

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

**A NÉGYZET, TÉGLALAP, PÁRHUZAMOSSÁG,
MERŐLEGESSÉG ÉS SZIMMETRIA FOGALMAK
FEJLŐDÉSE AZ ALSÓ TGOZATON**

**THE EVOLVEMENT OF THE CONCEPTS OF SQUARE,
RECTANGLE, PARALELL, PERPENDICULAR AND
SYMMETRY IN LOWER PRIMARY**

Dr. Szilágyiné Szinger Ibolya

Témavezető: Dr. Németh József



DEBRECENI EGYETEM
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2010

Bevezetés

A dolgozat az alsó tagozatos tanulók négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmának fejlődését, illetve fejlesztési lehetőségeit mutatja be. Különböző életkorú tanulóknál, az ismeretszerzés különböző szintjein – eltérő mértékben ugyan – ugyanazok a hibák fordulnak elő, mint például:

- az általános paralelogramma téglalapokhoz sorolása;
- az általános paralelogramma átlóiban szimmetriatengelyek felismerése;
- a négyzet és a téglalap közös tulajdonságainak felismeréséből nem következik, hogy a négyzet téglalap is egyben (a kisiskolások geometriai gondolkodásával ez teljes mértékben összeegyeztethető, 6. osztálytól – a definíciók szerepének megértésétől – kezdve azonban már nem);
- a négyzet szomszédos oldalai párhuzamos helyzetűként történő jellemzése (valószínűleg a „szomszédos” szó nem megfelelő értelmezése a hiba forrása) stb.

A felsőbb osztályokban jelentkező – ilyen és hasonló jellegű – problémák gyökerei feltehetőleg az alsó tagozatra nyúlnak vissza. Az előbb említett – tanítószakos hallgatóknál is tapasztalt – problémák adták az indítást, hogy a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmakat vizsgáljuk negyedik osztályos fejlesztő tanítási kísérlet keretében.

Az általános iskola alsó tagozatán a geometria alapvető fogalmainak – köztük a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria – alapozása történik. A geometriai fogalmak fejlődése hosszú folyamat, az első négy évfolyamon nem zárul le, más tanulási szinteken folytatódik tovább. A fogalmak kialakításánál a gyerekek életkorának megfelelő tényleges cselekvésekből indulunk ki, mivel a geometria tanulásának alapja a tapasztalatszerzésből kiinduló induktív megismerés. A konkrétból való kiindulás, a sokféle tevékenységből származó tapasztalatok összegyűjtése vezet el az általánosabb összefüggések megfogalmazásáig. Tanítási kísérletünk alatt végig arra törekedtünk, hogy a gyerekek saját tapasztalatszerzésük révén, sok munkaeszközzel, konkrét tárgyi tevékenységekkel fedezzék fel a fogalmak adott szinten elvárható tartalmi mélységeit.

1. A kutatáshoz kapcsolódó elméleti háttér

Ebben a fejezetben a kutatáshoz kapcsolódó pszichológiai és matematikadidaktikai elméleti háttérrel mutatjuk be, amelyre a tanítási kísérlet tervezésénél és megvalósításánál támaszkodtunk.

1.1. Pszichológiai elméletek

Fontosnak tartottuk az értelmi fejlődés *Piaget*-féle szakaszainak ismertetését, kiemelve az általunk vizsgált korosztályra jellemző konkrét műveletek szakaszát. Ebben a szakaszban a gyermek gondolkodása még kapcsolódik a konkrét tárgyakhoz vagy ezek manipulációjához, de már képes elképzelni konkrét tárgyakkal való tevékenységeket, melyek nincsenek a környezetében. Képes a belsővé vált (*interiorizált*) cselekvésekről, konkrét műveletekről beszélni, azokat fordított irányban is elképzelni (*reverzibilitás*). A dolgoknak az egyén cselekvéseihez való *asszimilációja* (a környezeti hatások beépülése, magyarázata a meglévő szellemi

struktúrákba, sémákba) és a szubjektív sémáknak a dolgok módosulásához való *akkomodációja* (a meglévő séma korrigálása, módosítása vagy egy új séma létrehozása a környezet megértése, felfogása céljából) közötti egyensúly létrejötte magyarázza a megfordíthatóságot. Adott szituációban a gyermek egyszerre több szempontot is figyelni tud, összefüggéseket képes felismerni (*decentralizáció*).

Skemp szerint egy fogalmat vagy valamilyen információt megérteni annyit jelent, mint asszimilálni egy megfelelő szkémába. A tanár feladata úgy közvetíteni az új fogalmakat, hogy azok alkalmasak legyenek megfelelő, hosszútávon érvényes szkémák kialakítására. A tanulás kezdetén a tanár felelőssége az, hogy a tanulók szkémák szerint (értelmesen) tanuljanak, ne csupán szimbólumokkal való műveletek memorizálását (magolását) végezzék. Fel kell ismernie a pedagógusnak azokat a pontokat, amelyek csak egyszerű asszimilációt igényelnek, valamint azokat is, ahol akkomodációra van szükség. Utóbbi esetben lassúbb léptekkel kell haladnia és a tanulók haladását gondosabban kell ellenőriznie.

A matematikai fogalomalkotásban *Skemp* a következő két alapelvét fogalmazta meg:

1. Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csak is oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.
2. Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal.

A megfelelő példák kiválasztása nehéz feladat, mert a példáknak rendelkezniük kell azokkal a közös tulajdonságokkal, amelyek a fogalmat alkotják, de nem szabad rendelkezniük semmiféle más közös tulajdonsággal.

Bruner szerint minden gondolkodási folyamat három különböző síkon mehet végbe: *materiális (enaktív)*, *ikonikus* vagy *szimbolikus* síkon. Ez a három reprezentációs mód az oktatási folyamat minden fázisában szerepet játszik. Az alsóbb osztályokban az enaktív és az ikonikus reprezentáció dominál, mindemellett a nyelv (beszéd) is fontos szerepet játszik, amely szimbolikus síkot jelent. Kísérletünk tervezésekor az volt a célunk, hogy az általunk vizsgált geometriai fogalmak (négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria) tanítása során az enaktív reprezentációt alkalmazzuk a leghosszabb ideig, a későbbi megfelelő képzetrendszer kialakulása érdekében, valamivel kevesebb ideig az ikonikus reprezentációt. A nyelv – mint szimbolikus reprezentáció – folyamatosan jelen van.

Shlomo Vinner és *David Tall* vezették be a *fogalomképzet* (concept image) elnevezést a matematika-didaktika szakirodalomba. A képek, konkrét példák, konkrét tapasztalatok, konkrét tevékenységek (modellezés, hajtogatás, nyírás, rajzolás) jelentős szerepet játszanak a sokoldalú fogalomképzet kialakításában. A fogalomrealizálási és a fogalomazonosítási feladattípusok hozzájárulnak a fogalmak gazdag képzetének kialakulásához.

1.2. Matematikadidaktikai elméleti alapok

A matematikadidaktikai elméleti alapok közül *Pierre* és *Dina van Hiele* geometriai gondolkodásról szóló elméletét emeljük ki. A geometriai ismeretszerzés folyamatát 5 szintre tagolták:

1. szint: *alakzatok globális megismerése*,

2. szint: *alakzatok elemzése*,
3. szint: *lokális logikai rendezés (informális dedukció)*,
4. szint: *törekvés a teljes logikai felépítésre (formális dedukció)*,
5. szint: *axiomatikus felépítés*.

A geometriai fogalmak fejlődése, majd kialakulása ezen hierarchikus szinteken keresztül zajlik.

Az *alakzatok globális megismerésének szintjén* (1.szint) a gyerek a geometriai alakzatokat, mint egységes egészet fogja fel. Könnyen felismeri a különböző alakzatokat a formájuk alapján, megtanulja az alakzatok nevét. Nem tudja azonban összehasonlítani a különböző alakzatokat. Nem ismeri fel a négyzetben a téglalapot, mert számára ezek egészen különböző dolgok.

Az *alakzatok elemzésének szintjén* (2. szint) a gyermek az alakzatokat részeire bontja, majd összerakja. Az alakzat és részei között kapcsolatokat fedez fel. Megkezdődik a megismert alakzatok elemzése, a megfigyelések, mérések, rajzolások, hajtogatások, nyírások, ragasztások, modellezések, parkettázások, tükröhasználat révén. Ezen konkrét tevékenységek segítségével a tanuló megállapítja, felsorolja az alakzat tulajdonságait, de a tulajdonságok közötti logikai kapcsolatokat még nem ismeri fel. A tulajdonságok megállapítása csak az alakzatok megkülönböztetéséhez szükségesek. Nem érti a definíció szükségességét. Megindul az osztályba sorolás. Ezen a szinten a gyerek még nem veszi észre az alakzatok közötti kapcsolatokat. Megállapítja ugyan az alakzatok közös tulajdonságait, például a négyzet és a téglalap vonatkozásában, de ebből nem következik számára, hogy a négyzet téglalap is egyben.

Az alsó tagozaton (1-4. osztály) az első két szint megvalósítása reális, amit hipotézisünkben is megfogalmaztunk.

A négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak tanítási kérdéseinek vizsgálatában egyaránt támaszkodtunk a holland *realisztikus matematikaoktatás*, *Dienes Zoltán*, valamint *Pólya György* matematikaoktatási és a *Varga Tamás*-féle komplex matematikatanítási kísérlet alapelveire. Az alapelvek közül az alábbiakra helyeztük a legnagyobb hangsúlyt:

- A matematikatanításnak olyan jelenségekből, szituációkból kell kiindulnia, amelyek a tanulók számára fontosak, érdekesek, motiváló hatásúak, elősegítik a tanulási folyamatokat.
- Az ismeretszerzésnek konkrét tapasztalatokból kell kiindulnia, hiszen absztrahálni csak konkrétumokból lehet.
- A tanulók konfrontálódjanak a sajátjuktól eltérő, másféle megoldási módokkal is, szembesüljenek saját konstrukcióik előnyeivel és hibáival.
- A passzív tanulási módot az aktív tanulási módnak kell felváltania. A tanulók maguk fedezzék fel mindazt, jöjjenek rá mindarra, ami az adott körülmények között lehetséges.
- Célszerű a fogalmi struktúrákat lehetőleg sok ekvivalens, de az észlelés számára különböző formában bemutatni a gyerekeknek.
- Az életkori sajátosságok figyelembevétele. Az alsó tagozatos tanulók életkori sajátosságainak figyelembevétele a játék és a manipulációk alkalmazását jelenti.

2. A kutatás bemutatása

Negyedik osztályos fejlesztő oktatási kísérlet keretében több geometriai fogalom (négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria) fejlesztésével foglalkoztunk, amelynek célja a *van Hiele*-modell szerinti geometriaoktatás megvalósítása. A kísérletet 2006 május-júniusában a bajai Eötvös József Főiskola Gyakorló Általános Iskolájának 4.c osztályában végeztük, majd ezt 2008 május-júniusában megismételtük az iskola 4.b osztályában. A választásunk azért esett a negyedik évfolyamra, mert korábban a párhuzamosság és a merőlegesség fogalmát még nem tudtunk volna vizsgálni, mivel - az iskola helyi tanterve alapján - negyedik osztályban kerülnek bevezetésre ezek a fogalmak. A négyzetről és a téglalapról tanultak is az alsó tagozat negyedik osztályában teljesednek ki. A fejlesztő oktatási kísérlet mindkét alkalommal 17 tanítási órát foglalt magába.

2.1. A fejlesztő tanítási kísérlet tantervi vonatkozásai

A tantervi szabályozás legfelső szintjén a Nemzeti Alaptanterv (a továbbiakban: NAT) áll. Ezt követik a második szinten a NAT-ra épülő kerettantervek, a harmadik szinten pedig a helyi tantervek találhatók. A NAT nem tananyag előíró, a tanítandó tananyagot az egyes tantárgyakon belül évfolyamokra és témakörökre bontva a kerettantervek és a helyi tantervek tartalmazzák. A négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmakra vonatkozóan az Oktatási Minisztérium kerettanterve geometria témakörben a következő tananyagot írja elő:

- 1. osztályban: Síkidomok előállítása tevékenységgel. Síkbeli alakzatok szétválogatása, tulajdonságok alapján. Geometriai tulajdonságok felismerése, összehasonlítások. Játékos tapasztalatszerzés síktükörrel.
- 2. osztályban: Síkidomok másolása, előállítása egy-két feltétel szerint. Tapasztalatgyűjtés egyszerű alakzatokról, a megfigyelések megfogalmazása. Téglalap, négyzet előállítása. Sokszögek néhány tulajdonsága. Tükörkép építése. Egyszerű tükrözés megfigyelése, tükörkép előállítása.
- 3. osztályban: Síkidomok előállítása szabadon, másolással és egy-két feltétel megkötésével. Tengelyesen tükrös alakzatok előállítása tevékenységgel. A téglalap és a négyzet tulajdonságai: oldalak, csúcsok száma, mérete. A tulajdonságok összehasonlítása. Tükrözések. Szög mérése alkalmi egységekkel.
- 4. osztályban: Síkidomok előállítása párhuzamos és merőleges vonalpárok segítségével. Síkidomok másolása, tengelyes tükrözés. Szögfogalom előkészítése tapasztalati úton. Szögmérés derékszöggel, felével, negyedével.

2.2. Kutatási kérdések

- A geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle szintjei hogyan realizálódnak a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak alsó tagozatos tanításában?
- Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek milyen hatékonysággal járulnak hozzá a fenti fogalmak fejlődéséhez?

2.3. A kutatás hipotézisei

- A geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle szintjei közül az első kettő, a globális felismerés szakasza, illetve az elemzés szakasza reális a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak alsó tagozatos tanításában.
- Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek jelentős mértékben járulnak hozzá a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak fejlődéséhez.

2.4. Kutatási háttér

Ebben a részben a fejlesztő tanítási kísérletben részt vett osztályokat és az iskolát mutatjuk be.

2.5. A tájékozódó felmérés feladatai és értékelésük

A tanítási kísérletek megtervezése előtt tájékozódó felmérést végeztünk a kísérleti osztályokban. A tájékozódó-felmérő feladatlap összeállításánál az előző tanév (3. osztály) tananyagát, a kísérleti osztályban látogatott bemutató órai megfigyeléseinket, valamint az osztályt tanító szakvezető tapasztalatait, javaslatait vettük figyelembe. Célunk a négyzet és a téglalap, illetve a tengelyes szimmetria fogalmi szintjének felmérése volt. A párhuzamosság és merőlegesség fogalmával kapcsolatos feladatokat nem állt módunkban kitűzni, mert ezekkel a fogalmakkal a gyerekek eddigi tanulmányaik során még nem találkoztak. Ugyanakkor lehetőségünk volt – a merőlegességhez kapcsolódóan – tájékozódni a derékszög, a derékszögnél kisebb és a derékszögnél nagyobb szög fogalmi szintjéről. A tájékozódó felmérések értékelésével megállapítottuk, hogy a kísérleti osztályokban a gyerekek:

- jelentős része a négyszög szó kapcsán speciális esetekre (négyzetre, téglalapra) gondolt;
- 70%-a (2006-ban), illetve 79%-a (2008-ban) az általános paralelogrammát téglalapnak tartotta;
- közel egyharmada (2006-ban), illetve negyede (2008-ban) a csúcsára állított négyzetben nem fedezte fel a négyzetet;
- kb. fele nem ismerte fel az összes derékszöget az adott sokszögek esetén;
- majdnem háromnegyede hibázott a síkidomok tükrösségének megállapításánál vagy a tükrötengelyek berajzolásánál.

Ezek a *van Hiele*-féle első szintnek (az alakzatok globális megismerésének) felelnek meg.

2.6. Tanítási kísérlet

A tájékozódó felmérés eredményeinek figyelembevételével terveztük meg a fejlesztő kísérlet tananyagát. Ennek során folyamatosan törekedtünk a zajsztint növelésére, a fokozatosság betartása mellett. Igyekeztünk a problémákat egyre nehezíteni. Az első órákon a téglatest és a kocka lapjaiként foglalkoztunk a téglalappal és a négyzettel. A *van Hiele*-féle második szintnek (alakzatok elemzése)

megfelelően az alakzatokat részeire bontottuk, majd összeraktuk. Az alakzatok elemzését, a tulajdonságok megállapítását, felsorolását – a közöttük lévő logikai kapcsolatok felismerése nélkül – konkrét tevékenységek segítségével végeztük. A téglatest és a kocka szemközti, valamint a szomszédos lapjai helyzetének vizsgálata során vezettük be új fogalomként a párhuzamosságot és a merőlegességet, majd ezt követően a testek kiterítésével tértünk át a síkra. A szimmetriával is előbb testek, majd ezt követően síkidomok esetén találkoztak a gyerekek. A négyzet és a téglalap tulajdonságainak megállapítása az alakzatok megkülönböztetésére szolgált.

A tananyag, illetve az órák tervezésekor azt tartottuk szem előtt, hogy a gyerekek előbb konkrét tapasztalatok alapján, valóságos játékok keretében, tárgyi tevékenykedés közben, majd vizuális síkon (rajzolás), végül absztrakt, nyelvi síkon fedezzék fel az elsajátítandó geometriai fogalmakat. Az órák jelentős részét a konkrét tárgyi tevékenységekre, cselekvésekre, manipulációkra szántuk.

A tanítási kísérlet vázlatos tematikája:

A négyzet és a téglalap fogalom fejlesztése:

- téglatest és téglalap, kocka és négyzet megkülönböztetése;
- négyzet, téglalap alkotása konkrét tárgyi tevékenységekkel;
- a négyzet és a téglalap tulajdonságainak összehasonlítása, tulajdonságkártyák;
- a téglalap és a paralelogramma, illetve a négyzet és a rombusz tulajdonságainak összehasonlítása;
- négyzetek alkotása vizuális síkon.

A párhuzamosság és merőlegesség fogalmának fejlesztése:

- a szemközti és szomszédos szavak matematikai értelmezése;
- a párhuzamosság és merőlegesség fogalmának bevezetése;
- különböző testek szemközti, illetve szomszédos lapjai helyzetének vizsgálata;
- párhuzamos, merőleges egyenespárok előállítása síkban konkrét tárgyi tevékenységgel;
- síkidomok párhuzamos, illetve merőleges oldalpárjainak megfigyelése.

A szimmetria fogalom fejlesztése:

- testek tükröképének építése;
- szimmetriasíkok helyének meghatározása különböző testek esetén;
- síkbeli tükröképek vizsgálata konkrét tárgyi tevékenységgel;
- tengelyesen szimmetrikus alakzatok konstruálása;
- síkidomok tengelyes tükrösségének vizsgálata.

A vizsgált fogalmakkal kapcsolatos vegyes feladatok.

2.7. Az utóteszt, késleltetett teszt feladatai és értékelésük

A fejlesztő tanítási kísérletet – 2006-ban és 2008-ban egyaránt – felmérő feladatlappal zártuk, amelyeket a kísérleti osztályokon kívül a párhuzamos osztályok tanulói is megoldottak. 2008-ban a tanítási kísérlet után 3 hónappal került sor a késleltetett tesztek megírására.

3. Konklúzió, további kutatási lehetőségek

Úgy gondoljuk, hogy a kísérletező által irányított fejlesztő tanítás hatékonyan járult hozzá a téglalap és a négyzet fogalmának elmélyüléséhez, a párhuzamosság és a merőlegesség, valamint a szimmetria fogalmak alakulásához. A tájékozódó felmérések és a záró feladatlapok összehasonlítása is ezt igazolta. A hatékonyságot támasztja alá az a tény is, hogy mind 2006-ban, mind 2008-ban a párhuzamos osztályokban tapasztalt eredményekhez képest általában jobb, esetenként lényegesen jobb eredmények születtek a kísérleti csoportokban. A szimmetria fogalom vonatkozásában ugyanakkor megállapítható az is, hogy a 2008-as kísérlet során a hatékonyság jelentős mértékben nőtt. A 2008-as tájékozódó felmérés és záró feladatlap erre vonatkozó eredményeinek összehasonlítása – 2006-oshoz viszonyítva – nagyobb fejlődést mutat. Ennek – álláspontunk szerint – az az indoka, hogy a korábbi tanítás tapasztalatai alapján részletesebben, elmélyültebben dolgoztuk fel a szimmetriával kapcsolatos feladatokat. Megállapításaink csak a vizsgált – nem reprezentatív – mintákra vonatkoznak, ezért statisztikai próbákat nem végeztünk.

A mért adataink, az ismertetett interjúk, játékok igazolják azt a hipotézist, miszerint a geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle 3. szintjére nem lehet átlépni az alsó tagozat végére, csak az első két szint megvalósítása reális.

A 2. szintet elérő tanulók az alakzatokat részeire bontják, majd összerakják. Az alakzatok alkotórészeit megkülönböztetik egymástól, közöttük kapcsolatot fedeznek fel. A tanítási kísérlet során a gyerekek a téglatestet (gyufásdobozt), a kockát kiterítették, a kiterített hálóról bizonyos lapokat levágtak. Megnevezték a téglatest, kocka, ötszög alapú hasáb, négyzet alapú gúla határoló lapjait. Megbeszéltük, hogy a szomszédos lapok élben találkoznak, az élek találkozásánál a csúcsok találhatók. Vizsgáltuk a különböző síkidomok határoló vonalait. Már az 1. szinten könnyen felismerik a tanulók a különböző alakzatokat a formájuk alapján, és gyorsan megtanulják a nevüket. A tanórákon tapasztaltuk, hogy milyen fogékonyak a különböző négyszögek neveinek elsajátítására (trapéz, paralelogramma, rombusz, deltoid). Ugyanakkor az is megállapítható, hogy a téglalapot és a négyzetet, a rombuszt és a négyzetet, a paralelogrammát és a rombuszt, a paralelogrammát és a téglalapot, a deltoidot és a rombuszt teljesen különböző dolgokként kezelik. Nem fedezik fel a négyzetben a téglalapot, illetőleg a rombuszt vagy a rombuszban a paralelogrammát, illetve a deltoidot. Az utótesztek eredményei is azt mutatták, hogy a negyedik osztályos tanulók többsége számára a négyzet nem téglalap.

Konkrét tevékenységek – mint a mérés, hajtogatás, rajzolás, nyírás, modellezés, tükröhasználat stb. – segítségével megállapítják az alakzatok tulajdonságait, de a tulajdonságok közötti logikai kapcsolatokat még nem ismerik fel a 2. szinten. Nem látnak összefüggéseket az alakzatok tulajdonságai és az alakzatok között. Észrevették például, hogy a téglalaphnak és az általános paralelogrammának is 4 csúcsa, 4 oldala van, a szemközti oldaluk páronként egyenlők, valamint párhuzamosak egymással, de nem jutottak el arra a megállapításra, hogy a téglalap paralelogramma, vagy ehhez hasonlóan azt sem ismerték fel, hogy a négyzet téglalap, a kocka téglatest.

A barkóba játék során többször megfigyelhettük, hogy a gyerekek nem tudnak következtetni az alakzatok egyik tulajdonságáról a másakra. Így például a téglalap kitalálásakor elhangzott az a kérdés, hogy „van derékszöge?”, majd az „igen” válasz után később – feleslegesen – az, hogy vannak-e merőleges oldalai. Egy másik játék során a kitalálendő négyszög szemközti oldalainak párhuzamosságából nem következett számukra a szemközti oldalak egyenlősége.

A felsoroltak mind azt támasztják alá, hogy a negyedik osztályos tanulók a *van Hiele*-féle 2. szintet tudják – legfeljebb – elérni.

A 6-10 éves tanulók gondolkodása erősen kötődik a tárgyi valósághoz, ezért a fogalmak kialakításakor a legkonkrétabb dolgoktól kiindulva – manuális tevékenységgel, illetve az őket körülvevő közvetlen világból vett példákkal – indokolt eljuttatni őket az elvontig. Sok példa, ellenpélda tanulmányozása, a fogalom többszörös konkretizálása, modellezése a feltétele annak, hogy a gyerekek felismerjék a kialakítandó fogalom lényeges jegyeit és képesek legyenek az absztrahálásra. Tanítási kísérletünkben ezért arra törekedtünk, hogy a tanulók sok konkrét tevékenység segítségével a téglalap, négyzet, párhuzamosság, merőlegesség, illetve szimmetria fogalmával kapcsolatban gazdag tapasztalatra tegyenek szert, fogalomképzetük sokoldalú legyen. Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek jelentős mértékben hozzájárultak a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak fejlődéséhez.

További kutatási lehetőségként a kísérleti tanítás kiterjesztését látjuk 5-6. osztályra, majd 7-8. osztályra. A kutatás tárgyát képezheti a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, valamint a szimmetria fogalmak további fejlődésének vizsgálata, illetőleg a *van Hiele*-féle 3. szintre eljutó tanulók gondolkodási jellegzetességeinek, jellemzőinek bemutatása.

Introduction

In the dissertation the evolvement of the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry in lower primary and the development options are presented. In various age groups and at various levels of gaining knowledge the same typical mistakes occur, even if to various degree:

- including general parallelograms into rectangles;
- recognizing symmetry axes in the diagonals of general parallelograms;
- even if young learners recognize the common characteristics of squares and rectangles, it does not mean that they would realize that squares are actually rectangles. (This is completely in line with young learners' geometric thinking, but not from grade six, when they grasp definitions);
- describing the neighbouring sides of the square as parallel, which probably comes from the misinterpretation of word 'neighbouring' etc.

The above and similar problems in upper primary probably go back to the lower primary. Beside the above-mentioned, difficulties that teacher training college students face, gave reasons for studying the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry in grade four within the framework of a development teaching experiment.

In the first four grades of lower primary the basic concepts of geometry, such as square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry are established. Teaching geometric concepts is as a matter of fact a long process, and it is not completed by the first four grades, but it continues at other levels of learning. During the formation of concepts we relied on activities which were in line with the age group of children, as learning geometry is based on inductive cognition by gaining experience. Starting out from the concrete, gathering experience from various activities can lead to the formulation of broader relationships. Throughout our teaching experiment every effort was made in order that children through gaining experience and using various tools in diverse activities could discover the content of concepts at a given level.

1. Theoretical background

In this chapter the psychological and didactic theories related to the research are presented, on which we relied in designing and conducting the teaching experiment.

1.1. Psychological theories

We have attached great importance to the *Piaget* stages of cognitive development, highlighting the stage of concrete operations characteristic of the age group we are concerned with. At this particular stage children's thinking is connected to concrete objects, or activities with them, but children are also able to imagine activities with concrete objects, which cannot be found in their environment. Children are also able to talk about *interiorized* actions and concrete operations, and to imagine them in reverse direction (*reversibility*). The balance of *assimilation* of things into individual actions (incorporation of environmental influences into already existing cognitive structures) and the *accommodation* of subjective patterns to the modification of things (the correction or modification of the existing pattern, or

creating a new pattern for a better understanding of the environment) gives account for the reversibility. In a particular situation children are able to pay attention to various points of views at the same time and are also able to grasp relationships (*decentralisation*).

According to *Skemp* to understand a concept or some information is nothing but its assimilation into a proper pattern. It is up to the teacher to transmit new concepts in a way that they should be suitable for the formation proper patterns, valid in the long run. In the beginning of the learning process it is the teacher's responsibility that learners study in terms of patterns, in a meaningful way and not only memorize operations with symbols (cramming). Teachers should recognize where learners need simple assimilation or accommodation. In the latter case progress ought to be slower and the learners' achievement should be carefully controlled.

Regarding the formation of mathematical concepts *Skemp* formulated the following two principles:

1. By means of definitions it is impossible to transmit concepts to anyone which are at a higher level than their knowledge; it can be done only by providing plenty of proper examples.
2. Since in mathematics the examples mentioned above are almost all of them various concepts, we have to make sure that learners have already acquired these concepts.

Selecting the proper examples is not an easy task, as the examples should possess the common characteristics that make up the concept, but they should not have any other common characteristics.

According to *Bruner* every process of thinking takes place at three levels: *material (enactive)*, *iconic* and *symbolic* level. These representation levels play a part in every stage of teaching, but in the lower primary classes the enactive and iconic levels are in the foreground, however language (speech), which is the symbolic level, is also very important. When designing our teaching experiment our aim was to make use of enactive representation for the longest time in the teaching of geometric concepts examined by us, such as square, rectangular, parallel, perpendicular and symmetry in order that the proper system of images could be established. Iconic representation was used for a shorter period of time, and language, as symbolic representation is always present.

Shlomo Vinner and *David Tall* introduced the term 'concept image' in the literature of methodology of mathematics teaching. Pictures, relevant examples, experience and activities such as modelling, folding, clipping and drawing play an important part in the formation of versatile concept image and the tasks for realising and identifying concepts can contribute to well-established concept images.

1.2. Theoretical background of the methodology of teaching mathematics

Among the theories underlying the methodology of teaching mathematics we would like to focus on the theory of geometric thinking put forward by *Pierre* and *Dina van Hiele*. The process of acquiring knowledge in geometry is divided into five stages:

Level 1: *global recognition of shapes*,

Level 2: *analysis of shapes*,
Level 3: *local logical arrangement*,
Level 4: *aiming at a complete logical set-up (formal deduction)*,
Level 5: *axiomatic set-up*.

The evolvement and then the establishment of geometric concepts take place through these hierarchic levels.

At the level of global recognition of shapes (level 1) children perceive geometrical shapes as a whole. They easily recognize various shapes according to their forms and they remember the names of the shapes. However they are not able to compare the various shapes. They do not recognize the rectangular prism in the cube and the rectangle in the square, because these are totally different things for them.

At the level of analysing shapes (level 2) children break down shapes into their components and then put them together. They discover the relationships between the shape and its components. At this point particular importance is attached to observation, measurement, folding, clipping, sticking, drawing, modelling, parquetry and using mirror. By means of these concrete activities children can establish and enlist the characteristics of shapes, but they are not able to recognize the logical relationships between the characteristics. The establishment of the characteristics is needed only to make difference between shapes and children do not really understand the importance of definition. They begin creating categories. At this level children do not see the relationships between shapes. Even if children notice what squares and rectangles have in common, but they cannot come to the conclusion that squares are actually rectangles.

In lower primary geometry teaching (classes 1- 4) the first two stages can be put into practice as it was also mentioned in the hypothesis.

In examining the issues of teaching the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry we also relied on the Dutch realistic mathematics teaching, the achievement of *Zoltán Dienes* and *György Pólya* and the principles of the complex way of teaching mathematics carried out by *Tamás Varga*. Most emphasis has been laid on the following principles:

- Mathematics teaching should be based on phenomena and situations which are relevant, interesting and motivating for the learners and also contribute to learning processes.
- In gaining knowledge concrete experience should be the starting point, since abstraction can be done only from the concrete.
- Learners should also meet solutions different from their own, and should also face the advantages and the mistakes in their own constructions.
- An active way of learning should replace the passive one. Learners should discover everything that is feasible under the given conditions.
- It seems to be proper to present the concept structures to the children in several equivalent forms, which however can be perceived as different by the children.
- The characteristics of the age groups should be taken into consideration. In lower primary it means that a great deal of games and activities are used with young learners.

2. The presentation of the research

Within the framework of the developmental teaching experiment in grade four we were concerned with the development of some geometric concepts such as the square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry by putting van Hiele's model of geometry teaching into practice. The experiment was conducted in class 4.c of the Practice School of József Eötvös College in Baja in May-June 2006, and then the experiment was repeated in class 4.b. The reason why we selected grade four is that the concepts of parallel and perpendicular are introduced in grade four in line with the local curriculum of the school. The young learners' knowledge about square and rectangle will have become more systematic by grade four of the lower primary. The teaching experiment covered seventeen lessons on both occasions.

2.1. The development teaching experiment and the curriculum

The highest level of curriculum regulation is represented by the National Core Curriculum (NCC), which is followed by framework curricula based on NCC (level two), and the local curricula can be found at level three. While the NCC provides the guidelines, the teaching material of the various subjects is formulated in the frame curricula and the local curricula broken down into grades and topics. In the framework curriculum of the Ministry of Education the teaching material of geometry related to square, rectangle, perpendicular and symmetry is formulated as follows:

- Grade 1:* Presenting plane figures through activities. Sorting out plane figures according to properties. Recognition of geometric properties, comparisons. Gaining experience by using plane mirror playfully.
- Grade 2:* Copying and presenting plane figures according to one or two conditions. Gaining experience in simple shapes, the formulation of observations. Producing rectangles and squares. Some properties of polygons. Building reflection and the observation of simple reflection. Producing reflection.
- Grade 3:* Producing plane figures without restrictions, by copying and with one or two restrictions. Producing axial symmetric figures through activities. The properties of rectangles and squares: the number and size of sides and vertexes. Comparison of properties. Reflections. Measuring angles by non-standard units in practice.
- Grade 4:* Producing plane figures by means of parallel and perpendicular pairs of straight lines. Copying plane figures, axial reflection. Preparation of the concept of angle by gaining experience. Measuring angle by using right angle, its half and its quarter.

2.2. Research questions

- How are the *van Hiele* levels of geometric thinking and teaching of the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry in lower primary put into practice?
- How efficiently the concrete activities used at these levels can contribute to the development of the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry?

2.3. Hypotheses

- In lower primary teaching of the concepts of square, rectangle parallel, perpendicular and symmetry, the first two stages of the *van Hiele* levels of geometry thinking, i.e. global recognition and analysis are feasible.
- The concrete activities related to the first two levels contribute to the development of the concepts of square, rectangular, parallel, perpendicular and symmetry.

2.4. Research background

In this chapter the classes and the school participating in the development teaching experiment are shown.

2.5 The tasks and evaluation of the pre-tests

Prior to planning the teaching experimental preliminary survey was conducted in the classes of the experiment. When compiling the pre-test the syllabus of the previous class (class 3), the observations of the demonstration classes in the experimental classes as well as the comments and suggestions of the mathematics teacher of the class were taken into consideration. The aim was to measure the conceptual level of square, rectangle and axial symmetry. As children were not familiar with the concepts of parallel and perpendicular no tasks were given related to these concepts. However it was possible to gain information on the conceptual level of the right angle and angles smaller and larger than the right angle connected with the perpendicular. The findings of the pre-test in the classes of the experiment are as follows:

- in case of quadrangles most children think of special cases such as squares and rectangles;
- seventy percent of the children considered the general parallelograms as rectangles in 2006 and 79 % of them in 2008;
- as many as one third of them did not recognize squares turned on its point vertex in 2006 and one quarter of them in 2008;
- about 50% of the children did not recognize all the right angles in given polygons;
- almost three quarters of them failed to recognize reflection in plane figures or to draw symmetry axis.

All these mentioned above are in line with the *van Hiele* level of global recognition.

2.6. The teaching experiment

The content of the development teaching experiment was designed among others on the basis of the pre-test results. The level of noise was continuously increased by observing the principle of gradualness and the problems were made more and more challenging. During the first lessons we dealt with rectangles and squares as the faces of rectangular prisms and cubes. According to *van Hiele* level 2, (the analysis of shapes) the shapes were broken into their components and put together again. The analysis of shapes, the establishment and enumeration of their

properties took place by means of concrete, manual activities; however the logical relationships between them were not recognized. When examining the position of opposite and neighbouring faces of rectangular prism and cubes, the new concepts of parallel and perpendicular were introduced. Then after spreading the solids we moved on to the plane. Children were introduced to symmetry first through solids and then through plane figures. By establishing the properties of square and rectangle children were able to make difference between shapes.

When designing the course material and the lesson plans what we considered of utmost importance was that children could discover geometric concepts first through concrete experience in real games and activities, later at visual level (drawing) and later at abstract, linguistic level. During the lessons a large amount of time was allocated to concrete, manual activities.

The outline of the topics of the teaching experiment:

The development of the concepts of square and rectangle:

- making difference between rectangular prism and rectangle, cube and square;
- producing square and rectangle through activities;
- comparing the properties of square and rectangle, property cards;
- comparing the properties of rectangle and parallelogram as well as square and rhombus;
- producing squares at visual level.

The development of the concepts of parallel and perpendicular:

- the mathematical interpretation of the terms of opposite and neighbouring;
- the introduction of the concepts of parallel and perpendicular;
- examining the position of the opposite and neighbouring faces of various solids;
- producing parallel and perpendicular pairs of straight lines in planes by activities;
- observation of the parallel and perpendicular side-pairs of plane figures.

The development of the concept of symmetry:

- constructing reflection of solids;
- establishing the position of symmetry planes in various solids;
- examining reflected images in plane by activities;
- constructing axially symmetric shapes;
- examining axial reflections of plane figures;

Mixed tasks related to the concepts we have studied.

2.7. The tasks of the post-tests and the delayed test and their evaluation

The development teaching experiment was completed by an evaluation worksheet both in 2006 and in 2008 which were filled not only by the learners of the experimental class but by the learners of parallel classes as well. In 2008 three months after the completion of the teaching experiment the delayed tests were done.

3. Conclusions and further research options

We are convinced that the development teaching experiment efficiently contributed to the better understanding of the concepts of square and rectangle and also to the formation of the concepts of parallel and perpendicular as well as symmetry. The comparison of the results of the pre-test and post-test have also supported the above finding. The efficiency is also shown by the fact that the achievement in the experimental classes was better; occasionally much better than in the parallel control classes in 2006 and 2008. During the experiment conducted in 2008 the concept of symmetry was also firmly established. The comparison of the 2008 pre-test and evaluation worksheet with the ones done in 2006 shows considerable progress. This can be accounted for the fact that relying on our former experience we have dealt with symmetry in detail and depth. Our findings are related only to the samples examined, which are not representative, and therefore no statistical trials have been carried out.

The data measured the interviews and the games support the hypothesis that it is not possible to reach the van Hiele level 3 of geometric thinking by the completion of lower primary; only reaching the first two levels is feasible.

Learners at level 2 break down the shapes into their components and then they put them together again. They are able to make a difference between the components and to discover the relationships between them. During the teaching experiment children spread rectangular prisms (match boxes) and cubes then cut some of the faces. They named the faces of rectangular prism, cube, pentagon prism, quadrilateral pyramid. The position of the neighbouring faces and edges and the vertexes was also discussed. The bordering lines of various plane figures were also presented. Children at level 1 easily recognize various shapes according to their form and remember their name, such as the names of various quadrangles: trapezoid, parallelogram, rhombus, and deltoid. However it can also be seen that they perceive rectangle and square, rhombus and square, parallelogram and rhombus, parallelogram and rectangle, deltoid and rhombus as totally different things. They are not able to discover the rectangle in the square, or the rhombus, and the parallelogram in the rhombus or the deltoid for that matter. It is also revealed in the post-test results that most of the learners in grade 4 do not consider square as rectangle.

By means of concrete activities such as measuring, folding, drawing, clipping, modelling and the use of mirror learners establish the properties of shapes but they do not recognize the logical ties between them at level 2. They cannot see the relationships between the properties of the shapes and the shapes. They have actually noticed that both the rectangle and the general parallelogram have four vertexes, four sides, and that opposite side pairs are equal and parallel, but they were not able to come to the conclusion that the rectangle is a parallelogram or they did not realize that the square is a rectangle and the cube is a rectangular prism.

While playing the game twenty questions it was noticed that several times when children were not able to infer from one property of the shapes to the other. E.g. when guessing the rectangle it was asked 'Does it have a right angle?' after the answer 'yes', they still asked if it had perpendicular sides. During another game the parallel opposite sides of the quadrangle did not make them realize that the opposite sides are equal.

As it is shown by the above examples learners in grade 4 can get as far as *van Hiele* level 2.

The cognition of learners of the 6-10 year-olds is highly attached to real life of objects, which is why during the formation of concepts only starting out from concrete activities and examples taken from their immediate experience is it possible for them to reach the level of abstraction. A large number of examples and counter examples and making the concept concrete and modelling are the preconditions that make it possible that children could recognize the essential characteristics of a concept and reach the level of abstraction. This was the reason why we attempted to provide children with a wide range of experience in the concepts of rectangle, square, parallel and perpendicular and symmetry mainly through various concrete activities so that their concept image would be versatile. These concrete activities related to level 1 and 2 contribute to the development of the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry to a considerable degree.

Further research could be conducted in grades 5 and 6 and 7 and 8 in order to study the development of the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry and to reveal the characteristics of the cognition of learners reaching van Hiele level 3.

PUBLIKÁCIÓK PUBLICATIONS

Referált folyóiratban elfogadott idegen nyelvű publikációk:

- *The Development of Geometrical Concepts in Lower Primary Mathematics Teaching (The square and the rectangle)*, Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, 6(2008)1, (p. 153-171).
- *The Evolvement of Geometrical Concepts in Lower Primary Mathematics (Paralell and Perpendicular)*, Annales Mathematicae et Informaticae, 35 (2008), (p. 173-188).
- *Developmental Teaching Experiment in the Field of Geometry*, Creative Mathematics and Informatics, North University of Baia Mare, Romania, 17 (2008), No.2, (p. 115-129).

Konferencia kiadványban megjelent idegen nyelvű lektorált publikáció:

- *The Concept of the Square and the Rectangle at the Ages of 10-11*, International Scientific Colloquium MATHEMATICS AND CHILDREN, Osijek, 2007, (p. 164-173).

Konferencia kiadványban megjelent idegen nyelvű publikáció:

- *Die Entwicklung geometrischer Begriffe im Mathematikunterricht der Grundstufe (Das Quadrat und das Rechteck)*, Beiträge zum Mathematikunterricht, http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2008/BzMU2008/BzMU2008_SZILAGYINE_S_ZINGER_Ibolya_CD.pdf, 2008.

Konferencia kiadványban megjelent idegen nyelvű poszter:

- *Producing plane figures and selecting plane figures in the fourth class of lower primary school*, The Second International Scientific Colloquium MATHEMATICS AND CHILDREN, Osijek, 2009, (p. 51-54).

Lektorált főiskolai oktatási anyag:

- *Logika, halmazok. (in: Matematika Feladatgyűjtemény az általános képzéshez a tanító szak számára, társszerző:Dr. Kopasz Éva)* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006, (p.11-20, p.91-102).

Konferencia kiadványban megjelent magyar nyelvű lektorált publikáció:

- *A párhuzamosság és merőlegesség fogalma 10-11 éves korban*, XI. Apáczai Napok Nemzetközi Tudományos Konferencia Tanulmányok, Győr, 2007, (p. 391-399).
- *Síkidomok tengelyes tükrösségének vizsgálata 4. osztályban*, XII. Apáczai Napok Nemzetközi Tudományos Konferencia Tanulmányok, Győr, 2008, (p. 186-191).

Nem referált folyóiratban, konferencia kiadványban megjelent publikációk:

- *A kombinatív gondolkodás fejlesztése matematika szakkörön (7-8. osztályban)*, Kutatások az Eötvös József Főiskolán, EKF Baja, 2003, (p.14-26).
- *Indoklások, cáfolatok az alsós matematika órán*, Tantárgy-pedagógiai Kutatások, EKF Baja, 2005, (p.179-184).
- *Példák, ellenpéldák szerepe az alsós matematika órán*, Pont Társadalomtudományi folyóirat 2005./1. – Matematika Szakmódszertani különszám CD.

Előadások nemzetközi konferencián:

- *Példák, ellenpéldák szerepe az alsós matematika órán*, II. Felvidéki Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Rév-Komárom, Szlovákia, 2004.
- *Példák, ellenpéldák szerepe néhány geometriai fogalom alakulásában*, III. Közép-Európai Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Rév-Komárom, Szlovákia, 2005.
- *The Concept of the Square and the Rectangle at the Ages of 10-11*, International Scientific Colloquium MATHEMATICS AND CHILDREN, Osijek, Horvátország, 2007.
- *Die Entwicklung geometrischer Begriffe im Mathematikunterricht der Grundstufe (Das Quadrat und das Rechteck)*, 42. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Budapest, 2008.
- *The Concept of Symmetry at the Age of 10-11*, History of Mathematics Teaching of Mathematics, Tirgu-Mures, Romania, 2008.

Előadások hazai konferencián:

- *A kombinatív gondolkodás fejlesztése matematika szakkörön (7-8. osztályban)*, Magyar Tudomány Napja, Baja, 2002.
- *Indoklások, cáfolatok az alsós matematika órán*, VII. Tantárgy-pedagógiai Tudományos Konferencia, Baja, 2004.
- *A párhuzamosság és merőlegesség fogalma 10-11 éves korban*, XI. Apáczai Napok Nemzetközi Tudományos Konferencia, Győr, 2007.
- *Síkidomok tengelyes tükrösségének vizsgálata 4. osztályban*, XII. Apáczai Napok Nemzetközi Tudományos Konferencia, Győr, 2008.
- *Téglalapok alkotása, válogatása 4. osztályban*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások, Debrecen, 2009.
- *Négyszögek alkotása, tulajdonságaik megfogalmazása a van Hiele-féle 2. szinten*, VIII. Tantárgy-pedagógiai Nemzetközi Tudományos Konferencia, Baja, 2009.

