Doktori (PhD) értekezés tézisei

Aszimptotikus eredmények a valószínűségszámítás területén

Pecsora Sándor
Témavezető: Dr. Fazekas István

DEBRECENI EGYETEM
Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2023.

1. Exponenciális és Rosenthal-egyenlőtlenségek

A második fejezetben a [Fazekas, Pecsora, Porvázsnyik (2018)] cikkünk alapján exponenciális és Rosenthal egyenlőtlenségeket tárgyalunk. Legyen $d > 0$ valós szám és legyen ξ egy valószínűségi változó. A továbbiakban

$$\xi^{(d)} = \min\{\xi, d\}$$

jelöli a felülről csonkított valószínűségi változót.

Az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ valószínűségi változók sorozatára tekintsük a következő feltételt:

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda\eta_i} \leq g(n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{\lambda\eta_i} \tag{1.1}$$

ahol $0 < g(n) < \infty$.

A következőkben látni fogjuk, hogy, ha feltesszük a (1.1) feltételt a λ pozitív értékeire a megfelelően csonkított valószínűségi változókra, akkor meg fogjuk kapni az egyoldali exponenciális egyenlőtlenséget. Ha pedig feltesszük a (1.1) feltételt a λ pozitív és negatív értékeire is, akkor meg fogjuk kapni a kétoldali exponenciális egyenlőtlenséget.

A következő tételben szereplő exponenciális egyenlőtlenséget negatívan ortáns függő (negatively orthant dependent, továbbiakban NOD) valószínűségi változókra kapták meg a [Gan, Chen, Qiu (2011)] 3. Lemmájában, valamint kiterjesztett negatívan függő (extended negatively dependent, továbbiakban END) valószínűségi változókra a [Wu, Guan (2012)] 1.2 Lemmájában.

1.1. Tétel. *Legyen* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *valószínűségi változók egy sorozata,* $d > 0$. *Legyen* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *az összegük és* $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2$ *a szórásnégyzetek összege.*

Feltételezzük, hogy (1.1) *teljesül* $\eta_i = X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$*-re* $0 < \lambda \leq \lambda_0$ *esetén. Akkor minden olyan* x*-re, melyre* $0 < x \leq (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$, *a következő igaz*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n > x) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i > d\right) + \\ + g(n) \exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ha pedig (1.1) *teljesül* $\eta_i = X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *és* $\eta_i = (-X_i)^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *esetén is minden* $0 < \lambda \leq \lambda_0$*-ra, akkor minden olyan* x*-re, melyre* $0 < x \leq (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$ *a következő teljesül:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| > x) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| > d\right) + \\ + 2g(n) \exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Most a Hoeffding-egyenlőtlenséggel folytatjuk, mellyel Wassily Hoeffding 1963-ban megjelent "Probability inequalities for sums of bounded random variables" című írásában találkozhatunk először [**?**]. Hoeffding eredeti eredménye független valószínűségi változókra vonatkozik. Később ezt kiterjesztették egyes függő sorozatokra is. A következő tétel a [Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)] 2.3 Tételének egy változata, melyben elfogadható valószínűségi változókat tekintettek.

1.2. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók egy sorozata. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az összeg. Legyenek a valószínűségi változók korlátosak, azaz $a_i \le X_i \le b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$-re, ahol a_i és b_i valós számok. Tegyük fel, hogy (1.1) teljesül $\eta_i = X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ és $0 < \lambda \le \lambda_0$ esetén. Akkor minden olyan ε-ra, hogy $0 < \varepsilon \le \frac{\lambda_0}{4} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$, a következő igaz:*

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}S_n \ge \varepsilon) \le \le g(n) \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right). \tag{1.4}$$

Tegyük fel, hogy (1.1) teljesül $\eta_i = X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ és $|\lambda| \le \lambda_0$ esetén. Akkor minden olyan ε-ra, hogy $0 < \varepsilon \le \frac{\lambda_0}{4} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$, teljesül a következő:

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S_n| \ge \varepsilon) \le \le 2g(n) \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right). \tag{1.5}$$

A következő tételünk lényege az, hogy nem teszünk fel a kiinduló valószínűségi változók között semmilyen függőségi feltételt, hanem absztrakt módon egy exponenciális egyenlőtlenség teljesülése esetére vezetjük le a Rosenthal-típusú egyenlőtlenséget.

1.3. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ nulla várhatóértékű valószínűségi változók egy sorozata, továbbá legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az összegük és B_n pozitív számok egy so-*

rozata. Tegyük fel,

$$\mathbb{P}\left(|S_n| > x\right) \leq l(n)\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}|X_i| > d\right) + \\ + h(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right) \tag{1.6}$$

teljesül minden $x > 0$ és $d > 0$ esetén, ahol $l(n)$ és $h(n)$ valós számok. Akkor $p > 0$-ra

$$\mathbb{E}|S_n|^p \leq C_1 l(n)\mathbb{E}\max_{1\leq i\leq n}|X_i|^p + C_2 h(n) B_n^{p/2} \tag{1.7}$$

teljesül, ahol $C_1 = p^p$, $C_2 = \frac{1}{2}p^{1+p/2}e^p B\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ abszolút konstansok, a $B(u,v)$ béta függvénnyel.

A továbbiakban bemutatjuk, hogy egy általános exponenciális egyenlőtlenségből következik egy Baum–Katz-típusú tétel. A nagy számok törvényeinek vannak úgynevezett teljes konvergenciát (complete convergence) kimondó változatai.

Azt mondjuk, hogy $Y_n \to 0$ teljesen, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|Y_n| > \varepsilon\right) < \infty.$$

A Borel-Cantelli-lemma alapján látható, hogy a teljes konvergenciából következik az 1 valószínűséggel való konvergencia.

A nagy számok törvényének teljes konvergenciát kimondó változata Hsu–Robbins és Erdős nevéhez fűződik.

A következő tételünk egy Baum–Katz-típusú tétel.

1.4. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók egy sorozata, továbbá legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ a részösszegük. Legyen $0 < p < 2$ és α egy pozitív szám. Tegyük fel, hogy az exponenciális egyenlőtlenség teljesül csonkított és centralizált valószínűségi változókra, azaz*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n \left(\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right)\right| > x\right) \leq \\ \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} \left|\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right| > d\right) + \\ + g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

minden $t > 0$, $x > 0$, $d > 0$ és $n = 1, 2, \dots$ esetén, ahol $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right)^2$. Tegyük fel, hogy $g(.)$ reguláris változású r kitevővel, ahol $0 < r < \alpha(2-p)$. Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \dots$ átlagosan gyengén dominált (weakly mean dominated, wmd) az X valószínűségi változó által, melyre $\mathbb{E}|X|^p g(|X|^{1/\alpha}) < \infty$. Ha $0 < p < 1$, akkor feltesszük, hogy $\alpha p > 1$. Ha $1 \leq p < 2$, akkor feltesszük, hogy $\alpha p \geq 1$ és $\mathbb{E}X_i = 0$ minden i-re. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2}\mathbb{P}\left(|S_n| > \varepsilon n^{\alpha}\right) < \infty.$$

2. A von Bahr–Esseen egyenlőtlenségek és alkalmazásaik

A harmadik fejezetben a [Fazekas, Pecsora (2017)] cikkünk alapján von Bahr–Esseen egyenlőtlenségeket és alkalmazásaikat tárgyaljuk.

2.1. Tétel. *Legyen* $1 < p < q$. *Legyen* $X_n, n = 1, 2, \dots$ *valószínűségi változók egy sorozata és* $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ *minden* $n = 1, 2, \dots$*-re. Tegyük fel, hogy tetszőleges* $x > 0$ *esetén*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}^{(-x)}X_k^{(x)}\right)\right|^q \leq \\ \leq g_q(n)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|{}^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}^{(-x)}X_k^{(x)}\right|^q. \tag{2.1}$$

Akkor

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \leq f_{p,q}(n)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_k|^p, \tag{2.2}$$

ahol $f_{p,q}(n)$ *csak* $g_q(n)$*-től,* p*-től és* q*-tól függ (egy lehetséges választás az* $f_{p,q}(n) = 5 + 2c_q g_q(n) 2^q \left(\frac{q}{q-p}\right)^2$, *ahol* $c_q = 2^{q-1}$*).*

Tekintsük a következő feltételt

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda\eta_i} \leq g(n)\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}e^{\lambda\eta_i}. \tag{2.3}$$

Ha a (2.3) feltétel teljesül $g(n) = 1$-re és tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, akkor az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$-t tágabb értelemben elfogadhatónak nevezzük. Látható, hogy, ha (2.3) igaz $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$

esetén, akkor igaz $\eta_1 - a_1, \eta_2 - a_2, \ldots, \eta_n - a_n$ esetén is, minden valós $a_1, \ldots, a_n$ számra, speciálisan igaz $\eta_1 - \mathbb{E}\eta_1$, $\eta_2 - \mathbb{E}\eta_2, \ldots, \eta_n - \mathbb{E}\eta_n$ esetén.

2.2. Tétel. *Legyen $1 < p \leq 2$. Legyen $X_n, n = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók egy sorozata, úgy, hogy $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Tegyük fel, hogy (2.3) teljesül tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\eta_i =^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$ esetén minden $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$-re. Akkor*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \leq f_p(n) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p, \tag{2.4}$$

ahol $f_p(n)$ csak $g(n)$-től és p-től függ.

A következő tétel egy nagy számok gyenge törvénye, amelyben L_p konvergenciát is bizonyítunk.

2.3. Tétel. *Legyen $1 < p < 2$. Legyen az $X_n, n = 1, 2, \ldots$ sorozat átlagosan gyengén dominált az X valószínűségi változó által, ahol $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}X_n = 0$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Tegyük fel, hogy (2.3) teljesül $g(n) = C$-re, tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$-re és $\eta_i = {}^{(a_i)}X_i^{(b_i)}$-re minden $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots$ esetén. Akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p = 0. \tag{2.5}$$

Továbbá,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \tag{2.6}$$

valószínűségben.

2.4. Tétel. *Legyen* $0 < p < 2$, $1 \leq r < 2$, *és* $0 < \alpha < 2$. *Legyen az* X_n, $n = 1, 2, \ldots$ *sorozat átlagosan gyengén dominált az* X *valószínűségi változó által. Tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}X_n = 0$ *minden* $n = 1, 2, \ldots$*-re. Tegyük fel, hogy* (2.3) *teljesül* $g(n) = C$ *esetén minden* $\lambda \in \mathbb{R}$*-re és* $\eta_i =^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$*-re tetszőleges* $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots$ *esetén.*
(i) Ha $r < \alpha$, *akkor feltesszük, hogy* $\mathbb{E}|X|^\alpha < \infty$.
(ii) Ha $r = \alpha$, *akkor feltesszük, hogy* $\mathbb{E}|X|^r \log(1 + |X|) < \infty$.
(iii) Ha $r > \alpha$, *akkor feltesszük, hogy* $\mathbb{E}|X|^r < \infty$.
Akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2} \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k \right| - \varepsilon \right\}_+^r < \infty \qquad (2.7)$$

minden $\varepsilon > 0$*-ra, 2.7 a teljes momentum konvergencia, ami implikálja a teljes konvergenciát.*

3. Perturbált mátrixok vizsgálata

A negyedik fejezetben a [Fazekas, Pecsora (2020)I] és a [Fazekas, Pecsora (2020)II] cikkeink alapján perturbált mátrixokat vizsgálatát tárgyaljuk. Tekintsünk egy rögzített P determinisztikus sablon (pattern) mátrixot, ezt felfújjuk, hogy megkapjunk egy „nagy” B_n blokk-mátrixot, majd hozzáadunk egy W_n véletlen zajt. A következőkben határérték tételeket bizonyítunk be az $A_n = B_n + W_n$ sajátértékeire, ahogy $n \to \infty$.

A következő tételben B_n és W_n egyaránt komplex hermitikus mátrixok (speciális esetben szimmetrikus valós mátrixok).

3.1. Tétel. *Legyen B_n, $n = 1, 2, \ldots$, komplex hermitikus mátrixok egy sorozata. A W_n, $n = 1, 2, \ldots$ Wigner-mátrixok legyenek komplex hermitikus mátrixok, melyek teljesítik a következő feltételeket. Legyenek a W_n főátlóján lévő w_{ii} elemek független azonos eloszlású valós valószínűségi változók, továbbá legyenek a főátló feletti elemek független azonos eloszlású komplex valószínűségi változók és mindezek az elemek legyenek függetlenek. Legyen $w_{ij} = \bar{w}_{ji}$ minden i, j-re. Feltételezzük, hogy $\mathbb{E}w_{11}^2 < \infty$, $\mathbb{E}w_{12} = 0$, $\mathbb{E}|w_{12} - \mathbb{E}w_{12}|^2 = \sigma^2$ véges és pozitív, $\mathbb{E}|w_{12}|^4 < \infty$. Akkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_i(B_n + W_n) - \lambda_i(B_n)|}{\sqrt{n}} \leq 2\sigma \tag{3.1}$$

minden i-re majdnem biztosan.

Most tekintsük azokat a perturbáló mátrixokat, melyek elemei független azonos eloszlású komplex számok.

Legyen x_{jk}, $j,k = 1,2,\ldots$, egy végtelen tömb, mely elemei független azonos eloszlású komplex valószínűségi változók, nulla várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Legyen $X = (x_{jk})_{j=1,\ k=1}^{m,\ \ n}$ a bal felső sarokban lévő $m \times n$ méretű blokk.

3.2. Tétel. *Minden m-re és n-re legyen B egy $m \times n$ méretű komplex mátrix és legyen $X = X_{mn}$ egy fent leírt $m \times n$ méretű komplex mátrix, mely elemei független azonos eloszlásúak. Továbbá, tegyük fel, hogy X elemei rendelkeznek véges negyedik momentummal. Tegyük fel, hogy $m, n \to \infty$ úgy, hogy $K_1 \le \frac{m}{n} \le K_2$, ahol $0 < K_1 \le K_2 < \infty$ rögzített konstansok. Jelölje rendre s_i és z_i B és $B + X$ szinguláris értékeit, $s_1 \ge \cdots \ge s_{\min\{m,n\}}$, $z_1 \ge \cdots \ge z_{\min\{m,n\}}$. Akkor, minden i-re*

$$|s_i - z_i| = \mathrm{O}(\sqrt{n})$$

ahogy $m, n \to \infty$, majdnem biztosan.

Most általános feltételek mellett megmutatjuk, hogy a sajátértékek „nagyok”, ha a várható értékek pozitívak. Ez a tétel egy kiterjesztése a [Bolla (2005)] 4.1 Tételének olyan mátrixokra, melyek minden sorában elfogadható valószínűségi változók vannak.

3.3. Tétel. *Legyenek x_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots$ nemnegatív valós valószínűségi változók, $0 \le x_{ij} \le K < \infty$ minden i,j-re. Tegyük fel, hogy minden sor teljesíti a következő elfogadhatósági feltételt:*

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n} tx_{ki}} \le \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{tx_{ki}} \tag{3.2}$$

tetszőleges $t \le 0$-re és minden $k, n = 1,2,\ldots$ esetén. Legyen $m_{kn} = \mathbb{E}x_{k1} + \mathbb{E}x_{k2} + \cdots + \mathbb{E}x_{kn}$ és

$\sigma_{kn}^2 = \mathbb{D}^2 x_{k1} + \mathbb{D}^2 x_{k2} + \cdots + \mathbb{D}^2 x_{kn}$ *tetszőleges* k, n*-re. Tegyük fel, hogy léteznek* c_1, c_2 *pozitív véges konstansok,* δ *és* Δ *teljesítik a* $0 < \delta \leq \Delta \leq 1/2$ *egyenlőtlenséget és olyanok, hogy*

$$m_{kn} \geq c_1 n^{\delta+1/2}, \qquad \sigma_{kn}^2 \leq c_2 n^{\Delta+1/2}$$

minden $k, n = 1, 2, \ldots$*-re. Jelölje* $X_n = (x_{ij})_{i,j=1}^n$ *a fenti végtelen mátrix bal felső sarkában lévő* $n \times n$ *részt. Akkor a maximális sajátértékre teljesül*

$$\lambda_{\max}(X_n) \geq c_1 n^{\varepsilon+1/2}$$

kivéve véges sok n*-et, majdnem biztosan tetszőleges olyan* ε*-ra, melyre* $0 < \varepsilon < \delta$.

Végül, a disszertáció negyedik fejezetének végén a perturbált mátrixok sajátértékeire vonatkozó eredményeinket numerikus példákkal illusztráljuk, és egy grafikus módszert adunk a strukturális sajátértékek elkülönítésére. Legyenek $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ a felfújt és perturbált mátrix sajátértékei csökkenő sorrendben, akkor a strukturális sajátértékek $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_l|$ „nagyok" és gyorsan csökkennek. A többi sajátérték $|\lambda_{l+1}| \geq |\lambda_{l+2}| \geq \ldots$ relatív kicsik és nagyon lassan csökkennek. Tehát könnyen megtalálhatóak a strukturális sajátértékek. Ahhoz, hogy megkapjuk a strukturális sajátértékeket, a következő numerikus (grafikus) módszert javasoljuk:

- Megkeressük A néhány sajátértékét, az abszolút érték szerinti legnagyobbal kezdve, majd a rákövetkezőt és így tovább.

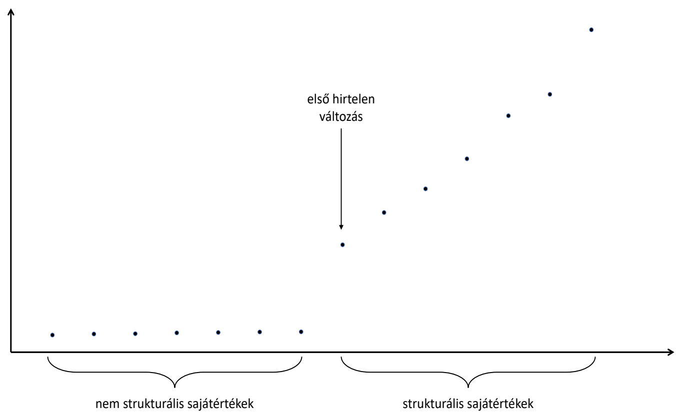
- Addig folytatjuk az első lépést, míg a legutoljára kapott 5-10 sajátérték közel van a nullához és az abszolút értékük majdnem nulla.

- Az így kapott $|\lambda_t| \leq |\lambda_{t-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_1|$ növekvő sorozatot ebben a sorrendben ábrázoljuk, majd megkeressük a hirtelen változást.

Amennyiben

$$0 \approx |\lambda_t| \approx |\lambda_{t-1}| \approx \cdots \approx |\lambda_{l+1}| \ll |\lambda_l| < \cdots < |\lambda_1|,$$

akkor a hirtelen változás l-nél következik be, tehát $\lambda_l, \lambda_{l-1}, \ldots, \lambda_1$ tekinthető a strukturális sajátértékeknek. A tipikus hirtelen változás a nem strukturális és strukturális sajátértékek között a következő ábrán látható:



1. Ábra. A hirtelen változás a nem strukturális sajátértékeket követően

Hasonló módszer igaz a szinguláris értékek esetén is. A kapott numerikus eredmények stabilak voltak abban az értelemben, hogy kicsi volt a szórásnégyzet, illetve a sajátértékek viselkedése hasonló volt a feltételek széles spektruma mellett.

Irodalomjegyzék

[Bolla (2005)] Bolla, M. Recognizing linear structure in noisy matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 402 (2005), 228–244.

[Fazekas, Pecsora, Porvázsnyik (2018)] I. Fazekas, S. Pecsora, B. Porvázsnyik: General theorems on exponential and Rosenthal's inequalities and on complete convergence. *Journal of Mathematical Inequalities* 12 (2), 2018, 433-446.

[Fazekas, Pecsora (2017)] Fazekas, I. and Pecsora, S. General Bahr–Esseen inequalities and their applications. *Journal of inequalities and applications*, 2017:191 (2017).

[Fazekas, Pecsora (2020)I] Fazekas, I., Pecsora, S. On the spectrum of noisy blown-up matrices. *Special Matrices*, 8 no. 1 (2020), 104–122.

[Fazekas, Pecsora (2020)II] Fazekas, I., Pecsora, S. Numerical results on noisy blown-up matrices *Annales Mathematicae et Informaticae.* 51. pp. 17-28. ISSN 1787-6117 (Online),(2020) [Gan, Chen, Qiu (2011)] Gan, Shixin; Chen, Pingyan; Qiu, Dehua. Rosenthal inequality for NOD sequences and its applications. *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.* 16, no. 3 (2011), 185–189.

[Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)] Shen, Aiting; Hu, Shuhe; Volodin, Andrei; Wang, Xuejun. Some exponential inequalities for acceptable random variables and complete convergence. *J. Inequal. Appl.*, 2011:142 (2011), 10 pp.

[Wu, Guan (2012)] Wu, Yongfeng; Guan, Mei. Convergence properties of the partial sums for sequences of end random variables. *J. Korean Math. Soc.* 49, no. 6 (2012), 1097–1110.

DEBRECENI EGYETEM

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/60/2023.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Pecsora Sándor
Doktori Iskola: Informatikai Tudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10054512

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: Numerical results on noisy blown-up matrices.
   Ann. Math. Inform. 51, 17-28, 2020. ISSN: 1787-5021.
   DOI: http://dx.doi.org/10.33039/ami.2020.07.001

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

2. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: On the spectrum of noisy blown-up matrices.
   Special Matrices. 8 (1), 104-122, 2020. EISSN: 2300-7451.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1515/spma-2020-0010

3. Fazekas, I., **Pecsora, S.**, Porvázsnyik, B.: General theorems on exponential and Rosenthal's inequalities and on complete convergence.
   J. Math. Inequal. 12 (2), 433-446, 2018. ISSN: 1846-579X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.7153/jmi-2018-12-32
   IF: 1.158

4. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: General Bahr-Esseen inequalities and their applications.
   J. Inequal. Appl. 2017 (191), 1-16, 2017. EISSN: 1029-242X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1186/s13660-017-1468-y
   IF: 0.966

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

5. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: A generalization of the Barabási-Albert random tree.
   Ann. Math. Inform. 44, 71-85, 2015. ISSN: 1787-5021.

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 2,124

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 2,124

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2023.03.01.

Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

Asymptotic results on the field of probability

by Sándor Pecsora

Supervisor: Dr. István Fazekas

University of Debrecen

Doctoral School of Informatics

Debrecen, 2023.

1 Exponential and Rosenthal-inequalities

In the second section we discuss exponential and Rosenthal-inequalities, based on our paper [Fazekas, Pecsora, Porvázsnyik (2018)]. Let $d > 0$ be a real number and ξ a random variable. Hereinafter

$$\xi^{(d)} = \min\{\xi, d\}$$

will denote the r.v. truncated from above.

For a sequence of r.v.'s $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ we shall consider the condition

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda\eta_i} \leq g(n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{\lambda\eta_i} \tag{1.1}$$

where $0 < g(n) < \infty$.

We shall see that, if we assume, that (1.1) condition is satisfied for positive values of λ and for the appropriately truncated r.v's, then we shall obtain a one-sided exponential inequality. If we assume condition (1.1) both for positive and negative values of λ, then shall we obtain a two-sided exponential inequality.

The following type exponential inequality was obtained for negatively orthant dependent r.v.'s in Lemma 3 of [Gan, Chen, Qiu (2011)] and for extended negatively dependent r.v.'s in Lemma 1.2 of [Wu, Guan (2012)].

Theorem 1.1. *Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a sequence of zero mean r.v.'s, $d > 0$. Let $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ be the sum and $B_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^2$ be the sum of variances. Assume that (1.1) is satisfied for $\eta_i = X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ and*

$0 < \lambda \leq \lambda_0$. *Then for any* x *with* $0 < x \leq (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$, *we have*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_n > x\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i > d\right) + \\ +g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)\right).\end{aligned} \tag{1.2}$$

If (1.1) *is satisfied both for* $\eta_i = X_i^{(d)}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, *and* $\eta_i = (-X_i)^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *and* $0 < \lambda \leq \lambda_0$, *then for any* x *with* $0 < x \leq (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$ *we have*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|S_n| > x\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| > d\right) + \\ +2g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)\right).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Now we turn to Hoeffding's inequality, which can be found in Wassily Hoeffding's "Probability inequalities for sums of bounded random variables" work, published in 1963 [Hoeffding (1963)]. It was obtained for independent random variables. Then it was extended to certain depended sequences. Our next theorem is a version of Theorem 2.3 in [Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)], where acceptable r.v.'s were considered.

Theorem 1.2. *Let* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *be a sequence of r.v.'s. Let* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *be the sum. Let the random variables be bounded, i.e.* $a_i \leq X_i \leq b_i$ *for* $i = 1, 2, \ldots, n$, *where* a_i *and* b_i *are real numbers. Assume that* (1.1) *is satisfied with* $\eta_i = X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *and* $0 < \lambda \leq \lambda_0$. *Then for any* ε *with* $0 < \varepsilon \leq \frac{\lambda_0}{4}\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$, *we have*

$$\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}S_n \geq \varepsilon\right) \leq g(n)\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right). \tag{1.4}$$

Assume that (1.1) *is satisfied for* $\eta_i = X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *and* $|\lambda| \leq \lambda_0$. *Then for any* ε *with* $0 < \varepsilon \leq \frac{\lambda_0}{4} \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2$, *we have*

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq \varepsilon\right) \leq 2g(n) \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right). \tag{1.5}$$

In our next theorem we do not assume any dependence condition on the initial random variables, but we show, that if an exponential inequality holds, it implies a Rosenthal-type inequality.

Theorem 1.3. *Let* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *be a sequence of zero mean r.v.'s, let* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *be their sum and* B_n *be a sequence of positive numbers. Assume that*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|S_n| > x\right) \leq l(n)\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| > d\right) + \\ + h(n) \exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d} \ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

is satisfied for any $x > 0$ *and* $d > 0$ *where* $l(n)$ *and* $h(n)$ *are some real numbers. Then, for* $p > 0$ *we have*

$$\mathbb{E}|S_n|^p \leq C_1 l(n) \mathbb{E} \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|^p + C_2 h(n) B_n^{p/2}, \tag{1.7}$$

where $C_1 = p^p$, $C_2 = \frac{1}{2} p^{1+p/2} e^p B\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ *are absolute constants with* $B(u, v)$ *being the beta function.*

Now we show, that a Baum-Katz-type theorem follows from a general exponential inequality. The law of large numbers has varieties which state complete convergence.

We say, that $Y_n \to 0$ completely, if $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|Y_n| > \varepsilon\right) < \infty.$$

Our next theorem is a Baum-Katz-type theorem.

Theorem 1.4. *Let $X_1, X_2, \dots$ be a sequence of r.v.'s, let $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ be their partial sum. Let $0 < p < 2$ and let α be a positive number. Assume that the exponential inequality is satisfied for the truncated and centered r.v.'s, that is*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right)\right| > x\right) \leq \\ &\leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}\left|\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right| > d\right) + \\ &+g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

for all $t > 0$, $x > 0$, $d > 0$ and $n = 1, 2, \dots,$ where $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right)^2$. Assume that $g(.)$ is regularly varying with exponent r, where $0 < r < \alpha(2-p)$. Assume that $X_1, X_2, \dots$ is weakly mean dominated by the r.v. X for which $\mathbb{E}|X|^p g(|X|^{1/\alpha}) < \infty$. If $0 < p < 1$, then assume $\alpha p > 1$. If $1 \leq p < 2$, then assume $\alpha p \geq 1$ and $\mathbb{E}X_i = 0$ for all i. Then we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2}\mathbb{P}\left(|S_n| > \varepsilon n^{\alpha}\right) < \infty.$$

2 The von Bahr–Esseen inequalities and their applications

In the third section we discuss von Bahr–Esseen inequalities and their applications, based on our paper [Fazekas, Pecsora (2017)].

Theorem 2.1. *Let $1 < p < q$. Let $X_n, n = 1, 2, \dots$ be a sequence of random variables with $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ for all $n = 1, 2, \dots$. Assume that for any $x > 0$*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}\,{}^{(-x)}X_k^{(x)}\right)\right|^q \leq \\ &\leq g_q(n)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|{}^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}\,{}^{(-x)}X_k^{(x)}\right|^q . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Then

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \leq f_{p,q}(n)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_k|^p, \tag{2.2}$$

where $f_{p,q}(n)$ depends only on $g_q(n)$, p and q (a possible choice is $f_{p,q}(n) = 5 + 2c_q g_q(n) 2^q \left(\frac{q}{q-p}\right)^2$, where $c_q = 2^{q-1}$).

Consider the condition

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda\eta_i} \leq g(n)\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}e^{\lambda\eta_i}. \tag{2.3}$$

If condition (2.3) is satisfied for $g(n) = 1$ and for all $\lambda \in \mathbb{R}$, then $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ are called acceptable. It is easy to see that, if (2.3) is true for $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, then it is true for $\eta_1 - a_1, \eta_2 - a_2, \dots, \eta_n - a_n$ for any real numbers $a_1, \dots, a_n$, in particular it is true for $\eta_1 - \mathbb{E}\eta_1, \eta_2 - \mathbb{E}\eta_2, \dots, \eta_n - \mathbb{E}\eta_n$.

Theorem 2.2. *Let $1 < p \leq 2$. Let $X_n, n = 1, 2, \dots$ be a sequence of random variables with $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ for all $n = 1, 2, \dots$. Assume that (2.3) is satisfied for any $\lambda \in \mathbb{R}$ and for $\eta_i =^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$ for any $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Then*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \leq f_p(n) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p, \tag{2.4}$$

where $f_p(n)$ depends only on $g(n)$ and p.

The following theorem contains a weak law of large numbers and L_p-convergence.

Theorem 2.3. *Let $1 < p < 2$. Let the sequence $X_n, n = 1, 2, \dots$ be weakly mean dominated by the r.v. X with $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Assume that $\mathbb{E}X_n = 0$ for all $n = 1, 2, \dots$. Assume that (2.3) is satisfied with $g(n) = C$ for any $\lambda \in \mathbb{R}$ and for $\eta_i = {}^{(a_i)}X_i^{(b_i)}$ with any $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \dots$. Then*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p = 0. \tag{2.5}$$

Moreover,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \tag{2.6}$$

in probability.

Theorem 2.4. *Let $0 < p < 2$, $1 \leq r < 2$, and $0 < \alpha < 2$. Let the sequence X_n, $n = 1, 2, \dots$ be weakly mean dominated by the r.v. X. Assume that $\mathbb{E}X_n = 0$ for all $n = 1, 2, \dots$. Assume that (2.3) is satisfied with $g(n) =$*

C for any $\lambda \in \mathbb{R}$ and for $\eta_i =^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$ with any $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \dots$.
(i) If $r < \alpha$, then assume $\mathbb{E}|X|^\alpha < \infty$.
(ii) If $r = \alpha$, then assume $\mathbb{E}|X|^r \log(1 + |X|) < \infty$.
(iii) If $r > \alpha$, then assume $\mathbb{E}|X|^r < \infty$.
Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2} \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k \right| - \varepsilon \right\}_+^r < \infty \tag{2.7}$$

for any $\varepsilon > 0$.

3 Perturbed matrices

In the fourth section we discuss Perturbed matrices, based on our papers [Fazekas, Pecsora (2020)I] and [Fazekas, Pecsora (2020)II]. We consider a fixed deterministic pattern matrix P, blow it up to obtain a „large" block-matrix B_n and add a random noise W_n, say. We prove limit theorems for the eigenvalues of $A_n = B_n + W_n$ as $n \to \infty$.

In our next theorem both B_n and W_n are complex Hermitian matrices (in particular, symmetric real matrices).

Theorem 3.1. *Let B_n, $n = 1, 2, \dots,$ be a sequence of complex Hermitian matrices. Let the Wigner matrices W_n, $n = 1, 2, \dots,$ be complex Hermitian random matrices satisfying the following assumptions. Let the diagonal elements w_{ii} of W_n be i.i.d. real, let the above diagonal elements be i.i.d. complex random variables and let all of these be independent. Let $w_{ij} = \bar{w}_{ji}$ for all i, j. Assume that $\mathbb{E}w_{11}^2 < \infty$, $\mathbb{E}w_{12} = 0$, $\mathbb{E}|w_{12} - \mathbb{E}w_{12}|^2 = \sigma^2$ is finite and positive, $\mathbb{E}|w_{12}|^4 < \infty$. Then*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_i(B_n + W_n) - \lambda_i(B_n)|}{\sqrt{n}} \leq 2\sigma \qquad (3.1)$$

for all i almost surely.

Now we consider perturbation with matrices having independent and identically distributed complex entries. Let x_{jk}, $j, k = 1, 2, \dots,$ be an infinite array of i.i.d. complex valued random variables with mean 0 and variance σ^2. Let $X = (x_{jk})_{j=1,\ k=1}^{m,\ \ n}$ be the left upper block of size $m \times n$.

Theorem 3.2. *For each m and n let $B = B_{mn}$ be a complex matrix of size $m \times n$ and let $X = X_{mn}$ be the above* *complex valued random matrix of size* $m \times n$ *with i.i.d. entries. Moreover, assume that the entries of* X *have finite fourth moments. Assume that* $m, n \to \infty$ *so that* $K_1 \le \frac{m}{n} \le K_2$*, where* $0 < K_1 \le K_2 < \infty$ *are fixed constants. Denote by* s_i *and* z_i *the singular values of* B *and* $B + X$*, respectively,* $s_1 \ge \cdots \ge s_{\min\{m,n\}}$*,* $z_1 \ge \cdots \ge z_{\min\{m,n\}}$*. Then for all* i

$$|s_i - z_i| = \mathrm{O}(\sqrt{n})$$

as $m, n \to \infty$ *almost surely.*

Now we show under general conditions, that the eigenvalues ar „large”, if the means are positive. This theorem is an extension of the Theorem 4.1 of [Bolla (2005)] to random matrices having acceptable random variables in each row.

Theorem 3.3. *Let* x_{ij}*,* $i, j = 1, 2, \ldots$ *be bounded non-negative real random variables,* $0 \le x_{ij} \le K < \infty$ *for each* i, j*. Assume that each row satisfies the following acceptability condition:*

$$\mathbb{E} e^{\sum_{i=1}^{n} t x_{ki}} \le \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E} e^{t x_{ki}} \tag{3.2}$$

for any $t \le 0$ *and for each* $k, n = 1, 2, \ldots$*. Let* $m_{kn} = \mathbb{E} x_{k1} + \mathbb{E} x_{k2} + \cdots + \mathbb{E} x_{kn}$ *and* $\sigma_{kn}^2 = \mathbb{D}^2 x_{k1} + \mathbb{D}^2 x_{k2} + \cdots + \mathbb{D}^2 x_{kn}$ *for any* k, n*. Assume that there exist positive finite constants* c_1*,* c_2*,* δ *and* Δ *satisfying* $0 < \delta \le \Delta \le 1/2$ *such that*

$$m_{kn} \ge c_1 n^{\delta + 1/2}, \qquad \sigma_{kn}^2 \le c_2 n^{\Delta + 1/2}$$

for all $k, n = 1, 2, \ldots$. *Let* $X_n = (x_{ij})_{i,j=1}^n$ *denote the left upper* $n \times n$ *part of the above infinite matrix. Then for the maximal eigenvalue we have*

$$\lambda_{\max}(X_n) \geq c_1 n^{\varepsilon + 1/2}$$

excluding finitely many values of n *almost surely for any* ε *with* $0 < \varepsilon < \delta$.

At the end of the fourth section we illustrated our results with numerical examples and gave a graphical method to separate the structural eigenvalues. Let $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ be the absolute values of the eigenvalues of the perturbed blown-up matrix in descending order. Then the structural eigenvalues $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_l|$ are „large"
and they rapidly decrease. The other eigenvalues $|\lambda_{l+1}| \geq |\lambda_{l+2}| \geq \ldots$ are relatively small and they decrease very slowly. So it is easy to find the structural eigenvalues. To obtain the structural eigenvalues we suggest the following numerical (graphical) procedure:

- Calculate some eigenvalues of A_n starting with the largest ones in absolute value.

- We are repeating the previous step, until the last 5-10 eigenvalues are close to zero and they are almost the same in absolute value.

- Then we obtain the increasing sequence $|\lambda_t| \leq |\lambda_{t-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_1|$. Plot their values in the above order, then find the first abrupt change.

If, say,

$$0 \approx |\lambda_t| \approx |\lambda_{t-1}| \approx \cdots \approx |\lambda_{l+1}| \ll |\lambda_l| < \cdots < |\lambda_1|,$$

that is the abrupt change is at l, then $\lambda_l, \lambda_{l-1}, \ldots, \lambda_1$ can be considered as the structural eigenvalues. The typical abrupt change after the non-structural eigenvalues can be seen on the following figure.

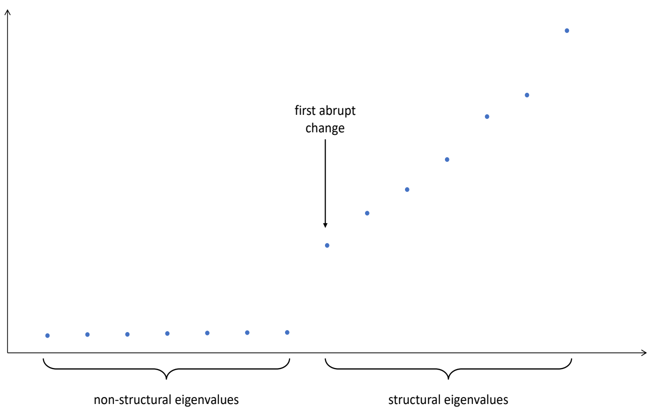


Figure 1: The abrupt change after the non-structural eigenvalues

Similar method is valid for the singular values, too. Our results are stable in the sense that variances are small and the behaviour of the eigenvalues is the same in wide range of conditions.

Bibliography

[Bolla (2005)] Bolla, M. Recognizing linear structure in noisy matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 402 (2005), 228–244.

[Fazekas, Pecsora, Porvázsnyik (2018)] I. Fazekas, S. Pecsora, B. Porvázsnyik: General theorems on exponential and Rosenthal's inequalities and on complete convergence. *Journal of Mathematical Inequalities* 12 (2), 2018, 433-446.

[Fazekas, Pecsora (2017)] Fazekas, I. and Pecsora, S. General Bahr–Esseen inequalities and their applications. *Journal of inequalities and applications*, 2017:191 (2017).

[Fazekas, Pecsora (2020)I] Fazekas, I., Pecsora, S. On the spectrum of noisy blown-up matrices. *Special Matrices*, 8 no. 1 (2020), 104–122.

[Fazekas, Pecsora (2020)II] Fazekas, I., Pecsora, S. Numerical results on noisy blown-up matrices *Annales Mathematicae et Informaticae.* 51. pp. 17-28. ISSN 1787-6117 (Online),(2020) [Gan, Chen, Qiu (2011)] Gan, Shixin; Chen, Pingyan; Qiu, Dehua. Rosenthal inequality for NOD sequences and its applications. *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.* 16, no. 3 (2011), 185–189.

[Hoeffding (1963)] Hoeffding, W. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.* 58 (1963), 13–30.

[Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)] Shen, Aiting; Hu, Shuhe; Volodin, Andrei; Wang, Xuejun. Some exponential inequalities for acceptable random variables and complete convergence. *J. Inequal. Appl.*, 2011:142 (2011), 10 pp.

[Wu, Guan (2012)] Wu, Yongfeng; Guan, Mei. Convergence properties of the partial sums for sequences of end random variables. *J. Korean Math. Soc.* 49, no. 6 (2012), 1097–1110.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/60/2023.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Sándor Pecsora
Doctoral School: Doctoral School of Informatics
MTMT ID: 10054512

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

1. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: Numerical results on noisy blown-up matrices.
   Ann. Math. Inform. 51, 17-28, 2020. ISSN: 1787-5021.
   DOI: http://dx.doi.org/10.33039/ami.2020.07.001

Foreign language scientific articles in international journals (3)

2. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: On the spectrum of noisy blown-up matrices.
   Special Matrices. 8 (1), 104-122, 2020. EISSN: 2300-7451.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1515/spma-2020-0010
3. Fazekas, I., **Pecsora, S.**, Porvázsnyik, B.: General theorems on exponential and Rosenthal's inequalities and on complete convergence.
   J. Math. Inequal. 12 (2), 433-446, 2018. ISSN: 1846-579X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.7153/jmi-2018-12-32
   IF: 1.158
4. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: General Bahr-Esseen inequalities and their applications.
   J. Inequal. Appl. 2017 (191), 1-16, 2017. EISSN: 1029-242X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1186/s13660-017-1468-y
   IF: 0.966

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

5. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: A generalization of the Barabási-Albert random tree. *Ann. Math. Inform. 44*, 71-85, 2015. ISSN: 1787-5021.

Total IF of journals (all publications): 2,124
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 2,124

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

01 March, 2023