mintavétel esetét egy "sima" paraméterű modellben.

Legyen minden $\theta \in \mathbb{R}$ esetén P_θ abszolút folytonos valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en, amelynek létezik $f(\cdot, \theta)$ sűrűségfüggvénye, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\log f(x, \theta)$ kétszer folytonosan differenciálható θ szerint. Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ független minta P_θ eloszlásból. Ekkor az együttes eloszlás $P_{n,\theta} := P_\theta \times \dots \times P_\theta$, melynek sűrűségfüggvénye $\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$.

Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{P_{n,\theta} : \theta \in \mathbb{R}\})$ LAN $r_n = \sqrt{n}$ skálázótényezővel, ha $h_n \rightarrow h$.

Bizonyítás: Taylor-sorfejtéssel kapjuk az alábbi közelítést:

$$\begin{aligned} \log \frac{dP_{n,\theta+h_n/\sqrt{n}}}{dP_{n,\theta}}(X_1, \dots, X_n) &= \log \frac{\prod_{i=1}^n f(X_i, \theta + h_n/\sqrt{n})}{\prod_{i=1}^n f(X_i, \theta)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\log f(X_i, \theta + h_n/\sqrt{n}) - \log f(X_i, \theta) \right] \\ &\approx h_n \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta} + \frac{h_n^2}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log f(X_i, \theta)}{\partial^2 \theta}. \end{aligned}$$

A $P_{n,\theta}$ mérték szerint az $X_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(X_1, \dots, X_n) \mapsto X_i$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak, és $\mathcal{L}(X_i | P_{n,\theta}) = P_\theta$. Ezért a $\frac{\partial \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta}$ $i = 1, \dots, n$ változók is független, azonos eloszlásúak. Várható értékük a $P_{n,\theta}$ mérték szerint

$$\begin{aligned} E_{n,\theta} \left(\frac{\partial \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta} \right) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}} f(x, \theta) dx = 0, \end{aligned}$$

szórásnégyzetük a $P_{n,\theta}$ mérték szerint

$$\text{Var}_{n,\theta} \left(\frac{\partial \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta} \right) = E_{n,\theta} \left[\left(\frac{\partial \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] =: I_\theta,$$

ahol I_θ a Fisher információs mennyiséget jelöli. A központi határeloszlás-tétel szerint ekkor

$$\mathcal{L}(\Delta_{n,\theta} | P_{n,\theta}) = \mathcal{L} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta} \middle| P_{n,\theta} \right) \rightarrow \mathcal{N}(0, I_\theta), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} E_{n,\theta} \left(\frac{\partial^2 \log f(X_1, \theta)}{\partial \theta^2} \right) &= E_{n,\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{f(X_1, \theta)} \frac{\partial f(X_1, \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= E_{n,\theta} \left[\frac{1}{f(X_1, \theta)} \frac{\partial^2 f(X_1, \theta)}{\partial \theta^2} - \left(\frac{1}{f(X_1, \theta)} \frac{\partial f(X_1, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &= -E_{n,\theta} \left[\left(\frac{\partial \log f(X_1, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -I_\theta, \end{aligned}$$

mivel

$$E_{n,\theta} \left(\frac{1}{f(X_1, \theta)} \frac{\partial^2 f(X_1, \theta)}{\partial \theta^2} \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f(x, \theta)}{\partial \theta^2} dx = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_{\mathbb{R}} f(x, \theta) dx = 0.$$

Így a nagy számok gyenge törvénye alapján

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta^2} \xrightarrow{P_{n,\theta}} E_{n,\theta} \left(\frac{\partial^2 \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta^2} \right) = -I_\theta.$$

Tehát bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$P_{n,\theta} \left(\left| \log \frac{dP_{n,\theta+h_n/\sqrt{n}}}{dP_{n,\theta}} - h_n \Delta_{n,\theta} - \frac{1}{2} h_n^2 I_\theta \right| > \varepsilon \right) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

5.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(X_n, \mathcal{X}_n, \{P_{n,\theta} : \theta \in \Theta\})_{n \in \mathbb{N}}$ statisztikai kísérletsorozat konvergál az $(X, \mathcal{X}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ statisztikai kísérlethez $n \rightarrow \infty$ esetén, ha $\forall H \subset \Theta$ véges halmaz és $\forall \theta_0 \in \Theta$ esetén

$$\mathcal{L} \left(\left(\frac{dP_{n,\theta}}{dP_{n,\theta_0}} \right)_{\theta \in H} \middle| P_{n,\theta_0} \right) \rightarrow \mathcal{L} \left(\left(\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} \right)_{\theta \in H} \middle| P_{\theta_0} \right), \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

azaz a $\left(\frac{dP_{n,\theta}}{dP_{n,\theta_0}} \right)_{\theta \in \Theta}$ likelihood hányados folyamatok P_{n,θ_0} szerinti véges dimenziós eloszlásai konvergálnak a $\left(\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} \right)_{\theta \in \Theta}$ likelihood hányados folyamat P_{θ_0} szerinti véges dimenziós eloszlásaihoz $n \rightarrow \infty$ esetén. Jelölés:

$$(X_n, \mathcal{X}_n, \{P_{n,\theta} : \theta \in \Theta\})_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow (X, \mathcal{X}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\}).$$

5.6. Tétel. (v.d.Vaart [28, 9.5. Corollary]) Legyen $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ nyílt részhalmaz, $(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{P_{n,\theta} : \theta \in \Theta\})_{n \in \mathbb{N}}$ LAN a θ pontban $r_{n,\theta}$ skálázó mátrixszal és I_θ nemszinguláris mátrixszal. Ekkor

$$(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{P_{n,\theta+r_n^{-1}h} : h \in \mathbb{R}^d\})_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{\mathcal{N}(h, I_\theta^{-1}) : h \in \mathbb{R}^d\}).$$

A fenti tétel értelmében a paraméter átskálázása után a lokális aszimptotikus normalitásból következik a kísérletsorozatok konvergenciája egy Gauss kísérlethez. Az átparaméterezést egy fix θ_0 köré végezzük, melyet ismertnek tekintünk.

5.7. Megjegyzés. Az 5.4. Példához kapcsolódóan legyen $h = \sqrt{n}(\theta - \theta_0)$ a lokalizációs paraméter, és átírjuk $P_{n,\theta}$ eloszlást $P_{n,\theta_0+h/\sqrt{n}}$ alakba. Ezzel kapunk egy h paraméterű kísérletet. Ha $\theta = \theta_0 + h/\sqrt{n} \notin \Theta$, akkor $P_{n,\theta_0+h/\sqrt{n}}$ eloszlást tetszőlegesen választjuk. Ekkor a $\{P_{\theta_0+h/\sqrt{n}} : h \in \mathbb{R}^k\}$ és $\{\mathcal{N}(h, I_{\theta_0}^{-1}) : h \in \mathbb{R}^k\}$ kísérletek nagy n -re hasonló statisztikai tulajdonságokkal rendelkeznek.

5.2. LAN a kamatlábmodellben

Legyenek $K, L \in \mathbb{N}$, legyenek $\{K_n, L_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ és $L_n = nL + o(n)$, ha $n \rightarrow \infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $\varrho \in \mathbb{R}$ esetén legyen $P_{n,\varrho}$ az $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)} := (f_{k,\ell}^{(\varrho)})_{1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n}$ minta eloszlása az $(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}))$ mérhető téren. Ekkor igazoltuk a kapcsolódó kísérletsorozat lokális aszimptotikus normalitását stabil és instabil esetben. Mivel a bizonyítás menetét nem befolyásolja, a számítások egyszerűsítése végett itt is feltettük, hogy $\beta = 1$.

5.8. Tétel. (Fülöp, Pap [3, Theorem 3.1.])

Az $\left(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}), \{P_{n,\varrho} : \varrho \in \mathbb{R}\} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ statisztikai kísérletsorozat minden $\varrho \in [-1, 1]$ esetén LAN, ahol

$$r_{n,\varrho} = \begin{cases} n^2, & \text{ha } \varrho = -1, \\ n, & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ n^3, & \text{ha } \varrho = +1, \end{cases}$$

$$I_\varrho = \begin{cases} \frac{1}{4} \int_0^K \left(\int_0^L t^2 dt \right) ds + \frac{1}{4} \int_0^K \frac{1}{s} \left(\int_L^{L+s} t dt \right)^2 ds, & \text{ha } \varrho = -1, \\ KL \left(\frac{1}{(1-\varrho)^4} + \frac{1}{1-\varrho^2} \right) + \frac{K^2}{2(1-\varrho)^4}, & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ \frac{9}{4} \int_0^K \left(\int_0^L t^4 dt \right) ds + \frac{9}{4} \int_0^K \frac{1}{s} \left(\int_L^{L+s} t^2 dt \right)^2 ds, & \text{ha } \varrho = +1, \end{cases}$$

és $\mathbf{x}_n := (x_{k,\ell})_{1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n} \in \mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}$ esetén

$$\begin{aligned} \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{x}_n) &= r_{n,\varrho}^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n-1} \left(\diamond_\varrho x_{k,\ell} - G_\ell(\varrho) \right) \left(G'_\ell(\varrho) + \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} \diamond_\varrho x_{k,i} \right) \\ &\quad + r_{n,\varrho}^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\tilde{\diamond}_\varrho x_{k,L_n} - \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} G_\ell(\varrho) \right) \\ &\quad \times \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(G'_\ell(\varrho) + \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} G_i(\varrho) \right), \end{aligned}$$

ahol $x_{0,\ell} := f_{0,\ell}$ ($\ell \in \mathbb{N}$).

A $\diamond_\varrho$, $\tilde{\diamond}_\varrho$ módosított differenciaoperátor jelölések az (2.8) és (2.9) egyenletekben vannak bevezetve.

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy (5.1) és (5.2) teljesülnek. Feltéhetjük, hogy a $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok szigorúan növekvők.

Az $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}$ minta (4.2)-ben megadott loglikelihood függvénye alapján ($\beta = 1$

esetén)

$$\begin{aligned}
\log \frac{dP_{n, \varrho + r_{n, \varrho}^{-1} h_n}}{dP_{n, \varrho}}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) &= \Lambda_{K_n, L_n}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}; \varrho + r_{n, \varrho}^{-1} h_n) - \Lambda_{K_n, L_n}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}; \varrho) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left[(\diamond_{\varrho + r_{n, \varrho}^{-1} h_n} f_{k, \ell}^{(\varrho)} - G_\ell(\varrho + r_{n, \varrho}^{-1} h_n))^2 - (\diamond_\varrho f_{k, \ell}^{(\varrho)} - G_\ell(\varrho))^2 \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left[\left(\tilde{\diamond}_{\varrho + r_{n, \varrho}^{-1} h_n} f_{k, L_n}^{(\varrho)} - \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} G_\ell(\varrho + r_{n, \varrho}^{-1} h_n) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \left(\tilde{\diamond}_\varrho f_{k, L_n}^{(\varrho)} - \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} G_\ell(\varrho) \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

A (2.10), (2.6) és (2.11) formulák alkalmazásával kifejezzük ezt a mennyiséget az $\{\eta_{k, \ell} : 1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n + K_n - k\}$ valószínűségi változók függvényeként

$$\log \frac{dP_{n, \varrho + r_{n, \varrho}^{-1} h_n}}{dP_{n, \varrho}}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) = M_n^{(\varrho)} - \frac{1}{2} A_n^{(\varrho)}$$

alakban, ahol az $M_n^{(\varrho)}$ és $A_n^{(\varrho)}$ valószínűségi változók a következőképpen adóttak

$$\begin{aligned}
M_n^{(\varrho)} &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k, \ell} \left(H_{n, \ell}(\varrho) + r_{n, \varrho}^{-1} h_n \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} \eta_{k, i} \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j, j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(H_{n, \ell}(\varrho) + r_{n, \varrho}^{-1} h_n \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} \eta_{L_n+k-\ell, i} \right), \\
A_n^{(\varrho)} &:= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(H_{n, \ell}(\varrho) + r_{n, \varrho}^{-1} h_n \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} \eta_{k, i} \right)^2 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(H_{n, \ell}(\varrho) + r_{n, \varrho}^{-1} h_n \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} \eta_{L_n+k-\ell, i} \right) \right)^2
\end{aligned}$$

és

$$H_{n, \ell}(\varrho) := G_\ell(\varrho + r_{n, \varrho}^{-1} h_n) - G_\ell(\varrho) + r_{n, \varrho}^{-1} h_n \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} G_i(\varrho).$$

A következő gondolat az, hogy $H_{n,\ell}(\varrho)$ -ban a $G_\ell(\varrho + r_{n,\varrho}^{-1}h_n) - G_\ell(\varrho)$ különbséget a Taylor-sorfejtés alapján kicseréljük $r_{n,\varrho}^{-1}h_n G'_\ell(\varrho)$ -ra. Ekkor

$$H_{n,\ell}(\varrho) + r_{n,\varrho}^{-1}h_n \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} \eta_{k,i} \approx r_{n,\varrho}^{-1}h_n \zeta_{k,\ell}^{(\varrho)},$$

ahol

$$\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)} := G'_\ell(\varrho) + \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} G_i(\varrho) + \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} \eta_{k,i}.$$

Nyilván $\zeta_{k,0}^{(\varrho)} = 0$, és $M_n^{(\varrho)} \approx h_n \widetilde{M}_n^{(\varrho)}$, $A_n^{(\varrho)} \approx h_n^2 \widetilde{A}_n^{(\varrho)}$, ahol

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_n^{(\varrho)} &:= r_{n,\varrho}^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k,\ell} \zeta_{k,\ell}^{(\varrho)} + r_{n,\varrho}^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j,j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)}, \\ \widetilde{A}_n^{(\varrho)} &:= r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 + r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} \right)^2. \end{aligned}$$

Következésképpen (5.1) és (5.2) igazolásához elegendő leellenőriznünk, hogy

$$\mathcal{L}(\widetilde{M}_n^{(\varrho)} \mid \mathbf{P}_{n,\varrho}) \longrightarrow \mathcal{N}(0, I_\varrho), \quad (5.3)$$

$$\widetilde{A}_n^{(\varrho)} \xrightarrow{\mathbf{P}} I_\varrho, \quad (5.4)$$

$$M_n^{(\varrho)} - h_n \widetilde{M}_n^{(\varrho)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad (5.5)$$

$$A_n^{(\varrho)} - h_n^2 \widetilde{A}_n^{(\varrho)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad (5.6)$$

$$\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)}) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (5.7)$$

Következzen (5.3) igazolása a központi martingál határeloszlás-tétel (lásd [27, Theorem 1 (541. old.) és Theorem 3 (543. old.)]) segítségével. Először írjuk fel $\widetilde{M}_n^{(\varrho)}$ -t martingál-differenciák összegeként. Rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén definiáljuk a következőképpen az $\{N_{n,k,\ell}^{(\varrho)} : 1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n\}$ valószínűségi változókat

$$N_{n,k,\ell}^{(\varrho)} := \begin{cases} r_{n,\varrho}^{-1} \eta_{k,\ell} \zeta_{k,\ell}^{(\varrho)}, & \text{ha } \ell \leq L_n - 1, \\ k^{-1} r_{n,\varrho}^{-1} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j,j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)}, & \text{ha } \ell = L_n. \end{cases}$$

Legyen az $\{N_{n,k,\ell}^{(\varrho)} : 1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n\}$ halmaz indexek szerint lexikografikus sorrendbe való átrendezettje $\{M_{n,m}^{(\varrho)} : 1 \leq m \leq K_n(L_n+1)\}$.

Tekintsük az $\{\eta'_{n,k,\ell} : 1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n\}$ valószínűségi változókat a következőképpen megadva

$$\eta'_{n,k,\ell} := \begin{cases} \eta_{k,\ell} & \text{if } \ell \leq L_n - 1, \\ (\eta_{1,k+L_n-1}, \eta_{2,k+L_n-2}, \dots, \eta_{k,L_n}) & \text{if } \ell = L_n. \end{cases}$$

és legyenek az $\{\eta'_{n,k,\ell} : 1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n\}$ valószínűségi változók átrendezettjei index szerint lexikografikus sorrendben $\{\eta''_{n,m} : 1 \leq m \leq K_n(L_n+1)\}$. Továbbá legyen $\mathcal{G}_{n,m} := \sigma(\eta''_{n,j} : 1 \leq j \leq m)$.

Ekkor $E(M_{n,m}^{(\varrho)} | \mathcal{G}_{n,m-1}) = 0$ minden $1 \leq m \leq K_n(L_n+1)$ esetén. Továbbá $\{M_{n,m}^{(\varrho)} : 1 \leq m \leq K_n(L_n+1)\}$ martingál különbségek a $\{\mathcal{G}_{n,m} : 1 \leq m \leq K_n(L_n+1)\}$ filtrációra nézve és

$$\sum_{m=1}^{K_n(L_n+1)} M_{n,m}^{(\varrho)} = \widetilde{M}_n^{(\varrho)}.$$

A martingál központi határeloszlás-tétel szerint (5.3) igazolásához elegendő megmutatni a

$$\sum_{m=1}^{K_n(L_n+1)} E((M_{n,m}^{(\varrho)})^2 | \mathcal{G}_{n,m-1}) \xrightarrow{P} I_{\varrho}, \quad (5.8)$$

feltételes varianciák konvergenciáját és a

$$\sum_{m=1}^{K_n(L_n+1)} E((M_{n,m}^{(\varrho)})^4 | \mathcal{G}_{n,m-1}) \xrightarrow{P} 0. \quad (5.9)$$

feltételes Lyapunov-feltételt. Mivel

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{K_n(L_n+1)} E((M_{n,m}^{(\varrho)})^2 | \mathcal{G}_{n,m-1}) &= r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 \\ &\quad + r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} \right)^2 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{K_n(L_n+1)} \mathbb{E}((M_{n,m}^{(\varrho)})^4 \mid \mathcal{G}_{n,m-1}) &= 3r_{n,\varrho}^{-4} h_n^4 \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^4 \\ &\quad + 3r_{n,\varrho}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k^2} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} \right)^4, \end{aligned}$$

így (5.8) meg (5.9) igazolásához az alábbiakat kell leellenőriznünk

$$r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 + r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} \right)^2 \rightarrow I_\varrho, \quad (5.10)$$

$$r_{n,\varrho}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \text{Var} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 \rightarrow 0, \quad (5.11)$$

$$r_{n,\varrho}^{-4} \text{Var} \left(\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} \right)^2 \rightarrow 0, \quad (5.12)$$

$$r_{n,\varrho}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^4 \rightarrow 0, \quad (5.13)$$

$$r_{n,\varrho}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k^2} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} \right)^4 \rightarrow 0. \quad (5.14)$$

Mutassuk meg (5.10) teljesülését. Nyilván $\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)}$ normális eloszlású és

$$\mathbb{E}\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)} = G'_\ell(\varrho) + \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} G_i(\varrho) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2\ell} i \varrho^{i-1} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^i \right)^2, \quad \text{Var} \zeta_{k,\ell}(\varrho) = \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{2i}.$$

Az $\mathbb{E}\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)}$ aszimptotikája

$$\mathbb{E}\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1-\varrho^{2\ell+1}}{(1-\varrho)^2} - \frac{(2\ell+1)\varrho^{2\ell}}{1-\varrho} + \frac{(1-\varrho^\ell)^2}{(1-\varrho)^2} \right) = \frac{1}{(1-\varrho)^2} + O(|\varrho|^\ell), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{4} - \frac{2\ell+1}{2} + \frac{(1-(-1)^\ell)^2}{4} \right) = -\frac{1}{2}\ell + O(1), & \text{ha } \varrho = -1, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{2\ell(2\ell+1)}{2} + \ell^2 \right) = \frac{3}{2}\ell^2 + O(\ell), & \text{ha } \varrho = +1. \end{cases}$$

A $\text{Var } \zeta_{k,\ell}^{(\varrho)}$ aszimptotikája

$$\text{Var } \zeta_{k,\ell}^{(\varrho)} = \begin{cases} \frac{1-\varrho^{2\ell}}{1-\varrho^2} = \frac{1}{1-\varrho^2} + O(|\varrho|^{2\ell}), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ \ell, & \text{ha } \varrho = \pm 1. \end{cases}$$

Felhasználva, hogy $\mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 = (\mathbb{E}\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 + \text{Var } \zeta_{k,\ell}^{(\varrho)}$ kapjuk

$$\mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 = \begin{cases} \left(\frac{1}{(1-\varrho)^2} + O(|\varrho|^\ell) \right)^2 + \frac{1}{1-\varrho^2} + O(|\varrho|^{2\ell}) \\ = \frac{1}{(1-\varrho)^4} + \frac{1}{1-\varrho^2} + O(|\varrho|^\ell), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ \left(-\frac{1}{2}\ell + O(1) \right)^2 + \ell = \frac{1}{4}\ell^2 + O(\ell), & \text{ha } \varrho = -1, \\ \left(\frac{3}{2}\ell^2 + O(\ell) \right)^2 + \ell = \frac{9}{4}\ell^4 + O(\ell^3), & \text{ha } \varrho = +1. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy az $\mathbb{E}\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)}$, $\text{Var } \zeta_{k,\ell}^{(\varrho)}$ és $\mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2$ aszimptotikája nem függ a k indextől.

Figyeljük meg, hogy a $\zeta_{k,L_n}^{(\varrho)}$, $\zeta_{k-1,L_n+1}^{(\varrho)}$, $\dots$, $\zeta_{1,L_n+k-1}^{(\varrho)}$ valószínűségi változók függetlenek, így $\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)}$ normális eloszlású és

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} \right) &= \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)}, \\ \text{Var} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} \right) &= \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \text{Var } \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)}, \end{aligned}$$

ahol

$$\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} = \begin{cases} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(\frac{1}{(1-\varrho)^2} + O(|\varrho|^\ell) \right) \\ = \frac{k}{(1-\varrho)^2} + O(|\varrho|^{L_n}), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(-\frac{1}{2}\ell + O(1) \right) \\ = -\frac{1}{2} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell + O(k), & \text{ha } \varrho = -1, \\ \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(\frac{3}{2}\ell^2 + O(\ell) \right) \\ = \frac{3}{2} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell^2 + O(k(L_n+k)), & \text{ha } \varrho = +1, \end{cases}$$

és

$$\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \text{Var} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} = \begin{cases} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(\frac{1}{1-\varrho^2} + O(|\varrho|^{2\ell}) \right) \\ = \frac{k}{1-\varrho^2} + O(|\varrho|^{2L_n}), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell, & \text{ha } \varrho = \pm 1. \end{cases}$$

Így

$$\mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} \right)^2 = \begin{cases} \left(\frac{k}{(1-\varrho)^2} + O(|\varrho|^{L_n}) \right)^2 + \frac{k}{1-\varrho^2} + O(|\varrho|^{2L_n}) \\ = \frac{k^2}{(1-\varrho)^4} + O(k), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ \left(-\frac{1}{2} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell + O(k) \right)^2 + \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell \\ = \frac{1}{4} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell \right)^2 + O(k^2(L_n+k)), & \text{ha } \varrho = -1, \\ \left(\frac{3}{2} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell^2 + O(k(L_n+k)) \right)^2 + \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell \\ = \frac{9}{4} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell^2 \right)^2 + O(k^2(L_n+k)^3), & \text{ha } \varrho = +1. \end{cases}$$

Először tekintsük a $|\varrho| < 1$ stabil esetet. Ekkor $r_{n,\varrho} = n$, így

$$\begin{aligned} & r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 + r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} \right)^2 \\ &= n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \left(\frac{1}{(1-\varrho)^4} + \frac{1}{1-\varrho^2} + O(|\varrho|^\ell) \right) + n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \left(\frac{k}{(1-\varrho)^4} + O(1) \right) \\ &\rightarrow KL \left(\frac{1}{(1-\varrho)^4} + \frac{1}{1-\varrho^2} \right) + \frac{K^2}{2(1-\varrho)^4} = I_\varrho, \end{aligned}$$

és ezzel igazoltuk (5.10)-et a $|\varrho| < 1$ esetben.

Most legyen $\varrho = -1$. Ekkor $r_{n,-1} = n^2$, így

$$\begin{aligned} & r_{n,-1}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(-1)})^2 + r_{n,-1}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(-1)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} n^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\ell^2 + O(\ell)) + \frac{1}{4} n^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \left[\frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell \right)^2 + O(k(L_n+k)) \right] \\ &\rightarrow \frac{1}{4} \int_0^K \left(\int_0^L t^2 dt \right) ds + \frac{1}{4} \int_0^K \frac{1}{s} \left(\int_L^{L+s} t dt \right)^2 ds = I_{-1}, \end{aligned}$$

és ezzel igazoltuk (5.10)-et a $\varrho = -1$ esetben.

Végül tekintsük a $\varrho = +1$ esetet. Ekkor $r_{n,+1} = n^3$, így

$$\begin{aligned} & r_{n,+1}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(+1)})^2 + r_{n,+1}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(+1)} \right)^2 \\ &= \frac{9}{4} n^{-6} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\ell^4 + O(\ell^3)) + \frac{9}{4} n^{-6} \sum_{k=1}^{K_n} \left[\frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell^2 \right)^2 + O(k(L_n+k)^3) \right] \\ &\rightarrow \frac{9}{4} \int_0^K \left(\int_0^L t^4 dt \right) ds + \frac{9}{4} \int_0^K \frac{1}{s} \left(\int_L^{L+s} t^2 dt \right)^2 ds = I_{+1}, \end{aligned}$$

és ezzel igazoltuk (5.10)-et a $\varrho = +1$ esetben.

A következő gondolatmenetben (5.13) igazolásával foglalkozunk.

Ha ζ normális eloszlású valószínűségi változó, akkor előállítható $\zeta = m + \sigma\eta$ alakban, ahol η standard normális valószínűségi változó és $m := \mathbb{E}\zeta$, $\sigma^2 := \text{Var } \zeta$. Így $\mathbb{E}\zeta^4 = m^4 + 6m^2\sigma^2 + 3\sigma^4 \leq 3(m^2 + \sigma^2)^2 = 3(\mathbb{E}\zeta^2)^2$, azaz

$$\mathbb{E}\zeta^4 \leq 3(\mathbb{E}\zeta^2)^2. \quad (5.15)$$

Ezen egyenlőtlenség alapján

$$\mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^4 = \begin{cases} O(1), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ O(\ell^4), & \text{ha } \varrho = -1, \\ O(\ell^8), & \text{ha } \varrho = +1. \end{cases}$$

Először tekintsük a $|\varrho| < 1$ esetet. Ekkor $r_{n,\varrho} = n$, így

$$r_{n,\varrho}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^4 = n^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(1) = O(n^{-2}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.13)-at a $|\varrho| < 1$ esetben.

Legyen $\varrho = -1$. Ekkor $r_{n,-1} = n^2$, így

$$r_{n,-1}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(-1)})^4 = n^{-8} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(\ell^4) = O(n^{-2}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.13)-at a $\varrho = -1$ esetben.

Végül tekintsük a $\varrho = +1$ esetet. Ekkor $r_{n,+1} = n^3$, így

$$r_{n,+1}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(+1)})^4 = n^{-12} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O(\ell^8) = O(n^{-2}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.13)-at a $\varrho = +1$ esetben.

Tekintsük (5.14) bizonyítását.

$$\mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} \right)^4 = \begin{cases} O(k^4), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ O(k^4(L_n+k)^4), & \text{ha } \varrho = -1, \\ O(k^4(L_n+k)^8), & \text{ha } \varrho = +1. \end{cases}$$

Először tekintsük a $|\varrho| < 1$ esetet. Ekkor $r_{n,\varrho} = n$, így

$$r_{n,\varrho}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k^2} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} \right)^4 = n^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} O(k^2) = O(n^{-1}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.14)-et a $|\varrho| < 1$ esetben.

Most legyen $\varrho = -1$. Ekkor $r_{n,-1} = n^2$, így

$$r_{n,-1}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k^2} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(-1)} \right)^4 = n^{-8} \sum_{k=1}^{K_n} O(k^2(L_n+k)^4) = O(n^{-1}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.14)-et a $\varrho = -1$ esetben.

Végül tekintsük a $\varrho = +1$ esetet. Ekkor $r_{n,+1} = n^3$, így

$$r_{n,+1}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k^2} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(+1)} \right)^4 = n^{-12} \sum_{k=1}^{K_n} O(k^2 (L_n+k)^8) = O(n^{-1}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.14)-et a $\varrho = +1$ esetben.

A következő gondolatmenet (5.11) igazolásával foglalkozik. Megjegyezzük, hogy tetszőleges $\xi_1, \dots, \xi_L$ valószínűségi változók esetén

$$\text{Var} \sum_{\ell=1}^L \xi_\ell \leq \left(\sum_{\ell=1}^L \sqrt{\text{Var} \xi_\ell} \right)^2, \quad (5.16)$$

mivel

$$\begin{aligned} \text{Var} \sum_{\ell=1}^L \xi_\ell &= \text{Cov} \left(\sum_{\ell=1}^L \xi_\ell, \sum_{k=1}^L \xi_k \right) = \sum_{\ell=1}^L \sum_{k=1}^L \text{Cov}(\xi_\ell, \xi_k) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^L \sum_{k=1}^L \sqrt{\text{Var} \xi_\ell \text{Var} \xi_k} = \left(\sum_{\ell=1}^L \sqrt{\text{Var} \xi_\ell} \right)^2. \end{aligned}$$

Továbbá, ha ζ normális eloszlású valószínűségi változó, akkor előáll $\zeta = m + \sigma\eta$ alakban, ahol η standard normális valószínűségi változó és $m := \mathbb{E}\zeta$, $\sigma^2 := \text{Var} \zeta$, és $\text{Var} \zeta^2 = \mathbb{E}\zeta^4 - (\mathbb{E}\zeta^2)^2 = m^4 + 6m^2\sigma^2 + 3\sigma^4 - (m^2 + \sigma^2)^2 = 4m^2\sigma^2 + 2\sigma^4 \leq 4(m^2 + \sigma^2)\sigma^2 = 4\mathbb{E}\zeta^2 \text{Var} \zeta$, azaz

$$\text{Var} \zeta^2 \leq 4\mathbb{E}\zeta^2 \text{Var} \zeta. \quad (5.17)$$

Ezen egyenlőtlenség alapján

$$\text{Var}(\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 = \begin{cases} O(1), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ O(\ell^3), & \text{ha } \varrho = -1, \\ O(\ell^5), & \text{ha } \varrho = +1. \end{cases}$$

Alkalmazva a (5.16) egyenlőtlenséget

$$\text{Var} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 = \begin{cases} \left(\sum_{\ell=0}^{L_n-1} \sqrt{O(1)} \right)^2 = O(n^2), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ \left(\sum_{\ell=0}^{L_n-1} \sqrt{O(\ell^3)} \right)^2 = O(n^5), & \text{ha } \varrho = -1, \\ \left(\sum_{\ell=0}^{L_n-1} \sqrt{O(\ell^5)} \right)^2 = O(n^7), & \text{ha } \varrho = +1. \end{cases}$$

Tekintsük először a $|\varrho| < 1$ esetet. Ekkor $r_{n,\varrho} = n$, így

$$r_{n,\varrho}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \text{Var} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 = n^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} O(n^2) = O(n^{-1}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.11)-et a $|\varrho| < 1$ esetben.

Most legyen $\varrho = -1$. Ekkor $r_{n,-1} = n^2$, így

$$r_{n,-1}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \text{Var} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(-1)})^2 = n^{-8} \sum_{k=1}^{K_n} O(n^5) = O(n^{-2}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.11)-et a $\varrho = -1$ esetben.

Végül tekintsük a $\varrho = +1$ esetet. Ekkor $r_{n,+1} = n^3$, így

$$r_{n,+1}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \text{Var} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(+1)})^2 = n^{-12} \sum_{k=1}^{K_n} O(n^7) = O(n^{-4}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.11)-et a $\varrho = +1$ esetben.

Végül foglalkozunk (5.12) igazolásával. Mivel a $\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)}$ valószínűségi változó normális eloszlású, újra egy (5.16) típusú egyenlőtlenséget alkalmazunk:

$$\begin{aligned} \text{Var} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} &= \text{Var} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \zeta_{j, L_n+k-j}^{(\varrho)} = \text{Var} \sum_{j=1}^{K_n} \sum_{k=j}^{K_n} \frac{1}{k} \zeta_{j, L_n+k-j}^{(\varrho)} \\ &= \text{Cov} \left(\sum_{j_1=1}^{K_n} \sum_{k_1=j_1}^{K_n} \frac{1}{k_1} \zeta_{j_1, L_n+k_1-j_1}^{(\varrho)}, \sum_{j_2=1}^{K_n} \sum_{k_2=j_2}^{K_n} \frac{1}{k_2} \zeta_{j_2, L_n+k_2-j_2}^{(\varrho)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{K_n} \sum_{k_1=j}^{K_n} \sum_{k_2=j}^{K_n} \frac{1}{k_1 k_2} \text{Cov} (\zeta_{j, L_n+k_1-j}^{(\varrho)}, \zeta_{j, L_n+k_2-j}^{(\varrho)}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{K_n} \sum_{k_1=j}^{K_n} \sum_{k_2=j}^{K_n} \frac{1}{k_1 k_2} \sqrt{\text{Var} \zeta_{j, L_n+k_1-j}^{(\varrho)} \text{Var} \zeta_{j, L_n+k_2-j}^{(\varrho)}} \\ &= \sum_{j=1}^{K_n} \left(\sum_{k=j}^{K_n} \frac{1}{k} \sqrt{\text{Var} \zeta_{j, L_n+k-j}^{(\varrho)}} \right)^2. \end{aligned}$$

Tekintsük először a $|\varrho| < 1$ esetet. Ekkor $\text{Var} \zeta_{j, L_n+k-j}^{(\varrho)} = O(1)$, így

$$\text{Var} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} = \sum_{j=1}^{K_n} \left(\sum_{k=j}^{K_n} \frac{1}{k} \sqrt{O(1)} \right)^2 = O(n(\log n)^2).$$

Továbbá $\mathbb{E} \zeta_{j, L_n+k-j}^{(\varrho)} = O(1)$, így

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} = \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} O(1) = \sum_{k=1}^{K_n} O(1) = O(n),$$

következésképpen

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} \right)^2 &= \left((O(n))^2 + O(n(\log n)^2) \right) O(n(\log n)^2) \\ &= O(n^3(\log n)^2). \end{aligned}$$

Esetünkben $r_{n, \varrho} = n$, így

$$r_{n, \varrho}^{-4} \text{Var} \left(\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} \right)^2 = n^{-4} O(n^3(\log n)^2) = O(n^{-1}(\log n)^2) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.12)-t a $|\varrho| < 1$ esetben.

Ha $\varrho = \pm 1$, akkor $\text{Var} \zeta_{j, L_n+k-j}^{(\pm 1)} = O(L_n+k-j)$, így

$$\begin{aligned} \text{Var} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\pm 1)} &= \sum_{j=1}^{K_n} \left(\sum_{k=j}^{K_n} k^{-1} \sqrt{O(L_n+k-j)} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{K_n} \left(\sum_{k=j}^{K_n} j^{-1} \sqrt{O(L_n+K_n-j)} \right)^2 = \sum_{j=1}^{K_n} \left(j^{-1} (K_n-j) \sqrt{O(L_n+K_n-j)} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{K_n} O(j^{-2} (K_n-j)^2 (L_n+K_n-j)) = \sum_{j=1}^{K_n} O(j^{-2}) O(n^3) = O(n^3). \end{aligned}$$

Legyen előbb $\varrho = -1$. Ekkor $\mathbb{E} \zeta_{j, L_n+k-j}^{(-1)} = O(\ell)$, így

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(-1)} = \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} O(\ell) = \sum_{k=1}^{K_n} O(L_n+k) = O(n^2),$$

következésképpen

$$\text{Var} \left(\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(-1)} \right)^2 = \left((O(n^2))^2 + O(n^3) \right) O(n^3) = O(n^7).$$

Esetünkben $r_{n,-1} = n^2$, így

$$r_{n,-1}^{-4} \text{Var} \left(\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(-1)} \right)^2 = n^{-8} O(n^7) = O(n^{-1}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.12)-t a $\varrho = -1$ esetben.

Végül tekintsük a $\varrho = +1$ esetet. Ekkor $\mathbb{E} \zeta_{j, L_n+k-j}^{(+1)} = O(\ell^2)$, így

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(+1)} = \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} O(\ell^2) = \sum_{k=1}^{K_n} O((L_n+k)^2) = O(n^3),$$

következésképpen

$$\text{Var} \left(\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(+1)} \right)^2 = \left((O(n^3))^2 + O(n^3) \right) O(n^3) = O(n^9).$$

Esetünkben $r_{n,+1} = n^3$, így

$$r_{n,+1}^{-4} \text{Var} \left(\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(+1)} \right)^2 = n^{-12} O(n^9) = O(n^{-3}) \rightarrow 0,$$

és ezzel igazoltuk (5.12)-t a $\varrho = +1$ esetben. Így végeztünk (5.3) bizonyításával, azaz igazoltuk az $\mathcal{L}(\tilde{M}_n^{(\varrho)} | \mathbf{P}_{n, \varrho}) \rightarrow \mathcal{N}(0, I_\varrho)$ eloszlásbeli konvergenciát.

$\tilde{A}_n^{(\varrho)} \xrightarrow{\mathbf{P}} I_\varrho$ ellenőrzéséhez elegendő megmutatnunk, hogy $\mathbb{E} \tilde{A}_n^{(\varrho)} \rightarrow I_\varrho$ és $\text{Var} \tilde{A}_n^{(\varrho)} \rightarrow 0$. Mivel

$$\mathbb{E} \tilde{A}_n^{(\varrho)} = r_{n, \varrho}^2 \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E}(\zeta_{k, \ell}^{(\varrho)})^2 + r_{n, \varrho}^2 \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} \right)^2,$$

így (5.10) alkalmazásával $\mathbb{E} \tilde{A}_n^{(\varrho)} \rightarrow I_\varrho$. Továbbá (5.11) és (5.12) miatt $\text{Var} \tilde{A}_n^{(\varrho)} \rightarrow 0$, és ezzel igazoltuk (5.4)-t, azaz hogy $\tilde{A}_n^{(\varrho)} \xrightarrow{\mathbf{P}} I_\varrho$.

Tekintsük (5.5) $M_n^{(\varrho)} - h_n \widetilde{M}_n^{(\varrho)} \xrightarrow{P} 0$ bizonyítását. Először figyeljük meg, hogy

$$M_n^{(\varrho)} - h_n \widetilde{M}_n^{(\varrho)} = \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \eta_{k,\ell} c_{n,\ell}(\varrho) + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j,j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} c_{n,\ell}(\varrho),$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{n,\ell}(\varrho) &:= H_{n,\ell}(\varrho) + r_{n,\varrho} h_n \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} \eta_{k,i} - r_{n,\varrho} h_n \zeta_{k,\ell}^{(\varrho)} \\ &= G_\ell(\varrho + r_{n,\varrho} h_n) - G_\ell(\varrho) - r_{n,\varrho} h_n G'_\ell(\varrho). \end{aligned}$$

Továbbá $M_n^{(\varrho)} - h_n \widetilde{M}_n^{(\varrho)}$ normális eloszlású és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{E}(M_n^{(\varrho)} - h_n \widetilde{M}_n^{(\varrho)}) = 0$. Így elegendő megmutatnunk, hogy $\text{Var}(M_n^{(\varrho)} - h_n \widetilde{M}_n^{(\varrho)}) \rightarrow 0$. Nyilván

$$\text{Var}(M_n^{(\varrho)} - h_n \widetilde{M}_n^{(\varrho)}) = \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} c_{n,\ell}(\varrho)^2 + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} c_{n,\ell}(\varrho) \right)^2.$$

A Taylor-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} |c_{n,\ell}(\varrho)| &\leq \frac{1}{2} r_{n,\varrho}^{-2} |h_n|^2 \sup_{\vartheta \in [0,1]} |G''_\ell(\varrho + \vartheta r_n^{-1} h_n)| \\ &\leq \frac{1}{4} r_{n,\varrho}^{-2} |h_n|^2 \sum_{j=2}^{2\ell} j(j-1) (|\varrho| + r_n^{-1} |h_n|)^{j-2}. \end{aligned}$$

Ha $|\varrho| < 1$, akkor $r_{n,\varrho} = n$, és elég nagy n esetén $|\varrho| + r_n^{-1} |h_n| \leq \frac{1+|\varrho|}{2} < 1$, így $\sum_{j=2}^{2\ell} j(j-1) (|\varrho| + r_n^{-1} |h_n|)^{j-2} \leq \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) \left(\frac{1+|\varrho|}{2}\right)^{j-2} < \infty$. Következésképpen $c_{n,\ell}(\varrho) = O(n^{-2})$ és

$$\begin{aligned} \text{Var}(M_n^{(\varrho)} - h_n \widetilde{M}_n^{(\varrho)}) &= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (O(n^{-2}))^2 + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} O(n^{-2}) \right)^2 \\ &= O(n^{-2}) + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} (O(kn^{-2}))^2 = O(n^{-2}) + \sum_{k=1}^{K_n} O(kn^{-4}) = O(n^{-2}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ha $\varrho = -1$, akkor $c_{n,\ell}(-1) = O\left(n^{-4}\ell^2(1+O(n^{-2}))^{2\ell}\right)$ és mivel $r_{n,-1} = n^2$, így

$$\begin{aligned} & \text{Var}\left(M_n^{(-1)} - h_n \widetilde{M}_n^{(-1)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O\left(n^{-8}\ell^4(1+O(n^{-2}))^{4\ell}\right) + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} O\left(n^{-4}\ell^2(1+O(n^{-2}))^{2\ell}\right) \right)^2 \\ &= O\left(n^{-2}(1+O(n^{-2}))^{4L_n}\right) + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(O\left(n^{-4}k(L_n+k)^2(1+O(n^{-2}))^{2(L_n+k)}\right) \right)^2 \\ &= O(n^{-2}) + \sum_{k=1}^{K_n} O\left(n^{-8}k(L_n+k)^4(1+O(n^{-2}))^{4(L_n+k)}\right) = O(n^{-2}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

mert $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+O(n^{-2}))^n = 1$.

Ha $\varrho = +1$, akkor $c_{n,\ell}(+1) = O\left(n^{-6}\ell^2(1+O(n^{-3}))^{2\ell}\right)$ és mivel $r_{n,+1} = n^3$, így

$$\begin{aligned} & \text{Var}\left(M_n^{(+1)} - h_n \widetilde{M}_n^{(+1)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} O\left(n^{-12}\ell^4(1+O(n^{-3}))^{4\ell}\right) + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} O\left(n^{-6}\ell^2(1+O(n^{-3}))^{2\ell}\right) \right)^2 \\ &= O\left(n^{-6}(1+O(n^{-3}))^{4L_n}\right) + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(O\left(n^{-6}k(L_n+k)^2(1+O(n^{-3}))^{2(L_n+k)}\right) \right)^2 \\ &= O(n^{-6}) + \sum_{k=1}^{K_n} O\left(n^{-12}k(L_n+k)^4(1+O(n^{-3}))^{4(L_n+k)}\right) = O(n^{-6}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ezután bizonyítsuk (5.6)-t, azaz hogy $A_n^{(\varrho)} - h_n^2 \widetilde{A}_n^{(\varrho)} \xrightarrow{P} 0$.

$$\begin{aligned} A_n^{(\varrho)} - h_n^2 \widetilde{A}_n^{(\varrho)} &= 2r_{n,\varrho}^{-1} h_n \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \zeta_{k,\ell}^{(\varrho)} c_{n,\ell}(\varrho) + \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} c_{n,\ell}(\varrho)^2 \\ &\quad + 2r_{n,\varrho}^{-1} h_n \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-j,j}^{(\varrho)} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} c_{n,\ell}(\varrho) + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} c_{n,\ell}(\varrho) \right)^2. \end{aligned}$$

Már bebizonyítottuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} c_{n,\ell}(\varrho)^2 + \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} c_{n,\ell}(\varrho) \right)^2 = \text{Var}\left(M_n^{(\varrho)} - h_n \widetilde{M}_n^{(\varrho)}\right) \rightarrow 0.$$

A Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\left| r_{n,\varrho}^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \zeta_{k,\ell}^{(\varrho)} c_{n,\ell}(\varrho) \right|^2 \leq \left(r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} c_{n,\ell}(\varrho)^2 \right).$$

Itt az $\{r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens L^2 -ben, mivel a várható értékek $\{r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \mathbb{E}(\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata konvergens (lásd (5.10) bizonyítást); és (5.11) szerint $r_{n,\varrho}^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} \text{Var} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} (\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)})^2 \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Mint már láttuk $\sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} c_{n,\ell}(\varrho)^2 \rightarrow 0$, így $r_{n,\varrho}^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=0}^{L_n-1} \zeta_{k,\ell}(\varrho) c_{n,\ell}(\varrho) \xrightarrow{P} 0$. Használóan

$$\begin{aligned} & \left| r_{n,\varrho}^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-j,j}^{(\varrho)} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} c_{n,\ell}(\varrho) \right|^2 \\ & \leq \left(r_{n,\varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-j,j}^{(\varrho)} \right)^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} c_{n,\ell}(\varrho) \right)^2 \right), \end{aligned}$$

továbbá (5.10) és (5.12) alapján $r_{n,\varrho}^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \zeta_{L_n+k-j,j}^{(\varrho)} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} c_{n,\ell}(\varrho) \xrightarrow{P} 0$, így megkaptuk (5.6)-t, azaz $A_n^{(\varrho)} - h_n^2 \widetilde{A}_n^{(\varrho)} \xrightarrow{P} 0$.

Végül ellenőrizzük (5.7)-t, azaz hogy $\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)}) \xrightarrow{P} 0$. Először írjuk fel az $\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)})$ különbséget az $\{\eta_{k,\ell} : 1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n\}$ valószínűségi változók segítségével. (2.10) és (2.11) alapján minden $1 \leq k \leq K_n$ és $0 \leq \ell \leq L_n - 1$ esetén $\zeta_{k,\ell}^{(\varrho)} = G'_\ell(\varrho) + \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} \diamond_\varrho f_{k,i}^{(\varrho)}$, továbbá $\mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} = G'_\ell(\varrho) + \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} G_i(\varrho)$. Így

$$\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)}) = r_{n,\varrho}^{-1} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j,j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} (\zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} - \mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)}).$$

Vegyük észre, hogy $\mathbb{E}(\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)})) = 0$, mivel $\{\eta_{L_n+k-\ell,\ell} : \ell = L_n, \dots, L_n+k-1\}$ és $\{\zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} : \ell = L_n, \dots, L_n+k-1\}$ függetlenek, így elegendő ellenőrizni, hogy $\text{Var}(\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)})) \rightarrow 0$ ha $n \rightarrow \infty$. Ha $1 \leq k_1 < k_2$, akkor $\{\eta_{L_n+k_2-\ell,\ell} : \ell = L_n, \dots, L_n+k_2-1\}$ valószínűségi változók függetlenek az

$\{\eta_{L_n+k_1-\ell, \ell}, \zeta_{L_n+k_1-\ell, \ell}^{(\varrho)} : \ell = L_n, \dots, L_n+k_1-1\} \cup \{\zeta_{L_n+k_2-\ell, \ell}^{(\varrho)} : \ell = L_n, \dots, L_n+k_2-1\}$ -tól, így

$$\begin{aligned}
 & \text{Var} \left(\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n, \varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)}) \right) \\
 &= r_{n, \varrho}^{-2} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j, j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} (\zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} - \mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)}) \right)^2 \\
 &= r_{n, \varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k^2} \mathbb{E} \left(\sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j, j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} (\zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} - \mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)}) \right)^2 \\
 &= r_{n, \varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} (\zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} - \mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)}) \right)^2 \\
 &= r_{n, \varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \text{Var} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} (\zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} - \mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)}) \\
 &= r_{n, \varrho}^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \text{Var} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)},
 \end{aligned}$$

mivel a $\zeta_{k, L_n}^{(\varrho)}, \zeta_{k-1, L_n+1}^{(\varrho)}, \dots, \zeta_{1, L_n+k-1}^{(\varrho)}$ valószínűségi változók függetlenek.

$$\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \text{Var} \zeta_{L_n+k-\ell, \ell}^{(\varrho)} = \begin{cases} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(\frac{1}{1-\varrho^2} + O(|\varrho|^{2\ell}) \right) = O(k), & \text{ha } |\varrho| < 1, \\ \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \ell = O(k(L_n+k)), & \text{ha } \varrho = \pm 1. \end{cases}$$

Következésképpen, ha $|\varrho| < 1$, akkor

$$\text{Var} \left(\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n, \varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)}) \right) = n^{-2} \sum_{k=1}^{K_n} O(1) \rightarrow 0.$$

Ha $\varrho = -1$, akkor

$$\text{Var} \left(\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n, \varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)}) \right) = n^{-4} \sum_{k=1}^{K_n} O(L_n+k) \rightarrow 0.$$

Végül ha $\varrho = +1$, akkor

$$\text{Var} \left(\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)}) \right) = n^{-6} \sum_{k=1}^{K_n} O(L_n + k) \rightarrow 0.$$

Így befejeztük $\text{Var} \left(\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)}) \right) \rightarrow 0$ bizonyítását $n \rightarrow \infty$ esetén, amiből következik $\widetilde{M}_n^{(\varrho)} - \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_n^{(\varrho)}) \xrightarrow{\text{P}} 0$. Ezzel megkaptuk, hogy (5.1) és (5.2) is teljesül. $\square$

A $\Delta_{n,\varrho}$ ($n \in \mathbb{N}$) statisztikák helyett megadhatunk kicsit egyszerűbbeket is, ha a $G_\ell(\varrho)$, $G'_\ell(\varrho)$, $\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} G_\ell(\varrho)$ és $\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} G_i(\varrho)$ mennyiségeket kicseréljük az aszimptotikus kifejtésük vezető tagjára, és néhány valószínűségi változó helyett a várható értékét vesszük. Erről szól a következő tétel. Megjegyezzük, hogy a tételben $\widetilde{\Delta}_{n,\pm 1}$ ($n \in \mathbb{N}$) lineáris statisztika.

5.9. Tétel. (Fülöp, Pap [3, Theorem 3.2.]) *Az 5.8. Tétel állítása igaz marad minden $\varrho \in [-1, +1]$ esetén, ha a $\Delta_{n,\varrho}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvényeket az alábbiakkal helyettesítjük:*

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}_{n,\varrho}(\mathbf{x}_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n-1} (\diamond_{\varrho} x_{k,\ell} - G_\ell(\varrho)) \left(G'_\ell(\varrho) + \sum_{i=0}^{\ell-1} \varrho^{\ell-i-1} \diamond_{\varrho} x_{k,i} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(1-\varrho)^2 n} \sum_{k=1}^{K_n} \left(\widetilde{\diamond}_{\varrho} x_{k,L_n} - \frac{k}{2(1-\varrho)} \right) \end{aligned}$$

ha $|\varrho| < 1$, és

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}_{n,-1}(\mathbf{x}_n) &= -\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n-1} \ell \left(\diamond_{-1} x_{k,\ell} - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{K_n} \left(L_n + \frac{k}{2} \right) \left(\widetilde{\diamond}_{-1} x_{k,L_n} - \frac{k}{2} \right), \\ \widetilde{\Delta}_{n,+1}(\mathbf{x}_n) &= \frac{3}{2n^3} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n-1} \ell^2 \left(\diamond_{+1} x_{k,\ell} - \frac{2\ell+1}{2} \right) \\ &\quad + \frac{3}{2n^3} \sum_{k=1}^{K_n} \left(L_n^2 + kL_n + \frac{k^2}{3} \right) \left(\widetilde{\diamond}_{+1} x_{k,L_n} - \frac{k(2L_n+k)}{2} \right). \end{aligned}$$

A $\tilde{\Delta}_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)})$ és $\tilde{\Delta}_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)})$ valószínűségi változók normális eloszlásúak nulla várhatóértékkel.

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy $\Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) - \tilde{\Delta}_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) \xrightarrow{P} 0$. Ha $|\varrho| < 1$, akkor

$$\begin{aligned} \Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) - \tilde{\Delta}_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j,j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(\mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} - \frac{1}{(1-\varrho)^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(1-\varrho)^2 n} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \left(G_j(\varrho) - \frac{1}{2(1-\varrho)} \right) \end{aligned}$$

normális eloszlású, így azt kell megmutatnunk, hogy $\mathbb{E}(\Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) - \tilde{\Delta}_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)})) \rightarrow 0$ és $\text{Var}(\Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) - \tilde{\Delta}_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)})) \rightarrow 0$ ha $n \rightarrow \infty$.

$$\mathbb{E}(\Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) - \tilde{\Delta}_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)})) = \frac{1}{(1-\varrho)^2 n} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \left(G_j(\varrho) - \frac{1}{2(1-\varrho)} \right) \rightarrow 0,$$

mivel

$$G_j(\varrho) = \frac{1}{2(1-\varrho)} + O(|\varrho|^{2j}).$$

Továbbá

$$\text{Var}(\Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) - \tilde{\Delta}_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)})) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(\mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} - \frac{1}{(1-\varrho)^2} \right) \right)^2 \rightarrow 0,$$

mivel

$$\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(\varrho)} = \frac{k}{(1-\varrho)^2} + O(|\varrho|^{L_n}).$$

És így $\Delta_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) - \tilde{\Delta}_{n,\varrho}(\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}) \xrightarrow{P} 0$.

Ha $\varrho = -1$, akkor $G_\ell(-1) = \frac{1}{2}$ maga után vonja, hogy

$$\begin{aligned} \Delta_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)}) - \tilde{\Delta}_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n-1} \eta_{k,\ell} \left(\zeta_{k,\ell}^{(-1)} + \frac{\ell}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j,j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(\mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(-1)} + \frac{2L_n+k}{4} \right). \end{aligned}$$

A tagok függetlensége és $\mathbb{E}(\Delta_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)}) - \tilde{\Delta}_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)})) = 0$ miatt elegendő megmutatnunk, hogy $\text{Var}(\Delta_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)}) - \tilde{\Delta}_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)})) \rightarrow 0$. Szintén a tagok függetlensége miatt

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Delta_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)}) - \tilde{\Delta}_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)})) &= \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n-1} \mathbb{E} \left(\zeta_{k,\ell}^{(-1)} + \frac{\ell}{2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(\mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(-1)} + \frac{2L_n+k}{4} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbb{E} \zeta_{k,\ell}^{(-1)} = -\frac{\ell}{2} + O(1)$ és $\text{Var} \zeta_{k,\ell}^{(-1)} = \ell$, így

$$\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(-1)} = -\frac{k(2L_n+k)}{4} + O(k),$$

amiből kapjuk, hogy $\text{Var}(\Delta_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)}) - \tilde{\Delta}_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)})) \rightarrow 0$. Következésképpen $\Delta_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)}) - \tilde{\Delta}_{n,-1}(\mathbf{f}_{nn}^{(-1)}) \xrightarrow{P} 0$.

Ha $\varrho = +1$, akkor $G_\ell(+1) = \frac{2\ell+1}{2}$ maga után vonja, hogy

$$\begin{aligned} &\Delta_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)}) - \tilde{\Delta}_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)}) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n-1} \eta_{k,\ell} \left(\zeta_{k,\ell}^{(-1)} - \frac{3\ell^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \sum_{j=L_n}^{L_n+k-1} \eta_{L_n+k-j,j} \sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(\mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(-1)} - \frac{3L_n^2 + 3L_n k + k^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Újra teljesül $\mathbb{E}(\Delta_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)}) - \tilde{\Delta}_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)})) = 0$, és

$$\begin{aligned} &\text{Var}(\Delta_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)}) - \tilde{\Delta}_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)})) \\ &= \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{\ell=1}^{L_n-1} \mathbb{E} \left(\zeta_{k,\ell}^{(-1)} - \frac{3\ell^2}{2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} \left(\mathbb{E} \zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(-1)} - \frac{3L_n^2 + 3L_n k + k^2}{2} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Mivel $E\zeta_{k,\ell}^{(+1)} = \frac{3\ell^2}{2} + O(\ell)$ és $\text{Var}\zeta_{k,\ell}^{(+1)} = \ell$, így

$$\sum_{\ell=L_n}^{L_n+k-1} E\zeta_{L_n+k-\ell,\ell}^{(+1)} = \frac{k(3L_n^2 + 3L_nk + k^2)}{2} + O(k(L_n + k)),$$

amiből kapjuk, hogy $\text{Var}(\Delta_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)}) - \tilde{\Delta}_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)})) \rightarrow 0$. Következésképpen $\Delta_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)}) - \tilde{\Delta}_{n,+1}(\mathbf{f}_{nn}^{(+1)}) \xrightarrow{P} 0$. $\square$

5.3. Aszimptotikusan optimális próba

A lokális aszimptotikus normalitás egyik előnye, hogy hipotézisvizsgálat során egy aszimptotikusan optimális próbát konstruálhatunk. Legyen $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ nyílt részhalmaz, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező, és minden $\theta \in \Theta$ esetén $\xi^{(\theta)}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi változó eloszlása az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhető téren P_θ .

5.10. Definíció. Az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ statisztikai kísérletben **véletlenített próbafüggvénynek** egy $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$ mérhető függvényt nevezünk, melyre

$$\varphi(x) = P(H_0\text{-t elvetjük} \mid \xi^{(\theta)} = x).$$

A φ próba **erőfüggvénye**

$$\theta \mapsto \pi_\varphi(\theta) = E_\theta \varphi(\xi^{(\theta)}) = P_\theta(H_0\text{-t elvetjük}).$$

Legyen $\alpha \in (0,1)$. A φ véletlenített próba **α -szintű próba** a H_0 nullhipotézis tesztelésére, ha

$$\sup_{\theta \in H_0} \pi_\varphi(\theta) = \sup_{\theta \in H_0} E_\theta \varphi(\xi^{(\theta)}) \leq \alpha.$$

5.11. Tétel. (v. d. Vaart [28, Theorem 15.4.]) Legyen $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz, és legyen $\psi: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható egy θ_0 pontban úgy, hogy $\psi(\theta_0) = 0$, $\psi'(\theta_0) \neq 0$. Legyen az $(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{P_{n,\theta} : \theta \in \Theta\})_{n \in \mathbb{N}}$ statisztikai kísérletsorozat LAN a θ_0 pontban nemszinguláris I_θ Fisher-információval, és $r_n \rightarrow \infty$ skálázótényezővel.

Ekkor a $H_0: \psi(\theta_0) \leq 0$; $H_1: \psi(\theta_0) > 0$ hipotézis tesztelésére szolgáló tetszőleges α -szintű próbák φ_n , $n \in \mathbb{N}$ sorozatának erőfüggvényeire teljesül, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \pi_{\varphi_n}(\theta_0 + r_n^{-1}h) \leq 1 - \Phi \left(z_\alpha - \frac{\psi'(\theta_0)h}{\sqrt{\psi'(\theta_0)I_{\theta_0}^{-1}\psi'(\theta_0)^T}} \right),$$

minden $h \in \mathbb{R}^k$, $\psi'(\varrho_0)h > 0$ esetén. Továbbá tekintsük a T_n statisztikákat

$$T_n := \frac{\psi'(\theta_0)I_{\theta_0}^{-1}\Delta_{n,\theta_0}}{\sqrt{\psi'(\theta_0)I_{\theta_0}^{-1}\psi'(\theta_0)^T}} + o_{\mathbf{P}_n, \theta_0}(1).$$

Ekkor azon próbák sorozata, melyet elvetünk, ha T_n meghaladja a standard normális eloszlás z_α felső α -kvantilisét, aszimptotikusan optimális abban az értelemben, hogy minden $h \in \mathbb{R}$ esetén a $\mathbf{P}_{\theta_0 + r_n^{-1}h}(T_n \geq z_\alpha)$ konvergál a fent megadott felső korláthoz.

Az 5.11. Tételt és 5.9. Tételt kombinálva aszimptotikusan optimális próbát kapunk a kamatlábmodellünkben.

Legyenek K, L, K_n, L_n , $n \in \mathbb{N}$ pozitív egészek úgy, hogy $K_n = nK + o(n)$ és $L_n = nL + o(n)$ ha $n \rightarrow \infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $\varrho \in \mathbb{R}$ esetén legyen $\mathbf{P}_{n,\varrho}$ az $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)} := (f_{k,\ell}^{(\varrho)})_{1 \leq k \leq K_n, 0 \leq \ell \leq L_n}$ minta eloszlása a $(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}))$ mérhető téren.

5.12. Tétel. (Fülöp, Pap [3, Theorem 4.1.]) *Legyen*

- $\varrho_0 \in [-1, 1]$,
- $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható ϱ_0 -ban, $\psi(\varrho_0) = 0$, $\psi'(\varrho_0) \neq 0$,
- $\alpha \in (0, 1)$
- $\forall n \in \mathbb{N}: \varphi_n: \mathbb{R}^{K_n(L_n+1)} \rightarrow [0, 1]$ legyen α -szintű véletlenített próba a

$$H_0: \psi(\varrho) \leq 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \psi(\varrho) > 0 \quad \text{tesztelésére.}$$

Ekkor minden $h \in \mathbb{R}$, $\psi'(\varrho_0)h > 0$ esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \varphi_n \left(\mathbf{f}_{n, \varrho_0 + r_n^{-1}h} \right) \leq 1 - \Phi(z_\alpha - \text{sign}(\psi'(\varrho_0))I_{\varrho_0}^{1/2}h),$$

ahol Φ jelöli a standard normális eloszlásfüggvényt és z_α jelöli a standard normális eloszlás felső α -kvantilisét.

Továbbá megadva minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $T_{n, \varrho_0}: \mathbb{R}^{K_n(L_n+1)} \rightarrow \mathbb{R}$

$$T_{n, \varrho_0}(x_n) := \text{sign}(\psi'(\varrho_0))I_{\varrho_0}^{-1/2}\Delta_{n, \varrho_0}(x_n)$$

statisztikák sorozatát, akkor a

$$\varphi_n(x_n) := \begin{cases} 1, & \text{ha } T_{n,\varrho_0}(x_n) \geq z_\alpha, \\ 0, & \text{ha } T_{n,\varrho_0}(x_n) < z_\alpha, \end{cases}$$

próbák sorozata aszimptotikusan optimális abban az értelemben, hogy minden $h \in \mathbb{R}$ esetén

$$P\left(T_{n,\varrho_0}(\mathbf{f}_{n,\varrho_0+r_{n,\varrho_0}^{-1}h}) \geq z_\alpha\right) \rightarrow 1 - \Phi\left(z_\alpha - \text{sign}(\psi'(\varrho_0))I_{\varrho_0}^{1/2}h\right),$$

ha $n \rightarrow \infty$.

5.13. Példa. Legyen $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) := x - \varrho_0$. Ekkor teljesülnek az 5.12. Tétel feltételei, azaz $\psi(\varrho_0) = 0$ és $\psi'(\varrho_0) \neq 0$. Így az 5.12. Tétel alapján a

$$H_0: \varrho \leq \varrho_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \varrho > \varrho_0$$

hipotézisre aszimptotikusan optimális próbasorozatot tudunk adni az 5.8. Tételben megadott I_ϱ Fisher-információ és $\Delta_{n,\varrho}$ statisztika, vagy az egyszerűbb 5.9. Tételbeli $\tilde{\Delta}_{n,\varrho}$ statisztikák segítségével.

Összefoglalás

Ezen doktori értekezésben diszkrét idejű Heath-Jarrow-Morton (HJM) típusú határidős kamatlábmodelleket vizsgáltam, melyeket Gáll, Pap és Zuijlen [11] javasolt. A modellek legfőbb tulajdonsága az, hogy a különböző lejáratig hátralevő idő különböző értékeihez tartozó határidős kamatlábak különböző diszkrét idejű folyamatokkal lehetnek meghajtva, azaz a határidős kamatlábakat véletlen folyamat helyett egy véletlen mező hajtja meg. Ennélfogva különböző piaci változások lehetnek hatással a különböző határidős kamatlábak folyamatára.

Az általunk vizsgált esetben a kamatlábfolyamatot egy térbeli autoregressziós típusú Gauss véletlen mező hajtja meg. Egy ilyen modellre Gáll, Pap és Zuijlen olyan elégséges feltételeket is levezetett [6], amelyek mellett a piacok kizárják az arbitrázs lehetőségét, ezzel kiküszöbölve a modellből a drift tagot. Továbbá feltételeztük, hogy a volatilitás determinisztikus, sem az időtől, sem a lejáratig hátralevő időtől nem függ. Jelölje a k időpontban az ℓ lejáratig hátralevő időhöz ($k, \ell \in \mathbb{Z}_+$) tartozó határidős kamatlábat $f_{k,\ell}$. Ez a határidős kamatláb tehát a $[k+\ell, k+\ell+1)$ időintervallum alatt érvényes. Az $\{f_{k,\ell} : k, \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ térbeli autoregressziós mezővel meghajtott határidős kamatlábfolyamatot *stabilnak*, *instabilnak* vagy *felrobbanónak* nevezzük, ha $|\varrho| < 1$, $|\varrho| = 1$ vagy $|\varrho| > 1$.

A 2. fejezetben a HJM típusú kamatlábmodellekről adtam egy rövid történeti áttekintést és az arbitrázsmenetséghez kapcsolódó alapvető fogalmakat foglaltam össze. Ezután felidéztem az általunk tanulmányozott diszkrét idejű Gauss-típusú térbeli autoregressziós mezővel meghajtott határidős kamatlábmodellt, majd annak Gáll, Pap és Zuijlen által levezetett arbitrázsmentes alakját.

A 3. fejezetben maximum likelihood becslés konzisztenciájával foglalkoztam függő minta esetén. Az első alfejezetben összefoglaltam az alapvető definíciókat, továbbá a Heijmans és Magnus által [15] levezetett gyenge konzisztenciára vonatkozó feltételeket. A második alfejezetbe kerültek a saját eredmények, a gyenge konzisztenciára vonatkozó állítások analógiájára kidolgozott erős konzisztenciára vonatkozó feltételrendszer, melynél nincs megkövetelve a mintaelemeknek sem a függetlensége, sem az azonos eloszlásúsága. Különösen az első feltétel nagyon jól használható, egy alkalmas környezetben megfelelően skálázva a likelihood hánypados logaritmusára vonatkozó, egy információs mennyiséghez tartó egyenletes konvergenciát követel meg. Az információs mennyiség ebben az esetben a Kullback-

Leibler információval áll kapcsolatban.

A 4. fejezetben a HJM-típusú határidős kamatlábmodellben a ϱ autoregressziós paraméter maximum likelihood becslésének aszimptotikus vizsgálatát foglaltam össze. Az $f_{k,\ell}$ határidős kamatláb függ a k megfigyelési időtől és az ℓ lejáratig hátralevő időtől. Kétféle mintaelemszám növekedésnél vizsgáltam a ϱ paraméter erős konzisztenciáját. Először mindkét időtényezővel tartottam a végtelenbe. Ekkor igazoltam a maximum likelihood becslés erős konzisztenciáját stabil és mindkét instabil esetben. Ehhez az előző fejezetbeli erős konzisztenciára vonatkozó feltételt ellenőriztem, azaz megadtam azon r_{n,ϱ_0} skálázó tényezőket és $I(\varrho, \varrho_0)$ információs mennyiségeket, melyek mellett az említett egyenletes konvergencia teljesül. Stabil esetben a skálázó tényező szokásos abban az értelemben, hogy arányos a mintaelemszám reciprokával, azaz n^{-2} . A két instabil esetben azonban, amikor $\varrho = -1$ és $\varrho = +1$, a skálázó tényezők különbözőek, nevezetesen n^{-3} és n^{-6} . Később a lejáratig hátralevő idő felső korlátját rögzítettük, hisz természetesen felmerülő akadály, hogy nem állnak rendelkezésünkre adatok tetszőlegesen hosszú lejáratig hátralevő idővel. Azaz a második esetben minden megfigyelési időpontban a határidős kamatlábak ugyanolyan lejáratig hátralevő idővel rendelkeznek. Ekkor csak a stabil és a $\varrho = +1$ instabil esetben tudtunk erős konzisztenciát igazolni. Meglepő módon ezen új vizsgált minta esetén az r_{n,ϱ_0} skálázó tényezők megegyeznek a korábban vizsgált mintánál kapottal (a bizonyított esetekben), pedig a mintaelemszám első esetben n^2 -tel, második esetben pedig n -nel arányosnak tekinthető. A fejezet végén kaptak helyet az erős konzisztencia bizonyításánál használt, nagy számok erős törvényei típusú lemmák.

Ugyancsak a 4. fejezetben foglaltam össze az R [24] statisztikai programcsomaggal végzett szimulációs eredményeket is. Becsléseink az $\mathbf{f}_n^{(\varrho)}$ mintán alapulnak (mivel ez a realiztikusabb eset), melyet az arbitrázsmentes modell alapján generáltunk adott β volatilitás és $\{f_{0,\ell} : \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ kezdeti értékek mellett. Az elméleti eredményekkel összhangban a szimulációs eredmények alátámasztják az erős konzisztenciát a stabil és a $\varrho = +1$ instabil esetben, sőt a szimuláció a még nem bizonyított $\varrho = -1$ instabil esetben is erős konzisztenciára enged következtetni. Az ML becslés aszimptotikus normalitását is vizsgáltunk, ami $|\varrho| < 1$ és $\varrho = +1$ esetben a szimuláció alapján teljesül. A $\varrho = -1$ esetben viszont elvetettük a normalitást a Shapiro-Wilk próba alapján.

Végül az 5. fejezetben a kamatlábmodellhez kapcsolódó kísérletsorozattal foglalkoztam. Először bevezettem a szükséges alapfogalmakat: a kísérletsorozat kon-

vergenciáját és lokális aszimptotikus normalitását Le Cam féle értelemben [19] (lásd továbbá van der Vaart [28]). Majd az első típusú, n^2 -tel arányos minta esetén bizonyítottam a kamatlábmodellhez kapcsolódó kísérletsorozat lokális aszimptotikus normalitását stabil és mindkét instabil esetben. Az itt szóba jövő skálázó tényezők a mintából származó Fischer információs mennyiséggel vannak összhangban. Stabil esetben ez a skálázó tényező n , ami klasszikus abban az értelemben, hogy a mintaméret négyzetgyökével arányos. Meglepő módon az instabil esetekben, $\rho = -1$ és $\rho = +1$, esetén a skálázó tényezők különbözőek, nevezetesen n^2 és n^3 . A lokális aszimptotikus normalitásból következik a kísérletsorozat konvergenciája, továbbá [28, 15.4 Tétel] szerint egy aszimptotikusan optimális próbát is tudunk konstruálni, abban az értelemben, hogy meg tudunk adni egy olyan próbasorozatot, melynek erőfüggvényei tartanak az összes (rögzített α -szintű) véletlenített próbasorozat erőfüggvényeinek limesz szuperiorjára vonatkozó felső korláthoz.

A disszertációban szereplő eredmények alapját az alábbi tudományos közleményeim adják: [4], melyben a maximum likelihood becslés erős konzisztenciájára dolgoztunk ki feltételrendszert; [5] és [2], melyekben a kamatlábmodell autoregressziós paramétere maximum likelihood becslésének erős konzisztenciáját bizonyítjuk több esetben, illetve a szimulációs eredményeket tartalmazzák; és végül [3], mely a lokális aszimptotikus normalitással kapcsolatos eredményeinket tartalmazza. Ezen tudományos közlemények többsége a témavezetőmmel, Pap Gyulával (Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet), közös munka.

Summary

In the present thesis I dealt with discrete time Heath-Jarrow-Morton (HJM) type forward interest rate models introduced by Gáll, Pap and Zuijlen [11]. The key feature of these models is that the forward rates corresponding to different time to maturity values can be driven by different discrete time processes, that is the forward rates are driven by a random field instead of a random process. Hence, different market 'shocks' may impact at the different forward rate processes.

In our case the forward rate process is driven by a Gaussian type autoregressive random field. Gáll, Pap and Zuijlen derived sufficient condition under which there were no arbitrage opportunities on the market [6], this condition eliminated the drift term from the model. In addition we suppose that the volatility is deterministic, it does not depend on time (k) neither on time to maturity (ℓ). Let $f_{k,\ell}$ denote the forward interest rate at time k with time to maturity date ℓ ($k, \ell \in \mathbb{Z}_+$), which holds for the time period $[k+\ell, k+\ell+1)$. The forward rate process $\{f_{k,\ell} : k, \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ driven by spatial autoregressive field is called *stable*, *unstable* or *explosive* if $|\varrho| < 1$, $|\varrho| = 1$ or $|\varrho| > 1$, respectively.

First, in Chapter 2, I gave a short summary about HJM-type interest rate models and defined some fundamental notions related to no-arbitrage assumption. I recalled the discrete time forward interest rate model driven by a Gaussian-type spatial autoregressive random field, and then its no-arbitrage form, derived by Gáll, Pap and Zuijlen.

In Chapter 3 the main aim was to give a general sufficient condition for strong consistency of maximum likelihood (ML) estimators with dependent observations. After basic definitions I introduced weak consistent ML estimation conditions derived by Heijmans and Magnus. Motivated by this we derived a condition system for strong consistency of ML estimators provided that the sample is not necessarily independent and identically distributed. Especially the first condition is well applicable, it requires that the appropriate scaled logarithm of the likelihood ratio should converge to an information quantity uniformly in a suitable small neighbourhood. The information quantity in this case is connected with Kullback-Leibler information.

In Chapter 4 I summarised the asymptotic behaviour of estimation of autoregressive parameter ϱ of HJM-type forward interest rate model. The forward interest rate $f_{k,\ell}$ depends on observation time k and time to maturity date ℓ .

I studied the strong consistency of the ML estimation of the parameter ϱ in two cases of increasing size of sample. First, I tend to infinity by both time factor. In this case I proved strong consistency in the stable and in both unstable cases. I checked the sufficient condition for strong consistency from previous chapter. Namely, I gave such scaling factors r_{n,ϱ_0} and information quantities $I(\varrho, \varrho_0)$ which satisfy the above mentioned uniform convergence. In the stable case the scaling factor is classical in the sense that it is proportional to the reciprocal value of sample size, that is n^{-2} . But in the unstable cases $\varrho = -1$ and $\varrho = +1$ the scaling factors are different, namely, n^{-3} and n^{-6} , respectively. Second, I consider another realistic model when the maximum of time to maturity date is constant, that is the forward rates are only known for the same values of time to maturity. In this case I could prove strong consistency only in the stable and in the unstable case $\varrho = +1$. Surprisingly in the case of this new type of the sample the scaling factors r_{n,ϱ_0} are equal to earlier scaling factors (in proved cases), even though the size of sample in the first case is proportional to n^2 but in the second case proportional to n . In the proof of strong consistency we used versions of strong law of large numbers, see the end of the chapter.

In addition, I summarised in Chapter 4 the result of the simulations with the statistical software environment R [24]. Our estimations were based on samples $\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)}$ (because it is more realistic case), which are generated according to our no-arbitrage model given the volatility β and initial values $\{f_{0,\ell} : \ell \in \mathbb{Z}_+\}$. Simulations suggest that ML estimator is strongly consistent in the stable and in both unstable cases (however the case $\varrho = -1$ has not been proved yet). We studied asymptotic normality too. It seems that the ML estimator is asymptotically normal in cases $|\varrho| < 1$ and $\varrho = +1$ in contrast to the case $\varrho = -1$, where Shapiro-Wilk test rejected normality.

Finally, in Chapter 5, we dealt with sequences of statistical experiments related to the interest rate model. First, I introduced some sufficient notions: convergence of sequence of statistical experiments and its local asymptotic normality in the sense of Le Cam [19], see also van der Vaart [28]. Then for the first type sample, which is proportional to n^2 , we proved local asymptotic normality of the sequences of statistical experiments related to the interest rate model in stable and in both unstable cases. Related scaling factors are in connection with Fisher information quantity contained in the sample. In the stable case this scaling factor is n , which is classical in the sense that it is proportional to the square root of the

sample size. Surprisingly, in the unstable cases $\varrho = -1$ and $\varrho = +1$, the scaling factors are different, namely, n^2 and n^3 , respectively. Local asymptotic normality yield convergence of sequence of statistical experiments. Furthermore, using [28, Theorem 15.4], we could construct a sequence of asymptotically optimal tests in the sense that its power functions tends to the upper bound of limit superior of power functions of any sequence of (fixed level α) randomized tests.

The results presented in the thesis are based on the following research papers of mine: [4], where a condition system introduced for strong consistency of maximum likelihood estimators; [5] and [2], where we proved strong consistency of maximum likelihood estimator in the interest rate model in several cases and presented simulation results; and finally [3], which contain our results related to local asymptotic normality. These research papers are mostly joint works with my supervisor Prof. Gyula Pap (University of Szeged, Hungary).

Irodalomjegyzék

- [1] H. CRAMÉR, Mathematical methods of statistics, *Princeton University Press*, Princeton, NJ, 1946.
- [2] E. FÜLÖP, Strong consistency of parameter estimators and simulations in a forward interest rate model, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **80** (1-2): 327–348, 2014.
- [3] E. FÜLÖP and G. PAP, Asymptotically optimal tests for a discrete time random field HJM type interest rate model *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **73** (4): 637–661, 2007.
- [4] E. FÜLÖP and G. PAP, Note on strong consistency of maximum likelihood estimators for dependent observations, in *Proceedings of the 7th International Conference on Applied Informatics* (Eger, 2007). vol. I, Eger, B. V. B. Nyomda és Kiadó Kft, 2008, pp. 223–228.
- [5] E. FÜLÖP and G. PAP, Strong consistency of maximum likelihood estimators for a discrete time random field HJM type interest rate model, *Lithuanian Math.J.*, **49** (1): 5–25, 2009.
- [6] J. GÁLL, *Some Problems in Discrete Time Financial Market Models*, Ph.D. Dissertation, Debrecen, 2008.
- [7] J. GÁLL and G. PAP, *Bevezetés a pénzügyi matematikába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2010.
- [8] J. GÁLL, G. PAP and W. PEETERS, Random field forward interest rate models, market price of risk and their statistics, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, **53** (2): 233–242, 2007.

- [9] J. GÁLL, G. PAP and M.V. ZUIJLEN, Maximum likelihood estimator of the volatility of forward rates driven by geometric spatial AR sheet, *J. Appl. Math.*, **2004** (4): 293–309, 2004.
- [10] J. GÁLL, G. PAP and M.V. ZUIJLEN, Joint ML estimation of all parameters in a discrete time random field HJM type interest rate model, *Radboud University Nijmegen*, Report No. 0606, 2006.
- [11] J. GÁLL, G. PAP and M.V. ZUIJLEN, Forward interest rate curves in discrete time settings driven by random fields, *Comput. Math. Appl.*, **51** (3-4): 387–396, 2006.
- [12] R. S. GOLDSTEIN, The term structure of interest rates as a random field, *The Review of Financial Studies* **13** (2): 365–384, 2000.
- [13] D. HEATH, R. A. JARROW and A. MORTON, Bond pricing and the term structure of interest rates: A discrete time approximation, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **25**: 419–440, 1990.
- [14] D. HEATH, R. A. JARROW and A. MORTON, Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica* **60**: 77–105, 1992.
- [15] R.D.H. HEIJMANS and J.R. MAGNUS, Consistent maximum-likelihood estimation with dependent observations: The general (non-normal) case and the normal case, *Journal of Econometrics*, **32**: 253–285, 1986.
- [16] R. A. JARROW, *Modeling fixed income securities and interest rate options*, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 1996.
- [17] R.I. JENNRICH, Asymptotic properties of non-linear least squares estimators, *Ann. Math. Statist.*, **40** (2): 633–643, 1969.
- [18] D. P. KENNEDY, The term structure of interest rates as a Gaussian random field, *Mathematical Finance* **4**: 247–258, 1994.
- [19] L. LE CAM, *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*, Springer-Verlag, New York, 1986.

- [20] M. MUSIELA and M. RUTKOWSKI, *Martingale methods in financial modeling*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [21] W. PEETERS, Volatility estimation for different structures of random field interest rate models in discrete time *Publ. Math. Debrecen*, **72** (3-4): 317–334, 2008.
- [22] A. PELSEER, *Efficient methods for valuing interest rate derivatives*, Springer-Verlag, London, 2000.
- [23] S. R. PLISKA, *Introduction to mathematical finance, Discrete time models*, Blackwell Publishers Inc., Massachusetts, 1997.
- [24] R DEVELOPMENT CORE TEAM, R: A Language and Environment for Statistical Computing, ISBN 3-900051-07-0, *R Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria, 2008, <http://www.R-project.org>
- [25] P. SANTA-CLARA and D. SORNETTE, The dynamics of the forward interest rate curve with stochastic string shocks, *The Review of Financial Studies* **14** (1): 149–185, 2001.
- [26] W. M. SCHMIDT, On a general class of one-factor models for the term structure of interest rates, *Finance and Stochastics* **1**: 3–24, 1997.
- [27] A. N. SHIRYAEV, *Probability*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [28] A.W. VAN DER VAART, *Asymptotic Statistics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [29] A. WALD, Note on the consistency of the maximum likelihood estimate, *Annals of Mathematical Statistics*, **20**: 595–601, 1949.

A jelölt publikációi

Tudományos közlemények

- (i) E. FÜLÖP and G. PAP, Asymptotically optimal tests for a discrete time random field HJM type interest rate model *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **73** (4): 637–661, 2007.
- (ii) E. FÜLÖP and G. PAP, Note on strong consistency of maximum likelihood estimators for dependent observations, in Proceedings of the *7th International Conference on Applied Informatics* (Eger, 2007). vol. I, Eger, B. V. B. Nyomda és Kiadó Kft, 2008, pp. 223–228.
- (iii) E. FÜLÖP and G. PAP, Strong consistency of maximum likelihood estimators for a discrete time random field HJM type interest rate model, *Lithuanian Math. J.*, **49** (1): 5–25, 2009.
- (iv) E. FÜLÖP, Strong consistency of parameter estimators and simulations in a forward interest rate model, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **80** (1-2): 327–348, 2014.

Előadások

- (i) Estimation of AR parameter of an unstable HJM type interest rate model, *XXVI. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Sovata-Bai, Románia (2006)*

- (ii) Local asymptotic normality of unstable HJM type interest rate model, *7th International Conference on Applied Informatics, Eger, Magyarország (2007)*
- (iii) Statistical problems in a discrete time random field HJM type interest rate model, *15th European Young Statisticians Meeting, Castro Urdiales, Spanyolország (2007)*
- (iv) Statistical inference in an interest rate model, *12th Young Statisticians Meeting, Piran, Szlovénia (2007)*
- (v) Statisztikai következtetések egy diszkrét idejű HJM-típusú határidős kamatlábmodellben, *I. Országos Gazdasági és Pénzügyi matematikai Phd konferencia, Budapest, Magyarország (2008)*
- (vi) Asymptotic inference for a discrete time random field HJM type interest rate model, *Barcelona Conference on Asymptotic Statistics, Bellaterra (Barcelona), Spanyolország (2008)*
- (vii) Simulations of an HJM type forward interest rate model, *Probability and Statistics with Applications (Dedicated to the 100th anniversary of the birthday Béla Gyires), Debrecen, Magyarország (2009)*
- (viii) Strong Consistency of Maximum Likelihood Estimators of AR Parameter for a HJM Type Interest Rate Model, *29th European Meeting of Statisticians, Budapest, Magyarország (2013)*
- (ix) HJM típusú határidős kamatlábmodell szimulációja, *16. Gyires Béla Informatikai Nap, Debrecen, Magyarország (2013)*