



Számítógéppel segített matematikaoktatás a 21. század elején

doktori (PhD) értekezés

Gyöngyösi Erika

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2004.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori fokozatának elnyerése céljából

Debrecen, 2004. február 29.

.....
Gyöngyösi Erika

Tanúsítom, hogy Gyöngyösi Erika doktorjelölt 1999-2002 között a fent nevezett Doktori Iskola Matematika-didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységgel meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2004. február 29.

.....
Dr. Bácsó Sándor

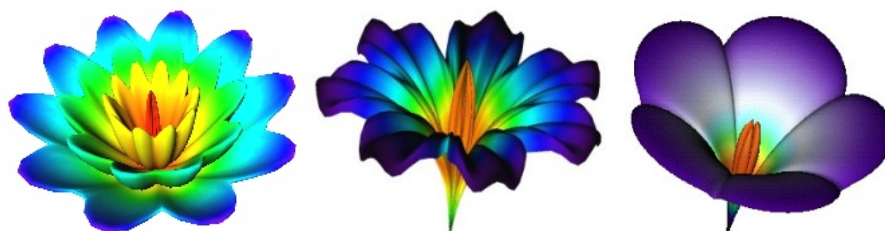
E sorok írója hálás köszönettel tartozik témavezetőjének, Dr. Bácsó Sándor Tanár Úrnak, a Matematika PhD program vezetőinek, Dr. Daróczy Zoltán Professzor Úrnak, Dr. Lajkó Károly Tanár Úrnak az értékes segítségükért és jó tanácsaikért, továbbá a lehetőség megteremtéséért, hogy a Debreceni Egyetem Matematika Tanszékének kutatója lehettem.

Szeretnék köszönetet mondani Chris Haines és André Antibí Professzor Uraknak, és Dr. Bognár Katalin Tanárnőnek, akik külföldi kutatómunkámat támogatták lelkesen.

Különösen köszönöm Dr. Ambrus András, Dr. Kovács András Tanár Uraknak, Dr. Kántor Sándorné Tanárnőnek, Dr. Czegléd István és Dr. Nagy Péter Tanár Uraknak mindazt a sokoldalú támogatását, amellyel kutatómunkám egészéhez hozzájárultak.

Köszönöm továbbá a Debreceni Egyetem tanárainak, a könyvtárosoknak minden kedves segítő szándékát, továbbá barátaim, kollégáim támogatását, az Erasmus és a Magyar Állami Eötvös Ösztöndíj Bizottságnak, amelyek anyagi támogatással járultak hozzá kutatómunkám sikeréhez és nem utolsó sorban Családomnak, akik erős támaszként mindig mellettem állnak.

Továbbá remélem, hogy a pedagógus társadalom megértéssel fogadja, használni tudja munkájához az itt leírtakat, és ezzel hozzájárul a matematika-tanítás és tanulás minőségének javulásához.



Tartalom

Absztrakt	1
Bevezetés	3
Irodalmi előzmények	5
I. A számítógéppel segített oktatás általános jellemzői	11
I.I. Az eddigi megoldási javaslatok az oktatás színvonalának fellendítésére	13
I.I.1. Tőkenövelés	13
I.I.2. Más nemzetek példájának követése	14
I.I.3. Választási lehetőség	15
I.I.4. Az Internet	16
I.I.5. Következtetések	17
I.II. A számítógép, mint megoldás	18
I.III. A számítógépek és hálózatok iskolába történő Bevezetésével járó problémák	19
I.IV. A számítógéppel segített oktatás előnyei és Kihívásai	21
I.V. Válasz az ellenvetésekre	24
I.VI. Megoldási javaslat	29
I.VII. Miért nem hatékonyak a számítógépek az oktatásban, napjainkban?	30
I.VIII. Következtetések	32
II. Hogyan használhatók a számítógépek a grafikus Problémák vizualizációjában?	34
II.I. A kutatási témaválasztás okai	34
II.II. Néhány témával kapcsolatos elmélet	36
II.III. Két esettanulmány	40
II.III.1. Módszer	40
II.III.1.1. Cél	40
II.III.1.2. Eszközök	40
II.III.1.3. Mérések	41
II.III.2. Elő-teszt	43

II.III.3. A szoftverrel végrehajtott tevékenységek	46
II.III.4. Utóteszt	48
II.IV Didaktikai észrevételek	51
II.V. A jövő	54
III. A matematikaversenyek hatása az oktatásra, és a számítógépek szerepe a versenyek eredményeinek feldolgozásában és hasznosításában	56
III.I. A matematikaversenyek előnyei és kihívásai	56
III.II. Néhány gondolkodási hiba és illusztrálása matematikai versenypéldák segítségével	63
III.III. Összegzés	82
III.IV. A matematikai szoftverek, mint a számítógéppel segített matematikaoktatás hatékony segítői	85
IV. Matematikatanár-továbbképzés: számítógéppel Segített oktatást célzó programok	98
IV.I. A középiskolai matematikatanároknak meghirdetett „algoritmikus matematika” tanár-továbbképző program leírása	99
IV.II. Az algoritmikus matematika tanár-továbbképző program résztvevőinek tapasztalatai és véleménye a továbbképzésről	101
IV.II.1. A motivációról	102
IV.II.2. Tanulási nehézségek	103
IV.II.3. Új ismeretek és felhasználásuk	104
IV.II.4. A továbbképzés hatékonyságáról	105
IV.II.5. Javaslatok a továbbképzés hatékonyabbá tételére	106
IV.II.6. Vélemények a számítógéppel segített Oktatás jövőjéről	107
IV.III. Megjegyzések és javaslatok	108
Összefoglaló	110
Summary	115

Irodalomjegyzék	120
Függelék	130

Ábrák

II.III. 1. ábra, 2. ábra	50
II.IV. 3. ábra, 4. ábra	53
III.II. 5. ábra	68
6. ábra	69
7. ábra	72
8. ábra	78
9. ábra	80
10. ábra	83
11. ábra	86
12. ábra	87
13. ábra	88

Absztrakt

Ez a doktori disszertáció átfogó képet nyújt az elektronikus információs technológia (elsősorban a számítógép) alkalmazásának megvalósítási lehetőségeiről a matematikaoktatásban. Legfontosabb üzenete: az iskolák hatékonyabban is kihasználhatnák a fejlett számítógépes technológia nyújtotta előnyöket, a tanulók, a tanárok és a társadalom fejlődése érdekében. A disszertáció négy fő részre tagolódik.

Az első részben általánosan bemutatjuk, milyen előnyökkel jár, illetve milyen ellenvéleményekkel kell számolniuk a számítógéppel segített oktatás résztvevőinek. Továbbá megoldási javaslatot teszünk az ellenvetések megoldására.

A második részben az új számítógépes technológiák, a matematikaoktatásban betöltött szerepét vizsgáljuk. Kutatómunkánk során arra kerestünk választ, hogyan hat a számítógép használata az egyes tartalmi területek oktatására, kiválasztva a matematikai tartalom valamely szempontját, mint az analízis alapját. Esettanulmányok alapján kutattuk, az egyes tanulók grafikus problémákkal kapcsolatos hatékony tanulásának, és gondolkodásuk fejlesztésének módjait, eszközeit. Eredményeink alapján bemutatunk néhány nehézséget, amelyekkel a vizsgálatra kiválasztott tanulók küszködtek, és azt vizsgáljuk, hogy ezek közül melyek kijavításához járulhat hozzá hatékonyan a számítógép használata, illetve mely problémák megoldásában nem hatékony ez az eszköz és hogyan lehetne az akadályokat kiküszöbölni. Néhány jó eredmény kezd felbukkanni, amelyek támogatják a számítógéppel segített oktatás felkarolót, de óvatossá kell lennünk és nem szabad kritika nélkül elfogadnunk minden bizonyíték nélkül azokat a kutatási eredményeket, amelyek a túláradó optimizmusból fakadnak. Még elég sok a megválaszolatlan kérdés e témában, de hiszünk abban, hogy kiterjesztve kutatómunkánkat, és együttműködve más kutatókkal és szoftverfejlesztőkkel, a matematika minden területét meg lehetne vizsgálni és eldönteni, hogy mely területeken segíti hatékonyan a matematikaoktatást a számítógép használata, és hogyan lenne érdemes azt a tanmenetbe integrálni és alkalmazni a mindennapi matematikaórákon a hatékony oktatás érdekében.

A harmadik részben azt vizsgáljuk, hogy az új technológiák hogyan alkalmazhatók hatékonyan a tanítás/tanulás környezetének szervezésében. Továbbá megvitatjuk a matematikaversenyek és játékok szerepét a matematikaoktatásban, a számítógépek szerepét pedig a versenyeredmények feldolgozásában, az egyes tanulói korosztályokra jellemző gondolkodási nehézségek összegyűjtésében, javításában, az ellenőrzött felfedezéssel tanulás kialakításában, a matematikai fogalmak, tulajdonságok elektronikus reprezentációi által lehetővé tett mélyebb matematikai elvek absztrahálásában. A számítógép segítségével könnyen elvégezhető a tanulók versenyeredményeinek összehasonlító elemzése, amivel diagnosztizálhatók a tanulók gyenge pontjai, és ez hozzásegíti a tanárokat a felkészítő munka stratégiájának kidolgozásához.

Végül pedig, a negyedik fejezetben foglalkozunk a tanárok felkészítésével a számítógéppel segített matematikaoktatásra, amely megvalósulásában kiemelkedő szerepe van a tanár-továbbképzéseknek. Bemutatunk egy konkrét, megvalósult tanár-továbbképző programot és hatását. Idézzük a továbbképzésen résztvevő középiskolai matematikatanárok véleményét többek között az illető tanár-továbbképzés hatékonyságáról, a számítógéppel segített oktatás jövőjéről. A résztvevők tapasztalatainak összegyűjtése nagyon hasznos a továbbképzés hatékonyságának növelése érdekében.

Bevezetés

A mai matematikaoktatás egyik legfontosabb feladata az elektronikus információs technológia előnyeinek kihasználása a tanterv és tanítási módszerek fejlesztésével.

Bár az igazság az, hogy a technológia valódi hatását a mindennapi osztálytermi matematikatanítás keretein belül nagyon nehéz meghatározni és nagyon kevés kutatói bizonyíték létezik, amelyek alátámasztanák a számítógépes technológiával kapcsolatos túláradó optimizmust ezen a területen.

Ennek a doktori értekezésnek a célja, hogy felhívja a figyelmet a legújabb tudományos kutatások eredményeire és a modern technológiák, különösen a számítógépek hatékonyabb kihasználásának lehetőségeire a matematikaoktatásban.

További cél, tanulmányozni, hogy a számítógépek miért nem érték el ugyanazt a hatást az oktatásban, mint amit mindenhol máshol: miért nem hoztak még teljes megújulást? A számítógép, ha hatékonyabban használnák, olyan előnyökkel járna, amelyek drámai módon fejlesztenék az oktatást, ami kiemelkedő jelentőségű a nemzet egész sorsának alakulásában, minthogy az függ az iskolázottság alakulásától.

Nyilvánvaló, hogy a matematikatanítás és tanulás hagyományos módszereinek alapvető megváltoztatása nem lehetetlen. De az is világos, hogy az előnyök maximális kihasználása és a problémák minimalizálása széleskörű, átgondolt kutatói és fejlesztő munkát igényel.

Ez alapján hipotéziseink az alábbiak:

- 1.1 A számítógépek képesek fenntartani a tanulók érdeklődését, próbára tenni képességeiket, és érdekessé tenni a tanulást, lerövidítve a hosszú, fáradtságos számításokat vagy megkönnyítve és megszépítve a bonyolult ábrák készítését, szerkesztését, segítve a vizuális tanulást.
- 1.2 A számítógép programozható úgy, hogy képessé tegye a felhasználót matematikai fogalmak és eljárások modelljeit manipulálni és ez által dinamikus látásmódot kialakítani.
- 1.3 A programozók és kutatótanárok összefogásával és együttműködésével olyan szoftverek alkotása lehetséges, amelyek megfelelnek a teljes tanterv elvárásainak. A

kutatótanárok feladata meghatározni, hogyan készítsék fel a tanulókat, a számítógép használat előtt, mennyit lehetne a tananyagból számítógép segítségével oktatni, hol és hogyan lehetne elhelyezni a számítógépes oktatást a tanmenetükben, hogyan tudnák integrálni a számítógépeket a tesztelő és értékelő folyamatokban, és mennyi időt adnának a tanulóknak a számítógéppel való interaktív tanulásra.

- 1.4 A gépek beprogramozhatók a tanulói hibák felismerésére és ezek felfedése után ismétlődő feladatokat adnának a hibát elkövető tanulóknak, mielőtt továbblépnének a tanulási folyamatban. Továbbá az adatfeldolgozás is könnyebb a számítógépek segítségével.
- 1.5 Számítógépek használata lehetővé teszi a matematika felfedezéssel tanulásának hatékonyabb kifejlődését, motiválva a problémák felfedezésére, a szabályok megsejtésére, a sejtések kipróbálására, megkönnyítve a vizualizációt és felébresztve a bizonyítás igényét. Ez az új megközelítés, a felfedezéssel tanulás érdekesebb, mint a megszokott hagyományos és gyakran még az előírt tanterv határain kívül eső tudás elsajátítását is lehetővé teszi. Sőt, a számítógépek felhasználóbarát atmoszférát teremtenek a tanításhoz, amely jól segíti az individuális tanulás megvalósítását. A játékok különösen segíthetik bizonyos képesség kifejlesztését. Intellektuális, éles elmét igénylő számítógépes játékok fejleszthetők ki számítógépes alkalmazásokra.
- 1.6 Szükség van a tanárok képzésére, és továbbképzésére, hogy elháruljon a legnagyobb akadály a számítógépek teljes kihasználása előtt korunk iskoláiban.

Irodalmi előzmények

Az elektronikus technológia hatásának kutatása tekintélyes előzményekkel rendelkezik. Kaput megfogalmazása szerint (1992) „bárki, aki arra vállalkozik, hogy leírja a technológia matematikaoktatásra gyakorolt hatását, nem kevesebbre vállalkozik, mintha egy újra kitörni készülő vulkánt írna le – a matematika hegyvonulata a szemünk előtt változik, számtalan erő hat rá és emellett egyidejűleg. Ezen erők közül több is tartalmaz technológiai komponenst.”

Mackie (1992) szerint, a számítógéppel támogatott tanulás már régóta csak ugyanazon dolgoknak, nagyjából ugyanazon a módon megfogalmazott tanítására korlátozódik, csak a számítógép azon előnyét használva ki, hogy lecsökkenti a fárasztó aritmetikai munkát vagy ellenőrzi a tananyag bemutatásának menetét.

Kaput (1994) arra a következtetésre jutott, hogy az elektronikus technológiának három aspektusa van, amely mély változást idézhet elő a matematikatanulásban. Ezek: az interaktivitás, a tanulási környezet tervezőinek biztosított kontrol, és a kapcsolatrendszer, vagyis amely összeköttetést létesít tanár-tanár, diák-diák, diák-tanár között és talán összeköti az oktatás világát az otthon és munkahely szélesebb világával. Sok oktatónak ezért már eddig is át kellett gondolnia a tanításának céljait és hozzá kellett igazítania tanítási gyakorlatukat a tanulás új stílusához és a számítógép nyújtotta szélesebb lehetőségek támogatásához. A tanár szerepe azonban nem kisebbedik. Mint ahogy Tall (1986) mondja, „ahhoz, hogy segítsük a tanulót a rendszer legelőnyösebb kihasználásában, továbbá segítsük a megfelelő fogalomkép kialakulását, egy külső 'szervező' közeg szükséges, egy tanár, tankönyv vagy megfelelő tananyag által szolgáltatott eligazítás formájában.”

A számoló és számítógépek, mint numerikus eszközök, a matematikai munka minden szintjén elfogadott standard eszközök. Azonban, amikor döntésre kerül a sor az iskolai tantervben és a tanításban betöltött szerepükről, akkor meglehetősen vitatott marad a potenciális hatásuk kérdése.

A számítógépes numerikus eszközök, mint például a táblázatkezelők, vektor-, mátrixkezelők és statisztikai adatelemző

eszközök, vonzó lehetőséget kínálnak a matematikai fogalmak tanításának gazdagításához és a probléma megoldás kereteinek kiterjesztéséhez a középiskolai és az egyetemi matematika témaköreiben. De Fey (1989) szerint a statisztika kivételével, ezek az eszközök úgy tűnik kevés hatást gyakoroltak eddig a standard tantervre, továbbá a matematikai fogalmak numerikus felfedezésére használt számítógépek hatását úgy tűnik, jelenleg beárnyékolja az egyazon fogalmakat reprezentáló dinamikus, színes grafikai megjelenítések vonzereje.

A matematikaoktatással foglalkozó szakemberek már régen a tudatában vannak annak, hogy a számítógépek a numerikus adatkezelés és adattárolás nagyon hasznos eszközei. A matematikusok már több évtizede használják a nagyszámítógépek szimbolikus adatkezelő programjait. A számítógépes szimbolikus adatkezelő (vagy számítógépes algebra) szoftverek általános jellemzői tartalmazznak algebrai transzformációkat és egyenletek megoldását, a polinomokat is beleértve, racionális és algebrai kifejezéseket – magukban foglalnak elemi és transzcendens függvényeket; mátrix műveleteket; deriválási, végtelen és véges integrálszámításokat; adott függvények feletti hatványsorok kiszámítását; sorösszegzéseket; és differenciál egyenletek megoldását. Minden egyes esetben, a szóban forgó kifejezés tartalmazhat numerikus és/vagy betű paramétereket. A programok elég gyorsak és majdnem minden, a középiskolában és a korai egyetemi években előforduló helyzeteket képesek kezelni.

Fey (1989) arra a következtetésre jutott, hogy a szimbolikus adatkezelő szoftverek támogatói arra számítanak, hogy létezik legalább három módja annak, hogy használatuk jelentős hatást gyakorolhasson a matematikaoktatásra. Először is, világosnak tűnik, hogy a szoftver hatalma kiterjed minden olyan bonyolultságú algebrai kifejezésre, amely hatékonyan kezelhető az oktatás bármely szintjén. Másodszor, a számítógép segítségével végrehajtott rutin szimbolikus adatkezelés, úgy tűnik lehetővé teszi, hogy az oktatás középpontjába a fogalmi megértést és a folyamat tervezést állítsa, amely alapvető jelentőségű a matematikai problémamegoldásban. A harmadik mód pedig, többé kevésbé ugyanúgy, mint ahogy a Cabri geometriai eszköz elősegíti a felfedezéssel tanulókat, a szimbolikus numerikus adatkezelés kiszolgáló programjai támogathatják az algebrai

bizonyítás sémáinak gyors felfedezését, amely fontos általános alapfogalmak felfedezéséhez vezet. Ennek az eszköznek és a környezetnek, amelyet teremt két alapvető célja van: visszaállítani a felfedezési tanulást és a találgatásra épülő okoskodást a geometriai kurzusok során, amelyek a dolgok bizonyításának unalmas, évszázadok óta jól ismert rutin műveleteivé váltak, továbbá, elősegíteni az induktív okoskodást, könnyen végrehajtható többváltozós tesztek elkészítésével.

Az induktív okoskodás jelentőségét, amely a plauzibilis gondolkodás speciális esete, már Pólya (1994) is hangsúlyozta. A heurisztika lényegét *A gondolkodás iskolája* című könyvében így fogalmazta meg: „A feladatmegoldás módszereinek tanulmányozása során a matematikának egy másik arcát ismerjük meg. Igen, a matematikának két arca van: a matematika egyfelől Eukleidész szigorú tudománya, de valami más is. Az euklideszi módon tárgyalt matematika rendszeres, deduktív tudománynak tűnik, ezzel szemben a matematika – miközben dolgozik vele az ember kísérleti, induktív jellegű. A matematika mindkét arculata ugyanolyan régi, mint maga a matematika”.

Lakatos (1998) szerint a deduktív okoskodás akadályozza az induktív, kritikus gondolkodás kifejlődését. ezért Lakatos szerint a heurisztikus cáfolatok a matematika fejlődésének a motorjai. Így a matematika fejlődésének egy olyan modelljéhez jutunk, amely a tudományt, egy véget nem érő fejlődési folyamatként értelmezi, ahol e folyamat során sejtéseink egyre tökéletesebbek és igazabbak lesznek. A matematika fejlődését a formalizmus elutasításával és az informális matematikatörténeti elemzés segítségével követhetjük nyomon. Gondolkodásának középpontjában a globális ellenpéldák, cáfolatok, kritikák, definíciók állnak, amelyek valamilyen matematikai felfedezésre vezettek. A problémahelyzetet, azt a 'logikát' hangsúlyozza, amely az új fogalmat szülte.

A Cabri geometria program segíti a diákokat abban, hogy találgassanak és teszteljék feltevéseiket alapvető geometriai alakzatok tulajdonságairól, olyan ábrák és mérések szimulálásával, amelyeket egy matematikus végezne, a sémák kutatása során.

Általánosabban, ahogy Tall (1984) mondta, a számítógépes programokat mind demonstrációs, mind pedig a tanulói vizsgálódások céljaira tervezték, lehetővé téve a tanulóknak a

szabad felfedezést, továbbá, hogy személyesebb módon gazdagítsák a tanulók fogalom képzetét. A különböző számítógépes grafikák lehetőségeinek kihasználása, vagy az átmenet az egyikről a másikra azonban nem triviális probléma. De a számítógép nagyon lecsökkenti az idő és energiaigényes számításokat, és az ember sokkal előrébb juthat bonyolultabb problémák megoldásában azáltal, hogy az agy felszabadul a mechanikus gondolkodás alól, ami által lehetővé válik, hogy a matematika elméleti struktúrájára koncentráljon. Ez nagyon fontos jelentőségű abban a kérdésben, hogy hogyan szemléljük a jövő tantervét: a számítógép használat nem pusztán egy kísérleti elem hozzáadását jelenti, de lehetőséget arra, hogy magát a matematikai elmélet természetét tisztázzuk.

A számítógép nyújtotta numerikus, grafikus és szimbolikus adatkezelő eszközök mindegyike bepillantást és egyedülálló hatalmat biztosít a matematikatanításban, tanulásban és problémamegoldásban. Azonban az ígéretes lehetőségek és potenciális problémák, amelyek ezen eszközök használatából adódhatnak, jelenleg kevésbé ismertek, ezért óvatossá kell lennünk alkalmazásukat illetően.

Megkérdőjelezhetetlen, hogy a számítógépes segédeszközök általában jobbak, mint a hagyományos statikus média, a tanulók matematika iránti érdeklődésének fenntartásában és abban, hogy próbára tegye intellektuális képességeiket a matematikai eredmények elérésében. A valódi vizsgálatot igénylő kérdés, azokat a körülményeket célozza, amelyek során eldönthető, melyik alkalmazása a megfelelő.

A technológia felhasználásának lehetősége, amely arra irányul, hogy kiterjessze az emberi matematika tanulás és problémamegoldás tartományát, még csak most kerül a kutató és fejlesztő projektek középpontjába, és még kevésbé van jelen az osztálytermi matematikatanítás mindennapi életében. Amíg vannak néhányan, akik azt az utat választják, hogy kivárják, amíg a 'legjobb' válasz tisztább képe bontakozik ki, addig a jelenlegi helyzet a hatékony fejlődés lehetőségét kínálja.

A legkifejezőbben Machiavelli fejezte ki annak elvi okait, hogy miért válnak az új megközelítések gyakran kegyvesztetté: „figyelembe kell venni, hogy semmit nem nehezebb kivitelezni; és semmi sikere nem kétségesebb ... mint bevezetni a dolgok egy új

elrendezését.” De még egy kis lépés is jobb a semminél. A számítógépek hatékony használatának bevezetése az oktatásba, olyan tanítási és tanulási környezetet teremthet, amelyre a legtöbb tanár vágyik, miközben a hagyományos osztálytermi és tantervi megkötöttségekkel küszködik. A tantervi célok újragondolása, annak elismerése, hogy a számítógépek és más elektronikus technológiák manapság standard eszközei a problémamegoldásnak és döntés előkészítésnek a tudományban, az üzleti életben, a politikában és az iparban jelentős változásokhoz fog vezetni a matematikaoktatásban. Sok fontos kérdést kell még megválaszolni, de valószínűleg nincs jobb választási lehetőség annál, hogy megkeressük a válaszokat ezekre a kérdésekre, hiszen nekünk kell az iskolai és egyetemi matematika az elektronikus információ korába való bevezetésének eszméjét felkarolnunk.

Az első fejezetben a számítógépek és hálózatok bevezetésével járó problémákkal, továbbá a számítógéppel támogatott oktatás előnyeivel és kihívásaival foglalkozunk. Megmagyarázzuk, miért nem változtatták meg a számítógépek az oktatást mind a mai napig, továbbá, tárgyaljuk, hogyan kéne az általuk nyújtotta lehetőségeket jobban kihasználni, és leírjuk azokat a meglepően nagy nyereségeket, amiket a megfelelő használatuk eredményezne.

Az új technológiák matematikaoktatásban betöltött szerepének vizsgálatában az egyik megközelítés az, ha megvizsgáljuk hogyan hatnak az egyes tartalmi területekre, kiválasztva a matematikai tartalom valamely szempontját, mint az analízisünk alapját. Mi, a függvényábrázolási problémák tanulását, fejlesztési módjának vizsgálatát választottuk ki, ezért a második fejezetben két esettanulmányt írunk le, amelyek során kiderül néhány tanulói gondolkodási hiba, és azt vizsgáljuk, hogy ezek közül melyek kijavításához járul hozzá hatékonyan a számítógép használata, illetve mely problémák megoldásában nem hatékony ez az eszköz és hogyan lehetne mégis hatékonyá tenni ezekben az esetekben is. Néhány jó eredmény kezd megjelenni, amelyek támogatják a számítógéppel segített oktatás felkarolását. Igaz azonban, hogy még mindig sok kérdés maradt megválaszolatlan, és sokat kell még

tanulnunk a számítógépes eszközök hatékonyabb felhasználásáról. De hiszünk abban, hogy kiterjesztve kutatómunkánkat, és együttműködve más kutatókkal, a matematika minden területét meg lehetne vizsgálni és eldönteni, hogy a számítógép használat mely területeken segíti hatékonyan a matematikaoktatást és hogyan, illetve hova lenne érdemes a tanmenetbe integrálni a számítógépes oktatást.

Az új technológiák matematikaoktatásban betöltött szerepének másik megközelítése pedig az, hogy azon technológiák felé irányítjuk a figyelmünket, amelyek a tanítási/tanulási környezet szervezésében, és az eredmények felmérésében, értékelésében alkalmazhatók. A harmadik fejezetben megvitatjuk a matematikaversenyek és játékok szerepét a matematikaoktatásban, amelyek során a valódi élet problémái, kapcsolatai és műveletei elektronikusan reprezentálhatók oly módon, amely lehetővé teszi az ellenőrzött felfedezési műveletek elvégzését és tulajdonságok megfigyelését a tanulók által, akik keresik a mélyebb matematikai elvek absztrakcióit.

Az adatfeldolgozás is gyorsabb a számítógép segítségével és a tanulói eredmények is könnyen összehasonlíthatók. Továbbá, gyorsan összegyűjthetők az egyes korosztályokra jellemző tipikus tanulói gondolkodási nehézségek. Miután pedig beazonosítottuk, milyen nehézségekkel kell a tanulóknak megküzdenie, bemutatjuk, hogyan használhatjuk fel ezt az információt, a hibás fogalomalkotás kijavítására, és a nehézségek leküzdésére.

A negyedik fejezetben a matematikatanárok továbbképzésének jelentőségét hangsúlyozzuk. A tanárokat meg kell tanítani arra, hogyan használják a számítógépeket. Ráadásul, a jövő tanárai, akiket most tanítanak az oktatási intézményekben, nincsenek felkészítve arra, hogy számítógépek segítségével tanítsanak. A tanárok számítógép használatra való felkészítése egy olyan folyamat, amelynek soha nincs vége. Ebben a fejezetben tanulmányozzuk a Debreceni Egyetem „algoritmikus matematika” elnevezésű matematikatanár-továbbképző programjának a hatékonyságát.

I. fejezet

A számítógéppel segített oktatás általános jellemzői

Az üzleti vállalkozások, ipar és más szervezetek, az egész világon gigantikus lépéseket tettek a fejlődés útján, a technológia jobb alkalmazásainak eredményeként.

Az iskolák viszont, a számítógépek sokaságának megszerzése ellenére is csak lassan döcögnek előre, már hosszú ideje. Az oktatásban felmerülő nehézségek lényegében érintetlenül maradtak. Ha a számítógépeket hatékonyan használnák az iskolákban, akkor azonban a jelen gyakorlat némelyike megszűnne és ez sok embert megrémít, ellenállásuk ezért elkerülhetetlen. Az ő félelmük azonban alaptalan. Ugyanis, bár a tanároknak meg kell változtatniuk a megszokott tanítási gyakorlatukat, de ezzel egy új, fontos eredményt érnek el, többet képesek majd megvalósítani és sikeresebbek lesznek a munkájukban, amikor majd az iskolák kihasználják a számítógépek hatalmát.

Az iskolák vezetői gyakran szembesülnek azzal a ténnyel, hogy változtatásokra van szükség az iskolákban. Az ajánlott változtatások nem mindig fejlesztik kellőképpen az oktatást. Némelyikük még tovább ronthatja a kialakult helyzetet. Ezért az iskolák vezetőségének tagjai a biztosnak tűnő utat választják és megbíznak szakembereik, vagyis a tanárok és más közoktatással foglalkozó szakemberek véleményében. Ez tovább lassítja az új programok beindítását, mert az oktatók általában nem szeretik a nagyobb változásokat. Mint az emberek többsége inkább a jól bevált módszereket választják.

Néha az iskolák hajlandók a szemléletváltásra, ha az nem ellenkezik az addigi iskolai gyakorlattal. Az iskolavezetés rátalált arra a nagyobb megújulási lehetőségre, amely megfelel az elvárásuknak: egyre több számítógéppel szerelik fel az iskolákat. A szülőknek tetszik ez a változás. Úgy gondolják, hogy a számítógépek hasznosak az iskoláknak, mivel modernnek, és az iskolán kívül minden más területen intelligens emberek használják azokat. A tanárok szintén nem tiltakoznak, a számítógépek számának növelése ellen. Hiszen így azoknak a pedagógusoknak, akik ki akarják használni a számítógépek kapacitását a tanításuk során,

rendelkezésükre állnak a gépek, miközben a legtöbb oktató megteheti, hogy tudomást sem vesz a számítógépekről és senki sem fogja őket arra kényszeríteni, hogy használják is azokat. Az adminisztrátorokra nézve sem veszélyes ez a változás, hiszen a számítógépek nem fogják alapvetően megváltoztatni az iskola működésének módját.

A számítógépek ezért egyedülálló újítást jelentenek, hiszen mindenkinek tetszenek. A modern gépek elterjedése időszerű, és tetszenek a szülőknek. A hagyományos oktatásban nem okoz igazából semmilyen felfordulást, ez tetszik a tanároknak és az adminisztrátoroknak is. Ennek az újításnak a jelentősége nem vitatható, ez tetszik az iskola vezetőségének.

De sajnos a diákokat a számítógépek nem segítik kellőképpen a tanulásban. Az oktatás lényegében semmit nem változik és gyakran még romlik is. Néha felbukkan valaki és azt ajánlja, hogy a számítógépeket másképpen használják és talán még azt is, hogy megvalósítsák azt, amit eddig mindig csak emberi lények cselekedtek, vagyis, hogy a gépek tanítsanak. Amikor ez megtörténik, az iskola vezető szervei ellenállnak ennek a változtatásnak. Mindig is tanárok tanítottak az iskolákban, ezért az ő pozíciójukat nélkülözhetetlennek és megváltoztathatatatlannak tekintik.

Mindenesetre a számítógépek képesek oktatni a tanulókat anélkül, hogy a tanár látná el az ő megszokott szerepét. Erre végeztek számos kísérletet Amerikában. Bennett (1996-1997) doktori értekezésében leírja, hogy például Floridában, a tanulási sikertelenségekkel küszködő gyenge képességű, továbbá a rossz magaviseletű tanulókat elkülönítettek osztálytársaiktól és számítógépekkel oktatták őket. A tanáraik elégedettek voltak ezzel a megoldással, mert nem nehezítették tovább a munkájukat, tanulótársaikat pedig nem zavarták tovább, maguk pedig sikeresebbé váltak a tanulásban. Ez úgy történt, hogy a számítógépes programok képesek voltak fenntartani érdeklődésüket, kihívásokat nyújtani nekik és érdekesebbé tenni a tanulást. Az amerikai kutatók szerint a számítógépekkel történő tanulás a legtöbb esetben elbűvöli a diákokat. Ezért az olyan oktatóprogramok eredményei, amelyek számítógépeket használnak az oktatás során, érdemesek további tanulmányozásra és további bizonyítékok

keresésére arra nézve, hogy a számítógépek ilyen radikálisan új alkalmazása valóban praktikus-e.

I.I. Az eddigi megoldási javaslatok az oktatás színvonalának fellendítésére

A pedagógusok ritkán javasolnak bármilyen komolyabb változtatást az iskolákban. Miközben elismerik, hogy komoly problémák merülnek fel az oktatásban, sokan közülük úgy érzik elég csak kozmetikai változtatásokat sürgetni, miközben maga a jelenlegi oktatási rendszer lényegében változatlan marad. Ez az ellenállás a komolyabb változtatásokkal szemben megszokott válasz a válsághelyzetben. Mindenesetre lényeges változtatások nélkül csak növekedni fognak a nehézségek a közoktatásban. A válság megoldására folyamatosan érkeznek a javaslatok, amelyek közül vizsgáljunk meg néhányat.

I.I.1. Tőkenövelés

Egy egyszerű megoldás: több pénz befektetése a közoktatásba. A pedagógusok szakszervezete támogatja ezt a javaslatot. Ez az ötlet nem új és sajnos nem is garantálja, hogy említésre méltó eredményekre vezet. Az Egyesült Államokban például a tőkebefektetést körülbelül 33%-kal emelték 1980 és 1990 között. Mindezek ellenére ezen évtized alatt említésre méltó fejlődés az amerikai iskolákban nem történt. A tőkenövelést indokolja az a feltételezett előny, amely az iskolákban realizálódna, ha növekedne a tanárok fizetése. Az 1980-as amerikai tőkebefektetés a tanároknak nagyobb anyagi elismerést jelentett, de a tanári szakmát választó diákok tudása nem javult jelentősen. Ennek egyik magyarázata az, hogy a kiváló képességű tanárjelöltek válogathatnak a jobbnál jobb munkahelyek között a tanári pályán kívül. Az iskoláknak problémát jelent olyan fizetések biztosítása a pedagógusoknak, amelyeket a magánszférában túl nem tudnának szárnyalni. Még ha az iskolai vezetés úgy is döntene, hogy jelentősen emelné a matematika, illetve a természettudományokkal foglalkozó szakemberek fizetését, az iparban, amelynek szintén nagy szüksége van ilyen szakemberekre, még nagyobbbat fognak emelkedni a fizetések. Így

megint alatta fog maradni a matematika és más természettudományokat tanító tanárok fizetése összehasonlítva az iparban dolgozókéval. Így aztán az oktatásban felmerülő problémák súlyosbodnak azzal, hogy hiány lép fel matematika és más természettudományok szakjain végzettek közül. A szegényes oktatás pedig, megakadályozza a potenciális tudósok nagyszámú képzését.

Ráadásul, a tanároknak egyáltalán nincs könnyű dolguk. Sokuk elégedetlen saját sorsával és az erkölcsi morál is gyakran alacsony szintű. Szintén egy amerikai kutatás eredményeire hivatkozom, amikor 2000 tanár véleményét kérte ki 1989-ben a Louis Harris and Associates. Ennek a kutatásnak a során kiderült, hogy a tanároknak, akiknek csak 53%-uk nyilatkozta azt, hogy társadalmilag elismertnek érzi magát, pusztán 67%-a tanácsolná a fiataloknak, hogy legyenek tanárok. Igaz ugyan, hogy a magasabb tanári fizetések csökkentenének néhány nehézséget a közoktatásban, de az erkölcsi morál mégiscsak többet számít, mint a pénz.

1.1.2. Más nemzetek példájának követése

Felmerült egy látszólag kevésbé bonyolult megoldás is, nevezetesen más népek iskolarendszerének tanulmányozása és a jól működő rendszerek mintájára hatékony közoktatásforma kialakítása. A jól működő oktatási rendszerek arról ismerhetők fel legkönnyebben, hogy a tanulók jó tanulmányi és versenyeredményeket érnek el bennük. Ennek a megoldási javaslatnak a hívei úgy vélik, hogy az oktatás hatékonyságának növeléséhez elegendő utánózni más népek jól működő iskola rendszerét. Ezzel a felfogásmóddal csak az a probléma, hogy a különböző országok alapjaiban ugyanarra az oktatási rendszerre épülnek, amely sok éven át sikeresnek bizonyult. De a mai iskolák már azért sem lehetnek olyan eredményesek, mint régen, mivel a nemzet struktúrája megváltozott. E változást nagy részben a társadalom szociális struktúrájának megváltozása eredményezte. A család szerepe egyre inkább háttérbe szorul. Az illetékes oktatók sajnos jogosan siránkoznak a tanulók többségének a családi körülményei miatt. Pedig ha a szülőket jobban be lehetne vonni az iskolai programokba, és növelni lehetne a tanulók szülői irányítását,

akkor ez előrevinné a közoktatás megreformálásának ügyét. De nem valószínű, hogy a szülők hirtelen ennyire megváltozzanak.

Még a vallás is, amely mindig is erős hatást gyakorolt a nemzetre, elvesztette korábbi jelentőségét.

A tanárok megpróbálnak tenni is a kedvező változások érdekében és megkísérlik jobban bevonni a szülőket gyermekeik oktatási nevelési folyamatába. Mindezek ellenére kevés fejlődést érnek el. Egyre több az elvált szülő, egyedülálló anya, akik ha még sokszor nem is vállalnak teljes állást, de a részállásuk mellett is soha véget nem érő anyagi és háztartási gondjaik miatt hiába igyekeznek időt szakítani arra, hogy maximálisan aktívan részt vegyenek gyermekeik nevelésében. Ez a helyzet eléggé szerencsétlen, de sajnos nem számíthatunk javulásra. Ráadásul, még az ideális családokban is, mindkét szülő gyakran az otthonától távol talál munkahelyet, és ritkán tudnak együtt lenni gyermekeikkel. De bármi legyen is az oka, sok szülő nem vállal aktív szerepet gyermeke iskolai előmenetelének segítésében, ahogy azt a tanárok óhajtánák. Ezt a szülői támogatást az iskoláknak kellene bátorítaniuk, azonban egy olyan társadalomban, amely látszólag ellenkező irányban sodródik, pusztán arra várni, hogy ez a tendencia megálljon, nem fogja megoldani a jelenlegi közoktatás dilemmáit.

1.1.3. Választási lehetőség

Egy másik megoldási javaslat a „válogatás”, ami azt jelenti, hogy a szülők kiválaszthatják, hogy melyik iskolába járjon a gyermekük. A szülők elvileg választhatnak a magániskolák és az állami iskolák kínálatából. De a magániskolák gyakorlatilag olyan sokba kerülnek, hogy ezeket csak a jómódú szülők képesek finanszírozni. Így a szegényebb szülők csak az állami iskolák közül választhatnak. Ezek között is vannak úgynevezett „elit” iskolák, ahová csak szigorú felvételi vizsgák sikeres letétele után lehet felvételt nyerni a sokszoros túljelentkezés miatt. Így az ide felvételt nem nyert pályázók a többi iskolába kénytelenek tanulni. Ezáltal az állami iskolák megtelnek elszegényedett tanulókkal, akik többsége műveltségbeli hiányosságokkal küszködik. Az állami iskolák pénzügyi keretei pedig csak romlanak, mivel az ide kerülő szegény családok

tanulói anyagi támogatásra szorulnak és az osztályok magas létszáma miatt egy tanulóra kevesebb pénz jut.

A szabad iskolaválasztás esélynövelő hatásai ellen egyre több érv szól. Úgy tűnik, hogy pusztán azok a szülők tudják kihasználni a szabad iskolaválasztásban rejlő lehetőségeket, akik elég gazdagok ahhoz, hogy jobb magániskolákba küldhessék gyermekeiket. Ez pedig önmagában nem elég a közoktatás olyan mértékű fejlesztéséhez, hogy minden magyar gyermek sokoldalúan kibontakoztathassa tehetségét.

A standard tesztek eredményei azt mutatják, hogy a magániskolák tanulói jobb eredményeket érnek el, mint az állami iskolák tanulói, de semmi biztosíték nincs arra nézve, hogy a magániskolák tanulóinak többsége jobban teljesítene, mint más nemzetek tanulói. Még a szabad iskolaválasztás lehetőségével sem oldható meg az egyénre szabott oktatás, a tehetséggondozás és a tanulási nehézségekkel küzdő tanulók segítésének problémái. Szinte elképzelhetetlen, hogy a mai iskolákban alkalmazott oktatási formák mellett mennyi pénzt kellene befektetni mindezen problémák megoldása érdekében.

Ez a javaslat még ha néhány tekintetben fejlődést eredményez is, megoldatlanul hagyja az alapvető problémákat, így nem vezethet a közoktatás eredményességének jelentős javulásához.

1.1.4. Az Internet

A következő népszerű megoldási javaslat abból az alapvető változásból ered, amit az Internet okozott már sok területen. Én is az Internet használók táborába tartozom, és úgy gondolom, hogy olyan óriási hatása lesz a világra nézve, amelyet most még elképzelni sem tudunk. Mindamellet úgy gondolom, hogy az oktatás megújításának eszközeként mélyen alatta marad védelmezői reményeinek.

Az Internetnek két fő funkciója van: egyrészt szuperkönyvtár, amely minden más eszköznél jobb, másrészt kiváló kommunikációs eszköz. De vizsgáljuk meg a következő hipotetikus kérdést. Elvárhatjuk-e azt, hogy miután a magyar tanulókat elvisszük és beültetjük a könyvtárba, egyszerre műveltté is váljanak? A válasz természetesen nem. Mert nem elég pusztán elvinni egy tanulót a

könyvtárba – már ha egyáltalán tud olvasni – és ölbe tett kézzel várni, hogy művelődjön. Talán néhányan, a legokosabbak közül profitálhatnak ebből, de még a jó képességű tanulók is meglehetősen sok időt és energiát elveszthetnek, mielőtt eljutnának addig, hogy valóban tanuljanak.

Akkor viszont, ha a tanuló előbb megtanulhatja, hogyan használhatja hatékonyan a könyvtárat és megtanítják a kutatómunka alapjaira, akkor a könyvtár rendkívül értékes tanulási eszközzé válhat. Ez a könyvtár, oktatásban betöltött szerepe. Az oktatás szempontjából az Internet egy könyvtár.

Másrészt az Internet kommunikációs lehetőséget biztosít az egész világgal. Ez is egy felbecsülhetetlen értéke, de a gyakorlatban nem elsődleges eszköz a tanulók oktatására. Most nem térek ki bővebben a tanulók számára káros információk, mint például a pornográfia terjedésére, amit szabályozni kellene. De tekintsük például a megfelelő struktúra hiányát. A tanulók elméletileg kommunikálhatnak számos nagy műveltségű emberrel, de többségük mégis a kevésbé művelt, de népszerű személyekkel fog társalogni, mint ahogy a legtöbb tanuló (mellesleg a felnőttek többsége is) a legnépszerűbb folyóiratokat olvassa. Mindezek ellenére, ha jól használják, akkor az Internet felbecsülhetetlenül értékes segítője lehet az oktatásnak.

1.1.5. Következtetések

Az előbbi megoldási javaslatok egyike sem fog olyan változásokat előidézni a közoktatásban, amely hirtelen megoldaná a felmerült problémákat. Mégis szükség van a közoktatás megreformálására, hiszen ebben gyökerezik más társadalmi problémák megoldása, mint például a bűnözés elterjedése. Ezért hatékony megoldásra van szükség. Olyan hatékony oktatási módszereket kell kifejleszteni, amelyek jobbak a régieknél és könnyen elterjeszthetők.

A komoly reformok ellenzői, akármelyik területről legyen is szó, beleértve a közoktatást is, ritkán és nagyon nehezen győzhetők meg bármely radikálisan új módszer hatékonyságának bizonyosságáról. Állandóan új bizonyítékokat követelnek. Azonban a mai rendszer védelmezői közül senki sem tudja bizonyítani, hogy a

jelenlegi oktatási rendszer hatékony. Ha végiggondoljuk a mai dilemmákat, nyilvánvalóvá válik, hogy ilyen bizonyítékokat nehéz lesz találni. A magyar közoktatás nehéz helyzetben van. A tanárok nem hibáztathatók ezért, hiszen ők eddig is megpróbálták segíteni a tanulókat, támogatva egy olyan rendszert, amely nem tud megküzdeni a társadalomban bekövetkezett jelentős változásokkal. Ezek a tanárok nem tudják újjávarázsolni az oktatást és kiküszöbölni a rengeteg felmerülő problémát. A tanárok különösen boldogtalanok a mai oktatás eredménytelensége miatt. Forradalmi változásokra van szükség a közoktatásban, és ha a nemzet nem teszi meg a szükséges lépéseket, akkor rosszabbodni fog a közoktatási helyzet.

I.II. A számítógép, mint megoldás

A számítógépek rövid idő alatt az élet szinte minden területén radikális fejlődést eredményeztek. Ezek a gépek szó szerint teljesen felforgatták a hagyományos gyakorlatot. Segítségük nélkül az úrkutatás leállna, a modern telefonhálózatok összeomlanának, sőt a további tudományos fejlődés is tőlük függ. Mind a kis mind a nagyméretű üzleti vállalkozások felfedezték a benne rejlő sokoldalúan felhasználható, hatalmas lehetőségeket, és ma már elképzelni sem tudnák működésüket a számítógépek nélkül, a pénzpiac pang, amikor a számítógépek átmenetileg nem működnek. Azok listája pedig, akik hasznot húznak ebből a modern technika csodájából, szinte végtelenül hosszú.

Az egyetlen fontos terület, ahol a számítógépek nem okoztak drámai változásokat, az oktatás. Az iskolák számítógépek millióit vásárolták már meg, de ennek csupán minimális hatása volt a diákok tanulási hatékonyságának növelésére.

Míg az élet többi területén versenyt futnak a modernizálódási törekvések megvalósításában, a közoktatás marad a megszokott, jól kitaposott ösvényen. A legjelentősebb áttörés eddig az iskolai fejlődésben, ha csak az elmúlt két évszázadot tekintjük, akkor az volt, amikor a tizenkilencedik század vége felé feltalálták és bevezették a tábla használatát. Azóta csak minimális változások történtek az oktatásban.

Mindenesetre a számítógépek vezető szerepet töltenek be a világon mindenütt, mivel sok feladatot hatékonyabban képesek

végrehajtani, mint az emberek. Az oktatásban is hatékonyabban és megbízhatóbban tudnák közvetíteni az információkat, ráadásul vonzóvá képesek tenni a tanulást, miközben oktatnak. Ahhoz, hogy a számítógépek az oktatásban is betölthessék vezető szerepüket, egy alapvető változtatásra van szükség: meg kell engedni, hogy ténylegesen oktathassák a diákokat anélkül, hogy a tanár köztes pozíciót töltene be a tanuló és a számítógép között, másrészt a tanárnak egy más, fontosabb feladat jutna, ő koordinálná az individualizált tanulást.

Amikor a „számítógépek” kifejezést használom, többet értek rajta, mint a puszta gépet. E fogalomba beletartozik a multimédia felhasználásának a lehetősége, melyet a számítógépek integrálhatnak és irányíthatnak a működésük során, továbbá bármely olyan műszaki eszköz is, amely összeköthető a számítógépekkel, mint például a modemeken keresztül történő kommunikációs megoldások. Az egyszerűség kedvéért a számítógépek fogalmának ilyen széles körű jelentéssel bíró fogalmára a továbbiakban a „számítógépes oktatás” kifejezést fogjuk használni.

Ahhoz, hogy meggyőződhesünk arról, hogy a számítógépek valóban annyira megreformálhatják az oktatást, mint ahogy például az üzleti életet átalakították a huszadik században, és megvizsgálhassuk, hogyan válhatnak egy tartós, jelentős és igazi fellendülés eszközévé a közoktatásban, vegyük számba a számítógépek oktatásban nyújtotta előnyeit és az esetleges kihívásokat, amikkel számolnunk kell. Először tekintsük át a számítógépek és hálózatok iskolákba történő bevezetésével járó problémákat.

I.III. A számítógépek és hálózatok iskolába történő bevezetésével járó problémák

1. Nyilvánvaló, hogy hiány van mind a számítógéppel segített oktatást illető tapasztalatokból, mind pedig olyan szakképzett tanárokból, akik a számítógépeket és a hálózatokat használják a tanítás során, mivel az iskolák, amelyek csak mostanában csatlakoznak ehhez a mozgalomhoz, általában nem rendelkeznek sok, vagy bármiféle számítógéppel, amely a tanítási céloknak

megfelel. Bár elszigetelt próbálkozások léteztek, amelyekben ilyen tanítási formát ajánlottak az iskolai vagy egyetemi szintű oktatáshoz.

2. Az egyik természetes akadály a nyelvi nehézség, amely lelassítja a nemzetközi együttműködést a számítógépes hálózatok és rendszerek oktatásba történő bevezetésében. Igaz ugyan, hogy a komputerekhez értők többnyire rendelkeznek a megfelelő angol nyelvtudással, de néha ez már problémát jelent, amikor a tanári személyzetről és a tanulókról van szó.
3. Továbbá, hiányzik a számítógéppel segített tanulással és tanítással kapcsolatos pedagógiai tudományág, valamint az ilyen tevékenységre képzett személyzet, a pedagógiai nézőpontú hozzáállással.
4. Súlyosbít a helyzeten az, hogy nemcsak hiány van a számítógéppel segített oktatás területén kompetens tanárokból de még a tanári tekintély is csorbát szenved olyankor, amikor a tanulók különbnek bizonyulnak a tanítási anyagot illetően, amely „szerepcseréhez” vezet a tanóra során.
5. Ezen túl, szinte egyetlen olyan szoftver sincs, amely megfelelné a számítógéppel segített tanulás és oktatás követelményeinek, ugyanakkor a létező programok száma kevés és vagy nem kompatibilisek vagy túlságosan drágák. A tapasztalt és szakképzett tanárok hiányából eredő problémákat csak fokozza a tanítandó tananyag hiánya.
6. Sok tanár panaszkodik a tanításhoz didaktikailag használható programok hiányáról, többen közülük pedig kinyilvánították, hogy nem képesek megbirkózni még azzal az egyszerű feladattal sem, hogy a nekik ajánlott technikai eszközöket feltelepítsék.
7. Ráadásul a tanárok közti kommunikáció nem megfelelő, nem informálják egymást a rendelkezésükre álló lehetőségekről. Nem történik meg a tapasztalat és információ csere a tanárok között.
8. A tanárok nem tanulják meg a képzésük során a számítógépek hatékony használatát a tanórai oktatásban.

9. Az iskolák nem rendelkeznek szakképzett szakemberekkel és informatikai szakértőkkel, akik ismerik az oktató és Internetes szoftverek telepítésére vonatkozó eljárást.

Biztosítani kell, hogy mind a tanári kar, mind pedig az iskolák felettes szervei megértsék, hogy mennyire nagy szükség van a fejlett technikát alkalmazni képes kompetens tanári személyzetre és arra, hogy a tanulóknak kreatív és interaktív tanulási feltételeket kínáljanak. Sőt mi több, rajtuk múlik, hogy folyamatosan hozzáigazítsák azokat a hardver és szoftver újdonságokhoz.

A tanár-továbbképzés számítógéppel segített oktatást célzó programjait úgy kell megtervezni, hogy az, az osztálytermi gyakorlatot kiegészítse és vonzó tanulási lehetőségeket kínáljon, miközben tudatában legyünk az akadályoknak is.

Bennett (1996-1997) és Dr. Nyakóné Dr. Juhász Katalin (1997) tudományos munkájára támaszkodva összegyűjtöttem a számítógéppel támogatott oktatás előnyeit és Az ellenvéleményeket, amelyekről bővebben cikkemben (Gyöngyösi E., 2002) lehet olvasni. Bennett szerint az oktatás krízisének egyszerű megoldása van: felmenteni a tanárokat a megszokott kötelezettségeik alól és hagyni, hogy a számítógépek tanítsák a tanulókat. Bővebben az ő tanulmányában lehet olvasni a számítógépekkel megvalósított oktatásról, amely során az összes tantárgyat számítógépek tanítanának a tanárok helyett, azonban ez ma még kissé idealisztikus ötletnek tűnik, mégis érdemes átgondolni ezt a lehetőséget is.

I.IV. A számítógéppel segített oktatás előnyei és ellenvélemények

Előnyök

- A számítógépek az emberi agy kiterjesztésének tekinthetők, mivel két területen is óriási eredményeket képesek elérni: a szédületes gyorsaságukkal és az óriási memória területükkel.

- A számítógépek rugalmasak. Ahogy a tanuló halad a tanulás során, a számítógépek folyamatosan kiértékelik a fejlődését. A gép felülvizsgálatot végez és ennek függvényében megengedi, vagy bátorítja a tanulót a gyorsabb haladásra, amikor az már jól megtanulta a leckét, vagy pedig lelassítja a tanulási ütemét, amíg a tanuló elsajátítja a tananyagot. Megállapítja a hibákat és utána javító feladatokat ad fel, mielőtt továbbhaladna az anyaggal. Továbbá olyan órát ad, amely ösztönző és érdekes, továbbá kedvet csinál a tanuláshoz és a tanulási kedv megtartásához.
- A programozóknak nem szükséges újra feltalálni hatékony tanítási technikákat. Csak le kell tudniuk másolni és használni az ügyes tanítási technikákat, amelyeket az emberi oktatók agya kifejlesztett sok ezer év alatt. A tanári munkában résztvevő számítógépek egy jó példája a hibaanalízis során nyerhető. A tapasztalt tanár gyakran a tesztekben vagy a számonkérések során adott helytelen válaszok kapcsán fedezi fel a hiányosságokat. Amikor egy kritikus hiba felbukkan, a figyelmes tanár megérti, hogy a tanuló nem tanult meg egy lényeges dolgot. Kihasználva ezt a háttér-információt, amelyet a tanárok szolgáltatnak, a programozók alkalmassá tehetik a számítógépeket arra, hogy felismerjék ugyanezeket a nehézségeket. Az emberi zsenialitást a számítógépek kibővítik.
- A szoftverek lehetővé teszik, hogy a különböző tanárok ötletei eljuthassanak a különböző tanulókhöz. Minden számítógép képes imitálni számos tanár modellt, ha megfelelően van beprogramozva. Bármilyen hatékonynak bizonyuló módszert képes alkalmazni, a tanulók igényeinek megfelelően.
- A számítógépek vonzóbbá válhatnak a többi tanári segédeszköznél. A számítógépek memóriájában tárolt leckék anyaga, összehasonlítva a tankönyvekben levőkkel, még színesebb, átfogóbb képet kínál a tanulóknak a világról. A programozás így kiterjesztheti a jelenlegi tanári segédeszközök körét és sokoldalú hasznosíthatóságával még elsőbbséget is élvezhet a többi tanári segédeszközzel szemben. Amikor pedig tudományos áttörés történik, akkor a legfrissebb eredményeket, a telefonhálózaton keresztül

azonnal hozzá lehet azokat adni azokhoz a példányokhoz, ahol használják az illető programokat.

Ellenvélemények

- o Emberi programozás nélkül, a számítógépek használhatatlanok.
- o A gépek elromolhatnak, és a tanulók így elfoglaltság nélkül maradnak.
- o A számítógépes programokban mindig történhetnek üzemzavarok, és a tanulók ekkor is tananyag nélkül maradnak.
- o Néhány tanuló akarattal rosszul kezeli a számítógépeket és tönkre is teszi azokat.
- o Az okos tanulók felfedezik, hogyan kell úgy használni a számítógépeket, hogy megváltoztassák a programjaikat és tönkretegyék a rendszert.
- o A tanulók el fogják vesztegetni az idejüket, ha nincs tanári ellenőrzés.
- o A számítógépek taníthatnak bizonyos tényeket, de nem képesek a fontosabb magasabb rendű gondolkodás megtanítására.
- o A gépek nem képesek olyan ítéleteket hozni, mint az emberi lények.
- o A gépek nem képesek értékeket tanítani.
- o A gép nem képes a tanulók közti interakciókat kiépíteni.
- o A gép nem képes megadni a szükséges és a nagymértékű személyes figyelmet a tanulóknak.
- o A tanárként alkalmazott számítógépekkel ellátott iskolarendszer robotembereket képez, nem melegszívű, barátságos emberi lényeket.
- o A számítógépek veszélyesek lehetnek a tanulók látóképességére, mert a monitor képernyőjéről kell olvasniuk.
- o A számítógépek veszélyesek lehetnek egy olyan betegség miatt, amely több ezer, irodában dolgozó és a számítógépeket rendszeresen használó embernek okoz kéz, hát, derék fájdalmat.

- o Néhány tanuló képtelen lesz használni a számítógépeket vagy azért, mert félnek, vagy azért, mert képtelenek rá, és így nem nő a műveltségük.
- o A tanulónkénti egy számítógép költségei korlátozó tényezőt jelentenek.
- o Ha a számítógépeket ilyen módon fel lehetne használni az oktatásban, akkor már régen így használnák őket, mivel már így is számítógépek millióit használják az oktatásban.

Néhány akadály valóban létezik, de vannak köztük olyanok is, amelyek pusztán képzeltek. De azért mindegyiket meg kell válaszolni. A következő alfejezetben ezekre a nehézségekre adható megoldási lehetőségeket fogom vizsgálni.

I.V. Válasz az ellenvetésekre

- o *Emberi programozás nélkül a számítógépek használhatatlanok.*

Sok, kellően szakképzett programozó van, aki a teljes tantervnek megfelelő szoftvereket képes alkotni.

- o *A gépek elromolhatnak és a tanulók tevékenység nélkül maradnak.*

A gépek nem rendeltetésszerű használata ma már nem a legnagyobb probléma és ez még ritkábbá fog válni, ahogy a számítógépeket egyre jobban tökéletesítik. Azokban a ritka esetekben, amikor a gép nem működik, valamelyik hiányzó tanuló számítógépét lehet használni. A számítógépek összeköttetésben állnak egy központi géppel, amelyben a rekordok és az információ kerül tárolásra. A legrosszabb dolog, ami történhet az, hogy egy tanulónak újra kell kezdenie az aznapi leckeadágnak a tanulását. A központi számítógép is elromolhat, amely az egész iskolát kiszolgálja. A számítógépes hardver a lehető leglényegtelenebb része a rendszernek és órákon belül kicserélhető. Az adatok,

amelyek alapvető komponensek, azonnal bemásolhatók az új gépbe a háttértár példányából.

- o *A számítógépes programokban mindig hibák merülnek fel és a tanulók elfoglaltság nélkül maradnak.*

A programokban felmerülő hibákat folyamatosan csökkenteni lehet a programozókhöz való visszajelzések révén. Azok, akiknél ez előfordul, egy külső szakértőt hívnak fel telefonon és a tanulók egy másik kurzus leckéjére térnek át, miközben maradnak ugyanannál a számítógépnél.

- o *Néhány tanuló akarattal nem rendeltetésszerűen fogja használni a számítógépeket és tönkreteszi azokat.*

A fegyelmi problémák csökkenni fognak a számítógépekkel segített oktatásban, mert a tanulás sokkal élvezetesebb lesz, mint jelenleg. Ha pedig ez mégis előfordulna, néhány ritka esetben, akkor a hatósági szervek úgy járhatnak el, mint ahogy manapság is teszik.

- o *Az okos tanulók fel fogják fedezni, hogyan használják fel a számítógépeket arra, hogy megváltoztassák és elpusztítsák a rendszert.*

Ha ez egyáltalán lehetséges, csak a legeszesebb tanulók lesznek eléggé képzettek ahhoz, hogy elég messze be tudjanak hatolni a rendszerbe, hogy bármit is megváltoztassanak. A rendszer még ekkor sem pusztítható el, mivel minden számítógépes rendszerbe védelmi biztosítékok vannak beépítve.

- o *A tanulók tanári felügyelet nélkül elvesztegetik majd az időt.*

Ha a tanulók egy rövid, de meghatározott ideig nem kommunikálnak a géppel, akkor a számítógép be lesz programozva úgy, hogy megfelelő lépéseket tegyen, hogy a tanuló figyelmét visszaterelje a valóságra. A számítógépek képesek tanulásra ösztönözni és fenntartani a tanulási kedvet. A számítógépek interaktív tulajdonságai hatalmas befolyást képesek gyakorolni a tanulókra, hogy rávegyék őket a tanórán való aktív részvételre és annak élvezetére.

- o *A számítógépek csak bizonyos tények tanítására képesek, nem pedig a magasabb rendű gondolkodásra.*

Három feltétele van a magasabb-rendű gondolkodás fejlesztésének: jó alpműveltség, gondolkodásra készítő kérdések és megfelelő gondolkodási idő biztosítása a tanulóknak a válaszadás előtt. A számítógépek segítségével könnyedén teljesíthetők ezek a feltételek.

- o *A számítógép nem képes olyan döntéseket hozni, mint az ember.*

Ez az állítás igaz: bár a számítógép képes kiértékelni szakmai szempontok alapján, mint például a nyelvtant, de nem tudja felmérni az értékét azoknak az eredeti ötleteknek, amelyek a kreatív gondolkodáshoz szükségesek. A szemináriumokon, amelyek alapvető komponensét fogják alkotni a számítógéppel segített oktatásnak, ez a probléma is megoldást nyer.

- o *A gép nem képes értékeket közvetíteni.*

A gép az értékek áramlásának a csatornája lehet azokon az információkon keresztül, amelyeket a tanulók rendelkezésére bocsát. Mivel a számítógép felsőbbrendű műveltséget fog közvetíteni, ezáltal képes értékeket is közvetíteni a tanulóknak. Sőt, a programozók olyan alkalmazásokat építhetnek be a szoftverbe, amelyeket az iskolák választhatnak ki, úgy, ahogy manapság is ezek az iskolák speciális tankönyveket választanak az oktatáshoz.

- o *A gép nem tud interakciót teremteni a tanulók között.*

Ahogy a számítógéppel segített oktatás fejlődik, a számítógépek egyre több interakciót lesznek képesek kialakítani, mint ahogy azt ma is előre megjövendölik az Interneten keresztül történő interakciók kapcsán. Szemináriumokat és gyakorlati foglalkozásokat fognak tartani, amelyek gyakoribbak és intenzívebbek lesznek, mint a mai iskolákban. A telekommunikáció révén egy új elem alakul ki a más iskolák tanulói közti kapcsolatok kiépítésével. Ezek az információcserék a meglehetősen eltérő háttérrel rendelkező tanulók közt alakulnak majd,

mivel a tanulók különböző földrajzi helyeken élnek, és még a nemzetiségük is különböző lehet.

- o *A gép nem adhatja meg a szükséges és a sokat jelentő személyes figyelmet a tanulóknak.*

Minden tanulónak magán oktatója lesz a számítógép formájában, amely csak őt fogja tanítani. A számítógépek becsületesen, de elismerően fogják értékelni a tanulókat, ahogy a tanulók előrehaladnak a tanulmányaikban. Sőt, a tanulók felé történő visszajelzés azonnali lesz, amely szintén nagy jelentőségű. Bár ha ez a "személyes" figyelem szakmai szempontból vitatható is, a hatásai mégis ugyanolyan hatásfokúak. A gépek törődését meg fogja erősíteni az egyéni foglalkozások és a szemináriumok során, az emberi tanároktól kapott visszajelzés.

- o *A számítógépeket tanárokként alkalmazó iskolarendszer robotembereket fog kifejleszteni és nem melegszívű, barátságos emberi lényeket.*

A számítógépek kizárólagos alkalmazása nem képes a tanulókat melegszívű, barátságos emberi lényekké nevelni. A "melegszívű és barátságos" emberi tulajdonságok kialakításához elengedhetetlenül szükséges más emberi lényekkel való interakció az irányadó és szerep modellekkel együtt. A tanárok kínálják az irányadó és modell szerepeket. Ráadásul, ezt még ügyesebben fogják teljesíteni mint jelenleg, mert több idejük lesz a tanulókkal való interakcióra, mert a számítógépek felszabadítják őket az olyan feladatok alól, mint például a tanulók információkkal való ellátása, a feladatlapok javítása és a jelenlegi halom papírmunka.

- o *A számítógépek veszélyeztethetik a tanulók látóképességét, mert a képernyőről kell olvasniuk az információkat.*

A tanulók néha megerőltetik a szemüket a könyvek olvasásakor is. A színes képernyőkről való olvasás nem annyira fárasztó, mint a korábbi fekete fehér képernyőkről. A számítógép monitorokról való olvasás nem tűnik olyan veszélyesnek a látásra, mint a könyvekből való olvasás.

- o *A számítógépek veszélyesek egy olyan betegség okozása miatt, amelytől több ezer, irodában dolgozó ember szenved, aki rendszeresen használja a számítógépeket.*

Ez a betegség, amely kéz, hát és derék fájdalmakat okoz, olyan emberekre van hatással, akik minden nap, órákon keresztül használják a számítógépeket gépelésre. Az osztályteremben a tanulók csak maximum négy óra hosszat használják majd a számítógépeket naponta és nem fognak folyamatosan gépelni a billentyűzeten. Ők több időt fognak tölteni gondolkodással és olvasással, mint gépeléssel. Ezen kívül a foglalkozások közti szünetek lehetővé teszik, hogy a tanulók megmozgassák elgémberedett testrészeit és felfrissüljenek.

- o *Néhány tanuló képtelen lesz használni a számítógépeket, vagy félelme vagy, hozzá nem értése miatt és így műveltsége nem nő majd.*

A programozók a számítógépeket felhasználóbaráttá képesek tenni, biztosítva ezzel, hogy a tanulók képesek lesznek dolgozni a gépeken. Az efféle félelmeknek általában azok adnak hangot, akik nem rendelkeznek sok tapasztalattal a számítógépekkel kapcsolatban; nem értik meg a jelen gépek által nyújtott igazi kényelmet.

- o *A tanulónkénti egy számítógép költségei korlátozó tényezőt jelentenek.*

Az alapvető költségráfordítás fedezhető tőkebefektetéssel és az adósság visszafizethető a későbbi megtakarításokból. A tankönyvekre kiadott költségek csökkenni fognak és a nem tanító személyzetre egyre kisebb számban lesz szükség. A jobb tanulói fegyelemből és a javuló tanári morálból következő megtakarításokat nehéz ugyan mennyiségileg meghatározni, de azért lényegesek. Lesznek még további megtakarítások is, amelyek abból erednek, hogy a kisebb szomszédos iskolák lehetővé teszik az autóbusszon való bejárás költségeinek csökkentését. Az ipar számára alapvető megtakarítást jelent majd a

jelenlegi kiegészítő oktatás megszűnte. Végül is, a nemzet számára történő megtakarítások összességében véve óriási jelentőségű lesz.

- o *Ha a számítógépek tanárok lehetnének, az iskolák már régóta ekképpen használnák azokat, mivel az iskolák már manapság is számítógépek millióival rendelkeznek.*

A számítógépek kihasználtsága elégtelen az oktatásban. Ha el akarjuk érni, hogy a számítógépek azt a szerepet töltsék be az oktatásban is, mint máshol, egy új elem alapvető jelentőségű: meg kell engedni, hogy taníthassák a tanulókat. Bár tudjuk, hogy a legtöbb ember nem képes megváltozni, magunkat mégis mindig másnak hisszük. Az oktatók is ilyenek. Bár számítógépek millióit használják az iskolákban, mégis ritkán adnak arra lehetőséget, hogy többre szolgáljanak, mint a tanárok segédjei.

I.VI. Megoldási javaslat

A tanárokat ritkán kényszerítik a számítógépek használatára. Általában megengedik nekik, hogy válasszanak. A kezdeti döntésüknek, hogy beépítsék a számítógépeket oktatásuk folyamatába, van egy előfeltétele: meg kell őket tanítani a számítógépek használatára. Az ilyen irányú tanárképzés szükséglete egy azonnali és fő akadályát jelenti a számítógépek kiterjedt használatának a mai iskolákban, mert a legtöbb tanárnak nincs meg a megfelelő szakképzettsége ehhez.

A számítógéppel segített oktatás sikeres bevezetése az iskolákba egyenesen a tanári személyzetnek, az új tömegtájékoztató eszközök használatával kapcsolatos hozzáértésén és ezen technikáknak való elkötelezettségén múlik. Ahhoz, hogy a tanárok ezen kompetenciája kialakulhasson, továbbképzéseket és konferenciákat szükséges nekik szervezni ahhoz, hogy a tanárok képessé váljanak számítógéppel segített tevékenységek végrehajtására az iskolákban, továbbá azok, akik így tevékenykednek, képesek legyenek megosztani az elsajátított szaktudást kollégáikkal, akik ilyen irányú tudásukat még nem tökéletesítették ennyire. Továbbá fontos egy számítógéppel és

hálózattal támogatott oktatást folytató tanári szakértő csapat kiképzése is az új tömegkommunikációs eszközökön alapuló, megfelelő tanítási módszerek megtervezése. A profitálás más országok pozitív tapasztalatiból és standardjaiból, valamint bizonyos nyelvi akadályok leküzdése, csak a hálózati számítástechnikán alapuló (Interneten keresztül) nemzetközi projektekben való aktív részvétellel és nemzetközi konferenciákon és megbeszéléseken érhető el. A szakértelem népszerűsítése a tömegkommunikációs eszközökön keresztül, rendkívül nagy jelentőségű.

Véleményem szerint az olyan kezdeményezés, hogy a szakértők jelentéseket publikálhassanak a számítógépes hálózatokon nem csak azért nagyon szükséges, mert segít elkerülni a kevésbé megfelelő számítógépes és szoftveralkalmazásokat, hanem azért is, mert ez az első lépés az iskolai célokra szánt felszerelések standardizálásához. Ehhez a fajta standardizációhoz nagyon fontos a tanári személyzet hatékony felkészítése a tanár-továbbképzés keretein belül. A résztvevők egy általános alaptudásra és szakértelemre tesznek szert, amelyet a legtöbb iskolában alkalmazni fognak. Így bizonyos fajta hardvert és számítógépes programokat mindenki használni fog, hogy biztosítsák a tanulók, ugyanarra a módszerre, szoftverre és hardverre épülő hatékony tanulását. Az ilyen standardizáció előnyös még akkor is, ha fel akarjuk mérni, hogy a nyert szaktudáshoz képest milyen jövőbeni számítógép vásárlási, illetve az alkalmazások karbantartással kapcsolatban felmerülő költségekre kell számítanunk. Ez lehet az első lépés a szakszerű számítógép használathoz és a hálózati adminisztrációhoz az iskolákban.

I.VII. Miért nem hatékonyak a számítógépek az oktatásban, napjainkban?

A problémák, amelyekkel a tanárok szembesülnek

A tanárokat meg kell tanítani a számítógépek használatára. Ez a tanárképzésre vonatkozó szükséglet egy azonnali és fő akadálya a mai iskolák teljes számítógépesítésének, mert több ezer tanár nem rendelkezik az ehhez szükséges szaktudással. Sőt, a jövő tanárai, akiket most képeznek az iskolákban, sincsenek felkészítve arra,

hogy a számítógépek segítségével tanítsanak. A tanárok számítógépek használatára történő megtanítása egy olyan folyamat, amely soha nem ér véget.

A tanárok már így is túlterheltek. Nagyon kevés tanárnak van elég ideje arra, hogy megtervezze és felkészüljön a fejlett technika használatára. Ezekkel a problémákkal szembesülnek a tanárok, amikor a számítógépeket használják oktatási munkájuk során, ezért a hozzáállásuk érthetően gyakran antagonisztikus a számítógépekkel szemben. A számítógépek jelen használatára csak teher a tanároknak és minimális segítséget jelent az oktatásban.

A problémák, amelyekkel a programozók szembesülnek

A jelenlegi eljárás lehetetlenné teszi a programozóknak, hogy kiváló szoftvereket fejlesszenek ki és adjanak el az iskoláknak, továbbá az iskoláknak azt, hogy a legjobb minőségű szoftvereket használják. A programozók, akik iskolai használatra fejlesztenek szoftvereket, olyan szoftvereket kell alkotniuk, amelyek segítik az oktatókat és tetszik is az illető oktatóknak. Bár az osztályok szintjei meg vannak állapítva, de az egyes tanárok között is szükségszerűen nagy eltérések mutatkoznak a megkövetelt tananyag tanulóknak történő közvetítésében.

A szoftver abszolút minősége nem a legfőbb szempont a tanárok vásárlási döntéseiben. Egész biztosan olyan programot választanak, amely kompatibilis az ő saját tanítási stílusukkal. Máskülönben ők és a számítógépek között nem lesz harmónia. Még akkor is, ha sok tanár kívánja ugyanannak a tantárgynak a tanítása során felhasználni a számítógépeket, mindegyikük más szoftvert részesíthet előnyben, egyedi tudásának és képzésének megfelelően. Ez a szükséglet, hogy a programokat az oktatók egyedi igényekhez igazítsák, egy óriási akadályt gördít a szoftverkiadók elé. A különböző tanárok milliói számos különböző preferenciát és célokat jelent. Ez a túlzott követelmény, a tanárok személyes és különböző igényeinek való megfelelés, az alapvető akadály annak, hogy a programozók képtelenek olyan oktatási szoftvert kifejleszteni, amely kihasználná a számítógépekben rejlő óriási lehetőségeket.

A programozás költséges és a társaságoknak, amelyek szoftverfejlesztésekkel foglalkoznak, pénzre van szükségük. A nagy

számú tanulólétszám ellenére, a tanári különbségek behatárolják bármely program vásárlói kapacitását.

A programozók nem hibáztathatók, mert ők nem képesek egyetlen olyan szoftver programot alkotni, amely megfelel a megszámlálhatatlan sok különböző tanítási módszereknek és stílusoknak, továbbá amely még ráadásul kivételesen hatékony is, amikor a különböző képességű és szükségletű tanulók az osztályteremben felhasználják azokat.

A tanárok rendszeresen nem a programozók által alkotott legjobb szoftvert használják. Ezeket a nehézséget súlyosbítja egy másik, amely az emberi természet velejárója minden aktivitás során: a tehetetlenség. Könnyebb valamit ugyanúgy végezni, mint korábban, mint belefogni valamilyen új folyamat elvégzésébe. Mielőtt azonban bármely tanár használhatná a tanítást leginkább segítő találmányt, tudnia kell a létezéséről és meg kell győződnie a hatékonyságáról.

Még ha a tanárok el is hiszik, hogy az új ötletek segíteni fognak, akkor is tudniuk kell, hogyan alkalmazzák ezeket a találmányokat az osztályteremben, és pontosan emlékezniük kell a kutatásra, amikor a megfelelő feltételek adottak lesznek. A tanár-továbbképzés során lehetőség lenne arra, hogy a tanárok egyrészt megismerkedjenek a számítógép nyújtotta óriási előnyökkel, másrészt a továbbképzés szakértői segítséget nyújthatnának abban, hogy a sok oktatást segítő szoftver közül ki tudják választani a kivételesen hatékonyakat.

A továbbképzések során lehetőség van nemcsak a tanárok, de az oktatásirányítók továbbképzésére is, amely lehetővé teszi, hogy standardizálják az egész rendszer számára kiválasztott oktató programokat.

A problémák, amelyekkel a tanulók szembesülnek

A legtöbb számítógépes program angol nyelvű, így alapvetően fontos, hogy a tanulók megtanulják ezt a nyelvet, hogy képesek legyenek kezelni a szoftver rendszereket. A számítógépek és a programok gyorsan válnak egyre inkább "felhasználó barátta". Mindamellett, néhány programozási nehézség elkerülhetetlen. A legtöbb probléma megoldható a számítógép parancsai révén. Amikor egy olyan probléma fordul elő, amelyet a tanuló a rendelkezésre álló parancsokat és a szoftver segítségét használva nem képes

megoldani, akkor szükség lesz valakire, aki jártas a program ismeretében. Ez a probléma, jól képzett és továbbképzett tanárok segítségével megoldható.

I.VIII. Következtetések

A számítógépek jelenlegi használata az oktatásban, élesen körülhatárolja a számítógépekben rejlő lehetőségek jobb kihasználását, és nem növeli a tanárok tanítási képességeit, sőt nem teszi egyszerűbbé munkájukat. A jelenlegi rendszerben, a számítógépekben rejlő óriási tanítási kapacitást nem lehet teljesen kihasználni és a tanárok, így sosem szabadulnak fel az idő és energiaigényes rutinfeladatok alól, ami csak akadály, hogy ellássák más, fontos feladataikat is, mint például a nevelés.

Egy lehetséges megoldása a problémának, ha a tanárokat felszabadítanák a rutinfeladatok alól és hagynák, hogy a számítógépek tanítsák meg a tanulóknak azokat a matematikai ismereteket, amelyek során, a kutatási eredményeikkel bizonyítottan, a számítógépek hasznosnak bizonyultak. Így a tanároknak nem kéne közvetítő szerepet vállalnia a tanulók és a számítógépek között, több idejük maradna arra, hogy tanári képességeiket más, értékesebb módon kamatoztassák a nevelés és művelődés területén. Bár fontos, hogy átfogó kutatásokkal és konkrét eredményekkel tájékoztassák a tudósok, hogy mit, hogyan és mennyit oktathatnának a számítógépek, tanári közvetítés nélkül.

Ha a programozók elsődleges célja az lenne, hogy a tanulókat, a kutatótanárokkal együttműködve, építve a legújabb kutatási eredményekre, a legjobb oktatóprogramokkal lássák el, anélkül, hogy azon kéne aggódniuk, hogy a programjaik megfeleljenek a különböző tanári stílusoknak és a tantervi idő és tartalmi megkötéseknek, akkor ezek a programírók ki tudnának fejleszteni olyan szoftvereket, amelyek minden tanulót hatékonyan oktatnának. Tudnának építeni a gépek felülmúlhatatlan képességét az individuális oktatás megvalósításában.

II. fejezet

Hogyan használhatók a számítógépek a grafikus problémák vizualizációjában?

Nagy rés tátong az információs technológia lelkes reformereinek az eredményei és a jelenlegi számítógép használat kis fokú, matematikaoktatásba integrálása között.

E fejezetben megvizsgáljuk, hogy melyek a matematikai számítógépes szoftverekben rejlő lehetőségek, amelyek valóban támogatják a matematikai grafikus problémák tanítását és tanulását, konkrétan megpróbáljuk meghatározni azokat az értékeket, amelyekkel a számítógép használata járul hozzá a matematika tanulási folyamathoz (Gyöngyösi; 2004).

Két esettanulmány elemzésével beazonosítjuk a számítógép használat előnyeit és akadályait, grafikus problémák esetén. Az egyéni tanulói interjúk segítségével rávilágítunk két gyengébb matematikai teljesítményt nyújtó tanuló reakcióira, tanulási nehézségeire és téves eszméire, miközben számítógéppel segített matematikaoktatásban vettek részt.

Kutatási eredményeink alapján a két tanuló matematikai teljesítménye megfigyelhetően javult, ezért gondoljuk, hogy a számítógéppel segített oktatás elsőbbséget kaphat a többi, ismert tanítási módszer mellett.

II.1. A kutatási témaválasztás okai

A tanulók vizualitását a matematikai ismeretelsajátítás közben már több éve tanulmányozzák és a növekvő számítógép használat a matematikában és a kapcsolódó tudományágakban lehetővé teszi a dinamikus megjelenítést, például mozgó képsorok ábrázolását, ami segíti a kognitív megértést.

A tankönyvekben megtalálható standard képek matematikai fogalmak korlátozott fejlődéséhez vezethetnek, mivel statikusak, így nem képesek sok fogalom dinamikus természetének teljes közvetítésére és ráadásul korlátozottak a változatosság terén is, ami csak néhány példából kialakított korlátozott fogalomképhez vezet.

Például néhány középiskolás tanuló nem tudja összekapcsolni a másodfokú egyenletek algebrai és grafikus megoldási módjait. Ezért bármikor, ha negatív diszkriminánssal rendelkező másodfokú egyenletet kell megoldani grafikusán, zavarba jönnek, mert el sem tudják képzelni, hogy van ilyen függvény, és ha van, akkor hogy néz ki, illetve hol helyezkedik el a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben. Még ha a tanulók le is tudják rajzolni mondjuk az $y=x^2+1$ függvényt, általában nem látnak semmilyen kapcsolatot a $0=x^2+1$ másodfokú egyenlet grafikus megoldása és a másodfokú egyenlet diszkriminánsának a fogalma között.

Azonban, ha a tanulók matematikai számítógépes szoftverek segítségével látnak példákat negatív diszkriminánsú másodfokú egyenletek grafikus megoldására, akkor ez lehetővé teszi számukra, hogy elképzeljék, hogyan is helyezkednek el az ilyen típusú függvények a koordináta-rendszerben. Jelentést kap ez a jelenség: „Persze világos, hogy létezik a függvény még ha a másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív és nincs megoldása a másodfokú egyenletnek, de láthatjuk a kifejezést reprezentáló függvényt.”

Sajnálatos módon, a magyar tantervben a függvények témakörét nem tartalmazza az algebra rész, hanem a matematika tankönyvekben külön fejezetben kerülnek tárgyalásra a sorozatokkal, ami még inkább nehezíti a tanulóknak az egyenletek és függvények közötti kapcsolatok meglátását. Ezért aztán grafikus egyenletmegoldásokat ritkán adnak és el is hanyagolt ez az egyenlet megoldási módszer.

Tanítási gyakorlatom során gyakran megfigyeltem, hogy komplex problémák esetén, mint például bonyolult másodfokú egyenlőtlenségek megoldásakor, a tanulók sok időt és energiát pazarolnak a másodfokú kifejezések megoldásainak kiszámításával a megoldó képlet segítségével. Ez azonban annyira leköti a figyelmüket, hogy nem tudják átlátni a kapcsolatokat sem a másodfokú függvények zérus helyei, illetve a megfelelő másodfokú kifejezések megoldásai között, sem pedig a függvények zérus helyei és a függvények x-tengellyel való metszéspontjai között. Például, amikor a tanulóknak meg kell oldania az $x^2+3>0$ egyenlőtlenséget, akkor megpróbálják alkalmazni a megoldó képletet a $0=x^2+3$ egyenletre és mivel negatív szám szerepel a gyökjel alatt,

megállapítják, hogy nincs megoldása az egyenlőtlenségnek. Ráadásul, sok tanuló zavarba jön, ha a tanár megkéri őket, hogy rajzoljanak olyan másodfokú függvényeket, amelyek mindig pozitív/negatívak.

Minthogy a számítógép gyorsan és megerőltetés nélkül elvégzi a számításokat, a tanulók az általános sémákra, jellemzőkre és a teljes megoldási folyamatra koncentrálhatnak, így annak folyamata egységgé válik, és a tanulók hozzálátnak a különböző matematikai fogalmak közti kapcsolatok analizálásához.

Magyarországon szükség van a tantervfejlesztésre és a tanítási stílusok megváltoztatására ahhoz, hogy a matematikai fogalmak közti kapcsolatokra koncentráló tanulási megközelítés fejlődhessen ki.

Bár az igaz, hogy a számítógéppel segített oktatás nem old meg minden problémát, és ahogy Kaput (1992) megállapította, bár sok lelkes érvelés szól a számítógépek matematikatanításra és tanulásra gyakorolt pozitív hatása mellett, azonban azok hatásának szisztematikus kiértékelését nehéz megadni.

Kaput (1992) továbbá arra figyelmeztet, hogy a más közönségek számára alkotott technológiai találmányok kritikátlan elfogadása nem fogja teljesíteni az elvárásokat.

Az eddigi számítógéppel segített matematikatanítással foglalkozó tanulmányok nem sokat segítenek mindazon tanulási nehézségek meghatározásában, amelyek esetén a számítógép használat hatékonynak illetve hatástalannak bizonyul és annak mértékét sem segítenek meghatározni, hogy mennyiben járul hozzá a számítógépek használata a tanulók teljesítményének fejlődéséhez. Kutatásunk célja ezért annak meghatározása, hogy a számítógéppel segített oktatás milyen értéket ad hozzá a matematika tanításához, a függvény transzformációk, másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek tanítása során a matematikai teljesítmény függvényében.

II.II. Néhány témával kapcsolatos elmélet

Piaget (1985, p. 49) rámutatott arra, hogy a „cselekvések és műveletek, a gondolat vagy asszimiláció sematizált objektumaivá válnak”. Meissner (2003) szerint ez az ötlet nagyon fontossá vált

napjainkban, mert szükségesek ahhoz, hogy megértsük a fogalomképek (Vorstellungen) fejlődését az oktatásban, mint az interiorizáció vagy belsővé válás, befogadás folyamatát.” A Vorstellungen személyes belső megjelenítések, amiket a 'Darstellungen' idéznek fel, azaz a matematikai fogalmak külső reprezentációi. A számítógépek a külső reprezentációk eszközei, de a belső reprezentációk meglehetősen nagymértékben a külső reprezentációktól függenek.

Gray és Tall (1991, p. 72) szerint „dualitás van a matematikai folyamat és fogalom között, különösen, amikor ugyanazt a szimbólumrendszert használjuk mind a folyamat (például két szám összeadása $3+2$ során), mind pedig a folyamat eredményének ($3+2$ összege) jelölésére. A jelölés kétértelműsége lehetővé teszi a sikeres problémamegoldók részére a rugalmas váltást a gondolkodásukban a folyamatról, amely matematikai feladat végrehajtását jelképezi, a fogalomra, amely mentálisan kezelve egy szélesebb séma része”. A sikeres problémamegoldó a procept-nak nevezett mentális struktúrát használja (Tall; 1991, p. 251), „amely nem más, mint folyamat és fogalom ötvöze”.

Gray és Tall (1994) a következő definíciót javasolta: „Egy elemi procept három komponens ötvöze: a folyamaté, amely egy matematikai objektumot hoz létre, és a szimbólumé, amely mind a folyamat, mind az objektum reprezentációját szolgálja. A procept elemi proceptek gyűjteménye, amelyek ugyanarra vonatkoznak”. Tall és szerzőtársai (2000) művében találunk példákat szimbólumokra, mint folyamatra és mint fogalomra. A proceptek elméletéről további részletek találhatók Gray és Tall (1991), Sfard (1987), Dubinszky (2000), Meissner (2003) és mások tanulmányaiban.

A matematika egyik alapfogalma a függvény. A függvények megértéséhez alapvető, hogy egységében értsük a függvényváltozók, hozzárendelése szabály, függvényértékek fogalmát, mint egy proceptet. Sfard (1992, p. 64) egy állandó, háromlépéses sémát azonosított be az operációs és strukturális felfogási szintek közötti egymás utáni fázisokban. Az első dolog, amit el kell sajátítanunk, a már ismert objektumokon végrehajtott művelet, aztán eszme, amely ezt a műveletet egy összetettebb, önálló egésszé fűzi össze, és végül az a képesség, hogy ezt az egységet, mint állandó objektumot szemléljük”.

A függvények esetében az első lépés az a művelet, amellyel konkrét értékeket adunk meg a függvényváltozók helyett és a megfelelő függvényértékeket kiszámoljuk az adott hozzárendelési szabály alapján. A függvényeket példákon és ellenpéldákon keresztül érdemes tanulmányozni. Mivel a számoló és számítógépek képesek levenni a vállunkról a számítások nehézségét, így figyelmünket a különböző változókkal nyert függvény értékek közti kapcsolatok tanulmányozására fordíthatjuk, tanulmányozhatjuk a tulajdonságaikat, megrajzolhatjuk a függvények képét. Ezért, a függvény fogalma egy önálló egységgé alakul át és a függvényváltozók függvényértékekhez való hozzárendelési szabályának szimbólumrendszere nem csak a függvényértékek kiszámításának módját reprezentálja, de a folyamat eredményét is (magát a függvényt). Végül is, az a képesség, hogy meg tudjuk adni a függvény hozzárendelési szabályát a függvény képe alapján jelenti a függvény állandó objektumként való felfogását. Sok tanuló könnyedén elvégzi a függvényértékek kiszámítását adott változókból és fordítva, de mégsem nem egy objektumként fogják fel a függvényt, pedig ez alapvetően fontos az inverz függvény fogalmának megértéséhez.

Skemp (1978) megkülönbözteti az instrumentális és a relációs megértést. Az instrumentális értést az jellemzi, hogy kiválasztják és alkalmazzák a szabályokat a probléma megoldása során, de nem tudják a miértet ('szabályok indokok nélkül'). Csak egy speciális Darstellungen, egy külsőleg megfigyelhető viselkedést várnak el: „Mondd meg mit kell tennem, és én megcsinálom”. Míg a relációs megértés azt jelenti, hogy pontosan tudom miért azokat a bizonyos szabályokat használom a probléma megoldásához (a szabályok alkalmazásának pontos indoklása). Szükségképpen egy megfelelő matematikai fogalomképnek és ennek más fogalmakkal összefüggő kapcsolatainak kell lennie a gondolkodás háttérében.

Az instrumentális megértés szükséges, nem elegendő a helyes megoldás megtalálásának. Ebből a szempontból a rengeteg számoló vagy számítógépes kézikönyv vagy szoftver csomagok csak az instrumentális (a 'gép' szempontjából instrumentális) gondolkodás fejlődését erősítik. A relációs megértés során a probléma helyzet jelentése kerül előtérbe és a számítógép csak segít a nehéz számítások elvégzésében, vagy bonyolult rajzok elkészítésében

vagy a tulajdonságok és kapcsolatok vizualizációjában. Sok példa hozható arra, hogyan lehet a számoló és számítógépeket a relációs megértés fejlesztésére használni, például Tall (1986) függvény vizsgálattal kapcsolatos munkái. Sok matematikai megértést célzó tanulói aktivitást célzó tevékenységforma létezik a mai osztálytermekben: a dinamikus geometria szoftverek (Cabri, Euklidesz, stb.), a felfedezéssel tanulásra bátorító algebra szoftverek, megfelelő szoftver-hardver konfigurációk használata.

De napjainkban még nincsenek átfogó elméletek arról, hogyan lehet a számoló és számítógépeket a relációs megértés fejlesztésére használni.

Bár nem jelenti a probléma tökéletes megoldását, de remélhetőleg a számítógéppel való interaktív munka jobb rálátást nyújt a tanulóknak a függvények jellemzőire, amely potenciálisan több jelentést hordoz.

Hipotézisünk az, hogy a számítógép használata növeli a matematika tanulás iránti kedvet. A számítógép használatával foglalkozó szakirodalom számos előnyét említi, amelyek többsége nem kötődik speciálisan egyik létező matematikai szoftverhez sem. A matematikatanítás fejlesztése céljából alkalmazott számítógéppel segített oktatás előnyeiről és kihívásairól Gyöngyösi (2002) munkájából lehet bővebben tájékozódni. Más szakirodalmak ezen a területen, mint például Artigue és társszerzői (1993) a komputer algebra rendszereket leggyakrabban úgy jellemzik, mint olyan eszközök, amelyek lehetővé teszik a felfedezésre épülő matematikatanulást, megengedve olyan problémák feltárását, amelyek érdekesebbek a szokásos problémáknál, amelyekkel a tanítási órákon foglalkoznak, és amelyek esetleg nem is szerepelnek az előírt tantervben. Ezen túl, a számítógépek sokoldalú kapacitását kihasználva (numerikus, algebrai, grafikus) felhasználóbarát környezetet teremtenek a tanításhoz, amely jobban illeszkedik az individuális tanulás eszméjéhez.

Tall (1986, p. 2) szerint „a számítógép beprogramozható úgy, hogy a felhasználó képes legyen matematikai folyamatok példáinak manipulálására és dinamikus szemlélni azokat”. Ezen tapasztalatok alapján a tanulók megtanulják a specifikus példákat (egyedülálló mennyiségeket) generikus (példák osztályainak

reprezentációinak) példáknak tekinteni, amely viszont segíti az általános fogalom absztrakcióját”.

A fejezet többi részében tárgyaljuk a számítógéppel segített matematikatanítás didaktika szempontú elemzését és saját kutatási megfigyeléseinkből merített észrevételeinket.

II.III. Két esettanulmány

II.III.1. Módszer

II.III.1.1. Cél

Célunk az volt, hogy hozzájáruljunk a néhány speciális szituációban (grafikus problémák megoldása esetén) alkalmazott számítógépes matematika szoftverek hatásának tanulmányozásához, nevezetesen, annak vizsgálata, hogyan járul hozzá a szoftver használata a tanulók matematikai eredményeinek javulásához.

II.III.1.2. Eszközök

Ezekben az esettanulmányokban két tizenhat éves tanuló, Gabriella és Marianna vett részt. A matematika eredményeik a közepesnél is gyengébb volt, de nagyon szorgalmas és fejlődésre kész tanulók voltak, akik a kutatás során végig együttműködtek a kutatótanárral. Mindkét tanuló a gimnázium tizedik évfolyamát végezte, amely során, a matematikaórán többek között tárgyalják a függvényeket, másodfokú egyenleteket, egyenlőtlenségeket is. A tanulók általában értettek a számítógép használatához, ezért rövid felkészítésre volt csak szükség a kutatás során használt szoftver használatáról.

A kutatás végrehajtása 2003 április és június között történt a debreceni Ady Endre Gimnáziumban, amely a nem hivatalos rangsor szerint a harmadik legjobb középiskola Debrecenben.

II.III.1.3. Mérések

Mielőtt a tanulókat bevezettük a Graphmatica nevű szoftver használatának rejtelmeibe, megkértük őket egy elő-teszt megírására (ez a teszt öt matematikai problémát tartalmazott, az elérhető pontok száma maximálisan 100 pont volt. A teszt megtalálható a mellékletek között), amelyet a matematikatudás három területének mérésére fejlesztettünk ki: függvény transzformációk, másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása. Az elő-teszt után a tanulók egy 10 extra matematikaórán vettek részt a számítógépteremben, ahol először az elő-teszt problémáinak, majd a témakör hasonló feladatának megoldására és azok megbeszélésére került sor a tanár és a számítógép segítségével. A szoftverrel végrehajtott tanulói tevékenység során belső metodológiát alkalmaztunk, megfigyeléseinkre és az elő-teszt eredményeinek kiértékelésére építve.

A tanulók önállóan dolgoztak a szoftver felhasználásával, de mielőtt bekapcsolták volna számítógépeiket, a kutatótanár röviden bemutatta nekik a megoldandó matematikai problémákat, tisztázva az esetleges félreérthető megfogalmazásokat, továbbá a szoftverhasználat során az egyéb felmerülő tanulói nehézségek leküzdésében is segített.

Gabriella és partnere Marianna a géptermi munkájuk során megosztották egymással a függvény transzformációkról, majd az egyenletek és egyenlőtlenségekről összegyűjtött információkat és eredményeket, kombinálva az egyéni tanulást a csapatmunkával. Marianna hozzáállása a kutatási munka során „csak éppen megtenni ami minimálisan szükséges”, míg Gabriella nagy lelkesedéssel vonta le a konklúziókat a feladatok megoldása során.

Az extra matematikaórák során a tanulók átismételték a függvény transzformációk szabályait („mikor, milyen irányú eltolásokat kell alkalmazni az alapfüggvényre vonatkozóan”), a megoldó képlet alkalmazását („különös tekintettel a másodfokú kifejezés zérus helyei, a megoldó képlet eredményei és a másodfokú egyenlet megoldása közötti kapcsolatok meghatározására”). Továbbá gyakorolták az olyan összetett másodfokú egyenlőtlenségek megoldását, amelyek számlálója és/vagy nevezője is másodfokú kifejezés(ek)e)t tartalmazott („hogyan kell az

egyenlőtlenség számlálóját és nevezőjét külön-külön tanulmányozni, majd a megoldási intervallumokat megkeresni az egyenlőtlenség végső megoldásának megadásához”). A tanulók szabadon használhatták a számítógépet és a Graphmatica nevű matematika szoftvert az ilyen jellegű a grafikus problémák megoldásához a számítógép termi órák során.

Nem vártuk el a tanulóktól, hogy tökéletes válaszokat adjanak a kérdéseinkre, de kezdeti ötleteiket leírhatták, ami lehetővé tette, hogy összehasonlítsák az eredeti ötleteiket a végső válaszokkal és a helyes eredményekkel. A tanulók lehetőséget kaptak megoldásaik bemutatására és válaszaik ellenőrzésére. Ha bármilyen problémájuk volt a számítógép használatával, vagy valamelyik matematikai fogalom megértésével, a tanár útmutatásokkal vagy rávezető kérdésekkel segítette a tanulói megértés fejlődését. A tanulók könnyen ellenőrizhették függvény transzformációkkal kapcsolatos megoldásaikat, ábrázolva az illető függvényeket a számítógépes szoftver segítségével.

Ezek után, hasonló stílusban, a tanulók folytatták a második és harmadik témakör tárgyalását, meghozzá a másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásával a számítógép segítségét is kihasználva.

A tíz extra matematikaóra teljesítése után, a tanulók egy utótesztet töltöttek ki.

A tanulói eredmények elemzésével és az elő-, illetve utóteszt eredményeinek összehasonlításával látni lehet, hogy meglehetősen fejlődés figyelhető meg az illető tanulók gondolkodásában. Bár nem köthető össze egyértelműen pusztán a szoftverhasználattal, de mégis alapvető fejlődés figyelhető meg a bonyolult másodfokú egyenlőtlenségek megoldásában.

A következőkben, ahhoz, hogy megértsük a tanulók milyen nehézségekkel küszködtek és hogyan küzdöttek azokkal, rövid leírását adjuk az elő- és utótesztnek, valamint annak, hogyan illeszkedtek a feladatok a fenti metodológiánkba. Ez a metodológia lehetővé teszi, hogy meghatározhassuk, milyen mértékben alkalmazható hatékonyan a matematikai szoftver néhány matematikai képesség fejlesztésére. Bár ennek a belső metodológiának sajnos megvan az a hátránya, hogy nagyon helyi, de reméljük, hogy célunkat, ami az volt, hogy felhívjuk a figyelmet a

számítógéppel támogatott matematikai feladatmegoldás jelentőségére a matematika bizonyos területein, ahol hasznosnak bizonyulhatnak, elérhetjük vele.

II.III.2. Elő-teszt

Az első feladat az volt, hogy függvény transzformációk segítségével ábrázolják a tanulók az $y=x^2/2+5$ (8 pont) és az $y=-3(x-5)^2+1/2$ függvényeket (8 pont).

Minthogy a tanulók feltételezhetően nehézségekkel küszködtek a függvény transzformációk alkalmazásával a függvényábrázolás során, ez a probléma azok átismétlése és gyakoroltatása céljából lett kiadva. A probléma közös megoldása során a számítógépes szoftver színes, tanulási kedvet növelő tanulási környezetet teremtett a függvények képének ábrázolása során. A gyakorlatban gyűjtött tapasztalatok, bizonyítottan (Tall; 1986) hatékonyabb tanulást eredményeznek és könnyebb a dolgokra visszaemlékezni, ha elvégeztük és láttuk azokat, mintha csak pusztán olvastunk volna róluk.

Az első feladat elvégzésekor fel kellett írni az $y_1=x^2$; $y_2=x^2/2$; $y_3=x^2/2+5$ függvény transzformációkat, majd ezeket a függvényeket kellett ábrázolnia a tanulóknak papíron.

Marianna (1. tanuló) nem alkalmazta jól a függvény transzformációkat a függvényábrázolás során.

A feladat elkezdése nem okozott nehézséget, az x^2 függvény ábrázolásával nem vont gondjuk a tanulóknak. A tanár elmagyarázta mit is vár a feladatok megoldása során, ezután a tanulók hozzáláttak a függvény transzformációk elvégzéséhez. Ezeket a rutinfeladatoknak számító eljárásokat előzőleg a matematikaórákon jól begyakorolták, és használták a mindennapi matematikaórákon. Marianna eleinte csak ült és nem volt ötlete hogy haladjon tovább.

Úgy tűnik, hogy a feladatmegoldás elkezdésekor gyakran lépnek fel kezdeti nehézségek. Ez a magyarázata annak, hogy néhány tanuló miért látszik olyan álmodozásba merülni vagy figyelmetlennek. Néhány figyelemmel kapcsolatos problémaszervezési problémának tekinthető: egy relatív módon struktúra nélkülinek számító helyzetben a tanuló nem képes nekilátni és alkalmazni a problémamegoldó stratégiáját. Mivel ez a

viselkedésforma nem jön létre, a tanuló figyelmetlennek tűnik. Néha a kezdeti nehézségek legyőzhetők külső utasításokkal. Ezért Mariannának meg kellett mondani, hogy gondolja át merre kell eltolni, nyújtani vagy zsugorítani vagy tükrözni az alapfüggvényt a koordináta rendszerben. Ilyen kezdeti instrukciók után Marianna nekilátott a transzformált függvények ábrázolásához, de mivel nem jó sorrendben hajtotta végre a transzformációkat, helytelen megoldást kapott. Hiába írta le a transzformációkat jól, de nem praktikus módon, mivel nem a leírt transzformációknak megfelelően ábrázolta a függvényeket. Az első feladat a) részében a következőket írta: $y_1=x^2$; $y_2=x^2+5$; $y_3=x^2/2+5$. De az utolsó lépésben $y_3=x^2/2+5$ helyett $y_3=(x^2+5)/2$ függvényt ábrázolta. A feladat b) részében Marianna az alapfüggvényt az ellenkező irányba tolta el, mint ahogy kellett volna, minthogy helytelen analógiát vont le a zárójelen belüli $(x-5)^2$ negatív előjel és a függvény grafikonjának 5 egységgel való, negatív irányú eltolása között.

Marianna csak instrumentális megértéssel rendelkezett, mivel a függvény transzformáció lépéseit sikerült neki helyesen leírnia, de a relációs megértéshez szükséges relációkat a hozzárendelés szabályának szimbólumrendszere és a megfelelő függvények grafikonjainak transzformációja között nem látta át. Ezért az első feladatra ő 6 pontot kapott a 16-ból (38%).

Gabriellának (2. tanuló) nem volt problémája a függvényábrázolással és a transzformációkkal. Tökéletes feladatmegoldására megkapta a maximális 16 pontot (100%).

A második feladat a $\sqrt{x-1}=-x+3$ egyenlet megoldása volt. Ezt a feladatot azért tűztük ki, hogy megvizsgáljuk, melyik egyenlet megoldási módszert kedvelik jobban a tanulók. Az elvárásaink alapján a tanulók jobban szeretik az algebrai megoldási módszert, mint a grafikus. Ez be is igazolódott a feladatmegoldások során.

Az algebrai megoldási módszer használatakor figyelni kell a kikötésekre az egyenlet értelmezési tartományának meghatározásakor. Aztán ekvivalens átalakításokat kell végezni, kezdve mindkét oldali kifejezés négyzetre emelésével. Sajnos a tanulók elfelejtkeztek a kikötésekről a megoldások megadásakor. Ez a probléma a grafikus megoldással kiküszöbölhető.

A második feladat megoldásakor Marianna mindkét oldali kifejezést négyzetre emelte, sajnos azonban nem tudta helyesen négyzetre emelni a kéttagú különbséget. Az alábbi hibát követte el: $(-x+3)^2 = -x^2+9$. Végül olyan másodfokú egyenlethez jutott, amelyet meg tudott jól oldani a megoldó képletbe behelyettesítve. Teljesítményére 2 pontot kapott 18-ból (11%).

Gabriella egy elszámolási hibát követett el a feladat megoldása közben, továbbá nem tett kikötést. Ezért 13 pontot kapott (72%).

A harmadik feladat során a tanulóknak a másodfokú egyenletek megoldó képletét kellett használniuk, hogy megoldják a $0=x^2-4x+9$ és a $0=-x^2-6x-13$ egyenleteket. Ezek a másodfokú egyenletek azért lettek kiválasztva, mert ezeknél negatív szám szerepel a megoldó képletben a gyökjel alatt a megoldás során. Az elvárásokkal ellentétben nem a gyökjel alatti negatív szám zavarta meg a tanulókat.

A harmadik feladat Mariannának, a második feladathoz hasonlóan, előjel problémát okozott. Neki a -4^2 egyenlő -16 -tal és -6^2 egyenlő -36 . Ezért 8 pontot kapott a 16-ból (50%).

Gabriella tökéletesen oldotta meg ezt a feladatot, ezért 16 pontot kapott (100%).

A negyedik feladat az $5x-3 \leq x^2+4x+3$ egyenlőtlenség megoldását foglalta magában. Az egyenlőtlenség átrendezése után, célszerű volt a bal oldalt nullára redukálni, majd az $x^2-x+6=0$ egyenlet megoldásával kiderül, hogy nincs megoldása ennek a másodfokú egyenletnek, és azt kell tovább vizsgálni, hogy mikor pozitív a másodfokú kifejezés. Ez minden értelmezéstartománybeli x elemre fennáll, ezért ezekre a fenti egyenlőtlenség mindig igaz.

Nem számítottunk másra, mint hogy a tanulók nem tudtak helyes megoldást adni erre a feladatra. Miután átrendezték az egyenlőtlenséget, megkapták a $0 \leq x^2-x+6$ egyenlőtlenséget és miután megoldották a $0=x^2-x+6$ másodfokú egyenletet, és rájöttek, hogy nincs megoldása, nem folytatták az egyenlőtlenség megoldását, hanem megálltak és ezt gondolták az eredeti egyenlőtlenség megoldásának is, hogy nincs megoldás. Ha tudták volna kötni az x^2-x+6 másodfokú kifejezést egy függvényhez és el tudták volna

képzelni a függvény elhelyezkedését a koordináta rendszerben, rájöhettek volna a helyes megoldásra.

Ezért a kutató arra a megállapításra jutott, hogy nagyon fontos szerepe van ez esetben is az ilyen típusú függvények vizuális megjelenítésének, amit a számítógép használata meggyorsít és megkönnyít.

Mindkét tanuló 8 pontot kapott 20-ból (40%).

Az utolsó feladat az alábbi egyenlőtlenség megoldását írta elő

$$2x - x^2$$

————— > 0 az egész számok halmazán.

$$2x^2 - 3x + 7$$

A tanulóknak az elvárások szerint külön-külön kellett vizsgálnia a számláló és negatív előjelét és az így kapott egyszerűbb egyenlőtlenségek megoldaniuk, majd a különböző esetszétválasztások után az egyes megoldási intervallumok közös részét, a végső megoldást megkeresni a megfelelő előjelfeltételek segítségével.

Az ötödik feladatnál Marianna elkezdte külön vizsgálni a tört számlálóját és nevezőjét. De már sajnos az első lépésben elkövette azt a hibát, hogy pozitívnak gondolta a törtet, ha a számláló és nevező ellentétes előjelű. Miután felírta az ennek megfelelő relációkat, nem tudta eldönteni, hogy folytassa a feladatmegoldást. Végül 2 pontot kapott (7%).

Ez a feladat túl nehéznek bizonyult Gabriellának, neki a leghalványabb ötlete sem volt, hogyan kezdje el a feladat megoldását. Ő 0 pontot kapott (0%).

II.III.3. A szoftverrel végrehajtott tevékenységek

Néha a feladat túl nehéz. Azért nem bír jelentéssel a tanulók előtt, mert a megértéséhez szükséges alapséma nincs jelen, ezért az ilyen tanulóknak, az értelmüknek megfelelő bonyolultságú feladatokat kell kitűzni. Más tanulók rosszul ítélik meg a feladat nehézségét és csupán egy kis segítséget, és bátorítást igényelnek ahhoz, hogy bízzanak válaszadási képességükben. Ez utóbbi eset volt igaz Gabriella és Marianna esetén. Az extra matematikaórák során gyakran úgy tűnt, hogy nincs elég önbizalmuk. Sokszor mondták, hogy „Én olyan buta vagyok matematikából!” sok bátorításra volt szükségük és többször nagy türelemmel kellett ugyanazt a megoldást elmagyarázni a bonyolultabb feladatok esetén. Gyakran bátorítottam a tanulóimat mondván mennyire nagyra becsülöm a kitartó szorgalmukat és rendületlen lelkesedésüket a számítógépes matematika órák során, amelyek látogatása nem volt kötelező.

A számítógéppel támogatott matematikaórák során, a tanulók saját bevallása szerint csökkent a feszültségük, és félelmük a matematikától. A Graphmatica szoftver felszabadította őket a fárasztó számolási munkák alól, ami elősegítette, hogy a matematikai fogalmakra és kapcsolatokra koncentrálják a figyelmüket, és ne vesszenek el a folyamatok részleteiben. Ezáltal a géptermi órák során a relációs megértésük fejlődött sokat és a tanulók egyike vidáman felkiáltott, amikor rájött az alábbi kapcsolatra: „Ez azt jelenti, hogy a másodfokú egyenlet megoldásai azok az értéke, amiket a megoldó képlet segítségével számolunk ki, amelyek pedig megegyeznek a másodfokú kifejezést reprezentáló függvény (parabola) és az x-tengely metszéspontjaival, azaz a függvény zérus helyeivel!” Ezek után nagyon elégedettnek látszott, hogy felfedezte a kapcsolatokat a különböző fogalmak között.

Mariannának azt javasoltam, hogy helyettesítsen be néhány értéket a függvényváltozó helyébe, mert ha ezután ábrázolja a függvényt, akkor ellenőrizheti, hogy jó irányban tolta-e el az alapfüggvényt a függvény transzformációk során. Továbbá elmagyaráztam a tanulóknak, hogy a megállapodások szerint

szorzásnak elsőbbsége van az összeadás felett a műveletek elvégzési sorrendjében, ezért a nyújtást és zsugorítást előbb kell elvégezni az adott feladatunk esetén, mint a vízszintes vagy függőleges eltolást.

A tanulók láthatóan szerettek eljátszozni a különböző színekkel a függvények monitoron történő ábrázolása során. Kipróbálták más függvények ábrázolását is, mint például a szinusz, koszinusz, tangens, kotangens függvényeket, ami nem volt a feladatuk. Szerettek megjegyzéseket, címkéket írni a különböző matematikai objektumoknak, ami segítette a relációs megértésüket és a 'miért' kérdésekre adandó válaszuk megtalálását. A számítógépes szoftverrel végrehajtott kísérletezéseik során felnagyították a függvények részeit és majdnem minden, a szoftver által kínált lehetőséget kipróbáltak. A számítógépek képesek megjeleníteni különböző eseteket, ami további felfedezésekre inspirálta a tanulókat. A számítógép használat egy másik előnye az volt, hogy a tanulóknak elég időt biztosít a problémák átgondolására, és arra, hogy ők maguk is kérdéseket fogalmazzanak meg a problémával kapcsolatban. Ezért, a tanulók a tények ismeretétől gondolkodással eljutnak bonyolultabb következtetéseikig. Minden kérdésük azonnal megválaszolásra, hibáik kijavításra kerültek, a magyarázatok és a visszajelzés azonnal megtörtént. Így megvalósítható az individuális matematikatanítás. Előfordult, hogy valamelyik problémát az egyik tanuló hamarabb megértette és segített a tanárnak elmagyarázni azt a tanulótársának. Ezáltal a tanulók együttműködve dolgoztak együtt. Például Gabriella ügyesebb volta függvény transzformációk végrehajtásában és segített Mariannának. Marianna pedig segített Gabriellának a számítógép kezelésében.

II.III.4. Utóteszt

Az első feladat az $y=-2x^2+5$ és $y=-(x-5)/3+3$ függvények ábrázolása volt függvény transzformációk segítségével.

Mindkét tanuló, Marianna és Gabriella tökéletesen jól oldotta meg az első feladatot, ezért 16 pontot kaptak érte (100%).

A második feladatban a természetes számok halmazán kellett megoldani a következő egyenletet $\sqrt{2-x} = -3 + \sqrt{x+7}$.

Marianna továbbra sem tudta a kéttagú kifejezést helyesen négyzetre emelni. Ezért 2 pontot kapott 18-ból (11%). Gabriella az alábbi előjelhibát vétette: $[-(\sqrt{36(x+7)})]^2 = -[36(x+7)]$. Ezért 15 pontot kapott (83%).

A harmadik feladatban a $0 = x^2 - x - 6$ és a $0 = -(x+3)^2 - 4$ egyenletek megoldását kellett megadni.

Ennél a feladatnál Marianna a következő előjelhibát követte el: $-(x+3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 5$. Ezért 14 pontot kapott 16-ból (78%). Gabriella elszámolt valamit: $-9 - 4 = -15$ a helyes -13 helyett. 15 pontot kapott (94%). Sajnos a számítógép rendszeres használatának meglehetősen az a hátránya, hogy a tanulók hozzászoknak az egyszerűbb számolások számoló vagy számítógép segítségével történő kiszámításához. A számjegyek és műveletek begépelésével azonban értékes időt veszthetnek el, ráadásul a gépelési hiba is vezethet helytelen eredményhez.

A negyedik feladatban a következő egyenlőtlenséget kellett megoldaniuk a tanulóknak: $x - 3 \geq x^2 + 4x - 6$. Mindkét tanuló jó megoldást adott és a grafikus megoldási módszert használták fel a megoldáshoz. Mindketten a maximális 20 pontot kapták (100%).

Az ötödik feladat esetében az alábbi egyenlőtlenséget kellett megoldani:

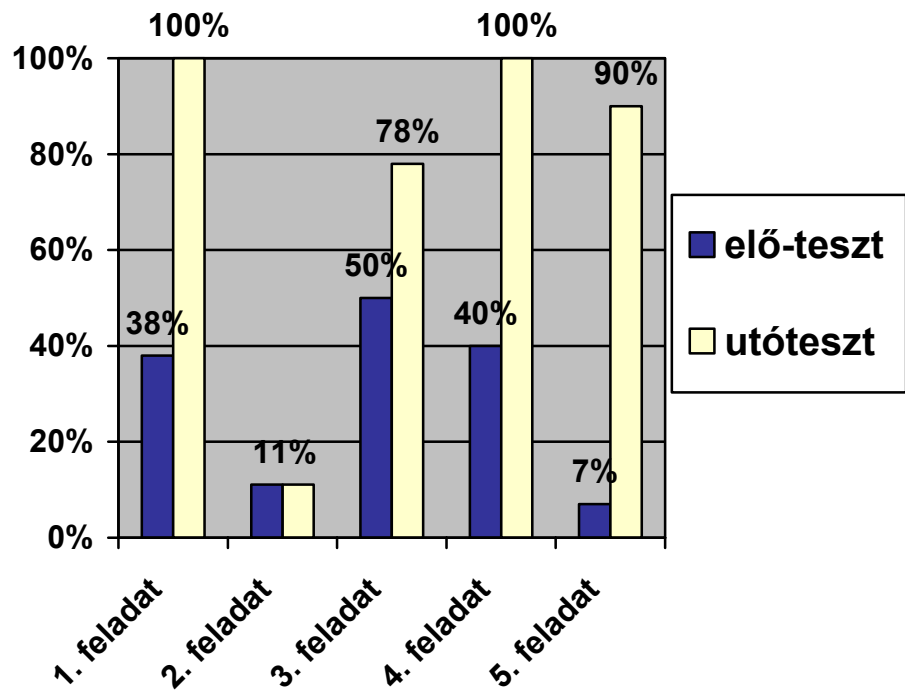
$$\frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 1} > 0.$$

Mindkét tanuló külön tanulmányozta a tört számlálóját és nevezőjét, de a közös intervallumok megkeresésével nehézségeik

voltak. Ezért a maximális 30 pontból mindketten 27 pontot kaptak, a majdnem tökéletes megoldásukért (90%)

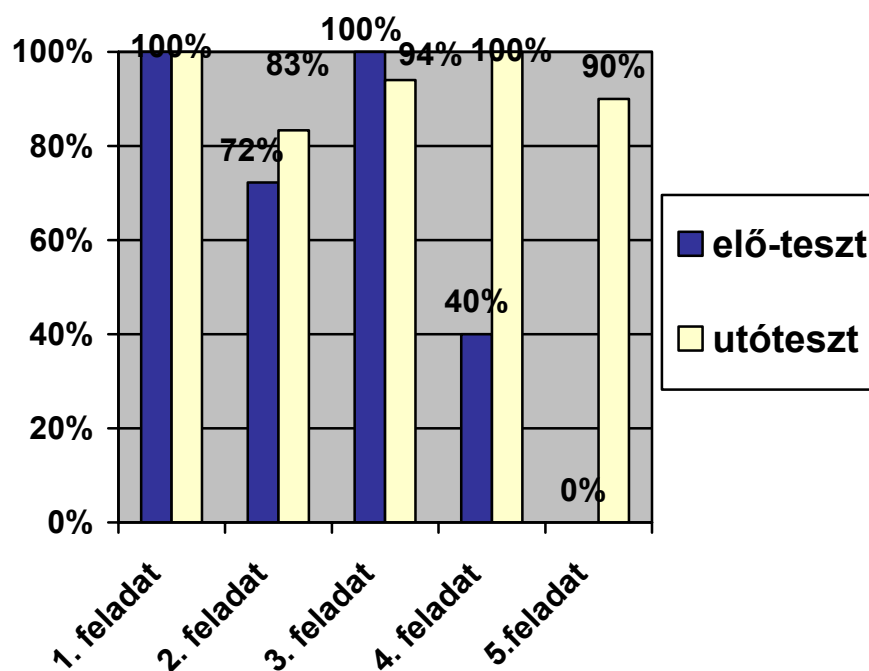
Az alábbi ábrákon (1. ábra, 2. ábra) bemutatjuk a két tanuló elő-teszten, illetve az utóteszten elért eredményeit. A számítógéppel segített hatékonyabb matematikatanításra tovább kell folytatni a bizonyítékok gyűjtését és a jelen munka folytatásaként jövőbeli kutatások szükségesek.

1. tanuló



1. ábra

2. tanuló



2. ábra

II.IV. Didaktikai észrevételek

Kutatásokat végeztünk, hogy pontosabban meghatározzuk a számítógéppel segített tanító programok hatását néhány grafikus probléma esetén. Más kutatók is foglalkoztak a kérdéssel Mackie (1992) is megállapította, hogy a számítógép használat pozitív eredményeinek hatás mechanizmusát nagyon nehéz meghatározni és Kaput (1992) szerint a technológia kritika nélküli elfogadása nem helyes. Ezért szükséges megvizsgálni, hogy a matematika mely területein lehet hasznos, és hogyan célszerű alkalmazni a számítógépeket. Kutatásainkban megpróbáltuk megérteni annak

néhány aspektusát, hogy mi újat nyújthat a technológia a matematikatanítás és tanulás során. Bemutattuk hogyan hatott a számítógéppel segített matematikaoktatás két kiválasztott tanuló matematikatudásának fejlődésére grafikus problémák esetén.

A teszt eredményei azt mutatják, hogy a Graphmatica szoftver használata a függvényábrázolás és függvény transzformációk kivitelezésének képességében jelentős fejlődést eredményezett a kísérletben részt vevő egyik tanulónál (38%-ról 100%-ra). Sőt, mindkét esetben megfigyelhetően fejlődött az esztétikai szépérzékelésre való hajlamuk a tanulóknak, mivel az utóteszt során, a elő-tesztben még nem jellemző módon, színes ábrákat készítettek a függvényábrázolás során a papíron.

A második feladat esetében a tanulók az algebrai megoldási módszert részesítették előnyben továbbra is a grafikussal szemben az egyenletmegoldás során, ezért arra a következtetésre jutottunk, hogy ennek megváltozásában a számítógépes szoftver nem bizonyult ez esetben hasznosnak és nem volt nagy hatása a problémamegoldásuk fejlődésére.

A harmadik probléma esetében az 1. tanuló hasonló előjelhibát vétett, mint a második feladatnál, bár enyhe fejlődés mégis megfigyelhető (30%-os) és a 2. tanuló is elkövetett egy kisebb számolási hibát, így az eredménye kicsit romlott az utótesztben (5%-kal).

Mivel a tanulók gyakran az algebrai megoldási módszereket részesítik előnyben, ezért érdemes nagyobb hangsúly fektetni az algebrai azonosságok bizonyítására. A matematikatörténetből ismert, hogy a matematika fejlődése során a görög matematikusok az algebrai azonosságokat geometriai úton bizonyították. Módszerük felelevenítése az iskolai matematikatanításban a tapasztalat (Dr. Kántor Sándorné, Dr. Varga Tünde; 1993-94) szerint hatékony. A szemléletes bizonyítások egyrészt előbbre hozzák a bizonyítások bevezetését, másrésztől az absztrakcióban nem jártas tanulók számára is érthetők és talán jobban megjegyezhetők is.

A szemléletes bizonyítási módszer sok esetben konkrét tevékenységhez kötődik. Modelleket, ábrákat, rajzokat készítünk,

illetve készítettünk számítógépes szoftverek alkalmazásával, látunk, de a kezünkön, szemünkön keresztül áramló információk a fejünkben, a gondolatok seregét indíthatják el. Nincs minden tanulónak szüksége a szemléltetésre, de a látott rajzok, ábrák, illetve modellek képei sokszor könnyebben rögződnek tudatunkban, mint a szavak, jobban fel tudjuk idézni őket, mélyebben maradnak bennünk. A mai világban a vizuális információk szerepe megnőtt a gyerekek életében (televízió, számítógép, videó, stb.)

Mivel a megfigyelt tanulóknak a négyzetre emeléssel, nevezetes azonosságokkal voltak gondjai, továbbá az előjelekkel a számítások során, lássunk példát arra, hogyan lehet szemléletes geometriai bizonyítást adni néhány algebrai azonosságra.

Adottak az a oldalhosszúságú sárga, b oldalhosszúságú fekete színű négyzetek és az a , b oldalhosszúságú piros színű téglalapok.

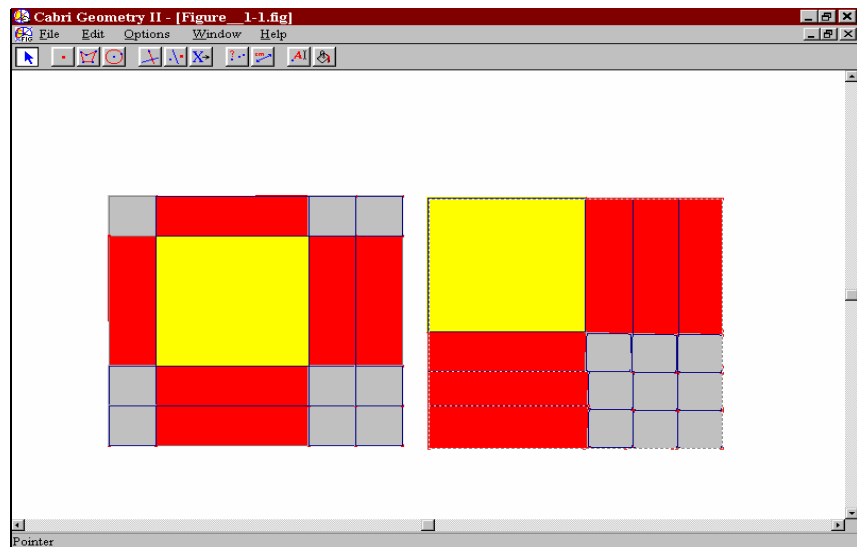
1. feladat. Készítsünk négyzetet a következő alakzatokból!

a) 1 sárga négyzet, 6 piros téglalap, 9 szürke négyzet;

b) 12 piros téglalap (amelyeket szükséges számú sárga és szürke négyzetekkel egészítünk ki).

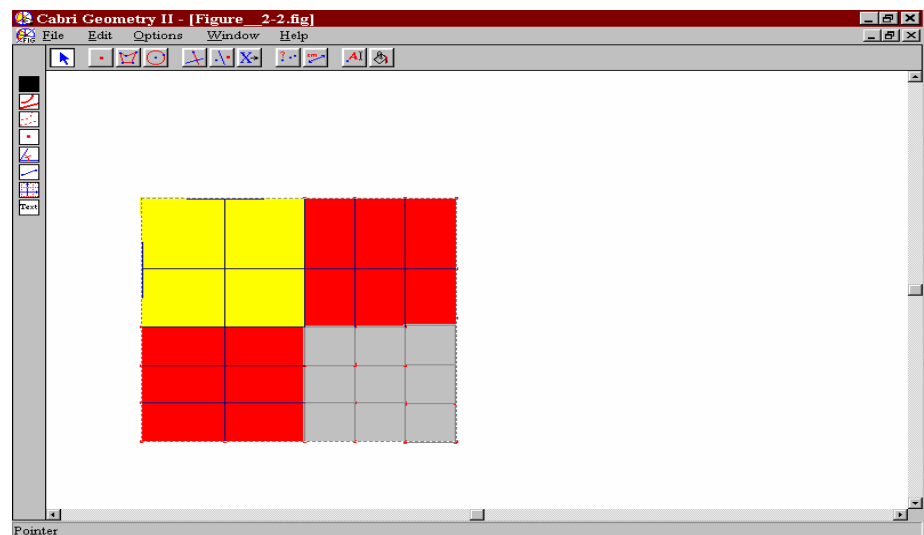
Megoldás.

1. a) $a^2 + 6ab + 9b^2 = (a + 3b)^2$



3. ábra

1. b) $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$



4. ábra

A fenti feladatok megoldásának a célja a felfedeztetés, a szabályok megsejtése, a sejtés kipróbálása, a vizualizáció, a bizonyítás igényének felébresztése. A bizonyítások végrehajtása az utolsó fázis. A felfedezéssel tanulás támogatásához a Cabri geometriai szoftvert ajánljuk, mert konkrét vizuális élményeket és manuális tapasztalatokat szolgáltat, amelyek jól használható tudásalapot építenek például a teljes négyzetté való kiegészítésnél, algebrai műveletek elvégzésénél, a nevezetes azonosságok megjegyzésénél. A feladatoknak általában nem egy megoldása van, a kirakásokat többféleképpen el lehet végezni, így teret adunk a tanulói fantáziának és kreativitásnak.

Mindkét esetben a legnagyobb fejlődés, a tanulók másodfokú egyenlőtlenségek megoldási stratégiájában figyelhető meg. Az egyszerűbb esetben (4. feladat) mindkét tanuló fejlődése 60%-os. Bár az 5. feladatban, ahol törtes másodfokú egyenlőtlenséget kellett megoldaniuk a tanulóknak, a számítógépes órák után a legfigyelemreméltóbb a tanulók fejlődése. Az elő-tesztben ötletük sem volt a feladat elkezdéséhez. De a Graphmatica szoftver használata után kombinálni tudták a grafikus és algebrai megoldási módszereket az egyenlőtlenség megoldása során. Az első tanuló fejlődése 83%-os, míg a második tanulóé 90%-os volt.

Az ilyen jellegű oktatási kísérletek pedagógiája még a fejlődő folyamatban van és további kutatásra szorul. Mindenesetre mi ezzel a kutatásunkkal is szeretnénk felhívni a figyelmet a technológia pozitív hatásainak kihasználására a matematikaoktatás különböző területein, amelynek mikéntjét további kutatásokkal, a jelen kutatást folytatva és az eredményeket kiegészítve megvalósíthatónak tartunk.

II.V. A jövő

Tapasztalataink azt mutatják, hogy a számítógép használat nagymértékben hozzájárulhat a grafikus és geometriai problémák sikeres tanításához.

A jövőbeli kutatások feladata megállapítani, hogy milyen mértékben járul hozzá a számítógépes matematika szoftverek használata a sikeres matematikaoktatáshoz és a matematika mely területein használhatók sikeresen és hogyan.

III. fejezet

A matematika versenyek hatása az oktatásra, és a számítógépek szerepe a versenyek eredményeinek feldolgozásában és hasznosításában

Ebben a fejezetben azt tanulmányozom, milyen fontos kiegészítő szerepe van a matematika versenyeknek a matematikaoktatásban. A matematika versenyeknek fel kell keltetniük a matematika tanulás iránti vágyat; vitákra kell serkenteniük, amely az ismeretlen és misztikus világ megismerését célozza, és általában véve, a tanulás szeretetét kell előmozdítania. A matematika versenyeknek azonban van egy matematika didaktikai szempontból óriási haszna, méghozzá az, hogy lehetőséget biztosítanak a tanulók által gyakran elkövetett gondolkodási hibák összegyűjtésére, rendszerezésére és a megfelelő tanulságok levonására. Ezek a kutatási eredmények rádöbbenhetik a tanárokat arra, hogy mi, és miért okoz nehézséget a tanulóknak a problémamegoldás során. A tipikus gondolkodási hibák előfordulása csökkenthető, ha a tanár számít rájuk, ha már előzetesen védekezik ellenük, amivel jelentősen hozzájárul a matematika tanítási gyakorlat hatékonyságának növeléséhez.

A fejezetet kezdjük először a matematika versenyek előnyeinek és kihívásainak tárgyalásával (Gyöngyösi; 2002).

III.1. A matematikaversenyek előnyei és kihívásai

Hogyan definiáljuk a matematika versenyek fogalmát? Először is szeretném kiterjeszteni a matematikaversenyek fogalmát. A versenyek valóban jelentős kiegészítői a matematika tanulásnak. Azonban a versenyekhez nagyon sok további tevékenység kötődik. Számos olyan tevékenységforma létezik, amelyek továbbfejlesztik a tanuló tudását és növelik a tanulás iránti érdeklődésüket. Az ausztrál matematika professzor, Peter Taylor szerint, aki előadást tartott a „Matematika versenyek és a hozzá kapcsolódó tevékenységek és szerepük a matematikaoktatásban” című (2001), a franciaországi

Toulouse-ban megrendezésre került nemzetközi konferencián, ezek a tevékenységek a következők:

- A probléma alkotás és megoldás matematikai aspektusai;
- kutatás a matematikaoktatással kapcsolatban, amely vonatkozik a versenyekre vagy az itt felsorolt tevékenységtípusaira;
- Tehetségfejlesztő kurzusok és matematikai tevékenységek;
- matematikai klubok vagy szakkörök;
- matematika táborok, amelyek során a tanulók több napon keresztül nyitott kérdésekre keresik a választ vagy kutatómunkát igénylő problémamegoldásban vesznek részt;
- diákoknak és tanároknak szóló folyóiratok publikálása, amely feladatokból álló részt, könyvismertetést, ismeretterjesztő cikkeket, matematika történeti és kortárs matematikai kiadványokat tartalmazó részekből áll;
- segédanyagok tanároknak, iskoláknak, régióknak és országoknak, ahol helyi, regionális és országos versenyeket kívánnak szervezni.

A legnyilvánvalóbb értelemben, a versenyek olyan problémákból összeállított tesztekben állnak, amelyek újdonságot nyújthatnak a tanulóknak, és amelyeket egy adott időintervallumon belül kell megoldaniuk. Habár a versenyek szervezői normál logikai okoskodást várnak el a problémák megoldása során, ennek rögzítése azonban nem szükséges, mivel általában a tesztek feleletválasztós feladatlapok. A versenyek lebonyolítását végző szervezetek nem feltétlenül iskolák vagy azok oktatási részlegei. Általában lelkes tanárokból álló, független szervezetek irányítják azokat.

A fent említett „A matematika versenyek és a hozzájuk fűződő tevékenységek és szerepük az oktatásban” konferencián részt vevő különböző egyetemeken és középiskolákban tanító matematika tanárok segítségével összegyűjtöttük a matematikaversenyek előnyös tulajdonságait és a kihívásokat, amelyekkel számolnunk kell.

Ezután, az előbb említett matematikaprofesszorok felbecsülhetetlenül értékes tapasztalatai felhasználásával megindokoljuk, hogy a matematikaversenyekkel szemben felmerülő félelmek, illetve ellenvetések miért alaptalanok.

A matematikaversenyek nyújtotta előnyök

- A versenyek ***vonzóak*** a különböző tudásszintű tanulók számára, ami ***növeli érdeklődésüket*** a matematika iránt.
- ***A valós életből vett problémákat*** kell megoldaniuk a tanulóknak, sokkal inkább, mint a pusztán matematikai környezetből kiemelt problémákat, olyan helyzetekkel tarkítva, amelyek közel állnak a tanulók világához.
- Ezek a kérdések ***automatikusan tesztelik a matematikai gondolkodás olyan általában nem mért jellemzőit***, mint például a modellezés, a nyelvi interakciók. De azért ***elvi matematikai képességeket is megkövetelnek***.
- A versenyek ***kedvező megvilágításba helyezik a matematikát, továbbá ellátják a tanárokat jó minőségű segédanyagokkal, és ezzel előmozdítják a matematika fejlődését***.
- ***A tanulók széles köre előtt nyitottak a matematikaversenyek***.
- A matematikaversenyek ***kitöltik a tananyagból hiányzó hézagokat***, egy olyan lehetőséget biztosítva a tehetséges tanulóknak, hogy ***értékelni tudják a matematika néhány gyönyörű témakörét, annak egy elméletibb, strukturális természetét***.
- A versenyek és a hozzájuk kapcsolódó tevékenységek során szerzett tapasztalatok ***növelik a tanuló egyetemi tanulmányokra történő felkészültségét***. A felsőoktatásban továbbtanulni kívánó tanulók írásbeli felvételi vizsgára való felkészülését számos feladatgyűjtemény segíti. Például, Kovács András

(Kovács, 1997) feladatgyűjteménye olyan tanulságos feladatokat és megoldásokat mutat be, amelyek ismerete leginkább közel juttatja a matematika felvételi, illetve érettségi vizsga előtt álló fiatalokat életük nagy céljának eléréséhez.

- A versenyek **problémák óriási gazdag tárházát kínálják**. A versenybeli problémák általában **élénk vitákra serkentenek** és gyakran **több különböző megoldásuk létezik, bizonyítva ezzel a matematika gazdagságát**.

Ellenvélemények

- o Néhány oktató úgy érvel, hogy a versenyek rosszak, mert *extra nyomást* gyakorolnak a tanulókra.
- o Vannak oktatók, akik úgy gondolják, hogy a versenyek *nem biztosítják az egyenlőséget*.
- o Minden tanulót egyformán kezelnek a versenyek során?
- o Bizonyos matematikaversenyek során *büntetik a rossz választadást*.
- o *A matematika versenyekben szereplő problémák túl speciálisak és bonyolult matematikai problémákat takarnak.*
- o A feleletválasztós versenytesztek szervezői nem lehetnek teljesen elégedettek egy olyan teszt felmérésével, amely *nem kívánja meg a tanulóktól azt, hogy indokolják válaszaikat*.

Válasz az ellenvetésekre

- o Nyomás
Miért okoznának extra nyomást a matematikaversenyek a tanulóknak? Érvekkel alá fogjuk támasztani, hogy számos ok miatt nem ez a helyzet. Először is, a legtöbb esetben a nevezés nem kötelező. Továbbá, a versenyek eredményei nem befolyásolják a tanulók

szokásos értékelését. Ezért a versenyeket úgy kell tekinteni, mint pozitív tapasztalatgyűjtést. A legtöbb tanulónak, a versenyek nem olyan események, amelyek során a tanulók versengenek egymással, akár csapatban, akár egyénileg (természetesen kivételt képez az elit tanulók esete). Sokkal inkább úgy kell tekinteni a versenyeket, mint az egyéni próbatételre való lehetőségeket.

o Egyenlőség

A múltban a versenyek nem biztosították az egyenlőséget, mivel csak az elit tanulóknak szervezték azokat. Viszont számos magyar matematikaverseny (Kürschák, Zrínyi, Gordiusz, Arany Dániel, stb.), a Kenguru és más nemzetközi versenyeknek köszönhetően, szerencsére ez az egyenlőséget csorbító megkülönböztetés már nem érvényes. Ezeket az úgynevezett „mindenki számára nyitott” matematikaversenyeket kétségtelenül a különböző tudásszintű tanulóknak szervezik és természetesen az átlagos képességű tanulóknak.

o Egyforma bánásmód

Ez már érdekesebb kérdés. Minden versenyzőre ugyanazok a szabályok érvényesek és a tesztlapok javítói nem tudják annak a tanulónak a nevét, akinek a feladatlapját éppen javítják. A feleletválasztós tesztek esetén pedig a válaszok egyértelműek.

o Kockázat

A feleletválasztós tesztek esetén a helytelen válaszáért pontlevonás jár. Ennek történeti oka van és nehéz lenne megváltoztatni, de ami a hivatalos okot illeti, az nem más, mint elvenni a kedvet a találgatástól. Bár nem vagyok biztos benne, hogy a találgatás szükségképpen helytelen. Ez egy bonyolult probléma. Azonban ezzel csökken az esély arra, hogy sok maximális pontszámú eredmény szülessen, és a bírónak megkönnyíti a dolgát abban, hogy kiválasszák ki a legjobb a tanulók közül.

o A témaköröket illető problémák

Az elmúlt 20 év során történtek változások a tananyagban és a matematikatanítás módszereiben. A változások legfontosabb eredménye, hogy a tanterv elméleti jellege csökkent. Az új tanterv a „felfedezésen” alapul, amely olyan tanulóknak készül, akik a tanulás minden fázisában a legmodernebb számológépekkel vannak felszerelve, amelyek segítik őket felfedezéseikben. Ezeknek a változásoknak a hatása azt célozza, hogy a tanulók szélesebb csoportja számára tegye még vonzóbbá a matematikát. De természetesen egyre inkább hiány alakul ki a tehetséges tanulók számára hozzáférhető szigorú matematikaoktatásból az iskolákban. A versenyszervezők, akik általában önként vállalják e feladatot, a formális oktatástól függetlenül dolgozva, továbbra is készítenek pedagógiai anyagokat (Kántor Sándorné, Kántor Sándor, 1999, Róka Sándor, 1992), hogy pótolják ezt a hiányt. A versenyek anyagának elkészítését néha a matematika Olimpiák anyaga inspirálja, folyamatosan fejlődik és néha teljesen eltérő formát ölt, mint a hagyományos tantervi anyag.

o Feleletválasztós versenyek

A tesztversenyek jelentősen eltérnek a „hagyományos” matematika versenyektől. Aránylag rövid idő alatt sok feladatot kell megoldani, de a megoldás menetét, az indoklást nem kell leírni. A sok feladattal a tanulók tudását sokrétűbben, átfogóbban lehet mérni. Lehetőség van igen egyszerű és nagyon nehéz feladatok egyidejű számonkérésére. Azért válhat a jó tesztverseny igazi tömegversennyé, mert nemcsak a legjobbak, hanem minden matematika iránt érdeklődő tanulónak is sikerélményt nyújt. A megoldások feldolgozása, az értékelés számítógéppel történik, ez a versenyzők nagy száma esetén is biztosítja a gyors értékelést, a teljesen objektív megítélést. Az igaz, hogy a tanulóknak nem kell indoklást írniuk, de lehetőség

van rá, hogy olyan problémákat konstruáljanak, amelyekhez valóban szükséges, hogy a tanuló közvetlenül levezesse a probléma megoldását, ahelyett, hogy találgat.

Természetesen az ilyen tesztek nem helyettesítik a hagyományos versenyeket, hanem kiegészítik azokat. Nagyon fontos témakörök, a szerkesztés, a bizonyítás ilyen tesztekkel nehezen vagy egyáltalán nem mérhetőek. A megoldások precíz leírásának, az indoklásoknak a számonkérésétől sem lehet rendszeresen lemondani.

Összegzés

A matematikaversenyek legfontosabb szerepe, hogy tartalmasabbá tegyék a matematikatanulást. Ezek a versenyek különösen ösztönző erővel hatnak a tehetséges tanulókra, de mivel minden szintű tudás mérésére alkalmas versenytesztek is kidolgozhatók, ezért az átlagos tanulóknak is alkalmat kínálnak annak megtapasztalására, hogy a matematika megfelelő környezetben szórakozást is nyújthat számukra és mindenképpen hasznos a mindennapi életükben.

Azok a tanulók tudnak majd jobban megfelelni a való élet igazi kihívásainak, akik a váratlan helyzetekben is feltalálják magukat és képesek addig még nem látott, új problémák megoldására. A matematikaversenyek óriási pozitívuma, hogy arra képezik ki a tanulókat, hogy megfeleljenek ezeknek a kihívásoknak.

A versenyek felbecsülhetetlen értékű kiegészítői a matematikaóráknak, azáltal, hogy új ötleteket közvetítenek egy felszabadultabb tanulási környezetben. A matematikaversenyek vonzóak a tanulók számára és egyre népszerűbbek is, ahogy azt az elmúlt néhány évtizedben a matematikaversenyek számának növekedése is jelzi.

Másrészt a feleletválasztós tesztek könnyen javíthatók és ez lehetővé teszi az eredmények gyors és pártatlan kiértékelését. Összehasonlító statisztikákkal szignifikáns statisztikai eredmények nyerhetők a különböző versenyzők matematikai teljesítményeiről. A tanulók eredményeinek elemzése lehetővé teszi az illető korosztályú

tanulók tipikus gondolkodási hibáinak detektálását. Mérhető egy osztályon belül bizonyos tanulói gondolkodási hibák előfordulásának gyakorisága. Sőt, különböző iskolák tanulói csoportjai is tesztelhetők és az eredmények összehasonlíthatók az országos felmérések eredményeivel. Így a tanárok tudatosíthatják saját tanítási gyakorlatuk esetleges gyenge pontjait, amely lehetővé teszi számukra azok megerősítését. Továbbá a különböző középiskolákban dogozó tanárok megoszthatják egymással hasznos tapasztalataikat, és együtt dolgozhatnak ki projecteket annak érdekében, hogy megelőzzék, vagy javítsák a tanulók gondolkodási hibáit. Valójában így járulhat hozzá minden tanár ahhoz, ami közös érdekük, a tanítás és tanulás hatékonyságának növeléséhez.

III.11 Néhány gondolkodási hiba és illusztrálása matematikai versenypéldák segítségével

Kutatásunkat az indokolja, hogy a tipikus gondolkodási hibák előfordulása csökkenthető, ha számítunk rájuk, ha már előzetesen védekezünk ellenük. Érdemes e célból megfigyelni, gyűjteni, rendszerezni, analizálni a tipikus gondolkodási hibákat. Ehhez pedig, nagy segítséget nyújt a matematikai versenyfeladatok tanulói megoldásainak a vizsgálata. A debreceni tanárok közül Barra György (1936) már foglalkozott a tesztek értékelésével: „Egy jól megszerkesztett teszt pontos és megbízható statisztika, amellyel a tanár a tanulószereget, no meg önmagét is állandóan ellenőrzés alatt tarthatja.”

Dr. Kántor Sándorné és Dr. Varga Tünde (2002) szerint a matematikaversenyek fő célja a matematikával való foglalkozás elősegítése, kedvcsinálás, a probléma megoldási készség fejlesztése, nagy tömegek mozgósítása és mindezek biztosítása a sikeresség.

Beke Manó a hibák megelőzésére ma is érvényes útmutatást adott 1900-ban: „A hibák elkerülésének vagy minimumra szállításának legfontosabb kelléke, hogy a tanár a hibát ismerje, felismerje és azok okait türelmesen keresse. E keresésnél én mindig azt az utat követtem, hogy először a magam eljárásában, azután a tárgy természetében és csak harmadsorban kerestem a növendékekben a hibát.”

Dr. Czeglédy István (1994) részletesen foglalkozik a fogalomalkotással, ismeretszerzéssel az iskolai matematika oktatásban, amely során bemutat néhány tipikus definiálási hibát és a tanár gondolkodásfejlesztő munkájának lehetséges hibáira hívja fel a figyelmet.

A középiskolai tanár tapasztalja, hogy ugyanazokat a hibákat a tanulók évről évre elkövetik, s ez a periodikus ismétlődés el kell, hogy gondolkodtassa. Nem lehet a hibákat egyszerűen a tanuló lustaságának, gondolkodási restségének tulajdonítani, hanem meg kell keresni a hibák okát, s a bajt tüneti kezelés helyett gyökerében kell gyógyítani.

A tanulók leleményesek. Olyan problémával találkozva, amelyről nem tudják hogyan kell megoldani, számukra érthető algoritmusokat hoznak létre. Ezek az algoritmusok gyakran hibás megoldásokhoz vezetnek. A hibás algoritmusok érdekes aspektusa az, hogy szisztematikusak és inkább szabályszerűek, mint véletlenek. Ezért ezek racionális, ésszerű hibaként jellemezhető megoldásokra vezetnek (Ben-Zeev, 1995a). A racionális hibáknak (Robert J. Sternberg és Talia Ben-Zeev, 1996) nagyon különleges jelentése van. Ez egy olyan eljárásra utal, ahol a tanuló először egy helytelen szabályt állít elő, majd logikailag összefüggő módon, „helyesen” folytatja azt.

Honnan származnak a racionális hibák? A tanárok nem tanítják a tanulóknak, hogyan hozzanak létre hibás algoritmusokat, a racionális hibák mégis újra és újra megjelennek a matematikai problémák tanulók által adott megoldásaiban. Az ember csakis arra következtethet, hogy a tanulók a matematika tanulás folyamatában hozzák létre saját szabályaikat. Eltekintve azonban a tanulók leleményességétől, a matematikatanítás rendszerének jelenlegi formája előmozdítja-e véletlenül, nem szándékosan azt, hogy a tanulók racionális hibákat állítsanak elő? Valójában a racionális hibák eredhetnek-e részben az iskolai valóságból, ahol a tanulók egyszerűen a jót tanulják? *Amikor a jó tanítása rossz eredményre vezet: a „jól tanított” matematikai kurzusok szerencsétlensége* című dolgozatában Schoenfeld (1988) rámutatott, hogy az a tanítás, amelyik a memorizációs ismétlést tanítja, téves értelmezések kialakításához vezetnek.

A tanulók saját algoritmusaikat annak ellenére, és gyakran azzal ellentétesen alkotják meg, amit a tanár szándékozott végeztetni velük. A tanulók azonban jól tanulják meg azt, amit a tanár tanít. Vagyis, a tanulók „túl jól” tanulhatnak, és így túlépítkézhetnek a kapott tanításból. Például, ha egy kivonási algoritmust gépiesen, szimbólumvezérelt gyakorlatként tanítottak meg, akkor ez úgy nyer értelmet a tanulók számára, hogy a számjegyek pozíciójától függetlenül ki kell vonni a nagyobb számjegyből a kisebbet, mert az egyjegyűek esetén a kivonás mindig a nagyobb jegyből a kisebb jegy elvételét jelentette, és ráadásul ez jól működik. Ezért a tanulók hibás matematikai gondolkodása „helyes” abban az értelemben, hogy szisztematikus szabályokat követ. A hibás szabályok viszont olyan eljárásokon alapulnak, amelyek eredményesek voltak az előzetes problémamegoldások során. Az eljárásokat véletlenül taníthatták a tanteremben, vagy lehetnek a tanulók egyéni megközelítésének eredményei, esetleg a kettő kölcsönhatása. Ha ez az érvelés igaz, akkor példákat kell látnunk arra, hogy ahol ugyanazok az eljárások, amelyek a helyes tanuláshoz az alapját alkotják, bizonyos körülmények között hibás teljesítményhez vezetnek. A matematikai gondolkodás helyes megszerzésének alapjául szolgáló négy mechanizmus: a példákra alapuló indukció (Anderson, 1993; Ben-Zeev, 1995a; Holland, Holyoak, Nisbett és Thagard, 1986; Simon és Zhu, 1988; VanLehn, 1986), az analógiás gondolkodás (Anderson és Thompson, 1989; Gick és Holyoak, 1980, 1983; Novick, 1988; Novick és Holyoak, 1991), a séma alapú gondolkodás (Davis, 1982; Hinsley, Hayes és Simon, 1977; Mayer, 1982, 1985; Riley, Greeno és végül Heller, 1983; Ross, 1984) , a korrelációs gondolkodás (Lewis és Anderson, 1985).

Ezeket a mechanizmusokat és a matematikai gondolkodás racionális hibáinak új taxonómiáját (REASON) bővebben Robert J. Sternberg és Talia Ben-Zeev (1996) írta le tudományos munkájában.

A matematikai gondolkodás helyes megszerzésének, és azon körülményeknek vizsgálata, amelyek esetén ez hibás teljesítményhez vezet, nem csupán elméleti nézőpontból fontos, hanem a tanítás szemszögéből is. Ahhoz, hogy a tanulóknak megtanítsuk a matematikai jártasságok helyes megszerzésének módját, hozzá kell jutni azokhoz a körülményekhez, amelyek esetén

a tanulók hajlamosak a hibák elkövetésére. Ezért tartjuk hasznosnak a versenyfeladatok tanulói megoldásainak elemzését, amelyek során veszítenivaló nélkül döbbenhetnek rá a tanulók arra, milyen hibákat hajlamosak elkövetni a matematikai problémamegoldás során. Elsősorban azokat a hibákat elemeznénk, amelyek javításában nagy szerepet szánnánk a matematikai szoftverek használatának.

a) Induktív gondolkodáson alapuló hibák

A MATEMATIKAI GONDOLKODÁS INDUKTÍV TERMÉSZETE

A problémamegoldás irodalmában egyetértés mutatkozik abban, hogy a tanulók a kidolgozott példák tanulmányozásán keresztül induktívan tanulnak (Anderson, 1993; Simon és Anzai, 1979; Simon és Zhu, 1988; VanLehn, 1986, 1990). Azaz, a kidolgozott példa lépéseit követve általánosíthatják vagy elvonatkoztathatják az adott készség helyes eljárását, különösen, ha az adott példa inkább specifikus, mint általános (Sweller és Cooper, 1985; VanLehn, 1990), továbbá a tanulók képesek magyarázatokat gyártani a tanulási folyamat során (Chi, Bassok, Lewis, Reimann és Glaser, 1989; Chi és VanLehn, 1991; VanLehn, Jones és Chi, 1992).

A tanulók kidolgozott példákba vetett bizalmát számos tanulmány bemutatta. Közelebbről, ha a tanulók választási lehetőséget kaptak kidolgozott példák, vagy ehelyett leírt utasítások és magyarázatok használatára, túlnyomó többségben az előbbit választották (Anderson, Farrell és Sauers, 1984; LeFevre és Dixon, 1986; Pirolli és Anderson, 1985). Továbbá LeFevre és Dixon úgy találta, hogy a tanulóknak egymásnak ellentmondó utasításokat adva (a leírt utasítások az illusztrált példától különböző eljárás végrehajtását kérték), a tanulók többsége inkább a kidolgozott példában bemutatott eljárást követte, annak megértése nélkül, hogy amit tesz, az logikailag problematikus.

AZOK A FELTÉTELEK, AMELYEK ESETÉN AZ INDUKTÍV GONDOLKODÁS HIBÁHOZ VEZET

Bizonyos feltételek mellett a helyes tanulást elősegítő induktív folyamatok hibás megoldásokhoz is vezethetnek. Valóban, a tanulók hibás megoldásai alátámasztják azt a gondolatot, hogy a tanulók túl

általánosítják, vagy leegyszerűsítik azokat a megoldásokat, amelyek egy adott terület szokásos példáiból származnak. Ezt a munkát leginkább VanLehn (1986, 1990) mozdította előre, és a további részletes kidolgozást Ben-Zeev (1995a) hajtotta végre. Brown és VanLehn (1980) algoritmusjavítási elmélete úgy érvel, hogy a tanulók egy olyan problémát kutatva, amelyet nem tudnak hogyan megoldani, nem hagyják abba a munkát, ehelyett létrehoznak egy olyan kijavított algoritmust, amely továbbviszi őket. Mivel ezek az algoritmusok gyakran helytelenek, „hibás” megoldásokat eredményeznek.

VanLehn (1986) megmutatta, hogy a tanulók a hibás algoritmusokat szintén leegyszerűsítik, vagy túláltalánosítják azokból a kidolgozott példákból, amelyeket a tanulási folyamatban kapnak.

Példa.

1. Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik az, amely egyetlen x -re sem igaz?

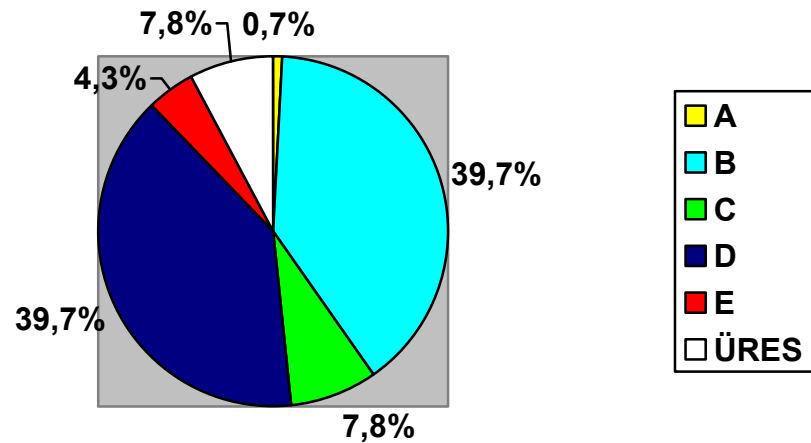
(A) $x/3 < x$ (B) $x > x^2$ (C) $(1-x^2)^{1/2} \geq x^2$ (D) $(1-x)/(x-1) < -1$ (E) $|x| > x$

Túláltalánosítási hibaként értelmezhető a (B) választ adó tanulók hibája. Egy középiskolásoknak megrendezett feleletválasztós tesztversenyen¹ a résztvevők 39,7%-a választotta ezt a rossz megoldást és 39,7%-uk választotta a helyes (D) választ, a többiek pedig a többi helytelen válasz közül választottak, illetve 7,8%-uk semmilyen választ nem adott a kérdésre. A (B) rossz választ adó

¹ A Zrínyi Ilona Matematikaverseny mintájára, annak folytatásaként rendezték meg matematikából 1996-ban a feleletválasztós tesztversenyt középiskolásoknak. Az említett feladat ezen versenyfeladatok közül a II. évfolyamos tanulóknak feladott 9. versenyfeladat volt.

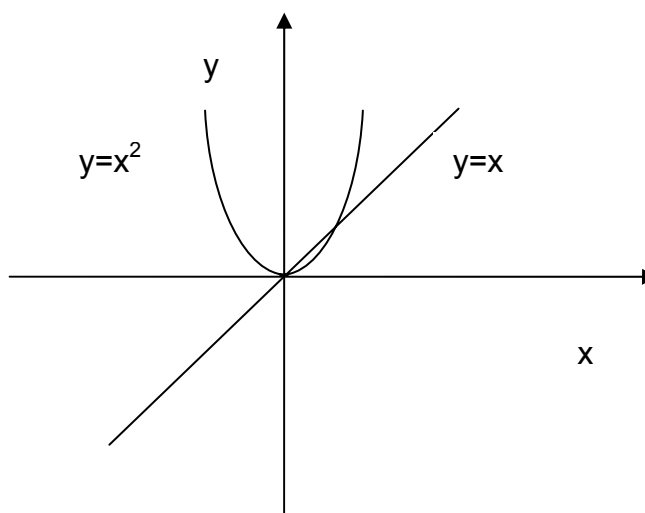
1996 februárjában mintegy 600 középiskolás részvételével került megrendezésre a megyei matematikaverseny Baranyában. A kedvező fogadtatás után 1997-re meghirdették azt a kétfordulós (megyei verseny, országos döntő) viadalt, amely a GORDIUSZ Matematikaverseny elnevezést kapta. Ezen tíz megye 2646 versenyzője írta meg az első forduló feladatsorait. A Pécsen megrendezett országos döntőre 115 versenyzőt hívtak meg. A versenyen minden tanulónak 30 feladatot kellett megoldania 90 perc alatt. A feladatlapon a feladatok után öt válasz (A, B, C, D, E) található, amelyek közül pontosan egy helyes. A versenyen számológép használható, de más segédeszköz (könyv, függvénytáblázat, vonalzó, körző, stb.) nem.

diákok szerint egyetlen x sem lehet nagyobb x^2 -nél. Ők túláltalánosítják azt a szabályt, hogy x^2 csak nagyobb lehet minden x esetén, de ez csak abban az esetben igaz, ha $x > 1$ vagy $x < 0$. Azok a tanulók, akik konkrét értékeket próbálgatnak és a $0 < x < 1$ intervallumon kívül tekintenek x értékeket, induktív módon arra a hamis következtetésre jutnak, hogy $x < x^2$ minden x -re.



5. ábra

A hiba javításához elegendő ellenpéldát mutatnunk, például a pozitív, 1-nél kisebb törtszámok közül, vagy látványosabbá tehető a helyes megoldás, ha felrajzoltatjuk egy koordináta rendszerben az x és az x^2 függvényeket és összehasonlítjuk e két függvény grafikonját.



6. ábra

Az ellenpéldák szerepének fontosságát a problémamegoldásban Lakatos Imre, Pólya György kutatási eredményeit felhasználva, részletesen kifejtette a *Bizonyítások és cáfolatok* (1998) című tudományos munkájában.

Sajnos az oktatásban az ellenpéldák nem töltönek be megfelelően kiemelt szerepet, pedig az ellenpéldák nagy szerepet játszanak mind a hibás gondolkodás okainak feltárásában, megértésében, mind pedig a gondolkodás fejlesztésében, ezért lényegesen kiemeltebb szerepet kellene játszaniuk a matematikaoktatásban.

b) A helytelenül feltételezett analógián alapuló hibák

A MATEMATIKAI GONDOLKODÁS ANALÓGIÁS TERMÉSZTE

Az induktív gondolkodás egyik speciális fajtája – az analóg gondolkodás – kitüntetett figyelmet kapott a megismerést általában és a matematikai gondolkodást speciálisan vizsgáló kutatás során. Ezért, bár az analóg gondolkodás az induktív gondolkodás speciális esete (l. szintén VanLehn, 1990), mégis önálló értelmezést érdemel.

Az analógia és indukció a matematikai gondolkodásban betöltött szerepéről bővebben Pólya (1988) könyvében lehet olvasni.

Egy új probléma (a „cél”) analógián keresztüli megoldásának folyamatában a tanuló előhív egy hasonló problémát, amelyet már a múltban (a „forrás”) sikeresen megoldott, majd ezután a megoldás elérése céljából hozzálát a két probléma közötti *leképezés* megvalósításához (Gentner, 1983; Holyoak és Thagard, 1989b). A megfelelő forrásprobléma megtalálása azonban nem könnyű feladat. Ahhoz, hogy valamely problémát analógia forrásaként tudjunk használni, fel kell ismerni a célproblémához való hozzátartozását, relevanciáját. Az analógiás gondolkodás kihívó feladattá válik, amikor a forrás és a cél egy „mély” hasonlóságban osztoznak (azaz ugyanazon az elven működnek), de felszíni jellemvonásaikban különböznek.

Az analógián alapuló problémamegoldás irodalmának rendkívül lényeges mondanivalója van a matematikai gondolkodás számára is. Novick és Holyoak (1991), egyetértve Holland és munkatársaival (1986), továbbá Holyoak és Thagarddal (1989a) összhangban, megmutatták, hogy a matematikai szöveges problémák analogikus feltérképezésének végeredménye egy séma vagy egy sor absztraktabb szabály indukciója, ami a forrás és a célfeladat közötti kapcsolatot testesíti meg. Hasonlóképpen, Novick és Holyoak megmutatták, hogy egy matematikai szöveges probléma (kerttel kapcsolatos feladat) célproblémába történő leképezésének eredménye általánosabb eljárásokat eredményez (az „LCM eljárást”).

Az a gondolat, hogy az analógiai gondolkodás elvontabb struktúrákat eredményez, Anderson és kollégáinak munkájában is kifejeződik (Anderson, 1993; Anderson és munkatársai, 1984; Anderson és Thompson, 1989; Pirolli és Anderson, 1985). Anderson és Thompson analógián keresztüli probléma-megoldási elmélete (PUPS) úgy érvel, hogy amennyiben a forrás és a célprobléma közötti analógia sikeresnek bizonyul, a kinyilvánított struktúra sok más szabály esetén működőképpessé válik. Az ilyen proceduralizált tudás a jövőben hatékonyabb problémamegoldást tesz lehetővé, mert nem kívánja a megoldási útvonal kezdetektől vett újraépítését.

AZOK A FELTÉTELEK, AMELYEK MELLETT AZ ANALÓG GONDOLKODÁS HIBÁKHOZ VEZET

Két fő oka lehet annak, ha az analógia nem jól működik: az első akkor jelenik meg, amikor a tanuló nem megfelelő forrásproblémát

használ, a második a forrás- és célproblémák közötti nem megfelelő leképezés eredménye. Például, amikor a tanuló egy új matematikai problémát próbál megoldani, az emlékeztetheti őt egy szokásos problémára, ami hasonló felszínt mutat, de mély struktúrája más. Egy forrásprobléma nem megfelelő megkeresését Ross mutatta be (1984). Ross főiskolai hallgatókat tanított kidolgozott példákat használva olyan elemi valószínűség számítási feladatok megoldására, amelyek különféle elveket kívántak (pl. permutációt). Minden egyes példa speciális tartalomhoz kapcsolódott (pl. dobókockák). Ross úgy találta, hogy amikor a tanulóknak új problémák megoldását tűzte ki, azok az adott probléma tartalmát ahhoz a speciális valószínűségi elvhez kapcsolják, amellyel ez a tartalom jelent meg kidolgozott példaként. Lényegében, a tanulókat elsődleges elvként a kapcsolódó tartalom emlékeztette és ezért tévesen döntöttek ugyanazon elv alkalmazása mellett az új probléma esetén.

A hibák másik típusát – nevezetesen a nem megfelelő leképezés megvalósítását – Anderson mutatja be (1989) az analogikus eredetű hibákról szóló munkájában.

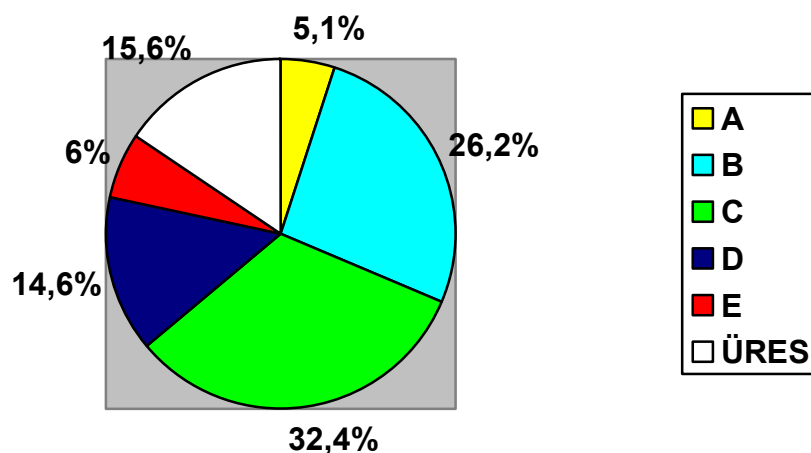
Mi különbözteti meg azokat a tanulókat, akik képesek megfelelő analógiákat alkalmazni, azoktól. Akik nem tudnak? A válasz a tanulók tapasztalatában keresendő. Úgy tűnik, hogy a kezdők főképpen hajlamosabbak olyan hibákat véteni, amelyek forrás- és célproblémák közötti felszíni-strukturális hasonlóságokon alapulnak, míg a tapasztaltabbak jobban ügyelnek a mély-strukturális motívumokra (Novick, 1988; Schoenfeld és Hermann, 1982). A kezdők és tapasztaltak közti különbségek más tanulási területeken is demonstrálhatók, mint például a fizikában és a sakkban (Chi és munkatársai, 1981; Simon és Chase, 1973).

Példa

2. Hány valós megoldása van az $x^2 - 1997|x| = 0$ egyenletnek?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

A Gordiusz Matematikaverseny² résztvevőinek 32,4%-a választotta a (C) helytelen választ és csupán 26,2%-uk választotta a helyes (B) választ, 15,6%-uk nem válaszolt, 14,6%-uk választotta a (D) helytelen választ, a többiek pedig a többi rossz válasz valamelyikét.



7. ábra

A hiba oka az lehet, hogy a tanuló a régebben megismert fogalmakból zárt rendszert csinál, amelyet élesen szeparál az újonnan megismert fogalmaktól, vagyis a jelen példa esetén a tanulók az $|x|$ -et azonosítják az x értékkel, így nem vizsgálják azt az esetet, amikor x értékei negatív számok. Így nem kapják meg az összes jó megoldást. Azt a forrásproblémát azonosítják be a célproblémával, amikor az értelmezési tartomány a nem-negatív számok halmaza, de ez a célproblémát tekintve leszűkítése a teljes számhalmaznak. Így a megoldást is a szűkebb számhalmazon keresik, ami megakadályozza a probléma minden megoldásának a

² A Gordiusz Matematikaverseny 1997 I. fordulóján a II. évfolyamos tanulóknak kiadott 9. feladat.

megtalálását. Az ilyen hibák megelőzése is, javítása is nehéz feladat, hiszen a rossz szokásról leszokni nagyon nehéz, csak türelemmel, lassú szoktatással lehetséges. Emiatt nagyon fontos e hibák ismerete. Ezeknek a hibáknak a fogadására a tanárnak fel kell készülnie, s a számfogalmak bővítésekor az új fogalmat nemcsak kialakítani kell, de a régivel szerves egészbe össze is kell kapcsolni. E nélkül, a fenti hibák a további munkában akadályt jelentenek. Ezen hibák javításánál is nagyon fontos a szemléltetés.

Az ábrák szerepét a matematikaoktatásban már sokan, sokszor és sokféleképpen hangsúlyozták (Varga Tamás, (1969), Kántor Sándorné, 1995-1996) és valóban nagy segítség lehet a szemléltetésben, de vigyázni kell, mert a rosszul felrajzolt, vagy értelmezett ábrák szintén hibás gondolkodáshoz vezetnek.

c) A séma alapú gondolkodás okozta hibák

A MATEMATIKAI GONDOLKODÁS SEMATIKUS TERMÉSZETE

A megismerésben és az emlékezésben a sémákat értelmi mechanizmusokként posztulálják, amelyek a környezetből beérkező információkat szervezik (Bartlett, 1932; Piaget, 1965; Schank és Abelson, 1977). A sémák hasonlóan fontos szerepet játszanak a matematikai problémamegoldásban is (Mayer, 1985).

Például, a korai aritmetikai gondolkodásban a tanulók azért építenek a sémákra, hogy sikeresen oldjanak meg szöveges feladatokat. Greeno (1980), valamint Riley és munkatársai (1983) azt vetették fel, hogy a gyerekek háromféle modellt fejlesztenek ki az aritmetikai szöveges problémák megoldására. Ezek a típusok a *módosító* (Joe-nak van néhány játékgolyója. Aztán Tom ad neki még 5-öt. Így most Joe-nak 8 játékgolyója lesz. Hány golyója volt Joe-nak kezdetben?), a *kombinációs* (Joe-nak 3 játékgolyója van, Tomnak pedig 5. hány golyójuk van kettőjüknek együtt?) és az *összehasonlító* (Joe-nak 3 játékgolyója van. Tomnak 5 golyóval több van, mint Joe-nak. Hány játékgolyója van Tomnak?),

Riley és munkatársai (1983) szerint a gyerekek egy „részegész” sémára tesznek szert az ilyenfajta szöveges problémák megoldásában, mint „Joe-nak van néhány játékgolyója. Aztán Tom ad neki még 5-öt. Így most Joe-nak 8 játékgolyója lesz. Hány golyója volt Joe-nak kezdetben?”, a gyerekeknek meg kell különböztetniük

az egészet a részeitől. A rész-egész séma Joe jelenlegi játékgolyóinak a számát (az egészet) kapcsolja a Tom által nekiadott játékgolyók számával (az ismert rész) és a nála eredetileg volt játékgolyók (az ismeretlen) számával.

Resnick (1989) továbbá úgy vélekedett, hogy a rész-egész séma az iskolát megelőző tapasztalatokból ered. Azaz azt állítja, hogy az iskolába még nem járó gyerekek a hétköznapi események alapján kifejlesztenek protokvantitatív rész-egész sémát. Például az iskolába még nem járók tudják, hogy két mennyiséget összeadva az összeadandók mindegyikénél nagyobbat kapunk. Ez a tudás lehetővé teszi, hogy a gyerekek rész-egész kapcsolatokról ítéljenek, mint például: egy torta nagyobb, mint bármely szelete.

A gyerekek az első néhány osztályban több nehézséget tapasztalnak az összehasonlítási problémákkal, s nem csupán a rész-egész kapcsolatok megértésének hiánya miatt, hanem azért, mert az összehasonlítási problémáknak sokkal összetettebb szemantikai struktúrája van, mint más szöveges feladatoknak. Hudson (1983) munkáját követve, Riley és Greeno (1988) azt állították, hogy ha a szöveges feladatokat különbözőképpen fogalmazzuk, olyan formában, hogy a gyerekek kapcsolódásokat tudnak teremteni (például ahelyett, hogy „Mennyivel több?”), akkor még az egészen kis gyerekek is képesek megoldani ezeket a feladatokat, sokkal hamarabb, mint ahogy azt lehetségesnek gondolnánk. Ezért a matematikai szöveges problémák sémakeresztése többet foglal magában a helyes számolási képességnél, és olyan tényezők is hatással vannak rá, mint a szemantika és a nyelv (l. még Kintsch és Greeno, 1985).

A sokkal nehezebb algebrai szöveges problémák területén a sémák ezen kívül is fontos szerepet játszanak. Hinsley és munkatársai (1977) megmutatták, hogy középiskolások és főiskolai hallgatók különböző típusokba képesek kategorizálni a matematikai problémákat a probléma első néhány szavában tartalmazott információk alapján. Például, az „Egy folyami gőzös...” kezdetű problémák „a folyó” problémaosztály visszakeresésére adtak utasítást. Lényegében a problémák sajátos jellegzetességei egy sokkal általánosabb megoldásmintára utasítottak.

Mayer (1981, 1982) további bizonyítékokkal szolgál a sémáknak a matematikai szöveges problémák megoldása során

történő felhasználására. Mayer az algebrakönyvek elemzése alapján azt tapasztalta, hogy több mint 100 problémátípust lehetett megkülönböztetni. Egy későbbi vizsgálatában Mayer különböző típusú szöveges feladatokat tűzött ki a résztvevőknek. A problémák között egyaránt volt kis és nagy gyakoriságú (a gyakoriság arra utal, hogy a problémátípus mennyire volt általános az algebrakönyvekben). Mayer arra kérte a vizsgált személyeket, hogy olvassák el, majd aztán idézzék fel a problémákat. Azt tapasztalta, hogy amikor a vizsgált személyek alacsony gyakoriságú problémákat próbálnak felidézni, gyakran változtatják ezeket a szokásosabb nagy gyakoriságú formákká. Ez az eredmény azt a gondolatot támasztja alá, hogy a nagy gyakoriságú problémák több jól képzett sémával kapcsolódnak, és ezért a kevésbé szokásos problémátípusok visszaidézésének is alapját alkotják.

AZOK A FELTÉTELEK, AMELYEK MELLETT A SÉMA ALAPÚ MATEMATIKAI GONDOLKODÁS HIBÁKHOZ VEZET

Amint láttuk, a séma alapú gondolkodás a matematikai tapasztalatok szervezésének hasznos módja. Ám a séma merev alkalmazása esetén az előnyei hátrányokká válhatnak. E jelenség meglepő példáját adta Paige és Simon (1966). Olyan feladatokat adtak a tanulóknak, amelyek logikailag lehetetlenek. Például:

egy ember negyeddollárosainak száma hétszer annyi, mint a tízcenteseinek száma. A tízcenteseinek értéke két és fél dollárral több, mint a negyeddollárosaié. Hány darab pénzürméje van az egyes fajtákból?

Paige és Simon azt tapasztalták, hogy a vizsgálatban szereplők közül néhányan a $Q=7D$ és a $0,10D=2,5+0,25Q$ egyenletek felállításával fogtak hozzá a probléma megoldásához, annak felismerése nélkül, hogy ez nem teljesül. Lényegében egy helyes sémát hívtak segítségül, és azt nem megfelelő környezetben alkalmazták. Megjegyezzük azonban, hogy e vizsgálat egy lehetséges kritikája az, hogy a tanulóknak a szándékosan félrevezető feladatok helyett rendszerint „igazi” problémákat adnak. Ezért Paige és Simon vizsgálatában a tanulók a saját megértésükben kételkedhettek a problémák érvényességének megkérdőjelezése helyett.

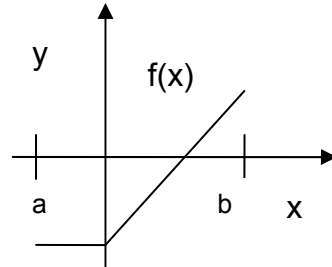
Az utóbbi időben Davis (1982) mutatta meg, hogy azok a helyes sémák (vagy az ő terminológiájával *keretek*), amelyeket helytelen környezetben használnak, racionális hibákhoz vezetnek. Például Davis úgy érvelt, hogy a tanulók egy helyes „mértékegységes vagy címkéző sémát” hoznak létre az olyan egyenlőségekkel foglalkozva, mint „12 inch=1láb”. Azt állította, hogy e keret nem helyénvaló, használata olyan hibákat eredményez, mint a mindennapos „megfordítási hiba” (Rosnik és Clement, 1980), ahol a tanulók helytelenül jelentik ki, hogy „6H=O”, a „6O=H” helyett a következő feladatban:

Egy főiskolán hatszor annyi hallgató van, mint oktató. Írjon fel egy egyenletet, amely megadja a hallgatók (H) és az oktatók (H) száma közötti összefüggést.

A sémák rossz felhasználását a matematikai gondolkodás során szépen illusztrálta még ezen kívül Matz (1982) munkája is a tanulók algebrai problémamegoldásáról. Matz azt vetette fel, hogy a tanulók alulspecializált sémákat állítanak elő a tanulási folyamat során. Például, amikor a tanulók megtanulják a szorzás $A(B+C)=AB+AC$ disztributív tulajdonságát, a következő sémát alkotják $\square(X\Delta Y)=\square X\Delta\square Y$. Ez a séma alulspecializált, mert néhány operátorral kitöltve a hiányzó helyeket téves összefüggéshez jutunk.

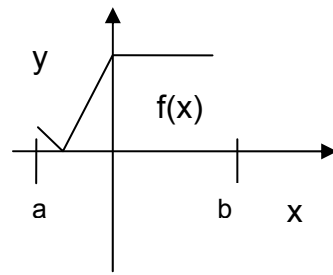
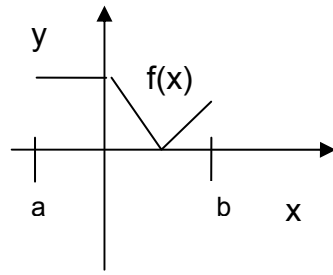
Példa

3. Ha adott az $f(x)$ függvény grafikonja, akkor az $|f(-x)|$ grafikonja:

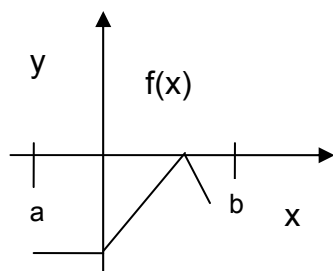


(A)

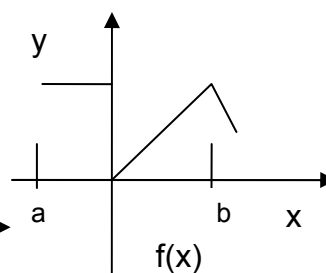
(B)



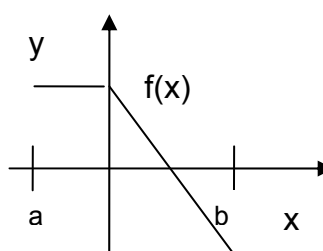
(C)



(D)



(E)

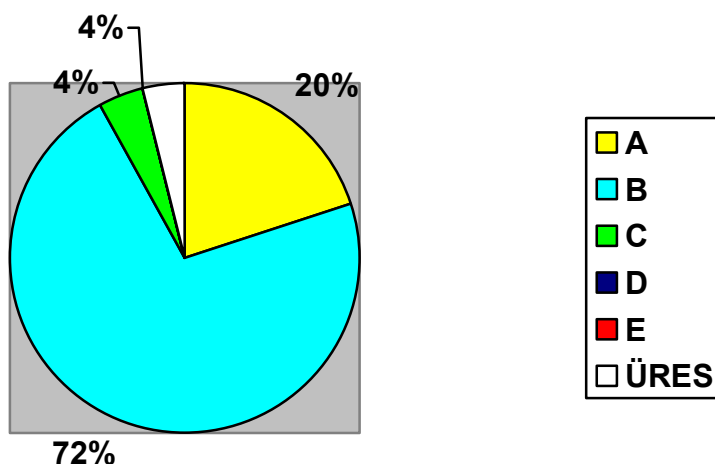


8. ábra

A Matematikaverseny³ résztvevőinek 20%-a választotta a helytelen (A) választ, 72%-a jó választ (B) adott. A hibásan válaszolók elkövetik azt a hibát, hogy $f(-x) = -f(x)$ összefüggést igaznak vélik, vagyis a függvény f jelét betűnek tekintik és az algebrai feladatoknál megszokott betűvel való szorzás műveletét hajtják végre. E hiba javítható, ha ellenpéldával szemléltetjük az állítás helytelen voltát.

³ A Gordiusz Matematikaverseny 1997 Döntőjén a IV. évfolyamos tanulóknak kiadott 15. feladat.

A feladat helyes megoldásához érdemes konkrét függvényt és konkrét értékeket tekinteni.



9. ábra

d) A korrelációs gondolkodás okozta hibák

A MATEMATIKAI GONDOLKODÁS KORRELÁCIÓS TERMÉSZETE
Lewis és Anderson (1985) azt állították, hogy a matematikai tankönyvek gyakran tartalmaznak korrelációkat a problémák specifikus jellemvonásai és a problémák megoldásai során használatos operátorok között. Például, azokat a geometriai problémákat, amelyek a háromszögek egybevágóságának két oldal és az általuk közbezárt szög alapesetét tartalmazzák, gyakran úgy adják meg, hogy az két oldalt és egy szöget tartalmaz.

Mivel a geometriai problémák bizonyos jellegzetességei gyakran mutatnak összefüggést egy speciális algoritmussal, illetve operátorral, ez alkalmas a tanulók számára ahhoz, hogy a továbbiakban építsenek ezen jellemvonás-operátor korrelációra annak előrejelzésére, hogy milyen stratégiát használjanak az adott problémában. Annak a hipotézisnek az ellenőrzésére, hogy a tanulók ilyen módon használják a jellemvonás-operátor korrelációkat, Lewis és Anderson (1985) egy geometriai problémamegoldásokkal

kapcsolatos vizsgálatot végzett, amelynek volt egy tanulási és egy tesztelési szakasza. A tanulási szakaszban a tanulókat aktív (azaz hipotéziseket előállító és visszajelzéseket kapó) és passzív (azaz visszajelzés nélküli, papír-ceruza tesztet megoldó) csoportokra osztották. Mindkét csoport olyan geometriai problémákat kapott, amelyek nagy korrelációt mutattak egy egybevágósági alapeset (például két oldal és a közbezárt szög) és a probléma sajátos jellemvonása között (például csúcsszögek). Az ellenőrzési szakasz ugyanaz volt az összes tanuló számára. Egy képernyőn egybevágósági problémákat mutattak be nekik egy rövid időre, majd arra kérték őket, hogy „találgatással” adják meg a probléma megoldásához szükséges alapesetet.

Az eredmények azt mutatják, hogy a tanulási szakaszban aktív tanulók a találgatási szintnél jobban teljesítettek. Azaz, képesek voltak a jellemvonás-operátor korrelációt felhasználni a problémák megoldásához szükséges helyes stratégia kitalálásához.

AZOK A FELTÉTELEK, AMELYEK ESETÉN A KORRELÁCIÓS GONDOLKODÁS HIBÁKHOZ VEZET

Ha a tanulók korrelációsan gondolkodnak, akkor hamis korrelációkra is rátalálhatnak, amelyek nyomán hibákat követnek el. Bár a tanár vagy a tankönyv megtervezhette valamely speciális eljárás vagy fogalom illusztrálását, a tanuló egy teljesen más szabályt hozhat létre, mint amit a tanár szándékozott. Egy kidolgozott példa vagy a példák egy csoportja hamis korrelációt tartalmazhat egy különös jellemvonás és egy specifikus algoritmus között, amelyet a tanuló hibás szabályként vonatkoztat el.

Az egyik különösen meggyőző példa egy középiskolai geometriaóráról származik, ahol a tanulókat arra kérték, hogy polinomokat kapcsoljanak függvényekhez (Dugdale, 1993). A tanulók abban az osztályban a parabola y-tengelymetszete és csúcspontja felcserélésének hibáját követték el. Ezért, ha az y-tengelymetszet – 0,6-nál, és a csúcs – 1-nél volt, azok a tanulók, akik elkövették ezt a hibát, úgy vélték, hogy a függvény kifejezése $y=x^2-1$ alakú. Dugdale szerint y tengelymetszet és a csúcs közötti felcserélés megmagyarázható azzal a ténnyel, hogy a tanulók számára előzetesen adott példákban az y-tengelymetszet mindig egybeesett a parabola csúcsának helyével. A tanulók ezáltal működő invarianciát

alkottak az y-tengelymetszet és a csúcs helye között, ami ugyan hibás, de szabályon alapuló módszer.

A hamis korrelációkba vetett bizalom racionális lehet. Azaz, ha erős korreláció van egy jellegzetesség és egy algoritmus között, akkor hatékony azt a korrelációt egy szabályba elvonatkoztatni. A kidolgozott példák gyakran megerősítő jellegűek. Azaz bemutatják, hogy egy jellemvonás korrelál egy sajátos algoritmussal, de nem mutatják, hogy ugyanaz a jellemvonás hogyan képes korrelálni egy alternatív algoritmussal.

Példák

4. Egy ember x km-t tesz meg nyugati irányban, majd balra fordul 150° -kal és 3 km-t tesz meg az új irányban. Ha útjának végén $\sqrt{3}$ km-nyi távolságban van kiindulási helyétől, akkor x értéke

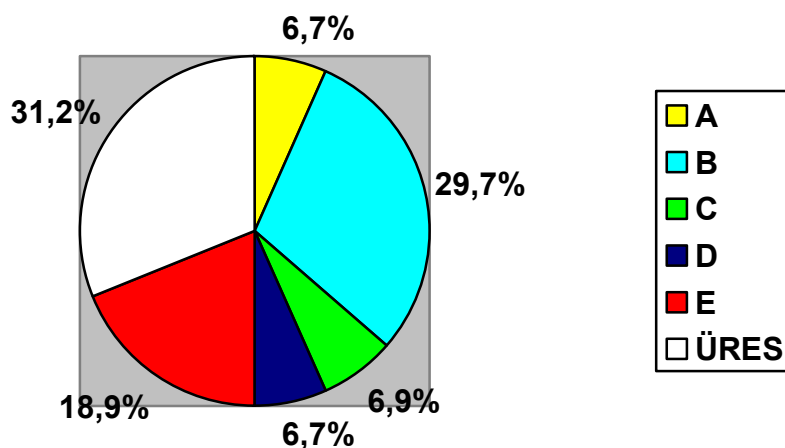
(A) $\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 1,5 (D) 3

(E) a fenti adatokból nem határozható meg egyértelműen

A Matematikaverseny résztvevői⁴ közül 29,7% választotta a (B) rossz megoldást és csupán 18,9% választotta a helyes (E) választ, 31,2% nem adott választ, a többiek a többi rossz választ adták.

A hibásan válaszolók kettős hibát követtek el. Egyrészt nem, vagy rosszul gondolták át a háromszögek egyértelmű megadásának alapeseteit. Egy háromszöget ugyanis általában nem határoz meg egyértelműen két oldal és a kisebbikkel szemben fekvő szög. A másik hibájuk egy túlspecializálás, amikor a sinustétel helyes felírása után csak az egyik szöget keresik meg. A hiba javításához ellenpéldát kell mutatni.

⁴ A Gordiusz Matematikaverseny 1997 I. fordulóján a III. évfolyamos tanulóknak kiadott 20. feladat.



10. ábra

5. A következő korrelációs hibát saját tanítási gyakorlatom során tapasztaltam. Miután megtanítottam Pitagorasz tételét, majd a háromszögek nevezetes vonalainak, köztük a súlyvonalnak és a háromszög köré írható körének fogalmait, a következő feladatot adtam fel nekik az elsős Hajnal Imre-Némethy Katalin által írt tankönyvből:

„Derékszögű háromszögben a két befogó hossza 21 és 72 cm, számítsuk ki a súlyvonalak hosszát.”

A tanulók nagy része a következő hibát követte el. Miután a két befogóhoz tartozó súlyvonalakat a Pitagorasz tétel alkalmazásával helyesen ki tudták számolni, ezt a „jól bevált” tételt alkalmazták az átfogóhoz tartozó súlyvonalra is, holott az általa meghatározott háromszög már nem volt derékszögű.

A hiba javításához érdemes többféleképpen felrajzoltatni a háromszögeket, vagy megfelelő mértékű kicsinyítéssel megszerkesztetni az illető háromszöget szemléltetve azt, hogy az átfogóhoz tartozó súlyvonal nem zár be derékszöget az átfogóval.

e) A fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák

A fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák elég gyakoriak és gyakran a tanár hibájára vezethetők vissza. Nem módszertani, hanem szemléleti hibáról van szó: a műveletek megtanítását tekintik kizárólagos feladatuknak, az aprólékos, sok munkával járó fogalomalkotást mellékesnek, lényegtelennek.

Az a tény, hogy a matematikatanítás során absztrakt fogalmakkal kell dolgozni, azt a kötelezettséget rója ránk, hogy a fogalmakat nagy gonddal, körültekintéssel alakítsuk ki. A fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák esetén tulajdonképpen a forma nyomja el a tartalmat, de nem a forma ereje, hanem a tartalom gyengesége miatt. A verbalizmusnak ilyen szembeszökő eseteivel találkozunk, amelyekből azonnal látható: nem elég az egyes hibák javítása, a gyökeres orvoslás a „műveletközpontú” szemlélet feladása.

Példa

6. Hány megoldása van az $\{x/2\}=\{x/5\}$ egyenletnek, ha $0 < x < 1996$. ($\{x\}$ x törtrészét jelenti.)

(A) 599 (B) 600 (C) 601 (D) 798 (E) 799

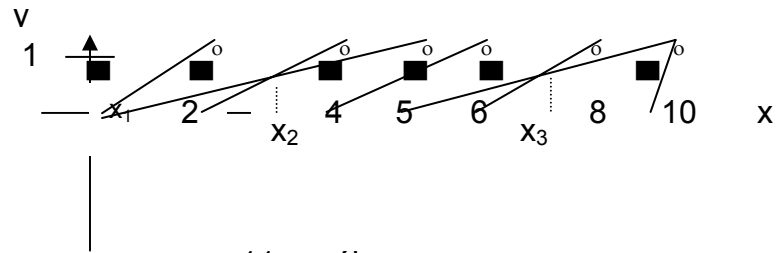
Ezt a feladatot a versenyzők⁵ 81,3%-a nem tudta megoldani és csak 2,4%-uk adott helyes választ, a többiek pedig nem jól válaszoltak.

A hiba oka itt is az, hogy a jelek mögött nincs tartalom, ráadásul a törtrész függvények is az egyik legnehezebben ábrázolható függvényeknek tűnnek a tanulóknak, ezért többnyire nem is próbálkoznak vele az ilyen jellegű feladatok megoldásakor, még akkor sem, ha az pedig célravezető lenne.

Ennek a hibának megelőzése végett célszerű többféle, törtrész-függvényekkel kapcsolatos probléma esetén ábrázoltatni is a függvényeket.

⁵ A Gordiusz Matematikaverseny 1996-os feladatsorban a III. évfolyamos tanulóknak feladott 27. feladat

Jelen esetben ábrázoljuk az $f(x) = \{x/2\}$ és a $g(x) = \{x/5\}$ függvényeket közös koordináta-rendszerben a $[0;10]$ intervallumon, így szemléltethető a formulák tartalma:

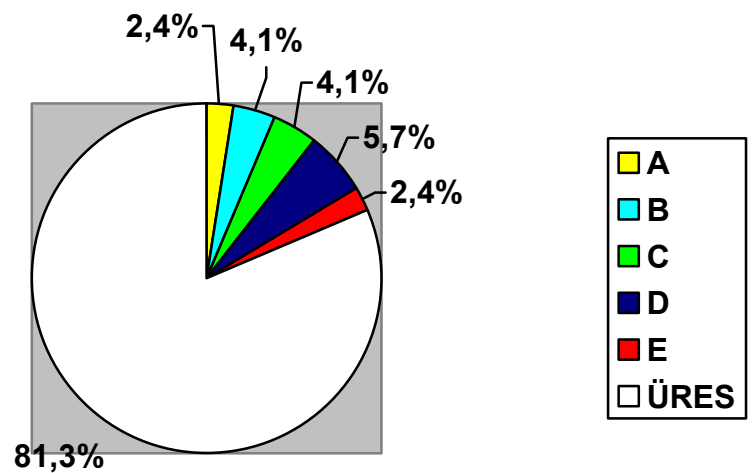


11. ábra

Az egyenletnek a $[0;10[$ balról zárt, jobbról nyitott intervallumon 3 megoldása van. Így analóg módon a $[0;1990[$ intervallumban $3 \cdot 199 = 597$ megoldása, az $[1990;1996[$ intervallumban 2 megoldása van. Ez összesen 599 megoldás.

Másképpen is megoldható a feladat, de ehhez azt kell tudni, hogy két szám törtrésze pontosan akkor egyenlő, ha különbségük egész. Ezért

$x/2 - x/5 = n$, ($n=0, \pm 1 \pm 2, K$), amiből x -et kifejezve $x = 10n/3$. A $0 \leq x \leq 1996$ feltétel miatt $0 \leq 10n/3 \leq 1996$, azaz $0 \leq n \leq 598,8$. Vagyis a feladatbeli egyenletnek a megadott intervallumban összesen 599 megoldása van: $0, 10/3, 20/3, \dots, 5980/3$.



12. ábra

f) A tétel vagy állítás feltételei szükségességének figyelmen kívül hagyásából eredő hibák

Egy tétel általában több feltételből áll. Ahhoz, hogy jobban megértsük a tanulókkal a tétel valódi értelmét, gyakran hasznos megvizsgálni, hogy a feltételek tényleg szükségesek-e a tétel teljesüléséhez. Így érdemes elgondolkozni azon, hogy ha a feltételek valamelyikét elhagyjuk, akkor a kapott új tétel érvényes marad-e vagy sem.

Példa

7. Hány pozitív egész megoldása van a $\log_{0,1}x < \log_{0,1}(2x-3)$ egyenlőtlenségnek?

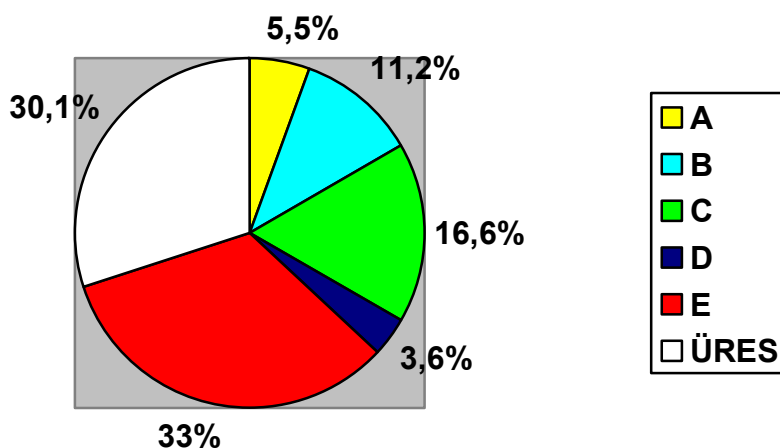
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) végtelen sok.

A versenyzők⁶ 33%-a választotta a rossz (E) választ, csupán 11,2%-uk adta a (B) jó választ, 30,1%-uk nem válaszolt, a többiek a többi rossz válasz közül választottak.

A rossz (E) választ adó tanulók nem vették figyelembe, hogy egyrészt az egyenlőtlenség akkor van értelmezve, ha $2x-3 > 0$, amiből $x > 1,5$. Másrészt a 0,1 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monotonon fogyó, vagyis $x > 2x-3$, amiből $x < 3$.

Az előbb említett tévedést előismereti hiányosságnak is tekinthetjük, előfordulásakor jobban ki kell emelni fontosságát, hogy legközelebb jól emlékezzenek rá a tanulók. Az utóbb említett hiba esetén azonban a tanulók nem figyelnek a tétel feltételére, vagyis ha a logaritmus alapja 1-nél kisebb pozitív szám, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő. Velük érdemes ábrázoltatni néhány logaritmusfüggvényt olyan esetekben, amikor az alap kisebb 1-nél, illetve ha nagyobb és elemezni a görbéket.

⁶ A Gordiusz Matematikaverseny 1997 I. fordulójában a III. évfolyamos tanulóknak kiadott 9. feladat



13. ábra

III.III Összegzés

A tanuló egy szabályra alapozott, de hibás algoritmus létrehozásán keresztül, amely racionális hibákhoz vezet, gyakran találkozik egy új matematikai problémahelyzet kihívásával. Honnan származnak ezek a hibás algoritmusok? A válasz a tanulóban rejlő találékonyág és az általa kapott tanítási forma közötti kölcsönhatásban rejlik. Egyrészt, a tanuló megalkotja a saját szabályait, annak ellenére, és néha azzal szemben, amit a tanár tervezett. Másrészt, a tanuló túl jól is tanulhat. Azaz, ha a tanítás a jelentéssel szemben a gépiességre tanít, akkor a tanuló helyesen megtanulja, hogyan hajtson végre valamely eljárást, és úgy tekinti azt, mint szimbólumerőltető operációt, amely tetszőleges kényszereknek engedelmeskedik. A tanuló így az előzetes tudásának „töredékeiből” túláltalánosíthat, az alapul szolgáló elvek megfelelő figyelembevétel nélkül.

Ez az alfejezet bemutatta ezeket a gondolatokat, rámutatva azokra a körülményekre, amelyek esetén ugyanazok a gondolkodási

mechanizmusok, amelyek rávezetik a tanulókat, hogy helyesen szerezzék meg a matematikai tudásukat, hibás teljesítményhez vezethetnek. Például, igen nyilvánvaló, hogy a tanulók elvonatkoztatnak, vagy általánosítanak valamely matematikai eljárást egy kidolgozott példa lépéseinek követése alapján. Amikor azonban a tanuló tudása gépies, az általánosítás túláltalánosításba fordulhat át. Ezért ugyanazok az induktív folyamatok, amelyek a példákban helyes matematikai indukcióhoz vezetnek, hibás teljesítményt is eredményezhetnek.

Az induktív gondolkodás egyik specifikus fajtája – az analóg gondolkodás – kitüntetett figyelmet kapott a megismerést általában és a matematikai gondolkodást speciálisan vizsgáló kutatás során. Ezért, bár az analóg gondolkodás az induktív gondolkodás speciális esete (l. szintén VanLehn, 1990), mégis önálló elemzést érdemel.

Az analogikus gondolkodás sokkal specifikusabb esetében, a helyes leképezés hibás eredményt állíthat elő. Azaz azért, hogy helyes leképezést hajtson végre a forrásról a célproblémára, a tanulónak először valamilyen alkalmas forrást kell kiválasztania. A kezdőket igen könnyen becsaphatja egy feladat, amelynek a célproblémához hasonló felszíni ismérvei vannak, de nem hasonló a mély struktúrája. Továbbá Schoenfeld (1988) kimutatta, hogy kivonást kívánó aritmetikai problémák megoldásának tanulása során a gyerekeknek azt tanítják, hogy keressenek kulcsszavakat a matematikai szöveges feladatokban (például a „marad” kivonásra utal). Ezért sok tanuló azonnal a kulcsszavak kereséséhez kezd, anélkül, hogy alaposan végigolvasná a feladatot. Ráadásul ugyanaz a kulcsszó különböző problématípusban hibákhoz vezet.

Az analogikus gondolkodással kapcsolatos kutatásokból kiderül, hogy az végül vagy valamilyen sémát állít elő, vagy elvonatkoztatott szabályok szervezett sokaságát (Anderson, 1993; Anderson és Thompson, 1989; Holland és munkatársai, 1986; Novick és Holyoak, 1991). A sémák használata fontos a matematikai tapasztalatok szervezésére, általánosabban lehetővé teszi a hasonló problémák közötti átvitelt. A tanulók helyesen használhatják fel egy szöveges feladat utalásait (például egy autó útnak indul egy bizonyos időben egy bizonyos sebességgel), a probléma megoldásához kívánt megoldástípus előrejelzéséhez (például út-idő-sebesség). Azonban a mereven vagy megértés nélkül használt sémák hibás

teljesítményekhez is vezethetnek. Például, Hinsley és munkatársai (1977) megmutatták, hogy egy probléma „bolonddá tehet” egy tanulót, ha a tartalma egy bizonyos sémára utal (például háromszög), azonban valójában különböző típusú (például út-sebesség-idő). Ezért, egy helytelen környezetben használt helyes séma hibákhoz vezet.

A sémák egy csoportja, amely különös figyelmet kapott a matematikai irodalomban, a problémák jellegzetes vonásai és a megoldásukhoz kívánt művelet közötti korrelációk észrevételével, megértésével foglalkozik. Ezek a sémák úgy ismertek, mint „operátor sémák” (Lewis és Anderson, 1985). Egy operátor séma kifejlesztése hasznos, mivel az esetek többségében a kidolgozott példák specifikus jellemvonásai (például szög, oldal és szög egy geometriai problémában) jósló erejű korrelációkat tartalmaznak egy sajátos algoritmussal (például egy oldal, rajta fekvő két szög alapesete). Amikor azonban hamis korrelációk vannak a jellemvonások és az operátorok között, a tanulók hibás szabályokat vonatkoztathatnak el, körülbelül ugyanazon a módon, miként a lényeges korrelációkkal teszik.

A fogalma tisztázatlan voltából eredő hibák domináns oka az, hogy a forma elnyomja a tartalmat a tartalom gyengesége miatt. A forma már kialakulásakor a tartalom elfedésére, a sablonok kialakítására tendál. Természetesen szükség van a képletek, szabályok megismerésére, alkalmazására, de a tartalmat elhomályosodni nem engedhetjük. Az ilyen típusú hibák jó tanári munka mellett lényegtelen számúra csökkenthetők.

A szükséges és elégséges feltételek közti különbségeket, illetve a tétel feltételeinek szükséges voltát leginkább alkalmas ellenpéldák bemutatásával és szemléltetéssel lehet hangsúlyozni. Ezeknél a típusú hibáknál a megelőzésre kell törekednünk.

A kutatók munkája azt igazolja, hogy a tanár igényessége önmagával és tanítványaival szemben, a tanuló önállóságra szoktatása a hibák számának csökkenését vonja maga után. Külön hangsúlyozni kell a fogalomalkotás és a fogalombővítés gondos, alapos elvégzésének fontosságát. Ez ezekre fordított órák sok fölösleges bosszúságtól kímélik meg a tanulót és a tanárt egyaránt. Ide tartozik az is, hogy az új fogalomnak a régivel magasabb egységbe kell egybeolvadnia, nem szabad a „halmazok szeparálását” megengednünk.

Tisztában kell lennünk azzal is, hogy a hiba felismerése és javítása két különböző mozzanat, az előbbi gyakran csak egy frappáns megjegyzésen múlik, az utóbbi viszont általában türelmes, aprólékos munkát igényel.

A javítás módszerei közül általában a legjobb a szemléltetés, de viszonylag sok időt vesz igénybe, ezt csökkentheti a számítógép. Az eredmény előzetes becslése sokszor azért jobb, mert kevés időbe kerül, s amellet önállóságra nevel. Ha a hibát két eljárással is akarjuk javítani, például kétféle magyarázattal, akkor számolnunk kell azzal, hogy a két eljárás zavarja egymást. (Ranschburg-féle homogén gátlás).

A gondolkodási hibák vizsgálata olyan terület, ahol nagyon igaz a „több szem többet lát” mondás. Éppen ezért hasznára van a matematikatanításnak mindenki, aki kellő lélektani alapokkal kísérleteket végez a hiba okának meghatározására, megelőzésére, javítására, s eredményeit a nyilvánossággal közli.

A következőkben bemutatjuk, hogyan képzeljük el a hibaelemzést és a hibás gondolkozás kijavítását és felszámolását a számítógép segítségével, a hatékony matematikaoktatás érdekében.

III.IV. A matematikai szoftverek, mint a számítógéppel segített matematikaoktatás hatékony segítői

A számítógépes programok tanulásának hasznosságát bizonyítandó, röviden ismertetem, hogyan lehetne leghatékonyabban használni a számítógépeket a matematikaórákon (a jelenleg létező matematikai szoftverek, mint például a Mathematica, Derive, Computer Algebra Systems, Excel, Graphmatica, stb. egyikének szerepét sem szeretném kiemelni, ezért megpróbálok általánosan foglalkozni a témával).

Gyakran kell olyan programokat használnunk, amelyek bonyolult számításokat képesek elvégezni és adatokat képesek grafikus módon ábrázolni, amely megkönnyíti az aktuális megoldandó probléma elképzelését. Sőt, beprogramozhatók a tanulói hibák felfedezésére és javítására.

A számítógépes programok képesek fenntartani a tanulók érdeklődését, kihívás jelent nekik és érdekessé varázsolja a tanulást. Ha nagy tehetségüket és a számítógépek erőforrásait kihasználva a tanárok és programozók összefognak hatékony oktató programok megalkotására, akkor ezzel a tanítás varázsának kifogyhatatlan bázisát fogják képezni.

A matematika szoftverek használatának előnyei

- ***A tanárok átlagos képességeinek túlszárnyalása***

Hogyan képesek a számítógépek az emberi agy kiterjesztéseként szolgálni?

A számítógépek képesek megosztani az agy hatalmát, mert az irányítja a gépeket, és teljesen attól függnék, amit az emberi agyak találnak ki részükre. Ezután szolgamódon követik ezeket az instrukciókat. Minden számítógépnek kiadott parancs mindössze egy egyszerű állítás, amelyet a gép el tud olvasni és értelmezni képes. Egyetlen programparancs több ezer másikkal kombinálható. Ezek együtt már óriási hatalmat jelentenek. Ezek irányítani tudják a számítógépeket, hogy tevékenységeket és olyan ötleteket hajtsanak végre, amelyek bonyolultak, és néha előfordul, hogy még soha nem volt kigondolva a tiszta emberi intelligencián kívül. A számítógépek képesek nyomon követni történések sokaságát, amelyek meghaladják az emberi képességeket. Például a számítógépek képesek számolni és emlékezni arra, hogy milyen gyakran követ el egy-egy tanuló, vagy tanulók ezrei valamilyen sajátos hibát és jelzik a programozóknak, ha egy sajátos hiba vagy hiba típus gyakran előfordul. Amikor egy kritikus hibát követnek el a tanulók, ebből a figyelmes tanár megérti, hogy a tanuló elmulasztott megtanulni egy alapvető dolgot. Ezzel az információval a szoftver írói képesek újra átdolgozni a program részeit, amelyek a zavart okozó tananyaggal foglalkoznak, és képessé tudják tenni a számítógépeket arra, hogy megfelelő ismétléseket alkalmazzanak. Eltérő, vagy átfogóbb oktatási módszert alkalmaznak, amelyet arra a célra fejlesztettek ki, hogy csökkentsék a későbbiekben előforduló hibák lehetőségét. A programozók visszajelzések útján információt kapnak arról, ha egy

tanulói fogalomzavar megismétlődik. A problémák feltárására irányuló feladatokat tárolják a számítógépek memóriájában, amelyek segítségével képesek feltárni a tanulói fogalomzavarokat. A gépek generálják és megtartják óriási memóriájukban a helyes választ és egy sor valószínűsíthető helytelen választ. A gép nagy sebessége, amellyel a válaszokat analizálja, bizonyítja majd hatékonyságát. Az abszolút értékes kifejezésekkel végzett műveletek meg nem értését illusztrálta a matematikaversenyen előfordult következő eset: Hány valós megoldása van az $x^2 - 1997|x| = 0$ egyenletnek?

A helyes válasz természetesen 3. Az általánosan előforduló hiba a következő megoldások valamelyike: 2 vagy 1.

Bárki, aki nincs tisztában az abszolút értékes kifejezések átalakításaival, valamelyik hibás megoldást produkálhatja. A számítógép szintén megtalálja majd a memóriájában a 2 és 1 megoldásokat.

A matematika szoftverek felhasználói üzeneteket tartalmaz és hibaüzeneteket képes küldeni, amikor nem helyesen használjuk a programot, vagy amikor rossz megoldást adunk. Ennek a hibaüzenetnek számos variációja van. Ha a két rossz válasz közül bármelyik előfordul a tanulók válaszaiban, a számítógép újra el fogja magyarázni az abszolút értékes kifejezések jelentésével és átalakításával kapcsolatos szabályokat. Fontos azonban, hogy azok a tanulók, akik hibát követnek el ne haladjanak addig tovább, míg alaposan meg nem értik a gyökös kifejezések fogalmát. Tall (1993) hangsúlyozta, hogy a hibásan gondolkozó tanulók inkább a műveletek végrehajtására koncentrálnak és nem a képesek a fogalmakat egységként kezelni. Ennek oka az lehet, hogy már így is túl sok, egymástól elkülönült tudáshalmazként raktározódnak az ismeretek a fejükben, amely túlterheli a memóriájukat, ezért hibáznak. Ezért, a specifikus hibák javításán keresztül történő ismétlés még több elszigetelt információt nyújtanak a számukra, amire emlékezniük kell, ez megnöveli a kognitív megterhelésüket, növelve ezzel a hibázási lehetőségeket. Következésképpen nekik sikerélményre van szükségük, amelyet kis számú, de hatékony általános problémamegoldó stratégia megtanulásával érhetnek el. Az ilyen stratégiák megtanulásához azonban külön foglalkozásra van

szükségük, amely során nem lépnek tovább a matematikai tartalom és ismeretanyag tanulásában mindaddig, amíg a megfelelő problémamegoldó stratégiák alkalmazásában nem biztos a tudásuk.

A számítógépes szoftverek segítségével pedig sokféle problémamegoldó stratégia elsajátítható, játékos formában.

A szoftverfejlesztők egy sor tesztkérdést fognak beépíteni a programokba. A számítógépek tesztelni fogják a tanulókat, hogy megbizonyosodjanak arról, hogy megértették az anyagot és arra is használják majd a tesztelést, hogy tanulásra késztesse. A gépeknek sem a tesztelés, sem a feladatok javítása nem okoz majd problémát. A tananyag elrendezés szintén könnyen megoldható a szoftver segítségével.

- *A számítógépek rugalmasak*

A tanulóknak képesnek kell lenniük eljutni a tények ismeretétől egy bonyolultabb következtetéshez intellektuális aktivitás révén. Mindenkinek rendelkeznie kell az alapismeretekkel ahhoz, hogy előrehaladva, további következtetések levonására legyenek képesek. Ha a tanulóknál hiányzik az alaptudás alapos ismerete, akkor nem tudják támaszként használni a tényeket, hogy előremutató okoskodáshoz.

A tanulóknak ösztönzésre van szükségük ahhoz, hogy az érvelési képességek kifejlődésének alapjául szolgáló, korábban már megtanult információkat felidézzék és használják is azokat. A gondolkodásra serkentő kérdések segítik ezt a folyamatot. A számítógépek beprogramozhatók úgy, hogy gondolkodásra ösztönző kérdéseket tegyenek fel, variálva a nehézségi szinteket, amelyek hatékonyak lehetnek a különböző típusú tanulóknak.

Sőt, minden számítógépes kérdésnek megvan az az óriási előnye, hogy – minden válasz azonnal javítható és visszajelzés adható. A gyors válaszra való képesség és minden egyes tanuló valamennyi válaszának nyomon követése egy bámulatos tanulási eszköz, és amikor ezt jól megfogalmazott kérdésekkel kombinálják, akkor ez segíthet a kritikus gondolkodás kifejlődésében, amelyet nehéz sokszorosítani individuális oktatók segítségével.

A kielégítő válaszok további kérdésekhez fognak vezetni, amelyek célja, hogy segítsék a tanulókat az érvelési képességeik

használatában. Ha egy helytelen választ kap a számítógép, akkor rátér a hiba magyarázatára. Egy további kérdés, vagy további kérdések kerülnek azonnal megfogalmazásra. Több kérdés, ily módon alkalmazva ahhoz vezethet, hogy a tanulók jól megértsék az anyagot és jobb gondolkodásra okíthatja őket.

Mind a félénk, mind pedig a lassú gondolkodású tanulók, akik nem merik önként elmondani a véleményüket az órákon, mert attól félnek, hogy kinevetik őket vagy a válaszaikat. Néha jogosan aggódnak emiatt. A számítógépek egyéni oktatást tesznek lehetővé. Amikor a tanulók megfogalmazzák válaszaikat, nem kell tartaniuk attól, hogy milyen színben tűnnek fel majd a többiek előtt. Néhány tanulónak ez alapvető fontosságú a gondolkodási képességeinek fejlődésének elősegítésében.

Az előítéletből fakadó gonoszságot feltáró bármely racionális vizsgálat azt mutatja, hogy az előítéleteket ki kell irtani, különösen az iskolákban. A számítógépekkel segített oktatás olyan mértékben fogja csökkenteni az előítéleteket, amennyire semmilyen más rendszer nem képes. A számítógépek minden egyes tanulót képesek tanítani, a tanuló saját szintjének megfelelően, tekintet nélkül mindarra a sokféle érzelemre, amelyek egy emberi tanárban kialakíthatják az előítéletet. Azok, akik kevésbé jártasak a tudományos tantárgyakban, nem fognak olyan nagyon kilógni a sorból. Minden tanuló a saját számítógépén fog dolgozni. A tanulók nem fognak olyan gyakran versengeni és összehasonlítani az eredményeiket egymáséival, mint ahogy ezt teszik manapság. Saját tanulmányaikra fognak koncentrálni. Ez meglehetősen le fogja csökkenteni az pejoratív összehasonlításokat, más tanulócsoportokkal.

A számítógépek beprogramozhatók úgy, hogy elég időt hagyjanak a tanulóknak arra, hogy végiggondolják a válaszukat. "A várakozási idő" változó lehet és beállítható a tanuló a tanuló egyéni képességeinek megfelelően. Mindig elegendő idő áll majd rendelkezésre, amely segíti a tanulót abban, hogy profitálhasson a gondolkodásra serkentő kérdésekből. A számítógépeknek mind az ideje, mind pedig a türelme elfogyhatatlan. A legnagyobb nehézségekkel járó matematikai feladatok segítségével történő magasabb rendű gondolkodás megtanítása a tanulóknak, individuális oktatást kíván.

Minden helytelen válasz gyorsan elemezhető a számítógép segítségével. Néha egy-egy helytelen válasz nem elégséges a hiba típusának a megállapításához. A számítógép képes több kérdést feltenni és lehetőségeket felvetni, amíg meg nem találja a hiba okát. Ezután koncentrálnak a nehézséget okozó tananyag átismételtetésének megoldására. A számítógépnek egyedülálló előnnyel rendelkeznek a tanulók arra való megtanításában, hogy hogyan oldják meg ezeket a problémákat, mert individuális oktató szerepre való alkalmasságukhoz hozzájárul még a végtelen türelmük és az a képességük, hogy a jutalmazás segítségével fenntartsák a tanulók érdeklődését. A számítógépek képesek a problémák apró részekre tagolására és kérdések megfogalmazására. Végigvezetik a tanulókat minden szinten, akár többször is és ha szükséges, akkor sok feladatot oldatnak meg, amíg a tanulók jobban meg nem értik a megtanulandó tananyagot. Egy ember tanár is megtehetné ugyanezt, ha csak egy tanulóból állna az osztály.

A geometria egy olyan része a matematikának, amely széleskörű magasrendű gondolkodást igényel. A tanulók gyakran úgy fejezik be a geometria kurzust, hogy csak szerény mértékben képesek a bizonyítások kigondolására. Számos olyan szoftver létezik, amely a térlátást és vizualizációt és a felfedezéssel való tanulást segíti elő, amellyel a tanulók geometriatudása nagymértékben fejleszthető. Ráadásul a Computer Algebra Rendszerek használatával a tanulók képessé válnak arra, hogy könnyedén váltsanak a matematikai reprezentációk között, mint ahogy azt a grafikonok, táblázatok és formulák értelmezése megkívánja. Ez a különböző reprezentációk integráltabb és rugalmasabb használatához vezethet. Dr. Ambrus András (1995) is hangsúlyozta a tanulói aktivitás fontosságát a reprezentációs síkok közötti váltáskor. „Az egyik reprezentációs módról a másikra való áttérés növeli a rugalmasságot, és a problémamegoldás hatékonyságát. A megfelelő reprezentációmód kiválasztása fontos tényező a problémamegoldásban.”

A számítógép képes ellenőrizni a tanulókat, hogy ők valóban a problémamegoldással vannak-e elfoglalva. A tanulóknak nem kell várniuk, amíg a dolgozataikat kijavítják ahhoz, hogy visszajelzést kapjanak. A visszajelzés azonnali, pontos, oktatásügyi szempontból releváns és több alapos problémamegoldó viselkedés elemzésén

alapul, amely nem lenne lehetséges egyetlen tanárnak egy tanulókkal tele osztályteremben.

A szoftver észlelni tudja, amikor a tanuló már eleget tud ahhoz, hogy továbbhaladva megtegye a következő lépést a művelődésében. Ha a tanuló extra képességekkel rendelkezik, a számítógépek erről tudomást vesznek és buzdítják a tanulót, hogy használja ki azt a bizonyos képességét. Például azok a tanulók, akik elegendő aritmetikai ismeretekkel rendelkeznek ahhoz, hogy elkezdjék az algebrát, akkor ezt meg is tehetik, tekintet nélkül a korukra és az időmennyiségre, amely ezen a tudás eléréséhez szükséges.

Néha előnyös az, ha egy tanulócsoport együtt dolgozik valamely projekten. A számítógépek képesek úgy időzíteni, hogy a tanulók egyidejűleg ugyanabban a szobában legyenek, ugyanazt a tananyagot tanítsák, és arra ösztökélik a tanulókat, hogy csapatmunkával oldják meg a problémát.

A számítógéppel segített oktatás mindig a korszerű. Ahogy a világban az információk szétáradnak, a tanároknak túl nehéz lépést tartani a fejlődéssel. Különösen fontos a tudományokban, hogy a tanulók lépést tartsanak az új fejleményekkel. Sokkal könnyebb frissíteni egy számítógépes programot, amelyet több ezer tanteremben fognak használni, mint több ezer a mai osztálytermekben tanító tanár tudását frissíteni.

Másrészt a számítógépek, amelyeket nappal a diákok használnak, este a folyamatos felnőtt képzési programok rendelkezésére fognak állni.

Továbbá, lehetővé fog válni az, hogy az iskolák, amelyek hangsúlyozni szeretnének bizonyos koncepciókat, ezt könnyen hozzáfűzhetik, vagy beilleszthetik az illető iskolákban használt szoftverbe. A speciális iskolák néhány eszének nagyobb jelentőséget kívánnak tulajdonítani. A szoftverkészítők alkalmazkodni tudnak ezekhez az igényekhez, amely gyakran csak minimális pluszköltséggel jár.

- *A számítógépek jól-bevált tanítási technikákat alkalmaznak*

A hibák elemzése csak az egyike annak a sok példának, ahol a tanárok összegyűjtött bölcsessége segíteni fogja a programozókat,

mint ahogy a korábbi oktatók összegyűjtött bölcsessége mindig is segítette a kezdő tanárokat. A szoftverkészítők a századokon át használt ötletekkel fogják javítani a programokat. Majdnem minden, a tanárok által valaha is kifejlesztett technikát használni fognak majd a számítógépek, ahogy az oktatással kapcsolatos programozás egyre fejlettebbé válik. A szoftver írók, felhasználva ezt a felhalmozott szaktudást, képesek lesznek olyan oktatási anyagot szolgáltatni, amely a tanulást tartóssá és élvezetesebbé teszi majd.

Amikor ezeket a tesztek beprogramozzák a számítógép memóriájába, akkor azok akármikor használhatók, amikor azok a tanuló fejlődését segítik. A szoftver lehetővé teszi, hogy a számítógép önállóan döntse el, mikor kívánatos azok használata. A találmány sokszorosítható, mivel a szoftver minden számítógépen ugyanaz lehet. A tanárok, együttműködve a programozókkal, új programokat fognak kifejleszteni együttes erővel.

A kétféle csoport erőforrásainak a kombinálása radikálisan új és izgalmas áttörést fog alkotni a tanulásban. Amennyiben egy új program sikeresnek fog bizonyulni egy osztályban, akkor ugyanezekkel az előnyökkel fog járni egy másikban is, pontosan úgy, ahogy ugyanaz a tanár sikeresen használja a tanítási technikáját a különböző osztályokban és a különböző iskolákban. Egy számítógépes program, amely képes jól tanítani, soha nem veszít az értékéből, sőt, csak továbbfejleszthető.

- *A számítógépek több tanár modellt képesek imitálni*

Egy tanítási technika, amellyel sikeresen tanítható sok tanuló a különböző iskolákban, nem biztos, hogy minden tanulónak olyan tökéletesen megfelel. A tanulók szükségletei fogják meghatározni a használt programokat. Amikor egy tanuló nem tanul, a számítógép tudomást szerez erről, és gyakran választhat egy másik módszert. Sok nehézség, amelyekkel a tanárok szembekerülnek manapság, meg fog szűnni, mert a számítógép képes úgy leadni a leckét, ahogy az a tanuló igényeinek leginkább megfelelő. A tananyag akkor kerül megtanulásra, amikor a tanuló felkészült annak megtanulására. A gép rendszeresen teszteli majd a tanulót és kiértékeli az eredményeket.

Ha a tanuló nem tanult meg valamely lényeges dolgot, akkor a teljes tananyag megismételhető. Az előadások mindig változnak, soha nem lesznek egyformák. A tanuló kérdéseket tud majd feltenni szinte bármivel kapcsolatban a megtanított tananyagra vonatkozóan. A tanuló reakciói meghatározzák azt az irányvonalat, amelyet a számítógép követni fog, hogy elérje az alapvető tananyag megtanításának célját, míg a grafikus elemek tanulásra csábítják és bevonják a tanulókat a tanulási folyamatba. A számítógép és a tanulók közötti interakciók lehetővé teszik, hogy a tanulók aktívan részt vegyenek a tanulási folyamatban.

- *A programozás hozzájárulhat a jelenlegi tanári segédeszközök fejlődéséhez*

Egy másik fontos oktatási vívmány, hogy a programozás csodái áradni fognak a számítógép azon képességeiből adódóan, hogy ellenőrizni és teljesen integrálni tudja az audiovizuális előadásokat a minden tanuló oktatásába. A számítógéppel segített oktatásban ez végrehajtható a számítógépek segítségével a tanulók monitorain és a szoftver teljesen ellenőrizni képes ezt a folyamatot.

Minden információ tárolható csak szöveges formátumban. Ezzel a lehetőséggel, a matematika szoftverek bizonyos verziójában, egy számítógépes rendszeren futtatható, olyan file-k hozhatók létre, amelyek olvashatók bármely más számítógépes rendszeren futó verzió által is. Sőt, az ilyen file-kat képesek kezelni más szabvány programok is, mint például a szövegszerkesztők. A file-k írásának és olvasásának módja működőképes a matematika szoftverek verzióin, minden számítógépes rendszeren. Minden verzió beállítható arra, hogy képes legyen a bemenő adatként megadott jegyzeteket olvasni. Így, ha valamilyen tudományos áttörés történik, akkor a legújabb kutatási eredmények azonnal hozzáadhatók az összes használatban lévő példányhoz, akárhol is használják azokat.

A függvények ábrázolásának és az adatok megjelenítésének a képessége rendkívül fontos valamennyi tudományban – legyen az társadalom, természet vagy testnevelés. A számítógépes szoftver képes más alkalmazásokból adatokat importálni és exportálni, változatos formákban ábrázolni az adatokat, valamint elvégezni az adatok numerikus analízisét.

Előfordulhat, hogy a különböző programozási nyelvek felhasználói, végül nem találják majd elegendőnek különleges számítási igényeikhez a beépített függvényeket. Ekkor programot kell írniuk, amelyek segítségével felhasználhatják a beépített függvényeket az adott nyelv programozási lehetőségeinek megfelelően. A különböző szoftverek lehetővé teszik, hogy a programozási nyelvek széles körét fel lehessen használni. Bennük és lehetőség van arra, hogy a programozó "természetes kódolást" használjon; vagyis, ez olyan kód, amely inkább az adott feladat állítására inkább épít, mint a különböző programozási nyelvekre és az egyéni sajátosságokra.

Ellenvetések

o Fekete doboz effektus

A szoftverek fekete dobozként foghatók fel, mivel nem engednek betekintést abba, hogy mi módon jutnak az illető eredményekhez. Ezek a módszerek ráadásul gyakran sokkal összetettebbek azoknál a módszereknél, amelyeket maguk a tanulók használnának. Ez váratlan eredményekben illetve eredményreprezentációkban nyilvánul meg. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a szoftverek nem támogatják az elemi vagy informális megoldási stratégiákat. A londoni City Egyetemen tartott számítógéppel segített matematikaórákon tapasztaltam, hogy a tanulók megtanultak használni bizonyos szoftvereket, például a deriváltak, integráltak kiszámítására, de a számítógép nélkül, önállóan nem tudták volna ugyanazt a helyes eredményt megkapni, ha nem tanulták meg a megfelelő szabályokat. A Taylor polinom meghatározásakor is kíváncsian kérdezték, hogy hogyan kapta a végeredményt a program és a nélkül hogyan lehetne meghatározni a polinomot. Sajnos a szoftver által elvégzett műveletek lépcsőről lépésre levezetve nem láthatóak a programhasználat során.

o Kóros szintaktikai érzékenység

A szoftverek az adatbevitel szintaktikai követelményeire nagyon érzékenyek és nem rugalmasak ebből a

szempontból. Az adatkivitel ábrázolása pedig a szokatlantól eltérő lehet. A matematika szoftverek nyelvezete eltér a matematikai és a hétköznapi nyelvektől is és a rendszer nem enged meg informális nyelvhasználatot, csakis a meghatározott szabályok szerinti parancsok bevitelét. Egyszerű szintaktikai vagy gépelési hibák megakaszthatják a feladatmegoldást. Például bizonyos szoftverek csak úgy kezelik a függvényeket, ha azokat nagy kezdőbetűvel írjuk le (Sin(x), Cos(x), stb.). Ha az alábbi exponenciális függvényt akarjuk ábrázolni, akkor egyes szoftvereknél nem elegendő: $x^2 e^{3x}$ ilyen formában való begépelése, mert az 'e' betűt a program változóként kezeli. Ehelyett a következőt kell beírni: $x^2 \exp(3x)$.

- o *A szoftver által megadott és a tanulók által 'egyszerűnek' ítélt adatrepresentáció közötti eltérés*

A számítógépes algebra rutinoknak megvan a maguk 'szövegkörnyezettől független' szabályai a kifejezések egyszerűsítéséhez, amelyeket a tanulók esetleg nem a legegyszerűbb reprezentációnak tekintenek. Például amikor el kellett dönteniük, hogy melyik szám a nagyobb: 0.000145 vagy a 6.01E-05, a második szám fenti ábrázolásmódja mellett sok tanuló rosszul döntött. De amikor a 6.01E-05 számot 0.0000601 formában írta fel a tanár, akkor már egyértelmű volt a tanulóknak, melyik a nagyobb.

- o *A szoftverek implicit módon kezelik a numerikus és algebrai számolásokat*

A tanulók gyakran nem tudják, mit tegyenek, amikor a szimbólum vezérelt program nem ad konkrét eredményt. Például csak kijelöli a végrehajtandó műveletet: Solve($(x-12)^2/(x^2-24x+169)=x^2/x^2+100$,x). Vagy amikor konkrét decimális szám helyett az jelenik meg: Approx(log5/100).

- o *A szoftverek korlátai*

A szoftverek korlátai miatt nehézséget okozhat a tanulóknak az algebrai megoldási stratégiák kitalálása, hogy legyőzzék a korlátokat. Például amikor gyökös

kifejezést tartalmazó egyenletet kell megoldani, a tanulónak kell átgondolnia, hogy előbb négyzetre kell emelni az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezést és a végeredményeket ellenőrizni kell, hogy benne vannak-e az értelmezési tartományban. Ez azt jelenti, hogy a matematikai ismeretek tudása nem szenvedhet csorbát a szoftverhasználattal. A gép nem tud gondolkozni helyettünk, csak végrehajtani.

o *Mikor és mire célszerű használni az illető szoftvert?*

A tanulók gyakran túl sokat várnak el a szoftverektől. Például annyira elkényelmesedhetnek, és függővé válhatnak a számítógéptől, hogy lusták gondolkodni, azt hiszik, anélkül is választ kaphatnak a kérdésekre. Például amikor meg kell határozni az $y=x^3+5x^2+4x-9$ függvény szélsőérték helyeit, akkor a tanulók a program segítségével elvégéztetik a megfelelő deriválásokat, de azt már nem tudják biztosan, hogy a kapott részeredményeket mikor melyik képletbe kell behelyettesíteniük, ami azt mutatja, hogy a matematikai tudásháttérük hiányos és a számítógép ebben nem segíthet. A matematikai fogalmakkal és szabályokkal tisztában kell lenniük a matematikai programok használata előtt.

o *A paraméterek és változók közötti rugalmas felfogásmód*

A tanulóknak sok gondot okoz a paraméterek használata. Nem képesek különbséget tenni a változók és a paraméterek között. Inkább konkrét értékekkel szeretnek számolni. Ez a probléma természetesen már előbb létezett, mint a matematikaszoftverek és több kutató is foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy a milyen szerepük van a betűknek és a tanulók milyen megértési nehézségekkel küszködnek ezzel kapcsolatban (Sfard és Linchevski; 1994 és Warren ; 1999). A matematika szoftver környezet explicitté teszi a változókkal és paraméterekkel kapcsolatos megértési nehézségeket, mivel a szimbolikus manipulatív eszközök használatakor a változók és paraméterek még absztraktabb

szövegkörnyezetben jelennek meg, ami növeli a téves felfogások kialakulásának esélyét.

Következtetések

Az új számítógépes technológiák hatékony alkalmazásának lehetőségeit kutatva figyelembe kell venni az esetleges nehézségeket és akadályokat is. A korábbi kutatások eredményei (Mayes; 1997, Goldenberg; 1987, Drijvers; 1999, Lagrange; 1999a, 1999b) bizonyítékkal szolgálnak arra, hogy a számítógépes technológiai eszközök nem csak új dimenziókat nyitnak meg a matematikatanításban és tanulásban, de akadályokat is állíthatnak fel. A szerző úgy gondolja, hogy nem elég tisztában lenni a számítógéppel segített oktatás előnyeivel, de az akadályokat is ismerni kell, amelyeknek lehetnek technikai vagy matematikai összetevői is. Ezeket az akadályokat komolyan kell venni, mert fontosak a hasznos pedagógiai stratégiák kialakításában. Ha a tanárok tisztában vannak a számítógép használat során fellépő nehézségekkel is, akkor odafigyelnek rájuk és előnyt is kovácsolhatnak belőle, egyértelművé téve a mögöttes matematikai tartalmakat. A numerikus és pontos érték számítások, a formulák egyszerűsítése és a változók, illetve paraméterek szerepének tanítása nagyobb odafigyelést igényel a matematika szoftverek alkalmazása során. Ami a fekete doboz hatást illeti, óvatossá kell lennie a tanárnak és nem hagyni, hogy a tanulónak a technológiai eszköztől való függőség érzete alakuljon ki. Ez ugyanis azt az érzetet keltheti, hogy egy 'csodamasinával' dolgoznak és nem egy tanuláskönnyítő eszközzel. Érdemes megfontolni a körültekintően megtervezett 'instrumentális genezist' amit Lagrange és Guin továbbá Trouche mutatott be (1999).

IV. fejezet

Matematikatanár-továbbképzés: számítógéppel segített oktatást célzó programok

Ennek a fejezetnek két üzenete van: egyrészt az iskolák hatékonyabban hasznosíthatnák a számítógépek nyújtotta előnyöket és a tanulók, tanárok és a társadalom érdekében így kell tenniük. Másrészt a tanárok alapképzése nem elég, mert ahogyan a technológia változik, új és hatékonyabb számítógépes alkalmazásokat fejlesztenek ki, továbbá egyre többet tudnak meg a számítógéppel segített oktatásról, ezért a tanároknak állandó továbbképzésre van szükségük. A tanár-továbbképzés egy általános modellje megtalálható Gyöngyösi (2000) tanulmányában.

Minthogy a jelenlegi tanárok többsége nem rendelkezik a matematikai szoftverek tanításban való felhasználásához szükséges szakképzettséggel, ezért meg kell tanítani őket erre. Ráadásul, a jövő tanárai, akiket most képeznek az oktatási intézményekben, sincsenek felkészítve arra, hogyan tanítsanak a számítógépekkel. A tanárok felkészítése a számítógépek alkalmazására, egy olyan folyamat, amelynek soha nincs vége. Ebben a fejezetben a tanár-továbbképzések jelentőségével fogunk foglalkozni.

A tanár-továbbképzéseknek kiemelkedő jelentősége van az egész oktatási rendszer megreformálásában. Magyarországon, a törvényi szabályozás értelmében minden tanár köteles részt venni hétévente a tanár-továbbképzésekben, a végzésüket követő években, egészen ötven éves korukig.

A tanárok már így is túl vannak terhelve. Nagyon kevés tanár tud megfelelő időt szánni a számítógéppel támogatott tanítási tervek elkészítésében és a szükséges előkészületek megtételében. Ezekkel a problémákkal szembesülve, a tanárok hozzáállása az új technológia alkalmazásához, érthetően, gyakran antagonisztikus. A számítógépek jelenlegi használata tovább nehezíti a tanárok munkáját és sok más probléma merül fel az osztálytermi alkalmazásukkor is.

A következő fejezetben bemutatok egy tanár-továbbképzési programot, méghozzá az „algoritmikus matematika” programot, amely a Debreceni Egyetemen folyt. Véleményem szerint ez a tanár-

továbbképzés nemcsak azért szükséges, hogy lehetővé tegye a középiskolai matematikatanároknak a számítógépek hatékony alkalmazását az oktatásban, de első lépést jelenti az iskolai célokra szánt alkalmazások standardizálásának is. A résztvevők általános alaptudásra és szakértelemre tesznek szert, amelyet a legtöbb iskolában alkalmazni fognak. Ez a tanár-továbbképzés segíti a matematika tanárokat abban, hogy eldöntsék, hogyan akarják felkészíteni a tanulókat a számítógépek használatára, mi mindent hagyjanak a számítógépeknek tanítani, hol helyezték el a számítógépes oktatást a saját oktatási tervükben, hogyan integrálják a számítógépeket a tesztelési és osztályozási feladatok elvégzésbe, és mennyi időt hagyjanak a tanulóknak a számítógépekkel való interakciókra.

IV.1. A középiskolai matematikatanároknak meghirdetett „algoritmikus matematika” tanár-továbbképző program leírása

Ez a továbbképző program 1998 és 2001 között történt a Debreceni Egyetemen. A résztvevők várható száma 20-30 fő volt és középiskolai matematikatanároknak lett meghirdetve a program. Végül csak 13 tanár vett részt a továbbképzésen. A tanároknak a képzés összes költségeinek 20%-át kellett kifizetniük, míg a 80%-ot a munkahelyük állta. Talán az okozta a viszonylag alacsony részvételt, hogy a továbbképzés nem volt ingyenes. A résztvevő tanárok életkora vegyes volt, 35-től 50 éves korig terjedt az életkoruk tartománya és több éves tanítási gyakorlattal rendelkeztek.

A továbbképzés anyaga új volt a résztvevőknek, minthogy az ő tanárképzésük során ők még nem voltak a számítógépet rendszeresen használó tanulók, és nem is játszott lényeges szerepet a számítógép használat a tanárképzésük során. Továbbá nem várták el tőlük, hogy szakértőként használják majd a számítógépeket az osztálytermi oktatómunkájuk során.

Célok

A résztvevők nemcsak felfrissítik a korábbi egyetemi tanulmányaik alatt elsajátított tudásukat, hanem a matematikatanítás egy új,

modern területén, nevezetesen a számítógéppel segített matematikatanítás területén is tökéletesíthetik a tudásukat.

A résztvevők egy alapos képzést kapnak a számítástechnika tudományban és megtanulják használni a számítógépes programokat, amely lehetővé teszi számukra, hogy új módszereket fejlesszenek ki az algebra, analízis, geometria, statisztika, kombinatorika, valószínűség számítás és számelmélet tanításában. Azok, akik elvégzik ezt az "algoritmikus matematika" nevű továbbképzési programot, képessé válnak mind az okos, mind a lemaradó tanulók hatékony tanításra. Ez a továbbképzés képessé teszi a résztvevőket arra, hogy:

- A matematika szoftverek használatának szakértőivé váljanak,
- Megtanulják, hogyan alkalmazhatják leghatékonyabban a számítógépeket matematikai fogalomalkotásra, továbbá
- A matematikatanításban alkalmazható szoftverek széles tartományával is megismerkednek.

Oklevél

Ennek a speciális képzésnek az elvégzése a következő cím elnyerésével jár: "számítógéppel segített matematikaoktatásban specializált középiskolai matematika tanár".

Résztvevők

Minden felsőfokú végzettségű középiskolai matematika tanár részt vehet az "algoritmikus matematika" elnevezésű tanár-továbbképzésen. A résztvevők várható száma: 20-30 fő.

A képzés ideje

A képzési idő négy félévből áll, amely során legalább 120 kredit pontot kell gyűjteniük a résztvevőknek. Minden kurzus intenzív, 3 napos periódusokból áll (péntektől vasárnapig) és az intenzív képzési idő-intervallumok között egyedi felkészítésekre is lehetőség van egyszer vagy kétszer havonta, négyszer vagy ötször minden félév során. Ezen kívül lehetőség van szervezett konzultációkra.

Tartalom

- 1) Egyetemi szintű szakirányú tárgyak:
 - Matematika szaktárgyak,
 - Választható tárgyak
- 2) A számítástechnikával és a számítógéppel segített matematikatanítással kapcsolatos tárgyak.

További részletek a tartalommal kapcsolatban, a Függelékben találhatók.

A továbbképzés során a résztvevőknek 120 kredit pontot kellett összegyűjtenie. Ezek megoszlása a következő volt: 8 kredit pont a pedagógiai és pszichológiai tárgyak teljesítéséért, 8 a matematikatanítással kapcsolatos tárgyakért, legalább 10 kredit a számítástechnikai tárgyak sikeres teljesítéséért, 20 a disszertációért, 42 a matematikai jellegű szaktárgyakból, 12 a választható tárgyakból, 20 pedig a számítógéppel segített oktatásról szóló tárgyak teljesítéséért járt.

Ellenőrzési rendszer

Az ismeretek komplett ellenőrzési rendszere a tantervben előírt, illetve választott tárgyak vizsga-, vagy gyakorlati érdemjegyei megszerkesztéséből, a szakdolgozat elkészítésétől és megvédéséből, valamint a záróvizsga letételéből tevődik össze. A szakdolgozat a tanított témakörökből és azok alaptantervi (iskolai) alkalmazásaiból, egy kérdéskör részletesebb, szakirodalmi tájékozódást feltételező kidolgozása a képzési célhoz illeszkedő jelleggel.

IV.II. Az algoritmikus matematika tanár-továbbképző program résztvevőinek tapasztalatai és véleménye a továbbképzésről

Az információs technológia (leggyakrabban számítógépek) iránti beállítódás és motiváció kérdésének már rövidebb, de alaposabb története van.

Az attitűdökkel kapcsolatos állításokat nehéz értelmezni, mert nincs mód annak kibogozásához, hogy a különböző érzelmek a

technológiára vagy a matematikára vonatkoznak-e. Ezért örültem, amikor találtam egy cikket Gailbraith és Haines (2000) professzor uraktól, akik azt a célt tűzték ki, hogy megterveznek és érvényesítenek olyan attitűdskálákat, amelyek érvényesek olyan programok vizsgálata során, amelyekben a számítógépes technológia elsősorban a matematikatanítás segítését célozza.

Kutatásaink során kérdőíves felmérést készítettünk a tanár-továbbképzés résztvevőinek motiváltságáról, a továbbképzési program során felmerülő nehézségekről, a továbbképzés során szerzett új ismeretekről és azok felhasználásáról, az esetleges csalódásokról a programot illetően, a továbbképzés hatékonyságát elősegítő javaslatokról, továbbá a résztvevők véleményéről a számítógéppel segített oktatás jövőjét illetően. Továbbá arról is érdeklődtem, hogy a résztvevők milyen változásokat tennének a továbbképzés tartalmával és formájával kapcsolatban, amely javítaná az illető továbbképzést.

Csupán tizenhárom matematikatanár vett részt ebben a továbbképző programban és közülük csak nyolcan voltak hajlandók válaszolni a kérdésekre. A kérdőívre nem kellett nevet írniuk a válaszadóknak és nyitott kérdésekre kellett válaszolniuk. Mivel a válaszadók száma meglehetősen alacsony volt, ezért könnyebb volt rendszerezni a válaszokat.

IV.II.1. A motivációról

- a) Először idézném néhány résztvevő válaszát, arra a kérdésre vonatkozóan, hogy mi motiválta, hogy részt vegyen ebben a tanár-továbbképzésben.

„Szakmai megújulást reméltem, kitekintést a napi munkából.”

„A pedagógus szakvizsga megszerzésének lehetősége.”

„A kötelező hétévenkénti képzés.”

„Szakmai kihívásnak gondoltam.”

„A szakmai fejlődés és a bértáblán magasabb fizetési kategóriába való besorolás. Már több tanár-továbbképzésen is részt vettem és hasznosnak találtam azokat”

- b) Szerencsére a megkérdezett résztvevők többsége, 8-ból 5-en (62,5%) pozitívan állt hozzá a továbbképzésben való részvételhez és szakmai megújulást reméltek, továbbá fel akarták frissíteni az egyetemi szintű matematikatudásukat. A 3-an (37,5%) viszont csak kötelességtudatból vettek részt a továbbképzésen.
- c) A tanárok többsége motiválva volt arra, hogy folytassa tanulmányait és érdekelték voltak a folyamatos tanulásban és abban, hogy a tudásukat másokkal is megosszák. Ez azt jelenti, hogy ők valóban készen álltak arra, hogy a továbbképzés céljaival azonosulva, fejlesszék tanítási kapacitásukat.

Azok a tanárok, akik pedig csak kötelességtudatból vettek részt a továbbképzésen, véleményem szerint nem voltak megnyerve az ügynek, így nem is vehettek részt szívvel lélekkel a tanulásban. A kényszerből való tanulás nem egy ideális feltétele a jó teljesítésnek.

IV.II.2. Tanulási nehézségek

- a) A tanári válaszok arra a kérdésre, hogy milyen nehézségekkel kellett megküzdeniük a tanulás során..

„Az időhiánnyal, és a vizsgázás izgalmával. Az intenzív, 3 nap alatti 25 órát kitevő kurzusok fárasztóak voltak.”

„Nehéz volt összeegyeztetni a munka melletti tanulást és a családi életet.”

„A finanszírozás alacsony szintje.”

„A számítógépes ismereteim hiányossága.”

„Szakmailag nem voltak nehézségeim.”

- b) A tanár-továbbképzésen résztvevő tanárok egyikének sem jelentett semmiféle komolyabb problémát a továbbképzés tananyagának a megtanulása.
- c) Felmerülhet a kérdés, vajon miért nem okozott semmilyen nehézséget a továbbképzés szakmai anyagának megtanulása?

- Talán olyan kiváló tanárok vettek részt a továbbképző program előadójaiként, hogy mindent tökéletesen érthetően el tudtak magyarázni.
- Vagy a résztvevők voltak rendkívül jól képzettek, szorgalmasak és okosak.
- Vagy talán a résztvevők féltek attól, hogy valamilyen veszteség érheti őket, ha bevallják nehézségeiket.

IV.II.3. Új ismeretek és felhasználásuk

- a) Tanári válaszok arra a kérdésre, hogy mely tárgy(ak) nyújtottak új ismereteket és hogyan tudják ezeket hasznosítani.

„Szinte minden tárgy nyújtott valamilyen újat, ha nem mindig tartalmilag, de akkor a megközelítésében.”

„Analízis, az algebra, statisztika, valószínűség számítás, számelmélet legújabb eredményei.”

„Elsősorban a számítástechnikával összefüggő tantárgyak, a Maple használata, Derive, TeX kezelés.”

„Egyáltalán nem tudom hasznosítani!”

„Csak szakkörön tudom használni.”

„A mindennapi tanítás során használok azokat.”

„A magántanári praxisom során hasznosítom.”

- b) A számítástechnikával kapcsolatos tárgyak a résztvevők többségének, 6 tanárnak (75%) újat jelentett, amely azt jelenti, hogy ezen a területen a tanárok még több továbbképzést igényelnek.
- c) Meglepődve olvastam, hogy 3 tanár (37,5%) azt állította, hogy nem tudja semmire sem felhasználni az ezen a továbbképzésen elsajátított új tudást. Egyrészt ez azt jelentheti, hogy az elsajátított tudás túl speciális volt ahhoz, hogy a tanárok megoszthassák azt a tanulókkal a mindennapi tanórák során. Másrészt a nem kielégítő technikai feltételek jelentős akadályát képezik a számítógépek mindennapi használatát a tanórákon. Még ha a matematikatanárok készek is a

folyamatos tanulásra és ha hasznos számítógépes alkalmazásokat sajátítanak is el, általában nem tudják megosztani ezt a tudásukat másokkal, mert nincsenek számítógépek és más technikai feltételek az iskolai számítógépes használathoz. Így a tanár-továbbképzés nem lehet elég hatékony hosszútávon, mert a résztvevők hamar el fogják felejtetni a megszerzett új tudást, ha nem gyakorolják azt.

IV.II.4. A továbbképzés hatékonyságáról

- a) Tanári válaszok arra a kérdésre, hogy hatékonyak tartják-e a továbbképzést és indokolják válaszukat.

„Igen, hatékony volt. Régi ismeretek új feldolgozásban, új, használható ismereteket kaptunk, érdekességek tantárgyakról, szakmáról.”

„Nem volt mindenben hatékony, például a rászánt idő és energia nem térült meg anyagi elismerésben.”

„A legjobb a továbbképzés során az volt, hogy megbeszélhettük tanítási problémáinkat a kollégákkal.”

„Igen, hatékony volt, új, hasznos szoftver alkalmazásokat ismerhettünk meg és felfrissíthettük egyetemi tanulmányainkat.”

„Az előadók kedvenc témáikat mutathatták be, így élvezték, amit tanítottak.”

„Csalódtam abban, hogy a jogszabályi rendezetlenségek miatt két év helyett háromat vett igénybe a továbbképzés teljesítése.”

- b) Mind a 8 válaszoló tanár hatékonynak ítélte ezt a tanár-továbbképzést, bár volt néhány dolog, amelyben csalódtak, de ezek inkább a továbbképzés törvényi hátterének bizonytalanságaiból és néhány szervezési gondból adódtak.

- c) A résztvevő matematika tanárok elégedettek voltak a továbbképzés szakmai színvonalával. Új, hasznos ismereteket sajátíthattak el, illetve a tananyagot egy más szempont szerinti feldolgozásban ismerhették meg és felfrissíthették matematikatudásukat is. A résztvevő tanároknak lehetőségük volt találkozni a középfokú oktatásban részt vevő tanár kollégáikkal. Azt is kinyilvánították, hogy sokat tanultak egymástól is. Sőt, az egyik tanár ezt a tényt ítélte a leghasznosabbnak. Egy másik előnye a továbbképzésen való részvételnek az volt, hogy a résztvevők megismerhették a legújabb kutatási eredményeket a matematika és a számítástechnika tudományokban és ezeken a tudományterületeken a legújabb ismereteket sajátíthatták el. Megtanultak különböző szoftveralkalmazásokat a matematikai tanításban. Új tanítási módszereket sajátítottak el.

IV.II.5. Javaslatok a továbbképzés hatékonyabbá tételére

A tanári válaszokat, érdekességük miatt szó szerint idézem.

„Jó lenne megszüntetni az ismétlődéseket az egymásra épülő tantárgyak esetében és új, speciális ismereteket tanítsanak inkább helyette.”

„Több, a középfokú tanítási gyakorlatot közvetlenül segítő előadásra lenne szükség.”

„A továbbképzésben részt vevő matematika tanárokat aktívabb szerephez kellene juttatni a továbbképzés során.”

„Az igények hatékonyabb előzetes felmérésére lenne szükség.”

„Hasznos lenne kiválasztani a legjobb tanárokat a továbbképzés előadásainak megtartására és néhány esetben a képzés tartalmának jobb megválasztására lenne szükség, továbbá több gyakorlatra a számítógép kezelésből.”

„Ki kéne használni a távoktatás lehetőségeit.”

„Minden tantárgy tartalmazzon valami új, számítógépes alkalmazást is.”

„Nagyon hasznos lenne összegyűjteni a résztvevők tapasztalatait a továbbképzés hatékonyságának növelése érdekében.”

„Fejleszteni kell a tanítási technikákat.”

„A továbbképzés tartalmának jobban kellene közelítenie a középfokú oktatás tartalmához.”

IV.II.6. Vélemények a számítógéppel segített oktatás jövőjéről

a) Idézzem a tanárok válaszait.

„Mindenképpen ez jelenti a jövőt, de meg kell találni a pontos helyét és biztosítani kell a technikai feltételeit. Önállóan nem állja meg a helyét”

„Új tanári generációnak kell felnőni.”

„Egyelőre anyagi és szakemberhiány miatt sem megfelelő, de feltétlenül nagy jövője van.”

„A számítógép elterjedésével - az Internet használat általánossá válásával – a tanár-diák kapcsolatot felváltja a tanuló↔számítógép↔tanár kapcsolat.”

„Technikai feltétel lesz: háttérfeltétel, eszköz. Nem feltétlenül órán fogom használni, hanem felkészülés közben, a diákok tanulásban, információszerzésben.”

b) A legtöbb tanár fényes jövőt jósol a számítógéppel segített oktatásnak, de úgy vélik, a tanár szerepe továbbra is alapvető jelentőségű marad, bár szerepük változni fog.

c) A számítógépek el fogják érni az oktatásban is azt, amit más területeken már megtettek: teljes megújulást fognak eredményezni. A végső és legfontosabb eredménye a számítógéppel segített oktatásnak az lesz, hogy a fejlett és kiterjedt, oktatással kapcsolatos kutatások nem fognak csak úgy parlagon heverni a

tudományos újságokban, hanem a pusztán elméleti szintről áthelyezik majd az osztálytermi gyakorlatba, ahol hatása lesz a tanulásra. A jövőben pedig a kutatási eredmények jobb tanítást fognak eredményezni és a tanulók és az iskolák lesznek ennek a haszonélvezői. E cél elérése érdekében szükség van több olyan továbbképzési program indítására, amely a számítógéppel segített középiskolai matematikatanítás megvalósulását tenné lehetővé.

IV.III. Megjegyzések és javaslatok

Minden tanár (100%) hatékonynak ítélte az “algoritmusos matematika” tanár-továbbképzést és a többségük fel is tudja használni a továbbképzés során szerzett új ismereteit a tanítási gyakorlatuk során.

A tanároknak szükségük van a tudásuk fejlesztésére és a legújabb számítógépes alkalmazások megtanulására ahhoz, hogy fejlesszék tanítási kapacitásukat. A Debreceni Egyetem tanári kara szakmailag jól képzett ahhoz, hogy további továbbképzéseket hirdessen meg a matematikatanároknak, továbbá a középiskolai tanároknak, szükségük van tanulmányaik folytatására és erre eléggé motiváltak is, de nincsenek eléggé támogatva a továbbképzésben való részvételben.

Több, a középiskolai tanítási gyakorlatot közvetlenül segítő tantárgy tanítására lenne szükség. A továbbképzésben részt vett matematika tanároknak aktívabb szerepet kell szánni saját továbbképzésük során és szükség van arra is, hogy megosszák tapasztalataikat és problémáikat egymással. Az igények hatékonyabb előzetes felmérésére is szükség van, továbbá a résztvevők tapasztalatainak összegyűjtése is nagyon hasznos lenne a továbbképzés hatékonyságának növeléséért.

Ahogy Kaput (1994) megjegyezte, ezek a technológiák, bár jelentőségük növekszik és egyre inkább bekerülnek a tanítási gyakorlatba, még sincsenek benne a matematikai kutatások fő áramvonalában, másrészt pedig úgy tekintik azokat, mintha az ezen

technológiák fejlesztésével és felhasználásával foglalkozó specialisták hatáskörébe tartoznának. A technológiák felhasználásának kutatása a matematikaoktatásban, intellektuálisan megerősítő és a tanárnak folyamatosan át kell gondolnia pedagógiai és tantervi motívumait és tartalmát.

A technológia felhasználása a matematikai oktatást kutató munkákban tartalmaz egy másik gyakorlati nehézséget. A számítógépes anyagok, különösen a szoftverek drágák és időigényes a gyártásuk, ráadásul ritkán emelhetők le csak úgy készen, a szükséges formában a polcra. Ezért aztán a technológiai innováció szerepe továbbra is nyitott kérdés.

Összefoglaló

A mai matematikaoktatás egyik legfontosabb feladata az elektronikus információs technológia előnyeinek kihasználása a tanterv és tanítási módszerek fejlesztésével.

Bár az igazság az, hogy a technológia valódi hatását a mindennapi osztálytermi matematikatanítás keretein belül nagyon nehéz meghatározni és nagyon kevés kutatói bizonyíték létezik, amelyek alátámasztanák a számítógépes technológiával kapcsolatos túláradó optimizmust ezen a területen.

Ez a doktori disszertáció új eredményeket tartalmaz az elektronikus információs technológia (elsősorban a számítógép) hatékony alkalmazásával kapcsolatban a számítógéppel segített matematikaoktatásban. A dolgozat négy fő részből áll. Az első részben a számítógéppel segített oktatás általános jellemzőit vizsgáltuk meg. A második részben leírjuk hogyan használhatók a számítógépek a grafikus problémák vizualizációjában, és hogyan fejleszthető a tanulók problémamegoldó képességei a segítségükkel. A harmadik fejezetben tanulmányoztuk a matematikaversenyek és játékok hatását a matematikaoktatásra, továbbá a számítógépek szerepét a versenyeredmények feldolgozásában, elemzésében és az eredmények felhasználásában a hatékony matematikaoktatás érdekében. Végül, a negyedik részben hangsúlyozzuk, hogy a tanár-továbbképzések kulcsszerepet töltenek be a matematikaoktatás megreformálásában.

I. A számítógéppel segített oktatás általános jellemzői

Az első fejezetben a számítógépek és hálózatok bevezetésével járó problémákkal, továbbá a számítógéppel támogatott oktatás előnyeivel és kihívásaival foglalkoztunk. Megmagyaráztuk, miért nem változtatták meg a számítógépek az oktatást mind a mai napig, továbbá, tárgyaltuk, hogyan kéne az általuk nyújtotta lehetőségeket jobban kihasználni, és leírtuk azokat a meglepően nagy nyereségeket, amiket a megfelelő használatuk eredményezne.

Kutatási eredményeink alapján megállapítottuk, hogy a számítógéppel segített oktatást kombinálva a hagyományos

oktatással, továbbá a vizualizáció előtérbe kerülésével, a matematikai reprezentációk különböző szintjei kapcsolhatók egymáshoz, ezzel pedig növelhető a tanulói aktivitás, fejleszthető a tanulás differenciálása és individualizálása. Általánosabban, ahogy Tall (1984) mondta, a számítógépes programokat mind demonstrációs, mind pedig a tanulói vizsgálódások céljaira tervezték, lehetővé téve a tanulóknak a szabad felfedezést, továbbá, hogy személyesebb módon gazdagítsák a tanulók fogalom képzetét. A különböző számítógépes grafikák lehetőségeinek kihasználása, vagy az átmenet az egyikről a másikra azonban nem triviális probléma. De a számítógép nagyon lecsökkenti az idő és energiaigényes számításokat, és az ember sokkal előrébb juthat bonyolultabb problémák megoldásában azáltal, hogy az agy felszabadul a mechanikus gondolkodás alól, ami által lehetővé válik, hogy a matematika elméleti struktúrájára koncentráljon. Ez nagyon fontos jelentőségű abban a kérdésben, hogy hogyan szemléljük a jövő tantervét: a számítógép használat nem pusztán egy kísérleti elem hozzáadását jelenti, de lehetőséget arra, hogy magát a matematikai elmélet természetét tisztázzuk.

II. Számítógép használat a grafikus problémák vizualizációja során

Ahogy Tall (1984) megjegyezte "túl korai még megmondani, hogy milyen hatása van a számítógépnek a tanulói válaszokra, ahhoz, hogy a kérdéskörökkel együtt kiértékelhessük azokat, bár máris figyelemreméltók a grafikus problémák területén elért eredmények. Még több adatra derül fény, ha az ilyen irányú tanulmányokat egységbe foglalják".

Nyilvánvaló, hogy minden országban és régiókban az oktatással foglalkozó szakemberek aktívan dolgoznak a technológia lehetőségeinek felfedezésében. Bár az is világos, hogy az ilyen óriási és folytonosan változó terület aktuális és átfogó leírása valójában lehetetlen. A legizgalmasabb kutatási munkák többsége még folyamatban van, még nincs publikálva cikkekben vagy könyvekben, továbbá a kutatáshoz felhasználható hardware/software környezet folyamatosan fejlődik. Ilyen körülmények között, valamint az idő és hely hiánya miatt nem próbáltunk meg átfogó nemzetközi tanulmányt

készíteni, de figyelmünk középpontjába a főbb problémák/lehetőségek területeit állítottuk és néhány leginkább elgondolkodtató kísérleti munkánkat illusztráltuk.

E fejezetben megvizsgáljuk, hogy melyek a matematikai számítógépes szoftverekben rejlő lehetőségek, amelyek valóban támogatják a matematikai grafikus problémák tanítását és tanulását, konkrétan megpróbáljuk meghatározni azokat az értékeket, amelyekkel a számítógép használata járul hozzá a matematika tanulási folyamathoz (Gyöngyösi; 2004).

Két esettanulmány elemzésével beazonosítjuk a számítógép használat előnyeit és akadályait, grafikus problémák esetén. Az egyéni tanulói interjúk segítségével rávilágítunk két gyengébb matematikai teljesítményt nyújtó tanuló reakcióira, tanulási nehézségeire és téves eszméire, miközben számítógéppel segített matematikaoktatásban vettek részt.

Kutatási eredményeink alapján a két tanuló matematikai teljesítménye megfigyelhetően javult, ezért gondoljuk, hogy a számítógéppel segített oktatás elsőbbséget kaphat a többi, ismert tanítási módszer mellett.

Bár megjegyezzük, hogy nem szabad elfelejtkezni arról, hogy a bemutatott példák legjobb szándékunk szerint is csak kis darabját érintik annak, ami napjainkban ezen az izgalmas területen folyik. A számítógéppel segített oktatásban felhasználható pedagógiai elvek még mindig fejlődési és megújulási folyamat alatt állnak és ennek során a matematika és technológia közötti interakciók kiemelkedő jelentőséggel bírnak. Mégis okkal reméljük, hogy biztos haladás érhető el ezen a téren, a számítógépekben rejlő lehetőségek jobb kihasználásával, ami pozitív változásokat hozhat a matematikaoktatásban.

III. A matematika versenyek hatása az oktatásra, és a számítógépek szerepe a versenyek eredményeinek feldolgozásában és hasznosításában

Ebben a fejezetben azt tanulmányozom, milyen fontos kiegészítő szerepe van a matematika versenyeknek a

matematikaoktatásban. A matematika versenyeknek fel kell keltetniük a matematikatanulás iránti vágyat; vitákra kell serkenteniük, amely az ismeretlen és misztikus világ megismerését célozza, és általában véve, a tanulás szeretetét kell előmozdítani. A matematika versenyeknek azonban van egy matematika didaktikai szempontból óriási haszna, méghozzá az, hogy lehetőséget biztosítanak a tanulók által gyakran elkövetett gondolkodási nehézségek összegyűjtésére, rendszerezésére és a megfelelő tanulságok levonására. Ezek a kutatási eredmények rádöbbenhetik a tanárokat arra, hogy mi, és miért okoz nehézséget a tanulóknak a problémamegoldás során.

A számítógép segítségével könnyen elvégezhető a tanulók versenyeredményeinek összehasonlító elemzése, amivel diagnosztizálhatók a tanulók gyenge pontjai. A tipikus gondolkodási hibák előfordulása csökkenthető, ha a tanár számít rájuk, ha már előzetesen védekezik ellenük, ez hozzásegíti a tanárokat a felkészítő munka stratégiájának kidolgozásához

Továbbá tanulmányoztuk, hogy a tanárok hogyan vehetik a legtöbb hasznát a számítógépeknek nem pusztán a tanulói tévedések felfedésében és javításában, de röviden leírtuk, milyen előnyös lehetőségeket nyújt a matematikai jellegű szoftverek alkalmazása a matematika tanítási gyakorlat hatékonyságának növeléséhez.

IV. Matematikatanár-továbbképzés: számítógéppel segített oktatást célzó programok

A tanároknak szükségük van a tudásuk fejlesztésére és a legújabb számítógépes alkalmazások megtanulására ahhoz, hogy fejlesszék tanítási kapacitásukat. A számítógépek használata azonban soha nem fogja kizárni a pedagógusok részvételét az oktatásban, hanem még sikeresebbé, megnyerőbbé teszik ezt a szakmát. Lehetővé teszik, hogy a tanárok jobb nevelő és oktatómunkát végezzenek, ami a végső célja minden elhivatott oktatónak.

Debreceni Egyetem tanári kara szakmailag jól képzett ahhoz, hogy további továbbképzéseket hirdessen meg a matematikatanároknak, továbbá a középiskolai tanároknak,

szükségük van tanulmányaik folytatására és erre eléggé motiváltak is, de nincsenek eléggé támogatva a továbbképzésben való részvételben.

Több, a középiskolai tanítási gyakorlatot közvetlenül segítő tantárgy tanítására lenne szükség. A továbbképzésben részt vett matematika tanároknak aktívabb szerepet kell szánni saját továbbképzésük során és szükség van arra is, hogy megosszák tapasztalataikat és problémáikat egymással. Az igények hatékonyabb előzetes felmérésére is szükség van, továbbá a résztvevők tapasztalatainak összegyűjtése is nagyon hasznos lenne a továbbképzés hatékonyságának növeléséért.

Ahogy Kaput (1994) megjegyezte, ezek a technológiák, bár jelentőségük növekszik és egyre inkább bekerülnek a tanítási gyakorlatba, még sincsenek benne a matematikai kutatások fő áramvonalában, másrészt pedig úgy tekintik azokat, mintha az ezen technológiák fejlesztésével és felhasználásával foglalkozó specialisták hatáskörébe tartoznának. A technológiák felhasználásának kutatása a matematikaoktatásban, intellektuálisan megerőltető és a tanárnak folyamatosan át kell gondolnia pedagógiai és tantervi motívumait és tartalmát.

A technológia felhasználása a matematikai oktatást kutató munkákban tartalmaz egy másik gyakorlati nehézséget. A számítógépes anyagok, különösen a szoftverek drágák és időigényes a gyártásuk, ráadásul ritkán emelhetők le csak úgy készen, a szükséges formában a polcra. Ezért aztán a technológiai innováció szerepe továbbra is nyitott kérdés.

Summary

One of the most important tasks in mathematics education today is the revision of the curricula and teaching methods to take advantage of electronic information technology.

However, it is very difficult to determine the real impact of those ideas and projects in the daily life of mathematics classrooms, and there is very little research evidence validating the overwhelming optimism of computer technologies in this field.

This doctoral dissertation contains new results in using advanced electronic technologies effectively in computer-based mathematics education. The dissertation consists of four main parts. In the first part we examined the general properties of computer-based education. In the second part we described how to use computers to visualise graph-oriented problems and how to improve students' problem solving strategies with the help of computers. In the third chapter we studied the effects of mathematics competitions and games on education and the role of computers in analysing the results of competitions and in making the most of them to revitalise mathematics education. Finally, in the fourth part we emphasized the key role of continuing professional development programmes for mathematics teachers in improving the effectiveness of mathematics education.

I. A general overview of computer-based teaching

In the first chapter problems posed by introduction of computers and networks in schools as well as benefits and challenges of computer-based teaching were discussed. We explained why computers have failed to alter education until now, how they should be employed more properly, and the startling gains their appropriate use will bring.

According to our research results computer-based tools in combination with the traditional teaching and visualisation connect the different levels of mathematical representations, increase the level of student's activity and add to the improvement of differentiation and individualisation of studying. More generally, as Tall (1984) concluded computer programs are designed both for

demonstration purposes and for student investigations, allowing students the freedom to explore and enrich their concept images in a more personal way. However, to exploit the various computer graphics capabilities or to transfer from one to another is a non-trivial problem. But the computer so reduces time and tedium in calculations and one can go so much further with more difficult problems that the mind is freed to concentrate on the theoretical structure of the mathematics. This has very important implications for how we are to view the curriculum of the future: it is not just a matter of adding an experiment element, but the opportunity to clarify the nature of the mathematical theory itself.

II. Using the computer to visualise graph-oriented problems

As Tall (1984) noticed “it is too early to say what effect the computer has had on the students’ responses to assessment of questions, however, it is already noticeable that graph-oriented questions submitted so far have been well done. More details should emerge when the study is considered as a whole”.

It is clear that in every country and region there are many mathematics educators actively exploring technology prospects. However, it is also clear that a comprehensive up-to-date description of such a vast and fluid field is really impossible. Much of the most exciting work is in progress, not yet in published journal articles or books, and the hardware/software environments available for such experiments are constantly improving. Under these conditions and due to limits of space and time we have not chosen to attempt an international survey but to focus on the major problem/opportunity areas and to give illustrations of some of the most thought-provoking work.

In this chapter we examined what exactly the real potentials of using some mathematics computer software are to support mathematics teaching and learning in graph-oriented problems, more specifically we tried to estimate the value added impact of computer use in the mathematics learning process.

Two case studies enabled us to have a specification of advantages and obstacles of using computers in graph-oriented questions. Individual students’ interviews revealed two less able

students' reactions, difficulties, and misinterpretations while using computers in mathematics learning. We also studied how to use computers effectively to correct students' misinterpretation and how to improve their problem solving strategies (Gyöngyösi; 2004).

Among research outcomes is that the mathematical achievement of the two students observed improved and this makes teaching with computers an overriding priority for each defined teaching method.

However, it is important to keep in mind that those examples are at best only a small sample of what is going on in this exciting arena today.

Pedagogies for such instructional sessions are still in the process of development or refinement, and within this enterprise the interaction between mathematics and technology is of considerable importance. However, there is a quite reasonable hope that steady progress can be made along this front, providing better possibilities for computing to bring positive changes in mathematics education.

III. Effects of mathematics competitions and games on education and the role of computers in analysing the results of competitions and in making the most of them

In this part of the dissertation we described how mathematics competitions and games form an important complementary component of mathematical education, at various levels. They should form an important stimulus to mathematical learning; catalysing discussions which pursue the unknown and mysterious, and in general in many cases catalysing an increased love of learning. Secondly, typical students' errors in the process of reasoning can be easily detected after analysing their solutions given to different problems of mathematics competitions.

With the help of computers it is easy to analyse and compare students' results and to diagnose their weak points. It is of considerable importance for teachers to be aware of these errors and after finding their reasons they can develop teaching strategies to correct and avoid errors and misconceptions during mathematics

lessons or students' preparation work for competitions. We also examined how teachers can take the best advantage of computers not only in detecting and correcting students' misconceptions but we also gave a short description of the potentials of applying mathematics software for improving their teaching practice.

IV. Continuing professional development for mathematics teachers: computer-based programmes

Teachers need to develop their knowledge and to learn the newest computer applications in order to develop their teaching capacities. Although computers will never eliminate human pedagogy they will make the profession more satisfying, engaging, fulfilling. They will allow teachers to be better educators, the ultimate reward for any dedicated instructor.

The teaching staff of the University of Debrecen is qualified enough to run more continuing professional development (CPD) programmes for mathematics teachers and teachers of secondary education are in need of continuing their studies and they are motivated but not encouraged and supported enough to take part in continuing education. However we emphasize that CPD programmes play a key role in modernising education and in improving teaching potentials.

More subjects directly helping the teaching practice in the secondary education should be presented. Mathematics teachers participating in continuing education need to have a more active role during their own continuing training and they need to share their experiences and problems with each other. More effective previous assessment of demands is needed, and collecting experiences of participants would be very useful in order to increase effectiveness of CPD programmes.

As Kaput (1994) noted these technologies, although growing in importance and penetration of practice, are not parts of the mainstream activity of mathematics education researchers. On the other hand, to use technology in mathematics education research is intellectually demanding and one must continually rethink pedagogical and curricular motives and contexts.

To use technology in mathematics education research also involves other practical complications. Computer materials, especially software, are expensive and time-consuming to produce, and are seldom available off the shelf in the needed form. The role of impact of technological innovation is thus an open question.

Irodalomjegyzék

- [1] Ambrus, A. (1995): *Bevezetés a matematikadidaktikába*. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös kiadó, 31-56.
- [2] Anderson, J. R. (1989): *The analogical origin of errors in problem solving*. In: D. Klahr and K. Kotovsky (Eds.), *Complex information processing: The impact of Herbert A. Simon* (343-371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- [3] Anderson, J. R. (1993): *Rules of the mind*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Anderson, J. R., Farrell, R. és Saurers, R. (1984), *Learning to program in LISP*. *Cognitive Science*, 8, 87-129.
- [4] Anderson, J. R., Farrell, R. és Saurers, R. (1984): *Learning to program in LISP*. *Cognitive Science*, 8, 87-129.
- [5] Anderson, J. R. és Thompson, R. (1989): *Use of analogy in a production system architecture*. In: S. Vosniadou és A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (267-297).
- [6] Artigue, M., Drouhard, J. P., Lagrange, J. B. (1993): *Acquisition de connaissances concernant l'impact de l'intégration de logiciels de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques sur les représentations et pratiques mathématiques des élèves de l'enseignement secondaire*, IREM, Université Paris 7.
- [7] Bartlett, F. C. (1932): *Remembering*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- [7] Bennett, F. (1996-97): *Computers as tutors: solving the crisis in education*. Doktori disszertáció, University of Minnesota.
- [8] Ben-Zeev, T. (1995a): *The nature and origin of rational errors in arithmetic thinking: Introduction from examples and prior knowledge*. *Cognitive Science*, 19, 341-376.

- [9] Brown, J. S. és VanLehn, K. (1980): *Repair Theory: A generative theory of bugs in procedural skills*. Cognitive Science, 4, 379-426.
- [10] Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P. és Glaser, R. (1989): *Self explanations: How students study and use examples in learning to solve problems*. Cognitive Science, 13, 145-182.
- [11] Chi, M. T. H., Feltovich, P. J. és Glaser, R. (1981): *Categorization and representation of physics problems by experts and novices*. Cognitive Science, 5, 121-152.
- [12] Chi, M. T. H. és VanLehn, K. (1991): *The content of physics self explanations*. Journal of the learning Science, 1, 69-105.
- [13] Czeglédy, I (1994): *Matematika tantárgypedagógia I-II*. Főiskolai jegyzet. Calibra kiadó, Budapest, 27-35.
- [14] Davis, R. B. (1982): *The postulation of certain specific, explicit, commonly-shared frames*. Journal of Mathematical Behavior, 3, 167-201.
- [15] Drijvers, P. (1999): *Students encountering obstacles using a CAS*. Accepted for publication in the International Journal of Computers for Mathematical Learning.
- [16] Dubinsky, E. (2000): *Towards a Theory of Learning Advanced Mathematical Concepts*. In: Abstracts of Plenary Lectures and Regular Lectures. ICME9, Tokyo/Makuhari, Japan.
- [17] Fey, T.J. (1989): *Technology and mathematics education: a survey of recent developments and important problems*. In: Educational Studies in Mathematics 20, 237-272.
- [18] Galbraith, P., Haines, C. (2000): *Mathematics-computing attitude scales*. Monographs in Continuing Education.

[19] Gick, M. L. és Holyoak, K. J. (1980): *Analogical problem solving*. Cognitive Psychology, 12, 306-355.

[20] Gick, M. L. és Holyoak, K. J. (1983): *Schema induction and analogical transfer*. Cognitive Psychology, 15, 1-38.

[21] Goldenberg, E. (1987): *Beleiving is seeing: How preconceptions influence the perception of graphs*. Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol 1, Montreal, pp. 197-204.

[22] Gray, E. M., Tall, D. O. (1991): *Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking*. In: Proceedings of PME 15, Vol. II, pp. 72-79, Assisi, Italy.

[23] Gray, E. M., Tall, D. O. (1994): *Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic*. In: Journal for Research in Mathematics Education, vol. 26, 115-141.

[24] Greeno, J. G. (1980): *Some examples of cognitive task analysis with instructional implications*. In: R. E. Snow, P. Federico és W. E. Montague (Eds.), *Aptitude, learning, and instruction* (Vol. 2, 1-21). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[25] Guin, D., Trouche, L., Lagrange J. (1999): *The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators*. International Journal of Computers for Mathematical Learning 3, pp. 195-227.

[26] Gyöngyösi E. (2002): *Continuing education for mathematics teachers of secondary education to use computers more effectively and to improve education*. In: International Journal for Mathematics Teaching and Learning, March, 1-20.

- [27] Gyöngyösi, E. (2004): *Using the computer to visualise graph-oriented problems*. Under publish in Teaching Mathematics and Computer Science.
- [28] Gyöngyösi, E. (2002): *Mathematics competitions and their role in education*. Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 26 (2002), 115-124.
- [29] Gyöngyösi, E. (2000): *A hazai tanár-továbbképzés helyzete és egy lehetséges modellje/ Continuative education for teachers in Hungary and a potential model*. In: Új Pedagógiai Szemle 2000. február, Budapest
- [30] Hinsley, D., Hayes, J. R. és Simon, H. A. (1977): *From words to equations*. In: M. Just és P. Carpenter (Eds.), Cognitive processes in comprehension (8-106). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- [31] Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. és Thagard, P. R. (1986): *Induction: Processes of inference, learning, and discovery*. Cambridge, MA: MIT Press.
- [32] Holyoak, K. J. és Thagard, P. R. (1989a): *A computational model of analogical problem solving*. In: S. Vosniadou & A. Ortony (Eds.), Similarity and analogical reasoning (242-266). Cambridge, England: Cambridge University Press.
- [33] Holyoak, K. J. és Thagard, P. R. (1989b): *Analogical mapping by constraint satisfaction*. Cognitive Science, 13, 29-355.
- [34] Hudson, T. (1983): *Correspondences and numerical differences between disjoint sets*. Child Development, 54, 84-90.
- [35] Kántorné, Varga T. (1993-94): *Szemléletes bizonyítások*. In: Matematikatanár-képzés matematikatanár-továbbképzés. Az 1993-94. évi Varga Tamás napok előadásai, Kalibra Kiadó, 91-102.

- [36] Kántorné, Varga T. (1995-1996): *A vizualizáció és a modellek szerepe a matematikaoktatásban*, Matematikatanár-képzés Matematikatanár-továbbképzés (95-96. évi Varga Tamás Napok előadásai)23-34.
- [37] Kántorné, Kántor S. (1999), *Nemzetközi magyar matematikaversenyek*. Studium, Debrecen, 1999.
- [38] Kántorné, Varga T. (2002): *Matematikai versenytessztektről*. In: Matematikatanár-képzés matematikatanár-továbbképzés. 6(2002), 87-105.
- [39] Kaput, J.J. (1992): *Technology and mathematics education*. In: D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 515-556, New York: Macmillan.
- [40] Kaput, J.J. (1994): *Technology in mathematics education research: The first 25 years in the JRME*. In: *Journal of Research into Mathematics Education* 25(6), 676-684.
- [41] Kintsch, W. és Greeno, J. G. (1985): *Understanding and solving word problems*. *Psychological Review*, 92, 109-129.
- [42] Kovács A. (1997): *Válogatott érettségi-felvételi feladatok matematikából 1996-1996*. Tóth Könyvkereskedés Kft.
- [43] Lagrange, J. (1999a): *Learning pre-calculus with complex calculators: mediation and instrumental genesis*. In Zaslavsky, O. (Ed): *Proceedings of the XXIIIrd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol 3*, pp. 193-200.
- [44] Lagrange, J. (1999b): *Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus*. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 4, pp. 51-81.

- [45] Lakatos, I. (1998): *Bizonyítások és cáfolatok*. Typotex Kft., Budapest.
- [46] LeFevre, J. és Dixon, P. (1986): *Do written instructions need examples?* Cognition and Instruction, 3, 1-30.
- [47] Lewis, M. W. és Anderson, J. R. (1985): *Discrimination of operator schema in problem solving: Learning from examples*. Cognitive Psychology, 17, 26-65.
- [48] Mackie, D.M. (1992): *An evaluation of computer-assisted learning in mathematics*. In: International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 23(5), 731-737.
- [49] Matz, M. (1982): *Towards a process model for high school algebra errors*. In: D. Sleeman és J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems* (2-49). New York: Academic Press.
- [50] Mayer, R. E. (1981): *Frequency norms and structural analysis of algebra story problems*. Instructional Science, 10, 135-175.
- [51] Mayer, R. E. (1982): *Memory for algebra story problems*. Journal of Educational Psychology, 74, 199-216.
- [52] Mayer, R. E. (1985): *Mathematical ability*. In: R. J. Sternberg (Ed.), *Human abilities: An information-processing approach* (127-150). New York: Freeman.
- [53] Mayes, R. (1997): *Current state of research into CAS in mathematics education*. In Berry, J., Monaghan, J., Kronfellner, M. and Kutzler, B.: *The state of computer algebra in mathematics education*. Bromley: Chartwell-Bratt. Pp. 171-189.
- [54] Meissner H. (2003): *Procepts in Geometry*. In: European Research in Mathematics Education 11.

- [55] Novick, L. R. (1988): *Analogical transfer, problem similarity, and expertise*. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 14, 510-520.
- [56] Novick, L. R. és Holyoak, K. J. (1991): *Mathematical problem solving by analogy*. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 17, 398-415.
- [57] Nyakóné Juhász, K. (1997): *Feljegyzések „Az informatika iskolai alkalmazása” című előadáshoz*. Előadaskivonat, KLTE Debrecen, 1997.
- [58] Paige, J. M. és Simon, H. A. (1966): *Cognitive processes in solving algebra word problems*. In: B. Kleinmuntz (Ed.), *Problem solving. Research, method, and theory* (51-118). New York: Wiley.
- [59] Piaget, J. (1965), *The child's conception of number*. New York: Norton.
- [60] Piaget, J. (1985): *The Equilibrium of Cognitive Structures*. Harvard University Press, Cambridge MA.
- [61] Pirolli, P. L. és Anderson, J. R. (1985): *The role of learning from examples in the acquisition of recursive programming skill*. Canadian Journal of Psychology, 39, 244-272.
- [62] Pólya, Gy. (1994): *A gondolkodás iskolája*. Typotex kiadó, Budapest.
- [63] Pólya, Gy. (1988): *Indukció és analógia*. Gondolat, Budapest
- [64] Resnick, L. B. (1989): *Developing mathematical knowledge*. American Psychologist, 44, 162-169.
- [65] Riley, M. S. és Greeno, J. G. (1988): *Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems*. Cognition and Instruction, 5, 49-101.

- [66] Riley, M. S., Greeno, J. G. és Heller, J. I. (1983): *Development of children's problem solving ability in arithmetic*. In: H. P. Ginsberg (Ed.), *The development of mathematical thinking (153-196)*. San Diego: Academic Press.
- [67] Róka S. (1992), *1000 feladat az elemi matematika köréből*. Typotex Kft, 1992.
- [68] Rosnick, P. és Clement, J. (1980): *Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions*. *Journal of Mathematical Behavior*, 3, 3-27.
- [69] Ross, B. (1984): *Reminders and their effects in learning a cognitive skill*. *Cognitive Psychology*, 16, 371-416.
- [70] Schank, R. és Abelson, R. P. (1977): *Scripts, plans, goals, and understanding: An inquiry into human knowledge structures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- [71] Schoenfeld, A. H. (1988): *When good teaching leads to bad results: The disasters of „well-taught” mathematics courses*. *Educational Psychologist*, 23, 145-166.
- [72] Schoenfeld, A. H. és Hermann, D. J. (1982): *Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers*. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 8, 484-94.
- [73] Sfard, A. (1987): *Two conceptions of mathematical notions: operational and structural*. In: *Proceedings of PME-XI*, vol. III, 162-169, Montréal, Canada.
- [74] Sfard, A. (1992): *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function*. In: G. Harel and E. Dubinsky (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology*

and Pedagogy, MAA Notes, vol. 25, 59-84, Mathematical Association of America, Washington DC.

[75] Sfard, A. és Linchevski, L. (1994): *The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra*. In Educational Studies in Mathematics 26, pp. 191-228.

[76] Simon, H. A. és Anzai, Y. (1979): *The theory of learning by doing*. Psychological Review, 86, 124-140.

[77] Simon, H. A. és Chase, W. G. (1973): *Skill in chess*. American Scientist, 61, 394-403.

[78] Simon, H. A. és Zhu, X. (1988): *Learning mathematics from examples and by doing*. Cognition and Instruction, 4, 137-166.

[79] Skemp, R.R (1978): *A matematika tanulás pszichológiája*. Sternberg, J. R., Ben-Zeev T. (1996): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince kiadó, 41-63.

[80] Sweller, J. és Cooper, G. A. (1985): *The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra*. Cognition and Instruction, 2, 59-89.

[81] Tall, D. (1984): *Visualizing higher level mathematical concepts using computer graphics*. Mathematics Education Research Centre, Warwick University, U.K.

[82] Tall, D. O. (1986): *'Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics'*, Doctoral Thesis, University of Warwick.

[83] Tall, D. O. (ed.) (1991): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL.

[84] Tall, D.O. (1993): *Diagnosing students' difficulties in learning mathematics*. In: Math. Educ. Sci. Technol., 1993, Vol. 24, No. 2, 209-222.

[85] Tall, D. O. , Thomas, M., Davis, G., Gray, E. M., Simpson, A. (2000): *What is the object of the encapsulation of a process?* To appear in: Journal of Mathematical Behavior.

[86] VanLehn, K. (1986): *Arithmetic procedures are induced from examples*. In: J. Hiebert (ed.), Conceptual und procedural knowledge: The case of mathematics (133-179). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[87] VanLehn, K. (1990): *On the representation of procedures in repair theory*. In: H. P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (201-252). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[88] Varga T. (1969), *A matematika tanítása*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.

[89] Warren, E. (1999): *The concept of a variable: gauging students' understanding*. In Zaslavsky, O. Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education Vol 4, pp. 313-320.

A Melléklet

Tanulói tesztfeladatok a disszertáció II. fejezetéhez tartozó grafikus problémákkal kapcsolatban

Elő-teszt

1. feladat. Ábrázolja az alábbi függvényeket derékszögű koordináta rendszerben:

a) $y=x^2/2+5$, (8 pont)

b) $y=-3(x-5)^2+1/2$. (8 pont)

2. feladat. Oldja meg az alábbi egyenletet:

$\sqrt{x-1}=-x+3$. (18 pont)

3. feladat. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $0=x^2-4x+9$, (8 pont)

b) $0=-x^2-6x-13$ (8 pont)

4. feladat. Oldja meg az egyenlőtlenséget:

$5x-3 \leq x^2+4x+3$ (20 pont)

5. feladat. Oldja meg az egyenlőtlenséget az egész számok halmazán:

$\frac{2x-x^2}{2x^2-3x+7} > 0$. (30 pont)

Utóteszt

1. feladat. Ábrázolja az alábbi függvényeket derékszögű koordináta rendszerben:

c) $y = -2x^2 + 5$, (8 pont)

d) $y = -(x-5)^2/3 + 3$. (8 pont)

2. feladat. Oldja meg az egyenletet a természetes számok halmazán:

$\sqrt[3]{2-x} = -3 + \sqrt[3]{x+7}$. (18 pont)

3. feladat. Oldja meg a következő egyenleteket:

c) $0 = x^2 - x - 6$, (8 pont)

d) $0 = -(x+3)^2 - 4$ (8 pont)

4. feladat. Oldja meg az egyenlőtlenséget:

$x-3 \geq x^2 + 4x - 6$. (20 pont)

5. feladat. Oldja meg az egyenlőtlenséget a pozitív számok halmazán:

$$\frac{3x^2 - 7x + 2}{x-1} > 0. \quad (30 \text{ pont})$$

B Melléklet**Az algoritmikus matematika tanár-továbbképzés tartalma**

a, A matematikával kapcsolatos szakmai tananyag ➤ <i>Algebra</i> ➤ <i>Az analízis alapjai</i> ➤ <i>Geometriai transzformációk</i> ➤ <i>Kombinatorika a Valószínűségszámításban</i> ➤ <i>A Számelmélet új problémái</i> ➤ <i>Számelmélet</i>	b, Választható tárgyak ➤ <i>Az Oktatás gazdasági és politikai tényezői, az oktatáspolitikai időszerű kérdései</i> ➤ <i>A Matematikai logika alapjai</i> ➤ <i>Egyenlőtlenségek</i> ➤ <i>Elemi függvények</i> ➤ <i>Az Euklideszi szerkeszthetőség algebrai alapjai</i> ➤ <i>Problémamegoldás a geometriai versenyeken</i> ➤ <i>Gráfelmélet</i> ➤ <i>A Valószínűségszámítás kiegészítő elemei</i> ➤ <i>Diofantikus egyenletek</i> ➤ <i>Paradoxonok a valószínűségszámításban</i> ➤ <i>Leíró topológia</i> ➤ <i>Szélsőérték számítás</i> ➤ <i>A tanítás módszertana</i> ➤ <i>A Tanulás pszichológiája</i> ➤ <i>Tanmenet fejlesztés</i>
b) A számítógépekkel segített matematika tanítással kapcsolatos speciális tantárgyak <i>Számítástechnika I., Számítógépes ismeretek II, Adatszerkezetek és algoritmusok, Analízis számítógéppel, Görbe és felületelmélet, Információelmélet, Komputergeometria (Derive, MATHEMATICA, CAD, CAD-3D), Konstruktív számelmélet, Statisztika számítógépes alkalmazásokkal.</i>	

C Melléklet

Gyöngyösi Erika Publikációi

- [1] A hazai tanár-továbbképzés helyzete és egy lehetséges modellje /Continuative education for teachers in Hungary and a potential model/ In *Új Pedagógiai Szemle* 2000. február, Budapest.
- [2] Continuing education for mathematics teachers of secondary education to use computers more effectively and to improve education. In: *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* (2002) March., Exeter.
- [3] Mathematics Competitions and Their Role in Education. In *Acta Acad. Agriensis Sectio Mathematicae*, Eger, 29 (2002), 115-124.
- [4] How to improve mathematical education? Publikációra elfogadva a konferencia kiadványban, Varga Tamás Napok Konferencia, ELTE, Budapest, 2002.
- [5] On some special Finsler Metrics in Psychometry by Sándor Bácsó, Erika Gyöngyösi, Ildikó Papp, Brigitta Szilágyi. In *Acta Acad. Agriensis Sectio Mathematicae*. Eger, 30 (2003), 23-30.
- [6] Using the computer to visualise graph-oriented problems. Publikációra elfogadva a *Teaching Mathematics and Computer Science*.
- [7] A számítógéppel segített oktatás/Computer-aided teaching/ Publikációra elfogadva *Új Pedagógiai Szemle*

Előadások

03/10 **Tanár-továbbképző Programok, City University, London**

Előadás a Debreceni Egyetemen tartott algoritmikus matematika tanár-továbbképző programról és annak hatékonyságáról.

02/11 **How to Improve Mathematics Education,**

Előadás a Varga Tamás Emléknapokra, Eötvös Lóránt Tudományegyetem, Budapest. Magyarország.