

Matematika

Belágyi József, Mátyus László, Nyitrai Miklós

Pécsi Tudományegyetem
Általános Orvostudományi Kar

Debreceni Egyetem
Általános Orvostudományi Kar

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM – DEBRECENI EGYETEM
ÁLTALÁNOS ORVOSTUDOMÁNYI KAR

Belágyi József – Mátyus László – Nyitrai Miklós

Matematika

2010. évi változatlan utánnyomás



Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2016

Szerzők
BELÁGYI JÓZSEF
egyetemi tanár, Pécsi Tudományegyetem

MÁTYUS LÁSZLÓ
egyetemi tanár, Debreceni Egyetem

NYITRAI MIKLÓS
egyetemi tanár, Pécsi Tudományegyetem

Lektor:
HAJDÚ PÉTER
egyetemi tanársegéd, Debreceni Egyetem

A Pécsi Tudományegyetem Általános Orvostudományi Kar Biofizikai Intézet és
a Debreceni Egyetem Általános Orvostudományi Kar Biofizikai és Sejtbiológiai
Intézet együttműködésével megjelentetett kiadvány.

ISBN 978 963 318 156 0

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

Kiadta a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Készült a DE sokszorosítóüzemében, 2016-ban

Előszó

A természettudományokban mind az elméleti, mind a gyakorlati eljárások jártasságot követelnek meg – a formális ismeretek mellett – az alkalmazásokban is. Ezért az alapozó matematikai, elsősorban a matematikai analízis, tananyag összeállítása kapcsán arra törekedtünk, hogy a rövid elméleti megalapozás után elsősorban a gyakorlati felhasználás lehetőségeire mutassunk rá. Igyekeztünk olyan részeket is beiktatni, amelyek szoros összefüggésben állnak a később ismertetendő más szakterületekhez kapcsolódó matematikai eljárásokkal (elsődrendű kémiai reakciók, enzimkinetika). Az egyes fejezetek tárgyalása változó mélységű, a többi alapozó tárgy igényeihez illeszkedik. Fontos, hogy a hallgatók ne csak a vonatkozó természeti folyamatokat értsék meg, hanem azokat az eszközöket is, amelyek segítségével betekintést nyerhetnek a biológiai, fizikai és kémiai folyamatok mennyiségi részleteibe és időbeli viszonyaiba.

Munkánk során felhasználtuk az elmúlt években szerzett saját oktatási tapasztalatokat is. A rendelkezésre álló korlátozott idő nem teszi lehetővé az egyes tárgykörök részletes ismertetését, és a matematikában általánosan szokásos bizonyítási eljárások szigorú tárgyalását. A tárgyalás során feltételeztük, hogy a hallgató rendelkezik az elemi matematikai - főleg a függvényekkel kapcsolatos - megbízható ismeretekkel. Számolni kell azzal is, hogy a matematikai alapok elsajátítása komoly nehézséggel járhat, ezért az egyes fejezetek tárgyalásánál igyekeztünk az állításokat és magyarázatokat példák segítségével érthetőbbé tenni. Kíváncsok, hogy a hallgató tárgyi tudását további gyakorlati példák megoldásával tegye elmélyültebbé.

A szerzők
2010. augusztus

DUPress

Tartalomjegyzék

1 Számok és mérések 9

- 1.1 Számok 9
- 1.2 Mérések, pontosság és értékes számjegyek 10
- 1.3 A számok tudományos alakja 11
- 1.4 Kerekítés 11
- 1.5 Elemi matematikai műveletek 12
- 1.6 További matematikai műveletek 12
- 1.7 Logaritmus 14
- 1.8 Az exponenciális 16
- 1.9 Mértékegységek, számítások 17
- 1.10 Számított mennyiségek értékes számjegyei 19
- 1.11 Algebrai egyenletek megoldása 19

2 Vektorok, trigonometria, trigonometrikus függvények és mátrixok 22

- 2.1 Descartes-féle koordinátarendszer, vektorok, műveletek vektorokkal, vektor reprezentációk 22
- 2.2 Trigonometria, trigonometriai függvények és azonosságok 28
- 2.3 Mátrixok és alkalmazásaik 32

3 Halmazok, függvények, függvények megadási módja 38

- 3.1 Két biológiai példa 38
- 3.2 Halmazok, intervallum 41
- 3.3 Függvény 44

4 Függvények és tulajdonságaik 49

- 4.1 Függvények speciális tulajdonságai 49
- 4.2 Inverz függvény 51
- 4.3 Függvények transzformációja 52
- 4.4 Elemi függvények 53

5 Határérték. Függvények határértéke, folytonosság 60

- 5.1 Környezet 60
- 5.2 Függvény határértéke 61
- 5.3 Határátmenetre vonatkozó tételek 64
- 5.4 Függvények folytonossága 66
- 5.5 Szakadós függvények 66
- 5.6 Függvények egyenletes folytonossága. Cantor-tétele 67
- 5.7 A folytonos függvények alaptulajdonságai 67
- 5.8 Egy nevezetes határérték 68

6 Számsorozatok, számsorok. Az e szám 70

- 6.1 Sorozat 70
- 6.2 A sorozat határértéke 71
- 6.3 Végtelen sor 72
- 6.4 A konvergencia vizsgálata 73
- 6.5 Az e szám 75
- 6.6 Speciális esetek 77

7 Differenciálhányados, differenciálási szabályok 78

- 7.1 Differenciálhányados és határértéke: differenciálhányados 78
- 7.2 A differenciálás szabályai 80
- 7.3 Elemi függvények differenciálhányadosa 83

8 A differenciál. Magasabbrendű deriváltak. Függvények hatványsorba fejtése. Taylor sor 88

- 8.1 A differenciál 88
- 8.2 Magasabbrendű deriváltak 89
- 8.3 Többváltozós függvények 90
- 8.4 Többváltozós függvények differenciálása 90
- 8.5 Hatványsorok 93
- 8.6 Néhány ismert függvény hatványsora 95
- 8.7 Műveletek hatványsorokkal 96
- 8.8 A l'Hospital szabály 97

9 Függvények tulajdonságainak vizsgálata. Szélsőértékek 99

- 9.1 Függvények szélsőértéke 99
- 9.2 A differenciálható függvények néhány tulajdonsága 102
- 9.3 A függvények konvex és konkáv jellege 104
- 9.4 A legkisebb négyzetek elve 107

10 Az integrál fogalma. Határozatlan integrál 109

- 10.1 Primitív függvény, határozatlan integrál fogalma 109
- 10.2 Közvetlen integrálás 110
- 10.3 Az integrálszámítás egyszerű tételei 111
- 10.4 Parciális integrálás 111
- 10.5 Integrálás helyettesítéssel 113
- 10.6 Integrálás parciális törtek segítségével 114

11 Határozott integrál 116

- 11.1 A határozott integrál definíciója. Riemann-féle összegek 116
- 11.2 Newton-Leibniz formula 118
- 11.3 Az integrál, mint a felsőhatár függvénye 120
- 11.4 A határozott integrál közelítő meghatározása. Simpson-szabály 121
- 11.5 Impropius integrál 122
- 11.6 Rekurziós formulák 123

12 Az integrálszámítás alkalmazása 125

- 12.1 Számtani átlag. Súlyozott átlag, négyzetes átlag 125
- 12.2 Paraméteres alakban megadott függvény integrálása 127
- 12.3 Görbék ívhossza 128
- 12.4 Forgási testek térfogata 130
- 12.5 Forgási testek felszínének kiszámítása 131
- 12.6 Egy fizikai-kémiai alkalmazás 132

13 Differenciálegyenletek, differenciálegyenletek típusai. Szeparábilis differenciálegyenletek 134

- 13.1 A differenciálegyenlet fogalma 134
- 13.2 A differenciálegyenletek típusai 138
- 13.3 Szeparábilis differenciálegyenlet megoldása 138
- 13.4 Homogén differenciálegyenlet és megoldása 141

14 Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek. Kémiai reakciók 143

- 14.1 Lineáris differenciálegyenlet megoldása integráló faktorról 143
- 14.2 Kémiai, biokémiai reakciók. Kompartiment analízis 145
- 14.3 Egymást követő (konszekutív) reakció megoldása 148

15 Másodrendű lineáris differenciálegyenletek. Egy további kémiai-biokémiai alkalmazás: enzimkinetika 151

- 15.1 Másodrendű differenciálegyenletek 151
- 15.2 Állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet 152
- 15.3 Enzimkinetika 154

Függelék 159

- F.1 SI prefixumok 159
- F.2 Elemi függvények differenciálhányadosa 160
- F.3 Elemi függvények integrálja 161

Jelölések 162

DUPress

1 Számok és mérések

Egy mért mennyiséget általában mérőszámmal és mértékegységgel adunk meg. Például egy tömeget megadhatunk úgy, hogy 15,00 gramm (15,00 g) vagy 25,38 kilogramm (25,38 kg) stb. Mértékegység nélkül a mennyiség nem definiált kellőképpen. Például 3,32 g nem ugyanaz, mint 3,32 font.

1.1 Számok

A számokat több halmazba sorolhatjuk. Azok a számok, amelyek fizikai mennyiséget írhatnak le a *valós számok*. Ezek a számok előjellel és nagysággal rendelkeznek. Az előjel lehet pozitív vagy negatív. A valós számok mínusz végtelentől plusz végtelenig terjednek. A valós számok részhalmazát képezik az *egész számok*, 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , stb., amelyek egyben a *racióális számok* részhalmazát is jelentik. A racionális számok két egész szám hányadosaként adhatók meg, mint pl. $5/8$, $3/5$, $7/16$. A törteket tizedes törtként is felírhatjuk. Például $1/8$ ugyanazt jelenti, mint 0,125. Bizonyos törtek nem adhatóak meg egyértelműen véges sok tizedes jeggyel. Például, $2/3$ egyenlő $0,66666 \dots$. A három pont a számok után azt jelenti, hogy további tizedes jegyek következnek. Itt a szám egyértelmű megadásához végtelen tizedes jegyre van szükség. A racionális számok tizedes tört alakja vagy véges számú nem nulla tizedes jegyet tartalmaz, vagy a számok végtelenszer ismétlődő mintázatát.

Gyakorlásképpen alakítsuk át a következő törteket tizedes törtékké $1/3$, $6/11$, vagy $3/8$ (keressük meg az összes nullától különböző tizedes jegyet, vagy az ismétlődő szám mintázatot).

A nem racionális számokat (amelyek nem adhatóak meg két egész szám hányadosaként) *irracióális számoknak* nevezzük. Az algebrai irracionális számok magukba foglalják olyan racionális számok gyökeit, amelyek nem racionálisak. A fennmaradó valós számok a *transzcendens irracionális számok*, mint pl. a π (a kör területének és átmérőjének hányadosa), $3,141592653 \dots$, vagy e (a természetes logaritmus alapszáma) $2,718281828 \dots$. Ha az irracionális számokat tizedes tört alakban adjuk meg, sosem jutunk el egy olyan ponthoz, amely után következő összes tizedes jegy nulla lenne, vagy a számok ismétlődő mintázatot mutatnának. A valós számok mellett a matematikusok a *képzetes számokat* is definiálták. A képzetes egység, i , egyenlő $\sqrt{-1}$. Egy képzetes szám i és egy valós szám szorzataként állítható elő. A *komplex szám* egy valós és egy képzetes szám összege. Ha a és b valós számok, akkor $c = a + ib$ egy komplex szám. a -t c valós részének, míg b -t c képzetes részének nevezzük. A képzetes és komplex számok nem írnak le fizikai mennyiségeket, de fontos szerepük van a kvantummechanikában. A fent tárgyalt számok ún. skalár mennyiségek, amelyeket megkülönböztetünk a vektoroktól. A skalár mennyiségeknek nagyságuk és előjelük van, míg a vektoroknak nagyságuk és irányuk. A vektorokat később részletesen tárgyaljuk.

1.2 Mérések, pontosság és értékes számjegyek

A mért mennyiségeket gyakorlatilag sohasem ismerjük teljes pontossággal. Ennek megfelelően jó ötletnek látszik, ha a mérések valószínű pontosságát is megadjuk. Tegyük fel, hogy megmértük egy test tömegét és a mért érték 87,8 gramm (87,8 g). Meghatároztuk, hogy a kísérletes hiba valószínűleg nem nagyobb, mint 0,5 g. A test tömegét az alábbi formában a legcélszerűbb megadni: tömeg = $87,8 \text{ g} \pm 0,5 \text{ g}$. Ha nem adhatjuk meg a valószínű kísérletes hibát, akkor legalább azt kell elkerülnünk, hogy olyan számjegyeket adjunk meg, amelyek valószínűleg helytelenek. Itt a becsült hiba valamivel kisebb, mint 1 g, ezért a helyes érték valószínűleg közelebb van 88 g-hoz, mint akár 87 akár 89 g-hoz. Ha nem akarjuk megadni a várható kísérleti hibát, akkor a tömeget 88 g-ként adjuk meg, és azt mondjuk, hogy a két számjegy *értékes számjegy*. Ez azt jelenti, hogy a megadott számjegyek helyesek.

Ha azt mondtuk volna, hogy a tömeg 87,8 g, akkor az utolsó számjegy nem lenne értékes. Ez azt jelenti, hogy ha tudnánk a pontos tömeget, a tizedes vesszőt követő 8-as számjegy valószínűleg nem helyes, hiszen azt gondoljuk, hogy a tömeg pontos értéke 87,3 g és 88,3 g között van.

Amikor mérések eredményét adjuk meg, el kell kerülnünk, hogy nem értékes számjegyeket adjunk meg. Amikor mért mennyiségekkel számításokat végzünk, mindig meg kell határoznunk hány értékes számjegyet tartalmazhat a végeredmény, és annak megfelelően kerekítenünk kell a végeredményt. Amikor egy fizika könyvben egy fizikai mennyiséget megadnak, feltételezzük, hogy a megadott számjegyek értékesek. Ha van egy számunk, amelyről azt gondoljuk hogy helyes, akkor megszámozhatjuk az értékes számjegyeket. Ha szám nem tartalmaz nullát, akkor az értékes számjegyek száma megegyezik a számjegyek számával. Ha a szám tartalmaz egy vagy több nullát, akkor azok a nullák, amelyek nem nulla számjegyek között helyezkednek el, értékes számjegynek számítanak. Azok a nullák, amelyek csak a tizedes vessző helyének meghatározásához szükségesek, nem számítanak értékes számjegyeknek.

Például a 0,0000543 három értékes számjegyet tartalmaz, míg a 0,006022 négyet. A 82 000-ben csak két értékes számjegy van. A 0,000054300 pedig öt értékes számjegyet tartalmaz. A baloldalon levő nullák csak a tizedes vessző helyének meghatározására szolgálnak. Az utolsó két nulla nem lenne szükséges a tizedes vessző helyének definiálásához, ezért azt jelzi, hogy a számot öt értékes számjegy pontossággal ismerjük. Probléma akkor keletkezik, ha úgy tűnik, hogy nullák szerepe csak a tizedes vessző helyének meghatározása, de a nullák valójában értékes számjegyek. Például ha egy távolság közelebb van 6300 méterhez (6300 m), mint 6299 vagy 6301 méterhez, akkor négy értékes számjegyünk van. Ha csak 6300 m-t írunk, egy tanult ember joggal feltételezné, hogy a két nem nulla nem értékes számjegy és arra következtetésre jutna, hogy szám csak két értékes számjegyet tartalmaz. Egy lehetőség a négy értékes jegy jelzésére, hogy vesszőt teszünk a szám után: 6300, méter. Az egyértelmű tizedes vessző azt jelenti, hogy a nullák értékes számjegyek. Egy másik lehetőség, hogy vízszintes vonalat teszünk az értékes számjegyet jelentő nullák fölé, ami azt jelenti, hogy a szám négy értékes számjegyet tartalmaz: $6300\bar{}$.

1.5 Elemi matematikai műveletek

Az *összeadás*, *kivonás*, *szorzás* és *osztás* az elemi matematikai műveletek közé tartozik. Az előjeles számokkal történő műveletek szabályai az alábbiak:

- (1) Két azonos előjelű szám szorzata pozitív. Két különböző előjelű szám szorzata negatív.
- (2) Két azonos előjelű szám hányadosa pozitív, míg két különböző előjelű számé negatív.
- (3) Két szám különbsége megegyezik az első szám és a második szám ellentétes előjellel vett összegével.
- (4) A szorzás *kommutatív*, ami azt jelenti, hogy ha a és b számok akkor

$$a \times b = b \times a \quad (1.1)$$

- (5) A szorzás *asszociatív*, azaz:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \quad (1.2)$$

- (6) A szorzás és az összeadás *disztributív*, ami azt jelenti, hogy:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad (1.3)$$

1.6 További matematikai műveletek

A négy elemi aritmetikai művelet mellett további matematikai műveleteket is végezhetünk számokkal (ezek közül sok csak egy számra vonatkozik). Egy skalár *abszolút értéke* az a szám, amely megadja a skalár nagyságát az előjelétől függetlenül. Jelölése a mennyiség szimbóluma elé és mögé helyezett függőleges vonallal történik. A művelet jelentése

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0 \\ -x & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Példa

$$\begin{aligned} |3,2| &= 3,2 \\ |-2,1| &= 2,1 \end{aligned}$$

Egy szám abszolút értéke sohasem negatív (vagy pozitív, vagy nulla). További fontos aritmetikai műveletek a hatványozás és a gyökvonás. Ha x egy számot jelent, amelyet $n - 1$ -szer megszorozunk önmagával, úgy hogy egy n tagú szorzatot kapunk, akkor ezt x^n szimbólummal jelöljük és x n -edik hatványának nevezzük.

Példa

$$x^2 = x \times x, \quad x^3 = x \times x \times x, \quad x^n = x \times x \times x \times \cdots \times x \quad (n \text{ tényező}) \quad (1.5)$$

Az n számot az x^n kifejezésben x hatványkitevőjének nevezzük. x^n akkor is értelmezhető, ha a hatványkitevő nem egész szám. Ha a hatványkitevő negatív, az a pozitív kitevős mennyiség reciprokát jelenti:

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \quad (1.6)$$

A hatványozás fontos egyenlete:

$$x^a x^b = x^{a+b} \quad (1.7)$$

ahol x , a , és b számok. Az ilyen egyenleteket azonosságoknak hívjuk, ami azt jelenti, hogy az egyenlet igaz a változók tetszőleges értéke esetén. A következő azonosság:

$$(x^a)^b = x^{ab} \quad (1.8)$$

A valós számok gyökeit a hatványozással ellentétes műveletként definiáljuk. Például x négyzetgyökét $\sqrt{x}$ -ként jelöljük, és azt a számot jelenti, amelynek négyzete x :

$$(\sqrt{x})^2 = x \quad (1.9)$$

x köbgyökét $\sqrt[3]{x}$ -ként jelöljük, és azt a számot jelenti, amelynek köbe (harmadik hatványa) x :

$$(\sqrt[3]{x})^3 = x \quad (1.10)$$

A negyedik, ötödik n -edik gyököket hasonlóképpen definiáljuk. Egy szám gyökének kiszámítása azonos a szám törthatványra történő emelésével.

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} \quad (1.11)$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(\sqrt[3]{x})^3 = (x^{1/3})^3 = x^{3/3} = x^1 = x = (x^3)^{1/3} = \sqrt[3]{x^3} \quad (1.12)$$

Ez az egyenlet jól illusztrálja, hogy a gyökvonás és a hatványozás sorrendje felcserélhető anélkül, hogy az eredmény megváltozna, azaz ezek a műveletek is kommutatívok.

Mindig létezik két olyan szám, melynek négyzete egy adott pozitív valós szám. Például, $3^2 = 9$ és $(-3)^2 = 9$. Amikor a $\sqrt{9}$ szimbólumot használjuk, akkor csak a pozitív négyzetgyököt, a 3-at értjük alatta. Ha a valós számokra korlátozzuk a vizsgálódást, akkor egy negatív szám négyzetgyöke, negyedik-, hatodik- stb. gyöke nem értelmezhető. Ahogy már korábban tárgyaltuk, a negatív mennyiségek négyzetgyöke képzetes szám. Mind a pozitív, mind a negatív számok köbgyöke, ötödik- hetedik- stb. gyöke értelmezhető a valós számok halmazán, hiszen páratlan számú negatív szám szorzata negatív számot eredményez. Az egész számok, vagy más racionális számok négyzetgyöke, köbgyöke stb. vagy racionális szám vagy algebrai irracionális szám. A 2 négyzetgyöke például egy algebrai irracionális szám. Egy algebrai irracionális számot a megfelelő hatványra emelve racionális számot kapunk. Egy algebrai irracionális szám tizedes tört formában nem írható le véges számú nullától különböző számjeggyel, illetve nem fedezhető fel ismétlődő

mintázat a számjegyekben. Azokat az irracionális számokat, amelyek bármely hatványra emelve sem eredményeznek racionális számot, transzcendens irracionális számoknak nevezzük. Ilyenek például az e és a π .

1.7 Logaritmus

Ahogy már korábban leírtuk, az a^2 kifejezés azt jelenti, hogy $a \times a$, a^{-2} pedig $1/a^2$, valamint a^3 egyenlő $a \times a \times a$ -val, stb. Léteznek nem egész kitevős hatványok is.

$$y = a^x \quad (1.13)$$

Az x kitevőt az y szám a alapú logaritmusának nevezzük, és a következőképpen jelöljük:

$$x = \log_a(y) \quad (1.14)$$

Ha a pozitív, akkor csak pozitív számoknak létezik valós logaritmusa.

1.7.1 Közöséges logaritmus

Ha a logaritmus alapszáma 10, akkor a logaritmust *közöséges logaritmus*nak nevezzük:

Ha $10^x = y$, akkor x jelenti y közöséges logaritmusát, azaz $\log_{10}(y)$. Az alsó indexet 10-es alap esetén néha elhagyják, de ez félreértésekhez vezethet. Használatos még az $\lg(y)$ jelölés is.

x egész értékeire:

y	$x = \log_{10}(y)$	y	$x = \log_{10}(y)$
1	0	0,1	-1
10	1	0,01	-2
100	2	0,001	-3
1000	3	stb.	

Korábban már tárgyaltuk, hogy amikor azonos alapú hatvány formájában kifejezett számokat szorzunk, akkor a hatvány alapját a kitevők összegére emeljük. Ebből az következik, hogy két azonos alapú hatványkitevős szám szorzatának logaritmusa megegyezik a számok logaritmusának összegével:

$$\log(a \times b) = \log a + \log b \quad (1.15)$$

Hasonlóképpen, amikor két hatványkitevős számot osztunk egymással, akkor a kitevőket kivonjuk egymásból. Ennek megfelelően két azonos alapú hatványkitevős szám hányadosának logaritmusa megegyezik a számok logaritmusának különbségével:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad (1.16)$$

A fenti gondolatmenetet követve:

$$\log x^n = n \log x \quad (1.17)$$

Fontos, hogy a fenti egyenletek a logaritmus alapszámától függetlenül érvényesek.

Valaha hét vagy nyolc értékes jegyre megadott logaritmus táblákat használtak a mindennapi életben. A legtöbb elektronikus számológép a logaritmus értékét 10 vagy 11 értékes számjegyre pontossággal adja meg. Az elektronikus számológépek bevezetése előtt a logaritmus táblákat akkor használták, ha a számítás több értékes jegy pontosságot igényelt, mint amit egy logarléc képes szolgáltatni. Például ha két számot kívánunk összeszorozni, a két szám logaritmusát megkeressük a táblázatban, összeadjuk a logaritmusokat, majd az összeg antilogaritmusát ismét megkeressük a táblázatban.

1.7.2 Természetes logaritmus

A 10-es alapon kívül létezik még egy gyakran használt logaritmus. Ennek az alapja egy transcendentális irracionális szám, melyet e -nek nevezünk és 2,7182818...

$$\text{Ha } e^y = x \text{ akkor } y = \log_e(x) = \ln(x) \quad (1.18)$$

Az e alapú logaritmust természetes logaritmusnak is nevezzük. Az e definíciója:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818 \quad (1.19)$$

A „lim” jelölés azt jelenti, hogy egyre nagyobb és nagyobb n értékeket veszünk (később részletesen tárgyaljuk). Az $\ln(x)$ jelölést gyakrabban használjuk, mint a $\log_e(x)$ -et. Néha a $\log(y)$ is használatos a természetes logaritmus jelölésére a logaritmus alapját jelölő alsó index elhagyásával. Kémiai jellegű szövegekben gyakran használják a $\log(y)$ -t a szokványos (10-es alapú) logaritmus jelölésére, míg $\ln(y)$ -t a természetes logaritmusra. A 10-es alapú logaritmust néha $\lg(y)$ -ként is jelölik. Mivel a kémiában mind a szokványos, mind a természetes logaritmus elfordul, helyesebb a $\log_{10}(y)$ használata a szokványos logaritmus jelölésére és $\ln(y)$ a természetes logaritmusra.

Ha egy szám szokványos logaritmusát ismerjük, a szám természetes logaritmusát az alábbi módon számíthatjuk ki. Mivel

$$y = e^{\ln(y)} = 10^{\log_{10}(y)} = \left(e^{\ln(10)}\right)^{\log_{10}(y)} = e^{\ln(10)\log_{10}(y)} \quad (1.20)$$

ezért

$$\ln(y) = \ln(10)\log_{10}(y) = (2,302585\cdots)\log_{10}(y) \quad (1.21)$$

Könnyebben emlékezhetünk az (1.21) egyenletre, ha figyelembe vesszük, hogy e kisebb, mint 10, ezért bármely szám természetes logaritmusa nagyobb, mint szokványos logaritmusa.

1.7.3 Logaritmus azonosságok

<i>Hatványozás</i>	<i>Logaritmus</i>
$a^0 = 1$	$\log_a(1) = 0$
$a^{1/2} = \sqrt{a}$	$\log_a(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}$
$a^1 = a$	$\log_a(a) = 1$
$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$	$\log_a(y_1 y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2)$
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$
$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$	$\log_a\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log_a(y_1) - \log_a(y_2)$
$(a^x)^z = a^{xz}$	$\log_a(y^z) = z \log_a(y)$
$a^\infty = \infty$	$\log_a(\infty) = \infty$
$a^{-\infty} = 0$	$\log_a(0) = -\infty$

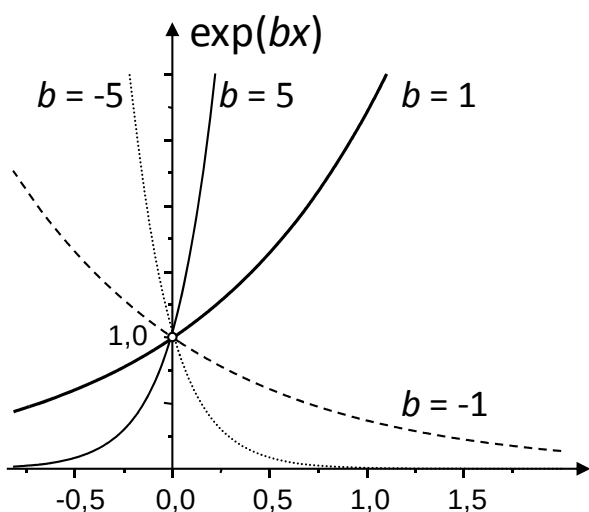
Számos logaritmusra vonatkozó azonosság létezik, amelyek a hatványozás azonosságaiából következnek. Ezek közül néhányat a 2. Táblázat mutat be. Ezek az azonosságok érvényesek a szokványos, a természetes, illetve tetszőleges alapú logaritmusra.

1.8 Az exponenciális

Az exponenciális azt jelenti, hogy e -t (a természetes logaritmus alapszáma, amely egyenlő 2,7182818284...) egy megfelelő hatványra emeljük és vagy a hatványozás szokásos jelölését, vagy az $\exp(\cdot)$ jelölést használjuk.

$$y = ae^{bx} \equiv a \exp(bx) \quad (1.22)$$

Az 1.1 ábra exponenciális függvények képét mutatja különböző b értékek esetén.



1.1 ábra. Exponenciális függvények képe.

Az ábra jól illusztrálja az e^{bx} függvény viselkedését. Ha $b > 0$, a függvény értéke megduplázódik, ha a független változó értékét egy b -től függő értékkel megnöveljük. Nagy b értékek esetén a függvény igen gyorsan növekszik. Hasonlóképpen, ha $b < 0$ a függvény értéke feleződik, ha a független változó egy megadott értékkel növekszik. Nagy negatív b értékek esetén a függvény gyorsan közelít nullához.

Az exponenciális függvény használatára a radioaktív bomlás törvény egy tipikus példa. Ha N_0 a $t = 0$ időpontban elbomlatlan atommagok számát jelenti, a tetszőleges t időpontban elbomlatlan atommagok száma a következőképpen számolható ki:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \quad (1.23)$$

ahol τ az ún. relaxációs idő vagy az izotóp élettartama. Jelentése az az időtartam, amely alatt a kezdetben elbomlatlan atommagok száma az e -ed részére ($1/e = 0,367879$) csökken. Azt az időt, ami alatt a kezdetben elbomlatlan atommagok száma a felére csökken, felezési időnek nevezzük és $T_{1/2}$ -ként jelöljük. A $T_{1/2}$ és τ közötti összefüggést az alábbi egyenletek írják le. Mivel

$$e^{-T_{1/2}/\tau} = \frac{1}{2} \quad (1.24)$$

ezért

$$\frac{T_{1/2}}{\tau} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) = 0,69314... \quad (1.25)$$

1.9 Mértékegységek, számítások

Egy fizikai mennyiség meghatározása lehetetlen lenne standard mértékegységek definiálása nélkül. Évszázadokon keresztül gátolta a tudomány és kereskedelem fejlődését a jól definiált mértékegységek hiánya. Ezt a problémát hidalta át a nemzetközileg

elfogadott mértékrendszer, az ú.n. Systéme International d'Unités bevezetése. Rövidítése: SI. Ez egy MKS rendszer, ami azt jelenti, hogy a hosszúságot méterben, a tömeget kilogrammban, az időt pedig másodpercben mérjük. Az alábbi táblázatban megadott hét alapegység adja a rendszer gerincét. Származtatott egységeket is használunk, amelyek az alapegységekből vezethetők le.

<i>Mennyiség</i>	<i>Az egység neve</i>	<i>Jele</i>
Hosszúság	méter	m
Tömeg	kilogramm	kg
Idő	másodperc	s
Elektromos áram	amper	A
Hőmérséklet	kelvin	K
Fényerősség	kandela	cd
Anyagmennyiség	mól	mol

Az SI egységek többszöröseit, mint pl. a milliméter and kilométer is használjuk a mindennapi életben. Ezeket a többszörösöket a standard prefixumoknak az egység jele elé történő illesztésével jelöljük.

<i>Többszörös</i>	<i>Prefixum</i>	<i>Rövidítés</i>	<i>Többszörös</i>	<i>Prefixum</i>	<i>Rövidítés</i>
10^{18}	exa-	E	10^{-1}	deci-	d
10^{15}	peta-	P	10^{-2}	centi-	c
10^{12}	tera-	T	10^{-3}	milli-	m
10^9	giga-	G	10^{-6}	mikro-	μ
10^6	mega-	M	10^{-9}	nano-	n
10^3	kilo-	k	10^{-12}	piko-	p
10^1	deka-	da	10^{-15}	femto-	f
1	-	-	10^{-18}	atto-	a

A többszörösök rövidítését úgy kapjuk meg, hogy a prefixum rövidítését az mértékegység rövidítése elé illesztjük, mint pl. km (kilométer) vagy fs (femtoszekundum). Figyeljük meg, hogy a tömeg egysége kilogramm, és a táblázat alapján olyan egységet is használhatnánk, mint pl. a megakilogramm. Kettős prefixumokat azonban nem használunk. A megakilogramm helyett gigagrammot használunk. A 10^{-1} and 10^{-2} prefixumok használata nem javasolt, bár a centiméter még bizonyára hosszú időn keresztül elfogadott lesz.

1.10 Számított mennyiségek értékes számjegyei

Amikor egy képletbe számértékeket behelyettesítve egy számértéket határozunk meg, az eredmény pontossága függ a behelyettesített számok pontosságától. Az eredmény értékes számjegyeinek száma függ a kiinduló értékek értékes számjegyeinek a számától. Az eredményt a megfelelő értékes számjegyre kell kerekíteni.

1.10.1 Szorzás és osztás

Számos hasznos ökölszabály létezik, amelynek segítségével a számítások végeredményének értékes számjegyeinek a száma meghatározható. Két vagy több tényező szorzása esetén az a szabály, hogy az eredmény értékes számjegyeinek a száma megegyezik a legkisebb értékes számjegy számmal jellemzett tényező értékes számjegyeinek számával. Ugyanez érvényes az osztásra is. Az alábbi példában egy téglatest térfogatát határozzuk meg, amelynek hosszúsága 6,58 m, szélessége 2,126 m, míg magassága 3,417 m.

$$V = (6,58)(2,126)(3,417) = 47,80068636 \text{ m}^3 = 47,8 \text{ m}^3 \quad (1.26)$$

Vegyük észre, hogy bár a kalkulátor 10 számjegyet ad meg, a térfogatot 47,8 m³-re kerekítettük, mert a legkisebb értékes számjeggyel jellemzett tényező három értékes számjegyet tartalmazott.

1.10.2 Összeadás és kivonás

Összeadás és kivonás esetén az a szabály, hogy csak az a számjegy lehet értékes számjegy, amely az összeadás vagy kivonás mindegyik tagjában értékes számjegy volt. Nem szabad csak szimplán megszámolni az egyes tagok értékes számjegyeit.

Ha két test együttes tömegét határozzuk meg, és az egyik tömege 0,613 g, míg a másiké 12,6284 g, akkor az eredmény: 0,613 g + 12,6284 g = 13,2414 g $\approx$ 13,241 g lesz. Az összegben a negyedik tizedes csak akkor lehetne értékes számjegy, ha mindegyik tagban értékes számjegy lett volna. Mivel az első szám csak három értékes számjegyet tartalmaz a tizedes vessző után, az eredményt három tizedesre kell kerekítenünk. Vegyük észre, hogy a kerekítés után is öt értékes számjegyük van, bár az egyik tag csak három értékes számjegyet tartalmazott.

Több lépésből álló számítás esetén nem ajánlatos kerekíteni minden lépés után. Ez az eljárás nagy kerekítési hibákhoz vezethet. Egy elfogadható módszer az, hogy legalább egy nem értékes számjegyet továbbviszünk a következő számításba, és a kerekítést a számítás végén tesszük meg. Ha elektronikus kalkulátort használunk, akkor kényelmes a kalkulátor által kijelzett összes számjegyet használni és a kerekítést csak a számolás végén megtenni.

1.11 Algebrai egyenletek megoldása

Ha egy egyenletet $f(x) = 0$ alakban adunk meg, ahol f egy függvényt jelent és x a változó, akkor az egyenlet megoldása azt jelenti, hogy megadjuk x azon értékeit, amelyek kielégítik az egyenletet. Ezek az értékek az egyenlet megoldásai vagy gyökei. Az algebrai egyenletek gyökeit megtalálhatjuk algebrai vagy numerikus módszerekkel. Ha egy egyenletben két

változó van, mint pl. $F(x, y) = 0$, akkor az egyenlet megoldható y -ra x függvényeként, vagy x -re y függvényeként. Ahhoz, hogy mindkét változó konstans értékét megkapjuk, egy másik egyenlet, mint pl. a $G(x, y) = 0$ szükséges, és a két egyenletet egyidejűleg kell megoldanunk.

Általánosságban ha n változónk van, akkor n független és konzisztens egyenletre van szükség. Az algebrai egyenlet megoldása a független változó egy számértéke, vagy számértékeinek halmaza. Egy ilyen érték egyenletbe történő behelyettesítésének numerikusan helyes egyenletet, mint pl. $0 = 0$ kell eredményeznie. Algebrai módszerekkel negyedfokú polinom egyenletek még megoldhatóak, de néhány ötöd- vagy magasabb fokú egyenlet esetén ez nem lehetséges. Ha egy algebrai egyenletben egy változó van, általánosságban a változó egy értéke vagy az értékek egy halmaza elégíti ki az egyenletet.

Azt mondjuk, hogy ezek kielégítik az egyenletet, és az egyenlet megoldásainak vagy gyökeinek nevezzük őket. A változó azon értékeiről, amelyek nem eredményeznek helyes egyenletet, azt állítjuk, hogy nem elégítik ki az egyenletet.

1.11.1 Polinom egyenletek

Az x változó polinom egyenlete általános formában az alábbi:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \quad (1.27)$$

ahol n , az egyenletben szereplő legmagasabb hatvány egy pozitív egész szám. Ez az egész szám adja meg az egyenlet *fokát*. Ha $n = 1$ lineáris egyenletről, ha $n = 2$ másodfokú egyenletről beszélünk. $n = 3$ esetén az egyenlet harmadfokú stb.

Általában egy n -ed fokú polinom egyenletnek n gyöke van, bár két vagy több gyök is akár lehet azonos. Néha a gyökök képzetesek vagy komplexek. Ha egy egyenletnek van komplex gyöke, az mindig párosával fordul elő. A fizikai vagy kémiai problémákkal kapcsolatos egyenleteknek egy gyöke bír fizikai- kémiai jelentéssel, a többit figyelmen kívül kell hagyni. Például egy koncentráció nem lehet negatív, ezért ha a másodfokú egyenlet gyöke egy pozitív és egy negatív szám, a negatív gyöknek nincs értelme. A komplex gyököknek szintén nincs fizikai jelentése.

1.11.2 Lineáris egyenletek

Ha egy egyenlet az alábbi alakban adható meg

$$a_0 + a_1x = 0 \quad (1.28)$$

akkor az egyenletnek egyetlen gyöke van

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \quad (1.29)$$

1.11.3 Másodfokú egyenletek

A másodfokú egyenlet standard alakja

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.30)$$

Néhány másodfokú egyenlet törzstényezőkre bontható, azaz az alábbi formára hozható

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (1.31)$$

ahol x_1 és x_2 konstans értékek. Itt x_1 és x_2 az egyenlet gyökei. Ha a másodfokú egyenlet nem bontható törzstényezőkre, akkor a másodfokú egyenlet megoldó képletét használjuk.

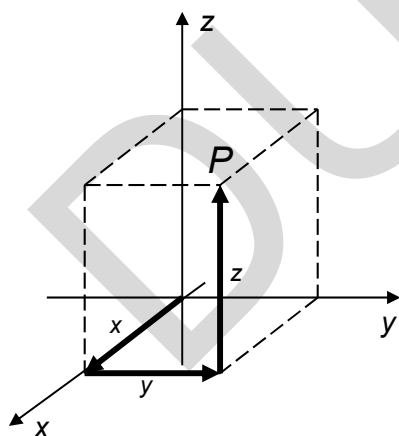
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.32)$$

Ez az egyenlet két gyököt eredményez: az egyiket akkor, ha gyökös kifejezés előtt pozitív előjelet használunk, a másikat pedig akkor, ha negatív. A $(b^2 - 4ac)$ kifejezést *diszkrimináns*nak hívjuk. Három lehetőség van: (1) ha a diszkrimináns pozitív, akkor a gyökök valós számok és nem egyformák; (2) ha a diszkrimináns nulla, akkor a két gyök valós és egyenlő; ha a diszkrimináns negatív, akkor a gyökök komplexek lesznek és különböznek egymástól. Mindegyik képzetes gyök a másik komplex konjugáltja lesz.

2 Vektorok, trigonometria, trigonometrikus függvények és mátrixok

2.1 Descartes-féle koordinátarendszer, vektorok, műveletek vektorokkal, vektor reprezentációk

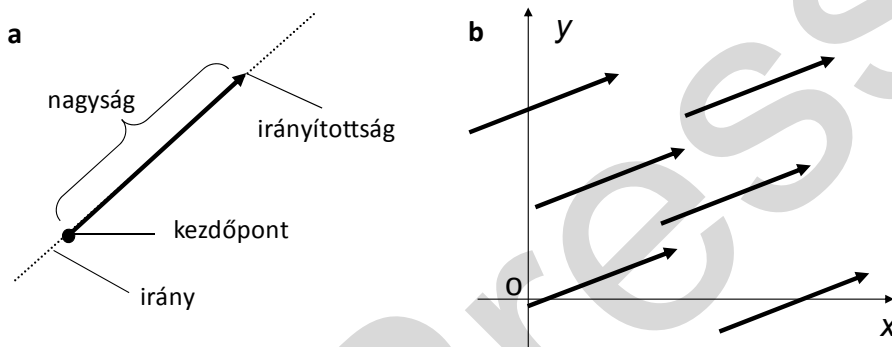
A mindennapi életben a helyzetünket magunkhoz viszonyítva szoktuk megadni (később ezt a viszonyítási pontot origónak fogjuk nevezni), és ehhez a ponthoz képest írjuk le az egyes körülöttünk lévő dolgok távolságát, orientációját, pozícióját (előttem, utánam, mögöttem, alattam, felettem...). A matematikai leírások során is hasonlóan járunk el: először meghatározzuk a viszonyítási pontot, azaz az origót, és aztán azt a viszonyítási rendszert, a koordinátarendszert, amiben a pozíciókat jellemezni fogjuk. A koordináta rendszert gyakran egymással derékszöget bezáró tengelyekkel adjuk meg, ebben az esetben Descartes-féle koordinátarendszerről beszélünk (2.1 ábra). A derékszögű koordinátarendszer tengelyeit x , y , és z tengelyeknek nevezzük, és ebben a sorrendben értelmezzük Alkalmazásukkor az úgynevezett jobb kéz szabályt használjuk: ekkor a jobb kezünkön a hüvelyk ujj felel meg az x , a mutató ujj az y , és a középső ujj a z tengelynek. Egy tetszőleges térbeli pontnak az adott tengelyre vonatkoztatott koordinátáját a tengelyre eső merőleges vetülete adja meg. Például ha azt mondjuk, hogy a P pont helyzetét a $(3,1,2)$ koordináta hármas adja meg, akkor az x tengelyen, 3, az y tengelyen 1, és a z tengelyen 2 egységet haladva ábrázolhatjuk a térben a P pontot.



2.1 ábra. A P pont ábrázolása a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben.

A koordinátarendszerek alkalmazásával egyes mennyiségek speciális definiálása és értelmezése válik lehetővé. A tudományban a mennyiségeknek alapvetően két típusát különböztethetjük meg. Az egyik csoportba soroljuk azokat a mennyiségeket, amelyeket csupán a nagyságuk megadásával jellemezhetünk. Ezek a skalár mennyiségek (pl. tömeg, koncentráció, kémiai potenciál, sebességi állandó, energia stb.). A másik csoportba

tartoznak azok a mennyiségek, amelyek esetében a nagyságuk mellett meg kell adni az irányukat, és az irányítottságukat is a pontos leírásukhoz. Ezeket vektor mennyiségeknek nevezzük (sebesség, erő, forgatónyomaték, lendület stb.). A vektorokat grafikusán is megjeleníthetjük. Ekkor az egyes vektorokat nyilakkal reprezentáljuk. A vektorok ábrázolásakor meg kell adni a kezdőpontjukat, az irányukat és irányítottságukat, valamint a hosszukat is (2.2a ábra). A vektorokat általában kis betűkkel jelöljük, melyek fölé nyilat rajzolunk (pl. $\vec{a}$, $\vec{b}$). A vektorokat reprezentáló nyílak hossza arányos a jellemzett mennyiség nagyságával. Amennyiben két vagy több vektorra igaz, hogy a hosszuk, az irányuk és az irányítottságuk megegyezik, akkor függetlenül attól, hogy esetleg különböző kezdőpontból indulnak, a vektorokat azonosnak tekintjük (2.2b ábra).



2.2 ábra. (a) egy vektor és jellemzői és (b) azonos vektorok a koordináta-rendszerben.

A vektorokkal, a számok esetében megszokottakhoz hasonlóan, különböző műveleteket is végezhetünk:

2.1.1 Vektorok összeadása

két vagy több vektort csak akkor tudunk összeadni, ha azoknak a mértékegysége megegyezik. A vektorokat összeadhatjuk grafikusán is. Ehhez az ún. *háromszögelés* módszerét alkalmazhatjuk: először rajzoljuk meg az első vektort ($\vec{a}$) a grafikonon. Ezt követően a második vektort ($\vec{b}$) rajzoljuk meg úgy, hogy a második vektor kezdőpontja az első vektor végpontjával egybe essen. Az összeadásban a tagok felcserélhetők, azaz a művelet kommutatív. Az eredményként kapott összegvektor tehát (2.3a ábra):

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (2.1)$$

2.1.2 Vektorok inverze vagy ellentettje

Egy vektor ellentett vektorának nevezzük azt a vektort, amit az eredeti vektorral összeadva nullvektort (tetszőleges irányú és hossza zérus, jelölése: $\vec{0}$) kapunk. A két vektor nagysága és iránya megegyezik, de az irányítottságuk ellentétes.

2.1.3 Vektorok kivonása

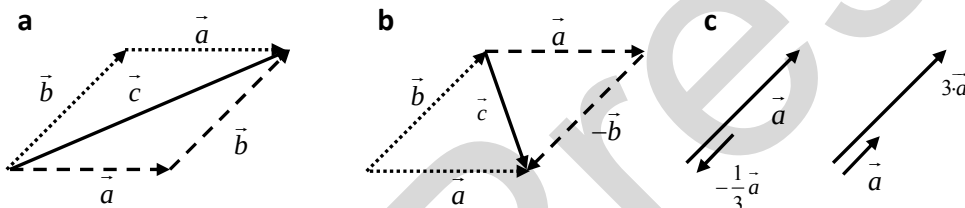
Két vektor különbségét az ellentett vektor alkalmazásával, a vektorok összeadásának szabályai szerint értelmezzük (2.3b ábra):

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (2.2)$$

Ebben az esetben figyelemmel kell lennünk arra, hogy a kivonandó és a kisebbítendő nem felcserélhető a művelet során.

2.1.4 Vektorok szorzása skalárral

A vektorok skalárral való szorzása vagy osztása vektort eredményez. Amennyiben a skalár negatív szám, úgy a vektor irányítottága ellentétessé válik. Ha a skalár egy 1-nél kisebb szám, akkor a vektor hossza rövidebb lesz, ha 1-nél nagyobb szám, akkor hosszabb. Az 1-el való szorzás nem változtatja meg a szorzandó vektort, a 0-val való szorzás eredménye mindig a nullvektor lesz (2.3c ábra).



2.3 ábra. Két vektor (a) összeadása és (b) kivonása, (c) vektor szorzása skalárral.

2.1.5 Vektorok skaláris szorzata

Fontos megemlíteni, hogy ez a művelet teljesen eltér a vektorok skalárral való szorzásától. Vektorok skaláris szorzata esetén mind a két szorzótényező vektor, és a szorzat egy skalár lesz. Két vektor skaláris szorzatát $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ a következőképpen definiáljuk:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta \quad (2.3)$$

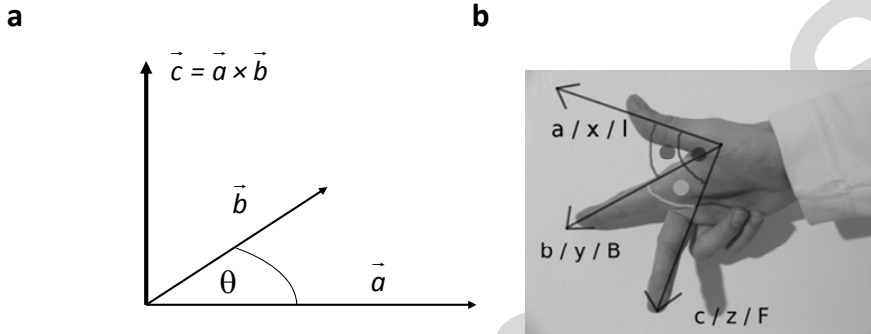
ahol θ a két vektor által bezárt szög (2.4 ábra), míg $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ a vektorok nagyságát vagy hosszát jelöli.

2.1.6 Vektorok vektoriális szorzata

A vektorok ezen módon való szorzása alapvetően eltér a skaláris szorzásuktól abban, hogy a szorzás eredménye egy vektor, és nem skalár. A vektorok skaláris szorzásától megkülönböztetendő a vektoriális szorzás jelölése is más: $\vec{a} \times \vec{b}$. Vektoriális szorzás esetében az eredményvektor, azaz a szorzat minden esetben merőleges a két szorzandó vektor mindegyikére, azaz a két szorzandó által kifeszített síkra. A szorzat nagyságát, azaz az eredmény vektor hosszát a következő egyenlettel számolhatjuk ki:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \quad (2.4)$$

ahol θ az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által bezárt szög (2.4a ábra), míg $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ értelmezése ugyanaz, mint a skaláris szorzás esetében volt. A vektorok jobb sodrású rendszert alkotnak, azaz irányítottságukat a fentebb tárgyalt jobb kéz szabály szerint dönthetjük el. Ennek megfelelően az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok ebben a sorrendben ($\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$) megfelelnek a jobb kéz hüvelyk, mutató és középső ujjainak (2.4 ábra).



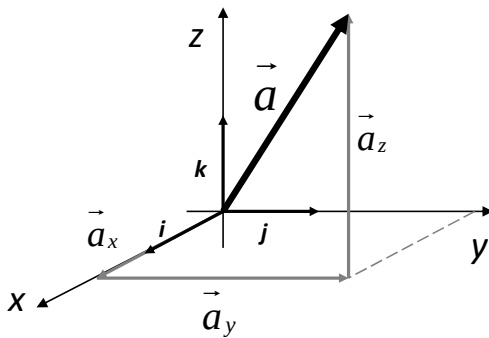
2.4 ábra. (a) két vektor vektoriális szorzása és (b) a jobb kéz szabály szerinti (jobb sodrású) koordináta-rendszer.

Esetenként a grafikus ábrázolás a vektorok kezelésének és a vektorokkal való számolásnak nem a legkényelmesebb módja. A három dimenziós Descartes-féle koordináta-rendszerben minden vektort megadhatunk egy számhármassal (két dimenzió esetében számpárok). Ebben a megfeleltetésben a vektorok kezdőpontját minden esetben az origóban helyezük el, és a számhármassok a végpont koordinátáit adják meg, értelemszerűen az x, y és z koordináták sorrendjében. Egy vektor például megadható az (a_x, a_y, a_z) számhármassal segítségével, ebben az esetben a jelölés: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Egy másik megjelenítés válik lehetségessé az egyes koordinátatengelyekhez rendelt normálvektorok, vagy más néven egységvektorok segítségével is. Ez a három vektor mindegyike definíció szerint azonos irányú a vonatkozó tengellyel, az origóból indulnak, és irányítottságuk pedig a tengelyek pozitív tartománya felé mutat. Ennek megfelelően az x, y és z tengelyhez rendeljük az $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ és $\vec{k} = (0, 0, 1)$ normál vektorokat, ebben a sorrendben (2.5 ábra). Ebben a rendszerben bármilyen vektor megadható a három egységvektor lineáris kombinációjaként, azaz a következő alakban:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (2.5)$$

Az $\vec{a}_x = a_x \vec{i}$, $\vec{a}_y = a_y \vec{j}$ és $\vec{a}_z = a_z \vec{k}$ vektorokat az $\vec{a}$ vektor komponenseinek nevezzük. A három dimenziós térben tehát ezen három komponens összege adja meg a vektorokat (2.5 ábra).



2.5 ábra. Az $\vec{a}$ vektor megjelenítése a Descartes-féle koordinátarendszerben.

A vektoroknak ezt a reprezentációját ismerve a értelmezhetjük a fentiekben tárgyalt műveleteket is.

(1) Vektorok összeadása: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$,

vagy egyszerűbben $\vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

(2) Vektorok kivonása: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$

vagy egyszerűbben $\vec{c} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$

(3) Vektorok skalárral való szorzása: $\vec{c} = k \cdot \vec{a} = k \cdot a_x \vec{i} + k \cdot a_y \vec{j} + k \cdot a_z \vec{k}$

vagy $\vec{c} = (ka_x, ka_y, ka_z)$

(4) Vektorok skalár szorzata: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

és következésképpen, a vektorok *nagysága*: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

A fentiek értelmében minden vektorból származtatható egy egységnyi hosszúságú

vektor, azaz normál vektor is: $\vec{a}^* = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

(5) Vektorok vektoriális szorzata:

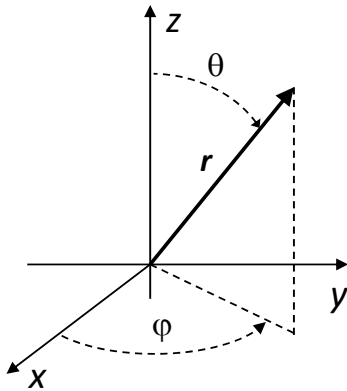
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Mindezeket túl tetszőleges két vektor (pl. $\vec{a}$ és $\vec{b}$) által bezárt szög kiszámolható a következő összefüggésből:

$$\cos \theta = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Vannak olyan esetek a tudományos alkalmazásokban, amikor nem a Descartes-féle koordinátarendszerben való ábrázolás a praktikus. Ilyen esetekben a viszonyítási rendszerünket másképpen definiáljuk, és a vektorokat más geometria összefüggései alapján adjuk meg. Az egyik ilyen lehetőségünk a gömbi koordináta rendszerben való ábrázolás (2.6 ábra). Ekkor az origó kezdőpontú vektorokat a hosszukkal ($|\vec{r}| = r$), és két szög értékkel adjuk meg. Az egyik szög (példánkban a θ) a vektornak a z tengellyel bezárt

szögét adja meg, míg a másik szög érték (φ) az x tengelynek a vektor az x - y síkra eső merőleges vetületének a szögét jelenti. Figyeljük meg, hogy a vektorok megadása ebben a koordináta-rendszerben is egyértelmű (ahogyan egyértelmű volt a Descartes-féle koordináta-rendszerben is).



2.6 ábra. Egy vektor megjelenítése háromdimenziós gömbi koordináta-rendszerben.

A gömbi koordináta-rendszerben meghatározott koordináták (r, θ, φ) egyértelműen megadhatók a Descartes-féle koordináta-rendszerben meghatározott koordináta értékek (x, y, z) segítségével:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.6)$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} \quad (2.7)$$

$$\varphi = \begin{cases} \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{ha } y \geq 0 \\ 360^\circ - \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{ha } y < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

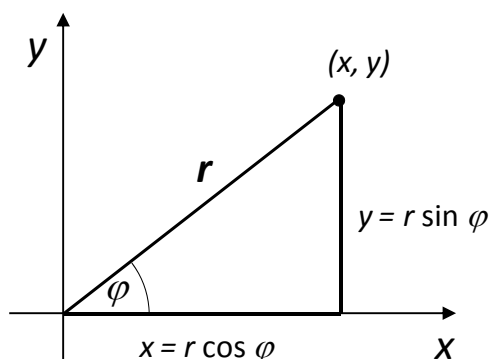
A transzformáció a fordított irányban is megvalósítható, azaz a gömbi koordinátákból meg lehet határozni a Descartes-féle rendszerben érvényes koordinátákat:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (2.9)$$

Ebben az esetben fontos megjegyezni, hogy $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ és $r > 0$.

Amennyiben a θ szög értéke éppen 90° a vektornak vagy pontnak a z koordinátája nulla. Ebben az esetben a vektor leírható csupán az r és φ értékek segítségével (2.7 ábra). Ezt az ábrázolás polár koordináta-rendszernek is nevezzük. Alkalmazása előtérbe kerül például a forgó mozgások leírása során. A polár koordináta-rendszerben a koordináták számolása a Descartes féle koordinátákból a következőképpen történik:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (2.10)$$



2.7 ábra. A polár koordináta-rendszer.

A fentiekben a vektorok vagy pontok ábrázolásának csak néhány, gyakran alkalmazott lehetőségét tárgyaltuk. Természetesen a kémiai, biológiai vagy egyéb rendszerek geometria sajátosságától, specialitásától függően sok további koordináta-rendszer is létezik, de ezeket itt nem tárgyaljuk.

2.2 Trigonometria, trigonometriai függvények és azonosságok

A trigonometriai függvényeket a legkézenfekvőbb módon egy derékszögű háromszög segítségével határozhatjuk meg. A derékszögű háromszögekben a derékszöggel szemközi, leghosszabb oldalt átfogónak, a másik két oldalt befogónak nevezzük. Ezen három oldal aránya definiálja a szinuszt, koszinust, tangens és kotangens függvényeket (2.8 ábra).

- (1) Egy szög szinusza ($\sin$) a szöggel szemközi befogónak és az átfogónak a hányadosa:

$$\sin \alpha = \frac{\text{szöggel szemközi befogó}}{\text{átfogó}} \quad (2.11)$$

- (2) Egy szög koszinusza ($\cos$) a szög melletti befogónak és az átfogónak a hányadosa:

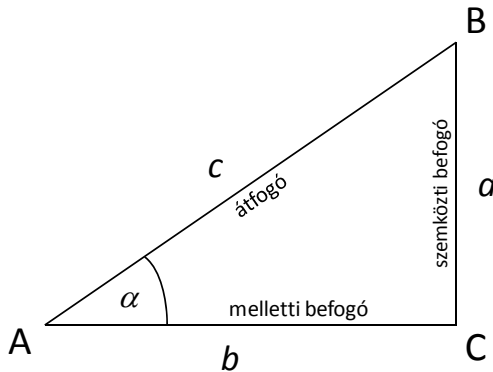
$$\cos \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} \quad (2.12)$$

- (3) Egy szög tangense (tg) a szöggel szemközi befogónak és a szög melletti befogónak a hányadosa:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{szöggel szemközi befogó}}{\text{szög melletti befogó}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2.13)$$

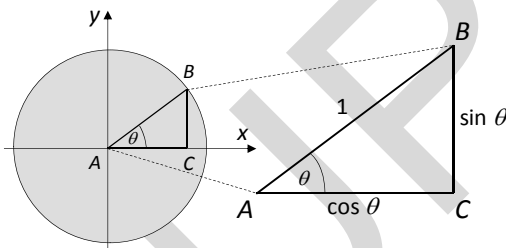
- (4) Egy szög kotangense (ctg) a szög melletti befogónak és a szöggel szemközi befogónak a hányadosa:

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközi befogó}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \quad (2.14)$$



2.8 ábra. Trigonometriai függvények megadása derékszögű háromszög segítségével.

Vegyük észre, hogy a trigonometriai függvényeket a derékszögű háromszög fenti alkalmazásával csak a 90° -nál kisebb szögekre értelmezhetjük. A matematika ugyanakkor ismer ezekre a függvényekre olyan általánosabb meghatározást is, amelyet a koordináta geometriában megismert összefüggésekre alapozunk. Ezen értelmezéshez először rajzoljunk egy Descartes-féle koordináta-rendszerben egy egységnyi sugarú kört (2.9 ábra). A trigonometria függvények fenti értelmezéséből következően egy egységvektornak (példánkban az A-ból B-be mutató vektornak) a koordinátái számolhatók, mint $x = \cos \theta$ és $y = \sin \theta$.



2.9 ábra. Trigonometriai függvények meghatározása egység sugarú körben.

A trigonometriai ezen általánosabb reprezentációja lehetővé teszi a 90° -nál nagyobb szögek esetében is a függvények értelmezését. Az egység sugarú kör segítségével a teljes, 0 és 360° közötti szögtartományban belátható a következő összefüggések létezése:

- (1) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}(\alpha)$,
- (2) $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + 90^\circ)$, $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - 90^\circ)$
- (3) $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 360^\circ)$, $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 360^\circ)$, $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ)$

Az első sor azt mutatja, hogy a szinusz, tangens és kotangens függvény páratlan, míg a koszinusz függvény páros függvény. A második sor szerint a szinusz függvény 90° -kal balra való eltolásával a koszinusz függvényt kapjuk, és fordítva, a koszinusz függvény jobbra 90° -kal történő eltolásával a szinusz függvényhez jutunk. Az összefüggések harmadik sora az egyes trigonometria függvények periodicitását jellemzi.

A következő összefüggések a trigonometriai függvények fontos és gyakran alkalmazott azonosságait adják meg:

(1) egység sugarú kör egyenlete:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (2.15)$$

(2) szögek összegeinek függvényei:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (2.16)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (2.17)$$

(3) szögek szorzatainak függvényei:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.18)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (2.19)$$

(4) félszögek függvényei:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (2.20)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (2.21)$$

(5) függvények szorzatai:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \quad (2.22)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) \quad (2.23)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \quad (2.24)$$

(6) függvények összegeire és különbségeire vonatkozó azonosságok:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (2.25)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (2.26)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (2.27)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (2.28)$$

A matematikában és a fizikában a szögek szokásos mértékegysége a *radián*. 1 radián annak a szögnek a szöge, amelyet az egységnyi sugarú körbe rajzolva az általa meghatározott körcikkhez tartozó körív hossza 1 egység (2.10 ábra). A hétköznapi életben jobban megszokott fok értékekkel számolva $1 \text{ radián} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,295779\dots^\circ$. Figyeljük meg, hogy mivel az egységnyi sugarú kör kerülete 2π (hiszen $K = 2r\pi$, ahol r a sugár az

adott esetben 1), a teljes kör szöge értelemszerűen ugyancsak 2π lesz. Másfelől, egy tetszőleges szögnek a radiánban mért értéke az egységnyi sugarú körben számolható az általa kijelölt ívhossznak és a sugárnak a hányadosaként:

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (2.29)$$

ahol θ a keresett szög, s a vonatkozó ívhossz és r a sugár. A radián jele a rad, vagy esetenként a felső indexben a c jelölés. Valójában pedig, mivel a radián definíció szerint két azonos mértékegységű mennyiség (az ívhossz és a sugár) hányadosaként áll elő, leggyakrabban egyszerűen dimenzió nélküli mennyiségként, a mértékegység jelölésének elhagyásával tüntetjük fel (a fok esetében a $^\circ$ jelölés használata minden esetben szükséges). A fok és a radián mértékegységben megadott szögek mérőszámai egymásba egyszerűen átszámolhatóak mindezek alapján, például 360° megfelel 2π radiánnak, vagy 180° megfelel π radiánnak.

Az alábbi táblázatban a különböző trigonometrikus függvények értékét tüntettük fel néhány nevezetes szög esetében. A szögek értékeit mind fokban, mind radiánban feltüntettük.

$\theta(^{\circ})$	$\theta(\text{radián, -})$	$\sin x$	$\cos x$	$\text{tg } x$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	n.é.
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
180	π	0	-1	0
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	n.é.
360	2π	0	1	0

2.1 táblázat $\sin x$, $\cos x$ és $\text{tg } x$ értékek különböző, nevezetes szögek esetében (n.é.: nem értelmezhető).

2.3 Mátrixok és alkalmazásai

Mátrixnak nevezzük a számoknak egy speciálisan elrendezett halmazát. Példákat alább mutatunk be:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Az első példa egy 4×3 dimenziójú, a második egy általános, $m \times n$ (m -szer- n , sor-szor-oszlop) mátrixot mutat be.

A mátrixok elemeit alsó a mátrixban elfoglalt helyük szerint jelölhetjük: a_{ij} az az elem, amely i . sor és j . oszlop metszetében helyezkedik el. A fenti első példában az $a_{3,2}$ elem értéke 9, míg az $a_{2,3}$ elem értéke 7. A mátrixokat a szövegben nyomtatott, félkövér nagybetűkkel jelöljük (**A**). A leggyakrabban előforduló mátrixok a következők:

- (1) *Négyzetes mátrix:* Ha az **A** mátrixban a sorok és oszlopok száma megegyezik, akkor az **A** mátrix egy négyzetes mátrix. A négyzetes mátrixokban a a_{ii} elemeket ($i = 1, 2, 3, \dots$) a mátrix átlós vagy diagonális elemeinek nevezzük.
- (2) *Átlós vagy diagonális mátrix:* Azokat a mátrixokat, amelyekben a nem diagonális elemek mindegyike nulla, átlós vagy diagonális mátrixoknak nevezzük. A diagonális mátrixokat elég a diagonális elemeikkel megadnunk.
- (3) *Sor mátrix:* Az egyetlen sorból álló mátrixokat sor mátrixoknak nevezzük.
- (4) *Oszlop mátrix:* Az egyetlen oszlopból álló mátrixokat oszlop mátrixoknak nevezzük.
- (5) *Azonos típusú mátrixok:* Az **A** és **B** azonos típusúak akkor és csak akkor, ha az **A** mátrixnak annyi oszlopa és sora van mint a **B** mátrixnak.
- (6) *A nulla vagy 0 mátrix:* Ha egy mátrix minden eleme nulla, a mátrixot nulla vagy nullmátrixnak nevezzük. Ebben az esetben a jelölése: **0**.
- (7) *Egység mátrix:* Az egység mátrix egy olyan diagonális mátrix, amelynek minden diagonális eleme 1. Jelölése **I**.

Mint sok más esetben a mátrixok között is értelmezhetünk műveleteket. Ezek közül a következők a legfontosabbak:

2.3.1 Két mátrix összeadása

Két azonos típusú (pl. $m \times n$) mátrix összege is egy azonos típusú mátrix. Az összegmátrix elemeit az összeadandó mátrixok elemeinek segítségével elemenként számolhatjuk ki. Ha két összeadandó mátrix **A** és **B**, akkor az eredmény mátrix elemet a következőképpen számolhatjuk ki:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij} \text{ ahol } 1 \leq i \leq m \text{ és } 1 \leq j \leq n \quad (2.31)$$

Példa

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Mátrix szorzása skalárral

Az $\mathbf{A}$ mátrix skalárral (c) való megszorozása azt jelenti, hogy a mátrix minden elemét szorozzuk c -vel:

$$(c\mathbf{A})_{ij} = c \cdot \mathbf{A}_{ij} \quad (2.32)$$

Példa

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 0 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

2.3.3 Transzponált mátrix

Egy $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja egy $n \times m$ mátrix lesz. A transzponált mátrix jelölése: $\mathbf{A}^T$ vagy $\mathbf{A}^{\text{tr}}$. A transzponálás során a sorokból oszlopok, az oszlopokból sorok lesznek a következők szerint:

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{j,i} \quad (2.33)$$

Példa

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

2.3.4 Mátrixok szorzása

Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix akkor szorozható össze, ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak annyi oszlopa van, ahány sora a $\mathbf{B}$ mátrixnak. Ha $\mathbf{A}$ egy $m \times n$ mátrix, és $\mathbf{B}$ egy $n \times p$ mátrix, akkor az összeszorozásuk után előálló mátrix, $\mathbf{AB}$, egy $m \times p$ mátrix lesz. Ezen szorzat mátrix elemeit úgy állíthatjuk elő, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix adott sorának elemeit a $\mathbf{B}$ mátrix vonatkozó oszlopának elemeivel szorozzuk meg:

$$[A \cdot B]_{i,j} = A_{i,1} \cdot B_{1,j} + A_{i,2} \cdot B_{2,j} + \dots + A_{i,n} \cdot B_{n,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} \cdot B_{k,j} \quad (2.34)$$

Ez a művelet a mátrixok között általános esetben nem kommutatív, azaz $A \cdot B \neq B \cdot A$. Ugyanakkor az egység mátrix esetében fennáll a kommutatív tulajdonság, és ha bármilyen M mátrixok szorzunk az egység mátrix-szal (I), akkor az eredeti M mátrixot kapjuk eredményül, azaz $M \cdot I = I \cdot M = M$.

Példa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3.5 Inverz mátrix

A B négyzetes mátrix az A -nak inverze, ha:

$$A \times B = B \times A = I \quad (2.35)$$

ahol I az egység mátrix. Az A mátrix inverzének a jelölése: A^{-1} .

A fejezet következő szakaszában a mátrixok alkalmazásának lehetőségeivel ismerkedünk meg néhány példán keresztül.

2.3.6 Lineáris egyenletrendszer megoldása mátrixokkal

Tekintsük a egyenletet:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d \quad (2.36)$$

ahol a, b, c, d ismert együtthatók (állandók), míg x, y, z ismeretlen változók. Ebben az esetben a fenti egyenlet egy lineáris egyenlet. Az ilyen lineáris egyenletek sokaságát lineáris egyenletrendszernek nevezzük. Keressük meg a következő lineáris egyenletrendszer megoldásait:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 & (1) \\ x - 2y + 2z &= 4 & (2) \\ x + 2y - z &= 2 & (3) \end{aligned} \quad (2.37)$$

A megoldásokat úgy találhatjuk meg, ha elimináljuk az ismeretlen változók egy részét, azaz csökkentjük az ismeretlen változók számát. Ehhez az egyenleteket egymásból kivonjuk, vagy összeadjuk őket. Először vonjuk ki az első egyenletet az utolsóból:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 & (1) \\ x - 2y + 2z &= 4 & (2) \\ y - 2z &= 2 & (3) \end{aligned} \quad (2.38)$$

A következő lépésben vonjuk ki az első egyenletet a másodikból:

$$\begin{aligned}
 x + y + z &= 0 & (1) \\
 -3y + z &= 4 & (2) \\
 y - 2z &= 2 & (3)
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

Tartsuk meg az első és a második egyenletet, és adjuk hozzá a másodikat a harmadikhoz, miután megszoroztuk 3-al:

$$\begin{aligned}
 x + y + z &= 0 & (1) \\
 -3y + z &= 4 & (2) \\
 -5z &= 10 & (3)
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

A harmadik egyenletből: $z = -2$. Ennek ismeretében $y = -2$ a második egyenlet szerint, és az első egyenlet felhasználásával $x = 4$.

A fenti elgondolás mellett van más lehetőségünk is a megoldások megkeresésére. A mátrixok szorzásáról tanultaknak ismeretében egy lineáris egyenletrendszer átalakítható egy mátrix egyenletté:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \text{ vagy } \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \tag{2.41}$$

Ebben az esetben az ismeretlen változókat az $x_1 \dots x_n$ elemek jelölik. Az $a_{11} \dots a_{nn}$ és $b_1 \dots b_n$ elemek felelnek meg az ismert együtthatóknak. A mátrixok összeszorozása után a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned}
 a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
 \vdots & \\
 a_{n1} \cdot x_1 + \dots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

Most határozzuk meg azt a mátrix egyenletet, ami a fenti példánkban ismertetett lineáris egyenletrendszernek felel meg:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

A Gauss féle eliminálási eljárás alapján hozzunk létre egy kibővített mátrixot:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right] \tag{2.44}$$

A folyamatban a következő lépéseket fogjuk tenni:

- (1) Hozzuk létre a kibővített mátrixot (ezt a lépést fentebb már megtettük).
- (2) Alkalmazzuk az alapvető műveleteket (összeadás, kivonás, szorzás) és alakítsuk a kibővített mátrixot egy háromszög mátrix-szá. A háromszög mátrixban az átló alatti elemek nullák.

- (3) Hozzuk létre azt a lineáris egyenletrendszert, amelynek a háromszög mátrix-a a vonatkozó kibővített mátrix.
- (4) Oldjuk meg az új egyenletrendszert. Esetenként előfordulhat, hogy egyes ismeretlen változókat parametrizálnunk kell, majd a kapott értékeket vissza kell helyettesítenünk.

Ekkor az első kivonva az utolsóból:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right] \quad (2.45)$$

Ezt követően vonjuk ki az első a másodikból:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right] \quad (2.46)$$

Majd adjuk hozzá a másodikat a harmadikhoz, miután a harmadikat megszoroztuk 3-al:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{array} \right] \quad (2.47)$$

Végezetül megkapjuk a háromszög mátrixot, és felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -3y + z &= 4 \\ -5z &= 10 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai ugyanazok lesznek, mint a fentiekben a hagyományos módszerrel kapott értékek ($z = -2, y = -2$ és $x = 4$).

Ugyanakkor, a lineáris egyenletrendszer mátrix egyenletét felírhatjuk úgy is, hogy alkalmazzuk a vonatkozó inverz mátrixot:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b} \Rightarrow \mathbf{I} \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b} \quad (2.49)$$

Ehhez csupán az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét kell meghatároznunk. Itt mi ugyan alkalmazzuk a módszert, de a részletek megismerése érdekében további ismereteket is szerezhetsz az olvasó lineáris algebra szakkönyvekben.

A kibővített mátrix alkalmazásán alapuló módszer a Gauss-Jordan vagy Gauss féle eliminációt használja fel arra, hogy a $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrixot transzformálja az $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$ mátrixra. Egy 2×2 mátrix esetében például:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.50)$$

És az inverz mátrix a következő lesz:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2.\text{ sor} - 3 \times 1.\text{ sor}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2.\text{ sor} \times -1/2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{1.\text{ sor} - 2 \times 2.\text{ sor}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{array} \right] \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

2.3.6 Két vektor skaláris szorzása

Fejezetünk egy korábbi szakaszában megismerkedtünk a vektorok skaláris szorzásával. Alternatív lehetőség két mátrix skaláris szorzására adódik speciális mátrixok segítségével is. Ebben az esetben egy sor és egy oszlop mátrix alkalmazása szükséges. Legyen $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ két vektor a Descartes féle koordinátarendszerben. Ezen két vektor skalár szorzata a következőképpen számolható:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y, a_z)_{1 \times 3} \cdot (b_x, b_y, b_z)_{3 \times 1}^T = (a_x, a_y, a_z)_{1 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}_{3 \times 1} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \quad (2.52)$$

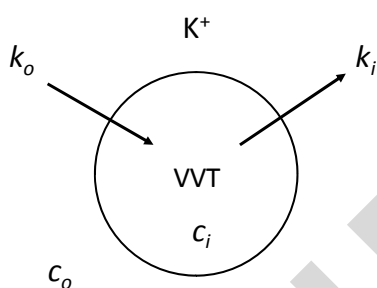
3 Halmazok, függvények, függvények megadási módja

3.1 Két biológiai példa

3.1.1 Egy differenciálegyenletre vezető probléma. Aktív transzport

A vörösvértestek (VVT) azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy környezetükből K^+ ionokat képesek felvenni, szemben egy koncentrációgradienssel is. Ez utóbbi anyagáramlást *aktív transzportnak* nevezik, amely valamilyen kémiai hajtóerőt tételez fel. Az aktív transzportot pl. K^{42} radioaktív izotópos mérés segítségével lehet meghatározni.

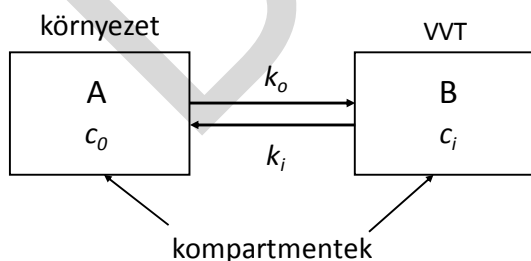
Környezet



3.1 ábra. Aktív transzport eritrocitában.

c_o és c_i jelentik a külső és belső K^+ koncentrációt, k_i és k_o pedig a sebességi állandókat.

Kompartment analízis, lineáris közelítés. Az élő szervezetben egy anyag több jól megkülönböztethető fázistérben, illetve különböző formában jelenhet meg; ezek között az áramlás sebessége az egyes terekben jelenlévő anyag mennyiségétől, koncentrációjától függ. A tereket, amelyek lehetnek absztrakt terek is - tehát határaik fizikailag nem definiálhatók - kompartmenteknek hívjuk. A kompartmentek közötti anyagáramlás időbeli lefolyásával a *kompartment analízis* foglalkozik.



3.2 ábra. Az aktív transzport kompartment modellje.

Tegyük fel első közelítésben, hogy az anyagtranszport lineárisan függ a koncentrációtól (ez feltehetően igaz, ha a változás igen kicsi), azaz

$$I_o = k_o c_o \quad \text{és} \quad I_i = k_i c_i \quad k \text{ (1/s)}, \quad (3.1)$$

ahol c a koncentráció, I az anyagáram, k a reakció sebességi állandója, o jelzi a külső, i pedig a kompartment belsejében mérhető adatokat. A fizikában, kémiában és biokémiában a folyamatok vizsgálatánál gyakran feltételezik, hogy kis változások leírásánál a rendszer állapotát meghatározó mennyiségek, állapotváltozók *lineárisan* változnak. A koncentráció változása $\Delta c = c_2 - c_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$ idő alatt:

$$\Delta c_o = k_i c_i \Delta t - k_o c_o \Delta t, \quad (3.2)$$

$$\Delta c_i = k_o c_o \Delta t - k_i c_i \Delta t, \quad (3.3)$$

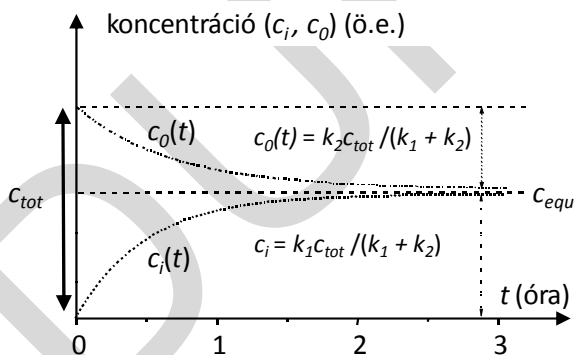
ahol megállapodás alapján pozitív előjellel jelezzük az illető térben a növekedést és negatív előjellel a csökkenést. A két egyenlet összege nyilván nulla, ami az anyag rendszerből történő kiáramlásának hiányában az anyagmegmaradást fejezi ki:

$$c_i + c_o = c_{tot} \quad (3.4)$$

A c_i koncentráció időegységre eső változása:

$$\frac{\Delta c_i}{\Delta t} = k_o c_o - k_i c_i = k_o (c_{tot} - c_i) - k_i c_i \quad (3.5)$$

Ha ismerjük az illető anyagra nézve a reakció sebességi állandóit, akkor az egyenletben csak a $c_i = c_i(t)$ időtől függő koncentráció az egyetlen ismeretlen. Az egyenlet baloldalán szereplő mennyiség annál pontosabban írja le a változást minél kisebb a Δt . A változás ugyanis nemcsak a $c_i(t)$ -től, hanem időkülönbség $t_2 - t_1$ megválasztásától is függ. Ha Δt nullához közelít, akkor a fenti egyenlet egy ún. *differenciálegyenlet*, amelynek megoldásával jutunk a keresett c_i koncentráció időtől való változásának megismeréséhez. A példát a későbbiekben ismét tárgyalni fogjuk.



3.3 ábra. A koncentrációk időbeli lefolyása. A modellként bemutatott példánál a K^+ koncentrációja a $t = 0$ időpillanatban az eritrocita belsejében nulla.

Érdekes adatokhoz juthatunk akkor is, ha megvizsgáljuk a

$$\frac{\Delta c_i}{\Delta t} = 0 \quad (3.6)$$

esetet, a *stacionárius állapotot*, amikor az I_o és I_i áramok egyenlőek, a rendszeren belül dinamikus egyensúly van. A fenti egyenlet megoldásával kapjuk az egyensúly esetén mérhető egyensúlyi koncentrációkat:

$$c_{i, egyen} = \frac{k_o}{k_o + k_i} c_{tot} \text{ és } c_{o, egyen} = \frac{k_i}{k_o + k_i} c_{tot} \quad (3.7)$$

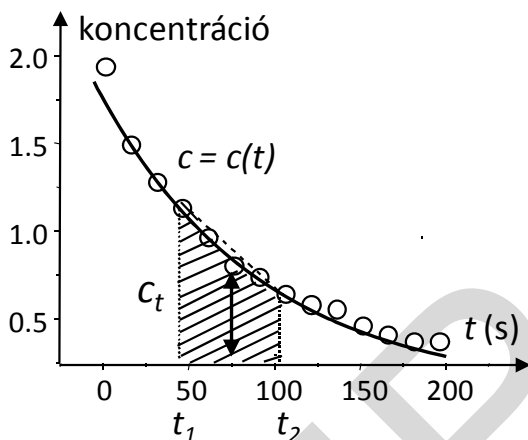
Ha felhasználjuk a K egyensúlyi állandó fogalmát:

$$K = \frac{k_i}{k_o}, \quad (3.8)$$

akkor az egyensúlyi koncentrációkat az egyensúlyi állandó segítségével is kifejezhetjük.

3.1.2 Egy integrálszámításra vezető probléma. Logaritmikus középérték

Radioaktív bomlás, monomolekuláris reakció, gyógyszer vagy drog kiürülése esetén a vizsgált anyag c koncentrációja a reakció során az időben csökken. Határozzuk meg a $c_{atl.}$ átlagos koncentrációt egy rögzített (t_1, t_2) időközben.



3.4 ábra. Drog kiürülése monomolekuláris reakció folyamán.

Az átlagos koncentrációt úgy számíthatjuk ki, hogy megvizsgáljuk az ábrán látható mérési pontokra illesztett kiürülési görbe alatti T területet, és keresünk egy olyan ordinátát, amelyre igaz:

$$c_{atl.}(t_2 - t_1) = T \quad (3.9)$$

A megoldás lehetséges módjai:

- (1) a T -t közelítjük egy derékszögű trapézzal (lásd ábra);
- (2) az ábrán látható görbe alatti vonalkázott területet több derékszögű trapézra osztjuk fel, és ezek területének összegével közelítjük a kérdéses területet;
- (3) ha ismerjük a c koncentráció időbeli lefolyását, a későbbiekben tárgyalandó integrálszámítás segítségével adjuk meg a megoldást:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt \quad (3.10)$$

A számolás végeredményére azt kapjuk, hogy:

$$c_{atl.} = \frac{c_1 - c_2}{\ln \frac{c_1}{c_2}}, \quad (3.11)$$

ahol c_1 és c_2 a t_1 és t_2 időpillanathoz tartozó koncentrációk.

Megjegyezzük, hogy ebben az esetben a kapott *logaritmikus közép* kisebb, mint a c_1 és c_2 segítségével kiszámítható *számtani közép*.

3.2 Halmazok, intervallum

3.2.1 A halmaz fogalma

A halmaz adott, meghatározott dolgok összességét fejezi ki. Olyan alapfogalom, amely egyszerűbb fogalmakra nem vezethető vissza. A halmazt végeredményben az határozza meg, hogy el lehet dönteni, egy adott x dolog az $\tilde{M}$ halmazhoz tartozik vagy sem. Ennek jele:

$$x \in \tilde{M} \text{ vagy } x \notin \tilde{M} \quad (3.12)$$

ahol x egy tetszőleges eleme a halmaznak. Ha a halmaz több véges számú elemből áll, pl. x , y és z , akkor a jelölés:

$$\tilde{M} := \{x, y, z\} \quad (3.13)$$

$\tilde{M}$: = jelölés azt mutatja, hogyan definiáljuk az $\tilde{M}$ halmazt a jobboldal segítségével, azaz $\tilde{M}$ legyen egyenlő a jobb oldalon leírt halmazzal.

3.2.2 Részhalmaz

Legyen $\tilde{M}$ pl. a különböző gyógyszerek halmaza, akkor a fájdalomcsillapító hatású gyógyszerek az $\tilde{M}$ halmaz egy $\tilde{K}$ részhalmazát alkotják. Szokásos jelölések:

$$\tilde{K} := \{x \mid x \text{ a választott tulajdonsággal rendelkezik}\} \quad (3.14)$$

$$\tilde{K} := \{x \in \tilde{M} : x \text{ fájdalomcsillapító gyógyszer}\} \quad (3.15)$$

$$\tilde{K} \subset \tilde{M} \quad (3.16)$$

3.2.3 Halmazműveletek

Jelöljön $\tilde{U}$ egy olyan halmazt, amelyet *univerzális* (alaphalmaz) halmaznak hívunk. Legyen $\tilde{A}$ és $\tilde{B}$ két halmaz; ha mindkettő részhalmaza az univerzális halmaznak, akkor ennek jelölési módja:

$$\tilde{A} \subset \tilde{U} \text{ és } \tilde{B} \subset \tilde{U}. \quad (3.17)$$

(1) *Halmazok metszete*. Két halmaz közös részét vagy metszetét az alábbi módon jelöljük:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} := \{x \in \tilde{U} : x \in \tilde{A} \text{ és } x \in \tilde{B}\} \quad (3.18)$$

A fenti művelet példája lehet a gyógyszerek halmazából egy olyan részhalmaz, amely azon gyógyszereket tartalmazza, amelyek fájdalomcsillapító hatásukon kívül nyugtató

hatással is rendelkeznek. Természetesen a két halmaz közös része lehet üres, az *üres halmaz*, amely nem tartalmaz egyetlen elemet sem. Jele: $\emptyset$. Ekkor:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset \quad (3.19)$$

Példa

Valószínűleg nincs olyan gyógyszer, amely egyidejűleg vízhajtó és vérzéscsillapító lenne.

Azt a halmazt, amely nem tartalmazza az $\tilde{A}$ halmaz elemeit, az $\tilde{A}$ halmaz *komplementer halmazának* nevezzük, jele: $\overline{\tilde{A}}$. Az $\tilde{U}$ alaphalmaz komplementer halmaza nyilván az üres halmaz.

(2) *Halmazok egyesítése* (uniója). Tekintsünk ismét két $\tilde{A}$ és $\tilde{B}$ halmazt, amelyek részhalmazai az $\tilde{U}$ univerzális halmaznak:

$$\tilde{A} \subset \tilde{U} \text{ és } \tilde{B} \subset \tilde{U} \quad (3.20)$$

A két halmaz uniója olyan halmaz, amely egyaránt tartalmazza $\tilde{A}$ és $\tilde{B}$ elemeit. Jele:

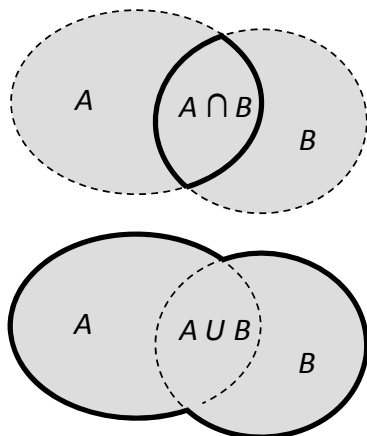
$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{x \in \tilde{U}\} = \{x \in \tilde{U} : x \in \tilde{A} \text{ vagy } x \in \tilde{B}\}. \quad (3.21)$$

(3) *Halmazok Descartes-féle szorzata*. Legyen ismét $\tilde{A}$ és $\tilde{B}$ két halmaz; elemeikből *rendezett párok* képezhetők: (a, b) , ahol $a \in \tilde{A}$ és $b \in \tilde{B}$. A rendezett párok összessége ismét egy halmazt alkot:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \{(x, y) : x \in \tilde{A}, y \in \tilde{B}\}, \quad (3.22)$$

ahol x és y a megfelelő halmazok elemei. Az (x, y) elemek *rendezett* párt alkotnak. A rendezett párokban az elemek egymással nem felcserélhetők, azaz $(x, y) \neq (y, x)$. A rendezett párok és a sík pontjai között egyértelmű leképezés valósítható meg. A $\bar{z} = (x, y)$ -t a síkon *vektornak* is nevezhetjük. A halmaz és halmaz műveletek szemléltetését a Venn-diagrammok segítségével valósítják meg.

Venn diagramm

**3.5 ábra.** Venn diagramm:

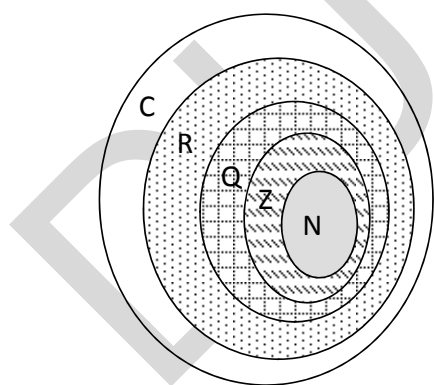
felső ábra: két halmaz közös részét;

alsó ábra: két halmaz egyesítését mutatja.

A későbbiek tárgyalásánál elsősorban *számhalmazokkal* foglalkozunk, amelyekre speciális jelöléseket vezettek be:

- ▶ Természetes számok halmaza: $\tilde{N}$ és $\tilde{N}^+ : \{1, 2, 3, \dots\}$ $0 \notin \tilde{N}^+$, utóbbi a pozitív egész számok halmazát jelenti, amely a zérust nem tartalmazza.
- ▶ Egész számok halmaza: $\tilde{Z}$,
- ▶ Racionális számok halmaza: $\tilde{Q}$,
- ▶ Valós számok halmaza: $\tilde{R}$,
- ▶ Komplex számok halmaza: $\tilde{C}$

Számhalmazok



C: komplex
R: valós
Q: racionális
Z: egész
N: természetes

3.6 ábra. Számhalmazok grafikusábrázolása: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Megjegyzés: A valós számok $\tilde{R}$ halmaza *rendezett halmaz*, érvényes a kisebb és nagyobb - $<$ ill. $>$ - *rendezési reláció*. Ha $\tilde{A} = \tilde{R}$ és $\tilde{B} = \tilde{R}$, akkor a Descartes-szorzat:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \tilde{R} \times \tilde{R} = \tilde{R}^2. \quad (3.23)$$

Ha mármost $a_i \in \tilde{A}$ és $b_i \in \tilde{B}$ $i = 1, 2$, akkor megadható a két rendezett pár *távolsága*:

$$\rho = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} . \quad (3.24)$$

3.2.4 Intervallum

Számos esetben a valós számok egy-egy meghatározott részhalmazát vesszük figyelembe. Azt a részhalmazt, amely az alábbi feltételeket elégíti ki:

$$a \leq x \leq b , \quad (3.25)$$

zárt intervallumnak nevezzük. Jele: $[a, b]$. Ekkor a határoló a és b az intervallum részét képezik. Az egyenlőtlenséget tetszőleges a és b -re csak a valós számok elégítik ki, ezért az intervallum valós számokat tartalmaz. Hasonlóan definiálhatjuk a nyitott, balról zárt és jobbról nyitott, valamint a balról nyitott és jobbról zárt intervallumokat:

$$a < x < b , \quad a \leq x < b , \quad a < x \leq b \quad (3.26)$$

$$[a, b) \quad [a, b] \quad (a, b] \quad (3.27)$$

Az *intervallum hosszán* a $(b-a)$ kifejezést értjük, $|b-a|$ -t távolságnak nevezzük.

Megjegyzés: a $-\infty < x < \infty$ intervallum csak nyitott lehet. Az egyenes pontjai és a valós számok között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat létesíthető, ez lehetővé teszi a valós számok ábrázolását a számegyenesen.

3.3 Függvény

A függvény a matematika egyik legáltalánosabban használt fogalma. Előfordul a matematika csaknem minden ágában, és gyakran használják a természettudomány más ágaiban is. A függvények halmazok közötti *speciális megfeleltetést* jelentenek, amely szerint minden $a \in \tilde{A}$ elemhez *egyértelműen* hozzárendelik a $\tilde{B}$ halmaz egy $b \in \tilde{B}$ elemét. A használatos jelölések:

$$f: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B} \quad f \text{ leképezi } \tilde{A}\text{-t } \tilde{B}\text{-re} , \quad (3.28)$$

$$x \mapsto f(x) \quad x \in \tilde{D}_f , \quad (3.29)$$

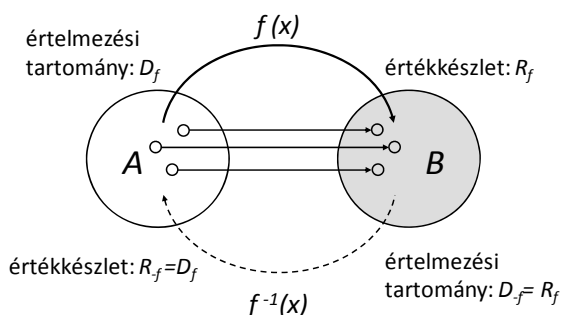
$$f(x) \quad x \in \tilde{D}_f . \quad (3.30)$$

A $\tilde{D}_f \subseteq \tilde{A}$ halmaz, ahol a speciális megfeleltetés (f -szabály) értelmezve van, a függvény *értelmezési tartománya* (domén). Az $\tilde{R}_f = \{f(a) \in \tilde{B}\}$ halmaz a függvény *értékkészlete* (range). A

$$\tilde{G}_f = \{(a, f(a)): a \in \tilde{D}_f\} \subseteq \tilde{A} \times \tilde{B} , \quad (3.31)$$

halmaz pedig a függvény grafikonja. Az $f(x)$ függvényben az x a független változó (a függvény argumentuma). Ha két $f(x)$ szabálynál az értelmezési tartomány különböző, akkor két különböző függvényről beszélünk.

A függvény *kölcsönösen egyértelmű*, ha az értékkészlet minden elemét csak egyetlen értelmezési tartomány beli elemhez rendeli hozzá.



3.7 ábra. Függvény fogalma.

Példa

$f(x) \rightarrow x^2$ $\tilde{D}_f \subseteq \tilde{Q}$ halmaz: $\sqrt{3}$ nincs $f(x)$ -re értelmezve,
 $\tilde{R}$ halmaz: $\sqrt{3}$ eleme $\tilde{D}_f \subset \tilde{R}_f$

Ha mindenegy x értékhez az $f(x)$ -nek egyetlen értéke felel meg, akkor *egyértékű* függvényről beszélünk (Pl. $y = x^3$, $y = \log x$, viszont $y = \sqrt{x}$ kétértékű függvény). Ha az $f(x)$ függvény *többértékű*, akkor van olyan az y tengellyel párhuzamos egyenes, amelyik több pontban metszi a függvényt. Többértékű függvénynek sok esetben ki lehet választani (sokszor célszerű is) *egyértékű* ágát. Azokat a függvényeket, amelyek véges számú aritmetikai művelet és összetett függvény képzésénél azok véges számú alkalmazásával nyerhetők, és egyetlen analitikus kifejezéssel adhatók meg, *elemi függvényeknek* nevezzük.

Példa

$$y = \log(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$$

3.3.1 Kétváltozós függvény

Jelölje $\tilde{A} \times \tilde{B}$ a sík pontjait a derékszögű koordináta-rendszerben. Ha most:

$$F: \tilde{D}_x \times \tilde{D}_y \rightarrow \tilde{R} \quad (\tilde{D}_x \subseteq \tilde{R}, \tilde{D}_y \subseteq \tilde{R}), \quad (3.32)$$

akkor a szimbólum a síkbeli értelmezési tartomány leképezését jelenti az $\tilde{R}$ halmazra az F szabály szerint. Az F szabály egy *kétváltozós függvényt* meghatározását jelenti:

$$z = F(x, y) \quad z \in \tilde{R} \quad (3.33)$$

Egyenlet. Tekintsünk adottnak a következő egyváltozós függvényt:

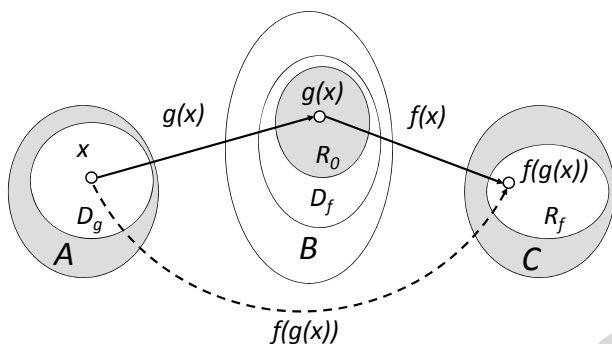
$$f: \tilde{D}_f \rightarrow \tilde{S} \quad (\tilde{D}_f \subset \tilde{R}, \tilde{S} \subset \tilde{R})$$

Keressük a $\tilde{D}_f$ értelmezési tartomány azon elemeit, azaz azokat a valós számokat, amelyekre teljesül az

$$f(x) = 0 \quad (3.34)$$

egyenlőség. Az összefüggést *egyenletnek*, az $f(x)$ függvény zérushelyeit az *egyenlet gyökeinek* nevezzük.

3.3.2 Függvények kompozíciója: összetett függvény



3.8 ábra. Függvény kompozíciója.

Az $\tilde{A}$ halmazon értelmezett $g(x): \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ és a $\tilde{B}$ halmazon értelmezett $f(x): \tilde{B} \rightarrow \tilde{C}$ függvényekből alkotott függvénykompozíción (jele: $f \circ g = f(g(x))$) ill. *összetett függvényen* azt a függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya $\tilde{D}_{f \circ g} := \tilde{D}_g$, és amelyre tetszőleges $x \in \tilde{D}_{f \circ g}$ esetén $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Ha az $\tilde{R}_g \subset \tilde{D}_f$ feltétel nem teljesül, akkor a kompozíció nem értelmezhető.

3.3.3 Inverz függvény

Az $f: \tilde{D}_f \rightarrow \tilde{R}_f$ függvény inverz függvényén azt a függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya $\tilde{D}_{f^{-1}} = \tilde{R}_f$ és értékkészlete $\tilde{D}_f$, azaz bármely $y \in \tilde{D}_{f^{-1}}$ esetén

$$f^{-1}(y) = x, \quad \bar{f}(f(x)) = x \quad (3.35)$$

ahol f^{-1} vagy $\bar{f}$ az inverz függvény jele. A $\tilde{D}_f$ és $\tilde{R}_f$ között a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az $y = f(x)$ függvény inverz függvény $x = f^{-1}(y)$ az $y = x$ egyenesre történő tükrözéssel kapható, azaz az x és y tengely felcserélődik. Az $y = x$ függvény inverz függvénye önmaga, azaz önmagára tükrözve jelenik meg.

Megjegyzés: A matematikai szimmetrikus kapcsolat nem lehet az ok-okozati kapcsolat megfelelője, mivel az ok-oksági kapcsolat nem fordul meg.

3.3.4 Függvények megadásának módjai

Függvényeket általában három különböző módon szokás megadni: táblázat, képlet vagy grafikon.

Példa

Egy fémes vezető R ellenállásának t hőmérsékleti függése:

$t(^{\circ}\text{C})$	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0
$R(\Omega)$	76,3	77,8	79,7	80,5	82,4

A természettudományokban ez a mód igen gyakori. Számos változó közötti kapcsolatot táblázatban és/vagy közelítő függvények formájában adnak meg (Landolt-Bernstein táblázatok, dózis-hatás görbe). Viszont igen sokszor csupán empirikus adatok állnak rendelkezésre.

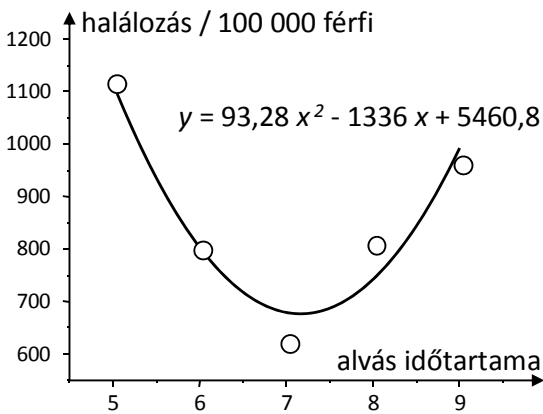
A leggyakoribb esetben a függvényeket valamilyen matematikai alakban, képlettel adják meg. A függvények lehetnek *explicit* vagy *implicit* módon megadott függvények. Egy *explicit* függvény a meghatározás során közvetlenül az értékészlet elemeinek a számolási módját adja meg. A függvények *implicit* meghatározása tartalmaz minden információt az egyes értelmezéstartománybéli elemek értékészletbeli párjának a megadásra, de a matematikai forma nem közvetlenül az értékészlet elemét adja meg.

Az $y = \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{3 - \sqrt{x}}$ függvény példa az explicit alakban megadott függvényre. Az analitikus geometriából ismert ellipszis egyenletét implicit alakban szokás megadni, de ebből az alakból könnyen kapunk explicit alakot:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.36)$$

Ezzel szemben az $x \cdot y - 2^x + 2^y = 0$ egyenletből y -ra nem adható zárt formula, de a függvény y értéke egy adott x -re kiszámítható, azaz megadható y mint x függvénye.

A gyakorlatban sokszor grafikon formájában adnak meg függvényeket. A függvény azon pontok mértani helyének tekinthető, amelyek abszcisszái a független változó értékei, ordinátái pedig az ezeknek megfelelő függvényértékek. Többnyire a grafikonokat a *Descartes-féle koordináta-rendszerben* ábrázolják, kevésbé gyakori a *poláris koordináta-rendszerben* történő ábrázolás (ld. következő szakasz).



3.10 ábra. Halálozási arány és alvási idő közötti összefüggés (dr. Harald J. Horowitz, Yale University munkájából).

Forrás: Dr. Harald J. Morowitz (Yale University)

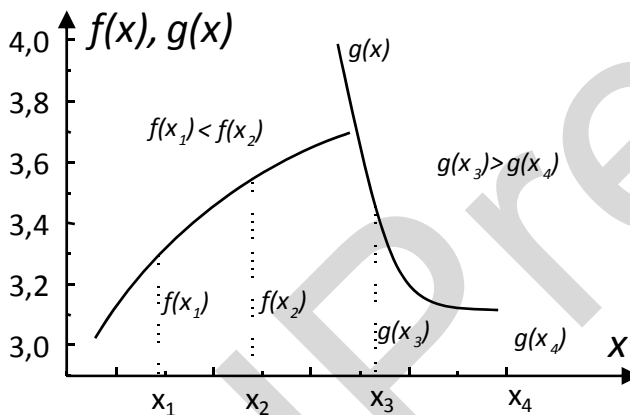
A halmaz adott, meghatározott dolgok összességét fejezi ki. Olyan alapfogalom, amely egyszerűbb fogalmakra nem vezethető vissza. A halmazt végeredményben az határozza meg, hogy el lehet dönteni, egy adott x dolog az adott halmazhoz tartozik vagy sem. A halmazok között műveleteket értelmezünk. A függvény a matematika egyik legáltalánosabban használt fogalma. A függvények egyértelmű hozzárendelést határoznak meg két halmaz, az értelmezési tartomány és az értékkészlet elemei között.

4 Függvények és tulajdonságai

4.1 Függvények speciális tulajdonságai

4.1.1 Monotonitás

Tekintsünk egy $f: \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}$ függvényt az $\tilde{R}_f \equiv \tilde{D}_f$ halmazon. Az $y = f(x)$ függvény a $\tilde{D}_f$ halmazon monoton növekvő, ha x_1 és $x_2 \in \tilde{D}_f$ és $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$. Hasonlóan, ha $x_1 < x_2$, de $f(x_1) > f(x_2)$, akkor a függvényt monoton csökkenőnek hívjuk (4.1 ábra).



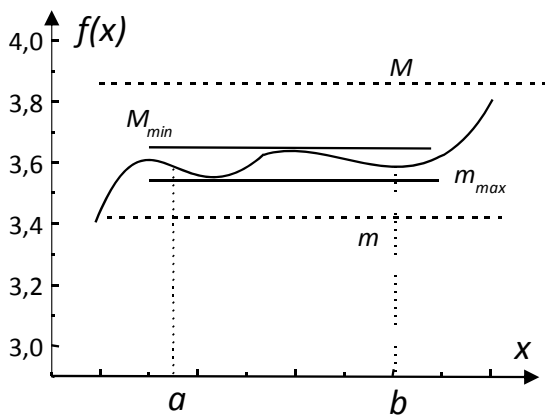
4.1 ábra. Függvények monotonitása: az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, a $g(x)$ függvény monoton csökkenő.

Ha a függvények értékkészletére vonatkozó relációkban az egyenlőséget is megengedjük, pl. ha $x_1 < x_2$ és $f(x_1) \leq f(x_2)$, akkor az $f(x)$ függvényt *monoton nem csökkenőnek* mondjuk.

4.1.2 Korlátosság

Tekintsünk ismét az $f: \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}$ függvényt az $\tilde{D}_f \equiv \tilde{R}_f$ halmazon. Az $f(x)$ függvény korlátos a $\tilde{H} \subseteq \tilde{D}_f$ halmazon, ha van olyan M szám, amelyre igaz,

$$|f(x)| \leq M, \text{ ha } x \in H.$$



4.2 ábra. Az $f(x)$ függvénynek M egy felső korlátja, $M_{\min}$ pedig a felső határa az $[a, b]$ intervallumban. m és $m_{\max}$ a függvény alsó korlátja és alsó határa.

Az adott M számot a függvény egy *felső korlátjának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a felső korlátok egy végtelen számosságú halmazt alkotnak. A felső korlátok közül van egy legkisebb, amelyre még érvényes a fenti reláció. Ezt a felső korlátot *felső határnak* nevezzük. Hasonlóan fogalmazható meg az *alsó korlát* és az *alsó határ* (4.2 ábra). Az alsó határ az alsó korlátok közül a legnagyobb. Viszonylag könnyen be lehet bizonyítani, hogy egy felülről (alulról) korlátos számhalmaznak mindig van felső (alsó) határa.

4.1.3 Páros és páratlan tulajdonság

Értelmezzünk egy $f: \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}$ függvényt az $\tilde{D}_f \equiv \tilde{R}_f$ halmazon. Az $f(x)$ függvényt *páros* függvénynek mondjuk az adott halmazon, ha érvényes a következő reláció:

$$f(x) = f(-x) \quad (4.1)$$

A páros függvények grafikonjára jellemző, hogy a derékszögű koordinátarendszerben a függvény szimmetrikus az Y tengelyre. Páros függvény pl.:

$$y = |x|, y = x^{2k}, \text{ ahol a } k \text{ egész szám és } y = \cos x \quad (4.2)$$

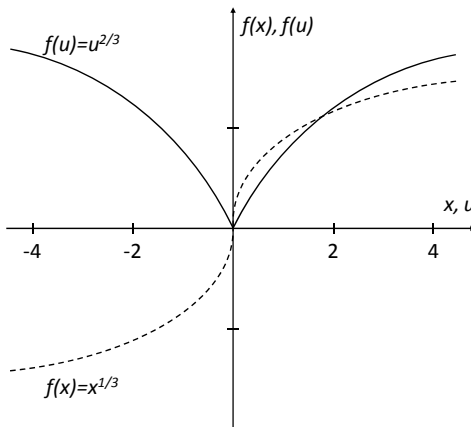
Páratlannak nevezzük az $y = f(x)$ függvényt, ha

$$f(x) = -f(-x) \quad (4.3)$$

A páratlan függvény esetén a függvény grafikonja az origóra nézve szimmetrikus.

Példa

$$y = x^{2k+1}, \text{ ahol a } k \text{ egész szám, } y = \sin x \text{ és } y = |x|/x \quad (4.4)$$



4.3 ábra. Az $f(x) = x^{1/3}$ páratlan és az $f(u) = u^{3/2}$ páros függvény grafikonja.

4.1.4 Periodikus tulajdonság

Az $f(x)$ függvényt *periodikusnak* mondjuk p periódussal, ha minden $x \in \tilde{D}_f$ -re igaz a következő reláció:

$$f(x+p) = f(x) = f(x-p), \text{ azaz } f(x+kp) = f(x), \text{ ahol } k \text{ egész szám} \quad (4.5)$$

Periodikus függvények pl. a trigonometrikus függvények.

4.2 Inverz függvény

Tekintsünk egy $y = f(x)$ egyértékű függvényt. A függvényt *egyértékűnek* mondjuk, ha a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, azaz ha az $x = a$ egyenes, ahol a az értelmezési tartomány tetszőleges eleme, $a \in \tilde{D}_f$, csak egy helyen metszi a függvényt (*vertical-line test*). Tegyük fel, hogy az $y = f(x)$ egyenletet x -re meg tudjuk oldani, ekkor egy $x = g(y)$ függvényt nyerünk. Azt a függvényt, amely $b = f(a) \in \tilde{B}$ függvényértékhez az $a \in$ elemet rendeli hozzá az $f(x)$ függvény *inverz függvényének* nevezzük.

Az inverz függvény jele:

$$\bar{f}(x) \text{ vagy } f^{-1}(x) \quad (4.6)$$

$$(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)} \quad (4.7)$$

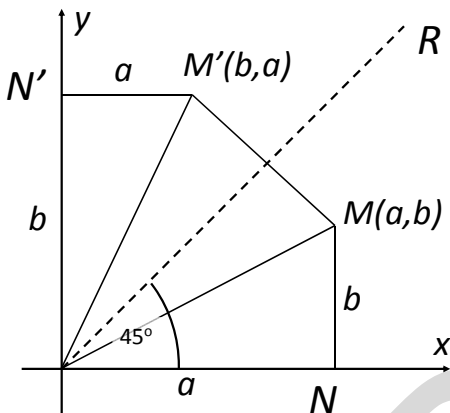
Az utóbbi jelölés nem tévesztendő össze az $f(x)$ függvény reciprok értékével, azaz az értékészlet értékeinek reciprokával.

Könnyen bizonyítható a tétel, hogy minden szigorúan monoton függvénynek van inverz függvénye.

Az inverz függvény geometriai szerkesztése. Tegyük fel, hogy az $y = f(x)$ egyértékű függvény; legyen továbbá $a \in \tilde{D}_f$ és $b = f(a) \in \tilde{B}$. Az $M(a, b)$ pont az $y = f(x)$ függvény grafikonjának, az $M'(b, a)$ pont viszont az $f^{-1}(x)$ inverz függvény grafikonjának egy pontja.

A geometriai megfontolás alapján világos, hogy az ONM háromszög egybevágó az $O'N'M'$ háromszöggel:

$$ONM \triangleq O'N'M'. \quad (4.8)$$



4.4 ábra. Inverz függvény szerkesztése.

Ezért az OMM' egyenlőszárú háromszögnek az OR egyenes a szimmetriatengelye, amely az X tengellyel 45° -os szöget zár be. Így az $M'(b, a)$ pont az $M(a, b)$ pontnak az OR egyenesre vonatkozó tükörképe. Mivel $M(a, b)$ az $y = f(x)$ függvény egy tetszőleges pontja, ezért a fenti megállapítás az $y = f(x)$ függvény értelmezési tartományának minden elemére igaz. Azaz, ha adva van egy $y = f(x)$ egyértékű függvény grafikonja, akkor az $f^{-1}(x)$ inverz függvény grafikonját a Descartes-féle koordináta-rendszer első és harmadik negyed szögfelezőjére vonatkozó egyszerű tükrözéssel nyerhetjük.

4.3 Függvények transzformációja

A különböző tudományágakban számos függvénnyel találkozhatunk, amelyeken műveleteket kell végezni. A kapott függvények áttekinthető ábrázolása kedvéért sokszor célszerű transzformációkat végezni a függvényeken a Descartes-féle koordináta-rendszerben. Értelmezzünk egy $f(x)$ függvényt a valós számok halmazán: $f(x): \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}$.

(1) A függvény Y tengely irányú eltolása c állandóval:

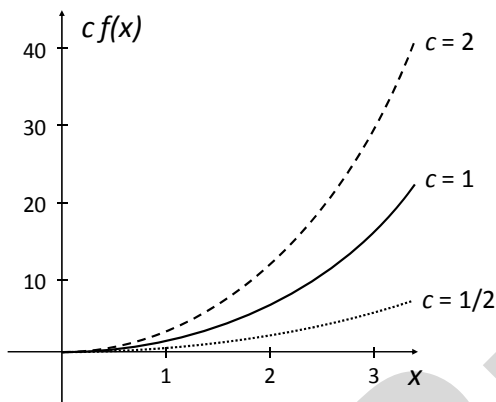
$$f(x) \rightarrow f(x) + c \quad (4.9)$$

c előjelének megfelelően a függvény értékei $|c|$ -vel tolódnak el az Y tengely mentén.

- (2) A függvény nyújtása $c > 0$ állandóval:

$$f(x) \rightarrow c \cdot f(x) \quad (4.10)$$

a függvény értékei c -szeres nyújtást kapnak az Y tengely irányában. Ha $c = -1$, akkor az $f(x)$ függvény tükörképét kapjuk az X tengelyre nézve. Amennyiben $0 < c < 1$, akkor a függvény zsugorításáról beszélünk.



4.5 ábra. $y = (cx)^2$ függvény nyújtása, zsugorítása $c > 0$ állandóval.

- (3) A függvény X tengely irányú eltolása $c \neq 0$ állandóval:

$$f(x) \rightarrow f(x + c) \quad (4.11)$$

c előjelének megfelelően a függvény grafikonja az X tengely irányában tolódik el; ha $c > 0$, akkor a csökkenő x értékek irányában; ha viszont $c < 0$, akkor a növekvő x értékek irányában.

- (4) A függvény nyújtása és zsugorítása az X tengely irányában:

$$f(x) \rightarrow f(c \cdot x) \quad (4.12)$$

c előjelének megfelelően a függvény $c > 1$ esetén c -szeresen zsugorodik, míg $0 < c < 1$ esetén c -szeresen nyúlik az X tengely irányában változatlan y értékek mellett. Ha $c = -1$, akkor az $f(x)$ függvény Y tengelyre vonatkoztatott tükörképét kapjuk.

4.4 Elemi függvények

4.4.1 Polinomok

- (1) Azokat a függvényeket, amelyek az

$$f(x) = x \text{ és } f(x) = \text{állandó} \quad (4.13)$$

függvényekből összeadás és szorzás útján képezhetünk, *polinomoknak* nevezzük. Általános alakjuk:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \text{ és } a_n \neq 0, \quad (4.14)$$

ahol n természetes szám, az a_i számok a polinomegyütthatói. A polinomok értelmezési tartománya: $\tilde{D}_f : (-\infty, +\infty)$. A polinomok jele: $P_n(x)$. Minden valós együtthatójú páratlan fokú polinomnak van legalább egy valós gyöke. Ha n páratlan, az $f(x)$ polinom páratlan függvény; $x < 0$ esetén $f(x) < 0$; ha $x > 0$, akkor $f(x) > 0$, így a függvény metszi az X tengelyt. Az n -ed fokú polinomnak legfeljebb n számú gyöke lehet.

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}, \quad a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0 \quad (4.15)$$

- (2) Ha a fenti megfogalmazásnál az osztás műveletét is megengedjük, akkor, ha a nevező nem állandó, a *racióális törtfüggvény*hez jutunk:

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R(x) \quad (4.16)$$

Racionális polinom értelmezési tartománya $\tilde{D}_f = \tilde{R}$, kivéve azokat a helyeket, ahol $Q_m(x) = 0$, azaz $\tilde{D}_f = \tilde{R} \setminus \{0\}$. Ha a $Q_m(x)$ $k \leq m$ számú valós gyökkel rendelkezik ($x_1, x_2, \dots, x_k$) akkor $R(x)$ a $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_k, +\infty)$ nyitott intervallum rendszerben értelmezhető függvény.

- (3) Ha a műveletek szempontjából a gyökvonást is megengedjük, akkor az *irracióális függvények*hez jutunk.
- (4) Az összes többi elemi függvényt *transzcendens* elemi függvénynek nevezzük. Pl. ahol α irracionális szám, a pedig pozitív szám:

$$x^\alpha, \sin x, \sin^2 \frac{1}{x}, a^x, \log x. \quad (4.17)$$

4.4.2 Hatványfüggvény

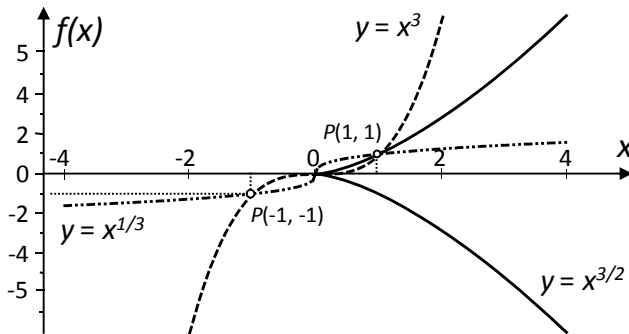
Hatványfüggvénynek nevezzük az

$$y = x^k \quad (4.18)$$

alakú függvényt, ahol x a hatvány alapja és k a hatványkitevő, és ezek tetszőleges valós számok. A továbbiakban csak az egyszerűbb hatványfüggvényekkel foglalkozunk, ahol k egész szám és p/q alakú racionális tört.

- (1) pozitív kitevőjű hatványfüggvény:

$$f(x) = x^k, \text{ ahol } k \text{ pozitív.} \quad (4.19)$$



4.6 ábra. Különböző kitevőjű hatványfüggvények grafikonja.

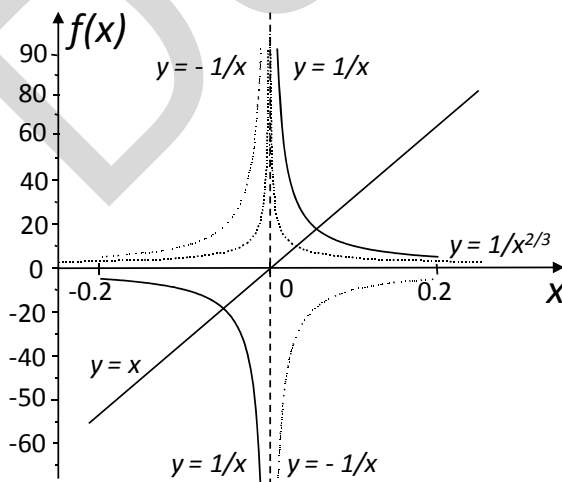
Ha $k = 0$, akkor $f(x) = \text{állandó} = 1$. Ha $k > 0$ egész szám, akkor a hatványfüggvény értelmezési tartománya a $\tilde{D}_f : (-\infty, +\infty)$ nyitott intervallum, elnevezésük *k-edfokú parabolák*. Ha $k = 2m$, ahol m egész szám, akkor a függvény a $(0, +\infty)$ jobbról nyitott intervallumban növekvő páros függvény (pl. x^4). Ha azonban $k = 2m+1$, akkor a függvény a $(-\infty, 0)$ balról nyitott intervallumban negatív, monoton növekvő páratlan függvény (pl. 4.5. ábrán $y = x^3$).

Ha $k = p/q$ racionális tört, ahol p és q természetes számok, akkor az értelmezési tartomány és értékkészlet p és q megválasztásától függ. Ennek részleteit illetően a szakirodalomra utalunk.

- (2) negatív kitevőjű hatványfüggvény: legyen $k < 0$ egész szám: $n = -m$, ahol $m > 0$. Ebben az esetben:

$$y = \frac{1}{x^m} \quad (4.20)$$

Az ilyen alakú függvényt *m-edfokú hiperboláknak* nevezzük. Az m szám tört hatványkitevő is lehet.



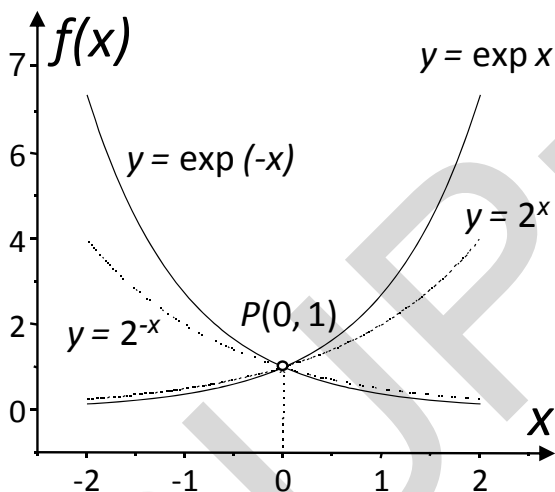
4.7 ábra. Különböző kitevőjű hiperbolák grafikonja.

Ha $x \rightarrow 0$ vagy $x \rightarrow +\infty$ illetve $-\infty$, akkor a függvények értékei egyre jobban közelednek az Y ill. az X tengelyhez. Azt mondjuk, hogy az X és Y tengelyek a hiperbolák megfelelő ágainak *aszimptotái*, a közeledést *aszimptotikus közeledésnek* nevezzük.

4.4.3 Exponenciális függvény

Exponenciálisnak nevezzük az $y = a^x$ alakú függvényt, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$ ($a = 1$ esetén konstans függvény, mert 1-nek minden hatványa is 1).

Általában csak pozitív alapú függvényekkel foglalkozunk. A függvények értelmezési tartománya a $(-\infty, +\infty)$ intervallum, és minden exponenciális függvény áthalad a $P(0,1)$ ponton. Ha $a > 1$ a függvény monoton növekvő, $a < 1$ esetben monoton csökkenő. Ha $a < 0$, akkor a függvény értelmezési tartománya az $x = p/q$ törtek halmaza, ahol q páratlan és p páros esetben $a^x > 0$, míg q páratlan és p páratlan esetben $a^x < 0$. Ha q páros, akkor a gyökvonásnál a jel alatt negatív szám áll, a művelet komplex számhoz vezet.



4.8 ábra. Exponenciális függvények grafikonja.

Mivel

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad (4.21)$$

ezért az a és $1/a$ alapú exponenciális függvények szimmetrikusak.

4.4.4 Logaritmus függvény

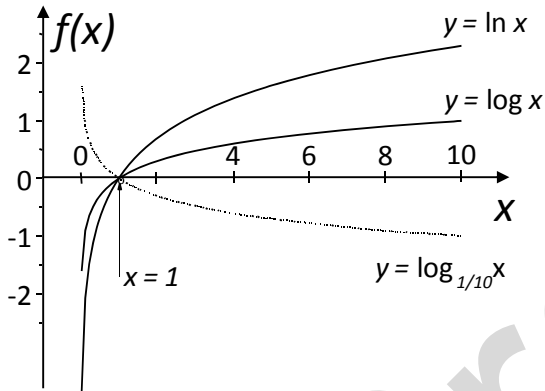
Az $x = a^y$ hatványfüggvény $a > 0$ és $a \neq 1$ esetén a $\tilde{D}_f : (-\infty, +\infty)$ intervallumban szigorúan monoton növekvő, így értékkészlete az: $\tilde{R} : (0, +\infty)$ halmaz. A függvénynek létezik inverz függvénye, amelyet a alapú logaritmus függvénynek nevezünk. Jele:

$$y = \log_a x \quad (4.22)$$

Értelmezési tartománya a $\tilde{D}_f:(0,+\infty)$ halmaz, értékkészlete pedig $\tilde{R}:(-\infty,+\infty)$. Valamennyi logaritmus függvény áthalad a $P(1, 0)$ ponton, mivel $y = \log_a 1 = 0$ bármilyen a esetén. A negatív alapú logaritmus függvényekkel a complex függvénytan foglalkozik. Ha $a = 1$, akkor

$$x = 1^y \equiv 1 \quad (4.23)$$

minden y -ra, így inverz függvény nem létezik. Az a és $1/a$ alapú logaritmus függvények egymásnak tükörképei az X tengelyre vonatkoztatva.



4.9 ábra. Különböző alapú logaritmus függvények grafikonjai.

4.4.5 Trigonometrikus függvények

A trigonometrikus függvények a radiánokban ($1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44.8''$) mért szögek függvényei:

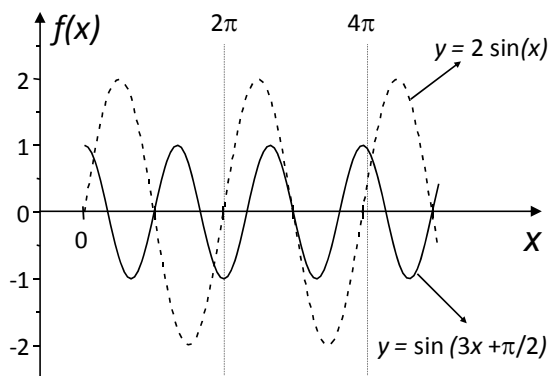
$$y = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x \quad (4.24)$$

geometriai értelmezésük az elemi matematikából ismeretes. Értelmezésükből rögtön következik, hogy a trigonometrikus függvények periodikusak: a $\sin x$ és $\cos x$ függvények 2π szerint periodikusak, és értelmezve vannak bármely valós argumentumra, $\tilde{D}_f:(-\infty,+\infty)$. A $\operatorname{tg} x$ függvény π szerint periodikus, és értelmezve van a $(0, \pi)$

intervallumban az $x = \frac{\pi}{2}$ pont kivételével, ahol szakadása van. A periodicitás miatt hasonló képe van az összes

$$x = (2k + \frac{\pi}{2}) \quad (4.25)$$

pontban, ahol k tetszőleges egész szám. Az illető pontokon keresztül húzott Y tengellyel párhuzamos egyenesek egyúttal a $\operatorname{tg} x$ függvény aszimptotái is.



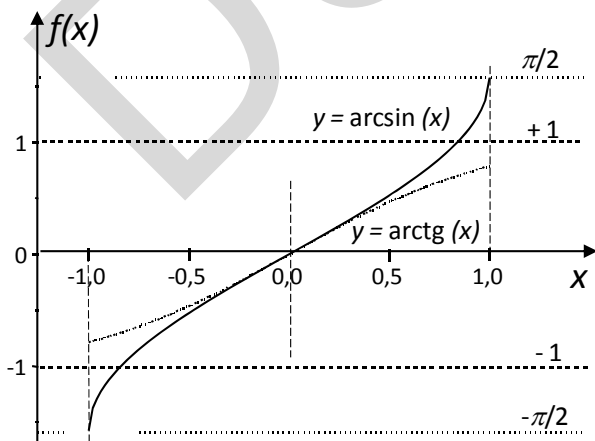
4.10 ábra. Trigonometrikus függvények grafikonja.

4.4.6 Ciklometrikus (arcus) függvények

A $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ trigonometrikus függvények inverz függvényeit *ciklometrikus* vagy *arcus* függvényeknek nevezzük. Az arcus kifejezés arra utal, hogy a függvényértékek *radian* egységekben vannak kifejezve.

Mivel a trigonometrikus függvények periodikus függvények, ebből következik, hogy egy adott szöghöz végtelen sok függvényérték tartozhat, azaz az arcus függvények *többértékű* függvények. Grafikus ábrázolásuk kézenfekvő az inverz függvényekre vonatkozó szabály alapján;

- (1) az $y = \arcsin x$ és $y = \arccos x$ függvények értelmezési tartománya nyilván a $-1 \leq x \leq 1$ intervallum, értékészletük pedig a $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, illetve a $0 \leq \arccos x \leq \pi$ intervallum;
- (2) míg $y = \operatorname{arctg} x$ esetén az értelmezési tartomány a $-\infty < x < +\infty$ intervallum, az értékészlet pedig a $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}$ intervallum.



4.11 ábra. Az $\arcsin x$ és $\operatorname{arctg} x$ arcus függvények főértékeinek grafikonja.

Mivel az arcus függvények az értelmezési tartományukban végtelen sok értékűek, ezért $\arcsin x$ arc és $\arctg x$ esetében a $\pi/2$ -nél ($\arccos x$ esetében a π -nél) nem nagyobb értéket választják ki, és ezt az intervallumot az illető arcus függvény *főértékének* nevezik. Az arcus függvényeken általában a főértékükből álló egyértékű ágaikat értjük (4.11 ábra).

A függvények jellemezhetők monotonitás, korlátosság, páros-páratlan, periodikus tulajdonságaik alapján. A függvényeket eltolhatjuk valamelyik koordináta tengely mentén, nyújthatjuk vagy zsugoríthatjuk őet. Elemei függvények: polinomok, hatványfüggvények, exponenciális függvény, logaritmikus, trigonometriális, ciklometrikus függvények.

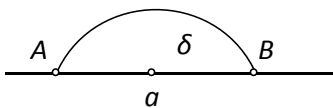
5 Határérték. Függvények határértéke, folytonosság

5.1 Környezet

Egy dimenzióban a környezeten az egyenes adott x pontjának δ sugarú környezetén bármely olyan AB szakasz pontjainak halmazát értjük, amelynek felezőpontja az x pont. A szakasz végpontját nem számítjuk a környezethez, azaz nyílt intervallumról beszélünk. A fenti definícióhoz hasonlóan értelmezzük a környezet fogalmát a síkban és a térben is; kör és gömb.

A valós számok halmazát tekintve az x szám (valós szám) környezete az $(x - \delta, x + \delta)$ nyitott intervallum, ahol a δ akármilyen pozitív szám. A ∞ hely környezete a (N, ∞) nyitott intervallum, ahol az N szám akármilyen valós szám (5.1 ábra része).

Környezet



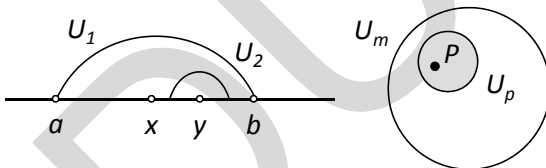
$$a - \delta \leq x \leq a + \delta$$

5.1 ábra. A környezet fogalma és a Hausdorff-féle axiómák.



$$N \leq x$$

Hausdorff axiómái



A környezetre vonatkozóan három alapvető tulajdonságot ismerünk, és fogadunk el, ezeket *Hausdorff-féle* axiómáknak nevezzük:

- (1) Ha U_1 és U_2 az x pont két környezete, akkor létezik olyan U_x környezet, amely benne van mind az első, mind pedig a második környezetben (összehúzódnó intervallumok elve).
- (2) Akármilyen két különböző pont is x és y , ezeknek a pontoknak létezik olyan környezete, amelyeknek nincsen egy közös pontja sem (tetszőlegesen kicsi intervallumok elve).
- (3) Ha y pont x pont U_1 környezetéhez tartozik, akkor az y pontnak van olyan U_2 környezete, amely benne van az x U_1 környezetében (5.1 ábra).

Torlódási hely: A P pontot az adott $\tilde{M}$ halmaz torlódási helyének nevezzük, ha a P pont bármely környezetében van legalább egy az $\tilde{M}$ halmazhoz tartozó, de P -től különböző pont. A torlódási hely környezete nyilván végtelen sok $\tilde{M}$ -hez tartozó pontot tartalmaz. Ellenkező esetben ugyanis a (2) axiómából következően lenne a P pontnak olyan U_P környezete, amelyben egyetlen $\tilde{M}$ -hez tartozó pont sem lehetne, és így P nem lenne torlódási hely.

5.2 Függvény határértéke

Vizsgáljuk meg az $y = f(x)$ $x \in \tilde{R}$ és $f(x) \in \tilde{R}_f$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (5.1)$$

függvényt, amely az $x = 2$ helyen nincs értelmezve. (Első pillanatra azt gondolnánk, hogy

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2 \quad (5.2)$$

A gondolat helytelen, mivel az $x = 2$ helyen a függvény nevezője nulla, hiszen az x akármilyen valós számot felvehet, nullával viszont nem lehet osztani).

Készítsünk függvénytáblázatot az $x = 2$ hely környezetében:

$$\begin{array}{c|cccccc} x & 1 & 1,5 & 1,8 & 1,99 & 1,999 \\ \hline y & 3 & 3,5 & 3,8 & 3,99 & 3,999 \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{c|cccccc} x & 2,8 & 2,2 & 2,1 & 2,01 & 2,001 & 2,0001 \\ \hline y & 4,8 & 4,2 & 4,1 & 4,01 & 4,001 & 4,0001 \end{array}$$

A táblázat adatai alapján úgy látjuk, hogy az $x = 2$ hely az $y = f(x)$ függvény értelmezési tartományának torlódási helye, de $f(x) = 4$ nem lehet, azaz $4 \notin \tilde{R}_f$. Azt mondhatjuk tehát, hogy a függvény *határértéke* az $x = 2$ helyen 4, és ezt így jelöljük (*limes*: a latin határ szó):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 \quad (5.3)$$

Más megfogalmazással: akármilyen kis pozitív ε számhoz találhatunk olyan ε -tól függő $\delta(\varepsilon)$ -t, hogy valahányszor

$$|x - 2| < \delta(\varepsilon) \quad \text{mindannyiszor} \quad |f(x) - 4| < \varepsilon \quad (5.4)$$

Példa

Ha $\varepsilon = 0,0001$ és $\delta(\varepsilon) = 0,0001$, akkor valahányszor

$$|x - 2| < 0,0001, \text{ mindannyi-szor } |f(x) - 4| < 0,0001,$$

tehát $f(x)$ benne van $4 \pm \varepsilon$ sugarú környezetében.

Definíció

A b számot az $y = f(x)$ függvény a helyen vett határértékének nevezzük, ha a az $y = f(x)$ függvény értelmezési tartományának torlódási helye; akármilyen is egy előre megadott ε szám, létezik az a helynek olyan U_a (ε -tól függő) környezete, hogy az argumentum minden U_a -ba eső a -tól különböző értékre teljesül

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad (5.5)$$

Más jelöléssel:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ vagy } f(x) \in U_b \text{ ha } x \in U_a, x \neq a \quad (5.6)$$

Ha az a pont az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának nem torlódási helye, akkor az $f(x)$ függvény a pontban vett határértékének nincs értelme. Jegyezzük meg: a b pont nem feltétlenül tartozik az $f(x)$ függvény értékkészletéhez.

A határérték geometriai jelentését a 5.2 ábra tanulmányozása során érthetjük meg. Valahányszor x az a pont $\delta(\varepsilon)$ sugarú környezetébe esik, az $f(x)$ függvény a $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ sávba esik.

5.2.1 Határérték a végtelenben

Vizsgáljuk meg az

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{3x^2 + 1} \quad (5.7)$$

függvény viselkedését $x \gg 0$ értékeknél. Beláthatjuk, hogy igen nagy x esetén az 1 elhanyagolható a másik tag mellett

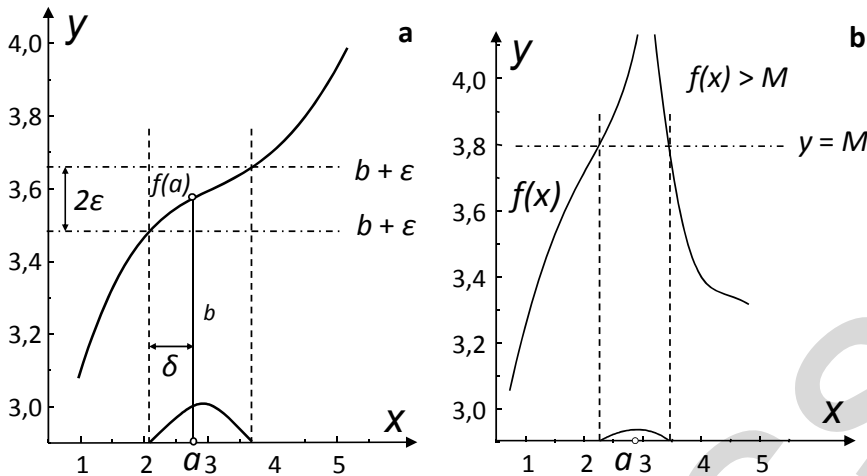
$$f(x) \approx \frac{2}{3}, \text{ azaz} \quad (5.8)$$

$$\left| \frac{2x^2 - 1}{3x^2 + 1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{6x^2 - 3 - 6x^2 - 2}{(3x^2 + 1)3} \right| = \left| -\frac{5}{3(3x^2 + 1)} \right| < \frac{5}{9x^2} < \frac{1}{x^2} < \varepsilon \quad (5.9)$$

ha $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, ahol ε egy előre megadott kis pozitív szám.

Ez azt mutatja, ha x nagyobb, mint egy N szám, akkor az $f(x)$ függvény a választott ε szám által meghatározott sáv belsejébe esik,

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ ha } x > N \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b. \quad (5.10)$$



5.2 ábra. Határérték geometriai jelentése a véges hely környezetében és a végtelenben.

5.2.2 Végtelen határérték

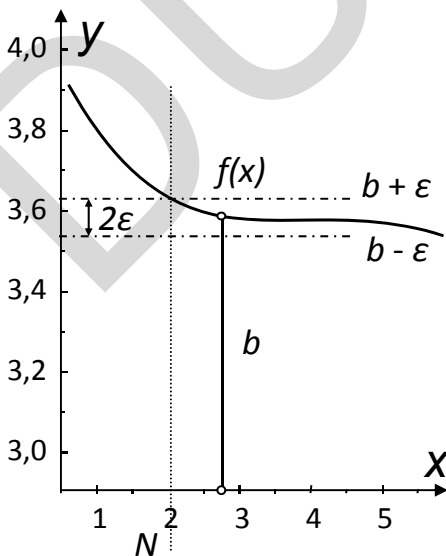
Az $f(x)$ függvénynek az a helyen ∞ vagy $-\infty$ határértéke van, ha

- ▶ a az adott függvény értelmezési tartományának torlódási helye,
- ▶ akármekkora az előre megadott M szám, létezik az a helynek olyan U_a környezete, hogy az argumentum bármely U_a -hoz tartozó $x \neq a$ értékre érvényes

$$f(x) > M \text{ illetve } f(x) < -M \text{ } f(x), \text{ azaz} \quad (5.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ illetve } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (5.12)$$

Megjegyzés: a végtelen *nem* szám, ezért a vele való műveletnek nincs értelme. Minden szám, bármilyen nagy is, *véges* (5.3 ábra).



5.3 ábra. Végtelen határérték.

Példa

Vizsgáljuk meg az $y = \frac{x+1}{x-1}$ függvény határértékét az $x = 1$ helyen. Könnyen

beláthatjuk, ha x jobbról tart 1-hez, akkor $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} \rightarrow +\infty$, ha viszont x balról tart

1-hez, akkor $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} \rightarrow -\infty$. Más megfogalmazással: legyen M egy igen nagy szám, akkor

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} > M, \text{ valahányszor } x < 1 + \frac{2}{M}. \quad (5.13)$$

5.3 Határátmenetre vonatkozó tételek

- (1) Végesszámú összeadandókból álló összeg határértéke az összeadandók határértékének összegével egyenlő, feltéve, hogy az összeadandók határértéke az adott intervallumban létezik.

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két a valós számok halmazán értelmezett függvény, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (5.14)$$

- (2) Végesszámú tényezők szorzatának határértéke a tényezők határértékének szorzatával egyenlő.

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két a valós számok halmazán értelmezett függvény, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (5.15)$$

- (3) Hányados határértéke egyenlő a határértékek hányadosával, ha csak a nevező nem végtelen kicsiny mennyiség.

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két a valós számok halmazán értelmezett függvény, továbbá az a helyen $g(a) \neq 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (5.16)$$

Ha a valós számok halmazán értelmezett $f(x)$ függvény értékei bármely x -re olyanok, hogy két függvény – $u(x)$ és $v(x)$ – megfelelő értékei közé zárhatók, és határértékük az $x = a$ helyen közös, akkor

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x) \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) \quad (5.17)$$

Ez a reláció *rendőr elv* néven ismert.

A határértékre vonatkozó tételeket nem bizonyítjuk, azok annak a számelméleti tételnek következményei, hogy

- (1) az összeg tagjainak folytonos függvénye,
- (2) a szorzat tényezőinek folytonos függvénye,
- (3) a hányados a számlálónak és a nevezőnek folytonos függvénye.

5.3.1 Cauchy-féle konvergencia tétel

A $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ véges határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy akármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz létezik az a helynek olyan U_a környezete, hogy bármely x_1 és x_2 , az U_a környezetbe eső, értékekre teljesüljön, hogy:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (5.18)$$

- (1) A feltétel szükséges: mivel $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ létezik, ezért

$$|f(x_1) - A| \approx \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } |f(x_2) - A| \approx \frac{\varepsilon}{2} \text{ ha } x_1, x_2 \in U_a \quad (5.19)$$

Viszont

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) - A - f(x_2) + A < \varepsilon \text{ azaz} \quad (5.20)$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |f(x_1) - A| + |f(x_1) - A| < \varepsilon \quad (5.21)$$

- (2) A feltétel elegendő.

A feltevés értelmében: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Ha $\xi \in U_a$, akkor

$$f(\xi) - \varepsilon < f(x) < f(\xi) + \varepsilon, \quad (5.22)$$

az $f(x)$ függvény tehát az U_a környezetben korlátos. Legyen α az alsó határ, β pedig a felső határ az U_a környezetben, így

$$f(\xi) - \varepsilon \leq \alpha \leq \beta \leq f(\xi) + \varepsilon \text{ azaz } \beta - \alpha = 2\varepsilon \quad (5.23)$$

Válasszuk az ε számot a következő módon: $\varepsilon_n = \frac{1}{10^n}$

Az I. Hausdorff axióma értelmében létezik olyan A szám, amely minden egymást követő intervallumban benne van:

$$\alpha_n \leq A \leq \beta_n \text{ azaz } \beta_n - \alpha_n \leq 2\varepsilon_n < \varepsilon \quad (5.24)$$

Az $f(x)$ és A ugyanabban az intervallumban vannak, tehát

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (5.25)$$

5.4 Függvények folytonossága

Definíció

Legyen adva az $y = f(x)$ függvény, amely értelmezve van az a hely környezetében, és magán az a helyen is, azaz $y = f(a) = b$. Ha a függvénynek az $x = a$ helyen vett határértéke létezik, és egyenlő az $f(a)$ helyettesítési értékével, akkor az $f(x)$ függvényt az a helyen folytonosnak nevezzük. Formailag:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ ha } |x - a| < \delta(\varepsilon) \quad (5.26)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = b \quad (5.27)$$

A határértékekre vonatkozó tételekből következik, hogy ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos függvények az a helyen, akkor:

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x) \text{ és } \frac{f(x)}{g(x)} g(x) \neq 0 \text{ az } a \text{ helyen} \quad (5.28)$$

is folytonos függvények.

Összetett függvény folytonossága. Legyen adott $y = f(x)$ és $x = \varphi(t)$ a valós számok halmazán értelmezett függvény. Tegyük fel továbbá, a $x = \varphi(t)$ függvény az a helyen folytonos, és $f(x)$ az $x = \varphi(a)$ helyen folytonos. Ekkor az $y = f(\varphi(t))$ összetett függvény is folytonos az a helyen.

5.5 Szakadósos függvények

Ha a az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának torlódási helye, de a folytonosság feltétele nem teljesül, azaz:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a),$$

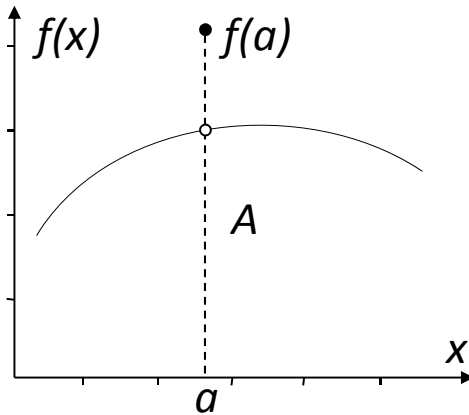
akkor az a hely az $f(x)$ függvény szakadási helye. A következő esetek lehetségesek:

- (1) $f(x)$ -nek az a helyen nincs véges határértéke (pl. $\tan x$ a $\pi/2$ helyen),
- (2) az a hely nem tartozik a függvény értelmezési tartományához, $f(a)$ nem létezik,
- (3) az $f(x)$ -nek az a helyen van véges határértéke, de ez nem egyezik meg a függvény a helyen vett helyettesítési értékével.

Ha a (3) eset áll fenn, akkor a szakadást megszüntethető szakadásnak mondjuk, és a szóbanforgó helyen a függvény értékét egyenlőnek vesszük a határértékével (elsőfajú szakadás). Ha a függvény diszkontinuitása nem szüntethető meg másodfajú szakadásról beszélünk. Az (3) esetben, ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (5.29)$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \neq a \\ A & \text{ha } x = a \end{cases} \quad (5.30)$$



5.4 ábra. Függvény folytonos kiterjesztése.

Az $F(x)$ és $f(x)$ különböző függvények, mivel értelmezési tartományuk különböző. De mondhatjuk, hogy az $f(x)$ függvény az argumentum a -tól különböző értékeinek halmazán értelmezett $f(x)$ függvény. Az $f(x)$ -re általában nem vezetnek be külön jelzést, hanem azt mondjuk, hogy az $f(x)$ az $f(x)$ függvény folytonos kiterjesztése az $f(x) = A$ megállapodás révén.

5.6 Függvények egyenletes folytonossága. Cantor-tétele

Tétel

Ha az $f(x)$ függvény az $a \leq x \leq b$ zárt intervallumban folytonos, akkor bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy valahányszor az intervallum két x_1 és x_2 helyére igaz, hogy

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \text{mindannyiszor} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad (5.31)$$

A tétel az egy helyen megfogalmazott folytonossággal szemben azt állítja, hogy egy adott $\varepsilon > 0$ -hoz található egy olyan – egy egész intervallumban közös – $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy a

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad (5.32)$$

reláció érvényes, bárhol is van x_1 és x_2 , ha, $|x_1 - x_2| < \delta$. Azaz a tétel az $f(x)$ függvény egyenletes folytonosságát mondja ki az $[a, b]$ intervallumban.

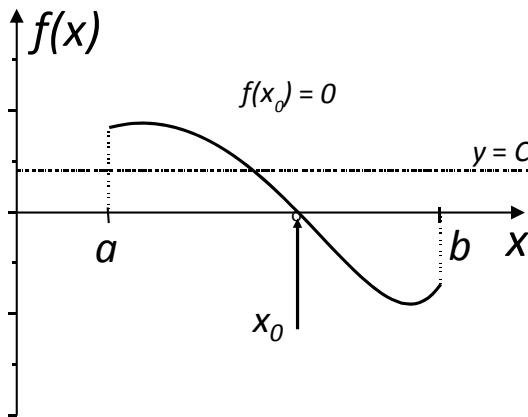
5.7 A folytonos függvények alaptulajdonságai

Bolzano-tétel

Ha $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban folytonos és $f(a) < 0$, viszont $f(b) > 0$, vagy fordítva, akkor az a és b között van legalább egy olyan ξ hely, hogy

$$f(\xi) = 0 \quad (5.33)$$

Bizonyítható, hogy a tétel nemcsak 0-ra igaz, hanem tetszőleges $f(a)$ és $f(b)$ közötti $f(u) = C$ számértékre is.



5.5 ábra. Bolzano-tétel.

A tétel speciális következménye: ha $f(x)$ egy páratlan foksámú polinom, mivel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ és } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad (5.34)$$

akkor az $f(x)$ polinomnak van legalább egy valós gyöke.

Ha $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumban szigorúan monoton függvény, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket egyszer és csakis egyszer vesz fel. Az ilyen függvénynek mindig van *egyértékű inverz* függvénye.

Weierstrass-tétel

Ha $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban folytonos függvény, akkor annak belsejében vagy határán van olyan ξ hely, valamint olyan η hely, hogy $f(\xi)$ a függvénynek legnagyobb, $f(\eta)$ a legkisebb értéke az egész intervallumban.

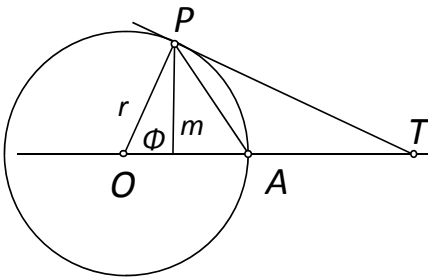
A tétel egy következménye: ha $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumban folytonos függvény, és

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty \text{ és } \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty, \quad (5.35)$$

akkor van olyan ξ hely az $[a, b]$ intervallumban, ahol az $f(x)$ a legkisebb értékét vesz fel. Hasonló igaz a maximális értékre is.

5.8 Egy nevezetes határérték

Határozzuk meg az $y = \frac{\sin x}{x}$ függvény határértékét az $x = 0$ helyen!



5.6 ábra

Induljunk ki egy egyszerű geometriai megfontolásból: az egyenes szakaszok összehasonlításából adódik, hogy

$$m < PA_{iv} < PT \text{ azaz, ha } r = 1, \text{ akkor} \quad (5.36)$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \text{ ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad (5.37)$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ és } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (5.38)$$

Vonjuk ki az 1-ből az egyenlőtlenséget:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2} \quad (5.39)$$

Ha $x \rightarrow 0$, akkor a $\cos x$ függvény tart 1-hez (és $x = 0$ -ban fel is veszi ezt az értéket). A fenti egyenlőtlenség és a rendőr elv alapján tehát:

$$1 - \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0 \text{ azaz } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (5.40)$$

6 Számsorozatok, számsorok. Az e szám

6.1 Sorozat

Definíció

A valós vagy komplex számok $\tilde{H}$ halmaza sorozat, ha ismert olyan képzési szabály, amely a természetes számok $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ mindegyikéhez a $\tilde{H}$ halmaz egy meghatározott elemét a_n rendeli: $a_n \in \tilde{H}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). A képzési szabály olyan függvénynek tekinthető, amely az x változó pozitív egész értékeire értelmezett:

$$a_n = f(n); \quad a: \tilde{N} \rightarrow \tilde{R} \quad a_1 \text{ és } a_{n+1} : f(a_n) \quad (n \in \tilde{N}); \quad (6.1)$$

Használatos jelölések:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (6.2)$$

$$a_n (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.3)$$

$$\{a_n\} \quad (6.4)$$

Példa

- (1) ha $f(x) = qx$ ($x \in \tilde{R}$) és $a_{n+1} : qa^n$ ($n \in \tilde{N}$) jelölések megadják a mértani sorozat definícióját;
- (2) a_1 és $a_r = a_{r-1} + d$ a számtani haladvány vagy számtani sorozat;
- (3) a_1 és $a_r = \frac{1}{r}$ a harmonikus sorozat (a sorozatban a szomszédos tagok közül a középső a két szélső tag harmonikus közepe). A harmonikus közép definíciója:

$$a_k = \frac{2}{\frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+1}}} \quad (6.5)$$

A sorozat végtelen, ha $f(n)$ minden n -re értelmezve van, és a_n -t is figyelembe vesszük. A számsorozat így egy *egész argumentumú függvény* értékkészlete. A sorozatok különböző típusúak lehetnek: megkülönböztetünk valós és komplex, pozitív és negatív (váltakozó előjelű). A sorozat a továbbiakban lehet korlátos, monoton növekvő vagy csökkenő, konvergens, divergens, esetleg oszcilláló is.

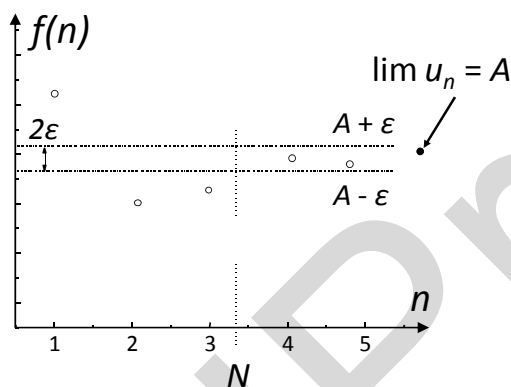
6.2 A sorozat határértéke

A A számot az $u_n = f(n)$ függvény vagy az $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ sorozat határértékének nevezzük, ha tetszőlegesen kicsiny pozitív ε számhoz találhatunk olyan N számot, hogy minden $n > N$ számra igaz

$$|f(n) - A| < \varepsilon \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A \quad (6.6)$$

Vegyük észre: a függvény határérték fogalmával szemben ebben az esetben csak a *végtelenben* vett határértékről lehet szó. A fenti kifejezés fizikai vagy kémiai mérés problémájánál a mérendő mennyiség ε abszolút hibájú közelítését jelenti.

Egy sorozatot *konvergensnek* mondunk, ha a sorozatnak van véges határértéke, ellenkező esetben a sorozat *divergens*.



6.1 ábra. Számsorozat határértéke.

Példák

- (1) Vizsgáljuk meg az $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ sorozat határértékét. Sejtésünk, hogy $u_\infty = 1$.

Legyen $\varepsilon = 0,0001$. Megoldás: a határértéktől való eltérés kisebb ε -nál, ha:

$$|u_n - u_\infty| = \left| \left(\frac{2^n - 1}{2^n} \right) - 1 \right| = \left| \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{2^n} \right| < \varepsilon, \text{ azaz, ha } 2^n > \varepsilon. \quad (6.7)$$

- (2) Határozzuk meg az alábbi trigonometrikus sorozat határértékét:

$$\sin \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} \sin 3 \frac{\pi}{2}, \frac{1}{3} \sin 5 \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{1}{n} \sin (2n-1) \frac{\pi}{2}, \dots \quad (6.8)$$

Az $y = \sin x$ függvény tulajdonságaira figyelemmel, a sorozat tagjai váltakozó előjelűek; a pozitív előjelű tagok csökkennek, míg a negatív előjelű tagok növekednek, ha n növekedik. Érvényes azonban a következő reláció:

$$\frac{1}{n} \sin(2n-1) \frac{\pi}{2} \leq \frac{(-1)^n}{n} \quad (6.9)$$

A $(-1)^n/n$ sorozat konvergens, váltakozó előjellel oszcillálva tart 0-hoz, ha $n \rightarrow \infty$.

6.3 Végtelen sor

Az $\{a_n\}$ végtelen számsorozat tagjaiból alkotott összegek végtelen numerikus sort alkotnak. Jelölése: ha a számsorozat tagjai $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, akkor

$$s_k = \sum_{i=1}^k a_i \quad (6.10)$$

az $\{a_n\}$ végtelen számsorozat első k tagjának összege, amelyet a végtelen sor k -dik *részletösszegének* nevezünk. Az s_n számok végtelen sorozatot képeznek.

A végtelen sor *konvergens*, ha létezik a részletösszegeknek határértéke:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right), \quad (6.11)$$

ellenkező esetben a végtelen sor *divergens*.

Megjegyzés: Az $\{a_n\}$ végtelen számsorozat tagjaiból alkotott szorzatot *végtelen szorzatnak* nevezzük, jele:

$$P_k = \prod_{i=1}^k a_i \quad (6.12)$$

Példák véges számsorra

(1) Számtani haladvány (első tag: a , különbség: d):

$$a_n = a + (n-1)d; \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n);$$

(2) Mértani haladvány (első tag: a , hányados: q): $a_n = a q^{n-1}$; $S_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$;

(3) Az első n természetes szám összege: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(4) Az első n természetes szám négyzetének összege: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(5) Differencia módszer: Az S_n összeg viszonylag egyszerűen kiszámítható, ha az általános tag különbségként írható fel:

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} - \sum_{r=1}^n \frac{1}{r+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad (6.13)$$

6.4 A konvergencia vizsgálata

Tekintsük a következő sorozatot:

$$\sum_i a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (6.14)$$

A konvergencia szükséges feltétele nyilván: $a_r \rightarrow 0$, ha $r \rightarrow \infty$ ellenkező esetben a sorozat divergens. A konvergenciára vonatkozó néhány szabály:

(1) *Összehasonlító teszt*

Legyen

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \text{ és } B = b_1 + b_2 + b_3 + \dots \quad a_i > 0 \text{ és } b_i > 0 \quad (6.15)$$

Ha a B sor konvergens, akkor A is konvergens, ha $a_r \leq b_r$. azaz B majoráns sora A -nak. Ha a B sor divergens, akkor A is divergens, ha $a_r \geq b_r$.

(2) *d'Alembert hányados teszt*

Legyen adott a következő végtelen sor:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_r + a_{r+1} + \dots \quad (6.16)$$

A sor konvergens, ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} \right| < 1, \quad (6.17)$$

a sor divergens, ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} \right| > 1, \quad (6.18)$$

ha a hányados 1-gyel egyenlő, a konvergencia további vizsgálata szükséges.

Példák

- (1) Megmutatjuk, hogy a *harmonikus sor* divergens.

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots > 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \quad (6.19) \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \dots
 \end{aligned}$$

a sor így divergens, amit bizonyítani akartunk.

- (2) Hasonló eljárással megmutatjuk, hogy a *hiperharmonikus sor* bizonyos feltételek teljesülése esetén konvergens. Végezzük el a következő átalakítást:

$$1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots, \frac{1}{n^p}, \dots, \text{ ahol } p > 1 \text{ egész szám} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots = \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \dots < \quad (6.21) \\
 &< 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \dots
 \end{aligned}$$

$$S = 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \dots \quad (6.22)$$

Az S hiperharmonikus sornak az átalakítással egy majoráns mértani sorát kaptuk. A mértani sor hányadosa:

$$q = \frac{1}{2^{p-1}} \quad (6.23)$$

Világos, ha $p > 1$, akkor $q < 1$. Ebben az esetben a mértani sor konvergens, de akkor a hiperharmonikus sor is konvergens.

Figyeljük meg az átalakítás módját. Az első esetben (1) olyan matematikai átalakítást végeztünk, amellyel olyan végtelen sorhoz jutottunk, amelynek tagjai nagyobbak az eredeti végtelen sor tagjainál, míg a második (2) esetben átalakítással egy majoráns végtelen sorhoz jutottunk.

6.5 Az e szám

Vizsgáljuk meg az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ számsorozat határértékét, ha $n \rightarrow \infty$. A határérték meghatározását több lépésen keresztül végezzük el.

- (1) A sorozat monoton növekvő. Ennek igazolására felhasználjuk a számtani és mértani átlagok közötti következő relációt:

$$a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (6.24)$$

A fenti azonosság $(n+1)$ számra is igaz: az $a_n = 1 \cdot a_n$ $(n+1)$ tényezősszorzattá alakítható. Ezt alkalmazva:

$$\begin{aligned} a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \leq \\ &\leq \left[\frac{1+n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} \right]^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned} \quad (6.25)$$

így igaz, hogy $a_n \leq a_{n+1}$ (6.26)

- (2) A sorozat felülről korlátos. A bizonyításhoz ismét alkalmazzuk a fenti relációt:

$$\frac{1}{4} a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \leq \left[\frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} \right] = \left(\frac{n+2}{n+2}\right) = 1 \quad (6.27)$$

Tehát $a_n < 4$. Mivel a sorozat első tagjára $n=1$, így az első tag értéke $a_1 = 2$. Azt is megmutattuk, hogy $a_n < 4$, tehát a kérdéses határérték 2 és 4 közé esik:

$$2 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 4 \quad (6.28)$$

- (3) Vizsgáljuk meg az $1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots, \frac{1}{n!}$ sorozatból megalkotható végtelen sor határértékét. A végtelen sor n -edik részletösszege

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (6.29)$$

A részletösszeg alakjából látjuk, hogy az $S_1 < S_2 < \cdots < S_n$, tehát a sorozat monoton növekvő. Könnyen bebizonyítjuk, hogy az S_n összegek felülről korlátos sorozatot alkotnak: azaz $S_n \leq M$ bármely n -re, ha $M \geq 3$.

Mivel

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{1}{2^{k-1}}, \text{ ha } k > 2, \quad (6.30)$$

ezért

$$S_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2 = 3 \quad (6.31)$$

Az S_n kifejezése az első tagtól eltekintve egy $q = 1/2$ hányadosú mértani sort alkot, amelynek összege éppen 2, tehát az S_n sorozat tagjai bármely n esetén felülről korlátos halmazzal alkotnak.

- (4) Vizsgáljuk meg az $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ függvény binomiális kifejtését, ha $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \cdots + \cdots = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots < 3 \end{aligned} \quad (6.32)$$

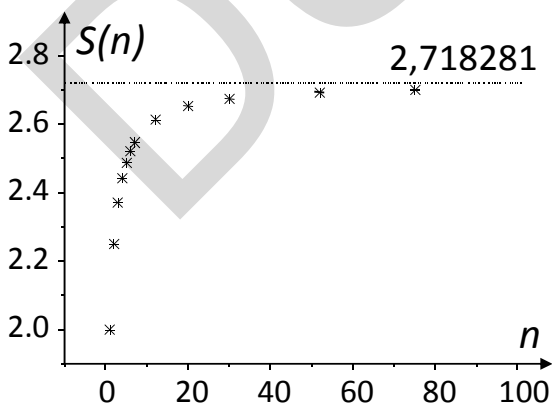
ha $n \rightarrow \infty$. Ha a két számolás eredményét összefoglaljuk, akkor a végeredmény:

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \text{ és } 2 < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3 \text{ akármilyen } n\text{-re.}$$

Mindkét kifejezés határértéke egy irracionális szám: $e = 2,718281 \cdots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (6.33)$$

Az e a természetes alapú logaritmus alapszáma. Az e szám bevezetése és értékének meghatározása David Bernoulli és Leonhard Euler érdeme. Bevezetésének előnyeit a későbbi tárgyalás során fogjuk megismerni.



6.2 ábra. A természetes logaritmus alapszáma. Az ábra az $(1 + (1/n))^n$ sorozat értékeinek az n -től való függését mutatja. A természetes logaritmus alapja ennek a sorozatnak a végtelenben vett határértéke.

6.6 Speciális esetek

Meg lehet mutatni, hogy a fenti határérték helyes marad akkor is, ha n helyett egy z racionális vagy irracionális számot veszünk, azaz nem csak pozitív egész számokat vehet fel:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e \quad (6.34)$$

(1) Legyen $z = \frac{1}{x}$, akkor:

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (6.35)$$

(2) Legyen $z = kx$, akkor:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{z}\right)^z = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{z}\right)^{kx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{kx} = e^k \text{ vagy } e^x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} \quad (6.36)$$

ahol x tetszőleges valós szám.

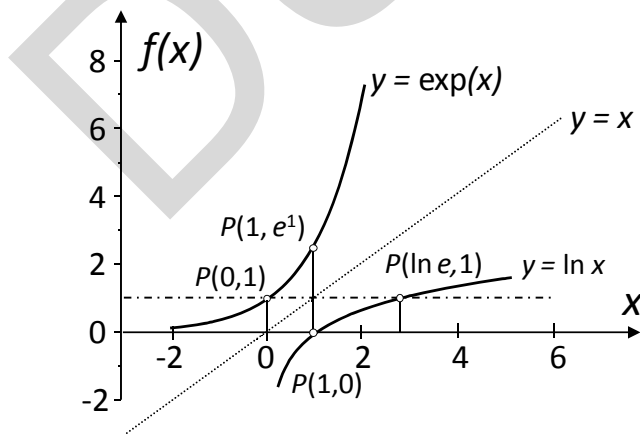
(3) Határozzuk meg az alábbi kifejezés határértékét:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \ln e = 1 \quad (6.37)$$

A reláció felhasználásával kapjuk, hogy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \approx x, \text{ ha } x \ll 1 \quad (6.38)$$

azaz $\ln(1+x) \approx x$ ha $x \ll 1$.



6.3 ábra. Az $\exp(x)$ és $\ln x$ függvények grafikonja.

7 Differenciálhányados, differenciálási szabályok

7.1 Differenciahányados és határértéke: differenciálhányados

Vizsgáljuk meg az $y = f(x)$ folytonos függvény viselkedését az $[a, b]$ intervallumban. A függvény átlagos változását egy tetszőleges x hely környezetében következő kifejezéssel adhatjuk meg (7.1 ábra):

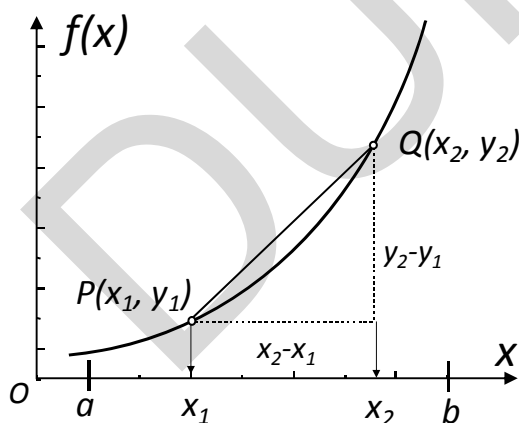
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (7.1)$$

A számított kifejezés geometriai jelentése nem egyéb, mint a PQ szelő iránytangense (7.1 ábra). Legyen mármost $h \neq 0$ pozitív vagy negatív szám, és válasszuk x_1 és x_2 értékét – ahol $x_1, x_2 \in [a, b]$ $x_1, x_2 \in [a, b]$ – a következő módon:

$$x_1 = x \text{ és } x_2 = x + h \quad (7.2),$$

akkor a hányados a következő alakot veszi fel:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (7.3)$$



7.1 ábra. Függvény átlagos változása.

A hányadost *különbségi hányadosnak* vagy *differenciahányadosnak* nevezzük. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk meg az $y = x^2$ függvény differenciahányadosát egy tetszőleges x helyen.

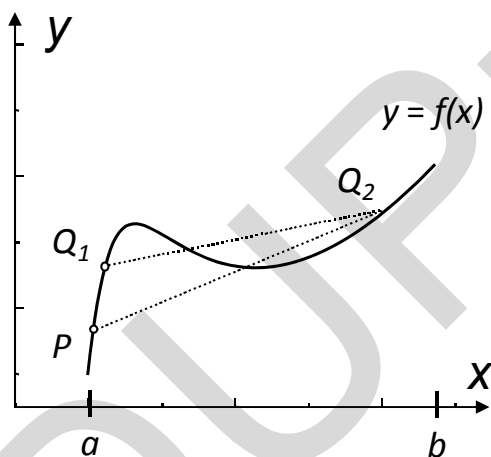
$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h \quad (7.4)$$

Látjuk, hogy a különbségi hányados függ az x értékétől és a választott h szám nagyságától. Azt is megfigyelhetjük a 7.2 ábráról, hogy az ott felrajzolt $y = f(x)$ folytonos függvény esetén sem a PQ_1 , sem pedig a Q_1Q_2 szelők nem alkalmasak a függvény *átlagos* változásának jellemzésére. A most követendő eljárás segítségével viszont elérhetjük a *pillanatnyi* változás leírását. Az 7.3 ábra mutatja, hogyan változik a PQ szelő irántangense, ha a Q pont közeledik a P ponthoz, határesetben a szelő a P pont érintőjét közelíti illetve vele azonos. Ezt a következő módon fejezhetjük ki:

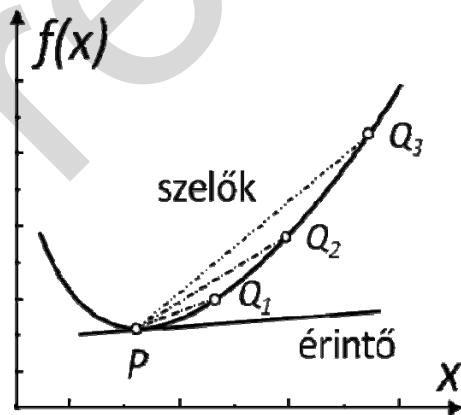
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (7.5)$$

ahol a $h \neq 0$ tetszőleges nullához tartó sorozat. Ha a fenti különbségi hányadosnak a határértéke létezik akármilyen nullához tartó sorozaton át fut a h , akkor a hányadost az $f(x)$ függvény x helyen vett *differenciálhányadosának* nevezzük, és a következő jelölést használjuk:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (7.6)$$



7.2 ábra



7.3 ábra

Magát az eljárást az $y = f(x)$ függvény *differenciálásának* vagy *deriválásának* hívjuk. A fent használt jelölésen kívül használatos és egyenértékű a Leibniz által bevezetett jelölés is:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (7.7),$$

ahol Δx és Δy a független és függő változó növekményeit jelentik. Ez utóbbi jelölések gyakran fordulnak elő a fizikai és kémiai törvényszerűségek levezetésénél is. Egyes tankönyvekben előfordul a

$$D \equiv \frac{d}{dx}$$

jelölés is. Ebben az esetben azt mondjuk: a D egy *operátor* (műveleti utasítás), amelyet az $f(x)$ függvényre alkalmazva a függvény x változó szerinti differenciálhányadosát állítjuk elő.

A *differenciálhányados geometriai jelentése* a differenciahányados fogalma és a 7.3 ábra alapján nyilvánvaló: a differenciálhányados az illető x abszcisszájú pontban az $f(x)$ függvényhez húzott érintő iránytangensét jelenti, azaz:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (7.8)$$

A differenciálhányados fogalmának ismeretében az x pontban kapott *pillanatnyi* változás segítségével az *átlagos* változást is kiszámíthatjuk az x pont környezetében ($x_2 \neq x_1$): ha az x_1 pont környezetében az $f(x)$ függvény differenciálható és folytonos, akkor:

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{és} \quad f(x_2) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \quad (7.9)$$

azaz a differenciálhányados x_1 helyen vett értékének és az $f(x_1)$ értékének ismeretében a függvény közelítő értékét az x_2 helyen kiszámíthatjuk. A fenti összefüggés jobboldalán álló kifejezés segítségével könnyen bebizonyíthatjuk az alábbi tételt is:

Tétel

Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallum minden pontjában differenciálható, akkor a függvény folytonos.

A feltétel értelmében az $f(x)$ függvény differenciálható, ezért, ha $x_2 \rightarrow x_1$, akkor:

$$f(x_2) \rightarrow f(x_1) \quad (7.10)$$

azaz a függvény az adott intervallumban folytonos.

7.2 A differenciálás szabályai

7.2.1 Függvények összegének differenciálhányadosa

Véges sok függvény összegének/különbségének differenciálhányadosa az összeadandó/kivonandó függvények differenciálhányadosának összegével/különbségével egyenlő.

A tétel érvényességét két függvény esetében mutatjuk meg.

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két az $[a, b]$ intervallumban differenciálható függvény, és legyen $F(x)$ a két függvény összege/különbsége. Az x helyen a különbségi hányados:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} \quad (7.11)$$

A jobboldalon álló kifejezést felbonthatjuk két különbségi hányadosra. Mivel a $h \neq 0$ nullához tartó sorozat, áttérhetünk a határértékekre is:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (7.12)$$

Az egyenlet jobboldalán alkalmaztuk az összeg határértékére vonatkozó összefüggést. Mivel $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatók, ezért a jobboldalon két differenciálhányados összege/különbsége áll. Így $F(x)$ is differenciálható, és differenciálhányadosa $f(x)$ és $g(x)$ differenciálhányadosának összegével/különbségével egyenlő:

$$F'(x) = f'(x) \pm g'(x) \quad (7.13)$$

7.2.2 Függvények szorzatának differenciálhányadosa

Két függvény szorzatának differenciálhányadosa egyenlő: az első függvény differenciálhányadosának a második függvénnyel való szorzatához hozzáadjuk az első függvénynek a második függvény differenciálhányadosával való szorzatát:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (7.14)$$

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két az $[a, b]$ intervallumban differenciálható függvény, és legyen $F(x)$ a két függvény szorzata. Az x helyen a különbségi hányados:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \quad (7.15)$$

A jobboldalon álló kifejezésnél végezzünk el egy azonos átalakítást úgy, hogy hozzáadunk és egyidejűleg levonunk egy alkalmasan választott kifejezést, és átrendezzük az egyenlet jobboldalát:

$$\left(\frac{f(x+h)g(x+h)}{h} - \frac{f(x)g(x+h)}{h} \right) + \left(\frac{f(x)g(x+h)}{h} - \frac{f(x)g(x)}{h} \right) \quad (7.16)$$

További azonos átalakítással a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (7.17)$$

Mivel a $h \neq 0$ nullához tartó sorozat, áttérve a határértékekre és alkalmazva a határértékre vonatkozó tételeket kapjuk:

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (7.18)$$

7.2.3 Függvény reciprokának differenciálhányadosa

Függvény reciprokának differenciálhányadosa, feltéve, hogy az x helyen $f(x) \neq 0$ egyenlő:

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \quad (7.19)$$

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumban differenciálható és az x helyen $f(x) \neq 0$. Írjuk fel a különbségi hányadost, és hozzunk közös nevezőre a számlálóban:

$$\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = -\frac{1}{h} \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x+h)f(x)} = -\frac{1}{f(x+h)f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (7.20)$$

Ha alkalmazzuk a határértékre vonatkozó tételt és a függvény differenciálására vonatkozó szabályt, megkapjuk a fenti kifejezést.

7.2.4 Két függvény hányadosának differenciálhányadosa

Két függvény hányadosának differenciálhányadosa egyenlő:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (7.21)$$

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két az $[a,b]$ intervallumban differenciálható függvény, és tegyük fel továbbá, hogy az x helyen a $g(x) \neq 0$. Alkalmazzuk a függvények szorzatának differenciálhányadosára vonatkozó szabályt:

$$\left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right)' = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2} \right) \quad (7.22)$$

Ha az egyenletet átrendezzük, éppen a fenti összefüggéshez jutunk.

7.2.5 Összetett függvény differenciálhányadosa

Az $f(g(x))$ összetett függvény differenciálhányadosát a következő összefüggés adja meg:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \quad (7.23),$$

azaz az $f(x)$ függvény $g(x)$ helyen vett differenciálhányadosát szorozzuk a $g(x)$ függvény x helyen vett differenciálhányadosával.

Tegyük fel, hogy az $f(g(x))$ függvény differenciálható az $[a,b]$ intervallumban differenciálható $g(x)$ függvény értékkészletéhez tartozó halmazon. Írjuk fel az $f(g(x)) \equiv F(x)$ függvény különbségi hányadosát, és alakítsuk át a következő módon:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned} \quad (7.24)$$

ahol $\Delta(x)$ jelenti a különbségi hányadost. Mivel a $g(x)$ függvény differenciálható, ezért a fenti szorzat második tényezője $g'(x)$ -hez tart, ha a $h \neq 0$ sorozat a nullához tart. A differenciálható $g(x)$ függvény azonban a mondott intervallumban folytonos, ezért:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [g(x+h) - g(x)] \rightarrow 0 \quad (7.25)$$

ha a $h \neq 0$ sorozat a nullához tart; a szorzat első tényezője pedig $f'(g(x))$ -hez tart. Tehát:

$$\Delta'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad (7.26)$$

7.2.6 Inverz függvény differenciálhányadosa

Tegyük fel, hogy az $y = f(x)$ függvény differenciálható, és $f'(x) \neq 0$ az $[a, b]$ intervallumban, szigorúan monoton és folytonos a mondott intervallumban. Ebből következik, hogy $f(x)$ függvénynek létezik inverz függvénye $f^{-1}(y)$ az $[a, b]$ intervallumban. Induljunk ki a differenciálható $f(x)$ függvény különbségi hányadosából:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad (7.27)$$

Ha $P(x_0, y_0)$ és $P(x, y)$ a két kérdéses pont az $[a, b]$ intervallumban, akkor a korábban tárgyalt közelítő összefüggés értelmében:

$$y - y_0 \cong f'(x)(x - x_0) \quad (7.28)$$

Mivel az $f(x)$ függvénynek létezik az inverz függvénye $f^{-1}(y)$, ezért:

$$y - y_0 \cong (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))f'(x) \text{ ugyanis } x = f^{-1}(y) \quad (7.29)$$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \cong \frac{1}{f'(x)} \quad (7.30)$$

Ha mármost y akármilyen 0-hoz tartó sorozattal tart y_0 -hoz (az $y = f(x)$ függvény folytonos), akkor:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \quad (7.31),$$

mivel $f(x)$ differenciálható a feltevés értelmében az $[a, b]$ intervallumban. Szokásos egy másik jelölés is:

$$\overline{f(y)}' = \frac{1}{f'(x)} \quad (7.32)$$

7.3 Elemi függvények differenciálhányadosa

7.3.1 Állandó és lineáris függvény differenciálhányadosa

Könnyű belátni a szemlélet alapján, hogy az állandó függvény differenciálhányadosa zérus, míg a lineáris függvény változása a teljes értelmezési tartományban állandó:

$$f(x) = C \text{ esetén } f'(x) = 0 \quad (7.33)$$

$$f(x) = Cx \text{ esetén } f'(x) = C \quad (7.34)$$

7.3.2 Hatványfüggvény differenciálhányadosa

Legyen $n > 0$ egész szám, az $y = x^n$ függvény tetszőleges x helyén vett különbségi hányadosa, ahol $h \neq 0$:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h} (x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot h^2 + \dots - x^n) \quad (7.35)$$

Ha h akármilyen nullához tartó sorozat, a különbségi hányados határértéke:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n \cdot x^{n-1} \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (7.36)$$

A különbségi hányados hasonló felhasználása segítségével könnyen igazolni lehet, hogy a differenciálás fenti eljárása érvényes akkor is, ha n helyett a kitevőben tetszőleges *racióális* szám áll.

Példa

$$y = \frac{1}{x^2} \text{ esetén } \left(\frac{1}{x^2} \right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad (7.37)$$

$$y = \sqrt[3]{x} \text{ esetén } (\sqrt[3]{x^2})' = \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad (7.38)$$

7.3.3 Trigonometrikus függvények differenciálhányadosa

Legyen $y = \sin x$ és $h \neq 0$ nullához tartó sorozat. A különbségi hányados tetszőleges x helyen:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \quad (7.39)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x \quad (7.40)$$

A differenciálhányados meghatározásánál felhasználtuk az alábbi trigonometrikus összefüggést:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (7.41)$$

Tehát:

$$(\sin x)' = \cos x \quad (7.42)$$

Hasonló megfontolással kapjuk az $y = \cos x$ függvény differenciálhányadosát:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right] = -\sin x \quad (7.43)$$

Tehát:

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (7.44)$$

A felhasznált trigonometrikus összefüggés:

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \quad (7.45)$$

Az $y = \operatorname{tg} x$ és $y = \operatorname{ctg} x$ függvények differenciálhányadosát a függvények hányadosára vonatkozó szabály alapján határozzuk meg:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ ha } \cos x \neq 0 \quad (7.46)$$

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \text{ ha } \sin x \neq 0 \quad (7.47)$$

7.3.4 Exponenciális és logaritmus függvények differenciálhányadosa

Célszerű a választás, ha először az $y = \ln x$ és $y = e^x$ függvények differenciálhányadosát határozzuk meg. Az e^x függvénynek a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban, míg az $\ln x$ függvénynek a $(0, +\infty)$ nyitott intervallumban van differenciálhányadosa:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{h}} \right)^{\frac{1}{h}} \quad x \neq 0 \quad (7.48)$$

A nevezetes határértékekre vonatkozó összefüggés alapján:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \quad (7.49)$$

Tehát:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \quad (7.50)$$

Az $\ln x$ és e^x függvények egymás inverz függvényei, ezért e^x differenciálhányadosát az inverz függvényekre vonatkozó eljárás alapján határozzuk meg:

$$(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x \quad (7.51)$$

Az $y = e^x$ függvény differenciálhányadosa önmaga. Ez indokolja, hogy a természettudományokban használt matematikai összefüggések tárgyalásánál a természetes alapú logaritmus használatát részesítik előnyben. A logaritmus fogalma és azonosságai alapján a természetes alapú logaritmustól és exponenciálistól eltérő függvények differenciálhányadosai könnyen meghatározhatók.

A logaritmus azonossága szerint:

$$y = a^x = e^{x \cdot \ln a}, \text{ ezért } (a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a \quad (7.52)$$

Hasonlóan:

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \text{ ezért } (\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad (7.53)$$

Példa

Legyen r tetszőleges valós szám. Differenciáljuk az $y = x^r$ függvényt.

$$(x^r)' = (e^{r \cdot \ln x})' = e^{r \cdot \ln x} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r-1} \quad (7.54)$$

tehát a hatványfüggvényekre vonatkozó szabály tetszőleges valós szám esetén is igaz.

Differenciáljuk az $y = x^x$ függvényt, ahol x egy tetszőleges valós szám.

$$(x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1) \quad (7.55)$$

(Itt az összetett függvény differenciálására vonatkozó szabályt alkalmaztuk.)

7.3.5 Trigonometrikus függvények inverz (arcus) függvényeinek differenciálhányadosa

Alkalmazzuk az inverz függvény differenciálására vonatkozó szabályt: $y = \arcsin x$ esetében. A $\sin x$ függvény a $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ intervallumban növekvő, és differenciálhányadosa nem nulla, ezért

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ mivel } \sin(\arcsin x) = x \quad (7.56)$$

Hasonlóan kapjuk a következő deriváltakat:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (7.57)$$

7.3.6 Logaritmikus differenciálás

Segíthet a differenciálhányados meghatározásánál, ha az eredeti függvény helyett a függvény logaritmusát differenciáljuk:

$$y = f(x), \quad \ln y = \ln f(x), \quad \frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \quad (7.58)$$

Példa

Differenciáljuk az $y = x^r$ függvényt.

$$\ln y = r \ln x, \quad \frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} y' = r \cdot \frac{1}{x}, \quad y' = r \cdot x^r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r-1} \quad (7.59)$$

7.3.7 Implicit függvény differenciálhányadosa

Előfordul, hogy olyan függvényt kell differenciálni, amelynél az egyenlet nem oldható meg y -ra, ezért ebben az esetben is az összetett függvény differenciálási szabálya szerint kell/lehet eljárni, mivel $y = y(x)$.

Példa

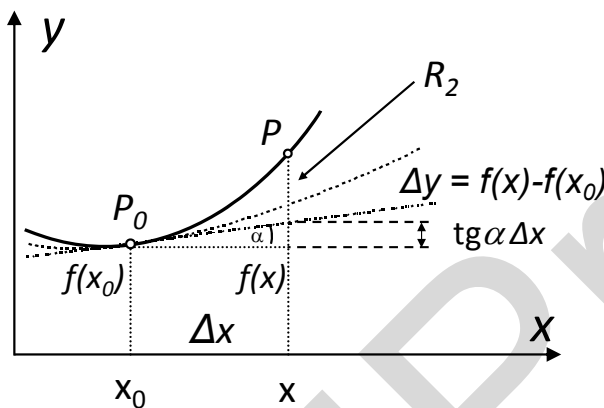
Differenciáljuk az $xy - e^x + e^y = 0$ függvényt. Megoldás:

$$y + x \cdot y' - e^x + e^y \cdot y' = 0, \quad y' = \frac{e^x - y}{e^y + x} \quad (7.60)$$

8 A differenciál. Magasabbrendű deriváltak. Függvények hatványsorba fejtése. Taylor sor

8.1 A differenciál

Legyen az $y = f(x)$ függvény az x_0 pont környezetében folytonos függvény. A független változó $\Delta x = x - x_0$ növekményének megfelelő $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ változás csakis akkor lesz egyenesen arányos Δx -el, ha az $f(x)$ lineáris függvény.



8.1 ábra. A függvény differenciálja.

Ha az $f(x)$ függvény az x_0 helyen differenciálható, és Δx kicsi, akkor jó közelítéssel felírhatjuk, hogy:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x), \quad (8.1)$$

azaz a függvény változását első közelítésben (lineáris közelítés) a differenciáhányados segítségével adhatjuk meg. A

$$df(x) = f'(x_0) \cdot dx \quad (8.2)$$

kifejezést az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett *differenciáljának* nevezzük (8.1 ábra). Vegyük észre, hogy itt dx és $df(x)$ mérhető mennyiségeket jelentenek; dx most az x független változó (argumentum) növekményét, míg $df(x)$ az $P(x_0)$ pontban húzott érintő ordinátájának x -től függő változását jelenti.

A differenciáhányados bevezetésénél jeleztük, hogy a dy/dx az $y(x)$ függvény x változó szerinti differenciáhányadosának szimbóluma, *nem pedig* két mennyiség hányadosa, itt azonban a megegyezés alapján a következő jelöléseket használjuk

$$\Delta y \approx dy = df(x) = f'(x) \cdot dx \quad \text{és} \quad \Delta x \approx dx, \quad (8.3)$$

feltéve, hogy félreértést nem okoz. A használt jelölések bevezetése mögött az a megfontolás rejlik, hogy a természeti törvények kis változások esetén a fizikai vagy más mennyiségek közötti *lineáris* kapcsolattal fejezhetők ki. Ezért nagyon sok összefüggést *differenciális formában* fogalmazzuk meg.

Példák

(1) Az $y = \sin x$ függvény differenciálja: $dy = d\sin x = \cos x \cdot dx$

(2) Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény differenciálja: $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

(3) Az $y = \ln x$ függvény differenciálja: $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$

(4) Tegyük fel, hogy y az u és v változók függvénye: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Ha u és v értéke Δu -val, illetve Δv -vel megváltozik, akkor Δy -t a következő módon fejezhetjük ki:

$$\Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - u \cdot v = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v \quad (8.4)$$

Ha az utolsó tagot a másik két tag mellett elhanyagoljuk, akkor a fenti jelölések bevezetésével a következő végeredményt kapjuk, alkalmazva a két függvény szorzatára vonatkozó differenciálási szabályt:

$$y'(x) \cdot dx = u'(x) \cdot dx \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot dx, \text{ illetve } dy = u \cdot dv + v \cdot du, \quad (8.5)$$

ha rövidített írásmódot használunk, ahol $dy = y'(x) \cdot dx$, akkor:

$$du = u'(x) \cdot dx \text{ és } dv = v'(x) \cdot dx \quad (8.6).$$

8.2 Magasabbrendű deriváltak

Tegyük fel, hogy az $y = f(x)$ függvénynek az x változó valamely (a, b) intervallumában létezik $f'(x)$ deriváltja. Ha ezen utóbbi függvénynek is létezik az első deriváltja, akkor ezt az utóbbi függvényt az eredeti $y = f(x)$ függvény *második deriváltjának* nevezzük.

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad (8.7)$$

Teljesen hasonlóan az $y = f(x)$ függvény n -edik deriváltjának az $(n-1)$ -edik derivált függvény deriváltját nevezzük, feltéve, hogy az $(n-1)$ -edik derivált létezik, és az $(n-1)$ -edik derivált függvény differenciálható, azaz a

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

határérték létezik.

8.3 Többváltozós függvények

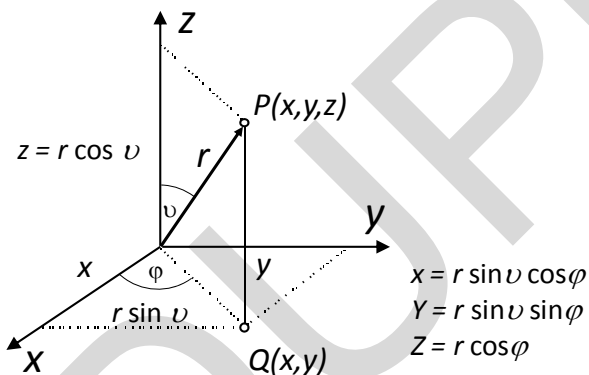
Azokat a függvényeket, amelyeknek értelmezési tartománya az R^n halmaz ($n = 2$ sík, $n = 3$ tér) részhalmaza, azaz több független változója van, *többváltozós függvényeknek* nevezzük.

Példa

Az $f: R^2 \rightarrow R$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény geometriailag egy forgási paraboloid.

Értelmezési tartományon azon pontok összességét értjük, amelyekre nézve a z analitikus kifejezés valós számértékkel rendelkezik.

A kétváltozós függvényeket a térbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben ábrázoljuk. Kétféle koordináta-rendszer létezik: a jobb- ill. balsodrású koordináta-rendszer. Jobbsodrású a koordináta-rendszer akkor, ha a Z tengely irányából nézve a pozitív X tengelyt az Y tengelybe forgatva a forgatás az óramutató járásával ellenkező. A jobb- vagy balsodrású rendszernek a függvényanalízisben nincs jelentősége, azonban a fizikában és kémiában igen (pl. impulzusmomentum vektor iránya, optikai forgatóképesség).



8.2 ábra. Térbeli koordináta-rendszer. A derékszögű koordináta-rendszer helyett számos alkalommal használják a poláris koordináta-rendszert. Az ábrán feltüntettük az összefüggéseket a két koordináta-rendszer között.

A többváltozós függvényekre a korábbi eredményeket formálisan könnyen átvihetjük, ha azt mondjuk, hogy a $z = f(x, y)$ függvény a $P = P(x, y)$ pont $z = f(P)$ függvénye. A P pont minden egyes helyzetének a z mennyiség meghatározott értéke felel meg (az $z = f(x, y)$ függvény a síkbeli helyzet helyett most egy térbeli helyzetet rendel a z változóhoz).

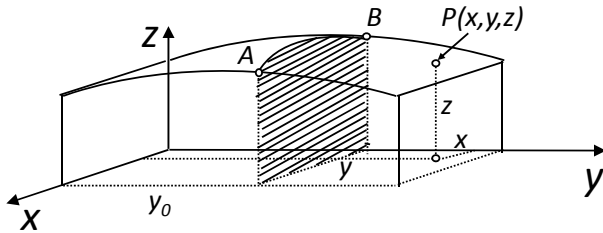
8.4 Többváltozós függvények differenciálása

Vizsgáljuk meg az $y = y_0$ összefüggést, amely geometriailag egy síkfelületet határoz meg!

Ha $y = y_0$ vagy $x = x_0$ állandó, akkor ezen pontok mértani helye egy a XZ , illetve YZ síkkal párhuzamos síkot határoz meg, amely a felületet egy *síkgörbében* (AB) metszi. A síkgörbét a

$$z = f(x, y_0) = g(x) \quad \text{vagy} \quad z = f(x_0, y) = h(y) \quad (8.8)$$

függvénnyel írhatunk le. A $z_0 = f(x, y)$ pontok összessége viszont egy *nívóvonalat* (szintvonalat) alkot.



8.3 ábra

Határérték: az A számot a $z = f(x, y) = f(P)$ függvény határértékének mondjuk a $P_0 = P_0(x_0, y_0)$ pontban, ha minden pozitív ε -hoz lehet találni olyan δ számot ($\delta > 0$), hogy valahányszor a P_0 -tól különböző P pontokra nézve fennáll, hogy a síkbeli környezet ρ sugara

$$\rho = \overline{PP_0} < \delta, \quad \text{mindannyiszor} \quad |f(P) - A| < \varepsilon \quad (8.9)$$

vagy más megfogalmazással:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \quad (8.10)$$

Megjegyzés: A megfogalmazás azt jelenti, hogy

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |y - y_0| < \delta, \quad \text{továbbá} \quad |f(x, y) - A| < \varepsilon. \quad (8.11)$$

Folytonosság: A $z = f(x, y) = f(P)$ függvényt a $P_0 = P_0(x_0, y_0)$ pontban folytonosnak mondjuk, ha a

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) \quad (8.12)$$

határérték létezik, azaz a határérték megegyezik a függvény illető pontban vett helyettesítési értékével.

8.4.1 Parciális differenciálhányados

A $z = f(x, y) = f(P)$ függvény változásának vizsgálatánál célszerű oly módon eljárni, hogy az egyik változó pl. y rögzített értékénél vizsgáljuk a függvény változását a másik változó függvényében. Ha a

$$z = f(x, y_0) \quad \text{vagy} \quad z = f(x_0, y) \quad (8.13)$$

„egyváltozós” függvények különbségi hányadosának a kérdéses x vagy y pontban van határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az illető többváltozós függvénynek létezik x , illetve y szerinti *parciális differenciálhányadosa*.

Az x szerinti parciális differenciálhányados

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y_0) - f(x, y_0)}{h} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad (8.14)$$

az y szerinti parciális differenciálhányados

$$f_y'(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y+h) - f(x_0, y)}{h} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad (8.15)$$

ahol a ∂ szimbólum a parciális differenciálhányados jele.

Példa

- (1) Az általános gáztörvény ideális gázokra érvényes alakja: $p = \frac{RT}{V}$, V a gáz térfogatát, p a nyomását és T a gáz abszolút hőmérsékletét jelenti. A parciális differenciálhányadosok:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{T=\text{állandó}} = -\frac{RT}{V^2}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V=\text{állandó}} = \frac{R}{V} \quad (8.16)$$

ahol a zárójel mögötti index tünteti fel az állandónak választott változót.

- (2) Határozzuk meg a parciális differenciálhányadosokat a reális gázokra érvényes van der Waals állapotfüggvény esetén:

$$p = \frac{nRT}{(V-nb)} - n^2 \frac{a}{V^2} \quad (8.17)$$

ahol n a mólok száma, a és b állandók.

8.4.2 A teljes differenciál

A $z = f(x, y)$ függvény teljes differenciálját nyilvánvalóan a két változóra vonatkozó differenciálok összege adja meg:

$$dz = f_x'(x, y)dx + f_y'(x, y)dy = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy \quad (8.18)$$

Példa

Ismeretes, hogy a termodinamikában a H entalpiát az alábbi összefüggés segítségével adják meg:

$$H = U + pV, \quad (8.19)$$

ahol U a tekintett rendszer belső energiája, p a rendszerben uralkodó nyomás, V a térfogat. A teljes differenciál:

$$dH = dU + p dV + V dp. \quad (8.20)$$

Ha a nyomás a rendszerben állandó, akkor

$$dH = dU + p dV. \quad (8.21)$$

Tekintsük ismét a $z = f(x, y)$ függvényt. Tegyük fel, hogy a függvény legalább kétszer differenciálható az x és y változók szerint. Az első differenciálhányadosok:

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad f'_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad (8.22)$$

Feltevésünk szerint, a függvény kétszer differenciálható, ezért összesen négy differenciálhányadost kaphatunk:

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \quad (8.23)$$

$$f''_{xy}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \quad f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \quad (8.24)$$

Fontos következménye a második differenciálásnak, hogy a vegyes második parciális differenciálhányadosok egyenlők:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) \quad (8.25),$$

azaz a differenciálás sorrendje felcserélhető. Ennek hasznát sokszor fogjuk látni, amikor segítségével a *termodinamikában* számos érdekes összefüggés származtatható le.

8.5 Hatványsorok

Az

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \quad (8.26)$$

függvényt, amelynek tagjai az a_i állandók és a $(x - x_0)$ különbség egész kitevőjű hatványainak szorzatai, *hatványsornak* nevezzük; az x_0 zérus is lehet. Ha a hatványsor konvergens, akkor x valamilyen $f(x)$ függvényét állítja elő. Ekkor azt mondjuk, hogy a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \quad (8.27)$$

a kifejezés az $f(x)$ függvény *hatványsora*. A hatványsor alapvető haszna, hogy bonyolult analitikus alakban megadott függvények helyett polinomok segítségével dolgozhatunk, azaz a függvények bizonyos családját n -ed fokú polinom segítségével állíthatjuk elő.

Az eljárás kapcsán két alapvető probléma merül fel:

- (1) meghatározni az a_i együtthatókat,
- (2) igazolni szükséges a konvergenciát.

Két lehetőség közül választhatunk, az egyik a *határozatlan együtthatók módszere*, amellyel n -ed fokú polinom esetén n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amely algebrai eszközökkel megoldható. Az egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják az ismeretlen együtthatókat.

A második módszer kézenfekvő; ha az $f(x)$ függvény n -ed fokú polinom, akkor n -szer differenciálható, és n ismeretlen együtthatót tartalmaz. Ha a feltevés helytálló, akkor

differenciálhányadosokat egymás után megvizsgáljuk az $(x - x_0) = 0$ helyen. Minden a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) együttható megadható, mint az $f(x)$ i -edik differenciálhányadosával arányos mennyiség:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (8.28),$$

ha $(x - x_0) = 0$, akkor $a_0 = f(0)$;

$$f'(x) = a_1(x - x_0) + 2a_2(x - x_0)^2 + 3a_3(x - x_0)^3 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots, \quad (8.29)$$

ha $(x - x_0) = 0$, akkor $a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$;

$$f''(x) = 2 \cdot 1 a_2(x - x_0) + 3 \cdot 2 a_3(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \dots, \quad (8.30)$$

ha $(x - x_0) = 0$, akkor $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$;

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 a_n(x - x_0), \quad (8.31)$$

ha $(x - x_0) = 0$, akkor $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Az $f(x)$ függvény hatványsora:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (8.32)$$

A polinomot *Taylor-polinomnak* nevezik (jele: $T_n(x)$), aki először állított elő hatványsort ebben az alakban. Ha azonban $x_0 = 0$, akkor a polinom neve: *MacLaurin-polinom*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (8.33)$$

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény most nem polinom, de tételezzük fel, hogy az $f(x)$ függvény egyértékű folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumban, továbbá $(n+1)$ -szer *folytonosan differenciálható* (differenciálhányados is folytonos) az x_0 hely környezetében, akkor a fentiekhez hasonló módon:

$$f(x) = T_n(x - x_0) + R_n(x) \quad (8.34),$$

ahol $T_n(x - x_0)$ az $f(x)$ közelítő függvénye, $R_n(x)$ az ún. *maradéktag*, az n -ed fokú Taylor polinom hibája. Ha $f(x)$ polinom, akkor nyilván $R_n(x) = 0$.

A közelítés jóságára nézve a következőket mondhatjuk: Mivel a függvény $(n+1)$ -szer differenciálható, érvényes a következő becslés a maradéktagra:

$$\begin{aligned}
 R_n(x) &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \right| \leq \\
 &\leq \max_{x \in [a,b]} \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \leq \max_{x \in [a,b]} \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

Ha feltételezzük, hogy az $f(x)$ függvény akárhányszor differenciálható, és igaz, hogy van olyan K szám, hogy

$$|f^{(n)}(x)| \leq K \tag{8.36}$$

azaz a függvény korlátos az n -edik differenciálás után, akkor:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{(n+1)!} h^{n+1} = 0, \text{ ahol } (b-a) \leq h, \tag{8.37}$$

tehát az $f(x)$ függvény:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \tag{8.38}$$

végtelen polinom (sor) határértékeként állítható elő. Ezt a polinomot az $f(x)$ függvény *Taylor sorának* nevezzük.

A konvergencia problémája. Könnyű bebizonyítani, hogy ha a

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \tag{8.39}$$

hatványsor két egymást követő tagjának hányadosából alkotott kifejezés határértéke kisebb 1-nél:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{r+1} x^{r+1}}{a_r x^r} \right| = x \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} \right| < 1 \tag{8.40}$$

akkor a hatványsor konvergens.

8.6 Néhány ismert függvény hatványsora

$$(1) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{8.41}$$

$$(2) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1) \tag{8.42}$$

$$(3) \quad (1+x)^a = 1 + a \cdot x + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (|x| < 1) \tag{8.43}$$

$$(4) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{....(páratlan függvény)} \tag{8.44}$$

$$(5) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \dots (\text{páros függvény}) \quad (8.45)$$

$$(6) \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.46)$$

8.7 Műveletek hatványsorokkal

Legyen adott két függvény, $A(x)$ és $B(x)$ hatványsora, és tegyük fel, hogy a két végtelen sor konvergens:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \text{és} \quad B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad (8.47)$$

akkor a következő műveletek végezhetőek el:

$$(1) \quad \text{Összevonás: } C(x) = A(x) \pm B(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l \pm b_l) x^l \quad (8.48)$$

$$(2) \quad \text{Szorzás: } C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_i b_k x^{i+k} \quad (8.49)$$

$$C(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots \quad (8.50)$$

$$\text{az általános együttható: } c_r = \sum_{i=0}^r a_i b_{r-i} \quad (8.51)$$

$$(3) \quad \text{Differenciálás és integrálás: } A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad \frac{dA(x)}{dx} = \sum_{r=0}^{\infty} r a_r x^{r-1} \quad (8.52)$$

$$\int A(x) dx = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \int x^r dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{r+1} x^{r+1}, \quad (8.53)$$

azaz a konvergens hatványsorok tagonként differenciálhatók és integrálhatók.

Példa

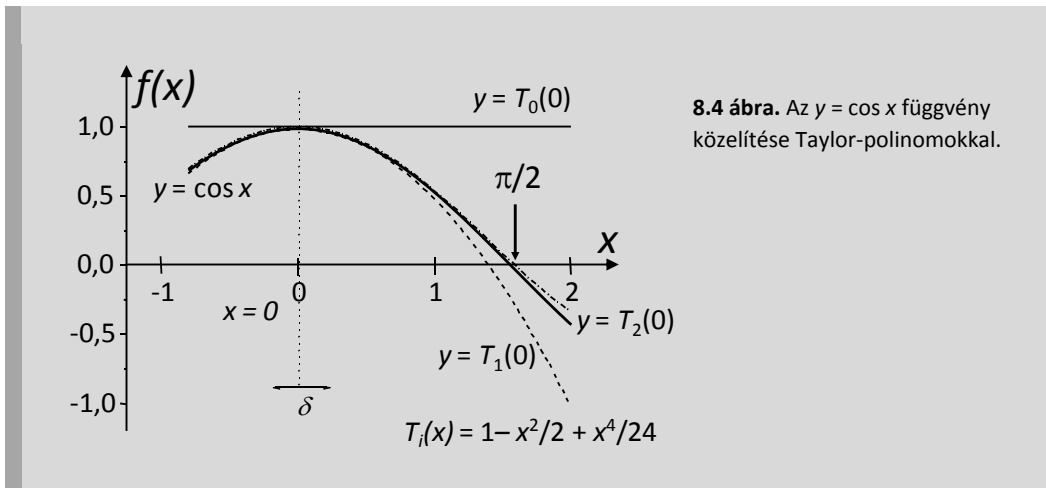
$$(1) \quad \text{Bizonyítsuk be, hogy } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Mivel $x \ll 1$, elegendő $\operatorname{tg} x$ hatványsorának első két tagját figyelembe venni:

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}, \quad \text{ebből} \quad \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} \approx \frac{1}{3}. \quad \text{Ha } x \rightarrow 0, \text{ akkor a hatványsor minden}$$

további tagja nullához konvergál.

$$(2) \quad \text{Vizsgáljuk meg } \cos x \text{ hatványsorának első néhány tagját és ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben.}$$



8.8 A l'Hospital szabály

Tétel

Ha két függvény $f(x)$ és $g(x)$ kielégíti a következő feltételeket az $[x_1, x_2]$ intervallumban

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \text{ vagy} \quad (8.54)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ és } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad (8.55)$$

- (2) az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek az a hely környezetében ($x \neq a$) van véges vagy végtelen differenciáhányadosuk, továbbá létezik a:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ határérték, akkor} \quad (8.56)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (8.57)$$

(Ha $a = \infty$, akkor az $x = \frac{1}{z}$ helyettesítéssel a 0 környezetét nyerjük.)

A tétel bizonyítása egyszerű: fejtsük Taylor sorba a két függvény hányadosát az a helyen:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots}{g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots} \quad (8.58)$$

Mivel $f(a) = g(a) = 0$, továbbá $(x-a)$ -val lehet egyszerűsíteni, ezért:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (8.59)$$

8.8.1 A Taylor-sorfejtés egy alkalmazása

Általánosan fogalmazva a Taylor-sorfejtésnek a természettudományokban akkor van kitüntetett szerepe, ha egy kémiai (vagy fizikai, biológiai...) mennyiségnek a megváltozása nagyságrendekkel, azaz sokkal, kisebb mint a mennyiség értéke. Ekkor a nehézséget az jelenti az alkalmazásban, ha meg akarjuk határozni az adott mennyiségtől függő függvényeknek a megváltozását. Ilyenkor közelítést alkalmazhatunk a Taylor-sorfejtés segítségével: a mennyiségtől függő függvényeknek a megváltozása jól közelíthető a Taylor sor néhány első tagjával.

A matematikai inga (vagy fonálinga) lengésének a periódusideje (T) meghatározható az inga hosszának ismeretében:

$$T(l) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (8.60)$$

Ahol l az inga hossza és g a gravitációs gyorsulás. Az inga hossza környezeti hatásokra (pl. hőmérséklet, mechanikai hatások...) kis mértékben megváltozhat, és így a lengés periódus ideje is módosul. Hogyan számolhatjuk ezt a periódusidő változást?

Legyen az inga megnyúlása dl . Ekkor a periódusidő egyenletébe l helyett $l + dl$ -t írva:

$$T(l + dl) = 2\pi \sqrt{\frac{l + dl}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{dl}{l}\right)} \quad (8.61)$$

Vezessük be az $x = dl / l$ mennyiséget, ekkor:

$$T(l + dl) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{1 + x}$$

Fejtsük sorba az $\frac{1}{2} \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2}$ függvényt a nulla körül (azaz legyen $x_0 = 0$):

$$\sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \dots \quad (8.62)$$

A sorfejtés első két tagját figyelembevéve így a periódusidőre a következő közelítést kapjuk:

$$T(l + dl) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dl}{l}\right) = T(l) + T(l) \frac{1}{2} \frac{dl}{l} \quad (8.63)$$

Ebből a periódusidő megváltozása:

$$dT = T(l + dl) - T(l) = \frac{1}{2} \frac{T(l)}{l} dl \quad (8.64)$$

Az eredményből látható, hogy a periódusidőnek a hosszváltozás miatt bekövetkező változása függ a hosszváltozás nagyságától, az inga hosszától és az eredeti periódusidőtől is.

9 Függvények tulajdonságainak vizsgálata. Szélsőértékek

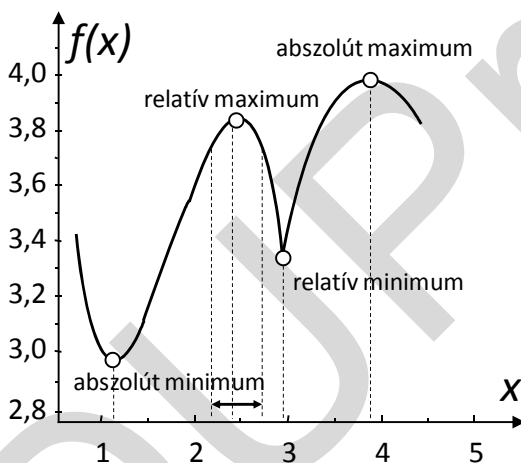
9.1 Függvények szélsőértéke

Maximum és minimum fogalma. Legyen az $f: f(x)$ ($x \in \tilde{R}$) függvény az $[a, b]$ intervallumban folytonos függvény. Az x_0 pontban relatív (lokális) maximuma (minimuma) van, ha az x_0 pontnak létezik egy $\varepsilon > 0$ sugarú környezete, amelyen belül minden $0 < h < \varepsilon$ feltételt kielégítő h -ra fennáll, hogy

$$f(x_0 - h) < f(x_0) \text{ és } f(x_0 + h) < f(x_0) \quad (9.1)$$

vagy

$$f(x_0 - h) > f(x_0) \text{ és } f(x_0 + h) > f(x_0) \quad (9.2)$$



9.1 ábra. Abszolút és relatív maximum, minimum.

Ha a fenti relációk a teljes $[a, b]$ intervallumban fennállnak az intervallum x_0 pontjára nézve, akkor abszolút maximumról (minimumról) beszélünk (9.1 ábra). Ha az $f(x)$ függvény az intervallum belső x_0 pontjában differenciálható és a függvény az x_0 pont környezetében növekszik, akkor $f'(x_0) > 0$; ellenkező esetben, ha a függvény az x_0 pont környezetében csökken, akkor $f'(x_0) < 0$.

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény növekvő, akkor van az x_0 pontnak olyan ε környezete, hogy

$$f(x) < f(x_0), \text{ ha } x \in |x_0 - \varepsilon, x_0| \text{ és } f(x) > f(x_0), \text{ ha } x \in |x_0, x_0 + \varepsilon| \quad (9.3)$$

A különbségi hányados és határértéke pozitív előjelű, mivel mind a számláló, mind pedig a nevező azonos előjelű:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 \quad (9.4)$$

Hasonlóan tudnánk bizonyítani azt az esetet is, ha a függvény az x_0 pont környezetében csökken, ekkor a derivált az x_0 pont környezetében negatív.

Ha $f'(x_0) = 0$, akkor az x_0 pont a függvény *stacionárius pontja*. Stacionárius pontban a függvénynek helyi *szélsőértéke* (maximuma, minimuma) van. Könnyen bebizonyítjuk, hogy szélsőérték létezésének *szükséges feltétele*, hogy $f'(x_0) = 0$ legyen (9.2 ábra).

Tétel

Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallum egy belső x_0 pontjában differenciálható és $f'(x_0) = 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van.

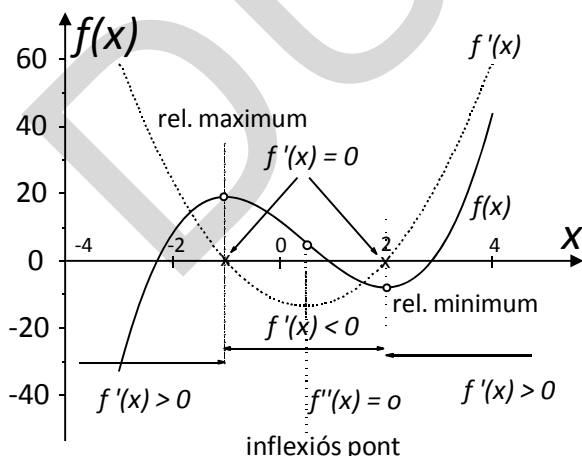
Tegyük fel, hogy x_0 olyan hely, ahol a függvénynek lokális maximuma van. Ekkor:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ ha } x < x_0 \quad \text{és} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0, \text{ ha } x > x_0 \quad (9.5)$$

azaz a lokális maximum környezetében a különbségi hányados előjelet vált, pozitívból negatívba megy át. A két különbségi hányadosnak hatáértéke is különböző előjelű, ha $x \rightarrow x_0$. Mivel a függvény az x_0 pontban differenciálható, ezért a két határértéknek meg kell egyeznie, ami csak úgy lehet, ha

$$f'(x_0) = 0 \quad (9.6)$$

Ugyanígy bizonyítanánk a lokális minimum esetét. Ha az első derivált nulla, akkor a függvény illető pontjához húzott érintő párhuzamos az X tengellyel. A függvénynek természetesen lehet olyan pontja, ahol szélső értéke van, de a differenciáhányados nem nulla. Például az $y = |x|$ függvénynek az $x = 0$ helyen szélső értéke van, de differenciáhányadosa nem létezik.



9.2 ábra. A szélsőérték környezetében az első derivált előjelet vált.

A különbségi hányadosok vizsgálatából azt láttuk, ha az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban lokális maximuma vagy minimuma van, akkor a különbségi hányados előjelet

vált. Ha a lokális szélsőérték maximum, akkor a különbségi hányados és $f'(x)$ is pozitív értékből negatívba megy át, lokális minimum esetén a különbségi hányados és az $f'(x)$ negatív értékből pozitívba megy át (9.2 ábra).

Tétel

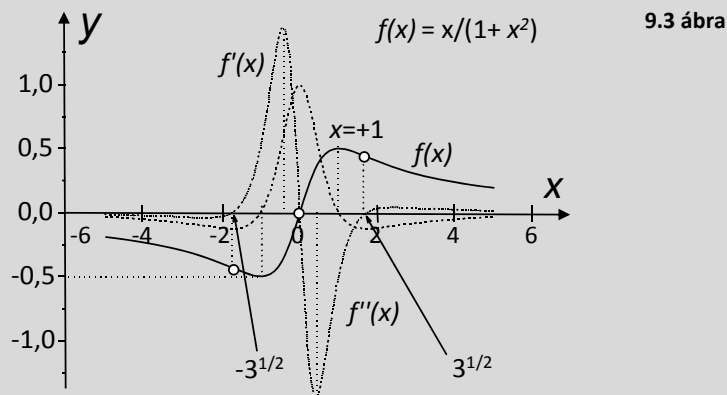
Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallum egy x_0 belső pontjában kétszer differenciálható és $f'(x_0)=0$, akkor $f''(x_0)>0$ esetében a függvénynek lokális minimuma van, ha pedig $f''(x_0)<0$, akkor a függvénynek lokális maximuma van.

Ha $f''(x_0)>0$, akkor az első differenciálhányados az x_0 pont környezetében növekvő. Azonban $f'(x_0)=0$, ezért $f'(x)$ az x_0 pont környezetében csak úgy lehet növekvő, ha negatívból pozitívba megy át. Ez azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvénynek lokális minimuma van (9.2 ábra). Hasonló gondolatmenet segítségével tudjuk belátni, hogy ha $f''(x_0)<0$, akkor a függvénynek az x_0 helyen lokális maximuma van.

Problémát jelent az az eset, ha mindkét derivált az x_0 pontban zérus.

Példa

- (1) Vizsgáljuk meg az $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ viselkedését (9.3 ábra).



Az $f(x)$ függvény stacionárius helyeit megkapjuk az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásával.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad (9.7)$$

Mivel a nevező nem lehet zérus, elegendő a számlálót megvizsgálni. Az $f'(x)$

a $(-1, +1)$ intervallumban pozitív, a $(-\infty, -1)$ és $(1, +\infty)$ viszont negatív. A stacionárius helyeket az $1 - x^2 = 0$ egyenlet megoldásából kapjuk: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Hogy a lokális szélsőérték maximum vagy minimum, a második derivált előjeléből tudjuk megállapítani:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3} \quad (9.8)$$

A második derivált $f''(x)$ az $x_1 = -1$ helyen pozitív, az $x_2 = 1$ helyen viszont negatív, így a függvénynek az előbbi helyen minimuma, az utóbbi helyen maximuma van. A második derivált zérushelyei megadják az $f'(x)$ stacionárius helyeit. Az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldásai:

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}$$

Az $f(x)$ függvénynek a fenti helyeken inflexiós pontja van (9.3 ábra).

- (2) Vizsgáljuk meg, milyen pH értéknél van szélső értéke a H^+ ionok koncentrációjának

Legyen $[H^+] = x$, ekkor $[OH^-] = \frac{10^{-14}}{x}$ mivel $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$. A kérdéses

függvény: $y = x + \frac{10^{-14}}{x}$. Az első differenciálhányados: $y' = 1 - \frac{10^{-14}}{x^2} = 0$. Az

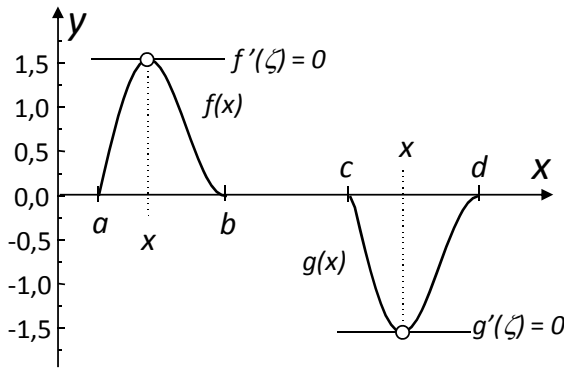
egyenlet megoldásából kapjuk, hogy $x = 10^{-7}$. A második differenciálhányados az $x = 10^{-7}$ helyen pozitív, tehát a függvényben szereplő H-ionok koncentrációnak a semleges pH-n minimuma van.

9.2 A differenciálható függvények néhány tulajdonsága

9.2.1 Rolle-tétel

Ha az $y = f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban folytonos és differenciálható, valamint az intervallum végpontjaiban a függvény nulla, $f(a) = f(b) = 0$, akkor az intervallum belsejében van legalább egy olyan ξ hely, hogy:

$$f(\xi) = 0, \quad a \leq \xi \leq b \quad (9.9)$$



9.4 ábra. Rolle-tétel.

A *Bolzano-Weierstrass tétel* (a tételt nem bizonyítjuk) értelmében egy $f(x)$ függvénynek az $[a, b]$ intervallumban van alsó és felső határa. Legyen M az $f(x)$ függvény maximuma, de ekkor $f(x) = 0$. Ha $f(x) \neq 0$, akkor ε környezetében vannak olyan helyek, amelyekre igaz, hogy:

$$f(x) > f(x) = M \quad (9.10)$$

ami lehetetlen hiszen M a maximum (9.4 ábra). Ezzel Rolle tételét indirekt módon igazoltuk.

Könnyű belátni, hogy a tétel akkor is igaz, ha $f(a) = f(b) = c$ állandó, mivel a $g(x) = f(x) - c$ függvényre igaz a fenti tétel.

9.2.2 Lagrange-tétel

Ha az $y = f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban folytonos és differenciálható az (a, b) intervallumban, akkor az intervallumban van legalább egy olyan hely, hogy:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (9.11)$$

A tételt a Rolle-tétel segítségével könnyen bizonyítjuk. Az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr egyenlete:

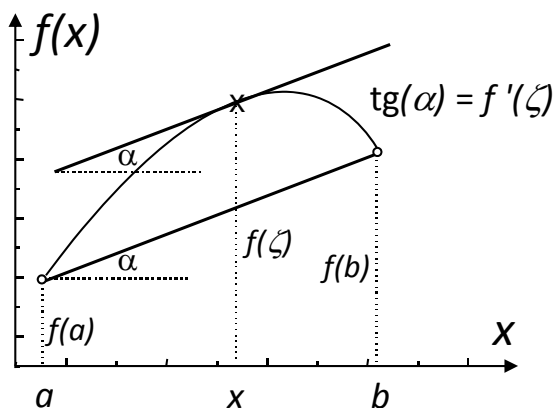
$$y_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad (9.12)$$

Képezzük a $g(x) = f(x) - y_1$ függvényt. A $g(x)$ függvény folytonos és differenciálható az adott intervallumban, sőt $g(a) = g(b) = 0$. A Rolle-tétel értelmében így

$$g'(\xi) = 0, \quad a \leq \xi \leq b \quad (9.13)$$

$$\text{azaz } f'(\xi) = y_1' \quad (9.14)$$

De az y_1 függvény deriváltja éppen a húr iránytangense, ami a tételt állítja.



9.5 ábra. Lagrange-tétel.

A Lagrange-tétel segítségével könnyen bebizonyíthatjuk fenti állítás megfordítását, nevezetesen, ha egy függvény deriváltja az $[a, b]$ intervallumban pozitív (negatív), akkor a függvény növekvő (csökkenő). A Lagrange-tétel alapján

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 \leq \xi \leq x_2, \quad x_1, x_2 \in [a, b] \quad (9.15)$$

Mivel feltételezésünk szerint $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), ezért

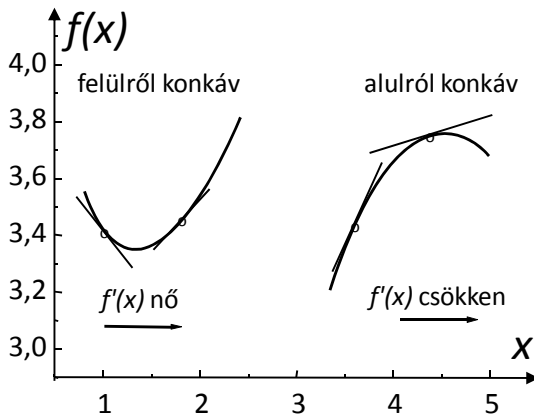
$$f(x_2) > f(x_1) \quad \text{illetve} \quad f(x_2) < f(x_1) \quad (9.16)$$

Az x_1 és x_2 az $[a, b]$ intervallum tetszőleges helyei, ezért a differenciáhányados a mondott intervallumban *jeltartó*, a függvény monoton nő (csökken).

A Lagrange-tételt *közéérték-tételnek* is szokás nevezni, mivel a függvény változása $\Delta f(x)$ egyenlő a független változó változásának $\Delta x = x_2 - x_1$ és a deriválnak egy közbülső helyen vett értékének $f(\xi)$ szorzatával. Szigorúan véve másodfokú függvény esetén igaz, hogy a „közbülső hely” az x_1 és x_2 számtani közepe.

9.3 A függvények konvex és konkáv jellege

Konvexnek nevezünk egy görbét, amelynek bármely húrja legfeljebb két pontban metszi a görbét. Pontosabban, *felülről konvex* az $y = f(x)$ függvény egy tetszőleges íve, ha a görbét átfogó húr az ív alatt fekszik. *Alulról konkáv* a görbe íve, ha az ívet átfogó húr az ív fölött fekszik (9.6 ábra). Azt a pontot, amely a görbe konvex és konkáv ívét egymástól elválasztja, *inflexiós* (forduló) *pontnak* nevezzük. Például az $y = \sin x$ függvény íve a $0 < x < \pi$ intervallumban felülről konvex, a $\pi < x < 2\pi$ intervallumban alulról konkáv. Az $x = \pi$ pontban a függvénynek inflexiós pontja van. Az $y = x^3$ függvény esetében a $-\infty < x < 0$ intervallumban a függvény felülről konvex, $0 < x < \infty$ intervallumban alulról konkáv; az $x = 0$ pontban van az inflexiós pont.



9.6 ábra. Függvények konvex és konkáv íve.

Vizsgáljuk meg a 9.6. ábrán az A és B pontokat összekötő húr közötti íven fekvő $f(x)$ pontokhoz húzott érintők irányait. A felülről konkáv íven A-tól B felé haladva az érintők iránytangense nő, míg a konvex (alulról konkáv) íven csökken. Ezt a megfigyelést az érintők egyeneseinek segítségével könnyen bebizonyítjuk.

Tétel

Ha az $f: f(x)$ függvény ($x \in \mathbb{R}$) az $[a, b]$ intervallumban konkáv (konvex), akkor az $f'(x)$ differenciáhányados növekvő (csökkenő).

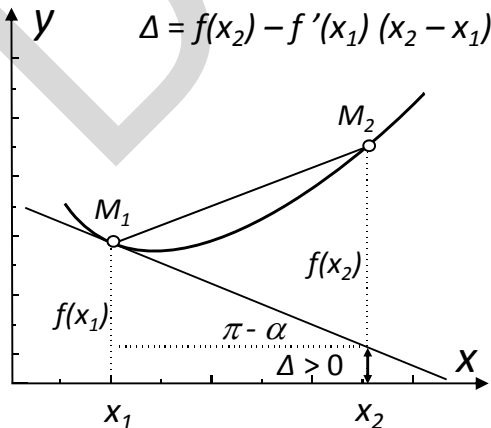
Ha az ív felülről konkáv, akkor bármely pontjához húzott érintő az ív alatt fekszik (9.7 ábra). Az ábra adatai alapján világos, hogy

$$f(x_2) > f(x_1) + (x_2 - x_1) \operatorname{tg} \alpha \quad (9.17)$$

Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{tg} \alpha < 0$, mivel $\alpha > \pi/2$, ezért a tangens szögfüggvény negatív. Továbbá:

$$f(x_1) > f(x_2) + (x_1 - x_2) \operatorname{tg} \beta \quad (9.18)$$

mivel $\operatorname{tg} \beta < 0$, de $x_1 - x_2 < 0$.



9.7 ábra. Alulról konkáv ív differenciáhányadosa növekvő.

Adjuk össze a két egyenlőtlenséget és rendezzük:

$$f(x_1) + f(x_2) > f(x_1) + f(x_2) + (x_2 - x_1)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \quad (9.19)$$

$$0 > (x_2 - x_1)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) > (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \quad (9.20)$$

Tehát:

$$\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha, \text{ azaz } f'(x_2) > f'(x_1) \quad (9.21)$$

A tétel megfordítása is igaz.

Tétel

Ha az $f: f(x)$ ($x \in \tilde{\mathbb{R}}$) függvény az $[a, b]$ intervallumban differenciálható, és az $f'(x)$ az (a, b) intervallumban növekvő, akkor a függvény grafikonjának a számközhez tartozó része felülről konkáv.

Induljunk ki a 9.7 ábrán látható különbségből (Δ):

$$\Delta = f(x_2) - (f(x_1) + (x_2 - x_1) \operatorname{tg} \alpha) = f(x_2) - f(x_1) - (x_2 - x_1) \operatorname{tg} \alpha \quad (9.22)$$

Mivel a függvény differenciálható az (a, b) intervallumban, alkalmazhatjuk a Lagrange-tételt:

$$\Delta = (x_2 - x_1)f'(\xi) - (x_2 - x_1)f'(x_1) = (x_2 - x_1)(f'(\xi) - f'(x_1)) \quad (9.23)$$

Mivel $x_2 > x_1$ és $x_1 < \xi < x_2$, továbbá $\xi - x_1 > 0$ és a két derivált előjele azonos:

$$f'(\xi) - f'(x_1) > 0, \text{ azaz } f'(\xi) > f'(x_1) \quad (9.24)$$

Mindez azt jelenti, hogy $\Delta > 0$ bármely x_1 és x_2 -re. Az érintő az ív alatt marad, az $f(x)$ függvény íve felülről konkáv. Az eredmények ismeretében most már meg tudjuk fogalmazni a *konvexitás* illetve *konkávítás* létezésének szükséges és elégséges feltételét.

Tétel

Ha az $f: f(x)$ ($x \in \tilde{\mathbb{R}}$) függvény az $[a, b]$ intervallum belsejében kétszer differenciálható, akkor a felülről konkáv jelleg létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az $f''(x) > 0$ egyenlőtlenség teljesüljön.

- (1) A feltétel szükséges: ha az $f(x)$ függvény felülről konkáv, akkor az első deriváltja az egész intervallumban növekvő és szigorúan monoton, ezért

$$f''(x) > 0 \quad (9.25)$$

- (2) A feltétel elégséges: ha $f''(x) > 0$, akkor az $f'(x)$ a korábban bizonyított tétel értelmében növekvő, tehát az $f(x)$ függvény felülről konkáv.

- (3) Ha $f''(x) = 0$, akkor az $y = f'(x)$ függvénynek az x hely stacionárius helye. Az $f''(x) = 0$ egyenletnek a gyöke megadja az $f(x)$ függvény inflexiós pontjának abszcisszáját.

9.4 A legkisebb négyzetek elve

A legkisebb négyzetek elve által szolgáltatott módszert gyakran alkalmazzák olyan mérési eljárásoknál, amelyeknél fizikai, kémiai vagy biológiai változókra vonatkozó adatpárokat mérnek, és feltételezik, hogy a megfigyelt változók között *ismert funkcionális kapcsolat* van. A választott függvényben szereplő paramétereket a megfigyelt és a függvény segítségével illesztett adatok eltérései négyzetösszegének minimalizálásával határozzák meg, egyenlet formájában:

$$S = \sum_i^n (y_i - Y_i)^2 = \min. \quad (9.26)$$

ahol n az adatpárok számát, y_i a megfigyelt értéket, Y_i az (x_i, y_i) adatpárhoz tartozó illesztett függvényértéket jelenti. Az összegezés valamennyi adatpárra kiterjed. A legkisebb négyzetek módszere olyan $y = f(x, \alpha, \beta, \gamma)$ modell függvényekre alkalmazható - (α, β, γ) a függvény paraméterei - amelyek a következő feltételeket teljesítik:

- (1) az y változó eloszlása jó közelítéssel normális eloszlású a valódi modellfüggvény megfelelő Y értéke körül az x változó bármely értékére;
- (2) az y változó varianciája nem függ az x megválasztásától, azaz az y változó meghatározásának precízitása nem függ x -től;

A legkisebb négyzetek elvét természettudományos probléma megoldására először Legendre alkalmazta 1805-ben, bár sokszor Gauss nevével hozzák összefüggésbe. Ilyen típusú kísérleteket és méréseket úgy lehet tervezni, hogy az egyik változót, rendszerint az x változót elhanyagolható hibával precízen mérik, míg a véletlen hibák az y változónál jelentkeznek. Hogy az S összeg minimális legyen, annak szükséges feltétele, hogy az S összeg különböző paraméterek szerinti első parciális differenciálhányadosai zérussal legyenek egyenlők, azaz:

$$\frac{\partial f(x, \alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f(x, \alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial f(x, \alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = 0 \quad (9.27)$$

Alkalmazzuk az eljárást a *lineáris modell* (lineáris regresszió) esetére:

$$S = \sum_i^n (y_i - a - bx_i)^2 = \min. \quad (9.28)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_i^n (y_i - a - bx_i) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_i^n x_i (y_i - a - bx_i) = 0 \quad (9.29)$$

Ha az első egyenletnél 2 -vel egyszerűsítünk, majd az összeg minden tagját elosztjuk n -nel ($n \neq 0$), akkor:

$$\frac{1}{n} \sum_i^n y_i - a - b \frac{1}{n} \sum_i^n x_i = 0 \quad \text{és} \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (9.30)$$

Ha a kapott kifejezését behelyettesítjük a második egyenletbe, egyszerű átalakítás után megkapjuk b már megismert kifejezését:

$$\sum_i^n x_i (y_i - \bar{y}) - b \sum_i^n x_i (x_i - \bar{x}) = 0 \quad (9.31)$$

$$b = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (9.32)$$

Megjegyzés: Bárhogy is választanánk meg a regressziós egyenest, az egyenes minden esetben áthalad a $P(\bar{x}, \bar{y})$ ponton. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a legkisebb négyzetek módszere a minimalizálást az egyenes a $P(\bar{x}, \bar{y})$ pont körüli forgatásával éri el. Ez egyben azt is jelenti, hogy a b regressziós együttható standard hibája $se(b)$ geometriailag egy $\Delta\alpha$ szög tangense:

$$\operatorname{tg}(\Delta\alpha) = se(b) \quad (9.33)$$

Ebben a közelítésben úgy értelmezhetjük a b regressziós együttható standard hibáját, hogy $P=0,67$ a valószínűsége annak, hogy egy mintából kiszámított regressziós együttható a $(b - \operatorname{tg}(\Delta\alpha), b + \operatorname{tg}(\Delta\alpha))$ intervallumba esik.

10 Az integrál fogalma. Határozatlan integrál

10.1 Primitív függvény, határozatlan integrál fogalma

Induljunk ki a *Lagrange-tétel* egy egyszerű következményéből!

Tétel

Ha az $f(x)$ függvény differenciálhányadosa az $[a, b]$ intervallum minden helyén nullával egyenlő, akkor az $f(x)$ állandó az egész számközben.

Legyen c és x egy-egy tetszőleges hely az intervallum belsejében. A *Lagrange-tétel* alapján és a feltételezés figyelembevételével:

$$f(x) - f(c) = f'(\xi) \cdot (x - c) = 0, \quad (10.1)$$

ahol ξ a $[x, c]$ intervallum egy belső pontja. Mivel: $f'(\xi) = 0$, ezért

$$f(x) = f(c) = \text{állandó}. \quad (10.2)$$

Az olyan $F(x)$ függvényt, amelynek differenciálhányadosa $f(x)$ -el egyenlő, az $f(x)$ függvény *primitív függvényének* nevezzük, tehát:

$$F'(x) = f(x) \quad (10.3)$$

Ha $F(x)$ primitív függvénye $f(x)$ -nek, és C egy állandó, akkor $F(x) + C$ is primitív függvénye az $f(x)$ -nek. Az állítás az adott intervallum minden belső pontjában érvényes. Nyilvánvaló, hogy csak olyan függvényekről lehet szó, amelyeknek differenciálhányadosa véges. A primitív függvény értelmezési tartománya az integrálandó függvény értelmezési tartományával egyezik meg. Ha az $f(x)$ függvénynek az a helyen elsőfajú szakadása van, tehát:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \quad (10.4)$$

akkor $F'(x)$ nem létezik, mivel nincs olyan függvény, amelynek differenciálhányadosa elsőfajú szakadási hellyel rendelkezne.

Definíció

Egy számközben tekintett $f(x)$ függvény *határozatlan integrálján* primitív függvényeinek összességét értjük. A határozatlan integrál műveleti jele $\int$ és meghatározása:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ továbbá } F'(x) = \left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \quad (10.5)$$

ahol dx jelzi azt a változót, amely szerint a műveletet (integrálást) el kell végezni. Könnyen belátható, hogy:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x), \quad (10.6)$$

ahol $dF(x)$ az $F(x)$ primitív függvény differenciálja.

Másrészt:

$$dF(x) = F'(x)dx = \left(\int f(x)dx \right)' dx = f(x)dx, \quad (10.7)$$

tehát az $F(x)$ függvény differenciálja az $f(x)$ függvény segítségével állítható elő. Ez azt jelenti, hogy a határozatlan integrál differenciálhányadosa egyenlő az integrálandó függvénnyel, *differenciálja* pedig az integrál alatti kifejezéssel. A differenciálás és integrálás sorrendje felcserélhető a vonatkozó szabályok figyelembevételével.

10.2 Közvetlen integrálás

Az integrálás a differenciálás fordított művelete. Ebből adódóan a primitív függvény keresésére általános szabály nincs, a differenciálás műveletét megkíséreljük fordított sorrendben elvégezni, azaz keressük azt a függvényt, amelynek differenciálhányadosa az integrálandó függvény. A közvetlen integrálással kapható függvényeket táblázatban szokták megadni (lásd Függelék 2.2). Néhány példa:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \text{ egészszám}, n \neq -1) \quad (10.8)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (10.9)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (10.10)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (10.11)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \text{ nem lehet negatív}) \quad (10.12)$$

Néhány kisebb ötletet igénylő példa:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{(-\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C \quad (10.13)$$

Vegyük észre az általános szabályt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C \quad (10.14)$$

$$\int x e^{x^2} dx = \int \frac{1}{2} (2x) e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int (x^2)' e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \quad (10.15)$$

Tehát általánosan:

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) + C \quad (10.16)$$

10.3 Az integrálszámítás egyszerű tételei

Tétel

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek az $[a,b]$ intervallum belső pontjaiban van primitív függvénye $F(x)$ és $G(x)$, továbbá $c \neq 0$ állandó, akkor

$$(1) \quad \int c f(x) dx = c \int f(x) dx \quad \text{és} \quad (10.17)$$

$$(2) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (10.18)$$

azaz az állandó kiemelhető az integrál jel elé, másrészt szabad tagonként integrálni.

Az összefüggéseket a primitív függvény fogalma segítségével könnyen bizonyítjuk:

$$(1) \quad \text{Mivel } F'(x) = f(x) \text{ és } F(x) = \int f(x) dx, \text{ viszont} \quad (10.19)$$

$$(cF(x))' = cF'(x) = cf(x) \text{ és } cF(x) = c \int f(x) dx, \text{ ezért} \quad (10.20)$$

$$\int cf(x) dx = \int cF'(x) dx = \int d(cF(x)) = cF(x) = c \int f(x) dx \quad (10.21)$$

$$(2) \quad \text{Mivel } (F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) \text{ és} \quad (10.22)$$

$$F(x) + G(x) = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \text{ ezért} \quad (10.23)$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int (F'(x) + G'(x)) dx = \int d(F(x) + G(x)) = F(x) + G(x) = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (10.24)$$

Példa

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C \end{aligned} \quad (10.25)$$

10.4 Parciális integrálás

A parciális integrálás segítségével két vagy több függvény szorzatának integrálását tudjuk elvégezni. A függvények szorzatának differenciálását az alábbi összefüggés segítségével végeztük:

$$\{u(x) \cdot v(x)\}' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad (10.26)$$

Integráljuk x szerint fenti összefüggést kis átrendezés után:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx \quad (10.27)$$

Első pillanatra nem látjuk a fenti eljárás hasznát, mivel a jobboldalon hasonló kifejezés áll, mint a baloldalon. Azonban szerencsés esetben a jobboldalon álló integrált

könnyebben elvégezzük, mint az eredeti integrálást. Néhány következő példa azonban meggyőz bennünket az eljárás alkalmazási lehetőségeiről.

Példa

$$(1) \quad \int x^3 \ln x \, dx$$

Látjuk, hogy az első tényezőt könnyen tudjuk integrálni, viszont a másodikat differenciálni:

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C$$

Az első integrálás elvégzése után egy egyszerű feladathoz jutottunk.

$$(2) \quad \int x^2 e^{2x} \, dx$$

A példában úgy célszerű eljárni, hogy az első tényezőt differenciáljuk, mivel a kitevője csökken:

$$\int x^2 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} x^2 - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cdot 2x \, dx. \text{ Ismételjük meg az eljárást ugyanilyen módon.}$$

Jegyezzük meg: Ha felcserélnénk a műveletek (differenciálás és integrálás) sorrendjét, visszajutnánk a kiinduló integrálhoz.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x} \, dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2x - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 \, dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2x - \int e^{2x} \, dx \right] = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x + \frac{1}{2} e^{2x} + C = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - x + 1) + C \end{aligned}$$

Hasonló módon járhatunk el a következő alakú integrálok esetén is:

$$(3) \quad \int x^k \cdot \sin mx \, dx, \text{ ahol } k \text{ és } m \text{ egész számok.}$$

Integráljuk az alábbi kifejezést:

$$(4) \quad \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \{e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx\}, \text{ ahol}$$

Az e^x függvényt integráltuk, és a trigonometrikus függvényt differenciáltuk. Fordítva is eljárhattunk volna a műveletek alkalmazásával. A fenti kifejezés átrendezése után a végeredmény:

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

10.5 Integrálás helyettesítéssel

Legyen értelmezve az $f(u)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban, primitív függvényét jelölje $F(u)$, azaz:

$$F'(u) = f(u). \quad (10.28)$$

Tegyük fel továbbá, hogy u az x -nek valamilyen differenciálható függvénye:

$$u = g(x) \quad (10.29)$$

Differenciáljuk az $F(u)$ függvényt x szerint:

$$\frac{d}{dx} F(u) = \frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(u) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \quad (10.30)$$

Integráljuk x szerint a fenti kifejezés jobboldalán kapott függvényt:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) = F(u) = \int f(u) \, du, \text{ azaz} \\ \int f(u) \, du = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx,$$

tehát u változását az x változásával helyettesítettük. A kapott végeredmény igen fontos tartalommal bír:

- (1) minden integrálási formula helyes marad, ha az integrandusz független változója helyébe tetszőleges differenciálható függvényt írunk;
- (2) az $u = g(x)$ és $du = g'(x) \, dx$ helyettesítéssel az integranduszt olyan függvénnyé alakíthatjuk, amelyet könnyen integrálhatunk.

Példa

- (1) Integráljuk függvényhelyettesítéssel a következő kifejezést:

$$-\int 5 \cos^4 x \cdot \sin x \, dx \quad (10.31)$$

Legyen $u = \cos x$, ekkor az u függvény differenciálja: $du = -\sin x \, dx$.

Az integrál új alakja:

$$-\int 5 \cos^4 x \cdot \sin x \, dx = \int 5 u^4 \, du = 5 \frac{1}{5} u^5 + C = \cos^5 x + C \quad (10.32)$$

- (2) Végezzük el a következő integrálást: $\int x e^{x^2} \, dx$

Célszerű helyettesítés: $u = x^2$, $du = 2x dx$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \quad (10.33)$$

(3) Határozzuk meg a következő integrált: $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$

Legyen $t = -\frac{1}{x}$ $dt = \frac{1}{x^2} dx$;

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1+t^2} + C = \frac{1}{2} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C \end{aligned} \quad (10.34)$$

10.6 Integrálás parciális törtek segítségével

(1) Végezzük el a következő integrált:

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx \quad (10.35)$$

Megoldásnak kínálkozik az a lehetőség, ha sikerül a nevezőt gyöktényezős alakban felírni, majd elemi törtekre bontani. Ebben az esetben a nevezőben álló polinom elsőfokú polinom, így primitív függvénye standard integrálás segítségével nyerhető. A nevező gyökeit a másodfokú egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \quad (10.36)$$

Az integrandus új alakja:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \quad (10.37)$$

Ebből a következő azonosságot kapjuk:

$$x+1 = A(x-2) + B(x-1) = (A+B)x - (2A+B) \quad (10.38)$$

Az azonosság bármely x érték esetén fennáll, ha

$$(A+B)=1 \text{ és } -2A-B=1 \quad (10.39)$$

Az egyenletrendszer megoldásával kapjuk, hogy:

$$A = -2, \quad B = 3 \quad (10.40)$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx = -\int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x-2} dx = 3\ln(x-2) - 2\ln(x-1) + C \quad (10.41)$$

(2) Oldjuk meg a következő integrálási feladatot:

$$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} dx \quad (10.42)$$

Az előző példánál láttuk, hogy a nevezőben lévő polinom tényezőkre bontása a nevező, mint egyenlet megoldásával függ össze. Ez csak akkor sikerül, ha a nevezőben lévő polinom fokszáma négynél nem magasabb.

Keressük a példánál a felbontást a következő alakban:

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad (10.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} &= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2} = \\ &= \frac{(A+B)x^2 - (2A+B-C)x + A}{x(x-1)^2} \end{aligned} \quad (10.44)$$

Ennélfogva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ -2A-B+C &= 0 \\ A &= 1 \end{aligned} \quad (10.45)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$A=1, B=0, C=2 \quad (10.46)$$

Így

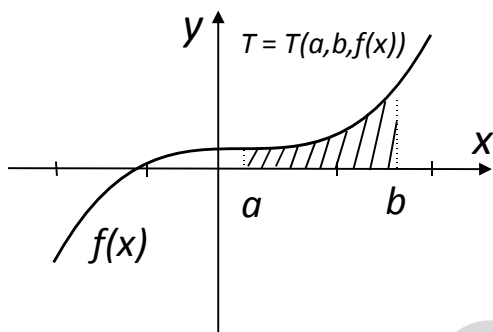
$$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} dx = \ln|x| + 2 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \ln|x| - \frac{2}{x-1} + c \quad (10.47)$$

A részletesebb tárgyalást végző matematikai analízis tankönyvekben bebizonyítják, hogy minden valódi racionális törtfüggvény felbontható elemi törtek összegére. A racionális törtfüggvény valódi, ha a számláló fokszáma kisebb, mint a nevezőjé.

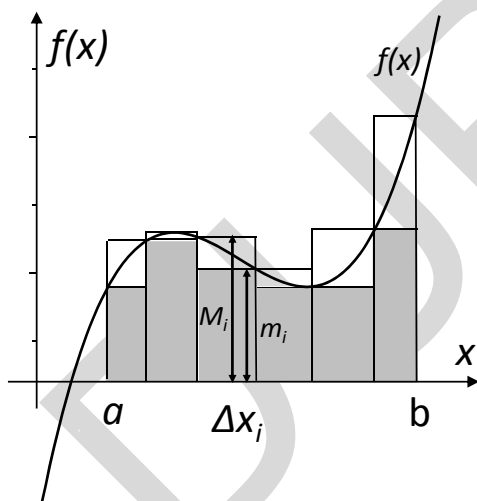
11 Határozott integrál

11.1 A határozott integrál definíciója. Riemann-féle összegek

Tekintsünk az $[a,b]$ intervallumban egy nem-negatív folytonos $f(x)$ függvényt. Határozzuk meg az adott intervallumban a görbe alatti területet (11.1 ábra).



11.1 ábra. Görbevonalú trapéz területe.



11.2 ábra. Riemann-féle összeg.

Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n számú, nem szükségképpen egyenlő részre. Jelölje m_i az i -edik intervallumban a legkisebb, és M_i a legnagyobb ordinátát. Becsüljük meg a görbevonalú trapéz területét:

$$t = \sum_i m_i \Delta x_i, \quad T = \sum_i M_i \Delta x_i, \quad (11.1)$$

ahol Δx_i jelenti az i -edik intervallum hosszát, t a beírt, T pedig a körülírt sokszög területét, az

$$\sum_i \Delta x_i = (b - a) \quad (11.2)$$

összeg pedig megadja az intervallum hosszát.

Ha a terület fogalmát a görbevonallú síkidom esetére is fenn kívánjuk tartani, akkor bármely felosztás esetén igaznak kell lennie az alábbi relációnak:

$$t \leq F(a, b, f(x)) \leq T, \quad (11.3)$$

ahol $F(a, b, f(x))$ jelenti a görbevonallú síkidom területét.

Az $[a, b]$ zárt intervallum egy tetszőleges felosztását a következők jellemzik:

- (1) a részintervallumoknak páronként nincs közös pontjuk a határponton kívül,
- (2) az $[a, b]$ zárt intervallum minden pontja legalább egy részintervallumhoz tartozik.

Ha az $f(x)$ függvény $[a, b]$ zárt intervallumban korlátos, akkor m_i és M_i lehet az i -edik intervallumban az alsó és felső és határ. Az alsó és felső határok segítségével képezett közelítő összegeket *Riemann-féle összegeknek* nevezzük (11.2 ábra):

$$\underline{S}(\Delta x) = \sum_i m_i \Delta x_i, \quad \bar{S}(\Delta x) = \sum_i M_i \Delta x_i \quad (11.4)$$

Ha m és M az $f(x)$ függvény alsó illetve felső korlátja az $[a, b]$ zárt intervallumban, akkor igaz a következő reláció:

$$m(b-a) \leq \underline{S}(\Delta x) < \bar{S}(\Delta x) \leq M(b-a) \quad (11.5)$$

mivel a

$$m \Delta x_i \leq m_i \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \leq M \Delta x_i \quad (11.6)$$

egyenlőtlenség mindenegyik részintervallumra fennáll. Ha az intervallum beosztását finomítjuk, akkor a következő két állítás tehető:

- (1) egyik felső összeg sem kisebb, mint az adott részintervallumhoz tartozó alsó összeg,
- (2) a beosztás finomításával a felső összegek nem nőnek, az alsó összegek nem csökkennek.

Tekintsünk mármost egy tetszőleges $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ beosztást, ahol $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Legyen továbbá ξ_i az $[x_i, x_{i-1}]$ intervallum egy belső pontja. Az illető részintervallumra igaz, hogy:

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, \text{ ezért } \underline{S}(\Delta x) \leq \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i \leq \bar{S}(\Delta x) \quad (11.7)$$

(Feltételezzük, hogy az $f(x)$ függvény a vizsgált intervallumban korlátos.) A közbezárt összeget *integrálközelítő összegnek* nevezzük. Be lehet bizonyítani, hogy minden $[a, b]$ zárt intervallumban korlátos $f(x)$ függvény integrálközelítő összegeinek nem lehet két különböző határértéke, ha az intervallumbeosztását minden határon túl finomítjuk, akkor:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i = I. \quad (11.8)$$

Továbbá az $[a, b]$ zárt intervallumnak létezik egy olyan $\varepsilon > 0$ -tól függő beosztása, hogy valahányszor $\Delta x_i \leq \delta$, akkor

$$I - \varepsilon \leq \underline{S}(\Delta x) \leq \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i \leq \bar{S}(\Delta x) \leq I + \varepsilon, \text{ azaz} \quad (11.9)$$

$$|S(\Delta x) - I| < \varepsilon \quad (11.10)$$

Tétel

Az $[a, b]$ zárt intervallumban korlátos $f(x)$ függvény integrálhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a felső összegek határértéke egyenlő legyen az alsó összegek határértékével:

$$\lim \underline{S}(\Delta x) = \lim \bar{S}(\Delta x) = I, \quad (11.11)$$

ahol

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (11.12)$$

az $f(x)$ függvény $[a, b]$ zárt intervallumban vett *határozott integrálja*. Ez a Riemann-féle integrál definíciója. A tétel lényegében azt foglalja magában, hogy az $f(x)$ függvénynek nem lehet két különböző görbe alatti területe az adott intervallumban.

Bizonyítás:

A feltétel szükséges: ha a függvény integrálható, akkor $\underline{I} = \bar{I}$. Ha $\underline{I} \neq \bar{I}$ igaz lenne, akkor a közelítő összegek részhalmazából kiválasztható két olyan részhalmaz (alsó és felső integrálközelítő összegek), amelyek különböző $\underline{I}$ és $\bar{I}$ határértékekkel bírnak, azaz a függvény nem integrálható;

A feltétel elegendő: mivel most $\underline{I} = \bar{I}$, ezért biztosan van olyan σ beosztás, hogy a

$$I - \varepsilon \leq \underline{S}(\sigma_1) < I \text{ és } I < \bar{S}(\sigma_2) < I + \varepsilon \quad (11.13)$$

relációk érvényesek. Ha az intervallum beosztását finomítjuk: $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma$, akkor van olyan beosztás, hogy:

$$I - \varepsilon < \underline{S}(\sigma) \leq \sum_i f(\xi_i) \sigma \leq \bar{S}(\sigma) < I + \varepsilon, \text{ más jelöléssel: } \left| \sum_i f(\xi_i) \sigma - I \right| < \varepsilon \quad (11.14)$$

azaz az integrálközelítő összegeknek van határértéke, és ez a határérték éppen I .

11.2 Newton-Leibniz formula

Tétel

Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban integrálható és a függvénynek a zárt intervallumban van primitív függvénye: $F'(x) = f(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (11.15)$$

Bizonyítás:

Válasszunk az $[a, b]$ zárt intervallumban egy tetszőleges beosztást:

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, b]. \quad (11.16)$$

Mivel az $f(x)$ függvénynek létezik primitív függvénye az $[a, b]$ zárt intervallumban, ezért annak minden részintervallumában is, tehát érvényes az alábbi felbontás:

$$F(b) - F(a) = \{ (F(x_1) - F(a)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \dots + (F(b) - F(x_{n-1})) \} \quad (11.17)$$

Alkalmazzuk a Lagrange-tételt minden egyes részintervallumra; mivel $F(x)$ differenciálható függvény, így

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad (11.18)$$

ahol $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ $i = 1, \dots, n$. Így

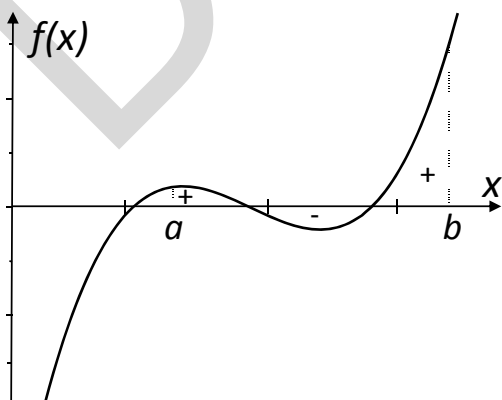
$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (11.19)$$

A jobboldali kifejezés egy integrálközelítő összeg. A feltevés értelmében az $f(x)$ függvény integrálható, így a közelítő összegnek létezik határértéke, ami nem egyéb, mint az $f(x)$ függvény $[a, b]$ zárt intervallumban vett határozott integrálja:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (11.20)$$

Mindez azt jelenti, hogy nincs szükség az integrálközelítő összegek előállítására, hiszen a határozott integrált a primitive függvény segítségével kiszámíthatjuk. A *Newton-Leibniz formulából* közvetlenül az is adódik, hogy:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \text{ és } \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad (11.21)$$



11.3 ábra

A határozott integrál kiszámításánál elfogadjuk azt a konvenciót, hogy az X tengely alá eső terület előjele negative (11.3 ábra). Így pl. az $y = \sin x$ függvény határozott integrálja a $[0, 2\pi]$ intervallumban a függvény tulajdonságai miatt zérus, jóllehet a $[0, \pi]$ intervallumban a határozott integrál értéke 2.

Példa

Végezzük el a következő határozott integrált:

$$\int_2^4 \frac{1}{x^2 - 1} dx \quad (11.22)$$

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \int_2^4 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \Big|_2^4 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{5} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5} \end{aligned} \quad (11.23)$$

A megoldásnál felhasználtuk a parciális törtekre vonatkozó felbontást, és kiszámoltuk a kapott primitív függvény értékeinek különbségét a megadott két határnál.

11.3 Az integrál, mint a felsőhatár függvénye

Tétel

Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallum x helyén folytonos, akkor a

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (11.24)$$

függvénynek az x helyen van differenciálhányadosa, mégpedig $f(x)$. Más szóval a tétel tartalma: minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.

Bizonyítás:

Legyen $h > 0$ és

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t) dt \quad \text{és} \quad \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (11.25)$$

Alkossuk meg a következő különbségi hányadost:

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right\} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad (11.26)$$

Ha $h \rightarrow 0$, akkor az integrál egy közelítő összeggel helyettesíthető:

$$\int_x^{x+h} f(t) dt \approx f(\xi) \cdot h, \text{ ahol } \xi \text{ az } (x, x+h) \text{ intervallum egy belső pontja} \quad (11.27)$$

Ebből következik, hogy a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(\xi) \cdot h = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x) \quad (11.28)$$

határérték létezik, tehát

$$\Phi'(x) = f(x) \quad (11.29)$$

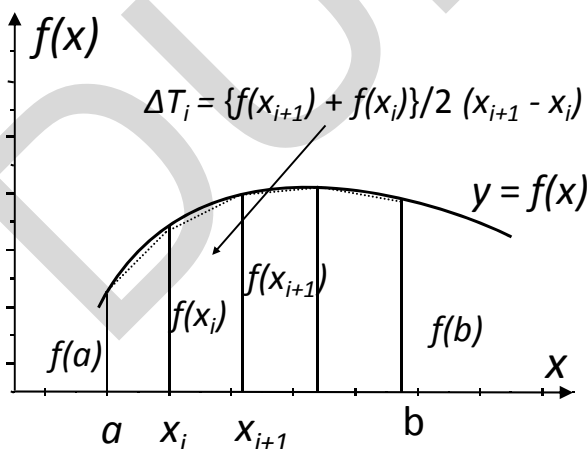
Az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy az $f(x)$ függvény az x helyen folytonos, azaz, ha

$$\xi \rightarrow x, \text{ akkor } f(\xi) \rightarrow f(x) \quad (11.30)$$

A fenti tétel egy következménye: az $\int_{x_0}^x f(t) dt$ integrál az $f(x)$ függvénynek egy primitív függvénye, mégpedig az a primitív függvény, amely az x_0 helyen nullával egyenlő.

11.4 A határozott integrál közelítő meghatározása. Simpson-szabály

Sok esetben szükség lehet a határozott integrál gyors kiszámítására, becslésére. A mondott cél elérhető a *Simpson-szabály* alkalmazásával. Legyen adott az $y = f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban, és határozzuk meg az intervallum végpontjai és az adott függvény által határolt görbevonalú trapéz területét. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő részre, és legyen n páros szám. Szorítkozzunk első lépésben az $n = 2$ esetre.



11.4 ábra. Simpson-szabály.

Az osztáspontokra illesztett ordináták és egyenes segítségével kapott trapézok területe:

$$T_1 = \left(\frac{f(a) + f(m)}{2} \right) \Delta x \quad \text{és} \quad T_2 = \left(\frac{f(m) + f(b)}{2} \right) \Delta x \quad (11.31)$$

A görbe alatti terület közelítő értéke:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{f(a)}{2} + f(m) + \frac{f(b)}{2} \right) \Delta x, \text{ ahol nyilván } \Delta x = \frac{b-a}{2} \quad (11.32)$$

Könnyű belátni, hogy n számú beosztás esetén a terület közelítő értéke:

$$T = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + f(x_2) + \dots + f(x_n) + \frac{f(b)}{2} \right), \quad (11.33)$$

ahol $x_1 = a$, $x_i = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$, $i = 2, n$.

A Simpson-szabály hibakorlátja is megadható, ha a függvénynek az adott intervallumban létezik véges differenciálhányadosa.

11.5 Impropius integrál

A határozott integrál fogalmát rendszerint véges intervallumon folytonos függvényekre szokás megadni. Problémát okoz, ha az integrálás tartománya végtelen.

Definíció

Legyen az $f(x)$ függvény az $a \leq x \leq \infty$ intervallumban értelmezett folytonos függvény, és legyen

$$I(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx, \text{ ahol } \eta > a \quad (11.34)$$

Ha a $\lim_{\eta \rightarrow \infty} I(\eta) = I$ határérték létezik, akkor az I -t az $f(x)$ függvény (a, ∞) intervallumban vett *impropius* (nem-valódi) integráljának nevezzük:

$$I = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_a^\eta f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx \quad (11.35)$$

Szokás a konvergens vagy a nem létezik, divergens elnevezés is. Az impropius integrálokat a valódi integrálokra vonatkozó tételek alapján kaphatjuk meg a *Newton-Leibniz* formula alapján:

$$\int_0^\infty f(x)dx = F(\infty) - F(0) \text{ és } \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) \quad (11.36)$$

Példa

Számítsuk ki az $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctg x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$ integrált. Alkalmazzuk az $x = \operatorname{tg} u$ helyettesítést:

$$x = \operatorname{tg} u, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 u} du, \quad \text{így} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} du = \pi \quad (11.37)$$

Két nevezetes improprius integrál: *Poisson-integrál* és *Dirichlet-integrál*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (11.38)$$

11.6 Rekurziós formulák

- (1) Számítsuk ki az $I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ integrált. Végezzünk parciális integrálást:

$$I_n = -x^n e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} nx^{n-1} e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1} \quad (11.39)$$

Könnyű belátni, hogy az első tag zérus, mivel $e^x > x^n$, ha $x \rightarrow \infty$. Másrészt

$$I_0 = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1 \quad (11.40)$$

A parciális integrálást n -szer ismételve kapjuk, hogy

$$I_n = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot I_0 = n! \quad (11.41)$$

Megjegyezzük, hogy a faktoriális definícióját az egész számok mellett racionális törtre is kiterjesztik.

- (2) Számítsuk ki az $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ integrált. Végezzünk parciális integrálást:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x dx = \\ &= [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \end{aligned} \quad (11.42)$$

$$\begin{aligned}
 I_n &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx = \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx
 \end{aligned}
 \tag{11.43}$$

Azaz $I_n = (n-1)I_{n-2} + (n-1)I_n$ és

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \tag{11.44}$$

Ha $n = 0$, akkor $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, így tetszőleges n esetén az integrál a rekurziós formula segítségével kiszámítható.

12 Az integrálszámítás alkalmazása

12.1 Számtani átlag. Súlyozott átlag, négyzetes átlag

12.1.1 Függvény átlaga

Tegyük fel, hogy a mérendő mennyiség egy folytonosan változó $y = f(x)$ függvénnyel írható le; az x független változó lehetséges értékei egy $[a, b]$ intervallumba esnek. Ha n egymástól független mérést végeztünk, akkor a kapott mérések *számtani átlagát* a következő módon kaphatjuk:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad (12.1)$$

ahol y_i ($i = 1, \dots, n$) jelenti az egyes mérési eredményeket. Ha feltételezzük, hogy az $[a, b]$ intervallumban bármely x -hez tartozó mérési eredmény azonos valószínűséggel fordul elő, és a mérések száma igen nagy, akkor első közelítésben felírhatjuk:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \left(y_1 \frac{b-a}{n} + y_2 \frac{b-a}{n} + \dots + y_n \frac{b-a}{n} \right) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i, \text{ ahol } \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \quad (12.2)$$

Ha a mérések számát minden határon túl növeljük, akkor a fenti integrálközelítő összegnek van határértéke, és az éppen a mérendő mennyiség számtani átlaga:

$$\overline{f(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad (12.3)$$

ahol a és b a mérések lehetséges terjedelmét fejezi ki. Ha t jelenti az időt, $f(t)$ az időben változó mennyiséget, akkor a fenti integrál megadja a változó mennyiség időbeli átlagát valamilyen $a = t_1$, $b = t_2$ intervallumban.

12.1.2 Súlyozott átlag

Ha feltételezzük, hogy a folytonos X mérendő mennyiség lehetséges értékeit x -el jelöljük, és az x_i érték előfordulásának gyakoriságát valamilyen $f(x)$ függvény írja le, akkor a mérendő mennyiség átlagát (*súlyozott átlag*) a következő módon kaphatjuk meg:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12.4)$$

Ha a mérések előfordulásának lehetséges intervalluma az (a, b) intervallum, akkor a fentiekhez hasonlóan azt látjuk, hogy a jobboldali kifejezés ismét egy integrálközelítő összeg az (a, b) intervallumban, amelynek van véges határértéke:

$$\bar{X} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = \int_a^b x f(x) dx, \quad (12.5)$$

ahol a baloldalon álló átlag az X mennyiség $f(x)$ súlyfüggvénnyel vett súlyozott átlaga az (a,b) intervallumban. (Szigorúan véve az $f(x)$ függvény az X folytonos véletlen változó valószínűségi sűrűségfüggvénye, az integrálást a sűrűségfüggvény teljes értelmezési tartományában kell elvégezni.)

12.1.3 Négyzetes átlag („root mean square”, rms)

Egy adott y változó négyzetes átlagán a következő kifejezést értjük:

$$\bar{y}_{rms} = +\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (12.6)$$

azaz n számú pozitív vagy negatív y_i mennyiség négyzetösszegének és számának hányadosából vont négyzetgyök pozitív gyökét. Ha az y változó pl. a t idő folytonos függvénye, akkor a fentiekhez hasonló megfontolással egy integrál formulához jutunk:

$$(\bar{y})_{rms}^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt, \quad (12.7)$$

ahol a és b az időintervallum határai.

Példa

Számítsuk ki az $i = \cos t + \sin t$ alakú áramerősség átlagos értékét a $(0, 3\pi/4)$ intervallumban. Mivel az áramerősség iránya az idő függvényében változik, ezért mind a pozitív, mind pedig az ellenkező irányú áramváltozások hozzájárulnak az áramerősség átlagos értékének kialakulásához, így az áramerősség négyzetes átlagát kell kiszámolni.

$$i^2 = (\cos t + \sin t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + 2\sin t \cdot \cos t = 1 + \sin 2t \quad (12.8)$$

$$\begin{aligned} (rms)^2 &= \frac{4}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin 2t) dt = \frac{4}{3\pi} \left(t - \frac{1}{2} \cos 2t \right) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \\ &= \frac{4}{3\pi} \left[\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = 1 + \frac{4}{3\pi} \end{aligned} \quad (12.9)$$

12.1.4 Logaritmikus középérték

Számos kémiai és biokémiai reakció logaritmikus összefüggéssel írható le. Ebben az esetben célszerű a logaritmikus középérték használata. Alkalmazását egy példán keresztül világítjuk meg.

Vizsgáljuk meg egy drog kiürülését a szervezetből. Tegyük fel, hogy a folyamat egy egyszerű kémiai reakcióval írható le, amelynél egy hatóanyag kiürülését az idő exponenciális függvénye írja le:

$$c = c_0 e^{-kt}, \quad (12.10)$$

ahol $c = c(t)$ a hatóanyag pillanatnyi koncentrációja, c_0 a kiinduló koncentráció, k a reakció sebességi állandója. Számítsuk ki a kiürült drog mennyiségét t_1 és t_2 időközben (1.2 ábra). A számtani átlag:

$$\bar{c}(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt = -\frac{1}{k} c_0 e^{-kt} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{k} c_0 (e^{-kt_1} - e^{-kt_2}) \quad (12.11)$$

A kiinduló egyenletből kapjuk, hogy

$$t_1 = \frac{1}{k} \ln \frac{c_0}{c(t_1)} \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{1}{k} \ln \frac{c_0}{c(t_2)}, \quad \text{így} \quad t_2 - t_1 = \frac{1}{k} \ln \frac{c(t_1)}{c(t_2)} \quad (12.12)$$

Hasonlóan

$$e^{-kt_1} = \frac{c(t_1)}{c_0} \quad \text{és} \quad e^{-kt_2} = \frac{c(t_2)}{c_0} \quad (12.13)$$

Ha a kapott kifejezéseket behelyettesítjük a számtani átlag általános képletébe, megkapjuk a c koncentráció keresett átlagát a (t_1, t_2) intervallumban:

$$\bar{c} = \frac{c(t_1) - c(t_2)}{\ln \frac{c(t_1)}{c(t_2)}} \quad (12.14)$$

Az átlag ezen formáját *logaritmikus átlagnak* hívják. A logaritmikus átlag kisebb, mint a $c(t_1)$ és $c(t_2)$ mennyiségekből kiszámított számtani átlag: $[c(t_1) + c(t_2)] / 2$.

12.2 Paraméteres alakban megadott függvény integrálása

A görbe vonallal határolt síkidom (trapéz) területét a határozott integrál segítségével tudjuk meghatározni:

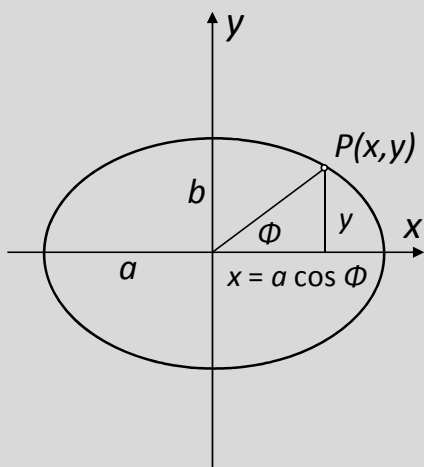
$$T = \int_{x_1}^{x_2} y dx, \quad (12.15)$$

ahol az $y = f(x)$ függvény írja le a trapézt határoló görbe egyenletét az x_1 és x_2 határok között. Egyes esetekben célszerű az $y = f(x)$ függvény paraméteres alakját használni a terület kiszámítására.

Példa

Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ origó középpontú a és b nagy, illetve kis tengellyel rendelkező ellipszis területét. A terület (a félterület kétszerese, 12.1 ábra):

$$T = 2 \int_{-a}^a y(x) dx \quad (12.16)$$



12.1 ábra. Ellipszis területének meghatározása.

Célszerű választás, ha az $y = f(x)$ függvényt parameteres alakban adjuk meg:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \quad \text{és} \quad dx = -a \sin \varphi d\varphi \quad (12.17)$$

Megjegyezzük, hogy az ellipszis parameteres alakját a kör parameteres egyenletéből vezethetjük le, egyszerű u.n. *affin (hasonlósági) transzformációval*.

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-a}^a y(x) dx = -2 \int_{\pi}^0 b \sin \varphi a \sin \varphi d\varphi = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= -2ab \int_{\pi}^0 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \end{aligned} \quad (12.18)$$

Helyettesítési technikát alkalmazva kapjuk:

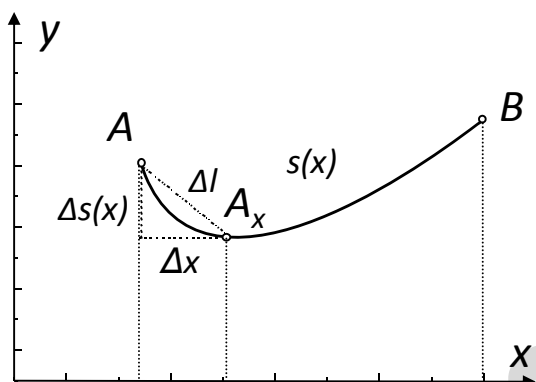
$$= -ab \left[\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{\pi}^0 = ab\pi \quad (12.19)$$

12.3 Görbék ívhossza

A görbék ívhosszának meghatározását hasonló gondolatmenettel vezethetjük be, mint a görbevonalú trapéz területét, azaz megkíséreljük az ívhosszat - jelen esetben - elemi hosszúságú egyenes szakaszokkal közelíteni. Az ívhez tartozó $[a, b]$ intervallumon készítünk egy elég finom beosztást, az osztáspontok ordinátái ívnek egy beosztását eredményezik (kivételt képez az az eset, ha a vonal egy zárt görbe). Az íven a szomszédos osztáspontokat összekötő húrok összege az ívhossz hosszúságának egy közelítését adják.

Könnyen belátható, minél rövidebb szakaszokat használunk, annál jobb a közelítés. Ha az összes lehetséges közelítések halmaza korlátos, akkor az ívet *rektifikálhatónak* (kiegyenesíthetőnek) mondjuk. A görbe ívhosszának a törtvonalak halmazának határértékét nevezzük, ha az egyenes szakaszok számát minden határon túl növeljük oly módon, hogy a leghosszabb szakasz hossza is nullához tart.

Tegyük fel, hogy az $y = f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban egyértékű folytonos függvény. Határozzuk meg a függvény ívhosszát az adott intervallumban.



12.2 ábra. Görbe ívhosszának meghatározása.

Geometriai megfontolás alapján a függvény ívhosszának egy szakaszát Δs az alábbi összefüggéssel adhatjuk meg:

$$\Delta s^2 \approx \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad (12.20)$$

Mivel $\Delta x \neq 0$, ezért

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \quad \text{és} \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad (12.21)$$

Ha $\Delta x \rightarrow 0$, akkor $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + (y')^2}$, ha a függvény az adott intervallumban differenciálható. Feltehetjük, hogy az ívhossz rendelkezik az additivitás tulajdonságával, így az $f(x)$ függvény ívhossza az $[a, b]$ intervallumban:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \quad (12.22)$$

Példa

Határozzuk meg az $y = \ln x$ függvény ívhosszát az $[1, 3]$ intervallumban.

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \, dx = \int_1^3 \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \, dx \quad (12.23)$$

Végezzük el a $t = \sqrt{x^2 + 1}$ helyettesítést; az új integrálási határok: $\sqrt{2}, \sqrt{10}$.

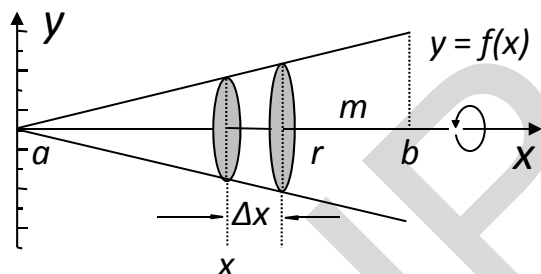
$$S = \int_1^3 \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt, \text{ mivel } dx = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \quad (12.24)$$

$$S = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = \left[t - \ln \frac{t-1}{t+1} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} = 2,856 \quad (12.25)$$

12.4 Forgási testek térfogata

A forgási testek térfogatának meghatározásához két egyszerű elvből kell kiindulni:

- (1) a testek térfogata additív tulajdonságú, azaz a test térfogata egyenlő a részek térfogatának összegével;
- (2) a henger térfogata egyenlő: az alapterület szorozva a henger magasságával.



12.3 ábra Forgástest térfogatának kiszámítása.

Vizsgáljuk meg az $[a, b]$ intervallumban egyértékű folytonos $y = f(x)$ függvényt, amely a vizsgált intervallumban nem metszi az X tengelyt. Ha az OX egyenes, mint forgástengely körül az $f(x)$ függvényt forgatjuk, akkor egy forgási felületet és forgási testek kapunk. Határozzuk meg a forgási test térfogatát az $[a, b]$ intervallumban. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n nem feltétlenül egyenlő részre. Ha az Y tengellyel párhuzamos és az X tengelyre merőleges síkokat húzunk az osztáspontokon keresztül, akkor n számú be- és körülírható hengerhez jutunk. A hengerek alapterülete az x abszcisszához tartozó ordináta segítségével számítható ki. Az elemi henger térfogata:

$$\Delta V = f^2(x) \pi \Delta x, \quad (12.26)$$

ahol Δx az elemi henger magassága. A be- és körülírható hengerek térfogatának összege a forgási test térfogatának közelítése, mindkettő az

$$V = \int_a^b f^2(x) \pi dx \quad (12.27)$$

integrálnak integrálközelítő összege. Ha az osztáspontok számát minden határon túl növeljük, a közelítő összegek szükségszerűen a forgási test térfogatát állítják elő.

Példa

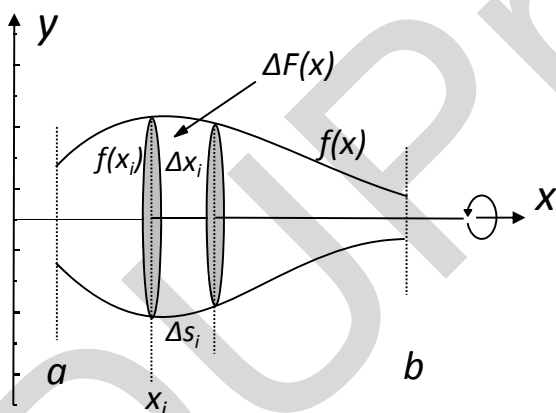
Számítsuk ki az $y = \sin x$ függvény X tengely körüli forgatásával kapott forgási test térfogatát a $[0, \pi]$ intervallumban.

$$V = \int_0^{\pi} \pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} (\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2} \quad (12.28)$$

12.5 Forgási testek felszínének kiszámítása

Tekintsünk egy $[a, b]$ intervallumban egyértékű folytonos $y = f(x)$ függvényt. Forgassuk meg az OX tengely körül. Ennek eredményeként egy felületet nyertünk. A forgási felület kiszámítását annak a gondolatmenetnek segítségével végezhetjük el, hogy

- (1) a felület additív sajátossággal bír,
- (2) az $f(x)$ görbéhez tartozó beírt és körülírt törtvonalak forgatásával nyert felületek közé esik a forgatással keletkezett forgási felület.



12.4 ábra. Forgásfelület kiszámítása.

Az $[a, b]$ intervallum egy tetszőleges beosztásához tartozó elemi forgásfelület nagysága:

$$\Delta F_i = 2\pi y_i \Delta s_i = 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x_i, \quad (12.29)$$

ahol Δs_i a Δx_i -hez tartozó ívhossz, ξ_i pedig a Δx_i intervallum egy belső pontja. Valamennyi részintervallumra kiterjesztve az elemi felületek kiszámítását kapjuk a forgási felület egy közelítő értékét:

$$F = 2\pi \sum_{i=1}^n f(x_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x_i, \quad \text{ahol } \xi_i \in \Delta x_i \quad (12.30)$$

Teljesen hasonló írhatnánk fel a forgási felületet közelítő körülírt felületeket. Ha a beosztást finomítjuk olymódon, hogy a leghosszabb törtvonal hossza is nullához tartson, akkor mindkét közelítő összeg ugyanazt a határértékhez konvergál, nevezetesen a forgási felülethez:

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{i=1}^n f(x_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (12.31)$$

Példa

Számítsuk ki az $y^2 = 4x$ X-tengelyű parabola OX tengelyű forgatásával keletkezett forgásfelszín nagyságát a $[0,2]$ intervallumban.

$$y = 2\sqrt{x} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (12.32)$$

$$F = 2\pi \int_0^2 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dx = 4\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = 4\pi \int_0^2 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx \quad (12.33)$$

$$\begin{aligned} F &= 4\pi \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{8\pi}{3} \left[3^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \\ &= \frac{8\pi}{3} (\sqrt{27} - 1) = 8\pi (\sqrt{3} - 1) = 18,398 \end{aligned} \quad (12.34)$$

12.6 Egy fizikai-kémiai alkalmazás

A termodinamikai problémák megoldásánál gyakran fordul elő, hogy a rendszerre ható erő munkáját valamilyen meghatározott út mentén kell kiszámítani. Tételezzük fel, hogy az erőhatást $F(x,y)$ kétváltozós függvény írja le, az erőhatás pedig valamilyen $f(x)$ útvonal mentén hat.

Egy rövid Δs útszakaszon végzett munka $\Delta L = F(x,y) \Delta s$. A Δs útszakasz az $f(x)$ függvény egy ívének rövid szakasza, így:

$$\Delta s = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x, \quad (12.35)$$

ahol Δx az $f(x)$ függvény Δs ívéhez tartozó intervallum. A végzett munka tehát:

$$\Delta L = F(x,y) \cdot \Delta s = F(x,y) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x \quad (12.36)$$

Ha az $F(x,y)$ erő az v függvény $[a,b]$ intervallumhoz tartozó szakaszán hat, akkor egy integrálformula segítségével tudjuk megadni a végzett munkát, hasonlóan mint azt a forgási felület kiszámításánál (a munka additív mennyiség) tettük:

$$L = \int_a^b F(x, f(x)) \cdot \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \quad (12.37)$$

Megjegyezzük, hogy ha a munkavégzés egy zárt görbe mentén (*körfolyamat*) történik (például surlódási erő ellenében), akkor nettó munkavégzés történik. Ha ellenben a munkavégzés konzervatív erőterben történik (az erőhatás egy potenciálfüggvényből

vezethető le), akkor a végzett munka zérus. Ekkor két A és B pont között végzett munka nem függ az integrálás útvonalától. Matematikailag ez azt jelenti, hogy az integrál jel mögött álló kifejezés *teljes differenciál*.

Példa

Egy termodinamikai rendszerben könnyen kiszámíthatjuk az entrópia változását, miközben a rendszer (p_1, T_1) állapotból (p_2, T_2) állapotba megy át. Mivel az entrópia állapotfüggvény, ezért olyan útonalakat választhatunk, amelyeknél egyszer p , máskor a T állandó. A két entrópiaváltozás összege megadja a teljes entrópiaváltozást:

$$\Delta S(1 \rightarrow 2) = \Delta S_p(1 \rightarrow x) + \Delta S_T(x \rightarrow 2). \quad (12.38)$$

13 Differenciálegyenletek, differenciálegyenletek típusai. Szeparábilis differenciálegyenletek

13.1 A differenciálegyenlet fogalma

Differenciálegyenlettel már találkoztunk, hiszen láttuk a határozatlan integrál bevezetésénél, hogy:

$$F'(x) = f(x), \quad (13.1)$$

azaz kerestük azt az $F(x)$ primitív függvényt, amelynek differenciálhányadosa $f(x)$. A megoldást integrálással találtuk meg:

$$F(x) = \int f(x) dx \text{ és } F(x) = \int f(x) dx + C, \quad (13.2)$$

az utóbbi szintén megoldás, ahol C állandó. Az egyenlet megoldható az $f(x)$ minden folytonossági intervallumában. Ha rögzítünk egy feltételt, pl. megkívánjuk, hogy az $F(x)$ függvény valamely x_0 abszcisszájú ponton áthaladjon, akkor nyilván az

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(u) du \quad (13.3)$$

a megoldás, amelyet *partikuláris* megoldásnak nevezünk, szemben a C állandót tartalmazó *általános* megoldással. Ha $x = x_0$, akkor az integrál zérus, és $F(x) = F(x_0)$. A differenciálegyenlet megoldását *kvadraturának* is nevezik (*Leibniz*). A differenciálegyenletek igen sokszor valamilyen fizikai és kémiai problémából származnak.

Példa

F. Wöhler (1800–1882) 1828-ban klasszikusnak nevezhető kísérlettel igazolta a csupán biológiai folyamatból származónak gondolt karbamid keletkezését ammoniumcianátból, és ezzel cáfolta a *vis vitalis* (életerő) elméletét. Anélkül, hogy a kémiai folyamatot részleteznénk, a kísérlet igazolta, hogy az ammóniumcianát két tautomér alakjának (A és A) kölcsönhatásából keletkezik két molekula karbamid ($2B$):



A Δt idő alatt bekövetkező Δc ammóniumcianát koncentrációváltozás (csökkenés) arányos a pillanatnyi ammóniumcianát koncentrációjának négyzetével (*másodrendű kémiai reakció*), azaz:

$$-\frac{\Delta c}{\Delta t} = kc^2; \text{ ha } \Delta t \rightarrow 0, \text{ akkor a } -\frac{dc}{dt} = kc^2 \quad (13.5)$$

differenciálegyenlethez jutunk. A k arányossági tényező a másodrendű kémiai reakció sebességi állandója. Mivel $c \neq 0$, ha $t \neq 0$, akkor a fenti egyenlet mindkét oldalát rendezés után idő szerint integrálhatjuk:

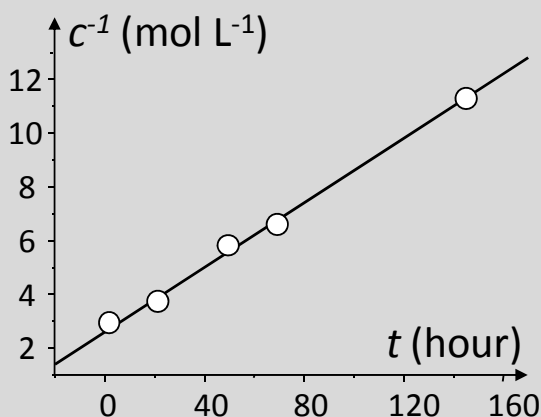
$$-\int \frac{1}{c^2} c' dt = \int k dt \quad (13.6)$$

A megoldás:

$$\frac{1}{c} = kt + C \quad (13.7)$$

ahol C állandó. Ha a $t = 0$ időpillanatban az ammóniumcianát koncentrációja $c = c_0$, akkor a differenciálegyenlet partikuláris megoldása:

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = kt \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} + kt \quad (13.8)$$



13.1 ábra. Wöhler klasszikus kísérletének grafikonja.

Definíciók

(1) Legyen adott az $[a, b]$ intervallumban egy n -szer folytonosan differenciálható $y = f(x)$ függvény. Ha fennáll az x független változónak, az y -nak és az utóbbi x szerinti differenciálhányadosainak valamilyen egyenlete, akkor ezt az egyenletet *közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük. Pontosabban: az egy független változós differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük. Szokásos formája:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (13.9)$$

Példa

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - a^2) y = 0 \quad (13.10)$$

Számos esetben előfordul - legtöbbször fizikai és kémiai problémánál - hogy a differenciálegyenlet differenciálhányadosok helyett a változók *differenciáljait tartalmazza* (Δx helyett dx , hasonló meggondolás alapján, mint azt a fenti példánál láttuk). Ennek magyarázatára a későbbiekben visszatérünk.

Példa

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - 2x = 0 \text{ helyett } 3y^2 dy - 2x dx = 0, \text{ vagy} \quad (13.11)$$

$$y' = f(x, y) \text{ helyett } dy = f(x, y) dx, \quad (13.12)$$

sőt szimmetrikus alakú felírás esetén:

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0, \quad (13.13)$$

ahol X és Y az x és y változók ismert függvényei.

(2) Az egyenletben előforduló legmagasabb differenciálhányados meghatározza a közönséges differenciálegyenlet *rendjét*. A fenti első példában a differenciálegyenlet másodrendű. Ha valamennyi differenciálhányados az első hatványon szerepel, a differenciálegyenlet *lineáris* differenciálegyenlet, ellenkező esetben *non-lineáris*.

Példa

$x^2 \frac{dy}{dx} + y \sin x = 0$ elsőrendű lineáris, $y y'^2 = x$ elsőrendű nem-lineáris differenciál-

egyenlet, a $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ másodrendű differenciálegyenlet.

(3) Ha az egyenlet a legmagasabb differenciálhányadosra nézve feloldható, azaz

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (13.14)$$

akkor *explicit* differenciálegyenletről beszélünk. Ellenkező esetben a differenciálegyenlet *implicit*. Amennyiben a differenciálegyenletben szereplő függvény többváltozós, a differenciálegyenletet *parciális differenciálegyenletnek* nevezzük.

Példa

$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ elsőrendű explicit; $\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$, ahol $c = c(x, t)$, egy parciális differenciálegyenlet (Ha c a koncentráció, D a diffúziós együttható, akkor az egyenlet a diffúzió *Fick-törvénye*).

(4) Minden olyan $[a, b]$ intervallumban definiált függvényt, amely az adott differenciálegyenletet kielégíti, a differenciálegyenlet egy *megoldásának* vagy integráljának nevezzük. Könnyű belátni, hogy a differenciálegyenlet megoldása - az *általános* megoldás - csak egy állandó erejéig meghatározott. Geometriailag ez függvények egy paraméteres seregének megadását jelenti (az állandó a paraméter). Ha az állandót valamilyen feltétel - amelyet *kezdeti* vagy *peremfeltételnek* nevezünk - segítségével rögzítjük, akkor a differenciálegyenlet egy *partikuláris* megoldását kapjuk.

Ha a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = y(x) + C \quad (13.15)$$

ahol C állandó, akkor a kezdeti feltétel:

$$y_0 = y(x_0) \quad (13.16)$$

ahol x_0 és y_0 előre megadott értékek.

(5) Az n -ed rendű differenciálegyenlet kezdeti feltételének megadása az y függvény és annak $(n-1)$ -ed rendű differenciálhányadosának megadását jelenti az x_0 helyen:

$$y(x_0) = y_0, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} = y_0', \quad \dots, \quad \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right)_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (13.17)$$

Azaz az explicit alakban megadott n -ed rendű differenciálegyenletnek a fenti kezdeti feltételek mellett egyetlen partikuláris megoldása létezik, ha a függvény és valamennyi differenciálhányadosa az adott értelmezési tartományban folytonosan differenciálható.

(6) Tegyük fel, hogy az $y = g(x)$ függvény az

$$y' = f(x, y) \quad (13.18)$$

elsőrendű differenciálegyenletnek a megoldása. Ezt a függvényt, amely egy görbét határoz meg, a differenciálegyenlet *integrálgörbéjének* nevezzük. Az y' a definíció szerint annak a szögnek a tangensét jelenti, amelyet az x pontban a $g(x)$ görbe érintője az Ox tengellyel bezár. Ezzel az értelmezési tartomány minden pontjához egy irány tartozik, ezek összességét *iránymezőnek* nevezzük. A differenciálegyenlet megoldása tehát olyan görbék megkeresését jelenti, amelyeknek érintője minden pontban egybeesik az illető ponthoz rendelt iránnyal. Azokat a vonalakat, amelyek mentén az irány azonos, *izoklin* vonalaknak nevezzük.

13.2 A differenciálegyenletek típusai

Az egyszerűbb differenciálegyenletek típusai:

- (1) elsőrendű szeparábilis differenciálegyenlet:

$$\frac{dy}{dx} = X(x) \cdot Y(y), \quad (13.19)$$

- (2) elsőrendű homogén differenciálegyenlet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Theta(x, y)}{\Phi(x, y)}, \text{ és } \frac{dy}{dx} = \frac{x^m \Theta(V)}{y^m \Phi(V)}, y = Vx \quad (13.20)$$

- (3) elsőrendű lineáris differenciálegyenlet:

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = Q(x), \text{ és } I(x) = \exp\left(\int P(x) dx\right) \quad (13.21)$$

- (4) másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k_1 \frac{dy}{dx} + k_2 y = 0, \quad (13.22)$$

- (5) másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k_1 \frac{dy}{dx} + k_2 y = f(x), \quad (13.23)$$

ahol y az x változó valamilyen függvénye, $X(x)$, $Y(x)$, $P(x)$ és $Q(x)$ az x változónak függvényei, k_1 és k_2 állandók.

13.3 Szeparábilis differenciálegyenlet megoldása

Tekintsük az

$$y' = f(x, y) \quad (13.24)$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenletet az (a, b) intervallumban, ahol $x, y, y'(x)$ és $f(x, y)$ egyaránt az $\tilde{R}$ halmazon értelmezett függvények és változók. Tegyük fel továbbá, hogy az $f(x, y)$ függvény a következő alakra hozható:

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y), \quad (13.25)$$

ahol $h(y) \in \tilde{R}$, de nem zérus, ha $x \in (a, b)$. A differenciálegyenletet ebben az esetben szeparábilis differenciálegyenletnek hívjuk, megoldása a következő eljárás szerint végezhető el. A $h(y)$ függvény természetesen összetett függvény: $h(y) = h(y(x))$, azaz a h függvény az x változó valamilyen ismert függvénye.

Rendezzük át az egyenletet a változóknak megfelelően, és integráljuk mindkét oldalt az x változó szerint:

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x) \text{ és } \int \frac{y'}{h(y)} dx = \int g(x) dx \quad (13.26)$$

Végezzük el a következő helyettesítést:

$$z = y(x) \quad dz = y'(x) dx; \quad (13.27)$$

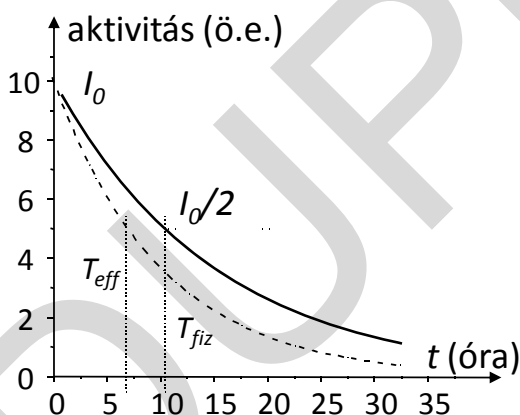
Továbbá

$$\int \frac{dz}{h(z)} = \int g(x) dx \quad (13.28)$$

Az integrálás a korábban megismert eljárások szerint végezhető el. Számos fizikai, kémiai folyamatot jellemez, hogy egy adott fizikai mennyiség változása a mondott mennyiség pillanatnyi nagyságával arányos; pl. UV sugárzás csökkenése valamilyen oldatban:

$$x = x(t) \text{ és } \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \approx \alpha x(t), \text{ ahol } \alpha \text{ állandó.} \quad (13.29)$$

Az egyenlet megoldása: $x(t) = C e^{\lambda t}$ alakú, ahol λ egyaránt lehet pozitív illetve negatív, C pedig állandó. Az exponenciális csökkenés ($\lambda < 0$) általában energiaszállító áramok homogén közegben történő csökkenését írja le. Korpuszkuláris sugárzások, elektromos töltéssel rendelkező részecskék esetén ez a megállapítás nem szükségképpen helytálló.



13.2 ábra. Radioaktivitás időbeli lefolyása oldatban és biológiai rendszerben. Biológiai rendszerben effektív felezési idővel számolnak.

Példa

Oldjuk meg az exponenciális növekedés és csökkenés differenciálegyenletét. A szaporodó sejtek és baktériumok számát igen nagy számosságuk miatt folytonosan változó mennyiségnek tekinthetjük, és szögezzük le, hogy a növekedés és csökkenés folyamatát véletlen tényezők nem befolyásolják. Reális populációk esetén az egyedek és a populáció maga is különböző véletlen tényezők által befolyásoltak.

A probléma megoldását az az alapvető természeti sajátosság teszi lehetővé, hogy igen kicsiny méretekben a változások *lineáris összefüggés* formájában fejezhetők ki. Tegyük fel, hogy a baktériumok száma a t időben $N = N(t)$. Δt idő elmúltával a

baktériumok száma $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$ darabbal növekedik. Feltehetjük, hogy a szaporodás a baktériumok pillanatnyi számával arányos:

$$\Delta N = \lambda N(t) \Delta t \quad \text{és} \quad \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lambda N(t), \quad (13.30)$$

ahol λ a szaporodásra (specieszre) jellemző állandó. Mivel az $N(t)$ az időben folytonosan változó mennyiség, ezért a differenciahánydosnak van határértéke, az időegységre jutó szaporodás:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \dot{N}(t) \quad \text{és} \quad \dot{N}(t) = \lambda N(t) \quad (13.31)$$

A meggondolással az $\dot{N}(t) = \lambda N(t)$ szeparábilis differenciálegyenlethez jutottunk. A fizikában és kémiában használt meggondolásnál Δt és ΔN helyett azonnal a dt és dN differenciálokat használják (Ebben a gondolkodásmódban a dt és dN nem szimbólumok, hanem véges nagyságú, fizikailag létező mennyiségeket jelentenek). Így:

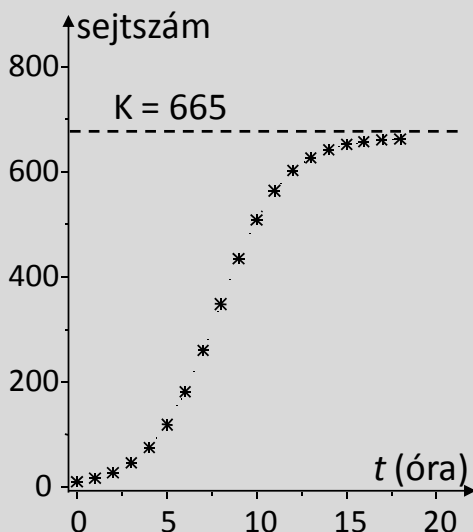
$$dN = \lambda N(t) dt \quad \text{és} \quad \frac{dN}{dt} = \lambda N(t). \quad (13.32)$$

A differenciálegyenlet szeparábilis, általános megoldása:

$$N(t) = C e^{\lambda t} \quad (13.33)$$

Ha a $t = 0$ időpillanatban a populáció nagyságát N_0 -al jelöljük, akkor a partikuláris megoldás:

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} \quad (13.34)$$



13.3 ábra. Sejtek korlátos növekedése.

A megadott differenciálegyenletet a *nem-korlátos növekedés* egyenletének

nevezzük. A biológiában számos növekedési törvény ismert, ezek részletezését illetően a szakirodalomra utalunk. A fenti differenciálegyenlethez azonban hasonló módon oldható meg a *korlátozott növekedés* (növekedés logisztikus modellje) azon differenciálegyenlete, amelynél feltételezik, hogy a relatív növekedést leíró λ nem állandó, hanem függ a populáció aktuális nagyságától:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right), \quad (13.35)$$

ahol λ_0 az intrinsic növekedési arány, K pedig az egyensúlyi populáció. Látjuk, ha az aktuális populáció éppen K , akkor a szaporodás vagy növekedés megáll, az időegység alatt keletkező és elpusztuló egyedek száma azonos.

13.4 Homogén differenciálegyenlet és megoldása

Az $y' = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenletet *homogénnek* nevezzük, ha igaz a következő azonosság:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \quad (13.36)$$

ahol t egy adott változó. A relációnak eleget tevő $f(x, y)$ függvényt nulladfokú homogén függvénynek nevezzük. A fenti differenciálegyenletet ebben az esetben vissza tudjuk vezetni szeparábilis differenciálegyenletre.

Legyen $t = \frac{1}{x}$, ekkor $y' = f(x, y) = f(tx, ty) = f(1, y/x) = f(u)$, azaz az $u = y/x$ helyettesítéssel egy egyargumentumú $u \equiv u(x)$ függvényhez jutottunk. Alakítsuk át a fenti differenciálegyenletet:

$$y = ux \text{ és } y' = u + x \frac{du}{dx}, \text{ továbbá } u + x \frac{du}{dx} = f(u). \quad (13.37)$$

Rendezzük át az egyenletet és integráljunk az x változó szerint:

$$\frac{1}{f(u) - u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \int \frac{1}{f(u) - u} u' dx = \int \frac{1}{x} dx \quad (13.38)$$

A $z = u(x)$ helyettesítés után kapjuk, hogy:

$$\int \frac{1}{f(z) - z} dz = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (13.39)$$

Integrálás után elvégezzük a szükséges helyettesítéseket az általános vagy partikuláris megoldás érdekében.

Példa

Oldjuk meg az $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ differenciálegyenletet.

Osszuk el x^2 -tel a jobboldalon a számlálót és nevezőt:

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - \frac{2y}{x}} = \frac{u - u^2}{1 - 2u} \quad \text{ahol } u = \frac{y}{x} \quad (13.40)$$

Mivel $y = u x$, így

$$y' = u'x + u \quad (13.41)$$

Behelyettesítés és átrendezés után a differenciálegyenlet alakja:

$$u'x = \frac{u^2}{1 - u} \quad (13.42)$$

már egy szeparábilis differenciálegyenlet, amelynek megoldási módja már ismert:

$$\frac{1 - 2u}{u^2} u' = \frac{1}{x} \quad (13.43)$$

Integráljuk az egyenletet az x változó szerint:

$$\int \frac{1 - 2u}{u^2} du = \int \frac{1}{x} dx, \quad (13.44)$$

ahol a baloldalon az $u = u(x)$ és $du = u'(x) dx$ új változót vezettük be. Integrálás után:

$$-\frac{1}{u} - 2 \ln u = \ln x + C \quad \text{és} \quad \ln e^{\frac{1}{u}} + \ln u^2 = \ln \frac{C'}{x} \quad (13.45)$$

továbbá átalakítás után $u^2 e^{\frac{1}{u}} = \frac{C'}{x}$ és $\frac{y^2}{x} e^{\frac{x}{y}} = C'$, ahol C' állandó.

14 Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek. Kémiai reakciók

14.1 Lineáris differenciálegyenlet megoldása integráló faktorrall

Az

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (14.1)$$

elsőrendű differenciálegyenlet megoldására, ahol $p(x)$ és $q(x)$ lehetnek állandók is, létezik egy általános eljárás. A megoldás egy *integráló faktor* felhasználásával lehetséges. Egy $\varphi(x)$ vagy $I(x)$ függvényt integráló faktornak hívunk, ha segítségével a fenti alakú elsőrendű lineáris differenciálegyenlet egzakt differenciálhányadossá alakítható. A $\varphi(x)$ vagy $I(x)$ függvény célszerű választása:

$$I(x) = e^{\int p(x) dx} \quad (14.2)$$

Szorozzuk meg a fenti egyenlet mindkét oldalát az integráló faktorrall, akkor

$$y' e^{\int p(x) dx} + p(x)y e^{\int p(x) dx} = q(x) e^{\int p(x) dx} \quad (14.3)$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldala nem más, mint az $y = y(x)$ függvény és a $p(x)$ integráló faktort alkotó függvény szorzatának differenciálhányadosa, azaz:

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\int p(x) dx} \right) = q(x) e^{\int p(x) dx} \quad (14.4)$$

Az x változó szerinti integrálás után kapjuk, hogy

$$y e^{\int p(x) dx} = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \quad (14.5)$$

és

$$y = \left[\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right] e^{-\int p(x) dx} + C e^{-\int p(x) dx} \quad (14.6)$$

ahol C állandó. A kapott kifejezés szolgáltatja az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását. A kezdeti feltétel ismeretében a C értékének meghatározásával kaphatjuk meg az egyenlet egy partikuláris megoldását.

A megoldás menetét a következőképpen foglalhatjuk össze:

- (1) rendezzük át a kiinduló egyenletet a következő alakra: $y' + p(x)y = q(x)$,
- (2) állapítsuk meg az integráló faktort: $I(x) = e^{\int p(x) dx}$,
- (3) szorozzuk meg a differenciálegyenletet az integráló faktorrall,

- (4) írjuk az egyenlet baloldalát egzakt differenciálhányados formájába $d/dx(\dots)$,
 (5) integráljuk az egyenlet mindkét oldalát x szerint.

Megjegyezzük, hogy az integráló faktor kiszámításánál nem használunk integrációs állandót, amely mondjuk legyen A . Mivel az A állandó

$$k = e^A \quad (14.7)$$

alakba írható, szorzás után a k állandó az egyenlet minden tagjában szerepel, így az egyenlet az állandóval egyszerűsíthető. Mnemotechnikai szabályként megjegyezhetjük, hogy a $d/dx(\dots)$ mögött álló szorzatot az $y = y(x)$ függvény és az y' együtthatójának szorzata adja.

Példa

Oldjuk meg az $x \frac{dy}{dx} + y = x^3$ differenciálegyenletet az $a \leq x \leq b$ intervallumban, feltéve, hogy az intervallumban $x \neq 0$.

Első lépésként osszuk el x -el az egyenlet mindkét oldalát,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = x^2 \quad (14.8)$$

Az integráló faktor most

$$I(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x \quad (14.9)$$

A harmadik lépéssel az egyenlet:

$$x \frac{dy}{dx} + y = x^3 \quad (14.10)$$

A baloldal nem egyéb, mint az (xy) kifejezés szorzatának differenciálhányadosa, így:

$$\frac{d}{dx}(xy) = x^3 \quad \text{és} \quad xy = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C \quad (14.11)$$

Az explicit alakú általános megoldás:

$$y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x} \quad (14.12)$$

Megemlíttük, hogy az integráló faktorról történő megoldás eredete az elsőrendű lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén

$$y' + p(x)y = 0 \quad (14.13)$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásával kapcsolatos. Könnyen beláthatjuk, hogy a fenti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\ln y = -\int p(x) dx + C \quad \text{és} \quad y = C' e^{-\int p(x) dx},$$

ahol $C' = e^C$, C és C' állandó.

Ha mármost a lineáris differenciálegyenlet jobboldalán álló $q(x)$ függvény nem nulla, akkor arra gondolhatunk, hogy a C' állandó most x -nek valamilyen függvénye:

$$C' = z(x) \quad (14.14)$$

A $z(x)$ függvény megválasztható úgy, hogy az eredeti lineáris differenciálegyenletnek legyen a megoldása, azaz:

$$y_1(x) = z(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (14.15)$$

Ha az $y_1(x)$ függvényt az eredeti differenciálegyenletbe behelyettesítjük, eredményül azt kapjuk, hogy a $z(x)$ függvényt úgy kell megválasztani, hogy differenciálhányadosa:

$$z'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \quad (14.16)$$

legyen. Az egyenlet integrálja nem egyéb, mint a (14.5) egyenlet jobboldalán álló kifejezés.

14.2 Kémiai, biokémiai reakciók. Kompartment analízis

A kémiai reakciók és azok kinetikájának tanulmányozása a kémia egyik fontos fejezete. Segítségével tudunk betekinteni a különböző kémiai folyamatok időbeli lefolyásába, a reakcióban résztvevő komponensek koncentrációjának változására és a különböző környezeti faktorok (hőmérséklet, pH, elektromos tér, katalizátorok) által kiváltott hatások szerepére.

A kémiai rendszerekre jellemző lehet, hogy többségükben homogén fázisban mennek végbe, azaz a reakciókra jellemző, hogy a fázis minden eleminek tekinthető részében a reakcióra jellemző paraméterek egyformák. Ezzel szemben a biológiai rendszerek nem tekinthetők homogén rendszereknek, hanem morfológiailag és funkcionálisan (dinamikailag) elhatárolható izolált részrendszerekre oszthatók, amelyek kölcsönhatásban állnak egymással. Az élő szervezetben egy meghatározott anyag több jól megkülönböztethető térben, illetve formában jelenik meg, és azok között anyagáramlás is lehetséges. Feltételezik, hogy a mondott izolált tereken belül nincs koncentrációgradiens, nincs anyagáramlás. A tereket, amelyeket *kompartmenteknek* hívunk, elvileg lehetnek formális terek is, ez utóbbiak matematikai leírás szempontjából matematikai absztrakciónak tekintendők.

Az esetek egy részében ismerjük a biológiai rendszer kompartment struktúráját, ismerjük a kompartmentek számát, azok térfogatát, az egyes kompartmentek között végbemenő anyagáramlásokat. Egyszerűbb esetekben, feltételezve a rendszer állandósult („*steady-state*”) állapotát, meghatározhatjuk a kémiai folyamatok sebességi állandóit, a koncentrációk változásait (*kompartment analízis*). Ha ellenben a kompartment struktúra

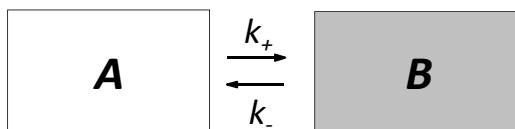
nem ismert, akkor számítógépes modellezéssel lehet a rendszer viselkedéséről számot adni. Ennek részleteit illetően szakirodalomra kell utalnunk.

Némi absztrakció felhasználásával a kémiai reakciók is tárgyalhatók a kompartment analízis segítségével. Tekintsük a következő egyszerű kémiai reakciót (két anyag keveredése):



Ehhez a kémiai reakcióhoz tartozó kompartment modelltől feltételezhetjük, hogy bár a reakcióhoz kapcsolódó anyagtranszport ugyanazon fizikai térben megy végbe, matematikai modellt tekintve a két kompartment közötti anyagáramlásról van szó, míg a kiinduló koncentráció/k egyensúlyba nem jut/nak.

Kompartment modell



14.1 ábra. Egyszerű kémiai reakció kompartment modellje.

Ha egy adott reakcióba lépő anyag koncentrációját x -el jelöljük, amely A, B, C anyagok a , b , c koncentrációjától függ, akkor a koncentráció időbeli változása (a reakció sebessége):

$$\frac{dx}{dt} = k a^\alpha b^\beta c^\gamma, \text{ ahol } n = \alpha + \beta + \gamma \quad (14.18)$$

a reakció rendje,

$$k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a}{\Delta t} \text{ [mol/s]} \quad (14.19)$$

a *reakció sebességi állandója*. A k dimenziója, mint a fenti összefüggésből látjuk, a kémiai reakció rendjétől függ, ezért a különböző rendű kémiai reakciók sebességi állandói nem hasonlíthatók össze.

Vizsgáljuk meg a fenti megfordítható (*reverzibilis*) kémiai reakció időbeli lefolyását. Bármely időpillanatban érvényesek az alábbi összefüggések:

$$\frac{da}{dt} = -k_+ a + k_- b \text{ és } \frac{db}{dt} = k_+ a - k_- b, \text{ azaz} \quad (14.20)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{db}{dt} \quad (14.21)$$

ahol $a = a(t)$ és $b = b(t)$, a két kompartmentben, A és B, lévő anyag koncentrációját, k_+ és k_- a két reakció sebességi állandóját jelentik. A reverzibilitás feltétele egy dinamikus egyensúly, amelyet a második sorban álló egyenlet fejez ki, azaz a koncentráció csökkenése az A kompartmentben egyenlő a B kompartmentben a koncentráció növekedésével. Tegyük fel továbbá, hogy a $t = 0$ időpillanatban

$$a(0) = a_0, \quad b(0) = 0 \text{ és } a_0 = a(t) + b(t), \quad (14.22)$$

azaz nincs anyagvesztés, szivárgás vagy anyagátalakulás a reakció során. Egyensúly esetén nyilvánvalóan a differenciálhányadosok nullával egyenlőek. Ha $a(t) = a^*$ illetve $b(t) = b^*$ jelöli egyensúly esetén az egyensúlyi koncentrációkat, akkor a fenti egyenletekből $2k - b^* = 2k + a^*$, és

$$K = \frac{k_+}{k_-} = \frac{b^*}{a^*}, \quad (14.23)$$

ahol K a kémiai reakció egyensúlyi állandója.

A következőkben megvizsgáljuk a kémiai egyensúly elérésének folyamatát. Az anyagmegmaradás elvét kifejező egyenletből indulhatunk ki:

$$b(t) = a_0 - a(t). \quad (14.24)$$

Behelyettesítve a fenti összefüggést az $a(t)$ -t kifejező differenciálegyenletbe kapjuk, hogy

$$\frac{da}{dt} = -k_+ a + k_- (a_0 - a) = -(k_+ + k_-)a + k_- a_0 \quad (14.25)$$

Mivel a kapott egyenlet egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet, integráló faktor segítségével oldjuk meg. Az integráló faktor:

$$F(t) = e^{\int (k_+ + k_-) dt} = e^{(k_+ + k_-)t} \quad (14.26)$$

Behelyettesítés után a következő egyenlethez jutunk:

$$e^{(k_+ + k_-)t} \frac{da}{dt} + (k_+ + k_-)a e^{(k_+ + k_-)t} = k_- a_0 e^{(k_+ + k_-)t} \quad (14.27)$$

Könnyen belátható, hogy a jobboldalon álló kifejezés az

$$f(t) = a \cdot e^{(k_+ + k_-)t} \quad (14.28)$$

függvény első differenciálhányadosa, ezért:

$$\frac{d}{dt} (a \cdot e^{(k_+ + k_-)t}) = k_- a_0 \cdot e^{(k_+ + k_-)t} \quad (14.29)$$

Időszerinti integrálás után kapjuk:

$$a \cdot e^{(k_+ + k_-)t} = \frac{k_-}{k_+ + k_-} e^{(k_+ + k_-)t} + C, \text{ azaz} \quad (14.30)$$

$$a(t) = \frac{k_-}{k_+ + k_-} + C e^{-(k_+ + k_-)t} \quad (14.31)$$

Ha felhasználjuk a $t = 0$ kezdeti feltételt, akkor megkapjuk a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását:

$$a_0 = \frac{k_-}{k_+ + k_-} a_0 + C, \text{ így } C = \frac{k_+}{k_+ + k_-} a_0 \quad (14.32)$$

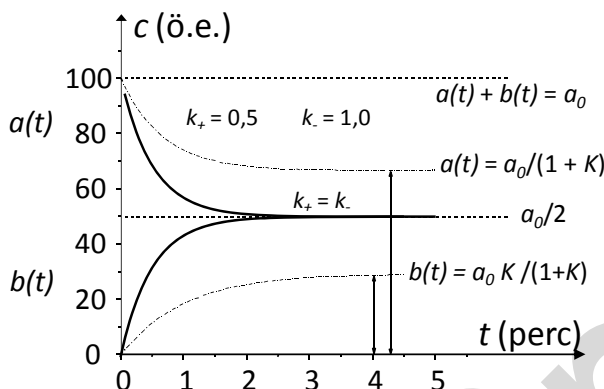
A differenciálegyenlet megoldásának alakja:

$$a(t) = \frac{a_0}{k_+ + k_-} \{k_- + k_+ e^{-(k_+ + k_-)t}\} \quad \text{vagy} \quad a(t) = \frac{a_0 k_-}{K + 1} \{1 + K e^{-(k_+ + k_-)t}\}, \quad (14.33)$$

ahol az utóbbi egyenletnél felhasználtuk a K egyensúlyi állandóra vonatkozó kifejezést. Egyszerű megfontolás alapján kaphatjuk meg a $b(t)$ koncentrációra vonatkozó megoldást:

$$b(t) = a_0 - a(t), \quad b(t) = \frac{K a_0}{K + 1} \{1 - e^{-(k_+ + k_-)t}\} \quad (14.34)$$

A koncentrációk időbeli lefolyását a 14.2 ábra mutatja.



14. 2 ábra. Az $a(t)$ és $b(t)$ koncentrációk időbeli lefolyása két azonos ill. eltérő reakciósebességi állandó esetén, amely azonos ill. eltérő egyensúlyi koncentrációkat eredményez.

Az összefüggések felhasználásával megvizsgálhatjuk, mennyi lesz a határértéke az $a(t)$ és $b(t)$ koncentrációknak:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \frac{a_0}{k_+ + k_-} = \frac{a_0}{1 + K} = a_\infty \quad \text{és} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = \frac{K}{K + 1} a_0 = b_\infty \quad (14.35)$$

Speciális esetben, ha $k_+ = k_-$, akkor $K = 1$ és $a_\infty = b_\infty = \frac{a_0}{2}$.

Megkérdezhetjük, mikor lesz egyenlő a két koncentráció, azaz keressük azt a t_x időt, amikor $a(t_x) = b(t_x)$. Ha az $a(t)$ -re és a $b(t)$ -re vonatkozó összfüggést egyenlővé tesszük, akkor kiderül, hogy:

$$t_x = \frac{1}{k_+ + k_-} \ln \frac{2K}{K - 1} \quad (14.36)$$

14.3 Egymást követő (konszekutív) reakció megoldása

Az összetett reakciók gyakran egymást követő reakciókból tevődnek össze. A legegyszerűbb konszekutív reakció két elsőrendű, nem megfordítható lépésből alakul ki:



ahol A , B és C a reakciókban részt vevő komponenseket jelentik, k_1 és k_2 pedig az elsőrendű kémiai reakciók sebességi állandói. Kezdeti feltételnek tegyük fel, hogy $t = 0$ időpillanatban

$$[A]_0 = a_0, \quad [B]_0 = 0 \quad \text{és} \quad [C]_0 = 0. \quad (14.38)$$

Ha a reakció során anyagátalakulás nem történik, továbbá kizárjuk a szivárgás lehetőségét, akkor bármely időpillanatban igaz, hogy:

$$[A]_t + [B]_t + [C]_t = a_0 \quad (\text{anyagmegmaradás elve}). \quad (14.39)$$

Jelölje $[A]_t = a_0 - x$, $[B]_t = y$ és $[C]_t = x - y$ a t időpillanatban kialakult anyagok koncentrációját. A jelölések felhasználásával az egyes anyagok koncentrációira a következő differenciálegyenleteket írhatjuk fel:

$$\frac{d(a_0 - x)}{dt} = -k_1(a_0 - x) \quad (14.40)$$

és

$$\frac{dy}{dt} = k_1(a_0 - x) - k_2 y \quad (14.41)$$

A C anyagra nézve a megoldást a két fenti egyenlet megoldásából kaphatjuk. Az (14.40) differenciálegyenlet egyszerű szeparábilis differenciálegyenlet, amelynek megoldása:

$$a_0 - x = a_0 e^{-k_1 t} \quad \text{azaz} \quad x(t) = a_0 (1 - e^{-k_1 t}), \quad (14.42)$$

ahol már figyelembe vettük a $t = 0$ esetre vonatkozó kezdeti feltételt. Az utóbbi egyenlet jól mutatja, hogy elsőrendű reakciónál az A anyag koncentrációja az időben exponenciálisan csökken, mivel $x(t)$ exponenciálisan növekedik.

Ha az (14.40) egyenletre kapott megoldást behelyettesítjük a (14.41) egyenletbe, akkor a differenciálegyenlet alakja a következő:

$$\frac{dy}{dt} = k_1 a_0 e^{-k_1 t} - k_2 y \quad (14.43)$$

átrendezés után az egyenlet alakja a már ismert lineáris differenciálegyenlet:

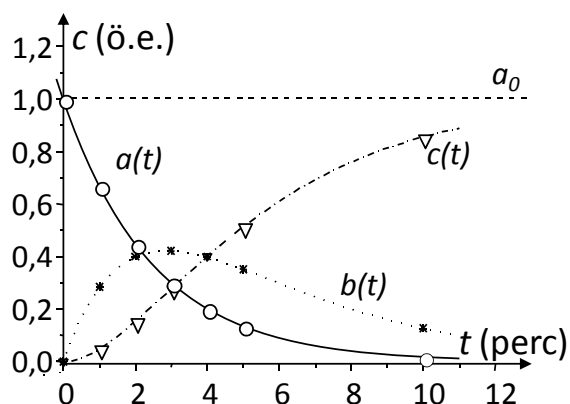
$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 a_0 e^{-k_1 t} \quad (14.44)$$

A fenti egyenlet megoldását az $f(t) = \exp(k_2 t)$ integráló faktor segítségével végezhetjük el (a megoldást nem részletezzük):

$$y(t) = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}), \quad (14.45)$$

ahol figyelembe vettük a fent jelzett kezdeti feltételt. A C anyag koncentrációjának időbeli változását a két megoldás összevetéséből kapjuk:

$$[C]_t = a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{k_2 - k_1} (k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}) \right\} \quad (14.46)$$



14.3 ábra. Konszekutív kémiai reakció időbeli lefolyása.

A fenti reakció egyes összetevőinek időbeli lefolyását a 14.3 ábra mutatja. A közbülső B termék kezdeti növekedés után csökken, a $b(t)$ koncentráció maximumának elérési idejét a k_1 és k_2 sebességi állandók határozzák meg. A reakció során a $c(t)$ termék növekedik, a növekedést egy *szigmoid* alakú függvénnyel jellemezhetjük. A szigmoidális növekedés olyan konszekutív reakciók esetén alakul ki, amelynél a termék *egy intermediären* keresztül alakul ki.

15 Másodrendű lineáris differenciálegyenletek. Egy további kémiai-biokémiai alkalmazás: enzimkinetika

15.1 Másodrendű differenciálegyenletek

A korábbiakból ismert, hogy a differenciálegyenletek rendjét a differenciálhányados határozza meg. Az

$$y'' = f(x, y, y') \quad (15.1)$$

alakú függvény egy másodrendű explicit differenciálegyenletet reprezentál. Ha feltételezzük, hogy az $f(x)$ függvény és az $y' = y'(x)$ differenciálhányados folytonos az $x = x_0$ hely környezetében, továbbá adott a kezdeti feltétel:

$$x = x_0, y = y_0 \text{ és } y' = y_0', \quad (15.2)$$

akkor a fenti egyenletnek egy és csakis egy megoldása van, amely $x = x_0$ esetén az $y(x_0) = y_0$ és $y'(x_0) = y_0'$ értéket veszi fel (*egzisztencia és unicitás tétel*). Geometriailag a sík egy $P(x_0, y_0)$ pontján olyan $y = y(x)$ görbe halad keresztül (*integrál görbe*), amelynek érintője az x_0 pontnál az előírt y_0' értéket veszi fel.

A kezdeti feltétel fenti megfogalmazásából következik, hogy az

$$y'' = f(x, y, y') \quad (15.3)$$

differenciálegyenletnek két C_1 és C_2 tetszőleges állandótól függő megoldása van:

$$y = y(x, C_1, C_2), \quad (15.4)$$

és ezt tekintjük a differenciálegyenlet *általános* megoldásának. Kétszer differenciálva az $y = y(x, C_1, C_2)$ függvényt

$$y' = y'_x(x, C_1, C_2) \text{ és } y'' = y''_x(x, C_1, C_2) \quad (15.5)$$

a két egyenletből a két ismeretlenre - C_1 és C_2 - kapunk megoldást, amely a választott kezdeti feltételtől függ. Ezt a megoldást tekintjük a differenciálegyenlet egy *partikuláris* megoldásának.

A másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja a következő:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x) y = Q(x), \quad (15.6)$$

ahol $P_1(x)$, $P_2(x)$ és $Q(x)$ ugyanabban az intervallumban értelmezett függvények. Ha $Q(x) \neq 0$, akkor a differenciálegyenlet *inhomogén*, ellenkező esetben, ha $Q(x) = 0$, akkor *homogén* lineáris differenciálegyenletről beszélünk. A másodrendű lineáris differenciálegyenletekkel kapcsolatosan két tételt szokás megemlíteni.

1. tétel

Ha $y_1(x)$ és $y_2(x)$ a másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy-egy *partikuláris* megoldása, akkor

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (15.7)$$

is megoldás, ahol C_1 és C_2 állandók. Ha $y_1(x)/y_2(x)$ nem egyenlő egy állandóval, akkor a fenti megoldás az *általános* megoldás is. Ha $y_2(x) = k y_1(x)$ ($k \neq 0$) vagy $y_1(x)$ valamilyen lineáris kombinációjával egyenlő, akkor $y_2(x)$ és $y_1(x)$ *lineáris függéséről* beszélünk.

2. tétel

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásából és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásából adódik:

$$y = Y + y_0 \quad \text{vagy} \quad y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0 \quad (15.8)$$

ahol $Y = Y(x)$ a homogén egyenlet általános megoldását jelenti, y_0 pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Ez azt mutatja, hogy az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egyenlet megoldása összevethető a homogén lineáris differenciálegyenlet egyenlet két lineárisan független megoldásából és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásából.

A másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása természetesen függ a két függvény, $P_1(x)$ és $P_2(x)$ alakjától. Ha $P_1(x)$ és $P_2(x)$ az x tetszőleges függvényei, akkor megoldási eljárás nem adható.

A továbbiakban csak az állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásával foglalkozunk.

15.2 Állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet

Az állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját a következő módon tudjuk felírni:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0, \quad (15.9)$$

ahol a_1 és a_2 állandók. Látjuk, hogy $y = 0$ triviális megoldás. A nem triviális megoldás felismeréséhez a következő eljárás vezet: könnyen belátható, hogy

$$y = e^{kx} \quad (15.10)$$

az egyenlet egy partikuláris megoldása, ahol k egyelőre egy ismeretlen állandó. Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$(k^2 + a_1 k + a_2) e^{kx} = 0 \quad (15.11)$$

A fenti egyenlet csak akkor lehet igaz, ha

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \quad (15.12)$$

Ezt a másodfokú egyenletet a kiinduló differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletének* hívjuk, amelyből az ismeretlen k állandó meghatározható. A karakterisztikus egyenlet diszkriminánsától függően három esetet különböztetünk meg:

- (1) a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa pozitív, ekkor az egyenletnek *két valós gyöke* van: k_1 és k_2 . A differenciálegyenlet általános megoldása ebben az esetben:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (15.13)$$

ahol C_1 és C_2 a kezdeti feltételekből meghatározható állandók.

- (2) a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa zérus, ebben az esetben az egyenletnek *egy kétszeres valós gyöke* van. Könnyen igazolható, hogy a differenciálegyenlet két lineárisan független partikuláris megoldása:

$$y_1 = e^{kx} \quad \text{és} \quad y_2 = x e^{kx} \quad (15.14)$$

Az általános megoldás pedig:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = (C_1 + C_2 x) e^{kx} \quad (15.15)$$

ahol C_1 és C_2 ismét a kezdeti feltételekből meghatározható állandók.

- (3) a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa negatív, ebben az esetben *nincs valós gyök*. Jelölje ω a következő kifejezést:

$$\omega = \sqrt{4a_2 - a_1^2} \quad (15.16)$$

Bebizonyítható, hogy az általános megoldás:

$$y = e^{a_1 x} (C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x) \quad (15.17)$$

alakú, ahol C_1 és C_2 a kezdeti feltételből meghatározható állandók. Ha bevezetjük a

$$C_1 = A \sin \varphi \quad \text{és} \quad C_2 = A \cos \varphi \quad (15.18)$$

jelöléseket, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása a következő alakot veszi fel:

$$y = A e^{a_1 x} \cdot \sin(\omega x + \varphi), \quad (15.19)$$

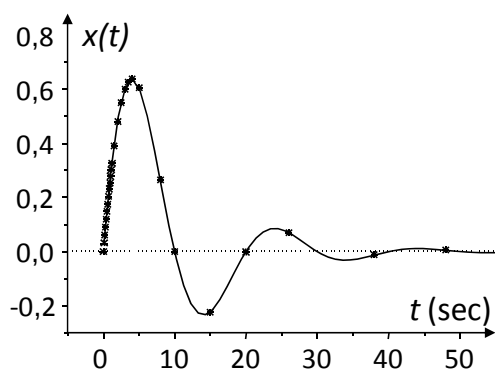
ahol most A és φ a kezdeti feltételekből meghatározandó állandók.

Bemutatásul szolgáló példaként a csillapított rezgőmozgás esetét szokták tárgyalni. A mozgás leírására szolgáló másodrendű lineáris differenciálegyenlet alakja:

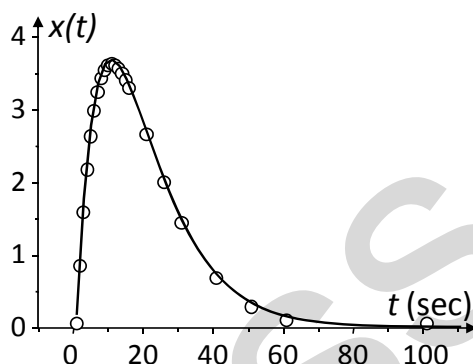
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\kappa \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (15.20)$$

ahol $x = x(t)$ a rezgést végző test pillanatnyi kitérése az egyensúlyi helyzetéből ($x = 0$), κ a surlódásra jellemző állandó, ω_0 pedig a csillapítatlan (surlódásmentes: $\kappa = 0$) rezgés

körfrekvenciája. A megoldás az ω_0 körfrekvencia és a κ surlódási tényező viszonyától függ. Ha $\kappa^2 < \omega_0^2$, akkor csillapított rezgést figyelhetünk meg (a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa negatív, 15.1 ábra), ha viszont $\kappa^2 = \omega_0^2$ (a diszkrimináns zérus), akkor egy egyirányú aperiodikus kitérést (15.2. ábra).



15.1 ábra. Csillapított rezgések

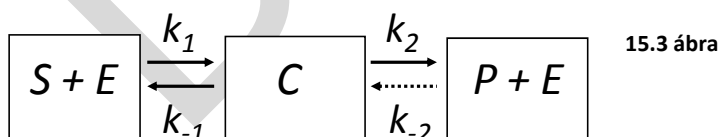


15.2 ábra. Aperiodikus határeset.

15.3 Enzimkinetika

A biokémia és élettan szempontjából alapvetően fontosak azok a kémiai reakciók, amelyeket enzimek katalizálnak. Az enzimek - általában proteinek - olyan katalizátorok, amelyek elősegítik molekulák - *szubsztrátok* - átalakítását más molekulákká - *termékké* - miközben maguk változatlanul maradnak, és ismét részt vesznek a további reakciókban. Az enzimek alapvetően fontos tulajdonsága, hogy képesek felgyorsítani a biológiai reakciók sebességét, akár milliószorosára is, valamint lehetővé teszik a bonyolult biológiai rendszerek szabályozását.

Az első modell, amely kvantitatíve elég pontosan leírja az enzimátikus reakciók folyamatát, *Michaelis és Menten* nevéhez fűződik (1913). A szerzők egy kétlépéses reakciót tételtek fel: első lépésben egy komplex - az enzim-szubsztrát komplex - keletkezik, majd a komplexben egy belső átalakulás során képződik a termék (15.3 ábra.). Ezt követően a termék ledisszociál az enzimről, és az enzim ismét szabaddá válik. A reakció sémája:



15.3 ábra

ahol E jelenti az enzimet, S a szubsztrátot, P a terméket és C pedig az enzim-szubsztrát komplexet. Tévedés volna azt gondolni, hogy az enzim nem képes megkötni a terméket, azaz a reakció fordított irányban nem mehet végbe. A gyakorlatban a fordított reakciót úgy kerülük el, hogy a P terméket folyamatosan eltávolítják a közegből, és ennek távollétében mérik a reakció sebességét. Fontos megjegyezni, hogy a folyamat nem feltétlenül a leírt módon megy végbe *in vivo*, ennek megfelelően a levezetett összefüggéseket csak kellő óvatossággal lehet átvinni egy adott biológiai rendszerre.

Vezessük be a következő jelöléseket a reakcióban szereplő komponensek koncentrációjára:

$$[S] = s, [E] = e, [P] = p \text{ és } [C] = c \quad (15.21)$$

Alkalmazzuk a kompartment modellt a fenti reakcióra (15.3 ábra):

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 se + k_{-1}c \quad (15.22)$$

$$\frac{de}{dt} = (k_{-1} + k_2)c - k_1 se \quad (15.23)$$

$$\frac{dc}{dt} = k_1 se - (k_{-1} + k_2)c \quad (15.24)$$

$$\frac{dp}{dt} = k_2 c \quad (15.25)$$

Vegyük észre, hogy a második és harmadik egyenlet összege zérus:

$$\frac{de}{dt} + \frac{dc}{dt} = 0, \text{ azaz } e + c = e_0, \quad (15.26)$$

annak a kifejezése, hogy az enzim mennyisége nem változik a reakció során (tömegmérleg). Michaelis és Menten feltételezték, hogy a reakció során a szubsztrát pillanatnyi egyensúlyban van az enzim-szubsztrát komplexel, azaz:

$$\frac{ds}{dt} = 0, \text{ így } k_1 se = k_{-1}c \quad (15.27)$$

az első egyenlet alapján. (A pillanatnyi egyensúly feltételezése bizonyosan nem helyes, hiszen ekkor szubsztrát nem használódik fel, és termék sem képződhet.) A fenti egyenlet egyszerű átalakításával kapjuk, hogy

$$c = \frac{k_1}{k_{-1}} se = \frac{k_1}{k_{-1}} s(e_0 - c) = \frac{k_1}{k_{-1}} se_0 - \frac{k_1}{k_{-1}} c. \quad (15.28)$$

Átrendezés után

$$c \left(1 + \frac{k_1}{k_{-1}} s\right) = \frac{k_1}{k_{-1}} se_0. \quad (15.29)$$

Ha bevezetjük a szubsztrát átalakulására vonatkoztatható $K_s = k_{-1}/k_1$ egyensúlyi állandót, valamint a termék keletkezését jellemző sebességet, $v = dp/dt$, akkor

$$c = \frac{se_0}{K_s + s} \text{ és } v = k_2 c = \frac{k_2 e_0 s}{K_s + s} = \frac{s}{K_s + s} V_{\max}, \quad (15.30)$$

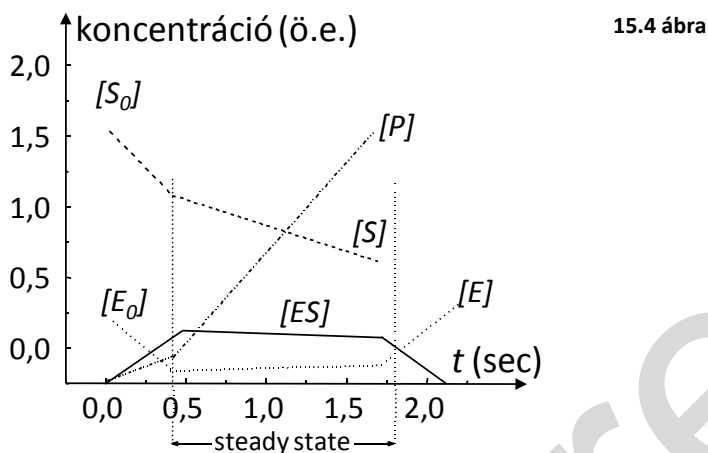
ahol $V_{\max} = k_2 e_0$. Alacsony s koncentrációnál a reakciósebesség lineárisan függ s -től, míg nagyobb sebsségeknél v a $V_{\max}$ -hoz közeledik.

Az enzimatis reakció kvantitatív leírására elfogadhatóbb a Briggs és Haldan által javasolt modell (1925). Feltételezték, hogy:

(1) $k_{+1} \gg k_2$, azaz k_2 a sebességmeghatározó lépés;

- (2) a $[C]=[ES]$ komplex képződése és disszociációja - eltekintve a reakció kezdetétől - állandónak tekinthető, ezért egy kvázi egyensúlyi állapot alakul ki (15.4 ábra), és

$$\frac{dc}{dt} = 0. \quad (15.31)$$



Így

$$\frac{dc}{dt} = k_{+1}(e_0 - e)s - (k_{-1} + k_2)c = 0, \quad (15.32)$$

és

$$c = \frac{k_{+1}e_0s}{k_{-1} + k_2 + k_{+1}s} \quad (15.33)$$

A negyedik egyenlet formájára a következőt kapjuk:

$$\frac{dp}{dt} = k_2c = \frac{k_2k_{+1}e_0s}{k_{-1} + k_2 + k_{+1}s} = \frac{k_2e_0s}{\frac{k_{-1} + k_2}{k_{+1}} + s} \quad (15.34)$$

Ha bevezetjük a $K_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_{+1}}$ mennyiséget (*Michaelis konstans*), akkor a termék

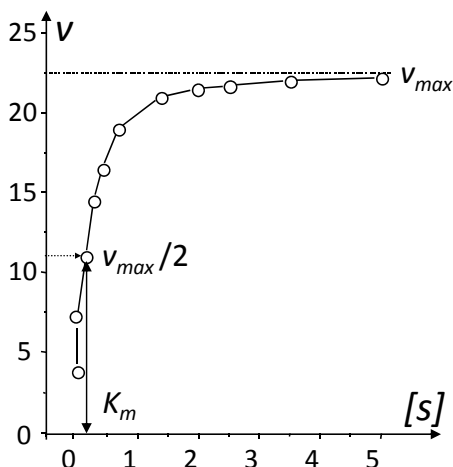
keletkezésének sebességére az alábbi kifejezést kapjuk, amelyet *Michaelis-Menten egyenletnek* szokás nevezni:

$$v = \frac{V_{\max} s}{K_m + s} \quad (15.35)$$

A $V_{\max} = k_2[E_0]$ mennyiség a *turnover number*. Vegyük észre, hogy a K_m számlálója a $[C] = [ES]$ állapotból történő átmenetet mutatja, míg a nevező az $[ES]$ kialakulását. A K_s és

K_m definíciója azt mutatja, hogy a *Briggs-Haldan* féle modellben a közelítés k_2 miatt a $[C]$ disszociációja során keletkező enzim mennyiségével is számol.

A termék keletkezésének grafikus ábráját a 15.5 ábra mutatja.



15.5 ábra. Michaelis-Menten egyenlet.

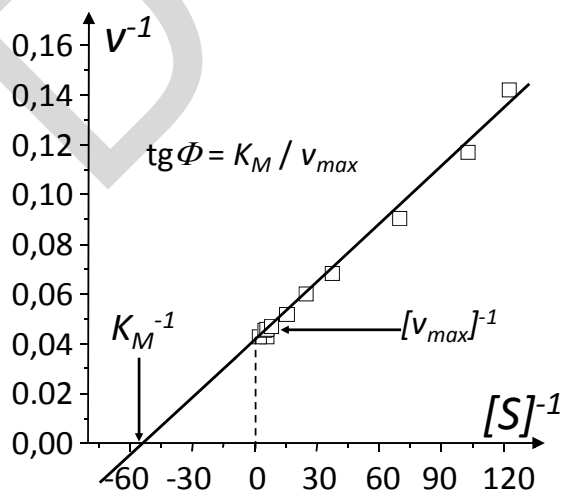
A gyakran előforduló enzimkinetikai méréseknél az eredmények értékeléséhez linearizálási eljárásokat használnak. A többféle eljárás közül kettőt említünk meg:

- (1) *Lineweaver-Burk* ábrázolás (1934): a *Michaelis-Menten* egyenletet reciprokát képezve kapjuk (15.6 ábra):

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{V_{max}} + \frac{K_m}{V_{max}} \cdot \frac{1}{s}. \quad (15.36)$$

Az egyenesre vonatkozó ismeretek alapján az Y tengely metszete éppen $1/V_{max}$, míg az X tengelyen az egyenes az $s = -K_m$ ponton halad keresztül. A kapott egyenes iránytangense pedig:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{K_m}{V_{max}} \quad (15.37)$$



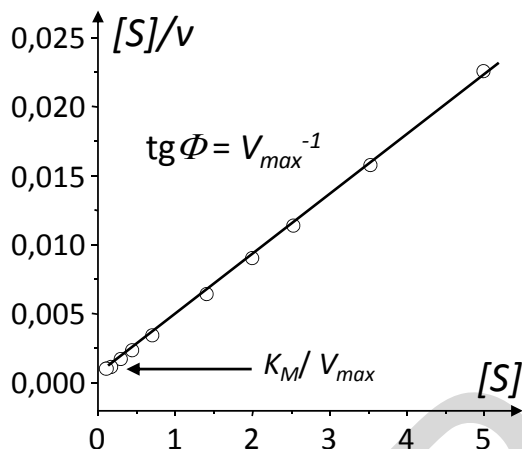
15.6 ábra

(2) *Hanes-Wolf* ábrázolás: ebben az ábrázolási módban az $[S]$ függvényében (15.7 ábra):

$$\frac{s}{v} = \frac{K_m}{V_{\max}} + \frac{1}{V_{\max}} s \quad (15.38)$$

Az egyenes meredeksége:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{V_{\max}} \quad (15.39)$$



15.7 ábra

A linearizálás megkönnyíti a mérések statisztikai kezelését, ugyanakkor tekintetbe kell venni, hogy a linearizálással függő változó varianciája megváltozik. A független változó értékének növelésével nő a függő változó varianciája, ez nagyobb mértékű a *Lineweaver-Burk* ábrázolás esetén. Ilyen esetekben célszerű a súlyozott értékek alkalmazása.

A most alkalmazott formális matematikai eljárást alkalmazhatnánk a biokémiában gyakran előforduló kompetitív és allosztérikus gátlással összekapcsolt enzimreakciók, valamint kooperatív enzimreakciók esetére is.

A fenti kompartment modelhez hasonlóan tárgyalhatnánk a *ligand-receptor kölcsönhatás* modelljét is:



ahol $[L]$ a ligand, $[R]$ a receptor és $[LR]$ pedig a ligand-receptor komplex koncentrációját jelenti.

Az említett témák ismertetésének részletei azonban már meghaladják ezen jegyzet kereteit, ezért a tárgyalásukat illetően más szakmai forrásokra kell utalnunk.

Függelék

F.1 SI prefixumok

<i>Többszörös</i>	<i>Prefixum</i>	<i>Rövidítés</i>
10^{18}	exa-	E
10^{15}	peta-	P
10^{12}	tera-	T
10^9	giga-	G
10^6	mega-	M
10^3	kilo-	k
10^1	deka-	da
1	-	-
10^{-1}	deci-	d
10^{-2}	centi-	c
10^{-3}	milli-	m
10^{-6}	mikro-	μ
10^{-9}	nano-	n
10^{-12}	piko-	p
10^{-15}	femto-	f
10^{-18}	atto-	a

F.2 Elemi függvények differenciálhányadosa

F.2.1 Differenciálási szabályok

$y = c$	$y' = 0$
$y = mx$	$y' = m$, m tetszőleges állandó
$y = u(x) \pm v(x)$	$y' = u'(x) \pm v'(x)$
$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

F.2.2 Elemi függvények differenciálhányadosa

$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = \log x$	$y' = \frac{\log e}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{l}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{l}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{l}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{l}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{l}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{l}{1+x^2}$

F.3 Elemi függvények integrálja

F.3.1 Integrálási szabályok

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \text{ állandó}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int c f(x)dx = c \int f(x)dx$$

Parciális integrálás

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

Integrálás helyettesítéssel

$$\int f(u)du = \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx, \quad u = g(x) \quad \text{és} \quad du = g'(x)dx$$

F.3.2 Alapintegrálok

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

Jelölések

- $\in$: pl. $a \in H$, az a eleme a H halmaznak;
 $\notin$: pl. $a \notin H$, az a nem eleme a H halmaznak;
 $\emptyset$: üres halmaz;
 N : a természetes számok halmaza;
 Z : az egész számok halmaza;
 Q : a racionális számok halmaza;
 R : a valós számok halmaza;
 D_f : az f függvény értelmezési tartománya;
 R_f : az f függvény értékkészlete;