

## Dinamikus geometriai rendszerek a geometria oktatásában

*A számítógépes rajzolóprogramok új lehetőségeket nyitnak meg a geometria tanításában: gyorsan, pontosan, a bemeneti adatokat rugalmasan változtatva lehet rajzok sokaságát előállítani, megkönnyítve ezzel a geometria felfedezésének útját. A dinamikus geometriai rendszerek általános jellemzője, hogy a szerkesztés lépéseit raktározzák, s e lépéseket a bemeneti adatok változtatása után is végrehajjták.*

A geometriai problémamegoldás útja a rajzoknál kezdődik, hiszen a helyes következtetéshez pontos rajzok szükségesek. Példaként tekintsük a közismert tételt, amely szerint bármely háromszögben a magasságvonalak egy pontban metszik egymást. Azért, hogy meggyőzzük a tanulókat ezen egyszerű állítás érvényességéről, egy diákkal felrajzoltathatunk egy példát erről a tételről. Sajnos a gyakorlatban a legtöbb esetben a három egyenes nem találkozik közös pontban. Elegendő egy kis pontatlanság és a magasságvonal elcsúszik. Ez nemhogy tanulságos lenne, hanem inkább összezavarja a gyerekeket. A számítógépes rajzoló programok az oktatásban és a gyakorlatban nélkülözhetetlen, korrekt ábrákkal segítenek a szerkesztéseknél.

A számítógépes programok elterjedése az oktatásban szemléletváltást kényszerít ki: át kell gondolnunk azt, hogy mit tartunk fontosnak: leértékelődik a formális tudás (a számítógép ezt gyorsabban és jobban tudja) és felértékelődik a problémamegoldás képessége.

Célunk rámutatni a dinamikus geometriai rendszerek alkalmazási lehetőségeire az általános és középiskolában. Az alkalmazások bemutatásához a Cinderella programot választottuk, amely természetesen nem az egyedüli választási lehetőség. A Cinderella programról bővebb információ a [www.cinderella.de](http://www.cinderella.de) weboldalon található.

### A dinamikus geometriai rendszerek fő jellemzői

A dinamikus geometriai rendszer nem egyszerűen komputerrel támogatott rajzeszköz, mely egy konkrét statikus ábra elkészítését teszi lehetővé, hanem az ábrákat dinamikus egységnek tekinti. Előbbi példánkra visszatérve: képesek leszünk ellenőrizni a három magasságvonal egy pontra való illeszkedésének tételét nem csupán egy háromszögre, hanem a háromszögek egy igen nagy halmazára is. Így el lehet kerülni, hogy az ábra egyes részei között olyan szembeötlő összefüggések legyenek, melyeket a feladat nem ír elő. A dinamikus geometriai rendszerrel szemben támasztott követelmény egy fontos kérdést vet fel: mennyire marad elvégezhető a szerkesztés a bemeneti adatok változtatása után.

Tekintsük a következő esetet. Rajzoljunk két kört, amelyek egymást metszik két pontban. E két pontot kössük össze egy egyenessel. A körök mozgatásakor ez az egyenes is elmozdul, de mindig merőleges lesz a két kör középpontját összekötő egyenesre. De vajon mi történik, ha a két kör középpontja a két sugár összegénél távolabb kerül egymástól? A két metszéspont és az egyenes is eltűnik? A Cinderella ekkor is megszerkeszti az egyenest, mert a számolásokat komplex számokkal végzi el, s a két kör nem végtelen tá-

voli metszéspontjait, illetve az ezekre illeszkedő már valós egyenest ekkor is megtalálja. Ez a példa mutatja, hogy a komplex számokkal való számolás bevezetése igen leegyszerűsíti a geometriai szerkesztéseket az eltűnő metszéspontok kiküszöbölésével.

Az euklideszi síkon két egyenes metszi egymást, ha nem párhuzamosak. Két metsző egyenes lehet, hogy párhuzamos lesz, ha a szerkesztés néhány elemét elmozdítjuk. Ez a következő problémához vezethet: mi lesz azokkal az egyenesekkel, amelyeket ez a metszéspont és egy másik pont határozott meg? Az ilyen egyeneseknek párhuzamosoknak kellene ezután lennie a két adott egyenessel, de ehelyett eltűnnek, mivel a meghatározó pontjai többé már nem határozzák meg őket. Hogyan kerülhetjük el ezt a helyzetet? A Cinderella a projektív síkon végzi a számításokat, ezért a két párhuzamos egyenes végtelen távoli metszéspontját tudja értelmezni homogén koordinátákkal. A harmadik egyenest ezekkel párhuzamosan fogja megrajzolni, az adott végtelen távoli ponton keresztül.

Az alkalmazó szempontjából a fontos megállapítás az, hogy a program a számításokat a komplex projektív síkon végzi. Didaktikai szempontból ez lehet zavaró, hiszen az előző szerkesztés elvégezhetősége egy középiskolásnak is problémát okozhat. Az alkalmazó tanárnak a felhasználás tervezésekor ezt figyelembe kell vennie, s az így felmerülő problémákat el kell kerülnie.

A dinamikus geometriai rendszerek alkalmazási lehetőségei közül a következőket vizsgáltuk:

- ponthalmazok keresése (egyszerű halmazkeresés, feltételek elhagyásának módszere);
- diszkusszió, a határesetek vizsgálata;
- automatikus tételellenőrzés;
- a szerkesztőeszközök korlátozása;
- az összehasonlító geometria;
- web-alapú oktatás (tanári irányítással, Internet alapú távoktatás – e-learning).

### A kreativitás fejlesztésének néhány eszköze

A tanulók kreativitásának fejlesztése a matematikai nevelés egyik legerősebben tanár-függő területe. E területen eredményesek lehetnek a számítógépes rajzolóprogramok.

#### *Ponthalmazok keresése*

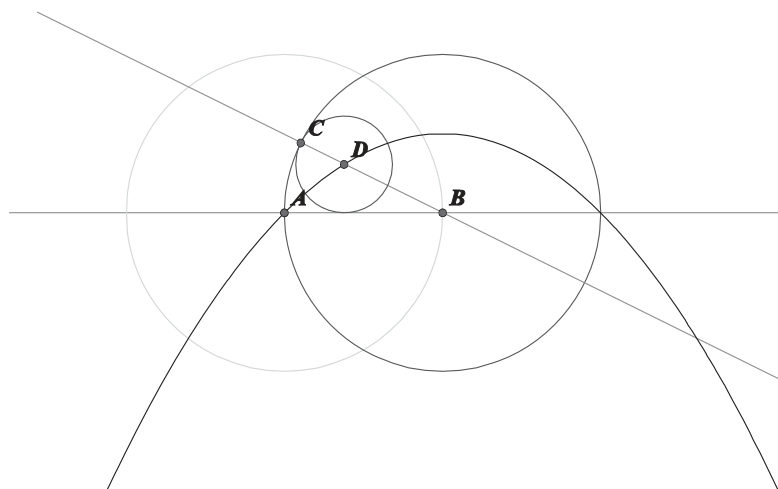
A Cinderella lehetőséget ad a ponthalmaz megtalálására akkor is, ha nem körről vagy egyenesről van szó, mivel a program a kúpszeletet is felismeri. Meg kell adnunk, hogy melyik pont mozogjon melyik objektumon, és ennek hatására melyik pont mozgását rajzolja meg a program. A Cinderella ponthalmazok keresésére a középiskolában lehet alkalmazható, miután a tanulók tisztában vannak a kúpszeletek fogalmával. Célunk a sejtéshez juttatás. Ha dinamikus ábrát szeretnénk, lehetőségünk van animációk készítésére akár HTML formátumban is.

A feltételek elhagyásának módszere gyakran használt megoldástípus a geometriában. Ha több feltételt kielégítő pontok halmazát kell megkeresnünk, akkor sorban külön-külön megkeressük az egyes feltételeknek megfelelő ponthalmazokat, majd azok közös részét képezzük.

*Pólya* klasszikus feladata (*Pólya*, 1985) a gótikus ablak: az AB szakasz és két körív, AP és BP háromszögletű idomot zár be. Az egyik kör középpontja A, a másiké B, és mindkét kör átmegy a másik középpontján. Írjunk a háromszögletű idomba mind a három határvonalat érintő kört.

A feltételek elhagyásának módszerével a feladat az az érdekes probléma, hogy találjunk két feltételt teljesítő kört, tehát amely érinti az egyik kört és a szakaszt. Ha megadjuk az érintési pontot, mondjuk a körön, a Cinderella segítségével, középpontos hasonlósággal megszerkeszthető a keresett kör.

Ha ezen a problémán a diák túljutott, akkor kerestetheti a programmal a megoldások halmazát, miközben az érintési pont mozog a körön. Nemcsak a kapott ábra alapján sejtetheti, hogy paraboláról van szó, hanem a szerkesztési lista kiíratásával fel is ismerheti a parabola egyenletét. (1. ábra) Ez persze csak a feladat elemzése, a tényleges szerkesztés a Pitagorasz-tétel segítségével történik.



<b>D</b>	<b>Meet(c;g)</b>	<b>(4.02 -0.83)</b>
<b>C3</b>	<b>Circle(D;C)</b>	<b>(x - 4.02)<sup>2</sup> + (y + 0.83)<sup>2</sup> = 2.492</b>
<b>C4</b>	<b>Locus(C;C1;D)</b>	<b>0.01x<sup>2</sup> - 0y<sup>2</sup> + 0xy - 0.26x + 0.23y + 1 = 0</b>

1. ábra. A „gótikus ablak” feladat és a szerkesztési lista

#### Diszkusszió, a határesetek vizsgálata

Egy geometriai feladat megoldása során gondolnunk kell arra is, hogy a kiindulási adatoktól függően módosulhatnak a szerkesztési eljárások vagy maga a szerkeszthetőség. Tehát a szerkesztési feladatok megoldása gondos elemzést kíván. Szükséges megvizsgálni, hogyan alakul a feladat megoldása, megoldhatósága, ha nem általános, hanem speciális eseteket tekintünk.

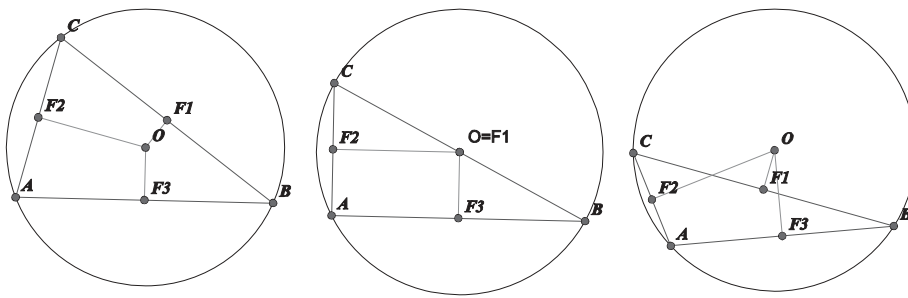
Ezen „egérvezérelt” interaktív geometriai program segítségével a szerkesztés befejezése után egy kiválasztott alapelem az egér segítségével tetszőleges irányba elmozdítható, és az egész szerkesztés következetesen változik ennek hatására. Így lehetővé válik a rajz dinamikus viselkedésének a vizsgálata akár az általános iskola 8. osztályától kezdve.

Példa: az oldalfező merőlegesek metszéspontja a háromszög köré írt kör középpontja. E középpont elhelyezkedése hogyan függ a háromszög legnagyobb szögétől? (8. osztály) (2. ábra)

Diszkusszió: ha a háromszög hegyesszögű, akkor a köré írt kör középpontja a háromszögön belül van; ha derékszögű, akkor a köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja; ha tompaszögű, akkor a pont a háromszögön kívül van.

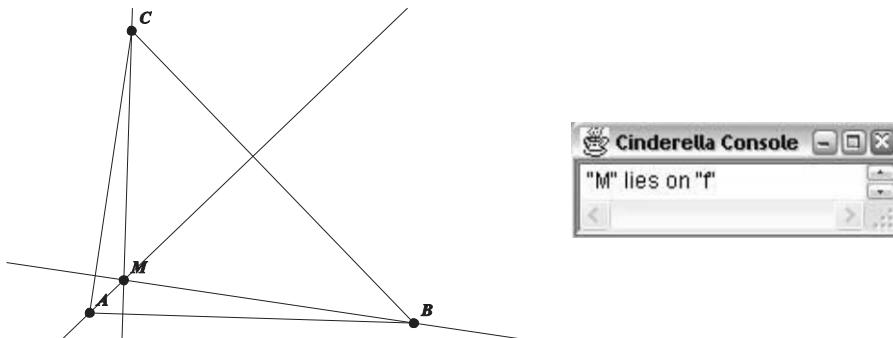
#### Automatikus tételellenőrzés

Az illeszkedésre vonatkozó tételek érvényességéről meggyőződhetnek a diákok a programba beépített automatikus tételellenőrző funkció révén. A program főként a tételek megsejtésénél használható az általános iskola 8. osztályától kezdve, tehát a célunk a sejtéshez juttatás.



2. ábra. A háromszög köré írt kör középpontjának elhelyezkedése

Példa: bármely háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. (3. ábra)



3. ábra. A háromszög magasságvonalai

#### A szerkesztőeszközök korlátozása

A kreativitás fejlesztésének egyik eszköze az ismert problémák újfajta szabályok szerinti megközelítése. Jó példa erre a geometriában a szerkesztés szabályainak megváltoztatása, például a szerkesztőeszközök korlátozása.

Példaként nézzünk három lehetőséget:

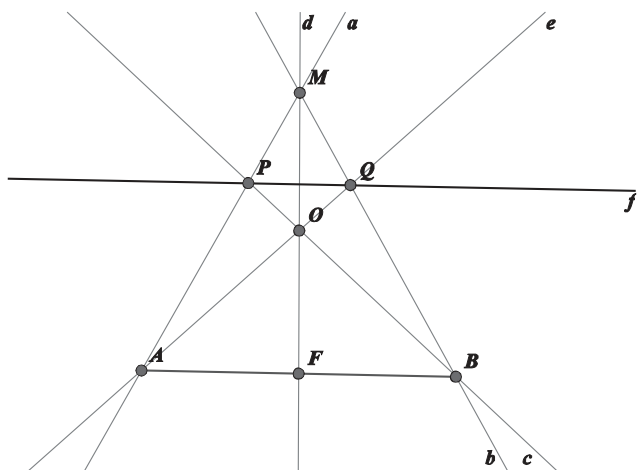
- a szerkesztésnél csak a vonalzó használatát engedjük meg;
- a régi, ismert szerkesztéseket végezzük el csak körzővel (Mascheroni-féle szerkesztés);
- egy körvonal adva van a középpontjával együtt, és csak vonalzó használatát engedélyezzük (Steiner-féle szerkesztés).

Csak vonalzóval olyan szerkesztések végezhetők el, amelyek pontoknak egyenesekkel való összekötését és egyenesek metszéspontjainak meghatározását kívánják meg. Az utóbbi két szerkesztésfajtaival az euklideszi szerkesztéssel megoldható feladatok mindegyike megoldható, eltekintve attól, hogy természetesen nem szerkeszthetünk az elsővel egyenest, a másodikkal pedig kört (Mohr-Mascheroni tétel; Poncelet-Steiner tétel).

Az interaktív feladatok kitűzésekor a tanár szabályozhatja a rendelkezésre álló szerkesztőeszközöket a Cinderellában és akár 8. osztálytól kezdve használható a kreativitás fejlesztésére. A célunk a szerkesztés elvégzése a program segítségével.

Példa (Szökefalvi, 1968): adott az AB szakasz F felezőpontjával és a P pont. Szerkesztünk a P ponton át párhuzamost az AB egyenessel, csak vonalzóval. (4. ábra)

Ez az ábra egyúttal azt is mutatja, hogy miképp lehet vonalzóval megszerkeszteni az AB szakasz felezőpontját, ha adott az AB egyenessel párhuzamos egyenes.



4. ábra.  $P$ -n át párhuzamos szerkesztése  $AB$ -vel, csak vonalzóval

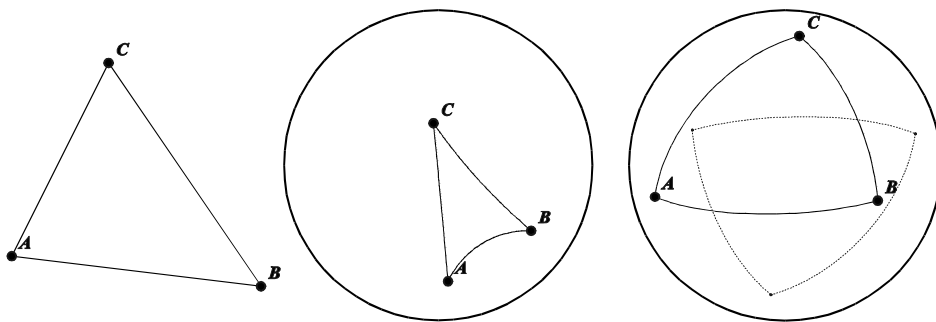
*Az összehasonlító geometria*

Az összehasonlító geometria a matematika többszemponútú megközelítését kívánja megvalósítani. Az iskolában tanult euklideszi geometriáról is teljesebb, pontosabb képet kapunk, ha bepillantunk egyéb geometriai rendszerekbe is. A Magyarországon folyó összehasonlító-geometriai oktatási kísérletek során néhány középiskolában tanórán, illetve szakköri foglalkozásokon vizsgálták az euklideszi geometriában tanultak érvényességét a gömbi geometriában és a hiperbolikus geometriában. (Horváth Jenő, Kálmán Attila, Lénárt István, Schwenner Katalin) A tanulók kedvezően nyilatkoztak a tantakról. (Horváth, 1980)

A Cinderella lehetőséget nyújt szerkesztések elvégzésére gömbön (egyszeres elliptikus geometriában) és Poincaré-féle körmodellben (hiperbolikus geometriában) is a fent említett oktatási kísérletekhez hasonlóan akár 8. osztálytól. Célunk itt a sejtéshez juttatás.

Példa: mekkora a háromszög belső szögeinek összege? (5. ábra)

- az euklideszi geometriában  $180^\circ$ ;
- a hiperbolikus geometriában kevesebb, mint  $180^\circ$ ;
- az (egyszeres) elliptikus geometriában több, mint  $180^\circ$ .



5. ábra. A háromszög belső szögeinek összege

## Web-alapú oktatás

### *Tanári irányítással*

Mivel minden szerkesztés kimenthető interaktív weblapként, lehetőség nyílik a szerkesztések gyakorlására, és a számonkérés is megvalósítható ilyen módon. A tanár beállíthatja a kiinduló objektumok és a kívánt objektumok halmazát a szerkesztéshez. Ezután kimentheti a feladatot a szerkesztőeszközök korlátozott halmazával. (Például ha egy olyan feladatot szeretne adni a diákoknak, amelyben a merőleges szerkesztését egy körzével és egy vonalzóval kell elvégezni, akkor ehhez egy interaktív feladatlapot kell készítenie.) Így tanulóknak szóló feladatok, útmutatások, szerkesztési segítségek készíthetők. Az útmutatásoknak kettős célja van: segítséget nyújtani a diáknak egy bizonyos feladat megoldásában, valamint fejleszteni a diák abbéli készségét, hogy a jövőben önállóan tudjon feladatokat megoldani. Lehetőség van a szerkesztési feladatok megoldásának automatikus ellenőrzésére is.

A feladatok megoldásánál azonban nemcsak a végeredmény a fontos, hanem tanulságos a gondolkodásnak az az útja is, amely a megoldáshoz vezetett. Ennek elemzése fejleszti a gondolkodókészséget. Mivel az elkészített feladatlapoknál lehetőség van a megoldási lépések visszavonására, illetve újbóli elvégzésére, nyomon követhető a megoldás menete, így e programot az iskolában oktatási segédeszközként használhatjuk anélkül, hogy korlátoznánk a tanulókat a kreativitásban.

### *Internet-alapú távoktatás – e-learning*

Az élethosszig tartó tanulás igényére válaszul az oktatás és képzés iránti kereslet folyamatosan nő, a hagyományos oktatásról az egyénre szabott oktatásra helyeződik át a hangsúly. Ennek egyik módja az Internet-alapú oktatás, amely egy túlnyomórészt internetes eszközökön keresztül zajló kommunikációs folyamat. A tanulási folyamat a tanár személyes jelenlétére már csak kis mértékben alapoz. Az igazi távoktatás két fontos elemet tartalmaz: az egyik, hogy a tananyag nem csupán egy könyv vagy egy CD, hanem egy olyan módon elkészített anyag, melybe a tanár, úgymond, be van építve. Az anyagot úgy olvashatjuk el, hogy közben feladatokat kell teljesítenünk és lehetőséget kapunk saját előrehaladásunk ellenőrzésére is. A kommunikációs folyamat szinkron vagy aszinkron jellegű. A szinkron távtanulás a tanulási folyamat azon formáját jelenti, amikor az oktató és a diák közvetlen kapcsolatban áll egymással. A tananyag elsajátítása az oktatásszervezők ütemezésében történik. Szinkron táv tanulási eszközök például a videókonferencia, az alkalmazás-megosztás, a csevegés. Az aszinkron táv tanulás egy időben egymástól független, lekérdezhető eseményekre épül. Az aszinkron e-learning esetében egy adott szervergépen elhelyezett elektronikus tananyag önállóan is feldolgozható, egyéni ütemezésben. Az aszinkron táv tanulás fontos elemei például az elektronikus levelezés, a dokumentum-letöltés. Mindkét kommunikációs formára igaz, hogy a folyamat során az oktatótól a diák felé irányuló információ dominál, azonban a visszairányú és a diákok közötti kommunikáció megfelelő minősége és gyakorisága is kulcsfontosságú.

## Összegzés

A nagyrabéi Móricz Zsigmond Általános Iskola 8. osztályában matematikaórán a háromszögek nevezetes vonalainak tárgyalásánál végeztünk kísérletet. A feltételek adottak voltak az iskolákban: megfelelő számú és minőségű számítógép. A diákok szívesen fogadták a számítógépes matematika-gyakorlatot. Lehetőségük volt előző órán (szakköri foglalkozáson) a programmal ismerkedni, ezért nem okozott gondot az, hogy a program angol nyelvű. (A programnak van magyar nyelvű változata is.) A számítógépes gyakor-

lat előkészítése jóval időigényesebb a hagyományos gyakorlatokénál, hiszen ahhoz, hogy a diákok nagyrészt önállóan dolgozhassanak – figyelembe véve a meglévő számítógépi ismeretüket –, megfelelő útmutatókat kellett készíteni a feladatokhoz. A tanárnak sikerült megtalálni az elmélet és az alkalmazás helyes arányát.

A dinamikus geometriai rendszerekre általánosan igaz, hogy kezelésük nem nehéz, könnyen és gyorsan elsajátítható, és megfelelően használva a geometriai ismeretek tanításához remek eszköz. Igen pontos, szép és látványos ábrázolási lehetőségeivel jól segítheti a megértést, hiszen kézzel táblán vagy papíron csak időtrábló módon és pontatlanul tudunk ábrázolni, szemléltetni.

Reméljük, hogy sokan kedvet kapnak majd ahhoz, hogy a dinamikus geometriai rendszerek által nyújtott lehetőségeket megismertessék a diákjaikkal a geometria órákon, és egyre kevésbé lesz igaz, amit Pólya György (*Pólya*, 1969) a „hagyományos” matematika-tanárról írt: „A geometria az a művészet, mely rossz ábrákból jó következtetéseket von le.”

### Irodalom

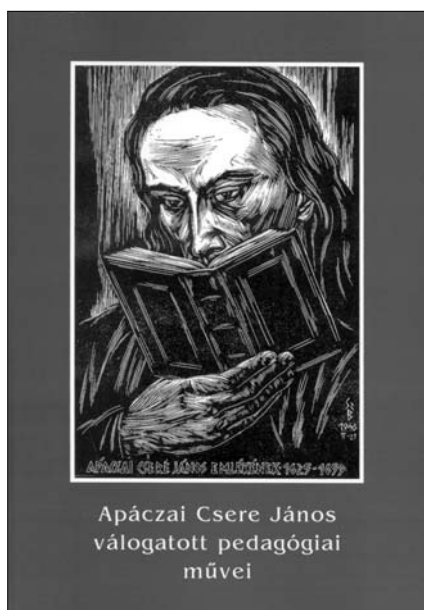
Horváth Jenő (1998): *Sztereografikus projekció és alkalmazásai (Elemi geometria a Poincare-féle félgömbmodellben)* ELTE, Budapest.

Kortenkamp, U. H. (1999): *Foundations of Dynamic Geometry. Ph.D thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zürich.*

Pólya György (1969): *A gondolkodás iskolája.* Gondolat, Budapest.

Pólya György (1985): *A problémamegoldás iskolája.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Szőkefalvi Nagy Gyula (1968): *A geometriai szerkesztések elmélete.* Akadémiai Kiadó, Budapest.



*Az Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum könyveiből*