



ELOSZLÁSI ÉS APPROXIMÁCIÓS PROBLÉMÁK

Problems of distribution and approximation

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Molnár Sándor

**Debreceni Egyetem
Debrecen, 2004.**

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
Modulo 1 eloszlások	5
Másodfokú valós algebrai számok approximációja másodrendű lineáris rekurzív sorozatok tagjainak hányadosával	11
On the distribution modulo 1 of sequences	17
On the approximation of quadratic algebraic numbers by the quotients of terms of linear recurrences	24
Irodalomjegyzék	30
Publikációs jegyzék	31

1. Bevezetés

PhD. értekezésem két, témáját tekintve szervesen kapcsolódó fejezetből áll. Nem szerepeltetem benne az eredményeimet, melyeket társszerzővel közösen értem el. A tételek döntő része lineáris rekurzív sorozatokkal foglalkozik.

Az első fejezetben modulo 1 eloszlással, a másodikban diofantikus approximációval kapcsolatos eredményeim találhatók. A tételekre elemi bizonyításokat adunk, kiegészítve a mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényeknél és diszkrepancia vizsgálatoknál szokásosan alkalmazott módszerekkel. Az idézett dolgozatokra az irodalomjegyzék alapján [IV] alakban, a saját publikációimra a publikációs jegyzék alapján [4] formában hivatkozunk.

A következőkben megadunk néhány definíciót és jelölést, amit a továbbiakban használni fogunk.

Másodrendű lineáris rekurzív sorozatnak nevezzük a

$$(1) \quad G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n \quad (n \geq 0)$$

formulával és az $A, B, G_0, G_1 \in \mathbf{Z}$ paraméterekkel definiált sorozatot, ahol $AB \neq 0$ és

$G_0^2 + G_1^2 \neq 0$ feltételek teljesülnek. A másodrendű lineáris rekurzív sorozatot

$G = (G_n)_{n=1}^{\infty} = G(A, B, G_0, G_1)$ módokon fogjuk jelölni. Ha az előző definícióban

$A, B, G_0, G_1 \in \mathbf{R}$, akkor valós értékű lineáris rekurzív sorozatról beszélünk.

A $G(A, B, G_0, G_1)$ sorozat karakterisztikus polinomjának a $P(x) = x^2 - Ax - B$ polinomot nevezzük, melynek zérushelyeit α – val és β – val jelöljük.

Ha $\alpha \neq \beta$, akkor minden nem negatív n egész számra érvényes a

$$(2) \quad G_n = a\alpha^n - b\beta^n \quad (n \geq 0)$$

összefüggés (Binet-formula), ahol

$$(3) \quad a = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha - \beta} \quad \text{és} \quad b = \frac{G_1 - G_0\alpha}{\alpha - \beta}.$$

A k – ad rendű $G = (G_n)_{n=0}^{\infty}$ lineáris rekurzív sorozatot a

$$G_n = A_1G_{n-1} + A_2G_{n-2} + \dots + A_kG_{n-k} \quad (n \geq k \geq 2)$$

rekurzióval definiáljuk, ahol a G_j kezdőértékek és a A_{j+1} ($j = 0, 1, \dots, k-1$) együtthatók adott racionális egészek.

Ha $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ egy valós számsorozat, N egy pozitív egész szám és $E \subseteq I = [0, 1)$, akkor az $A(E; N; \omega)$ – val jelöljük az ω sorozat azon a_n tagjainak a számát, melyekre $n \leq N$ és $\{a_n\} \in E$ teljesül, ahol $\{y\}$ jelöli az y valós szám törtrészét.

az $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatot modulo 1 egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha minden olyan a, b számpárra, melyre $0 \leq a < b \leq 1$ teljesül, érvényes a

$$(4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A([a, b]; N; \omega)}{N} = b - a$$

egyenlőség.

Azt mondjuk, hogy az $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ számsorozatnak van modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye (az angol a.d.f. rövidítést alkalmazzuk) és az F , ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A([0, x]; N; \omega)}{N} = F(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

A diofantikus approximációnál a [I] általánosan elterjedt jelöléseit alkalmazzuk, melyből most csak egyet idézünk:

Legyenek az α irracionális szám lánc tört jegyei $c_0, c_1, c_2, \dots$. Az α

lánc tört alakjának szeleteit $\frac{b_n}{k_n}$ - nel fogjuk jelölni:

$$(5) \quad L(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = \frac{b_n}{k_n}, \text{ ahol } (b_n, k_n) = 1 \text{ és } n \in \mathbf{N}.$$

2. Modulo 1 eloszlások

Másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal kapcsolatban, ha azok valós értékűek, természetesen felvetődnek a modulo 1 eloszlások. Egészértékű sorozatoknál viszont modulo m eloszlásokra gondolunk.

Ha az f valós függvény értelmezési tartományába G elemei beletartoznak az $f(G_n)$ sorozatok kapcsán a modulo 1 eloszlások és bizonyos konvergencia vizsgálatok – melyek pl. a diofantikus approximációhoz kellenek – azonnal érdekessé válnak.

Kiss Péterrel közös dolgozatunkban, KISS PÉTER és MOLNÁR SÁNDOR [1] - ben végtelen sok olyan $x \in \mathbf{R}$ illetve $y \in \mathbf{R}$ számot adtunk meg, melyekkel az $(xG_n)_{n=0}^\infty$ (ahol G egy k - ad rendű lineáris rekurzív sorozat) modulo 1 mindenütt sűrű, de nem egyenletes eloszlású $[0, 1[$ - ben , illetve $(yG_n)_{n=0}^\infty$ sorozatnak végtelen sok torlódási pontja van modulo 1 , de nem mindenütt sűrű $[0, 1[$ - ben.

R. F. TICHY [XIX] megmutatta, hogy kontínuum sok valós értékű másodrendű lineáris rekurzív sorozat van pozitív diszkriminánssal $D = A^2 + 4B > 0$, melyekre teljesül, hogy $(G_n)_{n=0}^\infty$ modulo 1 mindenütt sűrű, a $[0, 1[$ intervallumon, de $(G_n)_{n=0}^\infty$ nem egyenletes eloszlású modulo 1. MOLNÁR SÁNDOR [11] az alábbi tétellel ugyanezt igazolta negatív diszkriminánsú sorozatokra.

1. TÉTEL: Legyen A egy valós szám, melyre $-2 < A < 2$ és

$$\Theta = \frac{1}{2\pi} \arccos(A/2)$$

irracionális.

Legyen $B = -1$, $G_1 \neq 0$, $G_0, G_1 \in \mathbf{R}$ és legyen $G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n$, ha $n \geq 0$.

Ha a Binet formulában szereplő $a = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha - \beta}$ konstanssal az $r_1 = 2|a| \geq 2$ egész szám, akkor

$(G_n)_{n=0}^\infty$ modulo 1 mindenütt sűrű, de nem egyenletes eloszlású a $[0, 1[$ intervallumban.

A következő tétel megfogalmazásához néhány jelölést vezetünk be. Legyen n egy egész szám és legyen r_1 az előző tételben bevezetett érték. Legyen továbbá

$$K_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \geq 0 \\ \max\{n, -r_1\}, & \text{ha } n < 0 \end{cases}$$

és

$$L_n(x) = \begin{cases} \min\{n+x, r_1\}, & \text{ha } n \geq 0, \\ \max\{n+x, -r_1\}, & \text{ha } n < 0 \end{cases},$$

ahol $0 \leq x \leq 1$

Ezen jelölések alkalmazásával érvényes a következő:

2. TÉTEL: Legyen A egy valós szám, melyre $-2 < A < 2$ és

$$\Theta = \frac{1}{2\pi} \arccos(A/2)$$

irracionális. Legyen $B = -1$, $G_1 \neq 0$, $G_0, G_1 \in \mathbf{R}$. Ekkor a

$$G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n \quad (n \geq 0)$$

lineáris rekurzív sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]} \left(\arccos\left(\frac{K_j}{r_1}\right) - \arccos\left(\frac{L_j(x)}{r_1}\right) \right) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

1. KÖVETKEZMÉNY: Kontinuum sok valós értékű lineáris rekurzív sorozat van negatív diszkriminánssal, amely modulo 1 mindenütt sűrű, de nem egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon.

Számos határértékkel kapcsolatos problémát tanulmányoztak a lineáris rekurzív sorozatokkal kapcsolatban.

Például KISS PÉTER [VII] és MÁTYÁS FERENC [XIV] a G_{n+i}/G_n (i rögzített) típusú hányadosok konvergenciájára vonatkozó állítások segítségével bizonyítottak diofantikus approximációval kapcsolatos tételeket. W. GERDES [II] meghatározta a $G_0, G_1, A, B \in \mathbf{R}$ és $G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n$ ($n \geq 0$) esetén a $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergenciájának feltételét. Eredménye szerint ahhoz, hogy a G sorozat konvergens legyen, az (A, B) számpárnak egy általa meghatározott síkbeli tartományba kell esnie.

M. B. GREGORI és J. M. METZGER [IV] a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(u_n x \pi)$ határértéket vizsgálták,

ahol x egy valós számot, $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ pedig egy Fibonacci típusú sorozatot jelöl, vagyis egy olyan másodrendű lineáris rekurzív sorozatot, amelyben $A = B = 1$ és u_0, u_1 tetszőleges egész számok. Bizonyították, hogy ez a határérték akkor és csak akkor létezik, ha x eleme a $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ test egy – általuk meghatározott – speciális részhalmazának. Továbbá ilyenkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(u_n x \pi) = 0$ teljesül.

M. B. Gregori és J. M. Metzger idézett eredményét [2] – ben általánosítottuk $G(A, 1, G_0, G_1)$ sorozatokra (A, G_0, G_1 egész számok). Ekkor már a határérték nem feltétlenül nulla.

Ha csak azokat az x valós számokat keressük, melyekkel a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(G_n x \pi) = 0$

egyenlőség teljesül, akkor eredményesen használhatjuk a Pisot – Vijayaraghavan számokkal, vagyis a PV számokkal kapcsolatos ismereteket (J. W. S. CASSELS [I] 133 – 134 old.).

Viszont, ha a G sorozat nem Fibonacci típusú a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(G_n x \pi)$ határérték

különbözhet zérustól, ezért más megfontolásokra is szükség van. A [2] - beli módszer minden olyan G sorozatra működik, melynek egyik gyöke PV szám, de a szerteágazó

esetek nehezen formalizálhatók, ezért nem írjuk le általánosságban. Továbbá konkrét esetekben olyankor is eredményre vezethet, ha a karakterisztikus polinom zérushelyei között nincs PV szám. Megemlítjük, hogy az alkalmazhatóságot egy konkrét esetben a $G(4,3,G_0,G_1)$ sorozatra egy korábbi dolgozatban illusztráltuk, MOLNÁR SÁNDOR [10].

Megjegyezzük, hogy a probléma nem azonos az $(xG_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat mod 1 konvergenciájának problémájával, amit dolgozatunkban példákkal támasztunk alá.

Most az alábbi, [2] – belí tételünket idézzük:

3. TÉTEL: Legyen a G másodrendű lineáris rekurzív sorozat az A, B, G_0, G_1 egész számokkal és a $G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n$ ($n \geq 0$) rekurzióval definiálva. Tegyük fel, hogy $A \neq 0, B = 1$ és $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$. Jelöljön x egy valós számot. A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(G_n x \pi)$$

határértéke akkor és csak akkor létezik, ha

$$x = \frac{2(c_1 - c_2 \beta) + (d_1 - d_2 \beta)}{(G_1 - G_0 \beta) \cdot \alpha^e}$$

ahol c_1, c_2 és e tetszőleges egész számokat jelölnek, továbbá ha A páratlan szám, akkor tetszőleges k egész számmal, $d_1, d_2 \in \{2k/A; 1 - 2k/A\}$, míg ha A páros szám, akkor tetszőleges k egész számmal $d_1 = d_2 = 2k/A$ vagy ha $A \mid 2k$ akkor páros A esetén is $d_1, d_2 \in \{2k/A; 1 - 2k/A\}$

Ha x a fenti formának eleget tesz, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(G_n x \pi) = \sin(2k\pi/A)$.

A [4] – ben bevezettük az f invariáns eloszlású sorozat fogalmát.

DEFINÍCIÓ: Legyenek $\omega = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ és $\zeta = (f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ valós számsorozatok, ahol f egy valós függvény. Ha az ω és a ζ sorozatoknak egyaránt létezik a mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényük (a.d.f. mod 1) és ezek a függvények egymással egyenlők, akkor az ω sorozatot modulo 1 f invariáns eloszlásúnak nevezzük.

Példák:

1. Ha Θ egy pozitív irracionális szám, akkor az $\omega = (n\Theta)_{n=0}^{\infty}$ és a $\zeta = (\sqrt{n\Theta})_{n=0}^{\infty}$ sorozatok egyaránt mod 1 egyenletes eloszlásúak, ezért mindkettőhöz van a.d.f. mod 1 és ezek azonosak: $F(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$. Az $\omega = (n\Theta)_{n=0}^{\infty}$ sorozat négyzetgyök invariáns eloszlású sorozat mod 1.
2. Ismerünk olyan eseteket is, amikor a sorozathoz van a.d.f. mod 1, a sorozat nem egyenletes eloszlású mod 1, de valamely f függvénnyel f invariáns eloszlású

mod 1. A [6] – ban megadtuk annak feltételét, hogy a G lineáris rekurzív sorozattal képzett $\left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat mod 1 $f(x)=\frac{1}{x}$ invariáns eloszlású legyen. Az ilyen sorozatokat modulo 1 reciprokinvariáns eloszlásúnak is szoktuk nevezni.

3. Vannak olyan függvények is pl. $f_1(x)=\{x\}$ vagy $f_2(x)=x+k$, ahol k egy egész szám, melyekre nézve minden olyan valós számsorozat, melynek van mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye, modulo 1 invariáns eloszlású.

Vegyük észre, hogy éppen azok az f valós függvények az egyenletes eloszlást megőrző (u.d.p.) függvények, melyek a $[0,1]$ intervallumot a $[0,1]$ intervallumra képezik le és bármely mod 1 egyenletes eloszlású sorozat tagjai törtrészből álló sorozat f invariáns eloszlású mod 1. Az u.d.p. függvények számos tulajdonságát megtalálhatjuk pl. S. PORUBSKY, T. SALÁT, és O. STRAUCH [XVII] dolgozatában.

Néhány további jelölésre lesz szükségünk.

Az f valós függvény értelmezési tartományát D_f - el jelöljük. A graf f halmazt, mint ismeretes, az alábbi formulával értelmezzük:

$$\text{graf } f = \{(x, y) | x \in D_f, y = f(x)\}.$$

Ebből a graf f mod 1 halmaz az x és y koordináták mod 1 redukálásával származtatható, vagyis:

$$\text{graf } f \text{ mod } 1 = \{(x, y) | \exists k, i \in \mathbf{Z}, x+k \in D_f, y+i = f(x+k) \text{ és } 0 \leq x, y < 1\}$$

Érvényesek az alábbi tételek:

4. TÉTEL: Legyen az f valós értékű függvény értelmezve a $D_f \subseteq \mathbf{R}$ halmazon és legyenek az F és G a $[0,1]$ intervallumon értelmezett nem csökkenő valós függvények. Legyen továbbá $F(0)=G(0)=0$ és $F(1)=G(1)=1$.

Akkor és csakis akkor létezik bármely F és G függvényhez olyan $\omega=(a_n)_{n=0}^{\infty}$ valós számsorozat, melyre ω mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye F és $\xi=(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye G , ha graf f mod 1 mindenütt sűrű a $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ egységnégyzeten.

Ebből $F = G$ helyettesítéssel adódik:

2. KÖVETKEZMÉNY: Ha f egy olyan valós függvény, melynek graf f mod 1 halmaza mindenütt sűrű a $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ egységnégyzeten, akkor minden, a $[0,1]$ intervallumon nem csökkenő $F(0) = 0$ és $F(1) = 1$ feltételek szerinti valós F függvényhez létezik ω valós számsorozat, melynek mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye F , és ω f invariáns eloszlású mod 1.

5. TÉTEL: Legyen f egy valós függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan mod 1 egyenletes eloszlású ω számsorozat mely f invariáns eloszlású modulo 1, ha a $[0, 1[$ intervallum tetszőleges véges sok páronként diszjunkt $[a_1, b_1[, [a_2, b_2[, \dots, [a_s, b_s[$ részintervallumára

$$m^*\left(\left\{y \mid \exists k, \exists x \in [a_k, b_k[\Rightarrow (x, y) \in \text{graf } f \bmod 1\right\}\right) \geq \sum_{i=1}^s (b_i - a_i)$$

és

$$m^*\left(\left\{x \mid \exists k, \exists y \in [a_k, b_k[\Rightarrow (x, y) \in \text{graf } f \bmod 1\right\}\right) \geq \sum_{i=1}^s (b_i - a_i)$$

teljesül, ahol $m^*(H)$ jelöli a H halmaz Jordan – féle külső mértékét.

MEGJEGYZÉS: Könnyen ellenőrizhető, hogy a 4. tétel feltételeit a $\sin$, $\cos$, tg , ctg és bármely olyan folytonos periodikus függvény kielégíti, melynek periódushossza irracionális szám és értékkészlete olyan intervallum, melynek hossza legalább 1. Ezek a függvények az 5. tétel feltételeit szintén kielégítik. Az $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$ függvény eleget tesz az 5. tétel feltételrendszerének.

Negatív diszkrimináns esetére, KISS PÉTER és R. F. TICHY [IX] meghatározták a $(G_{n+1}/G_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényét. Most a $(G_{n+k}/G_n)_{n=1}^{\infty}$ esetre általánosítjuk eredményüket, ezt követően megadjuk annak szükséges és elegendő feltételét, hogy $(G_{n+1}/G_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat reciprok-invariáns eloszlású legyen mod 1.

Rögzített $0 \leq x \leq 1$ esetén a következő jelölést alkalmazzuk:

$$\chi: \chi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq \{y\} < x \leq 1, \\ 0 & \text{ha } x \leq \{y\} \end{cases}.$$

6. TÉTEL: Legyen a $G = (G_n)_{n=0}^{\infty}$ másodrendű lineáris rekurzív sorozat definiálva a $G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n$ ($n \geq 0$) formulával, az A, B zérustól különböző valós számokkal és a G_0, G_1 valós kezdő értékekkel, melyekre $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$.

Legyen a $D = A^2 + 4B$ diszkrimináns negatív és legyen $k \neq 0$ tetszőleges egész szám.

Ha a $\Theta = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{-D}}{A}$ irracionális szám, akkor az $\omega = (G_{n+k}/G_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak van modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye és az

$$H(x) = H_1(x - \{c\}) + H_1(\{c\}),$$

ahol

$$H_1(x) = x + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\sin(2\pi x)}{\exp(2\pi |d|) - \cos(2\pi x)},$$

továbbá

$$c = r^k \cos(k \pi \Theta) , \quad d = -r^k \sin(k \pi \Theta) \quad \text{és} \quad r = |\alpha| = \left| \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \right|.$$

Érvényes továbbá az

$$\left| \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=n_0}^{N+n_0-1} \chi\left(x, \frac{G_{n+k}}{G_n}\right) - \int_0^1 \chi(x, c+d \tan(\pi(y+\omega))) dy \right| \leq$$

$$4 \cdot \left(\sqrt{\left| r^k \sin(k \pi \Theta) \right|} \right) \cdot \sqrt{\Delta_N} + 6 \Delta_N$$

becslés, ahol $\Delta_N = \Delta_N(\Theta n) = D_N^*(\Theta n)$ a $(\Theta n)_{n=1}^\infty$ sorozat diszkrepanciáját jelöli.

7. TÉTEL: Legyen a $G = (G_n)_{n=0}^\infty$ egy valós értékű másodrendű lineáris rekurzív sorozat negatív

$D = A^2 + 4B$ diszkriminánssal.

Az $\omega = (G_{n+1} / G_n)_{n=0}^\infty$ sorozat akkor és csak akkor reciprokinvariáns eloszlású mod 1, ha $B = -1$.

8. TÉTEL: Legyen a $G = (G_n)_{n=0}^\infty$ egy egész értékű másodrendű lineáris rekurzív sorozat pozitív

$D = A^2 + 4B$ diszkriminánssal.

Az $\omega = (G_{n+1} / G_n)_{n=0}^\infty$ sorozat akkor és csak akkor reciprokinvariáns eloszlású mod 1, ha $B = 1$.

3. Másodfokú valós algebrai számok approximációja másodrendű lineáris rekurzív sorozatok tagjainak hányadosával

A

$$(6) \quad \left| t - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c q^k}$$

egyenlőtlenséggel kapcsolatban több elindulási irány ismeretes.

Egyrésztől nyilvánvaló, hogy hiba lenne olyan éles határvonalat húzni, hogy az egyenlőtlenség $c = 1 -$ re érdekes, $c = 0,99 -$ dal pedig nem is foglalkozunk. Ebben a témakörben két eredményt emelünk ki.

- Ha az $|t - p/q| < 1/q^2$ egyenlőtlenség fennáll, akkor valamely n pozitív egész számmal és a bevezetésben leírt jelölésekkel, $p/q = (j h_n + b_{n-1}) / (j k_n + k_{n-1})$ teljesül, ahol $j = 0, 1$ vagy c_{n+1} (lásd: LANG [XIII]).
- R.T.WORLEY [XVIII] a (6) egyenlőtlenségben $k = 2$ választás mellett a $0 < c < 2$ feltételt írta elő. Megadott három formulát, melyek közül a p/q valamelyiknek szükségszerűen eleget tesz, bármelyik megoldása legyen is a p/q a (6) egyenlőtlenségnek.

A másik, ezzel ellentétes tendencia $k = 2$ választás mellett $c \geq \sqrt{5}$ esetén megadni az $\{r_n | r_n = b_n / k_n, n \in \mathbf{N}\}$ halmaz egy végtelen részhalmazát, mellyel (6) teljesül. A $c \geq \sqrt{5}$ megválasztása, mint tudjuk távolról sem önkényes, maximuma a t számtól függ. Itt lényegében arról van szó, hogy egyes algebrai számokat sikerült $k = 2$ feltétel mellett az elképzelhető legjobb c konstanssal approximálni, konkrét sorozat segítségével. Ez a konkrét sorozat nyilván csakis a lánc tört szeletek részsorozata lehet. A kutatások egy harmadik irányát képezi, amikor konkrét algebrai számot approximálunk konkrét sorozattal, $0 < k \leq 2$ feltétel szerint. Ez az eset azért lehet érdekes, mert itt az approximáció általában a bonyolult lánc tört előállítási rekurzív procedúrát megkerülve, gyakran explicite adott sorozattal történik.

Az utóbb említett két irányban Kiss Péter, egri professzor kutatásai messze kiemelkedőek.

- KISS PÉTER [VII] egyrésztől az $R(A, B, 0, 1)$ lineáris rekurzív sorozatra, melyre $AB \neq 0$, $A^2 + 4B > 0$ bizonyította, hogy α -val jelölve a sorozat karakterisztikus polinomjának domináns zérushelyét az
- $$\left| \alpha - \frac{R_{n+1}}{R_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{A^2 + 4B} R_n^2}$$
- egyenlőtlenség akkor és csakis akkor teljesül
- végtelen sok n -re, ha $|B| = 1$.

Másrészt megmutatta, ha p/q -ra $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{A^2 + 4B} q^2}$ érvényes, akkor p/q benne van az R_{n+1}/R_n , $n \in \mathbf{N}$ halmazban.

- Olyan sorozatokra, melyekre $|B| \neq 1$ Kiss Péter és Sinka Zsolt (P. KISS és ZS. SINKA [X]) megadták annak feltételét, hogy $\left| \alpha - \frac{G_{n+1}}{G_n} \right| < \frac{1}{c|G_n|^k}$ végtelen sok n -re teljesüljön, ahol $AB \neq 0$, és $A^2 + 4B > 0$ feltételek továbbra is érvényesek.
- J. P. JONES és P. KISS [V] a másodrendű lineáris rekurzív sorozat pozitív $D = A^2 + 4B > 0$ diszkriminánsának négyzetgyökét approximálták a $V(A, B, 2, A)$ Lucas sorozat, és az $R(A, B, 0, 1)$ R sorozat tagjainak V_n/R_n hányadosával. Akkor és csak akkor kaptak legjobban approximáló sorozatot, ha a B definiáló konstansra az $|B| = 1$ teljesül.
- P. J. GRABNER, P. KISS AND R. F. TICHY [VII] negatív diszkrimináns esetén approximálták a $\sqrt{|D|}$ számot, valamint a karakterisztikus gyök $|\alpha|$ abszolút értékét $1/n$ nagyságrendben.

Valós másodfokú algebrai szám konkrét racionális számsorozattal való approximálását optimálisnak tekinthetjük, ha

- (i) Az $\omega = (G_n/H_n)_{n=1}^\infty$ approximáló sorozat zárt alakban adott
- (ii) Az $\omega - t$ a lánc törtektől függetlenül állítjuk elő
- (iii) Az $\left| t - \frac{G_n}{H_n} \right| < \frac{1}{c|H_n|^k}$ egyenlőtlenségben $k=2$ és $c = c_{\max} = c_{\max}(t)$.
($c_{\max}$ jelöli azt a legnagyobb valós számot, mellyel a (6) – nak $k=2$ esetén végtelen sok megoldása van.)
- (iv) Az ω sorozat minden olyan p/q törtet tartalmaz, melyre $\left| t - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c_{\max} \cdot q^2}$ fennáll.

Ez azt jelenti, hogy a lánc törtektől függetlenül képzett, zárt alakban adott sorozattal kiválogatjuk az (5) konvergensek közül a „legjobban approximáló tagokat”.

A problémára a Kiss Péterék olyan és csakis olyan t algebrai egészekre adták meg a választ, melyek definiáló egyenletei $t^2 - At \pm 1 = 0$ alakúak. Azokkal a valós

másodfokú algebrai számokkal, melyek nem algebrai egészek, Kiss Péterék nem foglalkoztak.

A t valós másodfokú algebrai szám approximációja helyett valós másodfokú algebrai egészekkel képzett $\mathbf{Q}(\alpha)$ egyszerű testbővítések elemeinek approximációjával kezdtünk el foglalkozni. Ha a másodrendű lineáris rekurzív sorozatok között keressük a megoldást, a $\mathbf{Q}(\alpha)$ elemeit $\omega = (G_{n+1}/H_n)_{n=1}^{\infty}$ alakú sorozatokkal van esélyünk jól approximálni, ahol az α algebrai egész definiáló polinomja egyben a G és H sorozatok közös definiáló polinomja is. A kezdőértékek (G_0, G_1, H_0, H_1) alkalmas megválasztásával érhető el, hogy az ω határértéke az előre adott $t \in \mathbf{Q}(\alpha)$ legyen. Ezt a koncepciót erősíti meg Kiss Péter (P. KISS [VIII]) dolgozata is.

Mivel bármely t valós másodfokú algebrai számhoz végtelen sok α valós másodfokú algebrai egész szám van, melyre $t \in \mathbf{Q}(\alpha)$, ezért még ha egy t algebrai egészet helyezünk is el, egy másik másodfokú valós algebrai egész által létrehozott tesbővítésben, $t \in \mathbf{Q}(\alpha^*)$, még akkor is van esélyünk a [X]–belinél magasabb approximációs fokokat találni, ami MOLNÁR SÁNDOR [5] –dolgozat példáiból derül ki.

A MOLNÁR SÁNDOR ([5], [7]) dolgozatok tételeivel a következőket tudjuk elvégezni.

- Bármely valós másodfokú algebrai egész számhoz (speciálisan $t = \sqrt{D}$ – hez is) meg tudunk adni (i), (ii) és (iii) feltételeknek is eleget tevő legjobban approximáló sorozatot.
- Bármely nem valós (komplex) másodfokú algebrai egész szám abszolút értékéhez, ha az nem racionális szám, meg tudunk adni (i), (ii) és (iii) feltételeknek is eleget tevő legjobban approximáló sorozatot.
- Bármely valós másodfokú algebrai számhoz meg tudunk adni olyan $k = 2$ szerinti approximáló sorozatot, amely az (i) és (ii) feltételeket teljesíti (az (iii) –ben a $c = c_{\max}(t)$ feltételt többnyire nem tudjuk garantálni, ha az approximálandó szám nem algebrai egész).
- Bármely nem valós másodfokú algebrai szám abszolút értékéhez, ha az nem racionális szám, meg tudunk adni olyan $k = 2$ szerinti approximáló sorozatot, amely az (i) és (ii) feltételeket teljesíti. Az (iii) –ben a $k = 2$ feltételt mindig, a $c = c_{\max}(t)$ feltételt többnyire nem tudjuk garantálni, ha a szóban forgó szám abszolút értéke nem algebrai egész.
- Bármely olyan valós másodfokú algebrai számhoz, melyet denominátorával megszorozva olyan algebrai egészset kapunk, melynek $x^2 - Ax - B = 0$ minimál egyenletében $|B| = 1$, meg tudunk adni az (i), (ii), (iii) és (iv) (tehát mind a négy) feltételt kielégítő approximáló sorozatot.

PÉLDA: A $t = (1 + \sqrt{5})/6$ másodfokú algebrai, de nem algebrai egész számot a $G(7, -1, 0, 1)$ és a $H(7, -1, 2, 13)$ sorozatokból képzett $\omega = (G_{n+1}/H_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat mind a négy feltételt teljesítve approximálja.

Most az alábbi tételeket ismertetjük:

9. TÉTEL: Legyenek az A és B olyan racionális egész számok, melyekre $AB \neq 0$ és $D = A^2 + 4B > 0$ nem teljes négyzet. Jelölje α és β az $x^2 - Ax - B = 0$ egyenlet két gyökét, ahol $|\alpha| > |\beta|$. Legyen az $s, q > 0, p \neq 0$ és r egész számokkal $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}\alpha$. Defináljuk a

c_0 számot az $c_0 = \frac{\sqrt{A^2 + 4B}}{|pq|s^2}$ egyenlőséggel és jelöljön c egy pozitív számot.

A $G(A, B, qr, psB)$ és $H(A, B, 0, qsB)$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal felírt

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c H_n^2}$$

egyenlőtlenség

- a) akkor és csakis akkor teljesül végtelen sok egész n értékre, ha $|B| = 1$ és $c \leq c_0$,
- b) akkor és csakis akkor teljesül minden n egész számra, ha $B = -1$ és $c \leq c_0$.

10. TÉTEL: Legyenek az A és B olyan racionális egész számok, melyekre $AB \neq 0$ és $D = A^2 + 4B > 0$ nem teljes négyzet. Jelölje α és β az $x^2 - Ax - B = 0$ egyenlet két gyökét, ahol $|\alpha| > |\beta|$. Legyen az $s, q > 0, p \neq 0$ és r egész számokkal $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}\alpha$. Defináljuk a

k_0 és c_0 számokat az $k_0 = 2 - \frac{\log|B|}{\log|\alpha|}$ és $c_0 = \left| \frac{\sqrt{D}}{qsB} \right|^{k_0-1} \cdot \frac{1}{|psB|}$ egyenlőségekkel és

jelöljön c egy pozitív számot.

A $G(A, B, qr, psB)$ és $H(A, B, 0, qsB)$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal felírt

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c |H_n|^k}$$

egyenlőtlenség akkor és csakis akkor teljesül végtelen sok egész n értékre, ha:

- (i) $k < k_0$, vagy
- (ii) $k = k_0$ és $c < c_0$, vagy
- (iii) $k = k_0$, $c = c_0$ és $B > 0$, vagy
- (iv) $k = k_0$, $c = c_0$, $B < 0$ és $k_0 > 1$.

(Megjegyezzük, hogy $k_0 > 0$, mivel $|B| = |\alpha\beta| < \alpha^2$.)

11. TÉTEL: Legyenek az A, B és U olyan racionális egészes számok, melyekre $ABU \neq 0$ és $D = A^2 + 4BU > 0$ nem teljes négyzet. Jelölje σ és ρ az $Ux^2 - Ax - B = 0$ egyenlet két gyökét, ahol $|\sigma| > |\rho|$. Legyen az $s, q > 0, p \neq 0$ és r egészes számokkal $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}\sigma$.

Definiáljuk a k_0 és c_0 számokat az $k_0 = 2 - \frac{\log|BU|}{\log|\sigma U|}$ és $c_0 = \left| \frac{\sqrt{D}}{qsBU} \right|^{k_0 - 1} \cdot \frac{1}{|psB|}$

egyenlőségekkel és jelöljenek k és c pozitív számokat.

$A = G(A, BU, qr, psB)$ és $H(A, BU, 0, qsBU)$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal felírt

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c|H_n|^k}$$

egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül végtelen sok egészes n értékre, ha:

- $k < k_0$, vagy
- $k = k_0$ és $c < c_0$, vagy
- $k = k_0$, $c = c_0$ és $UB > 0$, vagy
- $k = k_0$, $c = c_0$, $UB < 0$ és $k_0 > 1$.

(Megjegyezzük, hogy $k_0 > 0$, tekintve, hogy

$$|\sigma|^2 > |\sigma\rho| = |B/U| \Rightarrow |\sigma U|^2 > |BU| \Rightarrow 2 > \log|BU|/\log|\sigma U|.)$$

12. TÉTEL: Legyen t egy valós másodfokú algebrai egészes szám. Legyen t definiáló polinomja $P(x) = x^2 - Ax - B$. Jelölje az $\eta^2 - (A^2 + 4B)\xi^2 = 1$ Pell egyenlet alapsmegoldását (ξ_0, η_0) .

Ha $t = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$, akkor $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 - \eta_0, -1)$ és $H(2\eta_0, -1, 0, -2\xi_0)$ esetén,

míg ha $t = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$, akkor $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 + \eta_0, 1)$ és $H(2\eta_0, -1, 0, -2\xi_0)$ esetén

minden pozitív egészes n -re teljesül az

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{A^2 + 4B} \cdot H_n^2}$$

egyenlőtlenség.

3. KÖVETKEZMÉNY: Legyen a k pozitív egész, de nem teljes négyzet. Legyen az $\eta^2 - 4k\eta = 1$ Pell egyenlet alapmegoldása (ξ_0, η_0) . A $G(2\eta_0, -1, \eta_0, 1)$ és a $H(2\eta_0, -1, 0, 2\xi_0)$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal az

$$\left| \sqrt{k} - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{2\sqrt{k} \cdot H_n^2}$$

minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén teljesül.

4. KÖVETKEZMÉNY: Legyen t másodfokú algebrai egész nem valós (komplex) szám. $P(x) = x^2 - Ax - B$ definiáló polinommal és legyen $|t| \notin \mathbf{Q}$.

Jelölje az $\eta^2 - 4B\xi^2 = 1$ Pell egyenlet alapmegoldását (ξ_0, η_0) . A $G(2\eta_0, -1, \eta_0, 1)$ és a $H(2\eta_0, -1, 0, 2\xi_0)$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal az

$$\left| |t| - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{2\sqrt{-B} \cdot H_n^2} \leq \frac{1}{\sqrt{-(A^2 + 4B)} \cdot H_n^2}$$

minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén teljesül.

13. TÉTEL: Legyen t egy valós másodfokú algebrai, de nem algebrai egész szám.

Legyen t definiáló polinomja $P(x) = Ux^2 - Ax - B$, $(|U| > 1, A, B \in \mathbf{Z})$ Jelölje az

$\eta^2 - (A^2 + 4BU)\xi^2 = 1$ Pell egyenlet alapmegoldását (ξ_0, η_0) . Ha

$t = \left(A + \sqrt{A^2 + 4BU} \right) / 2U$, akkor $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 - \eta_0, -1)$ és $H(2\eta_0, -1, 0, -2U\xi_0)$

esetén, míg ha

$t = \left(A - \sqrt{A^2 + 4BU} \right) / 2U$, akkor $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 + \eta_0, 1)$ és $H(2\eta_0, -1, 0, -2U\xi_0)$

esetén minden pozitív egész n -re teljesül az

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{|U|}{\sqrt{A^2 + 4BU} \cdot H_n^2}$$

egyenlőtlenség.

A 12. tételben valamint a 3. Következményben és 4. Következményben szereplő konstansok értéke a lehető legjobb (lásd: J. W. S. CASSELS [I] p. 24).

On the distribution modulo 1 of sequences

Let $G = G(A, B, G_0, G_1) = (G_n)_{n=0}^{\infty}$ be a second order linear recursive sequence of rational integers defined by the recursion

$$G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n \quad (n \geq 0),$$

where A, B and the initial terms G_0, G_1 are fixed integers, with restrictions $AB \neq 0$, $D = A^2 + 4B \neq 0$ and not both G_0 and G_1 are zero.

It is well-known that the terms of G can be written in the form

$$G_n = a\alpha^n - b\beta^n,$$

where α and β are the roots of the characteristic polynomial $x^2 - Ax - B$ of the sequence G and $a = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha - \beta}$, $b = \frac{G_1 - G_0\alpha}{\alpha - \beta}$ (see e.g. [XV], p.91).

Throughout this paper we assume that $|\alpha| \geq |\beta|$ and the sequence G is non-degenerate, i.e. α/β is not a root of unity and $ab \neq 0$. If $G_0 = 0$ we may also suppose that $G_n \neq 0$ for $n > 0$ since in [VI] [VI] it was proved that a non-degenerate sequence G has at most one zero term and after a movement of indices this condition can be fulfilled.

In the following we shall use the terminology and notation of L. KUIPERS and H. NIEDERREITER [XII] adapted to suit our purposes.

Let $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, be a given sequence of real numbers. For a positive integer N and a subset E of $[0, 1)$, let the counting function $A(E; N; \omega)$ be defined as the number of terms x_n , $1 \leq n \leq N$, for which $\{x_n\} \in E$.

We need the following known definitions.

DEFINITION: The sequence $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ of real numbers is said to be uniformly distributed modulo 1 (abbreviated by u. d. mod 1) if for every pair (a, b) of real numbers with $0 \leq a < b \leq 1$ we have

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A([a, b); N; \omega)}{N} = b - a$$

DEFINITION: The sequence $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ is said to have asymptotic distribution function modulo 1 (abbreviated by a.d.f. mod 1) F if

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A([0, x); N; \omega)}{N} = F(x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1.$$

R. F. TICHY [XIX] showed that there are infinitely many linear recursive sequences G which are everywhere dense modulo 1 on the unit interval but they are not uniformly distributed, if the parameters A, B, G_0, G_1 of the sequence G are real numbers. However, the characteristic polynomials of the sequences in Tichy's construction have positive discriminants: $D = A^2 + 4B > 0$. In [11] we extended this result to sequences having negative discriminants furthermore we gave the asymptotic distribution functions, too. The following two theorems show our results.

THEOREM 1: *Let A be a real number with restrictions $-2 < A < 2$ and $\Theta = \frac{1}{2\pi} \arccos(A/2)$ is an irrational number. Let $B = -1$, $G_1 \neq 0$, $G_0, G_1 \in \mathbf{R}$ and let $G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n$ ($n \geq 0$). If $r_1 = 2|a| = 2 \left| \frac{G_1 - G_0 \beta}{\alpha - \beta} \right| \geq 2$ is an integer then G is everywhere dense modulo 1 on the unit interval $[0,1)$ but it is not uniformly distributed.*

We need the following notations. Let n be an integer and let r_1 as in theorem 1. We denote

$$K_n = \begin{cases} n, & \text{if } n \geq 0, \\ \max\{n, -r_1\}, & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

and

$$L_n(x) = \begin{cases} \min\{n+x, r_1\}, & \text{if } n \geq 0, \\ \max\{n+x, -r_1\}, & \text{if } n < 0 \end{cases},$$

where $0 \leq x \leq 1$.

We have:

THEOREM 2: *Let A be a real number with restrictions $-2 < A < 2$ and $\Theta = \frac{1}{2\pi} \arccos(A/2)$ is an irrational number. Let $B = -1$, $G_1 \neq 0$, $G_0, G_1 \in \mathbf{R}$ and let $G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n$ ($n \geq 0$).*

The sequence G has asymptotic distribution function modulo 1 F , where

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]} \left(\arccos\left(\frac{K_j}{r_1}\right) - \arccos\left(\frac{L_j(x)}{r_1}\right) \right) \quad 0 \leq x \leq 1.$$

COROLLARY 1: *There are infinitely many linear recursive sequences G which are everywhere dense modulo 1 on the unit interval $[0,1)$ but they are not uniformly distributed, if the parameters A, B, G_0, G_1 of the sequence G are real numbers and the*

characteristic polynomials of the sequences have negative discriminants:
 $D = A^2 + 4B < 0$.

Some limit properties of the linear recurrences were studied by several authors. For example P. KISS [VII] and F. MÁTYÁS [XIV] investigated the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} G_{n+i} / G_n$ for fixed i and they gave the best rational approximation of the limit in the case $|B| = 1$. W. GERDES [II] gave the condition for the existence of the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n$, if the parameters A, B, G_0, G_1 of the sequence G are real numbers.

In the case $A = B = 1$, the sequence G of integers is called Fibonacci-type sequence and we denote its terms by $u_0, u_1, u_2, \dots$

M. B. GREGORY and J. M. METZGER [IV] investigated the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(u_n x \pi),$$

where x is a fixed real number. They have showed that if the limit exists then it must be zero and x is a number of the quadratic number field $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$.

In [2] we generalized the results of Gregory and Metzger for more general second order linear recurrences. If we look for x for which

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(G_n x \pi) = 0,$$

we can use the results on Pisot-Vijayaraghavan numbers (see J. W. S. CASSELS [I]). But we shall show that the limit can be not only zero in general.

We note that the problem is not identical with the problem of studying the convergence of the sequence $(\{G_n x\})_{n=0}^{\infty}$, where $\{y\}$ is the fractional part of y . Namely, for example, in the case $A = 10, B = 1, G_0 = 1, G_1 = 4$ and $x = 1/5$ we have $\{G_n x\} = 1/5$ for even n and $\{G_n x\} = 4/5$ for odd n , thus

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(G_n x \pi) = \sin(\pi/5)$ but $\lim_{n \rightarrow \infty} \{G_n x\}$ does not exist. Another example: if

$A = 7, B = 1, G_0 = G_1 = 1$ and $x = 1/7$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} \{G_n x\} = 1/7$, but

$\sin(G_n x \pi) = -\sin(\pi/7)$ for integers of the form $n = 3k + 2$ and

$\sin(G_n x \pi) = \sin(\pi/7)$ for other n 's.

We prove the following theorem.

THEOREM 3: *Let G be a second order recurrence defined by integers A, B, G_0 and G_1 with restriction $A \neq 0, B = 1$ and $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$. Let x be a real number. The limit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(G_n x \pi)$$

exists if and only if x has the form

$$x = \frac{2(c_1 - c_2 \beta) + (d_1 - d_2 \beta)}{(G_1 - G_0 \beta) \cdot a^e},$$

where c_1, c_2, e are arbitrary integers, $d_1, d_2 \in \{2k/A; 1-2k/A\}$ with some integer k if A is an even number, and $d_1 = d_2 = 2k/A$ with some integer k or $d_1, d_2 \in \{2k/A; 1-2k/A\}$ with integer k for which $2k/A$ is an integer, if A is odd. If x has this form then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(G_n x \pi) = \sin(2k\pi/A).$$

Suppose that a sequence ω has a. d. f. mod 1 which is F . If f is a real valued function, defined at the terms of ω , and the sequence $\xi = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ also has a.d.f. mod 1, then, in general, the two distribution functions are distinct. E.g. if $\omega = (n\Theta)_{n=1}^{\infty}$, where Θ is an irrational number, and $f(x) = \cos x$ or $f(x) = 1/x$, then the a.d.f. mod 1 of ω is different from the a.d.f. mod 1 of the sequence $\xi = (\cos n\Theta)_{n=1}^{\infty}$. Another most striking example is the following one: The sequence $\omega = (F_n)_{n=1}^{\infty}$ of the Fibonacci numbers has a non-continuous a.d.f. mod 1 but the a.d.f. mod 1 of the sequence $\xi = (\log F_n)_{n=1}^{\infty}$ is continuous, see L. KUIPERS [XI]. (The sequence of the Fibonacci numbers is a second order linear recurrence defined by the constants $A = B = F_1 = 1$ and $F_0 = 0$.) However, there are sequences ω and functions f such that the sequences $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ and $\xi = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ have the same a. d. f. mod 1. We introduce a definition.

DEFINITION: Let $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ and $\xi = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ be sequences of real numbers, where f is a real – valued function. If the sequences ω and ξ have a.d.f. mod 1 and these functions are identical, then we say that ω is an f invariant distributed sequence modulo 1 (abbreviated by i.d. mod 1 to f).

EXAMPLES

1: If Θ is a positive irrational number, then the sequences $\omega = (n\Theta)_{n=1}^{\infty}$ and $\xi = (\sqrt{n\Theta})_{n=1}^{\infty}$ are u.d. mod 1 and they have common asymptotic distribution function mod 1 ($F(x) = x$). Thus ω is a square root invariant distributed sequence mod 1.

2: We know sequences also having a.d.f. mod 1 which are not uniformly distributed mod 1 but they are invariant distributed to a function. In this paper we will give conditions for second – order linear recurrences G such that the sequence $\omega = (G_n / G_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ to be invariant distributed to the function $f(x) = 1/x$ (we say reciprocal invariant).

3: There are functions, e.g. $f_1(x) = \{x\}$ or $f_2(x) = x + k$, where k is an integer, such that any sequence of real numbers, which has a.d.f mod 1, is invariant distributed mod 1 to these functions. But if a real number c is not integer, then not every sequences is invariant distributed mod 1 to the function $f_3(x) = x + c$, but each uniformly distributed sequence mod 1 is i.d. mod 1 to f_3 .

The functions f that map the interval $[0,1]$ into itself and any uniformly distributed sequence mod 1 is invariant distributed mod 1 to f are called uniform distributed preserving function (u.d.p.). Some results for u.d.p. functions can be found in S. PORUBSKI, T. SALÁT and O. STRAUCH [XVII].

We prove four theorems for mod 1 invariant distributed sequences. We need some notations.

For a real valued function f we denote its domain of definition by D_f , furthermore the set $\text{graph } f$ is defined by

$$\text{graph } f = \{(x, y) | x \in D_f, y = f(x)\}$$

We write $\text{graph } f \bmod 1$ instead of $\text{graph } f$ if we reduce the coordinates $x, y \bmod 1$:

$$\text{graph } f \bmod 1 = \{(x, y) | \exists k, i \in \mathbf{Z}, x+k \in D_f, y+i = f(x+k) \text{ and } 0 \leq x, y < 1\}.$$

In [4] we proved:

THEOREM 4: Let f be a real-valued function with $D_f \subseteq \mathbf{R}$ and let F and G be non-decreasing functions defined on the interval $[0,1]$ such that $F(0)=G(0)=0$ and $F(1)=G(1)=1$. For any such functions F and G there exists a sequence $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ of real numbers, such that the asymptotic distribution function mod 1 of ω is F and the a.d.f. mod 1 of the sequence $\varphi = (f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ is G if and only if $\text{graph } f \bmod 1$ is everywhere dense on the unit square $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$.

From this theorem, with $F = G$, we obtain

COROLLARY 2: If f is a real-valued function such that $\text{graph } f \bmod 1$ is everywhere dense on the unit square, then for every nondecreasing function F , for which $F(0)=0$ and $F(1)=1$, there exists a sequence ω of real numbers such that F is the asymptotic distribution function modulo 1 of ω and ω is mod 1 f invariant distributed.

THEOREM 5: Let f be a real-valued function. There exists a sequence $\omega = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ of real numbers, which is uniformly distributed mod 1 and f invariant distributed mod 1 if and only if for any pairwise disjunct finitely many subintervals $[a_1, b_1[, [a_2, b_2[, \dots, [a_s, b_s[$ of $[0,1]$

$$m^* \left(\left\{ y \mid \exists k, \exists x \in [a_k, b_k[\Rightarrow (x, y) \in \text{graph } f \bmod 1 \right\} \right) \geq \sum_{i=1}^s (b_i - a_i)$$

and

$$m^* \left(\left\{ x \mid \exists k, \exists y \in [a_k, b_k[\Rightarrow (x, y) \in \text{graph } f \bmod 1 \right\} \right) \geq \sum_{i=1}^s (b_i - a_i) ,$$

where $m^*(H)$ denotes the Jordan outer measure of the set H .

NOTES: It is easy to check that the conditions of Theorem 4 for the function f are satisfied by the functions $\sin$, $\cos$, tg , ctg , and by any continuous periodic function for which the period length is irrational and the range of this function is an interval of length at least one. These functions satisfy also the conditions of Theorem 5, moreover, the function $1/x$ also satisfies the conditions.

P. KISS and R. F. TICHY in [IX] investigated the asymptotic distribution function modulo 1 of the sequence $(G_{n+1}/G_n)_{n=1}^\infty$ when $D < 0$. Their theorem can be extended to any sequence $(G_{n+k}/G_n)_{n=1}^\infty$ where $k \neq 0$ integer number. In [6] we proved

THEOREM 6: Let $G = (G_n)_{n=0}^\infty$ be a linear recurring sequence defined by $G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}$, $(n > 1)$ with non-zero real coefficients A, B , real initial values G_0, G_1 (not both G_0 and G_1 are zero) and with negative discriminant $D = A^2 + 4B$. Let $k \neq 0$ be an integer number. If the number $\Theta = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{-D}}{A}$ is irrational, then the asymptotic distribution function modulo 1 of the sequence $(G_{n+k}/G_n)_{n=1}^\infty$ is given by

$$H(x) = H_1(x - \{c\}) + H_1(\{c\})$$

with

$$H_1(x) = x + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\sin(2\pi x)}{\exp(2\pi |d|) - \cos(2\pi x)} ,$$

where $c = r^k \cos(k\pi\Theta)$, $d = -r^k \sin(k\pi\Theta)$ and $r = |\alpha| = \left| \left(A + \sqrt{A^2 + 4B} \right) / 2 \right|$.

THEOREM 7: Let $G = (G_n)_{n=0}^\infty$ be a non-degenerate second order linear recursive sequence defined by $G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}$, $(n > 1)$ with non-zero real coefficients A, B , real initial values G_0, G_1 (where $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$) and negative discriminant $D = A^2 + 4B$.

The sequence $\omega = (G_{n+1}/G_n)_{n=1}^\infty$ is reciprocal invariant distributed modulo 1 if and only if $B = -1$.

THEOREM 8: Let $G = (G_n)_{n=0}^{\infty}$ be a non-degenerate second order linear recursive sequence defined by the recursion $G_n = A G_{n-1} + B G_{n-2}$, $(n > 1)$ with non-zero integer coefficients A, B integer initial values G_0, G_1 (where $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$) and with positive discriminant $D = A^2 + 4B$.

The sequence $\omega = (G_{n+1} / G_n)_{n=1}^{\infty}$ is reciprocal invariant distributed modulo 1 if and only if $B = 1$.

On the approximation of quadratic algebraic numbers by the quotients of terms of linear recurrences

Let $G = G(A, B, G_0, G_1) = (G_n)_{n=0}^{\infty}$ be a second order linear recursive sequence of rational integers defined by the recursion

$$G_n = A G_{n-1} + B G_{n-2} \quad (n > 1),$$

where A, B and the initial terms G_0, G_1 are fixed integers, with restrictions $AB \neq 0$, $D = A^2 + 4B \neq 0$ and not both G_0 and G_1 are zero.

It is well-known that there are connections between the diophantine approximation of real quadratic algebraic numbers and second order linear recurrences. For example, we know that the inequality

$$\left| \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{F_{n+1}}{F_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} F_n^2}$$

holds for infinitely many n , where $F_1, F_2, F_3, \dots$ denote the Fibonacci numbers. We shall deal with similar inequalities for arbitrary real quadratic algebraic integers, permitting the numerators and denominators of the approximating fractions belong to different second order linear recurrences.

In the case $D = A^2 + 4B > 0$, the roots of the characteristic polynomial are real,

$|\alpha| > |\beta|$, and $(\beta/\alpha)^n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ and so by (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \alpha$ follows. (F.

MÁTYÁS, [XIV])

Several authors have dealt with the approximation of real quadratic algebraic integer α using the sequence G_{n+1} / G_n . For example, P. KISS [VII] proved that the inequality

$\left| \alpha - \frac{G_{n+1}}{G_n} \right| < \frac{1}{G_n^2}$ is fulfilled for infinitely many integers n if and only if $|B| = 1$, when

$G_0 = 0$ and $G_1 = 1$.

Furthermore, if $|B| = 1$, then the solutions $\frac{p}{q}$ of the inequality $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{D} q^2}$ have the form G_{n+1} / G_n .

Thereby P. Kiss generalized an important property of the number $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ and the Fibonacci sequence to other irrational numbers and the respective linear recursive

sequences. In [X], P. KISS and Zs. SINKA, determined the values of $k \leq 2$ and $c > 0$ for $|B| \neq 1$ so that the inequality $\left| \alpha - \frac{G_{n+1}}{G_n} \right| < \frac{1}{c|G_n|^k}$ had infinitely many solutions.

If $D < 0$, then α and β are non real complex numbers with $|\alpha| = |\beta|$ and by (1) we have

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{1 - (b/a)(\beta/\alpha)^{n+1}}{1 - (b/a)(\beta/\alpha)^n} \cdot \alpha. \quad \text{But } |\beta/\alpha| = 1, \text{ thus } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} \text{ does not even}$$

exist. The approximation of $|\alpha|$ by rationals of the form $|G_{n+1}/G_n|$ was considered e.g. in [X]. In [X] it is proved that if G is a non-degenerate second order linear recurrence with $D < 0$ and the initial values $G_0 = 0, G_1 = 1$, then there exists a constant

$c_1 > 0$, depending only on the sequence G , such that $\left| |\alpha| - \left| \frac{G_{n+1}}{G_n} \right| \right| < \frac{c_1}{n}$ for infinitely many n .

The case when $D > 0$ has been studied by a larger number of authors since it is more important, thus several results are known in this case. For example, in [III], [V], $\sqrt{D}$ was approximated with the quotients of the generalized Fibonacci numbers and the generalized Lucas numbers.

In [VIII], P. Kiss divided the set of the convergents of the real quadratic algebraic number t into finite disjunct subsets so that the subsets could be generated by the quotient G_n/H_n of the terms of second order linear recurrences. He did not study the connections between the constants defining the number t and those defining the sequences G and H , or the constants of the approximation.

In [VII] the root α of the polynomial $x^2 - Ax - B$ was not approximated by the rationals of the form G_{n+1}/G_n but by G_{n+1}/H_n , where H_n is a term of an appropriately chosen second order linear recursive sequence H .

We gave a better approximation for $|\alpha|$ if $D < 0$, and for α in the most cases if $D > 0$, than it was given by the authors in [X]. This can be achieved by the approximation of the numbers of the quadratic number field $\mathbf{Q}(\alpha^*)$ when $D^* > 0$. This can be done since there exists infinitely many quadratic algebraic integers α^* for any quadratic real algebraic number α , so that $\alpha \in \mathbf{Q}(\alpha^*)$.

Using α^* -s, different approximation qualities can be reached. We saw in [5] that the root of the characteristic polynomial $x^2 - Ax - B$ can often be better approximated by an appropriate G_{n+1}^*/H_n^* than by G_{n+1}/G_n , as described in [X].

We attach second order linear recurrences G and H to any quadratic algebraic integer t to fulfil the inequality

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{D} H_n^2},$$

for all n , where $c = \sqrt{D}$ is the possible best constant which gives infinitely many solutions for the inequality $\left| t - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c q^2}$ (see p.24 of [I]).

Essentially, we give an appropriate partial sequence of the convergents of t in explicit form, where we use Binet's formula instead of the continued fraction process.

In the corollaries, we approximate $\sqrt{k}$ with the best constant to second degree, where k is an arbitrary integer but not a perfect square, or the absolute value of any complex quadratic algebraic integer, when the absolute value is not a rational number.

In Theorem 13, we give approximation to second degree but not with the best constant to arbitrary quadratic algebraic numbers, which are not algebraic integers.

We have:

THEOREM 9: Let A and B be rational integers with the restrictions $AB \neq 0$ and $D = A^2 + 4B > 0$ is not a perfect square. Denote the roots of equation $x^2 - Ax - B = 0$ by α and β , where $|\alpha| > |\beta|$. Let $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q} \alpha \in \mathbf{Q}(\alpha)$ with integers $s, q > 0, p \neq 0$ and r .

Define the number c_0 by $c_0 = \frac{\sqrt{A^2 + 4B}}{|pq|s^2}$ and let c be a positive real number. Then with linear recurrences $G(A, B, qr, psB)$ and $H(A, B, 0, qsB)$, the inequality

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c H_n^2}$$

- (i) holds for infinitely many integer n if and only if $|B| = 1$ and $c \leq c_0$,
- (ii) holds for all positive integer n if and only if $B = -1$ and $c \leq c_0$.

If we want to approximate a quadratic real algebraic number, which is not an algebraic integer i.e. the root α of the equality $Ux^2 - Ax - B = 0$, where $U, A, B \in \mathbf{Z}$ and $|U| > 1$, then the zero of $f(x) = x^2 - Ax - UB = 0$ is suitably applicable for α^* since it results the same field extension. That is why our next theorem may be of interest.

THEOREM 10: Let A and B be rational integers with the restrictions $AB \neq 0$ and $D = A^2 + 4B > 0$ is not a perfect square. Denote the roots of equation $x^2 - Ax - B = 0$ by α and

β , where $|\alpha| > |\beta|$. Let $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}\alpha \in \mathbf{Q}(\alpha)$ with integers $s, q > 0, p \neq 0$ and r . Define the

numbers k_0 and c_0 by $k_0 = 2 - \frac{\log|B|}{\log|\alpha|}$ and $c_0 = \left| \frac{\sqrt{D}}{qsB} \right|^{k_0-1} \cdot \frac{1}{|psB|}$ and let c be a positive real number. Then with linear recurrences $G(A, B, qr, psB)$ and $H(A, B, 0, qsB)$ the inequality

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c |H_n|^k}$$

holds for infinitely many integers n if and only if

- (i) $k < k_0$, or
- (ii) $k = k_0$ and $c < c_0$, or
- (iii) $k = k_0$, $c = c_0$ and $B > 0$, or
- (iv) $k = k_0$, $c = c_0$, $B < 0$ and $k_0 > 1$.

(Note that $k_0 > 0$ since $|B| = |\alpha\beta| < \alpha^2$.)

THEOREM 11: Let A, B and U be rational integers with the restrictions $ABU \neq 0$ and $D = A^2 + 4BU > 0$ is not a perfect square. Denote σ and ρ the roots of the equation $Ux^2 - Ax - B = 0$, where $|\sigma| > |\rho|$. Let $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}\sigma \in \mathbf{Q}(\sigma)$ with integers $s, q > 0, p \neq 0$ and r . Define the numbers k_0 and c_0 by

$$k_0 = 2 - \frac{\log|BU|}{\log|\sigma U|} \quad \text{and} \quad c_0 = \left| \frac{\sqrt{D}}{qsBU^2} \right|^{k_0-1} \cdot \frac{1}{|psBU|}$$

and let k and c be positive real numbers. Then with linear recurrences $G(A, BU, qrU, psBU)$ and $H(A, BU, 0, qsBU^2)$ the inequality

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c |H_n|^k}$$

holds for infinitely many integers n if and only if one of the following conditions holds:

- (i) $k < k_0$ and c is arbitrary,
- (ii) $k = k_0$ and $c < c_0$,
- (iii) $k = k_0$, $c = c_0$ and $B > 0$,
- (iv) $k = k_0$, $c = c_0$, $B < 0$ and $k_0 > 1$.

(Note that $k_0 > 0$ since $|\sigma|^2 > |\sigma\rho| = \left| \frac{B}{U} \right| \Rightarrow |\sigma U|^2 > |BU| \Rightarrow 2 > \frac{\log|BU|}{\log|\sigma U|}$.)

THEOREM 12: Let t be a real quadratic algebraic integer. Let the polynomial defining t be $P(x) = x^2 - Ax - B$. Denote the basic solution of the Pell equation $\eta^2 - (A^2 + 4B)\xi^2 = 1$ with (ξ_0, η_0) .

If $t = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$, then with the sequences $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 - \eta_0, -1)$ and

$H(2\eta_0, -1, 0, -2\xi_0)$ or if $t = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$, then with the sequences $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 + \eta_0, 1)$ and $H(2\eta_0, -1, 0, -2\xi_0)$ the inequality

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{A^2 + 4B} \cdot H_n^2}$$

holds for all positive integers n .

COROLLARY 3: Let k be a positive integer but not a perfect square. Let the basic solution of the Pell equation $\eta^2 - 4k\xi^2 = 1$ be (ξ_0, η_0) . With the second order linear recurrences $G(2\eta_0, -1, \eta_0, 1)$ and $H(2\eta_0, -1, 0, 2\xi_0)$ the inequality

$$\left| \sqrt{k} - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| = \left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{2\sqrt{k} \cdot H_n^2}$$

holds for all $n \in \mathbf{N}^+$

COROLLARY 4: Let t be a not real quadratic algebraic integer with the defining polynomial $P(x) = x^2 - Ax - B$ and let $|t| \notin \mathbf{Q}$.

Let the basic solution of the Pell equation $\eta^2 - 4B\xi^2 = 1$ be (ξ_0, η_0) . With the second order linear recurring sequences $G(2\eta_0, -1, \eta_0, 1)$ and $H(2\eta_0, -1, 0, 2\xi_0)$ the inequality

$$\left| |t| - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{2\sqrt{-B} \cdot H_n^2} \leq \frac{1}{\sqrt{-(A^2 + 4B)} \cdot H_n^2}$$

holds for all $n \in \mathbf{N}^+$

THEOREM 13: Let t be a quadratic algebraic but not algebraic integer with the defining polynomial $P(x) = Ux^2 - Ax - B$, $(|U| > 1, A, B \in \mathbf{Z})$.

Denote the basic solution of the Pell equation $\eta^2 - (A^2 + 4BU)\xi^2 = 1$ by (ξ_0, η_0) .

If $t = \left(A + \sqrt{A^2 + 4BU} \right) / 2U$, then with the sequences $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 - \eta_0, -1)$ and $H(2\eta_0, -1, 0, -2U\xi_0)$ or if $t = \left(A - \sqrt{A^2 + 4BU} \right) / 2U$, then with the sequences $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 + \eta_0, 1)$ and $H(2\eta_0, -1, 0, -2U\xi_0)$ the inequality

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{|U|}{\sqrt{A^2 + 4BU} \cdot H_n^2}$$

holds for all positive integer n .

Note: If we use an other solution instead of the basic solution of the Pell equation in Theorem 12 or 13, or Corollary 3 or 4, then statements will hold true but the above sequences will be subsequences of the was given in the original version.

The constants in Theorem 12, Corollary 3 and Corollary 4 are the possible best. (See J. W. S. CASSELS [I] p. 24.)

Irodalomjegyzék

- [I] J.W.S. CASSELS, **An introduction to diophantine approximation**, Cambridge Univ. Press. New York, 1957. Mr 19 – 396.
- [II] W. GERDES, **Convergent generalized Fibonacci sequences**, Fibonacci Quart. 15 (1977), 156 – 160. MR 56 # 237
- [III] P.J. GRABNER, P. KISS and R.F. TICHY, **Diophantine Approximation in Terms of Linear Recurrent Sequences**, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings Vol. 15, 1995 pp. 187 – 195.
- [IV] M. B. GREGORI and J. M. METZGER, **Fibonacci sine sequences**, Fibonacci Quart. 16 (1978) 119 – 120. MR 58 # 16588
- [V] J.P. JONES and P. KISS, **Some Diophantine Approximation Results Concerning Linear Recurrences**, Math. Slovaca, 42 (1992) No. 5, 583 – 591
- [VI] P.KISS, **Zero terms in second order linear recurrences**, Math. Sem. Notes (Kobe Univ.) , 7 (1979), 145-152. MR 80j:10015
- [VII] P. KISS, **A Diophantine approximative property of the second order linear recurrences**, Period. Math. Hungar.,11 (1980), 281-287. MR 82k:10034
- [VIII] P. KISS, **On second order recurrences and continued fractions**, Bull. Malaysian Math. Soc. (2) 5 (1982) pp. 33 – 41.
- [IX] P. KISS and R. F. TICHY, **Distribution of the ratios of the terms of a second order linear recurrence**, Indag Math., 48 (1986), 79 – 86.
- [X] P. KISS and Zs. SINKA **On the ratios of the terms of second order linear recurrences**, Period. Math. Hungar., 23 (1991), 139-143.
- [XI] L. KUIPERS, **Remark on a paper by R. L. Duncan concerning the uniform distribution mod 1 of the sequence of the logarithms of the Fibonacci numbers**, Fibonacci Quart. 7 (1969) , 456 – 466, 473.
- [XII] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER, **Uniform distribution of sequences**, Wiley, New York, 1974.
- [XIII] LANG, **Introduction to diophantine approximation**, Wesley, 1966.
- [XIV] F. MÁTYÁS, **Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok elemeinek hányadosáról** (On the quotients of the elements of linear recursive sequences of second order), Mat. Lapok 27(1976/79), 379-389. (In Hungarian)
- [XV] I. NIVEN and H.S ZUCKERMAN, **An introduction to the theory of numbers**, Wiley, New York, 1960. MR 22 # 5605
- [XVI] C. Pisot, **Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres reels**, Comment Math. Helv. 19 (1946), 153 – 160. MR 8 – 194.
- [XVIII] S. PORUBSKI, T. SALÁT and O. STRAUCH **Transformations that preserve uniform distribution**, Acta Arith. 49 (1988), 459 – 479 MR 89m:11072
- [XVII] R. T. WORLEY, **Estimating $|\alpha - p/q|$** , J. Austral. Math. Soc. (Series A) 31 (1981), 202 – 206.
- [XIX] R. F. Tichy, **On the asymptotic distribution of linear recurrence sequences**. Fibonacci numbers and their applications (Patras, 1984), 273 – 291, Math. Appl., 28, Reidel, Dordrecht, 1986.

Publikációs jegyzék

Referált számelméleti publikációk

- [1] **On distribution of linear recurrences modulo 1**, Studia Sci. Math. Hungar.,17.(1982) pp.113-127. (Kiss Péterrel közösen)
- [2] **Sine sequence of second order linear recurrences**, Period Math. Hungar. 14. (1983) pp.259-267.
- [3] **Egészoldalú derékszögű háromszögek szögeiről**, Matematikai lapok 32. (1984) pp. 137-141.
- [4] **Sequences and their transzforms with identical asimptotic distribution function modulo 1**, Studia Math. Hungar. 29.(1994) pp. 315-322.
- [5] **Approximation by quotients of terms of second order linear recursive sequences of integers**, Acta Acad. Paed.Agriensis,Sectio Math. 28. (2001) pp. 21-26.
- [6] **Reciprocal invariant distributed sequences constructed by second order linear recurrences**, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 30 (2003) 101 – 108.
- [7] **On the Diophantine approximation of real quadratic algebraic numbers**, to appear

Lektorált számelméleti publikációk

- [8] **Néhány lineáris függetlenségi és eloszlási problémáról**, egyetemi doktori értekezés, Debrecen, 1982.
- [9] **Háromszögek szögeinek lineáris függetlenségéről**, HSMTF. Tud. Közleményei XVI. (1982) pp. 567-574.
- [10] **Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok tagjainak szinuszaíról**, HSMTF. Tud. Közleményei XVII. (1984) pp. 825-833.
- [11] **Lineáris rekurzív sorozatok egy eloszlási tulajdonságáról**, HSMTF. Tud. Közleményei XVIII.(1987) pp. 3-15.

Egyéb, a felsőoktatási tananyaggal kapcsolatos publikációk:

- 1. **Beszámoló a tanárképző főiskolák 1985. Évi matematika versenyéről**, A Matematika Tanítása,1986.3. (Mátyás Ferencsel közösen).
- 2. **Példatár az operációszámítás c. tankönyvhöz**, PSzF. 1991. Szerkesztő és szerző (szerzőtársakkal közösen).
- 3. **Matematika példatár** (társszerzőkkel közösen, szerk. Szelezsán János) LSI. Bp.1994.
- 4. **Többdimenziós eloszlások**, (főiskolai távoktatási jegyzet) PSzF.Bp..1996.
- 5. **Mintakollekciók a valószínűség számításához**, (főiskolai távoktatási jegyzet) Bp.1997.

Konferenciákon tartott előadások

Számelméleti előadások

1. **On the distribution of Fibonacci type sequences modulo 1**, Csebokszári 1981.
2. **On the distribution of $f(G_n)$ modulo 1**, Egri Számelmélet Konferencia 1993.
3. **Valós másodfokú algebrai számok diofantikus approximációja**, BGF Tudomány Napja, Híd Kelet és Nyugat Között c. konferenciája, Budapest, 2002.

Matematika történeti előadás:

4. **Grassmann és a spiritiszták**, a Főiskolák XXIV. Matematikai Fizikai és Számítástechnikai Konferenciájának Plenáris Ülése, Kaposvár 2000.