

## DYNAMISCHE MODELLE FÜR DIE BESCHREIBUNG DER TORSIONS- UND BIEGE-SCHWINGUNGEN VON KARDANGETRIEBEN

Der Artikel baut unmittelbar auf die Publikation " Bestimmung der Bewegungsgleichung von Kardangetrieben ". In dieser Arbeit wurde die Bewegungsgleichung in Matrix-Form abgeleitet, wobei die Übertragungsgleichung des Kardanelenks mit berücksichtigt war.

### 1. PARAMETER DER DREHSCHWINGUNGEN IN KARDANGELLENKGETRIEBEN

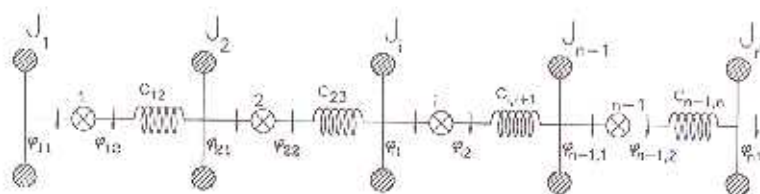


Abbildung 1. Stabmodell für Torsionsschwingung

Die Matrix-Form der Bewegungsgleichung des kettenartigen Torsionsschwingungssystems auf Bild 1. sieht folgendermassen aus:

$$\underline{\ddot{X}} + \underline{A}\underline{X} + \underline{B}\underline{X} \cos 2\varphi + \underline{C}\underline{\sin 2\varphi} + \underline{D}\underline{\sin 2\varphi} \cos 2\varphi = \underline{0} \quad (1)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung kann in der Form  $\underline{X} = \underline{y} e^{i\omega t}$  beschrieben werden. Die zweite Ableitung dieser Lösung unterscheidet sich nämlich nur in einer Konstante von der Grundlösung:

$$\ddot{\underline{X}} = -\alpha^2 e^{i\omega t} \underline{y}$$

Nach dem Einsetzen der Variante in die Bewegungsgleichung bekommt man für  $\underline{y}$  ein homogenes, lineares Gleichungssystem.

Für die Determinante, gebildet aus den Koeffizienten des homogenen Teils des Gleichungssystems, ergibt sich eine tridiagonale Anordnung. Die Eigenfrequenzen des Torsionssystems ergeben sich dann bei den  $\alpha_i$ -Werten, bei denen die Determinante den Wert 0 hat.

$$\begin{vmatrix}
 d + \frac{1}{I_1} \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) + \frac{2M_1}{I_1 J_1} \cos \varphi_1 & -\frac{1}{I_1 J_1} \frac{2M_1}{I_1 J_1} \cos \varphi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{I_2 J_2} & d + \frac{1}{I_2} \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3} \right) + \frac{2M_2}{I_2 J_2} \cos \varphi_2 & -\frac{1}{I_2 J_2} \frac{2M_2}{I_2 J_2} \cos \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{I_n J_n} d + \frac{1}{I_n} \left( \frac{1}{J_n} + \frac{1}{J_{n+1}} \right) + \frac{2M_n}{I_n J_n} \cos \varphi_n & 0
 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  bezeichnen die Änderung der Antriebseigenschaften der mit dem jeweiligen Gelenk angetriebenen Welle, bezogen auf die Welle, die mit dem ersten Gelenk betrieben wird. Durch die Auflösung der Determinante gewonnene Frequenzgleichung enthält periodisch wechselnde Koeffizienten. Daraus folgt, dass zur jeden einzelnen  $\varphi_i$  Position der Antriebskette gehört eine  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n$  Eigenfrequenz. Wenn man die Werte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  für  $\varphi_i = 0^\circ - 180^\circ$  bestimmt, kommt man zu den Gleichungen  $\alpha_{1i}(\varphi_1); \alpha_{2i}(\varphi_2); \dots \alpha_{ni}(\varphi_n)$ . Eine Resonanz kann vermieden werden, wenn die Anregerfrequenz  $\omega$  im stationären Zustand keine der  $\alpha_i(\varphi_i)$  Kurven schneidet /Abb. 2/.

Die Winkelfunktionen in der Bewegungsgleichung zeigen, dass die Kardangelenke in der Antriebskette bei einer Winkellage  $\beta_i \neq 0$  eine parameterangeregte Schwingung verursachen.

Obwohl auch bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden gibt es eine Möglichkeit für die Untersuchung der Stabilität einer Differentialgleichungssystem mit Anwendung geeigneter Annäherungen /Hill und Mathieu Differentialgleichungen/, es ist zwecksmässig unmittelbar die Eigenfrequenzen als Funktionen zu untersuchen, woraus auch auf die Stabilität oder Instabilität des Systems folgen lässt.

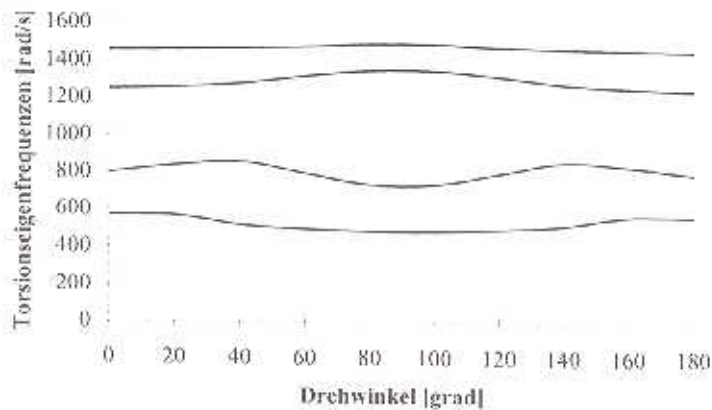


Abbildung 2. Torsionseigenfrequenzveränderung

Mit den vereinfachten mathematischen Modellen kann weiterhin nachgewiesen werden, dass es auch ausserhalb der durch die Funktionen begrenzten Frequenzbereiche instabile Frequenzen gibt, von deren Bestimmung ich absehe. Das kann gemacht werden, weil die genannten Modelle wesentliche Näherungen verwenden, und so wegen ihrer Ungenauigkeit können sie in der Praxis nicht benutzt werden, sie haben nur theoretische Bedeutung.

## 2. BIEGESCHWINGUNGEN

Die Biegeschwingungen können mit dem Kontinuummodell geprüft werden / Abb. 3./ Die Gleichung für die Biegeschwingungen der Kette mit konstantem Querschnitt, die elastisch gestützt ist, lautet bei Vernachlässigung der Reibungseffekte, der Schub - und Kreiselkräfte.

$$\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 q}{\partial z^4} = 0 \quad (3)$$

Wobei folgende Bezeichnungen benutzt werden:

- q(z,t): Biegepeil eines beliebigen Querschnittes der Welle zur Zeit t.
- E: Elastizitätsmodul
- I: axiales Flächenträgheitsmoment des Wellenquerschnittes
- ρ: Dichte des Werkstoffs

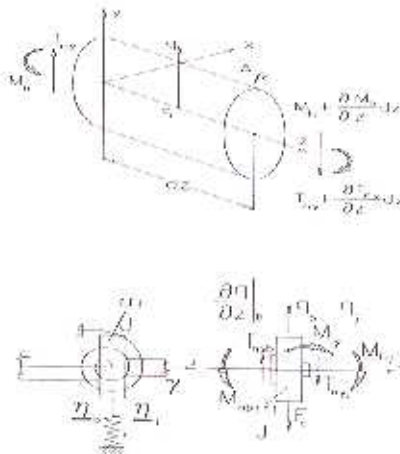


Abbildung 3. Stabelement Modelle

Für die Differentialgleichung wird eine Lösung der Form :  $q = v_z \cos(\alpha t + \varepsilon)$  gesucht, worin:

$q(z)$  den Biegepleil eines beliebigen Wellenquerschnitts, und

$\alpha$  die Winkelgeschwindigkeit der Welle bezeichnen.

Wird diese Lösung in eingesetzt, erhält man:

$$v^{IV} - k^4 v = 0 \quad (4)$$

$$\text{mit: } k^4 = \alpha^2 \frac{\Lambda \rho}{IE} \quad (5)$$

Sucht man eine Lösung der Form:

$$v_{(z)} = D_1 S_{(kz)} + D_2 T_{(kz)} + D_3 U_{(kz)} + D_4 V_{(kz)} \quad (6)$$

wobei  $D_1, D_2, D_3, D_4$ , mit den Randbedingungen bestimmt werden können.

Die Zustandseigenschaften eines beliebigen Querschnittes lauten:

$$\eta_i = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ \bar{T}_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$



Randbedingungen für Kardangelenk:

Geometrische Bedingung:

$$v_{1 \text{ Gelenk}} = v_{b \text{ Gelenk}}$$

$$\varphi_{j \text{ Gelenk}} = \varphi_{b \text{ Gelenk}} + \Delta\beta$$

Impulssatz:

$$\bar{T}_{\text{nyj Gelenk}} = \bar{T}_{\text{wb Gelenk}}$$

Kardangetriebe:

$$M_{j \text{ Gelenk}} - M_{b \text{ Gelenk}} = 0$$

Die Zustandsmatrix des letzten Querschnittes:

$$\underline{\Pi}_0 = \underline{P}_0 \underline{E}_0 \underline{P}_{0-1} \underline{E}_{0-1} \dots \underline{P}_1 \underline{E}_1 \underline{\Pi}_0 \quad (14)$$

$\underline{P}$  Punktstreckenmatrix

Zum Beispiel:

-Punktstreckenmatrix für ein Kardangelenk:

$$\underline{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta\beta_i \\ 0 & J\alpha^2 & 1 & 0 & M_{ij} \\ m\alpha^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Wobei:

$\Delta\beta_i$ : Winkelverformung bei Belastung

$M_{ij}$ : Zusätzliche Belastung des Kardangelenkes

-Punktstreckenmatrix für elastische Elemente, und Masse

$$\underline{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J\alpha^2 - \frac{1}{\gamma} & 1 & 0 & 0 \\ m\alpha^2 - \frac{1}{c} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

-Punktsreckematrix für Kraft und Drehmoment

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Wobei: H, R: Zusätzliche Kraft und Moment wegen inhomogene Wellenmasse (Umwucht), und Exzentrizität des Stranges.

Von der Matrixgleichung bekommen wir die Frequenzgleichung, wenn wir die Randbedingungen anwenden:

Die Unbekannten des Gleichungssystems:

$$v_0, \phi_0, \Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \dots, \Delta\beta_k \text{ zusammen: } k+2$$

Die Terme der Gleichung:

$M_0 = 0; \bar{T}_0 = 0; M_1 = M_2 = \dots = M_k = 0$ ; zusammen  $k+2$ , wobei  $k$  Gelenkstückzahl ist.

Also ist das Gleichungssystem lösbar.

Die Unbekannten und die Biegeeigenfrequenzen können mit dem folgenden Gleichungssystem bestimmt werden:

$$I_A v_0 + J_A \phi_0 + \sum_{i=\alpha_1}^{\alpha_k} J_i \Delta\beta_i = - \left( \sum_{j=\alpha_1}^{\alpha_k} L_j F_{gj} + \sum_{k=\alpha_1}^{\alpha_k} K_k M_{gk} \right) \quad (18)$$

$$M_A v_0 + N_A \phi_0 + \sum_{i=\alpha_1}^{\alpha_k} N_i \Delta\beta_i = - \left( \sum_{j=\alpha_1}^{\alpha_k} P_j F_{gj} + \sum_{k=\alpha_1}^{\alpha_k} O_k M_{gk} \right) \quad (19)$$

$$I_{\alpha_n} v_0 + J_{\alpha_n} \phi_0 + \Delta\beta_{\alpha_n} + \sum_{i=\alpha_1}^{\alpha_{n-1}} J_i \Delta\beta_i = - \left( M_{\beta\alpha_n} + F_{\beta\alpha_n} + \sum_{j=\alpha_1}^{\alpha_{n-1}} L_j F_{gj} + \sum_{k=\alpha_1}^{\alpha_{n-1}} K_k M_{gk} \right) \quad (20)$$

$$I_{\alpha_{n-1}} v_0 + J_{\alpha_{n-1}} \phi_0 + N_{\alpha_{n-1}} \Delta\beta_{\alpha_{n-1}} + \sum_{i=\alpha_1}^{\alpha_{n-2}} J_i \Delta\beta_i = - \left( M_{\beta\alpha_{n-1}} + F_{\beta\alpha_{n-1}} + \sum_{j=\alpha_1}^{\alpha_{n-2}} L_j F_{gj} + \sum_{k=\alpha_1}^{\alpha_{n-2}} K_k M_{gk} \right) \quad (21)$$

$$I_{cs} v_0 + J_{cs} \varphi_0 + \Delta \beta_{cs} = - \left( M_{grcs} + F_{grcs} + \sum_{l=cs_1}^{cs_2} L_l F_{gl} + \sum_{k=cs_1}^{cs_2} K_k M_{gk} \right) \quad (22)$$

Die Biegeeigenfrequenzen ergeben sich an den Stellen, wo die homogenisch gebildete Lösung Determinante Null ist. Die Eigenfrequenzen können mit der "Rest"-Methode bestimmt werden / Abb.5 /.

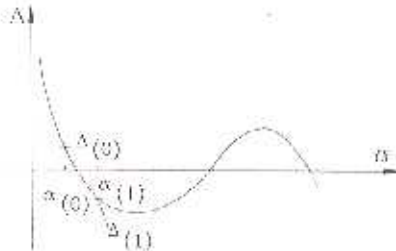


Abbildung 5. "Rest"-Methode

### 3. ANWENDUNG DES MODELLS MIT EINEM STABELEMEN

#### 3. A. Ohne Erregung

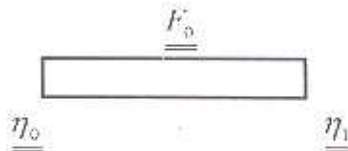


Abbildung 6. Stabelement

Randbedingungen: an den freien Wellenenden / Abb. 6./:  $M=I=0$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Nach Auflösung der Matrixmultiplikation das Gleichungssystem mit zwei Unbekannten:

$$-k^2 I E U_{(z)} v_0 - k I E V_{(z)} \varphi_0 = 0 \quad (24)$$

$$k^3 I E T_{(z)} v_0 + k^2 I E U_{(z)} \varphi_0 = 0 \quad (25)$$

Die Eigenfrequenzen des Stabelements bekommt man an den Stellen, wo die Determinante des homogenen Teils des Gleichungssystems gleich 0 ist.

Die  $\alpha$  Eigenfrequenzen sind in den Krülov Funktionen enthalten, so können sie mit der Restmethode bestimmt werden.

Im Fall ohne Erregung können die Werte für  $v_0$ ,  $\varphi_0$  és  $v_1$ ,  $\varphi_1$  nur als gegenseitig abhängige Parameter angegeben werden.

### 3. B. Mit Erregung

Das Gleichungssystem ist inhomogen. Die Eigenfrequenzen ergeben sich aus der Nullstelle der Determinante, die aus den Koeffizienten des homogenen Teils gebildet wird.  $v_0$ ,  $\varphi_0$  és  $v_1$ ,  $\varphi_1$  können berechnet werden.

### 3. C. Der Fall einer allgemeiner Antriebskette:

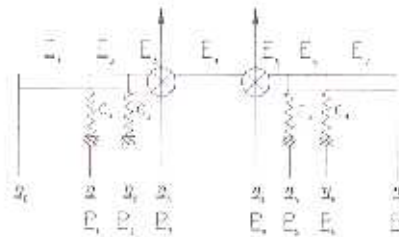


Abbildung 7. Allgemeine Kardangelntrieb

$$\underline{\eta}_7 = \underline{F}_7 \underline{P}_6 \underline{F}_6 \underline{P}_5 \underline{F}_5 \underline{P}_4 \underline{F}_4 \underline{P}_3 \underline{F}_3 \underline{P}_2 \underline{F}_2 \underline{P}_1 \underline{F}_1 \underline{\eta}_0 \quad (26)$$

Die Matrixgleichungen  $\underline{F}$  és  $\underline{P}$  können alle aufgeschrieben werden.

Randbedingungen:  $M_0 = T_0 = M_7 = T_7 = 0$

$\eta_3$  und  $\eta_4$  3. Reihe des Matrix ist gleich 0, wegen des Kardangelenks.

Im Fall von zwei Kardangelenken ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$av_0 + b\varphi_0 + c\Delta\beta_{30} + d\Delta\beta_{40} = K_1 \quad (27)$$

$$ev_0 + f\varphi_0 + g\Delta\beta_{30} + h\Delta\beta_{40} = K_2 \quad (28)$$

$$iv_0 + j\varphi_0 + k\Delta\beta_{30} = K_3 \quad (29)$$

$$alv_0 + m\varphi_0 = K_4 \quad (30)$$

Die Koeffizienten im Gleichungssystem habe ich mit a ... m Buchstaben bezeichnet, wegen der einfacheren Übersichtlichkeit.  $K_1 \dots K_4$  sind konstant.

Die Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten ist Anzahl der Gelenke + 2.

Die Eigenfrequenzen ergeben sich aus der Nullstelle der Determinante, die aus den Koeffizienten des homogenen Teils gebildet wird. Die Unbekannten können mit der folgenden Cramer Methode berechnet werden, z.B.  $\varphi_0$

$$\varphi_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & K_1 & c & d \\ e & K_2 & g & h \\ i & K_3 & k & 0 \\ l & K_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & 0 \\ l & m & 0 & 0 \end{vmatrix}} \quad (31)$$

Hierauf bekommt man die Belastung der Lager, indem man an den Lagerstellen die 4. Reihe der Zustandsvektoren  $/T$  Scherkraft/ auflöst, und die Betriebskreisfrequenz in die Krülov-Gleichung einsetzt.

Bei bekannten Stützkräften kann die Steifheit der Lager bestimmt werden, was die Werte der Eigenfrequenzen und natürlich der Unbekannten des Gleichungssystems beeinflusst. Da die Lagersteifigkeit von der Stützkraft abhängt, müssen Iterationsberechnungen durchgeführt werden solange, bis die Stützkräfte und die zugehörigen Lagersteifigkeiten sich schon nicht mehr wesentlich ändern.

Nach der Bestimmung der Unbekannten kann der Zustandsvektor an beliebiger Streckengrenze bestimmt werden. An der gegebenen Streckengrenze kann der konkreter Wert der Verschiebung, Verdrehung, Drehmoment und Scherkraft berechnet werden, wenn man in die Streckenmatrixe die Betriebsfrequenz *einsetzt*.

Das Modell kann darüber hinaus auch für die Verstimmung der Eigenfrequenzen verwendet werden. Die Parameter der Antriebskette sind im entwickelten Computer-Simulationsprogramm Eingangsdaten. Mit Hilfe des Programms kann die Wirkung der Veränderungen auf die Eigenfrequenzen leicht verfolgt werden. Das Programm, das dynamische Modelle verwendet, habe ich bei Walterscheid GmbH entwickelt. Die Ergebnisse meiner Forschung verwende ich im Unterricht bei den Maschinenbau-Studenten in Rahmen des Faches Antriebstechnik, wo die Studenten sich mit Einzelheiten der Modellbildung und Anwendung des Programmes bekanntmachen.

## LITERATUR

- [1] DR. BOSZNYAY Ádám: Műszaki rezgés tan Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.
- [2] DOZ. DR.-Ing.Florea DUDITZA: Kardangetriebe und ihre Anwendungen. VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1973.
- [3] DR. LUDVIG Győző: Gépek dinamikája.Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.
- [4] TIBA: Kardánhajtások lengéstani viszonyai Doktori értekezés 1998. ?