

SZAKDOLGOZAT

Tózsá Judit

Debrecen

2007

Debreceni Egyetem Természettudományi Kar
Matematika Intézet

Számelméleti versenyfeladatok a középiskolában

Témavezető:
Dr. Bérczes Attila
egyetemi adjunktus

Készítette:
Tózsza Judit
matematika-informatika

Debrecen
2007

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Bérczes Attilának az értékes tanácsokért, amiket a szakdolgozatom megírásához adott.

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS	2
2. A TEHETSÉGRŐL ÁLTALÁBAN.....	3
2.1. A tehetség meghatározása és összetevői.....	3
2.2. A tehetség azonosítása.....	5
3. A MATEMATIKAI TEHETSÉG	7
3.1. A matematikai tehetség jellemzői.....	7
3.2. A matematikai tehetség felismerése	8
4. TEHETSÉGGONDOZÁS	11
4.1. A tehetségfejlesztés kritikus pontjai	11
4.2. A tehetségfejlesztés útjai	13
4.3. Tehetséggondozás a matematikában	14
5. SZÁMELMÉLETI FELADATOK A MATEMATIKA VERSENYEKEN.....	16
6. SZÁMELMÉLETI VERSENYFELADATOK A KÖZÉPISKOLÁBAN.....	21
6.1. Számrendszerek	21
<i>Feladatok</i>	22
6.2. Prímszámok, összetett számok.....	33
<i>Feladatok</i>	34
6.3. Osztók, oszthatóság.....	38
<i>Feladatok</i>	46
6.4. Kongruenciák.....	60
<i>Feladatok</i>	61
6.5. Diofantikus egyenletek	65
<i>Feladatok</i>	66
IRODALOMJEGYZÉK	76

„Van egy téveszme, hogy a lángelmét nem lehet elnyomni, az utat tör magának. Csodát tör utat! Nincs könnyebb dolog, mint egy lángelmét elnyomni, mert az nagyon érzékeny. Azt úgy el lehet fújni és taposni, mintha ott sem lett volna.”(Szent-Györgyi Albert)

1. Bevezetés

Amióta létezik iskola, mindig is volt tehetségfejlesztés a kiemelkedő képességű gyerekek értékeinek kibontakoztatása érdekében. Ez a feladat nem csupán a kiemelkedő képességek feltérképezését és fejlesztését jelenti, hanem a személyiség egészének fejlesztését. Ez a munka a pedagógustól sokféle feladat megoldását kívánja, valamint olyan nevelői stílust, amelyben az eddiginél sokkal nagyobb szerepet kap a differenciált bánásmód.

Ez a munka azonban hosszú időn át háttérbe szorult, napjainkban viszont ismét reflektorfénybe került a tehetségprobléma.

Dolgozatom első részének célja, hogy némi segítséget nyújtson a tehetségek, ezen belül a matematikai tehetségek azonosításában, valamint feltárja azon lehetőségeket, amelyek ezen kiemelkedő képességű tanulók fejlesztésében rendelkezésre állnak.

A dolgozat második részében némi betekintést igyekszem nyújtani a matematikai tehetséggondozás egyik színterének, a matematika versenyeknek a világába, a matematika egyik legösszetettebb ágának, a számelméletnek néhány matematika versenyen előforduló feladatán keresztül. Céлом az, hogy ezzel a feladatgyűjteménnyel, és a feladatok megoldásához szükséges fogalmak és tételek összegyűjtésével megkönnyítsem a versenyeken előforduló számelméleti feladatokra való felkészülést.

2. A tehetségről általában

2.1. A tehetség meghatározása és összetevői

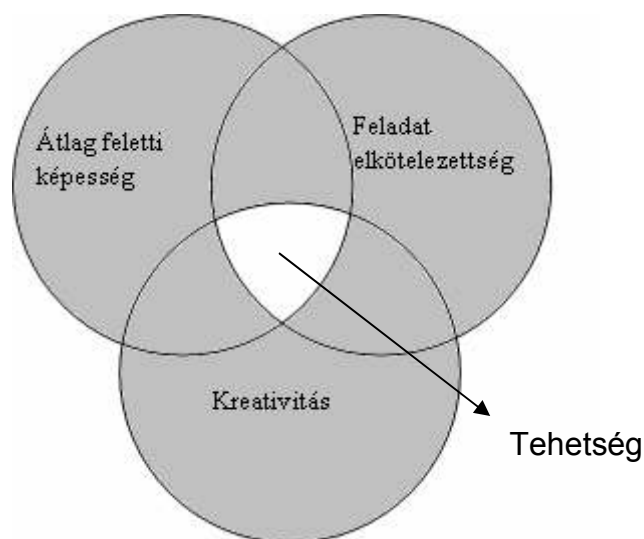
A tehetség ma használt definíciójához hosszú úton jutott el a pszichológia. Kezdetben a sikeres embereket (így a legjobb tanulókat, a leggazdagabb embereket, a legmagasabb pozícióba kerülőket.) sorolták ide. Később a különböző intelligenciatesztekben legmagasabb pontszámokat elérőket vélték tehetségesnek.

Révész Géza „A tehetség korai felismerése” című könyvében a tehetség egyik fő kritériumának – összhangban kora szellemiségével – az intelligenciát tartotta, ugyanakkor azonban felismerte meghatározásának problematikus voltát is. Később a tehetség megnyilatkozásában az intelligenciánál jellemzőbbnek tartotta az intuíciót és a spontaneitást; az emberi tevékenységekkel és az alkotással kapcsolatos magatartást. Modelljében a tehetség négy adottságon alapult:

- intelligencia – vagyis az átlagon felüli értelmi képesség;
- a tehetség iránya – specifikus mentális képességek;
- az intuíció és a spontaneitás – kreativitás;
- a gyermek szellemi-erkölcsi magatartása és alkotóereje – a feladat iránti elkötelezettség vagy motiváció. [2]

Renzulli az úgynevezett háromgyűrűs modelljében lényegében ugyanazok a tulajdonságok jelennek meg a tehetséget meghatározó faktorokként, mint *Révész* modelljében. [2]

Szerinte a tehetség nem pusztán kiemelkedő intellektuális képességet, kiemelkedő kreativitást feltételez, hanem e két tényezőnek és egy nagyon fontos harmadiknak, a feladat iránti elkötelezettségnek az együttes jelenlétét. [2]



A képességekkel egyenrangúnak tekinti a kreativitást és a feladat iránti elkötelezettséget. Későbbi tanulmányában megkülönbözteti az általános, és a specifikus képességeket. Az általános képességek közé sorolta a magas szintű elvont gondolkodást, a jó memóriát, a folyékony beszédet, a gyors és pontos szelektív információfeldolgozást stb., míg a specifikus képességeket lényegében az általános képességek különböző kombinációinak egy vagy több speciális területen (matematika, közgazdaságtan, zene stb.) való alkalmazásaként írta le. *Mönks* (1986) később módosította *Renzulli* modelljét, szerinte a tehetség kibontakoztatásának alapfeltételeihez tartozik a környezet is. [2]

Gagné (1991) elkülöníti a természetes képességeket és a módszeresen kifejlesztett készségeket, amelyek szakemberré tesznek valakit egy adott területen. Ennek alapján megkülönbözteti az átlag feletti képességekkel rendelkező potenciális tehetségeket és az emberi tevékenység valamely területén átlag feletti teljesítményt produkáló tehetségeket. [2]

Az említett elméletek mind a tehetségnek valamely implicit felfogását nyújtják, és megegyeznek abban, hogy a tehetséget mindig valamely fő szemponthoz viszonyítva definiálják, legyen ez az egyén, a társadalom, vagy ezek valamely kapcsolódása. Valamint a fent említett elméletalkotók egyetértenek abban, hogy a kognitív képességek a tehetség lényegi részét képezik, bár e kapcsolat természetét

illetően nem teljes az egyetértés, különösen abban nem, hogy mely képességek általánosak, és melyek specifikusak a környezet szempontjából. Továbbá a feladat iránti elkötelezettség formájában megjelenő motiváció minden tehetségfogalom elengedhetetlen része, minthogy a látens képességek enélkül sohasem kerülnének napvilágra. [1]

Az explicit elméletalkotók (Butterfield, Borkowsky, Peck, Davidson, stb.) egészen más stratégiát követnek a tehetség megértésében. A kognitív teória felrajzolásakor nem a tehetség fogalmának használatára koncentrálnak, hanem sokkal inkább ennek belső, kognitív előfeltételeire. Hívei többet foglalkoznak a tehetség intellektuális formáival, mint bármely más formával, például a vezetői vagy művész tehetséggel. [1]

Ma már a tehetséget sokarcú jelenségnek tekintik, magát a fogalmat pedig többféle sajátos tehetséget magába foglaló gyűjtőfogalomként értelmezik. Ez a felfogás tükröződik a tehetség szövetségi szinten elfogadott, hivatalos meghatározásában:

„Tehetségnek tekintendők azok a szakemberek által annak azonosított gyerekek, akik már bizonyították teljesítményüket és/vagy potenciális képességeiket a következő területek bármelyikén: általános intellektuális képesség, specifikus tanulmányi képesség, kreatív vagy produktív gondolkodás, vezetői képesség, vizuális és előadóművészetek, pszichomotoros képesség; és ezirányú képességeik kiteljesítése érdekében differenciált pedagógiai programokat igényelnek.” (582. cikkely).

2.2. A tehetség azonosítása

A tehetséges emberek általában nagy önbizalommal rendelkeznek, függetlenek, kockázatvállalók, energikusak, lelkesek, kalandvágyóak, kíváncsiak, játékosak, humorosak, ideálisak és érzékenyek, gyakran művészi és esztétikai érdeklődés jellemzi őket, és vonzzák őket a komplex és rejtélyes dolgok. Azonban lehetnek olyan tulajdonságaik is, amelyek komoly gondot okoznak a tanároknak. Főként a kreativitásra olyannyira jellemző nonkonformitással és a társadalmi szabályok figyelmen kívül hagyásával ötvöződő függetlenség és energikusság az, ami makacssághoz, a tanár, vagy szülő dominanciája elleni lázadáshoz, az

együtműködés elutasításához, a közmegegyezésen alapuló normák iránti közömbösséghez vezet (Smith, 1966). [1]

Létezik néhány alapelv, amelyek segítségével szolgálhatnak a tehetségek azonosításában:

- Az azonosításhoz a korábban bemutatott Renzulli-féle definíció ad kapaszkodókat, mind a négy összetevőre figyelniük kell.
- A tesztek segítséget nyújthatnak, de önmagukban nem tévedhetetlenek, így nem jelenthetnek egyedüli megoldást.
- A szunnyadó tehetség rejtekezik, gyakran ezért is nehéz felismerni.
- A képesség és a teljesítmény két különböző dolog, gyakori az alulteljesítő tehetséges gyerek.
- A pedagógus vagy más fejlesztő szakember és a gyerek folyamatos együttes tevékenysége ad legtöbb kapaszkodót a tehetség felismeréséhez.
- Minél több forrásból szerzünk a gyerekre vonatkozó információkat gyerek teljesítményéről, képességeiről, annál megbízhatóbb az azonosítás. [5]

3. A matematikai tehetség

3.1. A matematikai tehetség jellemzői

A matematika és a számok világa összefüggések, szabályok, rendszerek kimeríthetetlen tárháza, ezért a szellemi tevékenység kiváló terepe már kevés ismeret és tapasztalat birtokában is. A matematikai tehetség már igen korai életkorban megmutatkozik, és fejlődési fázisai igen gyorsan követik egymást. A legtöbb matematikai tehetség már 20 éves kora előtt igen komoly eredményeket ér el. [4]

Kisgyermekkorban a matematikai tehetséget általában korához képest magasabb szintű gondolkodás és absztrakciós képesség, valamint a matematika iránti erős érdeklődés jellemez. Tanulmányok szerint a matematikai tehetség virágzása 40 éves korig tart, ezen életkor felett már kiemelkedő matematikai alkotásokat nem hoznak létre. [2]

Általános iskolás korban a matematikában tehetséges gyerekek elsősorban hosszú távú emlékezetükkel, és számolási tehetségükkel tűnnek ki társaik közül. A számoló tehetségekből azonban nem feltétlenül válik tehetséges matematikus.

Különbségek figyelhetők meg a lányok és fiúk matematikai képességei között. Kisgyermekkorban a fiúk és a lányok matematikai képessége egyforma szintű, de 12-13 éves korban a fiúk fölénybe kerülnek. Ennek a fölénynek az okát több kutató is a fiúk jobb téri képességeinek tulajdonítja.

Poincaré a matematikai tehetségnek két típusát különböztette meg. Az egyik típus, aki elmerül a logikában (*logikus*), a másik, aki a megérzéseire támaszkodik, gondolkodása vizuális, geometrikus (*intuitív*).

A matematikai tehetségeknek igen sok jellemezőjét tárták fel a kutatások, vizsgálatok, ezek a jellemzők azonban különböző mértékben fedezhetők fel az egyéneken.

A matematikai tehetségek főbb tulajdonságai:

- Kitartás és feladat-elkötelezettség a problémamegoldásban.
- Fáradhatatlan, ha matematikáról van szó.

- Csodálatba ejtik a tények, formulák stb.
- Keresi a problémákat.
- Kiváló emlékezete van számokra, formulákra, viszonyokra, megoldási módokra stb.
- Rugalmas a gondolkodása a matematikai struktúrák és minták terén.
- Könnyen fordít a gondolkodásán.
- Kiemelkedően jó vizuális képzelet jellemzi.
- Problémák és absztrakt viszonyok vizualizációjának képessége mutatkozik.
- A részleteken felülemelkedik, az összetettet egyszerűbbé teszi.
- A problémát gyorsan formalizálja és általánosítja.
- Hasonló problémákra már a közbülső logikai lépések kihagyásával reagál.
- Egyszerű, egyenes és elegáns megoldásokat keres.
- Verbális problémákat is egyetlenben tud megfogalmazni és kezelni.

A matematikai tehetségek fejlesztésekor érdemes figyelembe venni sajátos munkamódszerüket. *Reichel* (1997) tapasztalatai szerint a matematikai tehetségek szeretnek versenyezni, a csoportmunka azonban nehezőkre esik. Szívesebben dolgoznak egyedül, és konzultálnak tanárukkal. Ezért a csoportos gondolkodás kevésbé hatékony, sokkal inkább a kész gondolatok megvitatására van szükségük. [2]

3.2. A matematikai tehetség felismerése

A matematikában tehetséges gyerekek már korán nagy érdeklődést mutatnak a számok iránt. Vannak kedvenc számaik, vannak olyanok, amelyeket nem szeretnek. Gyakran megszemélyesítik a számokat, érzelmileg fordulna a számok felé. Szeretik a számjátékokat, élvezettel számolnak, keresnek és találnak összefüggéseket. Szeretnek szabályos mintázatokat rajzolni, szeretik a rejtvényeket, játékaikat rendszerezik, szortírozzák, sok mindent osztályba sorolnak.

A matematikai képességgel kapcsolatban *R. Skemp* megfigyelte, hogy a matematikai képesség strukturálásában az ún. reflektív intelligencia jelentős szerepet játszik. A reflektív intelligencia segítségével tudjuk észlelni saját fogalmainkat és mentális műveleteinket, felfogni a fogalmaink és a műveleteink közötti relációkat,

valamint ezeket a relációkat és velük együtt az emlékezetből vagy a külvilágból kapott információkat számon tartva cselekedni. A matematikai tehetség identifikációjának egyik fő irányelve szerint az intelligenciateszteken elért eredmények összefüggést mutatnak a matematikai tehetséggel. Főleg a nem-verbális téri gondolkodást kívánó feladatokat tartalmazó tesztek – mint a Raven-féle intelligenciateszt – lehetnek jelzésértékűek. A Raven-féle intelligenciateszt elsősorban azt mutatja meg, hogy a vizsgált személynek milyen fejlett az új (nem verbális) képzeteket alkotó képessége. [2]

Kutatások szerint összefüggés figyelhető meg a verbális képesség és a matematikai tehetség között. Ezek a gyerekek általában jó verbális képességekkel rendelkeznek, azonban ennek mértéke összefüggésbe hozható a matematikai képességekkel. Ha egy gyermeknek nagyon jók a verbális képességei, kevésbé valószínű, hogy matematikus lesz, mintha verbális képességei szerényebbek. Ezek szerint van egy optimális arány a matematikai tehetség és a verbális képességekben.[4]

A legújabb elméletek a matematikai tehetséget a gondolkodási folyamatok által tekintik meghatározottnak. A gondolkodási folyamatnak két fajtáját különböztetik meg:

- a szubjektív valóságból a másikba való könnyed áttolás,
- új szubjektív valóságok könnyed alkotása.

Egy másik elmélet szerint a matematikában vagy más kapcsolódó területeken megvalósuló alkotó teljesítmény jelzőiként hat faktor azonosítható:

- az anyag szervezése,
- mintázat és szabályok felismerése,
- a probléma újrastrukturálása és a szabályok, mintázatok újrafelismerése,
- erősen komplex struktúrák megértése és használata,
- feldolgozás ellenkező és fordított módon,
- kapcsolódó problémák megtalálása vagy kialakítása.

Összefoglalva a tapasztalatokat a következő irányelvek szolgálhatnak segítségül az azonosítás terén:

- A korai érdeklődés és bensőséges kapcsolat a számok terén, a téri-vizuális játékok, rejtvények preferálása jelezheti az átlagon felüli matematikai képességeket.
- A matematikai tehetséget legjobban matematikai feladatokkal lehet azonosítani. Még mielőtt számolni kezdenének, megtervezik a megoldáshoz vezető utat és a szükséges eljárásokat.
- A matematikai képességeket mérő számos eljárás geometriai rejtvényekből áll.
- A téri-vizuális képességeket és a memóriát mérő eljárások sikerrel használhatók az azonosításban.
- Az intelligenciatesztek valamelyest korrelálnak a matematikai tehetséggel, de nagy eltérések lehetnek a tesztek eredményei között. Főleg a nem verbális téri gondolkodást kívánó eljárások, például a Raven-tesztek lehetnek jelzőértékűek.
- Az alkotó matematikai tehetség a problémamegoldásban meghatározott, igen hatékony folyamatokat használ, ezen folyamatok elemeinek az azonosítása a tehetség jelzője lehet. [2]

4. Tehetséggondozás

4.1. A tehetségfejlesztés kritikus pontjai

„A tehetséggondozás első feladata időben megtalálni azokat az embereket, akik kiemelkedők valamilyen képességet illetően. Ezt követi a megszokott értelemben vett tehetséggondozás, amikor is ezekkel az emberekkel külön elkezdnek foglalkozni annak érdekében, hogy a kiemelkedő képességeikben rejlő lehetőségek ne vesszenek el.” [3]

A fejlesztő munkának egyik kritikus pontja, hogy milyen életkorban kezdjük el a speciális tehetségfejlesztést. Az is gondot okozhat, ha túl korán kezdjük ezt a munkát, de az is, ha elszalasztjuk a szenitív korszakot a speciális képességterületeken.

Az óvodáskor „alapozó” korszaknak tekinthető bizonyos értelemben: elsősorban a megfelelő érzelmi fejlődést kell biztosítani a gyerekek számára azzal, hogy törődünk velük, s engedjük őket játszani. Ebben a korban még nem szabad elkülöníteni a tehetségesnek látszó gyerekeket, ebből sok probléma adódhat.

Az iskoláskor már más lehetőségeket kínál. A kisiskolás korban is alapozó munkát végezhetünk, csak más értelemben, mint az óvodáskorban: elsősorban a tehetség általános képességeihez tartozó elemeit kell hatékonyan fejleszteni. Az úgynevezett speciális osztályok koraiak még ebben az időszakban, hiszen ezekben a kiemelkedő teljesítmény alapja többnyire a magas szintű általános intellektuális képességrendszer, nem pedig a speciális képesség. Ha felbukkan a tehetség – pl. matematika, nyelv –, egyéni programmal lehet a fejlesztést megoldani.

A felső tagozat (illetve az ennek megfelelő gimnáziumi osztályok) már színtere lehet a hatékony speciális tehetségfejlesztésnek. Ez az a kor, amelyben a kutatások és tapasztalat szerint (12-13 éves kor körül) már többnyire megjelenik a speciális tehetség. Kettős itt az iskola funkciója: egyrészt a tehetséges gyerekek felderítéséhez kell folyamatosan működő, változatos programokat biztosítani, másrészt – ha megtaláltuk a tehetséget – speciális szervezeti formákban kell azt továbbfejleszteni.

A középiskolás kor ad igazán teret a hatékony speciális tehetségfejlesztéshez. Sokféle szervezeti forma alakult ki ehhez az iskolai gyakorlatban: fakultáció, tagozatok, speciális osztályok, mentor-program stb. Ezek mindegyike hatékonyan működhet. Fontos azonban, hogy a programok ne legyenek túlzóan speciálisak. Egyrészt a tehetség általános képességeihez tartozó elemek fejlesztéséről sem szabad megfeledkezni ekkor sem, másrészt még ekkor is lehetőséget kell biztosítani a tanuló számára, hogy érdeklődésének változásával, új, magas szintű képességének megjelenésével összhangban tudjon változtatni képzési menetrendjén. Rugalmas, sokféle képességterületet átfogó programokra van tehát szükség, a lényeg azonban, hogy a középiskolás korszak végére találjuk meg a gyerek igazi értékeit, s készítsük elő a felsőoktatásban a számára legadekvátabb területen való sikeres tanulmányokra.

A tehetségfejlesztő programok tervezésekor figyelmet kell fordítani arra, hogy a képességek mellett a személyiség-tényezők formálása is szerepet kapjanak. Néhány szempont, amit a programok tervezésekor figyelembe kell venni:

- a tehetséges gyerek erős oldalának fejlesztése;
- a tehetséges gyerek gyenge oldalának fejlesztése (Csaknem minden tehetséges gyereknél van ilyen, s ez akadályozhatja az erős oldal kibontakozását, például alacsony önértékelés, biztonságérzet hiánya, stb.);
- megfelelő „léggör” megteremtése (kiegyensúlyozott társas kapcsolatok pedagógusokkal, fejlesztő szakemberekkel és a társakkal);
- szabadidős, lazító programok, amelyek biztosítják a feltöltődést, pihenést.

Természetesen a tehetséggondozást sem tudja a szülők hatékony közreműködése nélkül megoldani az iskola. Fontos tehát a szülőkkal való folyamatos kapcsolattartás, információcsere. A családdal való együttműködésnek sokféle szervezeti formáját kell működtetni ahhoz, hogy a kapcsolattartás hatékony legyen: szülői értekezlet, szülők akadémiája, egyéni konzultáció, családlátogatás, tanácsadás stb. Az együttműködés főbb tartalmi szempontjai:

- célok tisztázása, egyeztetése, azonos követelményrendszer kialakítása;
- a fejlődés közös értékelése;
- pedagógus, más fejlesztő szakember tanácsa, módszertani segítségnyújtása;
- a tanuló megismerése;

- tehetség, képesség felismerése;
- a gyerek érzelmi támogatása, elfogadás, odafigyelés;
- közös programok szervezése;
- pályaválasztás irányítása. [5]

4.2. A tehetségfejlesztés útjai

A tehetségek fejlesztése általában az iskolában, illetve az iskolán kívüli történik. Jelenleg háromféle fő stratégia létezik: a gyorsítás, a gazdagítás, és az elkülönítés. Ezek mindegyikének az általános alapelve, hogy nem az ismeretek gyarapítása, hanem a képességek, a kreativitás és a személyiség összehangolt fejlesztése az elsődleges célja.

A gyorsítás a tanulás időtartamának a tehetséges tanulók képességeihez való igazítását jelenti. Hívei javasolják, hogy az óvodába járás időpontjával egyidőben megkezdődjön a tehetségfejlesztés, és a gyermekek koruktól függetlenül haladhassanak tovább az érdeklődési területüknek megfelelő tárgyakban. A gyorsítás egyik módja az osztályugrás. Mivel a kiemelkedő képességű tanulók legfontosabb jellemzője az, hogy az új információk felfogásához és feldolgozásához kevesebb időre van szükségük, így képzési idejüket meg kell rövidíteni, így egyszerre több év anyagát sajátítják el. Nagy szerepük van a gyorsító munkában a nyári táboroknak, valamint a mentoroknak. A matematikai tehetségek gondozásában a gyorsítást tartják hatékonyabb megoldásnak.

A dúsitás, gazdagítás ezzel szemben nem az elsajátítás idejét rövidíti meg, hanem olyan tanulási tapasztalatokról gondoskodik, melyek a gondolkodásnak és a kreativitásnak az átlagosnál jóval magasabb szintjeit igénylik, illetve fejlesztik.

A tehetség azonosításának és gondozásának egyik fontos színtere a tanítási óra. A pedagógusnak olyan megoldást kell találnia, amellyel a tanulás valamint az órai munka során meg tudja állapítani a kiemelkedő tehetséget, illetve képességet, és amellyel elősegítheti a tehetség kibontakozását, fejlesztését. Fel kell ébreszteni a tanulók kíváncsiságát, és lehetőséget kell biztosítani arra, hogy kíváncsiságukat saját erőfeszítésük segítségével elégsék ki. Olyan stratégiára van szükség, melyek a problémák elemzése és megoldása mellett folyamatosan igénylik a tanulóktól az általánosítást, a szintetizálást, az értékek vizsgálatát és érvényességük próbáját.

Amennyiben egy iskola meg tudja a gyerekek tevékenységét úgy szervezni, hogy ők jól érezzék magukat az iskolában, tehát motiváltak legyenek, akkor megvan az első feltétel arra, hogy a gyerekek képességei is fejlődjenek. Minél többféle tevékenységet tud az iskola szervezni – és ha ez a tevékenységszervezés sikeres -, akkor a gyerekek több mindennel szembesülhetnek.

Amennyiben az intézmény nem tudja megszervezni a tehetségek gondozását, fontos, hogy a tehetségek tanulók minél hamarabb olyan intézménybe kerüljenek, amely intézmény kiemelt feladatai közé tartozik a tehetséges tanulók nevelésével, tanításával való hangsúlyos törődés (elkülönítés, szegregáció). A differenciált oktatásban azonban fontos, hogy a csoportok viszonylag homogének legyenek. Az elkülönítésnek nagy előnye az intenzív képességfejlesztés, viszont az egyoldalú intellektuális fejlesztés, illetve a „normál” gyerekektől való elszigetelődés kedvezőtlen hatásokkal is járhat.

A tanórán kívüli nevelés sokféle lehetőséget nyújt az érdeklődés elmélyítésére. Az érdeklődési csoportokban, a szakkörökben felismerhető és fejleszhető a tehetség. Ezek a csoportok akkor jelenthetnek különösen hatékony megoldást a matematikai tehetséggondozásban, ha a kiemelkedő teljesítményeket mutató gyerekeknek lehetőséget biztosítanak a továbblépésre, személyes kapcsolatokra matematikusokkal, esetleg egyéni programok kidolgozásával. Ösztönözni kell őket arra, hogy érdeklődésük és tehetségük irányának megfelelően használják fel szabadidejüket. A tehetségfejlesztésre kedvező hatást gyakorolhat a tanulók szabadidős tevékenysége, hosszú távú feladatok vagy házi feladatok megoldása, részvétel a különböző baráti csoportok munkájában, a család légköre, valamint a fiatal otthoni foglalatosságai.

4.3. Tehetséggondozás a matematikában

Hajlamos a pedagógiai közvélemény a tehetséggondozás, a tehetségesekkel való foglalkozás színterének a versenyeket tekinteni. Ez nyilván helytálló megállapítás, ebből baj csak akkor származik, ha azonosítják a tehetséggondozást a versenyzéssel. A verseny ugyanis csak része a tehetséggondozásnak, amelynek nem a versenyztetés az igazi formája. A versenyek különben sem alkalmasak minden esetben a tehetségek azonosítására, hiszen a matematikai tehetséggel

rendelkezők tekintélyes része rossz versenyző. Nem minden tehetséges gyerek szerepel eredményesen versenyeken. Van, akire nem a gyors gondolkodás, hanem az elmélyült, hosszú töprengéssel járó munka a jellemző, ami egy alkotó matematikus munkájának sajátja. A versenyeken a felkészültség, a tudás és a tehetség mellett a szerencsének is nagy szerepe van.

A tehetséggondozásnak fontos színterei a matematikai szakkörök. E foglalkozásokon érdemes nagy gondot fordítani a „bizonyítós” matematika bevezetésére, illetve kísérletező, „felfedezettő” feladatok megoldására. Ezek által megismerkednek a tanulók a legegyszerűbb direkt és indirekt bizonyításokkal, a szükséges és elégséges feltétellel, konstruktív bizonyításokkal. Ízelítőt nyújtanak a matematikai kutatás érdekességeiből, buktatóiból, módszereiből, a felfedezés örömeiből.

A tehetségek kiművelése nem nélkülözheti az egyéni, vagy csaknem egyéni foglalkoztatást.

5. Számelméleti feladatok a matematika versenyeken

A számelmélet a matematikának az az ága, amely az egész számok tulajdonságaival foglalkozik. A feladatok megoldási módszereinek gazdagsága, sokszínűsége jellemző erre a tudományra, amely talán éppen emiatt a matematika egyik legkomolyabb és legnehezebb ága. Éppen ezért a matematikának ez az ága alkalmas talán leginkább a matematikai tehetségek kiszűrésére.

A számelmélet témakörével igen keveset foglalkozunk a középiskolában. Éppen csak a legszükségesebb fogalmak megtanítására, a legegyszerűbb típusfeladatok megoldására van idő. Az ismeretlen, szokatlan feladattípusok megismerésére, begyakorlására nincs idő. Gyakran előfordul, hogy az a tanuló, aki szívesen old meg feladatokat, és jóval többet gyakorol a megszokottnál, ha arra kerül a sor, hogy egy komolyabb versenyen részt vegyen, nincs sikerélménye, mert a versenyen előforduló feladatokat nem tudja megoldani. Ez a jelenség ott eredeztethető, hogy nagy a szakadék a középiskolai tananyag és a versenyek szintje között.

Ezt támasztotta alá az a megfigyelés is, amit az egri Szilágy Erzsébet Gimnázium 10. osztályos matematika szakkörén végeztem. A tanulók képességeit illetően már a feladatsor megírása előtt is rendelkeztem némi tapasztalattal, ugyanis a szakkörön résztvevő tanulók nagy részét tanítási gyakorlatom alkalmával tanítottam, illetve a gyakorlat során szakköri foglalkozáson is részt vettem. Megfigyelésem középpontjában az a kérdés állt, hogy vajon versenyfeladatok megoldása alapján kiszűrhetők e a matematikában tehetséges tanulók, illetve szoros összefüggés figyelhető e meg a tanulók versenyfeladatokban való teljesítménye, és a szakköri, vagy levelezős feladatok (esetleg otthoni) kidolgozásában való jártasság között.

Hogy kérdéseimre választ kapjak, egy három versenyfeladatból álló feladatsort állítottam össze, melyet a szakkör keretein belül kellett a tanulóknak megoldani. A szakkörön résztvevő tanulók mindegyike reáltagozatos osztályban tanul, tehát a kötelezőnél magasabb óraszámban tanulja a matematikát. Ezen kívül valamennyi

tanuló ezen a területen tervezi a továbbtanulását. A szakkör foglalkozások alkalmával otthoni kidolgozásra kapnak feladatsorokat, melyek megoldását egy kiválasztott – általában a feladatot legjobban megoldó - tanuló a következő foglalkozáson ismerteti.

A feladatsor összeállításánál természetesen figyeltem arra, hogy olyan feladatok szerepeljenek benne, amelyekhez szükséges ismereteknek elvileg már birtokában vannak a tanulók, és ezek felhasználásán kívül a feladatok megoldásához némi ötletre, kreativitásra legyen szükség.

A feladatsor három számelméleti feladatot tartalmazott, melyek mindegyike előfordult valamilyen matematika versenyen. Próbáltam különböző stílusú feladatokat összeválogatni, ezért három különböző verseny feladatai közül választottam. Az első feladat (5.1. fejezet, 1. feladat) az 2004-ben megrendezett OKTV I. kategóriájának első fordulóbeli feladata volt; a második feladat (5.2. fejezet, 1. feladat) az 1995-ben Pakson rendezett Magyar Középiskolás Matematikai Verseny I. osztályos feladata volt; a harmadik pedig (5.3. fejezet, 2. feladat) a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 1990. februári számában jelent meg.

Feladatok:

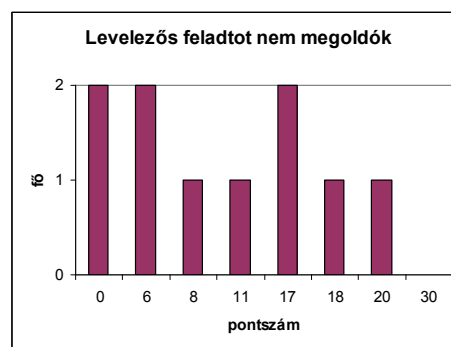
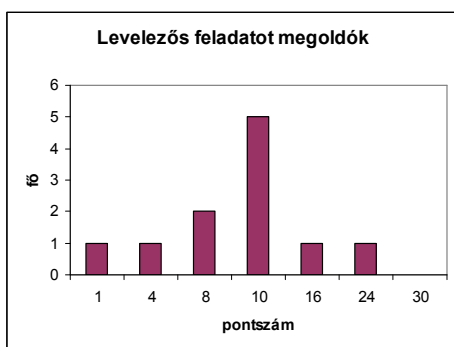
1. Melyek azok a 10-es számrendszerbeli háromjegyű pozitív egész számok, amelyeknek számjegyei közül valamelyik a 3-as, továbbá a számjegyek összege és szorzata egyenlő?
2. Bizonyítsuk be, hogy $1995^4 + 4^{1995}$ összetett szám!
3. A tízes számrendszerben felírt $(n+1)$ jegyű $A = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ szám fordítottján az $A^* = a_0 a_1 \dots a_n$ számot értjük. (A 759 fordítottja tehát 957, a 980 fordítottja pedig 89.) Keressük meg azokat a négyjegyű számokat, amelyek „megfordulnak”, ha 9-cel szorozzuk őket, tehát amelyekre $9A=A^*$.

Annak mérésére, hogy milyen összefüggés tapasztalható a versenyfeladatok megoldásában való jártasság, és a megoldásban nyújtott teljesítmény között, két kérdést tettem fel a tanulóknak:

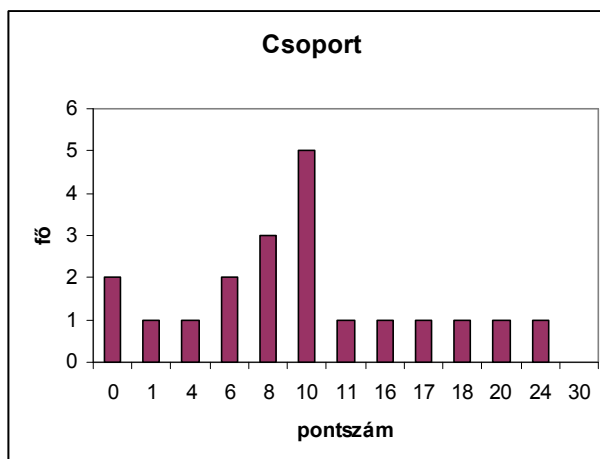
- oldott –e már meg valamilyen levelezős versenyfeladatot (pl.:KöMaL);
- vett –e már részt valamilyen matematika versenyen.

Azért tettem különbséget a levelezős versenyek, és a nem levelezős versenyek között, mert ezek megoldása másfajta rutint ad a tanulóknak. Míg a levelezős feladatok megoldásán van idejük otthon esetleg napokat töprengeni, addig a hagyományos versenyeken adott pillanatban kell ismereteiket felhasználni.

A feladatsort 20 tanuló írta meg, akik közül valamennyien vettek már részt valamilyen matematika versenyen, és tizenegyen pedig oldottak már meg levelezős versenyfeladatot is. Tehát rendelkeznek valamilyen rutinnal a versenyfeladatok megoldása terén. Ezen tanulók közül 2 tanuló 50% fölötti eredményt, 7 tanuló 50% és 25% közötti eredményt, 2 tanuló pedig 25% alatti eredményt ért el. Azok közül, akik az első kérdésre nemmel válaszoltak (9 tanuló) 3 tanuló ért el 50% fölötti eredményt, 2 tanuló 50% és 25% közötti eredményt, és 4 tanuló pedig 25% alatti eredményt.



Az egész csoportot tekintve 5 tanuló ért el 50% feletti eredményt, 9 tanuló 25% és 50% közötti eredményt és 6 tanuló 25% alatti eredményt.



Látható a diagrammokon, hogy mindhárom esetben hasonló mintázat rajzolódott ki. Ha az oszlopok tetejét összekötnénk, egy Gauss-görbéhez hasonló görbét kapnánk. Kutatások igazolják, hogy ha nagy tömegű, válogatás nélküli sokaságot alkotó embereken vizsgáljuk az értelmi képességet, és ezt koordináta-rendszerben ábrázoljuk, harang-alakú, Gauss-féle normális eloszlást kapunk.

A jobb eredményt elérő tanulók között többen voltak olyanok, akik nem oldottak még meg levelezős feladatot, viszont valószínűleg a versenyzésben nagyobb rutinnal rendelkeznek. Az „átlagosan” teljesítők között azonban már jóval többen voltak olyanok, akik valamilyen levelezős versenyen is részt vettek, viszont ők jellemzően csak egy feladatot dolgoztak ki részletesen – sokkal részletesebben, mint a másik fele a csoportnak –, és így idő hiányában a többi feladathoz csak épphogy, vagy egyáltalán hozzá sem kezdtek. Ebből is látszik, hogy ők elmélyültebb, hosszabb gondolkodást igényelnek a feladatok megoldása során.

A tanítási gyakorlaton tapasztaltakat összevetve a feladatsor megoldásában elért eredményekkel, az is szembetűnő volt számomra, hogy akik a szakköri feladatok megoldásában a legötletesebbek voltak, azok a feladatsor megoldásában nem értek el kimagasló eredményt.

A feladatsor eredményei alapján, valamint a tanítási gyakorlaton tapasztaltak is azt igazolták számomra, hogy a versenyfeladatok, de leginkább a teljesítményt az adott pillanatban mérő versenyfeladatok, nem alkalmasak a tehetségek azonosítására. A „nagy ötletek” minden bizonnyal nem versenyszituációban, hanem elmélyült, hosszas gondolkodás eredményeként születnek.

Dolgozatomban olyan számelméleti feladatokat igyekeztem összegyűjteni, amelyek előfordultak az elmúlt évek matematika tanulmányi versenyének valamelyikén, illetve megjelentek a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban. Az összegyűjtött feladatok megoldása egyszerű, egy kis segítséggel bárki, aki ismeri a számelméleti tételeket, és szívesen foglalkozik matematikával, meg tudja oldani, viszont megoldásuk leírása, formába öntése egy kissé nehézkes, és emiatt nagyon kevés feladat kerül elő a középiskolai órákon.

A feladatokat megoldási módszereik alapján próbáltam csoportosítani, bár ez nem könnyű, hiszen a középiskolai számelmélet tananyagban nagyon kevés az

alkalmazható tétel, ismeret, valamint sok számelméleti feladat megoldása alapján több csoportba is besorolható. A feladatok ismertetése előtt minden feladatcsoporthoz összegyűjtöttem a feladatok megoldásához szükséges számelméleti ismereteket.

Reményeim szerint ez a feladatgyűjtemény segítséget nyújt a versenyeken előforduló számelméleti feladatokra való felkészülésben, és némileg áthidalja a versenyek szintje és a középiskolai számelmélet tananyag közti szakadékot.

6. Számelméleti versenyfeladatok a középiskolában

6.1. Számrendszerek

Tétel: Minden $N > 0$ természetes szám egyértelműen felírható

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0, \quad a_n > 0$$

alakban.

10-et a számrendszer *alapjának*, vagy *alapszámának* nevezzük, az N számot pedig a következő módon jelöljük:

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

Tétel: Minden $N > 0$ természetes szám egyértelműen felírható

$$N = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_2 g^2 + a_1 g + a_0$$

alakban, illetve minden $A > 0$ racionális szám felírható

$$A = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_2 g^2 + a_1 g + a_0 + b_1 g^{-1} + b_2 g^{-2} + \dots$$

alakban, ahol $g > 1$ az adott számrendszer alapszáma, az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, illetve b_1, b_2, \dots számok pedig a szám számjegyei, amelyek bármelyikére teljesül, hogy $0 \leq a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots < g$.

g számrendszerben az N természetes számot $N = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{(g)}$ alakban írjuk.

Megjegyzés:

a) Bármely számrendszerben igaz, hogy az adott számrendszerben felírt számban a számjegyek alakiértéke kisebb az alapszámnál.

b) A tetszőleges alapszámú számrendszerekben felírt számokban pontosan annyi különböző alakiértékű számjegy fordul elő, amennyi az alapszám.

c) Bármely számrendszerben az alapszám mindig 10 alakban írható fel. (Ejtsd: egy nulla.)

Műveletvégzés nem tízes alapú számrendszerben

Kettes számrendszer:

+	0	1		.	0	1	
<hr/>				<hr/>			
0	0	1		0	0	0	
<hr/>				<hr/>			
1	1	10		1	0	1	

Hármas számrendszer

+	0	1	2	.	0	1	2
<hr/>				<hr/>			
0	0	1	2	0	0	0	0
<hr/>				<hr/>			
1	1	2	10	1	0	1	2
<hr/>				<hr/>			
2	2	10	11	2	0	2	11

FELADATOK

1. feladat

(OKTV, 2004-2005, I. kategória, első forduló)

Melyek azok a 10-es számrendszerbeli háromjegyű pozitív egész számok, amelyeknek számjegyei közül valamelyik a 3-as, továbbá a számjegyek összege és szorzata egyenlő?

Megoldás: A keresett háromjegyű szám egyik számjegye a 3-as, a két ismeretlen számjegyet jelölje a és b , ahol $a, b \in \mathbb{N}$ és $1 \leq a \leq 9, 1 \leq b \leq 9$.

A feltétel szerint

$$(1) \quad (a+b)+3 = 3 \cdot a \cdot b$$

Az (1) egyenletből következik, hogy $a+b$ osztható hárommal. $a+b$ szóbjajhető értékei tehát 3, 6, 9, 12, 15, 18.

Ezeket az értékeket (1)-be behelyettesítve ab értékére a következőket kapjuk:

$a+b$	3	6	9	12	15	18
ab	2	3	4	5	6	7

Megoldva az $a+b=6$

$$a \cdot b = 2$$

egyenletrendszer $a=2, b=1$, illetve $a=1, b=2$ adódik.

A többi eset nem ad egész a, b értékeket, tehát a feladatnak nem megoldásai.

Így a keresett háromjegyű számok

123, 132, 213, 231, 312, és 321.

2. feladat

(KöMaL, 1995. február)

Van –e olyan N pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összege 10, N^2 számjegyeinek összege pedig 100?

Megoldás: Próbálkozzunk először a csupa 1-esből álló számmal. 10 darab 1-est kell egymás után írunk. Reményeinket megerősíti az a megfigyelés, hogy

1 db 1-es esetén a szám négyzetében a számjegyek összege 1,

2 db 1-es esetén a szám négyzetében a számjegyek összege 4,

3 db 1-es esetén a szám négyzetében a számjegyek összege 9,

4 db 1-es esetén a szám négyzetében a számjegyek összege 16,

tehát mindig igaz, hogy ha a jegyek összege n , akkor a szám négyzetében a jegyek összege n^2 .

Most vegyük a 10 db 1-esből álló szám négyzetét:

$$11111111111^2 = 12345678900987654321.$$

Itt a jegyek összege csak 90. A bajt az okozza, hogy a 10. részletösszegben 10 db 1-es áll egymás alatt, s ezért a négyzetszámban fellép a 0, ami csökkenti a jegyek összegét. A bajt úgy lehet kiküszöbölni, hogy a részletösszegeket eltoljuk, vagyis valahova (de nem középre) 0-t, esetleg 0-kat írunk, ami az eredeti szám jegyeinek összegét nem befolyásolja. Álljon pl. 0 a 4. helyen, és végezzük el a négyzetre emelést.

$$11101111111 \cdot 11101111111$$

$$11101111111$$

$$11101111111$$

$$11101111111$$

$$11101111111$$

$$11101111111$$

$$11101111111$$

$$11101111111$$

$$11101111111$$

$$11101111111$$

$$123234667898767654321$$

Itt a jegyek összege valóban 100.

A feladat kérdésére a válasz igen, van a feltételeket kielégítő szám, nem is egy.

3. feladat

(KöMaL, 1993. január)

Mekkora lehet egy \overline{xyxyxy} alakú tízes számrendszerbeli szám legnagyobb prímosztója?

Megoldás: Az \overline{xyxyxy} szám prímosztóira a következő szorzatfelírásból fogunk következtetni:

$$\overline{xyxyxy} = 10101 \cdot (10x + y) = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (10x + y).$$

Ebből következik, hogy \overline{xyxyxy} legnagyobb prímosztója a 37, illetve $10x+y$ prímosztói közül kerül ki. A $10x+y$ alakú számok legnagyobb prímosztója pedig a legnagyobb kétjegyű prímszám, vagyis 97 lehet. Tehát e legnagyobb keresett prímosztó 97, ami a 979797-hez tartozik.

4. feladat

(Győr – Moson – Sopron Megyei Matematikai Verseny, 2000.)

Egy tizes számrendszerben felírt négyjegyű számból kivonjuk azt a háromjegyű, majd kétjegyű, végül egyjegyű számot, amelyet az eredeti szám utolsó, utolsó kettő, illetve utolsó három számjegyének elhagyásával kapunk. Mi volt az eredeti szám, ha a kivonások után 1778-at kapunk?

Megoldás: Legyenek a keresett szám számjegyei a ($\neq 0$), b , c , d . Ekkor a keresett számunk $abcd$ alakú. A feltétel szerint:

$$(1000a+100b+10c+d) - (100a+10b+c) - (10a+b) - a = 1778$$

$$889a+89b+9c+d = 1778.$$

Itt a értéke csak 1 vagy 2 lehet ($3 \cdot 889 > 1778$).

Ha $a = 1$

$$89b+9c+d = 889$$

Ekkor $b = 9$, majd ugyanígy folytatva kapjuk, hogy $c = 9$ és $d = 7$. A keresett számra egy megoldás a 1997.

Ha $a = 2$

$$89b+9c+d = 0$$

Ekkor $b = c = d = 0$ lehet csak. A keresett számra egy újabb megoldás a 2000.

A feladatnak 2 szám felel meg, ezek a 1997 és a 2000.

5. feladat

(KöMaL, 1989. március)

Jelölje A azt a 221 jegyű számot, amelynek valamennyi számjegye 9-es. Mennyi A^2 számjegyeinek összege?

Megoldás: Jelölje A_n az n -jegyű, csupa 9-esből álló számot. Ekkor $A_n = 10^n - 1$ és így

$$A_n^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = 10^n(10^n - 2) + 1.$$

$10^n - 2$ utolsó jegye 8, a többi $(n-1)$ jegye pedig 9. Ha ezt a számot 10^n -nel szorozzuk, akkor a jegyek összege nem változik, és mivel az így kapott szám 0-ra végződik, egyet hozzáadva 1-gyel nő a jegyek összege..

A_n^2 jegyeinek összege tehát $(n-1) \cdot 9 + 8 + 1 = 9n$. Esetünkben $n = 221$, tehát A^2 számjegyeinek összege $9 \cdot 221 = 1989$.

6. feladat

(KöMaL, 1993. március)

Keressük meg azokat a pozitív egész A , B számokat, amelyek tízes számrendszerbeli alakját egymás után írva négyzetszámot kapunk, és ez egyenlő az A és B szorzatának kétszeresével.

Megoldás: Egy négyzetszám csak páros számú nullára végződhet. Írjuk a B számot az A mögé, ekkor tehát B páros számú nullára végződik, hiszen \overline{AB} négyzetszám. Könnyű belátni, hogy ha egy A, B pár megfelel a feladat követelményeinek, akkor $A, B \cdot 100$ is megfelel. (Hiszen AB és $2 \cdot AB$ is 100-szorosára változik.) Feltehetjük tehát, hogy B nem osztható 10-zel. Legyen a B szám b -jegyű. Ekkor \overline{AB} négyzetszám, és

$$\overline{AB} = 10^b A + B = 2AB$$

Átrendezve

$$(1) \quad 10^b A = (2A-1)B$$

adódik, azaz $2^b \cdot A$ osztója a $(2A-1)B$ szorzatnak. Azt állítjuk, hogy $2^b A$ és a szorzat első tényezője $2A-1$, relatív prímek. Valóban $2^b \cdot A$ tetszőleges p prímosztója vagy $p=2$ vagy pedig osztója A -nak és így $2A$ -nak is. A 2 nyilván nem osztója a páratlan $(2A-1)$ -nek, a második esetben, pedig p szintén nem lehet egyidejűleg osztója a szomszédos $(2A-1)$ -nek és $2A$ -nak.

Így viszont $2^b \cdot A$ mint a $(2A-1)B$ szorzat osztója, a második tényezőnek, B -nek is osztója, vagyis $B = k \cdot 2^b \cdot A$ valamilyen pozitív egész k -val. (1)-ben $2^b \cdot A$ -val egyszerűsítve

$$(2) \quad 5^b = (2A-1)k$$

adódik. (2)-ből mind $(2A-1)$, mind pedig k az 5 hatványa. Mivel $b \geq 1$, azért k értéke csak 1 lehet, egyébként ugyanis $B = k \cdot 2^b \cdot A$ osztható volna 10-zel.

Így $5^b = 2A-1$ azaz $A = \frac{5^b + 1}{2}$ és $B = 2^b \cdot A$. Ekkor $2AB = 2^{b+1} A^2$ pontosan

akkor négyzetszám, ha b páratlan. Eszerint $A = \frac{5^b + 1}{2}$ és $B = 2^b \cdot A = 2^{b-1}(5^b + 1)$, ahol

b páratlan.

Így $2AB = 2^{b+1} A^2$ valóban négyzetszám, fennáll az $\overline{AB} = 2AB$ egyenlőség, hiszen $10^b A + B = 10^b A + 2^b A = 2^b A(5^b + 1) = 2^{b+1} A^2 = 2AB$ végül $10^{b-1} < B < 10^b$, azaz B jegyeinek száma valóban b . A feladat követelményeit tehát az

$$A = \frac{5^b + 1}{2} \text{ és a } B = 2^b A \cdot 100^m$$

alakú számok elégítik ki, ahol b páratlan, m pedig tetszőleges természetes szám.

7. feladat

(KöMaL, 1999. február)

Van-e olyan köbszám, amelynek tízes számrendszerbeli alakja $\overline{ababab1}$ alakú?

Megoldás: Feltételezve, hogy $a \neq 0$, olyan x számot keresünk, amelynek köbe hétjegyű, ezért $x \geq 100$ és $x \leq 215$, mivel $216^3 = 1\,007\,7696$ már nyolcjegyű.

Ha $x^3 = \overline{ababab1}$, akkor $x^3 - 1 = \overline{ababab0}$ alakú, tehát 10-zel osztható, és mivel számjegyeinek összege $3(a+b)$, 3-mal is osztható. Belátjuk, hogy ha $x^3 - 1$ osztható 30-cal, akkor $x - 1$ is.

$x - 1$ osztható 10-zel, mivel ha x^3 1-re végződik, akkor, végignézve a páratlan egyjegyű számok köbeit, x is biztosan 1-re végződött.

x^3 pontosan akkor ad 1 maradékot 3-mal osztva, amikor x . Ez hasonlóan látható be, a maradék (a 0, az 1 és a 2) köbének ellenőrzésével. Ez azt jelenti, hogy $x - 1$ osztható 3-mal.

Csak négy darab 30-cal osztható 99 és 214 közé eső szám van, így $x = 121, 151, 131$ és 211 lehetne. Ezeket köbre emelve láthatjuk, hogy a feladatnak csak $211^3 = 9\,393\,931$ a megoldása.

8. feladat

(KöMaL, 1981. november)

Egy páros számot felírtunk kettes számrendszerben. A szám végén álló 0-t elhagyva, ugyanennek a számnak a hármas számrendszerbeli alakját kapjuk. Határozzuk meg a számot!

Megoldás: A keresett szám kettes számrendszerbeli alakjában az utolsó előtti számjegy helyi értéke 2. Ha elhagyjuk a szám végén álló 0-t, ennek a számnak a helyi értéke 1 lesz, tehát az átalakítás a helyi értéket 1-gyel csökkenti ezen a pozíción.

Nézzük meg mi történik a többi számjegy helyi értékével! A hátulról számított harmadik számjegy helyi értéke 4. Az átalakítás után ez egy hármas

számrendszerbeli szám utolsó előtti számjegye lesz, vagyis helyi értéke 3, ami ismét 1-gyel kisebb az iménti helyi értéknél. Mivel mindkét helyi érték csökken, a keresett számnak biztosan vannak további 0-tól különböző számjegyei is, hiszen az átalakítás a keresett szám értékét nem változtatja meg.

A kettes számrendszerbeli szám hátulról számított negyedik számjegyének a helyi értéke 8, ennek az új helyi érték 9 lesz, itt tehát egyel nő a helyi érték. Így két megfelelő számot is kapunk aszerint, hogy ezt az egységnyi növekedést az előbbi egységnyi csökkenések közül melyikkel elégítjük ki. Ezek a kettes számrendszerbeli 1010, és 1100 számok, melyeknek tízes számrendszerbeli alakja 10 és 12, és hármasszámrendszerbeli alakjuk pedig 101 és 110.

Nincs is több megoldás, hiszen a kettes számrendszerbeli számok számjegyei nem lehetnek 1-nél nagyobbak, így a helyi értékek eddig látott csökkenéséből együttvéve legfeljebb 2 csökkenés adódhat, a további helyi értékek pedig ennél többel nőnek. Valóban a következő számjegy eredeti helyi értéke 16, új helyi értéke pedig 27, a növekedés 11. Tovább menve a különbség tovább nő, hiszen az eredeti helyi érték csak 2-vel, az új helyi érték viszont 3-mal szorzódik.

A keresett szám 10-es számrendszerbeli alakja tehát 10 vagy 12.

9. feladat

(Krüschák József verseny, 1966)

Van-e nemnegatív egész számokból álló olyan két végtelen A és B halmaz, hogy bármely nemnegatív egész szám pontosan egyféleképpen írható fel egy A-hoz tartozó és egy B-hez tartozó szám összegeként?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy vannak kívánt tulajdonságú A, B számhalmazok, s ehhez elég egyetlenegy példát megadnunk.

Tartozzanak az A halmazhoz mindazok a nemnegatív egész számok, amelyeket a tízes számrendszerben felírva minden 0-tól különböző jegye (a szám végétől visszafelé számítva) páratlan sorszámú helyen áll, B-hez pedig azok, amelyeknek minden 0-tól különböző jegye páros sorszámú helyen helyezkedik el. A 0 eszerint mind a két halmazhoz hozzátartozik, hiszen nincs 0-tól különböző számjegy.

Ha egy-egy A-hoz és B-hez tartozó számot összeadunk, akkor az összeg számjegyei éppen a két szám megfelelő jegyei lesznek, hiszen ugyanazon a helyen mindig csak az egyikben állhat 0-tól különböző számjegy, s ez lesz az összeg megfelelő jegye. Bármely nemnegatív egész szám páratlan sorszámu jegyeiből egy A-hoz, páros sorszámu jegyeiből egy B-hez tartozó számot alkothatunk, s ezek összege a fentiek szerint éppen az a szám lesz, amelyből kiindultunk. A két halmaz más számainak összege nem lehet ugyanez az érték, mert valahol más számjegynek kell bennük szerepelnie, s akkor ezt összegük is tartalmazza.

Ha pl. 1967-ből indulunk ki, akkor ebből az A-hoz tartozó 907 és a B-hez tartozó 1060 adódik. Ezek összege valóban 1967.

Világos végül, hogy az A, B halmazok mindegyike végtelen halmaz, mert végtelen sok páratlan sorszámu és végtelen sok páros sorszámu tizedes hely van .

Megjegyzés: Eljárásunk változatlanul alkalmazható, ha nem tízes, hanem tetszőleges alapú számrendszert használunk. Legtetszetősebb példának talán a kettes számrendszer választásakor adódó példa mondható.

Megoldásunkban a (szám végétől visszafelé számlált) páratlan sorszámu és páros sorszámu tizedes helyek szolgáltatták a két számhalmazt. Ehelyett a tizedes helyeket akárhogyan is eloszthattuk volna két csoportba, mindenesetre azonban úgy, hogy mindkét csoport végtelen sok tizedes helyet tartalmazzon. Így pl. sorolhatnánk az egyikbe azokat a tizedes helyeket, amelyeknek a szám végétől visszafelé számított sorszáma 3-mal osztható, s a másikba a többit. Vagy az egyikbe azokat, amelyeknek a sorszáma prímszám, s a másikba a többit. Ilyen módon újabb példákhoz juthatunk természetesen akkor is, ha nem a tízes számrendszert használjuk.

További példákhoz jutunk, ha változó alapú számrendszerből indulunk ki. Ez a következőt jelenti: tetszőlegesen megválasztjuk az 1-nél nagyobb k_1, k_2, \dots alapszámokat; ezekkel minden nemnegatív egész számot kifejezhetünk $c_1 + c_2k_2 + c_3k_1k_2 + c_4k_1k_2k_3 + \dots$ alakban, ahol a c_1, c_2, \dots számjegyek mindegyikére teljesül a $0 \leq c_i < k_i$ megszorítás, és természetesen minden szám kifejezésében csak véges sok számjegy szerepel. Egy szám számjegyeihez úgy juthatunk el, hogy azt k_1 -gyel osztva c_1 lesz a maradék, a hányadost k_2 -vel osztva maradékként c_2 adódik, majd a

hányadosokat mindig tovább osztva a többi számjegyet is megkaptuk. Ilyen változó alapú számrendszerre változatlanul alkalmazhatjuk megoldásunk eredeti eljárását, s így a feladat kérdésére adott válasz helyességét bizonyító újabb példákat kapunk. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy minden korábban említett példa ennek a most ismertetett példának speciális esete.

10. feladat

(Krüschák József verseny, 1989.)

Adott pozitív egész n -re jelölje $S(n)$ a tízes számrendszerben felírt n számjegyeinek összegét. Melyek azok az M pozitív egész számok, amelyekre $S(kM)=S(M)$, minden olyan k egészre, amelyre $1 \leq k \leq M$?

Megoldás: 1. $M=1$ megfelel, mivel k csak 1 lehet. Nagyobb M -re nézzük meg $k=2$ választást. Tudjuk, hogy egy szám 9-cel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint számjegyeinek összege. Így $9 \mid M - S(M)$ és $9 \mid 2M - S(2M)$, amiből különbséget képezve

$$9 \mid (2M - S(2M)) - (M - S(M)) = M - S(2M) + S(M) = M.$$

Ekkor 1-en kívül csak a 9-el osztható számokra teljesülhet.

Tegyük fel, hogy m egy n -jegyű szám, amelyre teljesül a feladat feltétele:

$$10^{n-1} \leq M < 10^n$$

és első jegye $a(\geq 1)$, $M = a \cdot 10^{n-1} + A$, ahol A legfeljebb $(n-1)$ -jegyű (lehet 0 is; ha $n=1$, akkor csak ez lehet). Mivel M osztható 9-el, így nagyobb 10^{n-1} -nél, tehát k választható

$10^{n-1}+1$ -nek. Ekkor

$$kM = (10^{n-1} + 1)M = 10^{n-1}(M + a) + A$$

az első tag $(n-1)$ db 0-val végződik, a második legfeljebb $(n-1)$ -jegyű, tehát az összeadásnál minden jegyét 0-hoz kell adni. A számjegyösszeg tehát a két tag jegyösszegének az összege. Az első tag jegyösszegét a végén álló 0-ák nem befolyásolják, így annak jegyösszege $S(M+a)$.

A jegyei azonosak M jegyeivel, a kivételével, így $S(A)=S(M)-a$. A feladat feltétele tehát akkor teljesül, ha $S(M+a)=a$. Ha $M+a$ is n -jegyű, akkor első jegye vagy a , és ekkor van még 0-tól különböző jegye, mivel nagyobb M -nél, vagy pedig $a+1$. Jegyösszege mindkét esetben nagyobb a -nál. Ha $M+a$ $(n+1)$ -jegyű, tehát legalább 10^n , akkor

$$10^n > M \geq 10^n - a \geq 10^n - 9,$$

ebben a számközbe pedig csak egy 9-el osztható szám esik: 10^n-1 , vagyis az n db 9-el írt szám (n tetszőleges pozitív egész).

Megmutatjuk, hogy az ilyen alakú számok megfelelnek. Legyen $M=10^n-1$ és $2 \leq k \leq M$, ekkor

$$kM = (k-1)10^n + 10^n - k = (k-1)10^n + (10^n - 1) - (k-1)$$

Itt az első tag n db 0-val végződik, a második az n db 9-el írt szám, a kivonandó pedig legfeljebb n -jegyű. Így a jegyösszeg ismét az első tag jegyösszegének és a különbség jegyösszegének az összege. Az első tag jegyösszege $S(k-1)$, a különbség képzésénél pedig $k-1$ minden jegyét 9-ből kell levonni, tehát átvitelre nem kerül sor. Így a különbség jegyösszege $9n-S(k-1)$. kM jegyösszege tehát $9n$, ami megegyezik $S(M)$ -el. Ezt akartuk belátni.

2. Az előző megoldásból átvesszük azt, hogy csak 9-el osztható számok jöhetnek szóba, és, hogy az 1 és 10^n-1 alakú számok megfelelnek. Ezekre támaszkodva látjuk be, hogy ezek már megadják az összes megfelelő számot.

Legyen M egy 1-nél nagyobb megfelelő szám. Legyen hozzá n az a pozitív egész,

amelyre $\frac{(10^n - 1)}{9} \leq M < \frac{(10^{n+1} - 1)}{9}$. Az alsó korlátot választva k -nak

$$S(kM) = S\left(\left(\frac{M}{9}\right)(10^n - 1)\right).$$

Itt $\frac{M}{9} < \frac{(10^{n+1} - 1)}{81} < (10^n - 1)$. Mivel (10^n-1) -re teljesül a feladat feltétele,

$$S\left(\frac{M}{9}(10^n - 1)\right) = S(10^n - 1) = 9n.$$

Ha M n -jegyű, akkor ez csak úgy egyezhet meg $S(M)$ -mel, ha M az n db 9-el írt szám,

$10^n - 1$. Ha M $(n+1)$ -jegyű, akkor első jegye csak 1 lehet és a további jegyei közt kell 0-nak lennie, mert kisebb a csupa egyessel írt számnál. Ekkor azonban jegyösszege legfeljebb $1 + 9(n-1) < 9n$ volna. A feltételnek tehát valóban csak a mondott számok felelnek meg.

6.2. Prímszámok, összetett számok

Definíció: Prímszámnak, vagy törzsszámnak nevezük azt a természetes számot, amelynek pontosan két osztója van a természetes számok között. (Az 1 és önmaga.) Azokat a természetes számokat, amelyeknek kettőnél több osztójuk van, összetett számoknak nevezük.

Egy a szám 1-en és önmagán kívüli osztóit a szám *valódi* osztóinak, 1-et és a -t a szám *nem valódi* osztóinak nevezük.

Megjegyzés: Az 1-et sem prímszámnak, sem összetett számnak nem tekintjük.

Definíció: Azokat a prímszámokat, amelyek különbsége 2, ikerprímszámoknak, vagy röviden ikerprímeknek nevezük.

Tétel: (A számelmélet alaptétele) Minden összetett szám felbontható törzsszámok szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Tétel: Végtelen sok prímszám van.

A prímszámok kikeresésére alkalmas módszer az *eratoszthenészi szita*: Fölírjuk a számokat 2-től N -ig. A sorban az első – a 2 – prím. A kettő többszöröseit kihúzzuk a sorból. A következő legkisebb, amelyik megmaradt – a 3 – szintén prím. Kihúzzuk a három többszöröseit. A megmaradó legkisebb szám megint prím. Így folytatva tovább az eljárást, a sorban megmaradt számok mindegyike prím. Az eljárást elég addig folytatni, míg a megmaradó legkisebb szám nem nagyobb \sqrt{N} -nél.

FELADATOK

1. feladat

(Magyar Középiskolás Matematikai Verseny, Paks, 1995, I. osztály)

Bizonyítsuk be, hogy $1995^4 + 4^{1995}$ összetett szám!

Megoldás: $1995^4 + 4^{1995} = (1995^2)^2 + (2^{1995})^2 = (1995^2 + 2^{1995})^2 - 2^{1996} \cdot 1995^2$. Ez két négyzetszám különbsége. Ezért két – nyilván egynél nagyobb és egész – szorzata, tehát összetett szám.

2. feladat

(Magyar Középiskolás Matematikai Verseny, Paks, 1995, II. osztály)

Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 3-nál nagyobb prímszámok, akkor

$$p^2 + 7q^2 - 23$$

nem prímszám.

Megoldás: Minden 3-nál nagyobb prímszám $6k+1$ vagy $6k-1$ alakú. Ezért $p = 6k \pm 1$, $q = 6l \pm 1$ jelöléssel:

$$p^2 + 7q^2 - 23 = 12(36k^2 \pm k \pm 21l^2 \pm 7l) - 15.$$

Ez nyilván osztható 3-mal, és nagyobb 3-nál, így nem prímszám.

3. feladat

(OKTV, 1999-2000, III. kategória, első forduló)

Adjuk meg az összes olyan (pozitív) prímszámot, amelynek alkalmas (pozitív egész, kitevős) hatványa felírható két pozitív egész szám köbének az összegeként.

Megoldás: A 2 és a 3 megfelel, például $2 = 1^3 + 1^3$, illetve $3^2 = 2^3 + 1^3$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $x^3 + y^3 = p^\alpha$. Az egyenletet $(x, y)^3$ -nal leosztva egy hasonló típusú egyenlet keletkezik, ahol (az új) x és y már relatív prímelek (és az új α esetleg

kisebb, mint az eredeti volt). Szorzattá bontás után $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = p^\alpha$ adódik, ahonnan a számelmélet alaptétele (és a pozitívítási feltételek) szerint azt kapjuk, hogy

$$x+y = p^\beta, \quad x^2 - xy + y^2 = p^\gamma \quad \beta > 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \beta + \gamma = \alpha$$

Az $(x+y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = 3xy$ azonosság alapján ekkor $p^{2\beta} - p^\gamma = 3xy$.

Ha $\gamma = 0$, akkor $1 = x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy \geq xy \geq 1 \times 1 = 1$ alapján $x = y = 1$ és $p = 2$.

Ha $\gamma > 0$, akkor $p \mid 3xy$. Ha itt $p \mid x$, akkor $p \mid x+y (= p^\beta)$ miatt $p \mid y$ is teljesül, ami ellentmond annak, hogy x és y relatív prímek. Ugyanígy $p \mid y$ is ellentmondásra vezet. Ezért csak $p \mid 3$, azaz $p = 3$ lehetséges.

Megjegyzés: A feladat néhány közeli rokona több érdekes számelméleti kérdést vet fel.

1. A 3-nál nagyobb prímek hatványai nem állnak elő semmilyen két pozitív m -edik hatvány összegeként sem, ahol $m > 1$ páratlan szám. Ennek igazolása hasonló, de jóval bonyolultabb megfontolásokat igényel.

2. Páros kitevő esetén alapvetően megváltozik a helyzet, például két négyzetszám összegeként minden $4k+1$ alakú prím felírható.

3. Összeg helyett két pozitív köbszám különbségét nézve ismét változik a helyzet. Ekkor egyrészt a 2, illetve a 3 hatványai nem írhatók fel ilyen alakban, másrészt a fenti megoldáshoz hasonlóan adódik, hogy legfeljebb akkor kaphatunk prímhatványt, ha egymást követő egész számok köbeinek a különbségét vesszük. Ekkor a különbség $(y+1)^3 - y^3 = 3y^2 + 3y + 1$, és megoldatlan probléma, hogy létezik-e végtelen sok olyan egész y , amelyre ez a kifejezés (prímszám vagy) prímhatvány.

4. feladat

(KöMaL, 1994. április)

Milyen p (nem feltétlenül pozitív prímek esetén lesz a $2p+1$, $4p+1$, $6p+1$ kifejezések értéke is prím?

Megoldás: Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $p=+2$ nem megoldása a feladatnak, hiszen ekkor $4p+1=9$ nem prímszám.

A $p=-2$ -re viszont $2p+1=-3$, $4p+1=-7$, $6p+1=-11$, ez tehát megfelelő. Kérdés, van-e más megoldása a feladatnak.

Vegyük észre, hogy bármely p egészre p , $2p+1$, $4p+1$ közül pontosan egy osztható hárommal, a $6p+1$ viszont soha nem osztható 3-mal.

1. Ha p osztható 3-mal, akkor mivel prímszám, ez csak úgy lehet, hogy $p=\pm 3$.

Ha $p=3$, akkor $2p+1=7$, $4p+1=13$, $6p+1=19$.

Ha $p=-3$, akkor $2p+1=-5$, $4p+1=-11$, $6p+1=-17$

Ekkor a kapott értékek mindegyike prímszám, tehát a $p=\pm 2$ megoldása a feladatnak.

2. Ha 3 osztója $(2p+1)$ -nek, akkor a $2p+1$ prímszám lehetséges értékei $2p+1=3$, ahonnan $p=1$, ami nem prímszám, vagy $2p+1=-3$, ahonnan $p=-2$, s erről már láttuk, hogy megoldás.

3. Hasonlóan, ha $4p+1=3$, akkor $p=0,5$ nem egész szám, vagy $4p+1=-3$ és $p=-1$, ami nem prím.

Összefoglalva: p lehetséges értékei -2 és ± 3 , és több megoldás nincs.

5. feladat

(KöMaL, 1994. április)

Bizonyítsuk be, hogy ha a és b különböző egész számok, akkor végtelen sok olyan n természetes szám létezik, amelyre $a+n$ és $b+n$ relatív prímelek.

Megoldás: A két szám közül legyen b a nagyobbik; az n pedig olyan $|a|$ -nál és $|b|$ -nél is nagyobb természetes szám, melyre $b+n$ prímszám. Ekkor $1 \leq a+n < b+n$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy $b+n$ csak 1-gyel és önmagával osztható, $a+n$ viszont nem osztható $b+n$ -nel, hiszen kisebb nála. Így $a+n$ és $b+n$ relatív prímelek. Ilyen n szám viszont végtelen sok van, mivel a prímszámok száma végtelen.

6. feladat

(KöMaL, 1990. március)

Határozzuk meg azokat a p és q prímszámokat, amelyekre $p+q$ és $p^2 + q^2 - q$ egyaránt prímszámok.

Megoldás: Ha p és q prímek összege is prím, akkor egyikük 2, másként az összeg 2-nél nagyobb páros szám lenne, és így nem lehetne prímszám. Mivel a feltétel szerinti másik prím $p^2 + q^2 - q$ és itt $(q^2 - q) = q(q - 1)$ páros pozitív szám, ezért p^2 nem lehet páros, így csak $q=2$ lehetséges. Ebben az esetben $p + q = p + 2$, $p^2 + q^2 - q = p^2 + 2$, így olyan prímet keresünk, melyre $p+2$ és $p^2 + 2$ is prímszámok.

$$p^2 + 2 = (p^2 - 1) + 3 = (p - 1)(p + 1) + 3$$

így ha p nem osztható 3-mal, akkor $(p-1)$, $(p+1)$ számok egyike 3-mal osztható, és így az egyenlet jobb oldalán 3-nak egy 3-nál nagyobb többszöröse áll, ami nem lehet prímszám.

Az egyetlen megmaradt lehetőség a $p=3$. Ebben az esetben $p+2=5$, $p^2+2=11$, így egy megoldását kaptuk a feladatnak, és más megoldás, mint láttuk, nincsen.

A feladatban szereplő p és q prímek tehát a 3 és a 2.

7. feladat

(Arany Dániel verseny, 1999/2000. I. forduló haladók - I. kategória)

Melyek azok a p , q pozitív prímszámok, amelyekre $7p + q$, és $pq + 11$ is prím?

Megoldás: p és q pozitív, így $pq+11$ csak páratlan prím lehet, tehát p vagy q páros, azaz 2. Ha $p=2$, akkor q -t úgy kell választani, hogy q , $14+q$, és $2q+11$ mind prímek legyenek. Vizsgáljuk ezeket a számokat a hárommal való oszthatóság alapján! Ha q hármas maradéka 1, akkor $14+q$, osztható hárommal, ha pedig q hármas maradéka 2, akkor $2q+11$ osztható hárommal. Mivel $14+q$, és $2q+11$ 3-nál biztosan nagyobbak, így ezekben az esetekben nem kapunk megoldást. Maradt az az eset, amikor q osztható hárommal, azaz $q=3$. Ez egy megoldást is jelent, hiszen a kapott

"négy" szám (2, 3, 17, és 17) mind prím. Ha viszont $q=2$, akkor p -t kell megválasztani úgy, hogy p , $7p+2$, és $2p+11$ mind prímek legyenek. Ha p hármas maradéka 1, akkor $7p+2$, ha a hármas maradék 2, akkor $2p+11$ osztható hárommal. Mivel $7p+2$, és $2p+11$ 3-nál biztosan nagyobbak, így ezekben az esetekben sem kapunk megoldást. Már csak azt az esetet kell megnéznünk, amikor p osztható hárommal, azaz $p=3$. Ebben az esetben is jó megoldást kapunk, hiszen 3, 2; 23, és 17 prímek. Tehát összesen két megoldás van.

6.3. Osztók, oszthatóság

Definíció: Legyenek a és b egész számok (azaz $a, b \in \mathbf{Z}$). Az a számot a b számmal oszthatónak nevezzük, ha van olyan q szám, mellyel $a = bq$, ahol q is egész szám.

Jelölés: $b \mid a$.

Ugyanezt úgy is szokták mondani, hogy b osztója a -nak, vagy a többszöröse b -nek.

Ha b nem osztója a -nak, akkor ezt a következőképpen jelöljük: $b \nmid a$.

Az oszthatóság tulajdonságai:

Az oszthatóság számos tulajdonsága közvetlenül következik az értelmezésből.

1. $1 \mid a$ és $-1 \mid a$;
2. $a \mid a$, $a \mid -a$ és $-a \mid a (= -(-a))$;
3. ha $a \mid b$, akkor $a \mid bc$, ($c \in \mathbf{R}$ tetszőleges);
4. ha $a \mid b$, akkor $ac \mid bc$, ($c \in \mathbf{R}$ tetszőleges).

Egy a szám osztói közül az 1-et, -1-et, a -t és $-a$ -t a szám *triviális* osztóinak nevezzük.

Definíció: Ha egy szám minden számnak osztója, akkor egységnek nevezzük.

A racionális egész számok között két egység van, 1 és -1. Kitüntetett szerepe van oszthatóság szempontjából a 0-nak is.

5. 0 -nak minden szám osztója, vagyis tetszőleges a esetén $a \mid 0$, ugyanis $0 = 0 \cdot a$; 0 az egyetlen olyan szám, amely végtelen sok osztóval rendelkezik;
6. tetszőleges $a \neq 0$ számnak véges sok osztója van;
7. 0 csak a 0 -nak osztója.

Az oszthatóság reflexív és tranzitív reláció.

8. reflexivitás: $a \mid a$;
9. tranzitivitás: ha $a \mid b$ és $b \mid c$, akkor $a \mid c$;

A szimmetria viszont általában nem áll fenn. Ennél pontosabb is mondható:

10. ha $a \mid b$ és $b \mid a$, akkor $|a|=|b|$;
11. $a \mid b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $|a|=|b|$;
12. ha a közös osztója b -nek és c -nek, tehát $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid bx + cy$; minden $x, y \in \mathbb{Z}$ ez az oszthatóság lineáris kombinációs tulajdonsága;
13. ha $a \mid b$ és $c \mid d$, akkor $ac \mid bd$; ez az oszthatóság multiplikatív tulajdonsága.

Tétel:

- a) $a - b \mid a^n - b^n$, ha n tetszőleges természetes szám.
- b) $a + b \mid a^{2n} - b^{2n}$, ha n tetszőleges természetes szám.
- c) $a + b \mid a^{2n+1} + b^{2n+1}$, ha n tetszőleges természetes szám.

Legnagyobb közös osztó

Definíció: A c számot az a és b számok közös osztójának nevezzük, ha $c \mid a$ és $c \mid b$ is teljesül, vagyis $a = ca_1$, $b = ca_2$.

Az egység bármely két számnak közös osztója: $\pm 1 \mid a$ és $\pm 1 \mid b$ tetszőleges a és b számok mellett teljesül.

Definíció: Legyenek a és b egész számok. Az a és b számok legnagyobb közös osztójának nevezzük az olyan d számot, amelyre $d \mid a$, $d \mid b$, tehát d közös osztó, és az a és b számok minden közös osztója, d -nek is osztója.

Két szám legnagyobb közös osztóját (röviden: a és b l.n.k.o.-ja) a következőképpen jelöljük: $d = (a, b)$.

A legnagyobb közös osztó néhány tulajdonsága:

- a) $((a, b), c) = (a, (b, c))$;
- b) $(a, b) = (b, a)$;
- c) $(a, b)c = (ac, bc)$, ahol $c \in \mathbf{N}$.

Megjegyzés: Több szám legnagyobb közös osztója

Az $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$ ($n > 2$) számok legnagyobb közös osztóját (a_1, a_2, \dots, a_n) -nel jelöljük és így értelmezzük:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n) &= ((a_1, a_2), a_3, \dots, a_n) = (((a_1, a_2), a_3), a_4, \dots, a_n) = \dots = \\ &= (((((a_1, a_2), a_3), a_4, \dots, a_{n-1}), a_n) \end{aligned}$$

A legnagyobb közös osztó fenti a) tulajdonsága alapján több szám legnagyobb közös osztója független a zárójelezéstől, és mindig visszavezethető két szám legnagyobb közös osztójának megkeresésére.

Definíció: Ha két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, akkor azokat relatív prím számoknak nevezzük.

Definíció: Az $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$ számokat relatív prím számoknak nevezzük, ha $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, ahol $n > 2$.

Definíció: Az $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$ ($n > 2$) számokat páronként relatív prím számoknak nevezzük, ha $(a_i, a_j) = 1$, ahol $i \neq j$.

Tétel Ha (a, b) létezik, akkor

$$\left(\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)} \right) = 1.$$

Tétel: Ha $a \mid c$ és $b \mid c$, valamint $(a,b) = 1$, akkor $ab \mid c$, azaz ha egy számnak két olyan osztója van, amelyek relatív prímek, akkor a számnak osztója a két osztó szorzata is.

Tétel: Az a , b és c számokra vonatkozó $(a,bc) = 1$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha $(a,b) = 1$ és $(a,c) = 1$ teljesül.

Tétel: Ha két relatív prím szorzata teljes négyzet, azaz $ab = c^2$, $(a,b) = 1$, akkor mindkét szám teljes négyzet, vagyis $a = a_1^2$, $b = b_1^2$.

Legkisebb közös többszörös

Definíció: Az a és b számok legkisebb közös többszörösének nevezzük az olyan k számot, amelyre

a) $a \mid k$, $b \mid k$, vagyis k közös többszörös és

b) ha $a \mid t$ és $b \mid t$, akkor $k \mid t$, vagyis az a és b számok legkisebb közös többszöröse osztja e két szám bármely közös többszörösét.

Két szám legkisebb közös többszörösét (röviden: a és b l.k.k.t.-e) a következőképpen jelöljük: $k = [a,b]$.

A legkisebb közös többszörös néhány tulajdonsága:

a) $[[a,b],c] = [a,[b,c]]$;

b) $[a,b] = [b,a]$;

c) $[a,b]c = [ac,be]$.

Tétel: Tetszőleges két számnak van egyértelműen meghatározott legkisebb közös többszöröse.

Megjegyzés: Több szám legkisebb közös többszöröse

Az $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$ ($n > 2$) számok legkisebb közös többszörösét $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ -nel jelöljük és így értelmezzük:

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [[a_1, a_2], a_3, \dots, a_n] = \dots = [[[a_1, a_2], a_3, \dots, a_{n-1}], a_n].$$

A legkisebb közös többszörös fenti a) tulajdonsága alapján több szám legkisebb közös többszöröse független a zárójelzéstől, és mindig visszavezethető két szám legkisebb közös többszörösének megkeresésére.

Ha egy a ($a \in \mathbf{Z}$) számot prímtényezőkre bontunk, akkor az egyenlő prímtényezőket hatványokba gyűjthetjük: $a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, ahol p_1, p_2, \dots, p_k az a szám különböző pozitív prímtényezői; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ pozitív egész kitevők és p_i az a -ban α_i -szer fordul elő. Az a számnak ezt a felírását a *kanonikus alakjának* nevezzük.

Tétel: Az $a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ kanonikus alakkal rendelkező számnak a d egész szám akkor és csak akkor osztója, ha $d = \pm p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, ahol $0 < \beta_i < \alpha_i$ $i = 1, 2, \dots, k$.

Tétel: Az $a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ kanonikus alakú szám pozitív osztóinak száma

$$d(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Tétel: Az $a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ kanonikus alakú szám pozitív osztóinak összegét $\sigma(a)$ -val jelöljük és

$$\sigma(a) = (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_k + \dots + p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Definíció: Az olyan számokat, amelyek pozitív osztóinak összege éppen a szám kétszerese, tökéletes számoknak nevezzük.

Tétel: Legyen

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad (\alpha_i \geq 0 \text{ egész}),$$

$$b = \pm p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} \quad (\beta_i \geq 0 \text{ egész}).$$

Ekkor

$$(a, b) = \pm p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)},$$

Ahol $\min(\alpha_i, \beta_i)$ az α_i és β_i számok közül a kisebbiket jelenti, ha $\alpha_i \neq \beta_i$, ha pedig $\alpha_i = \beta_i$, akkor a közös értéküket jelenti.

(Azaz: A közös tényezők közül kiválasztjuk azokat, amelyeknek a kitevőjük a legkisebb, és ezeket összeszorozzuk. Ez a szorzat lesz a kifejezések *legnagyobb közös osztója*.)

Tétel: Legyen

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad (\alpha_i \geq 0 \text{ egész}),$$

$$b = \pm p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} \quad (\beta_i \geq 0 \text{ egész})$$

Ekkor

$$[a, b] = \pm p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$$

ahol $\max(\alpha_i, \beta_i)$ az α_i és β_i számok közül a nagyobbikat jelenti, ha $\alpha_i \neq \beta_i$, és közös értéküket jelenti, ha $\alpha_i = \beta_i$.

(Azaz: A legkisebb közös többszörösben minden tényezőnek szerepelnie kell. A *legkisebb közös többszörös* olyan szorzat, amelyben minden tényező a legmagasabb hatványkitevőn szerepel.)

Tétel: Két szám, a és b legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse között fennáll az

$$ab = (a, b)[a, b]$$

összefüggés.

Maradékos osztás

Tétel: (A maradékos osztás tétele) Tetszőleges a és b ($b \neq 0$) egész számokhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott q és r egész számok, amelyekre

$$a = bq + r, \text{ ahol } 0 \leq r < |b|$$

Az előbbi egyenlőséget az a és b ($b \neq 0$) egész számokon végrehajtott maradékos osztásnak, másképpen euklideszi osztásnak nevezzük, q -t hányadosnak, r -et maradéknak, pontosabban legkisebb nemnegatív maradéknak nevezzük. (Az a az osztandó, b pedig az osztó.)

Az euklideszi algoritmus

Legyenek a és b ($b \neq 0$) egészek. A maradékos osztás tételének alkalmazásával kapunk olyan q_1, r_1 egészeket, amelyekkel

$$a = bq + r, \text{ ahol } 0 \leq r < |b|$$

teljesül. Ha $r_1 \neq 0$, akkor az euklideszi osztás a b, r_1 elempárral, azaz az osztóval és a maradékkal megismételhető. Ekkor van olyan q_2 és r_2 elem, hogy

$$b = r_1q_2 + r_2, \text{ ahol } 0 \leq r_2 < r_1$$

Ha $r_2 \neq 0$, akkor ismételjük meg az euklideszi osztást az r_1 és r_2 elempárral. Folytassuk ezt mindaddig, amíg maradékul zérust nem kapunk. Tegyük fel, hogy az $n+1$ -edik lépésben kapunk először 0 maradékot. Így az euklideszi osztásoknak a következő sorozatát kapjuk:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \text{ ahol } 0 \leq r_1 < |b| \\ b &= r_1q_2 + r_2, \text{ ahol } 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \text{ ahol } 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \text{ ahol } 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + 0 \end{aligned}$$

Az euklideszi (maradékos) osztásoknak ezt az egymásutánját az a és b ($b \neq 0$) elemeken végrehajtott *euklideszi algoritmusnak* nevezzük. Azt, hogy az a és b ($b \neq 0$) számokon végrehajtott euklideszi algoritmus véges számú lépésben véget ér, azaz véges számú lépés után zérust kapunk, az biztosítja, hogy a fellépő maradékok természetes számokból álló (szigorúan) csökkenő sorozatot alkotnak, azaz

$$b > r_1 > r_2 > \dots > r_{n-1} > r_n \geq 0.$$

Az ilyen sorozat pedig csak véges hosszúságú lehet.

Tétel: Az a és b ($b \neq 0$) számokon végrehajtott euklideszi algoritmusban az utolsó 0-tól különböző r_n maradékra $r_n = (a, b)$ teljesül. Továbbá, (a, b) előállítható az a és b egy lineáris kombinációjaként, azaz van olyan $x, y \in \mathbf{R}$, hogy $ax + by = (a, b)$ teljesül.

Oszthatósági szabályok

- Egy szám pontosan akkor osztható 2-vel (5-tel, 10-zel), ha az utolsó számjegye osztható 2-vel (5-tel, 10-zel).
- Egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.
- Egy szám pontosan akkor osztható 4-gyel (25-tel, 100-zal), ha az utolsó két számjegyből alkotott szám osztható 4-gyel (25-tel, 100-zal).
- Egy szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal, azaz páros és, és számjegyeinek összege osztható 3-mal.
- Egy szám akkor és csakis akkor osztható 7-tel, ha a szám számjegyeit rendre az 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3 -2...sorozat elemeivel megszorozva, és a szorzatok összegét véve az összeg osztható 7-tel.
- Egy szám pontosan akkor osztható 8-cal (125-tel, 1000-rel), ha az utolsó három számjegyből alkotott szám osztható 8-cal (125-tel, 1000-rel).
- Egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel.
- Egy szám akkor és csakis akkor osztható 11-gyel, ha váltakozó előjellel vett számjegyeinek összege osztható 11-gyel.
- Egy szám pontosan akkor osztható 16-tal (625-tel, 10000-rel), ha az utolsó négy számjegyből alkotott szám osztható 16-tal (625-tel, 10000-rel).

FELADATOK

1. feladat

(OKTV, 1995-1996, II. kategória, második forduló)

Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek hatszor annyi hattal osztható osztója van, mint hattal nem osztható?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a keresett szám $N=2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot t$, ahol α és β pozitív egészek, t pedig sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható pozitív egész, és legyen t osztóinak száma $d(t)$.

A 6-tal osztható osztók $2^{\alpha_i} \cdot 3^{\beta_j} \cdot t_k$ alakúak, ahol $\alpha_i = 1, 2, \dots, \alpha$; $\beta_j = 1, 2, \dots, \beta$; t_k pedig t osztója ($k=1, 2, \dots, d(t)$).

A 6-tal nem osztható osztók három csoportba oszthatók:

- 1.) 2-vel oszthatók, de 3-mal nem oszthatók; ezek száma $\alpha \cdot d(t)$;
- 2.) 3-mal oszthatók, de 2-vel nem oszthatók; ezek száma $\beta \cdot d(t)$;
- 3.) sem 2-vel, sem 3-mal nem oszthatók; ezek száma $d(t)$.

A feladat feltétele szerint

$$\alpha \cdot \beta \cdot d(t) = 6 \cdot (\alpha \cdot d(t) + \beta \cdot d(t) + d(t))$$

Osszuk el mindkét oldalát $d(t)$ -vel. Rendezzük át az egyenletet szorzatalakba:

$$\alpha \cdot \beta = 6\alpha + 6\beta + 6,$$

$$(\alpha - 6)(\beta - 6) = 42.$$

42 szorzattá $1 \cdot 42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$ alakban bontható fel. Mivel a legkisebb N -et keressük, 3 kitevője kisebb 2 kitevőjénél, tehát $\alpha > \beta$, ezért α és β lehetséges értékei:

$\alpha-6$	42	21	14	7
$\beta-6$	1	2	3	6
α	48	27	20	13
β	7	8	9	12

Minthogy $2^{48} \cdot 3^7 > 2^{27} \cdot 3^8 > 2^{20} \cdot 3^9 > 2^{13} \cdot 3^{12}$, a legkisebb N esetén $\alpha=13$, $\beta=12$, $t=1$; a minimális N ezért

$$N = 2^{13} \cdot 3^{12} = 2 \cdot 6^{12} = 4 \cdot 353 \cdot 564 \cdot 672.$$

2. feladat

(KöMaL, 1990. február)

A tízes számrendszerben felírt $(n+1)$ jegyű $A = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ szám fordítottján az $A^* = a_0 a_1 \dots a_n$ számot értjük. (A 759 fordítottja tehát 957, a 980 fordítottja pedig 89.)

Keressük meg azokat a négyjegyű számokat, amelyek „megfordulnak”, ha 9-cel szorozzuk őket, tehát amelyekre $9A = A^*$.

Megoldás: Nyilván $1000 \leq A \leq 1111$, hiszen A^* legfeljebb négyjegyű, és ha $A > 1111$ akkor $9A$ már ötjegyű. Ezért

$$9000 \leq 9A \leq 9999,$$

így A^* pontosan négyjegyű, első jegye 9 tehát A utolsó jegye is 9. A^* osztható 9-cel, így A is, ezért jegyeinek összege tehát osztható 9-cel. Ez azt jelenti, hogy A első három számjegyének összege is osztható 9-cel. Mivel A első jegye 1, második jegye pedig 0 vagy 1 így harmadik jegye 8, vagy 7. Az utóbbi esetben azonban $A = 1179$ lenne, ami túl nagy. Az egyetlen lehetőség tehát $A = 1089$, amire valóban teljesül a feltétel, hiszen $9 \cdot 1089 = 9801$.

3. feladat

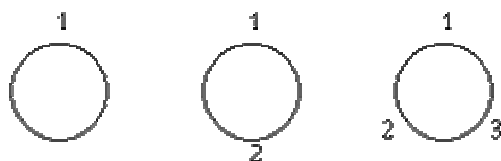
(KöMaL, 2000. január)

Az első n pozitív egész számot egy kör kerületén úgy szeretnénk elhelyezni, hogy bármely két szomszédos szám összege osztható legyen az óramutató járása szerint közvetlenül utánuk álló számmal. Milyen n -re lehetséges ez?

Megoldás: Először bebizonyítjuk, hogy nem állhat egymás után két páros szám. Legyen a , b és c három egymás utáni szám, és tegyük fel, hogy b és c páros. A feltétel szerint c osztója $(a+b)$ -nek, ezért $a+b$ és ezáltal a is páros. Azt kaptuk, hogy ha valahol egymás után két páros szám áll, akkor a közvetlenül előttük álló szám is páros. Visszafelé lépkedve pedig láthatjuk, hogy az összes szám páros, ami ellentmondás.

Másodszor azt bizonyítjuk be, hogy egy páros szám előtt két páratlan számnak kell állni. Legyen ismét a , b és c három egymás utáni szám, és tegyük fel, hogy c páros. Mint láttuk, b csak páratlan lehet. Viszont ezúttal is a páros c szám osztója $(a+b)$ -nek, ezért $a+b$ páros és a páratlan. Ha tehát c páros, akkor a és b páratlan.

Utóbbi eredményünkből következik, hogy a kör kerületén legalább kétszer annyi páratlan szám áll, mint páros. Viszont a páratlan számok száma legfeljebb csak 1-gyel nagyobb a páros számok számánál, ezért legfeljebb csak egy páros szám lehet; n értéke legfeljebb 3.



Ha $n=1$ vagy 3, akkor a kívánt felírás lehetséges, sőt lényegében egyértelmű; lásd a bal- és a jobboldali ábrát. (Az $n=1$ esetben mondhatjuk azt, hogy körben haladva az 1, 1, 1 számok egymás után következnek, és az $1+1=2$ -nek osztója az 1.) Ha $n=2$, akkor is csak egyféleképpen írhatók fel a kör körül az 1, 2 számok, de most az $1+2=3$ -nak nem osztója a 2.

Tehát $n=1$ és $n=3$ esetén írhatók fel a számok a kör kerületén a feltételeknek megfelelően.

4. feladat

(KöMaL, 1998. március)

Van -e olyan pozitív egész szám, melyre $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ azaz $n!$ pontosan 100 nullára végződik?

Megoldás: A feltétel azt jelenti, hogy $n!$ 10-nek pontosan 100-adik hatványával legyen osztható. Mivel 10-nek a prímtényezős felbontása $2 \cdot 5$, ezért ez pontosan akkor teljesül, ha $n!$ prímtényezős felbontásában a 2 és az 5 egyike pontosan 100-adik, a másikuk pedig legalább 100-adik hatványon szerepel. Várható, hogy 5 szerepel kisebb hatványon, ezért először azt nézzük meg, hogy mikor lesz 5-nek a kitevője 100.

Mivel minden ötödik természetes szám osztható 5-tel, ezért az n -ig fellépő számok szorzata csak úgy lehet pontosan 5^{100} -al osztható, ha n -ig legfeljebb 100 darab 5-tel osztható szám van, azaz ha $n \leq 500$.

Írjuk fel most n -et „ötös számrendszerben”, azaz $n = a + 5b + 25c + 125d + 625e + \dots$, ahol a szereplő együtthatók nemnegatív 5-nél kisebb egész számok (ilyen felírás a maradékos osztás alapján minden pozitív n -re létezik). Mivel $n \leq 500$, ezért ebben a felírásban csak az első négy tag lehet 0-tól különböző: $n = a + 5b + 25c + 125d$.

Nézzük meg n -ig hány szám osztható 5-tel, 25-tel, 125-tel. 5-tel minden ötödik, 25-tel minden huszonötödik, 125-tel minden százhuszonötödik. Ezek száma tehát rendre $b + 5c + 25d, c + 5d, d$.

A szorzatban tehát $b + 5c + 25d$ -szer lép fel tényezőként 5, $c + 5d$ -szer egy újabb 5-ös faktor, és d -szer még egy ötös faktor. Így a fellépő 5-ös faktorok számára:

$$(b + 5c + 25d) + (c + 5d) + d = b + 6c + 31d = 100$$

teljesül.

$d > 3$ lehetetlen, mert $31 \cdot 4 > 100$. Mivel $b, c > 5$, ezért $d < 3$ sem lehet, mert $4 + 24 + 62 = 90 < 100$. A $d = 3$ esetben azt kapjuk, hogy $b + 6c = 100 - 93 = 7$, aminek nyilvánvalóan egyetlen megoldása $b = c = 1$. Ebből $n = a + 5 + 25 + 325 = 405 + a$. Eszerint a szóba jövő számok $n = 405, 406, 407, 408, 409$.

Mivel 405-ig több, mint 200 páros szám van, ezért ezek mindegyikére az $n!$ osztható 2^{100} -al is. Ezek tehát valóban megfelelnek a feladat követelményeinek. Ha viszont $n > 409$, akkor egy újabb 5-ös faktor lép fel, más megoldás tehát nincs.

5. feladat

(OKTV, 1996-1997, II. kategória, második forduló)

Legyen s pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy s -nek van olyan egész számú többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyek összege s -sel egyenlő.

Megoldás: Állításunkat legegyszerűbben úgy bizonyíthatjuk be, hogy előállítjuk s -nek olyan többszörösét, amelynek jegyei: s darab 1-es, a többi jegyen pedig 0, vagy pedig csupán s darab 1-esből áll. Ehhez felhasználjuk, hogy egy pozitív egész s -sel való osztási maradékai csak s -félék lehetnek: $0, 1, 2, \dots, s-1$. Ezért az

$$(1) \quad 1, 10, 10^2, 10^3, \dots, 10^k, \dots$$

számok között végtelen sok olyan van, amelyeknek s -sel való osztási maradékai egyenlők; legyen ez a maradék m . Az ilyen számok $sq+m$ alakúak, ahol q nemnegatív egész. Válasszunk ki közülük s darabot, és adjuk ezeket össze:

$$(2) \quad (sq_1 + m) + (sq_2 + m) + \dots + (sq_s + m) = s(q_1 + q_2 + \dots + q_s + m)$$

tehát összegük s többszöröse. Viszont az (1) alatti számok mindegyikében pontosan egy egyes szám van, méghozzá mindben különböző helyi értékű helyen, ezért az s darab szám összegében pontosan s darab egyes lesz, a többi jegy (ha van ilyen) mind nulla; a (2) alatti szám ezért kielégíti a feladat követelményét.

6. feladat

(OKTV, 1996-1997, II. kategória, második forduló)

2000 különböző pozitív egész szám fele páros, fele pedig páratlan; összegük kisebb $3\,000\,000$ -nál. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük 3-mal osztható.

Megoldás: Állítsuk elő a feltételeket kielégítő legkisebb 2000 olyan szám összegét, amelyek között nincs 3-mal osztható, azaz az 1-től 3000-ig terjedő, 3-mal nem osztható számok összegét:

$$\begin{aligned} S &= (1 + 2 + \dots + 3000) - (3 + 6 + \dots + 3000) = (1 + 2 + \dots + 3000) - 3(1 + 2 + \dots + 1000) \\ &= \frac{1}{2}(3000 \cdot 3001) - \frac{3}{2}(1000 \cdot 1001) = 3\,000\,000 \end{aligned}$$

Ez az összeg nem kisebb 3 milliónál, és ezért egyetlen olyan 2000 pozitív egészből álló összeg sem, amely nem tartalmaz 3-mal osztható tagot. Ezért 3 milliónál kisebb összeget csak úgy kaphatunk, hogy a fenti összegben valamelyik tagot kicseréljük egy nála kisebb, vele azonos párosságú, 3-mal osztható számmal.

A feltételeket kielégítő 2000 szám között tehát szükségképpen kell lennie 3-mal osztható számnak.

7. feladat

(OKTV, 1997, 3. forduló)

Legyen n pozitív egész. Milyen n -ekre teljesül, hogy

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2,$$

ahol d_1, d_2, d_3, d_4 az n szám négy legkisebb pozitív egész osztója?

Megoldás: n nem lehet páratlan, mert akkor minden osztója páratlan lenne; négy páratlan szám összege viszont páros.

n nem lehet 4-gyel osztható. Ugyanis, mivel n páros, szükségképpen $d_1 = 1, d_2 = 2$; ha 4-gyel osztható lenne, 4 is a legkisebb négy osztó közé tartoznék, hiszen 4-nél kisebb osztója n -nek legfeljebb 1, 2 és 3 lehet; legyen pl. $d_3 = 4$. Ekkor

$$n = 1^2 + 2^2 + 4^2 + d_4^2 = 21 + d_4^2.$$

Minthogy n páros, d_4 -nek páratlannak kell lennie és így $d_4^2 = 4k+1$. De ezzel $n = 4(k+5)+2$, ami nem osztható 4-gyel, és így ellentmondásra jutottunk.

n páros volta miatt d_3 és d_4 közül az egyiknek párosnak, a másiknak páratlannak kell lennie, legyen pl. $d_3 = p$ páratlan, $d_4 = 2p'$. Itt p' -nek a d_1, d_2, d_3 egyikével egyeznie kell, különben $p' < d_4$ miatt nem lehetne $2p'$ a negyedik legkisebb osztó. Ezért $p=p'$, hiszen az előbbieket miatt $p' \neq 2$ és $p' \neq 1$.

$$n = 1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 = 5 + 5p^2.$$

Mivel p osztója n -nek, 5-nek is osztója, tehát $p \neq 1$ miatt csak $p=5$ lehetséges. Ennélfogva az egyedül lehetséges előállítás:

$$n = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130,$$

és ez valóban ki is elégíti a feladat feltételeit, mivel $130=2 \cdot 5 \cdot 13$ miatt 130 legkisebb négy osztója

1, 2, 5, 10.

8. feladat

(OKTV, 1995-1996, III. kategória, második forduló)

Mutassuk meg, hogy az $n!+1, \dots, n!+n$ számok mindegyikének van olyan prímosztója, amely a többi $n-1$ szám egyikének sem osztója.

Megoldás: Legyen $1 \leq k \leq n$. Ekkor $n!+k > k$ miatt választhatunk olyan p prímszámot, hogy $n!+k$ a p -nek magasabb hatványával osztható, mint k . Legyen például $p^\alpha | k$, $p^{\alpha+1} \nmid k$, és $p^{\alpha+1} | n!+k$ (ahol $\alpha \geq 0$ egész). Állítjuk, hogy p nem osztója az $n!+t$ ($t=1, 2, \dots, n, t \neq k$) számoknak.

Ha $p > n$, akkor ez nyilvánvaló, hiszen ekkor n darab egymás utáni szám közül p legfeljebb egynek lehet osztója. Tegyük fel tehát, hogy $p \leq n$. Ha még $p | n!+t$ is fennállna (ahol $1 \leq t \leq n$ és $t \neq k$), akkor $p | n!$ miatt $p | t$, és így $kt | n!$ miatt $p^{\alpha+1} | n!$ következne, ami ellentmond annak, hogy $p^{\alpha+1} | n!+k$ és $p^{\alpha+1} \nmid k$.

9. feladat

Mutassuk meg, hogy $a^2 + b^2$ csak akkor osztható héttel, ha a is és b is osztható héttel!

Megoldás: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$. Ha a és b is osztható héttel akkor az összegük és szorzatuk is osztható héttel, ha az egyenlet jobb oldala osztható héttel, akkor a baloldala is osztható.

Ha a osztható héttel, de b nem osztható, akkor az összegük nem osztható a szorzatuk osztható, az egyenlet jobboldala nem osztható, így a baloldala sem.

Ha a és b sem osztható héttel, akkor az összegük osztható lehet, a szorzatuk nem, így az egyenlet jobboldala nem osztható, ezért a baloldala sem.

A fentiek alapján tehát $a^2 + b^2$ csak akkor osztható héttel, ha a is és b is osztható héttel.

10. feladat

(KöMaL, 2000. január)

Melyik az a legkisebb 28-cal osztható pozitív egész szám, amelynek a 10-es számrendszerbeli alakja 28-re végződik, és számjegyeinek összege 28?

Megoldás: Legyen a keresett szám $100B+28$. Nyilván $100B$ is osztható 28-cal, azaz B osztható 7-tel: továbbá B számjegyeinek összege $28 - (2+8) = 18$ lévén, B osztható 9-cel is, tehát 63 többszöröse. A 63 néhány többsége: 63, 126, 189. Látható, hogy ezek közül a legkisebb olyan, amelyben a számjegyek összege 18, a 189. Tehát a feltételeket kielégítő legkisebb szám $189 \cdot 100 + 28 = 18928$.

11. feladat

(KöMaL, 1995. január)

Legyen n természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$256^{2n} \cdot 7^{2n} - 168^{2n} - 32^{2n} + 3^{2n}$$

osztható 1995-tel.

Megoldás: Jelöljük a feladatban szereplő kifejezést S -sel. Ekkor

$$\begin{aligned} S &= 256^{2n} \cdot 7^{2n} - 168^{2n} - 32^{2n} + 3^{2n} = (2^8)^{2n} \cdot 7^{2n} - (2^3)^{2n} - (2^5)^{2n} + 3^{2n} = \\ &= (2^3)^{2n} \cdot 7^{2n} ((2^5)^{2n} - 3^{2n}) - ((2^5)^{2n} - 3^{2n}) = ((2^3)^{2n} \cdot 7^{2n} - 1)((2^5)^{2n} - 3^{2n}) = (56^{2n} - 1)(32^{2n} - 3^{2n}). \end{aligned}$$

A közismert

$$a^{2n} - b^{2n} = (a^2 - b^2)(a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + \dots + b^{2n-2}) = (a-b)(a+b)(a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + \dots + b^{2n-2})$$

azonosság mutatja, hogy $a+b \mid a^{2n} - b^{2n}$, és így

$$56+1 = 57 \mid 56^{2n} \quad 32+3 = 35 \mid 32^{2n} - 3^{2n}$$

57 és 35 egymáshoz relatív prímekek, ezért szorzatuk osztója az előbbi két tényező szorzatának, vagyis

$$35 \cdot 57 = 1995 \cdot S.$$

12. feladat

(KöMaL, 1995. április)

Egy kilenccel osztható 1995 jegyű szám jegyeinek összegét jelölje a . Ennek is összeadjuk a jegyeit, az eredmény legyen b . Mennyi lehet b jegyeinek összege?

Megoldás: Az a értéke akkor a legnagyobb, ha az eredeti szám 1995 kilencesből áll, tehát $a \leq 1995 \cdot 9 = 17955$. Ezek szerint az a vagy legfeljebb négyjegyű, vagy ötjegyű és az első jegye 1. Emiatt $b \leq 1 + 4 \cdot 9 = 37$. Látható, hogy b jegyeinek összege kisebb, mint $3+9=12$, ugyanakkor határozottan pozitív, hiszen nemnulla számból indultunk ki (amennyiben a nullát is 1995-jegyű számnak tekintjük, akkor b jegyeinek összege 0 is lehetne.)

Mivel az eredeti szám 9-cel osztható volt, ezért jegyeinek összeg is az. Így a is, b is és b jegyeinek összege is 9-cel osztható. Ez viszont az előbb igazolt korlátokkal együtt azt jelenti, hogy b jegyeinek összeg 9.

13. feladat

(Győr – Moson – Sopron Megyei Matematikai Verseny, 1999.)

Igazoljuk, ha P és Q háromnál nagyobb prímszámok, akkor $P^2 - Q^2$ osztható 24-gyel!

Megoldás: Vizsgáljuk meg először 3-mal való oszthatóság szerint.

Ha P és Q háromnál nagyobb prímszámok, akkor négyzeteik hárommal való osztási maradéka 1, ugyanis

$$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

Így viszont különbségük osztható 3-mal.

Nézzük most a 8-cal való oszthatóság szerint.

Ha P és Q háromnál nagyobb prímszámok, akkor négyzeteik nyolccal való osztási maradéka 1, ugyanis

$$(8k + 1)^2 = 64k^2 + 16k + 1 = 8(8k^2 + 2k) + 1$$

$$(8k + 3)^2 = 64k^2 + 48k + 9 = 8(8k^2 + 6k + 1) + 1$$

$$(8k + 5)^2 = 64k^2 + 80k + 25 = 8(8k^2 + 10k + 3) + 1$$

$$(8k + 7)^2 = 64k^2 + 112k + 49 = 8(8k^2 + 14k + 6) + 1$$

Így viszont különbségük osztható 8-cal.

Kaptuk, hogy kifejezésünk osztható 3-mal és 8-cal is, mivel ezek relatív prímek, ezért osztható 24-gyel is.

14. feladat

(KöMaL, 1996. szeptember)

Az 1996-ot felbontottuk néhány egész szám összegére. Milyen maradékot ad 6-tal osztva a számok köbeinek összege?

Megoldás: Bármely a egészre $a^3 - a = (a - 1)a(a + 1)$ osztható 6-tal, mert a jobb oldalon álló szorzat három tényezőjének egyike osztható 3-mal, és a három tényező között biztosan van páros.

Tehát, ha $1996 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, akkor

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 - 1996 = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_n^3 - a_n)$$

biztosan osztható 6-tal. Így $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ 6-tal osztva ugyanazt a maradékot adja, mint 1996, vagyis 4-et.

15. feladat

(OKTV, 1996-1997, II. kategória, harmadik forduló)

Hány olyan számhármast létezik, amelyek egy pozitív egész hányadosú mértani sorozat egymást követő elemei, és amelynek minden eleme pozitív egész osztója $N=90\,000$ -nek?

Hány ilyen számhármast létezik $N=30^{10}$ esetén?

Megoldás: $90\,000$ prímtényezős felbontása $2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^2$, ezért minden osztója $2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 3^\gamma$ alakú, ahol $0 \leq \alpha \leq 4$, $0 \leq \beta \leq 4$, $0 \leq \gamma \leq 2$. Legyen a szóban forgó számhármast x, y, z , a hányados pedig q . Ekkor $y=qx$, $z=q^2x$. Mivel z osztója $90\,000$ -nek, ezért q és q^2 is osztója, prímtényezőik így csak 2, 5 és 3 lehetnek; kitevője legfeljebb 2, 3 kitevője legfeljebb 1 lehet. Felhasználva, hogy $2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 3^\gamma$ osztóinak száma $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$, q lehetséges értékeinek a száma $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

Ha kiválasztunk egy q értéket, akkor a számhármast kezdő eleme osztója $N/Nq^2 - q^2$ nek, és $N/Nq^2 - q^2$ minden osztója lehet kezdő elem. Egy adott q mellett a kezdő elem a számhármast már egyértelműen meghatározza, ezért rögzített q esetén a számhármastok száma $N/Nq^2 - q^2$ osztóinak a számával egyenlő.

Állítsuk össze a szóba jövő q értékekhez tartozó számhármastok (azaz $N/Nq^2 - q^2$ osztóinak) a számát.

q	$N/Nq^2 - q^2$	$N/Nq^2 - q^2$ osztói száma
1	$2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^2$	$5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$
2	$2^2 \cdot 5^4 \cdot 3^2$	$3 \cdot 5 \cdot 3 = 45$
4	$2^0 \cdot 5^4 \cdot 3^2$	$1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$
5	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 3^2$	$5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$

10	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2$	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
20	$2^0 \cdot 5^2 \cdot 3^2$	$1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$
25	$2^4 \cdot 5^0 \cdot 3^2$	$5 \cdot 1 \cdot 3 = 15$
50	$2^2 \cdot 5^0 \cdot 3^2$	$3 \cdot 1 \cdot 3 = 9$
100	$2^0 \cdot 5^0 \cdot 3^2$	$1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$
3	$2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^0$	$5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$
6	$2^2 \cdot 5^4 \cdot 3^0$	$3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$
12	$2^2 \cdot 5^4 \cdot 3^0$	$1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$
15	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 3^0$	$5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$
30	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^0$	$3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$
60	$2^0 \cdot 5^2 \cdot 3^0$	$1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$
75	$2^4 \cdot 5^0 \cdot 3^0$	$5 \cdot 1 \cdot 1 = 5$
150	$2^2 \cdot 5^0 \cdot 3^0$	$3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$
300	$2^0 \cdot 5^0 \cdot 3^0$	$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Ez összesen 324 lehetőség, ennyi tehát a mértani sorozatok száma.

Megfigyelhetjük, hogy táblázatunk utolsó oszlopaiban az 1, 3, 5 számok ismétléses variációi állnak azzal a megszorítással, hogy az utolsó helyre csak 1 vagy 3 kerülhet. Ez közvetlen következménye annak a ténynek, hogy $2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^2$ -t négyzetszámmal osztva a hányados $2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1} \cdot 3^{\gamma_1}$ alakú, ahol $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ páros számok, ezek osztóinak a száma így páratlan számok szorzata. A táblázatok utolsó oszlopaiban levő számok összegét az

$$(1+3+5)(1+3+5)(1+3)$$

szorzat is előállítja, hiszen kifejtve éppen a szóban forgó háromtényezős szorzatokat kapjuk meg. Ez az észrevétel lehetőséget ad arra, hogy egyszerűen válaszoljunk a feladatban feltett második kérdésre.

$N=3^{10}=2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ esetében $N/Nq^2 - q^2 2^\alpha \cdot 3^\beta$ alakú, ahol

$0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 10$, α, β, γ páros.

$N/Nq^2 - q^2$ osztóinak a száma $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$, a zárójelekben itt az 1-től 11-ig terjedő páratlan számok állhatnak. Az osztók számának az összegét előbbi megállapításunknak megfelelően itt az

$$(1+3+ \dots +11) (1+3+ \dots +11) (1+3+ \dots +11)$$

szorzat adja, ami $36^6=46\,656$; ennyi a háromelemű számtani sorozatok száma.

16. feladat

(Krüschák József verseny, 1990)

Legyen p páratlan prímszám, n pedig pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy pn^2 -nek legfeljebb egy olyan d osztója van, amelyikre $d+n^2$ négyzetszám.

Megoldás: A számelmélet alaptétele értelmében d prímszámhatványok szorzatára történő felbontásában csak azok a prímszámok szerepelhetnek, amelyek pn^2 felbontásában szerepelnek, és legfeljebb akkora hatványon, mint az utóbbi felbontásában. Így két esetet különböztethetünk meg. Ha p nem szerepel d felbontásában, akkor d osztója n^2 -nek is, ha pedig szerepel, akkor $d = pd'$, ahol d' osztója n^2 -nek.

Feltétel szerint van olyan m pozitív egész, amelyre az első esetben

$$d+n^2 = m^2, \text{ a másodikban } pd'+n^2 = m^2.$$

Véve d , illetőleg d' egy tetszés szerinti q prím osztóját, azzal n^2 és m^2 is osztható. Mivel a prímtenyezős felbontás lényegében egyértelmű, ez csak úgy lehetséges, ha az alapok is oszthatók q -val, és így n^2 és m^2 is osztható q^2 -tel.

Ekkor d , illetőleg d' is osztható q^2 -tel, kivéve a második esetben, ha $q = p$. Az említett eset kivételével tehát egyszerűsíthetünk q^2 -tel, és

$d^* + n'^2 = m^2$, illetőleg $pd^* + n'^2 = m'^2$ alakú összefüggésekhez jutunk, ahol d^* osztója n'^2 -nek.

Ha a második esetben $q = p$, d akkor is osztható q^2 -tel, de akkor q^2 -tel osztva a fenti első típusú egyenlethez jutunk, ahol d^* most is osztója lesz n'^2 -nek.

Az eljárást megismételhetjük sorra d^* minden prím osztójára, és így azt kapjuk, hogy van olyan pozitív egész n_1 és m_1 , amelyekkel fennáll, hogy

$$(1) \quad 1 + n_1^2 = m_1^2, \text{ vagy } p + n_1^2 = m_1^2.$$

Az eljárás során minden lépésben n egy q prím osztójának a négyzetével egyszerűsítettünk, tehát végül is egy olyan n_2 egésszel, amelyekre $n = n_1 n_2$, és $d = n_2^2$, illetőleg $d = p n_2^2$.

Az (1) alatti első egyenlet nem állhat fenn, mert két pozitív négyzetszám különbsége legalább 3. A második egyenlőségéből

$$p = (m_1 + n_1)(m_1 - n_1).$$

Mivel p prímszám, így ebből

$$m_1 + n_1 = p, \quad m_1 - n_1 = 1, \quad \text{tehát } 2n_1 = p - 1.$$

Ezzel azt kaptuk, hogy a feladat feltételei akkor teljesülhetnek, ha

$$n = \frac{1}{2}(p-1)n_2 \text{ és } d = p n_2^2.$$

Ezekre

$$d + n^2 = \left(p + \left(\frac{1}{2}(p-1) \right)^2 \right) n'^2 = \left(\frac{1}{2}(p+1)n' \right)^2$$

valóban négyzetszám.

Eszerint valóban legfeljebb egy megfelelő d van, és pedig akkor van ilyen, ha n osztható $\frac{1}{2}(p-1)$ -gyel.

Megjegyzés: Nem használtuk ki a megoldás során, hogy p páratlan, viszont $p=2$ esetben az (1) alatti második egyenlőség sem állhat fenn, tehát nincs a feladat feltételeit kielégítő d szám. Ennek bizonyítását kívánta az 1953. évi verseny 2. feladata.

6.4. Kongruenciák

Definíció: Legyen $m \in \mathbf{N}$ rögzített érték, $a, b \in \mathbf{Z}$. a kongruens b -vel modulo m , ha $m \mid a - b$. Ezt a tényt $a \equiv b \pmod{m}$ -mel, vagy $a \equiv b \ (m)$ -mel jelöljük. Ha $m \nmid a - b$ akkor a két számot inkongruensnek nevezzük, és ezt $a \not\equiv b \pmod{m}$ -mel jelöljük.

Megjegyzés: $a \equiv b \pmod{m}$ pontosan akkor teljesül, ha a és b m -mel való osztási maradéka azonos.

A kongruenciák tulajdonságai

Tétel: Legyenek a, b, c, m egész számok. Ekkor érvényesek rájuk a következők:

- a) *Reflexivitás:* $a \equiv a \pmod{m}$;
- b) *Szimmetria:* ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $b \equiv a \pmod{m}$;
- c) *Tranzitivitás:* ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $b \equiv c \pmod{m}$, akkor $a \equiv c \pmod{m}$.

Műveletek kongruenciákkal

Tétel: Legyenek a, b, c, d, m egész számok, valamint $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$. Ekkor teljesülnek a következők:

- a) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;
- b) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$;
- c) $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Tétel: Legyenek a, b, c, m egész számok, valamint $a \equiv b \pmod{m}$. Ekkor teljesülnek a következők:

a) $a + c \equiv b + c \pmod{m}$;

b) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

Tétel: Legyenek a, b, c, m egész számok. Ekkor teljesülnek a következők:

a) $ac \equiv bc \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{(m, c)}}$;

b) $(m, c) = 1$ esetén ha $ac \equiv bc \pmod{m}$, akkor $a \equiv b \pmod{m}$;

c) Ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $ac \equiv bc \pmod{mc}$.

FELADATOK

1. feladat

(KöMaL, 1996. szeptember)

Egy konvex poliédernek legalább 9 csúcsa van, a csúcsok koordinátái egész számok. Mulassuk meg, hogy található a poliéderben olyan, a csúcsoktól különböző pont, amelynek koordinátái szintén egész számok.

Megoldás: A tér minden egész koordinátájú pontjához rendeljük hozzá azt a P^1 pontot, amelynek koordinátái az x_1, x_2, x_3 számok kettővel való (nemnegatív) osztási maradékai. Ezen módon nyolcféle P^1 pontot kaphatunk. Mivel poliéderünknek legalább 9 csúcsa van, lesz köztük két olyan, amelyekhez ugyanazt a pontot rendeltük. E két csúcsot összekötő szakasz felezőpontja a konvex poliédernek csúcstól különböző pontja, és koordinátái egész számok; azaz eleget tesz a kikötéseknek.

2. feladat

(KöMaL, 1996. szeptember)

Legfeljebb hány olyan hónap lehet egy évben, amelyben öt vasárnap van?

Megoldás: Egy hónap napjainak száma 28 és 31 között változik, vagyis minden hónapban legalább 4 vasárnap van, 5-nél több viszont egyetlen hónapban sincsen. Egy év $365 = 52 \cdot 7 + 1$ napból áll, vagy pedig - szökőév esetén - $366 = 52 \cdot 7 + 2$ napból, így egy évben 52 vagy 53 vasárnap van.

A tizenkét hónap mindegyike tartalmaz tehát legalább 4 vasárnapot. Az így adódó 48-on túl fennmaradó 4, illetve 5 vasárnap feltétlenül különböző hónapokra esik, mert 6 vasárnap nem lehet egy hónapban.

Ez azt jelenti, hogy legfeljebb öt olyan hónap lehet egy évben, amelyben öt vasárnap van. Ez éppen azokban az években fordul elő, amelyekben 53 vasárnap van, vagyis, ha az év első napja vasárnap, illetve szökőév esetén, ha az első nap szombat, vagy vasárnap.

3. feladat

(OKTV, 2004-2005, II. kategória, első forduló)

Igazoljuk, hogy 102 szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy azok összege vagy különbsége osztható legyen 200-zal.

Megoldás: A számokat 200-zal való osztási maradékuk szerint vizsgáljuk, ezek a maradékok: 0, 1, 2, ..., 199.

Felhasználjuk, hogy ha két szám maradéka egyenlő, akkor különbségük, ha pedig maradékaik összege 200, akkor különbségük osztható 200-zal.

Ha a 102 szám között van két egyenlő maradékú, akkor az előzőek szerint összegük osztható 200-zal, tehát készen vagyunk.

A továbbiakban ezért feltehetjük, hogy a 102 szám között nincs két azonos maradékú.

Készítsünk 101 darab skatulyát, és címkézzük meg őket a következő módon: az első címkéje legyen nulla, az utolsóé 100, a többié pedig két olyan maradék, melyek összege 200.

	1.	2.	3.	...	101.
Címke:	0	1; 199	2; 198		100

Helyezzük most be mind a 102 számot abba a skatulyába, melynek címkéje a szám 200-zal való osztási maradékát tartalmazza. Mivel 102 szám van, de csak 101 skatulya, így lesz olyan skatulya, amelybe két szám fog kerülni. Ezeknek maradékuk különböző, de maradékaik összege 200, tehát összegük osztható 200-zal. Állításunkat ezzel igazoltuk.

4. feladat

(Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák, 1995)

Legyen p páratlan prímszám. Határozzuk meg az $\{1, 2, \dots, 2p\}$ halmaz olyan A részhalmazainak a számát, amelyekre teljesül, hogy A -nak p eleme van, A elemeinek az összege osztható p -vel.

Megoldás: Vágjuk szét a $H=\{1,2,\dots,2p\}$ halmazt két p elemű részhalmazra:

$$A = \{1,2,\dots,p\}, \quad B = \{p+1, p+2,\dots,2p\}$$

Legyen most C a H -nak A -tól és B -től különböző p elemű részhalmaza; ez szükségképpen tartalmaz A -beli és B -beli elemeket is, legyenek az A -beli elemei

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (1 \leq n \leq p-1).$$

Adjunk most hozzá C -nek minden A -beli eleméhez 1-et, és vegyük a kapott számok p -vel való osztási maradékát (azaz: a számokat mod p írjuk fel), a 0 maradék helyett azonban p -t szerepeltessünk. Az így módosított C részhalmazt jelölje C_1 .

Hasonlóan: ha az a_i számokhoz 2-t, 3-at, ..., p -t adunk hozzá és az előbbi értelemben mod p számolunk, rendre a C_2, C_3, \dots, C_p halmazokat kapjuk; itt nyilván C_p azonos C -vel. A C_i -k természetesen H -nak p elemű részhalmazai és egy osztályt alkotnak, közülük bármelyikből a mondott eljárással valamennyi C_i előáll és csakis a felsorolt C_i részhalmazok, más C -ből kiindulva ezek nem kaphatók meg.

Jelölje H egy tetszőleges p elemű C részhalmazában az elemek összegét $s(C)$; pl.

$s(A) = \frac{p(p+1)}{2}$, $s(B) = s(A) + p^2$. $s(A)$ és $s(B)$ osztható p -vel, mert p páratlan. Mivel C_i és C_{i+1} elemeinek az összege n -nel különbözik, ha $i > j$

$$s(C_i) + s(C_j) \equiv (i-j)n \pmod{p}$$

Viszont $i-j < p$ és $n < p$ miatt $(i-j)n$ nem osztható p -vel, ezért az $s(C_i)$ számok különböző maradékosztályba tartoznak mod p , s mivel a C_i részhalmazok száma éppen p , van közülük pontosan egy, amelyben $s(C_i) \equiv 0 \pmod{p}$, azaz elemeinek az összege osztható p -vel.

H -nak A -n és B -n kívül $\binom{2p}{p} - 2p$ elemű részhalmaza van, s ezek a fentiek szerint

$\frac{1}{p} \binom{2p}{p} - 2$ osztályba sorolhatók, és minden osztályban pontosan egy részhalmaz

elemösszege osztható p -vel, H olyan p elemű részhalmazainak a száma (A -val és B -vel együtt), amelyekben az elemek összege osztható p -vel:

$$\frac{\binom{2p}{p} - 2}{p} + 2.$$

6.5. Diofantikus egyenletek

Definíció: Az olyan egyenletet (egyenletrendszer), amelyben az ismeretlenek együtthatói egész számok, és az egyenlet (egyenletrendszer) alaphalmaza is az egész számok halmaza, diofantikus (diofantoszi) egyenletnek (egyenletrendszernek) nevezzük.

Definíció: Az $ax = b$ ($a \neq 0$) egyenletet, ahol $a, b \in \mathbf{Z}$, és az alaphalmaz is a \mathbf{Z} , elsőfokú egyszemretlenes diofantoszi egyenletnek nevezzük.

Tétel: Az $ax = b$ ($a \neq 0$) diofantoszi egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha $a \mid b$, és a megoldás $a \neq 0$ esetben $x = \frac{b}{a}$.

Definíció: Az $ax + by = c$ egyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbf{Z}$ és az alaphalmaz az egész számpárok halmaza, kétismeretlenes elsőfokú diofantoszi egyenletnek nevezzük.

Tétel: Az $ax + by = c$ diofantoszi egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha a konstans tag osztható az ismeretlenek együtthatóinak legnagyobb közös osztójával, azaz $(a, b) \mid c$.

Ha egy (x_0, y_0) számpár megoldása a diofantoszi egyenletnek, akkor végtelen sok megoldása van ennek az egyenletnek, és a gyökök

$$x = x_0 + \frac{b}{(a, b)}t; \quad y = y_0 - \frac{a}{(a, b)}t;$$

alakban írhatók fel, ahol t tetszőleges egész szám.

Definíció: Az $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$ egyenletet, ahol $a_1, a_2, \dots, a_n, c \in \mathbf{Z}$ és az alaphalmaz az egész szám n -esek halmaza, n -ismeretlenes elsőfokú diofantoszi egyenletnek nevezzük.

Tétel: Az $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$ diofantoszi egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha a konstans tag osztható az ismeretlenek együtthatóinak legnagyobb közös osztójával, azaz $(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid c$.

FELADATOK

1. feladat

(KöMaL, 1995. január)

Két testvér eladta a birkanyáját. Minden birkát annyi tallérért adtak, ahány birka a nyájban eredetileg volt. A bevételen 10 talléronként osztottak. Először az idősebb testvér kapott 10 tallért, aztán a fiatalabb, majd ismét az idősebb és így tovább. Utoljára a fiatalabbnak más 10-nél kevesebb tallér jutott, ezért az idősebb neki adta a bicskáját, így ugyanakkora bevételre tettek szert. Hány tallért ért a bicska?

Megoldás: Ha a birkanyájban n birka volt, úgy a feladta szövege szerint n^2 tallért kaptak érte. Ezt így osztották szét:

idősebb testvér	fiatalabb testvér
10 tallér	10 tallér
10 tallér	10 tallér
.	.
.	.
10 tallér	m tallér ($1 \leq m \leq 9$ egész)

Tehát $n^2 = 20k + 10 + m$ ($k \geq 1$ egész). Egy tetszőleges négyzetszám 20-szal való osztási maradékai a következők lehetnek csak: 0, 1, 4, 9, 16, 5. ezek közül $10 + m = 16$ jöhet csak szóba, így $m = 6$. Jelölje b a bicska értékét; a bicskát az idősebbik testvér a fiatalabbnak adta, és így a két testvér bevétele ugyanakkora lett, vagyis:

$$10 - b = b + m,$$

innen $b = 2$.

A bicska 2 tallért ért.

2. feladat

(Krüschák József verseny, 1987)

a, b, c, d különböző pozitív egész számok, amelyekre teljesül az

$$a+b=cd$$

és az

$$ab=c+d$$

egyenlőség. Határozzuk meg az összes ilyen számnégyest.

Megoldás: Mivel a négy szám szerepe semmiben sincs kitüntetve egymáshoz képest, feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy a a legkisebb, továbbá, hogy $c < d$, tehát

$$a < b, \quad a < c < d$$

Nem lehet $a \geq 2$, mert akkor $c \geq 3$, és így

$$ab \geq 2b > a+b=cd \geq 3d > c+2d=ab+d > ab$$

kellene, hogy fennálljon, de ez lehetetlen. Eszerint

$$a=1, \quad c \geq 2 \quad \text{és} \quad d \geq c+1,$$

tehát

$$a+b=1+b=cd \geq 2d \geq c+1+d=ab+1=b+1.$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha mindenütt az egyenlőség jele érvényes, tehát

$$c=2, \quad d=c+1=3, \quad \text{és} \quad b=cd-1=5.$$

Az 1, 5 és 2, 3 számpár valóban megfelel a feltételeknek. Ezekből további 7 megfelelő számpárt kapunk, ha a párok elemeit egymás közt felcseréljük, továbbá ha a két párt megcseréljük.

Alakítsuk át a feltételi egyenlőségek felhasználásával az $(a-1)(b-1)$ szorzatot:

$$(a-1)(b-1) = ab - a - b + 1 = c + d - cd + 1 = 2 - (c-1)(d-1),$$

azaz

$$(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = 2.$$

Miután a feladat pozitív egész számokról szól, ez csak úgy állhat fenn, ha a baloldalon vagy mindkét tag 1, vagy az egyik 0, a másik 2. Az első lehetőség egyedül az $a=b=c=d=2$ esetben következik be. Ezekre teljesülnek a feladatban megkívánt egyenlőségek, de a számok nem különböznek.

A második eset akkor következik be, ha az egyik szám 1, mondjuk $a=1$, amiből következik, hogy

$$(c-1)(d-1)=2.$$

Feltehetjük, hogy $c < d$. Ekkor $c-1=1$, $d-1=2$ kell, hogy legyen, azaz $c=2$, $d=3$ és $b=1 \cdot b=c+d=5$. Ezek az értékek kielégítik a feladat összes követelményét.

3. feladat

(OKTV, 1981-1982, I. kategória, első forduló)

Hány megoldása van az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 48$$

egyenletnek a nem negatív egész számok körében, ha még azt is megkívánjuk, hogy

$$x_1 > 5, x_2 > 6, x_3 > 7, x_4 > 10$$

legyen?

Megoldás: Mivel a megoldást a nem negatív egész számok körében keressük, ezért például az $x_1 > 5$ feltétel egyenértékű $x_1 \geq 6$ -tal. A többi feltétel helyébe a következőt írhatjuk:

$$x_2 \geq 7, x_3 \geq 8, x_4 \geq 11.$$

Ezek után eredeti egyenletünket a következő alakra hozhatjuk:

$$(x_1 - 6) + (x_2 - 7) + (x_3 - 8) + (x_4 - 11) = 16$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$x_1 - 6 = y_1, x_2 - 7 = y_2, x_3 - 8 = y_3, x_4 - 11 = y_4.$$

Nyilvánvaló, hogy ahány (különböző) megoldása van az

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

egyenletnek a nem negatív egész számok körében, ugyanannyi különböző megoldása van az eredeti egyenletnek ugyancsak a nem negatív egész számok körében, amelyek eleget tesznek az ismeretlenekre kirótt nagysági feltételeknek is.

Az utolsó egyenlet megoldásait a nem negatív egész számok körében például a következő meggondolással számolhatjuk össze: Tegyük fel először, hogy $y_1 + y_2 = 0$.

Ez csak abban az egy esetben lehetséges, ha $y_1 = y_2 = 0$. Viszont ekkor y_3 és y_4 összegének 16-ot kell adni, hogy teljesüljön a négy y ismeretlen összegére előírt feltétel. Mivel y_3 -nak és y_4 -nek is nem negatív egész számnak kell lennie, ez összesen 17-féleképpen jöhet létre: ha $y_3 = 0$ és $y_4 = 16$; ha $y_3 = 1$ és $y_4 = 15$; ...; végül, ha $y_3 = 16$ és $y_4 = 0$. Ebben az első esetünkben a különböző megoldások száma tehát 1·17.

Ugyanígy okoskodással látható be, hogy $y_1 + y_2 = 1$ feltevésből indulva ki, az y ismeretleneket tartalmazó egyenletnek 2·16, egymástól és az előbbiektől is különböző megoldásához jutunk.

Tovább folytatva okoskodásunkat, valamennyi különböző, nem negatív egész megoldás számára az alábbi összeget kapjuk:

$$1 \cdot 17 + 2 \cdot 16 + \dots + 16 \cdot 2 + 17 \cdot 1.$$

Az összegzés többféleképpen történhet. Ilyen pl. az első n pozitív egész szám összegére és az első n pozitív egész szám négyzetének összegére vonatkozó, ún. zárt formulák felhasználásával, amelyekben tehát a tényezők száma független az összeg tagjainak számától:

$$\sum_{k=1}^{17} k(18-k) = \sum_{k=1}^{17} 18k - \sum_{k=1}^{17} k^2 = 18 \frac{1+17}{2} \cdot 17 - \frac{17 \cdot 18 \cdot 35}{6} = \frac{17 \cdot 18 \cdot (3 \cdot 18 - 35)}{6} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19}{6} = 969$$

Végül is azt kaptuk, hogy az eredeti egyenletnek 969 olyan különböző megoldása van a nem negatív számok körében, amelyek kielégítik az

$$x_1 > 5, x_2 > 6, x_3 > 7, x_4 > 10$$

egyenlőtlenséget is.

4. feladat

(OKTV, 1993-1994, I. kategória, első forduló)

Egy vizsgán 20 kérdésre kellett válaszolni. Az értékeléskor minden jó válasz 5 - 5 pontot ért, viszont minden rossz válasz esetén 2 - 2 pontot levontak. Ha egy kérdésre a vizsgázó nem válaszolt, akkor arra 0 pontot kapott. Így valamelyik vizsgázó 48 pontot gyűjtött.

Hány jó választ adott?

Megoldás: Legyen a jó válaszok száma j , a rossz válaszok száma r , a meg nem válaszolt kérdéseké n .

A feladat matematikai felírása:

$$(1) \quad 5 \cdot j - 2 \cdot r + 0 \cdot n = 48,$$

$$(2) \quad j + r + n = 20,$$

ahol $0 \leq j, r, n \leq 20$. (1)-ből

$$(3) \quad r = 2,5j - 24,$$

és mivel $r \geq 0$, azért

$$(4) \quad j \geq 10.$$

(3)-at (2)-be behelyettesítve és rendezve

$$n = 44 - 3,5j,$$

de mivel $n \geq 0$, azért

$$(5) \quad j \leq 12.$$

(4)-et és (5)-öt egybevetve j lehetséges értékei: 10, 11, 12. A hozzájuk tartozó r -eket és n -eket kiszámítva azt kapjuk, hogy $j=11$ nem lehet megoldás, mert ekkor r és n nem egész.

J	R	N
10	1	9
11	Nem egész	Nem egész
12	6	2

Tehát a feladatnak 2 megoldása van: $j = 10$ és $j = 12$.

5. feladat

(KöMaL, 1993. november)

Egy budapesti egyetemen a legeredményesebb tanulók kétféle ösztöndíjat pályázhatnak meg. A kiemelt ösztöndíj egyik feltétele az, hogy a legutóbbi félévben szerzett jegyek átlaga 4,5 fölött legyen. A köztársasági ösztöndíjhoz viszont legalább 4,51-os átlag szükséges.

Legalább hány osztályzatot kellene valakinek szerezni, hogy az átlaga 4,5 fölött legyen, de a 4,51-et ne érje el?

Megoldás: Legyen az osztályzatok száma n , összegük pedig s . Az, hogy az átlag 4,5 fölött van, de nem éri el a 4,51-et, azt jelenti, hogy

$$4,5 < \frac{s}{n} < 4,51.$$

Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát $2n$ -nel, és vonjunk ki $9n$ -et:

$$9n < 2s < 9,02n, \quad 0 < 2s - 9n < 0,02n.$$

A középben szereplő $2s - 9n$ egész szám. Az hogy 0-nál nagyobb azt jelenti, hogy legalább 1.

$$1 \leq 2s - 9n < 0,02n$$

amiből

$$1 < 0,02n$$

azaz

$$50 < n$$

következik. Mivel n pozitív egész szám (az osztályzatok száma), ez az egyenlőség azt jelenti, hogy legalább 51.

Ha $n=51$, akkor meg lehet választani az osztályzatokat úgy, hogy a feltétel teljesüljön.

Ha például valaki 26 darab 5-öst és 25 darab 4-est kap, akkor az átlaga

$$\frac{26 \cdot 5 + 25 \cdot 4}{51} = \frac{230}{51} \approx 4,5098.$$

A 4,5 és 4,51 közé eső átlaghoz tehát legalább 51 osztályzat szükséges.

Megjegyzés: az n nem lehet akármilyen 50-nél nagyobb szám. Ha ugyanis n páros, akkor $2s - 9n$ pozitív páros szám, így a

$$2 \leq 2s - 9n < 0,02n,$$

majd a

$$100 < n$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Az 50-nél nagyobb páratlan, illetve a 100-nál nagyobb páros n -ek azonban már valamennyien lehetségesek, mert ilyenkor s értékét meg lehet választani úgy, hogy $2s - 9n = 1$, illetve $2s - 9n = 2$ legyen. Páratlan n esetén például $\frac{n+1}{2}$ darab 5-ös és $\frac{n-1}{2}$ darab 4-es, páros n esetén $\frac{n}{2} + 1$ darab 5-ös és

$\frac{n}{2} - 1$ osztályzattal előállítható a kívánt átlag.

6. feladat

(KöMaL, 1991. szeptember)

Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi egyenletet:

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3.$$

Megoldás: Végezzük el a beszorzást és a köbreemelést, és rendezzük a tagokat a baloldalra:

$$x^2y^2 + 3x^2y - 3xy^2 + 2y^3 + xy = 0.$$

Ha $y=0$, akkor ez tetszőleges x -re teljesül. Tegyük fel, hogy $y \neq 0$, akkor y -nal oszthatunk:

$$x^2y + 3x^2 - 3xy + 2y^2 + x = 0.$$

Rendezzük el a tagokat y hatványai szerint:

$$2y^2 + (x^2 - 3x)y + (3x^2 + x) = 0.$$

Ezt az egyenletet úgy tekintjük, mint egy egész együtthatós másodfokú egyenletet, amiben y az ismeretlen, és azokat az x értékeket keressük, amelyekre az egyenletnek van egész gyöke.

Ahhoz, hogy az egyenletnek legyen egész gyöke, szükséges, hogy az egyenlet D diszkriminánsa négyzetszám legyen:

$$D = (x^2 - 3x)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3x^2 + x) = x(x - 8)(x + 1)^2.$$

Ha $x = -1$, akkor $D = 0$ és $y = -1$.

Ha $x \neq -1$, akkor $\frac{D}{(x+1)^2} = x(x-8)$ is négyzetszám: $x^2 - 8x = k^2$, ahol k valamilyen nemnegatív egész szám.

Az $x^2 - 8x$ kifejezést teljes négyzetté alakítva és átrendezve:

$$(x - 4)^2 - k^2 = 16$$

$$(x - 4 - k)(x - 4 + k) = 16.$$

A 16 lehetséges szorzattá alakításai (figyelembe véve, hogy $x - 4 - k \leq x - 4 + k$) az

ezekhez tartozó $x = \frac{(x - 4 - k) + (x - 4 + k) + 8}{2}$ értékek, illetve az y megfelelő egész

értékei:

$x-4-k$	$x-4+k$	x	y_1	y_2
1	16	12,5		
2	8	9	-6	-21
4	4	8	-10	-10
-16	-1	-4,5		
-8	-2	-1	-1	-1
-4	-4	0	0	0

A megoldások tehát:

x tetszőleges egész és $y=0$;

$x=-1$ és $y=-6$;

$x=9$ és $y=-6$;

$x=9$ és $y=-21$;

$x=8$ és $y=-10$.

7. feladat

(KöMaL, 1991. szeptember)

Oldjuk meg az alábbi egyenletet, ha x , y , z és v pozitív egész számok

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{v}}} = \frac{101}{91} .$$

Megoldás: Mivel x , y , z , v pozitív egész számok, ezért

$$0 < x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{v}}} < 1,$$

ennek alapján csak $x=1$ lehetséges. Ekkor a következő egyenlethez jutunk:

$$y + \frac{1}{z + \frac{1}{v}} = \frac{91}{10} = 9 + \frac{1}{10} .$$

Mivel y , z , v pozitív egész számok, így

$$0 < \frac{1}{z + \frac{1}{v}} < 1$$

amiből $y=9$ következik. Ezt felhasználva az

$$\frac{1}{v} = 10 - z$$

egyenletet kapjuk. Ennek jobb oldala egész szám, ezért a bal oldala is egész. De v pozitív egész, így reciproka csak akkor lehet egész, ha $v=1$ teljesül. Ebből pedig $v=9$ adódik.

Tehát azt bizonyítottuk, hogy az egyenlet egyedüli megoldása az $x=1, y=9, z=9, v=1$ számnégyes.

Irodalomjegyzék:

- [1] Balogh László – Herskovits Mária – Tóth László: A tehetségfejlesztés pszichológiája, 1998. Debrecen
- [2] Gyarmathy Éva: Matematikai tehetségek= Új Pedagógiai Szemle, 2002/5.
<http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=2002-05-lk-Gyarmaty-Matematikai>
- [3] Matematikai tehetséggondozás
http://hu.wikipedia.org/wiki/Matematikai_tehets%C3%A9ggondoz%C3%A1s
- [4] Szirmai Hajnalka: A matematikai és a nyelvi képesség közötti összefüggés vizsgálata= Új Pedagógiai Szemle, 2003/5.
<http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=2003-05-ta-szirmai-matematikai>
- [5] Dr. Balogh László: Elméleti kiindulási pontok tehetséggondozó programokhoz
http://209.85.129.104/search?q=cache:jNtb15xVvRkJ:server.borsod-ped.sulinet.hu/dokumentumok/mateh/Balogh_elmeleti_kiindulas.doc+tehets%C3%A9g+gagn%C3%A9&hl=hu&ct=clnk&cd=6&gl=hu&lr=lang_hu&client=firefox-a
- [6] Láng Csabáné: Számelmélet, Példák és feladatok, 2005. ELTE Eötvös Kiadó
- [7] Dr. Hajdu Sándor – Dr. Czeglédi István – Hajdu Sándor Zoltán – Dr. Kovács András – Róka Sándor: Matematika 9., 2006. Műszaki Kiadó
- [8] Dr. Kántor Sándorné – Dr. Kántor Sándor: IV. Nemzetközi Magyar Középiskolás Matematikai Verseny Paks, 1995. április 2., Feladatok, megoldások, helyezettek
- [9] Surányi János: Matematikai versenytételek IV. (1988-1997. évi versenyek), 1998. Budapest, Typotex
- [10] Surányi János: Matematikai versenytételek III. (1964-1987. évi versenyek), 1992. Budapest, Tankönyvkiadó
- [11] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok
<http://www.sulinet.hu/komal/>