

DEBRECENI EGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
MATEMATIKAI INTÉZET

# SZAKDOLGOZAT

## Fixponttételek és elemi geometriai alkalmazásai

KÉSZÍTETTE:  
Nagy Gábor  
Matematika-Informatika

TÉMAVEZETŐ:  
Dr. Kovács Zoltán  
egyetemi docens

Debrecen  
2007

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőmnek Dr. Kovács Zoltánnak a szakdolgozat elkészítésében nyújtott segítségét, támogatását és tanácsait.

# Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
1. Hasonlósági transzformáció	3
2. Egybevágósági transzformáció	5
3. Affin transzformáció	7
4. Forgatva nyújtás	13
5. Tükrözve nyújtás	28
6. Fixponttétel a projektív síkon	33
7. Összegzés	43
Irodalomjegyzék	44

# Bevezetés

A fixponttételbe csak a matematikával komolyabban foglalkozó hallgatók nyernek betekintést a felsőoktatási tanulmányaik során. Azonban a fixelemek alkalmazásaival a diákok már általános iskolában megismerkednek. Legelőször a tengelyes tükrözés kerül napi rendre, ezt követi majd később a felsőbb osztályokban a forgatás és az eltolás. Ilyen korban még nincsenek tisztában a jelentőségével, még kevés ismeretük van a tulajdonságokról és jellemzőkről. Tételről, mint fogalomról még hallomásból sincsenek ismereteik, de játékos feladatokkal és megoldásokkal közelebb hozható ennek a témának az elsajátítása számukra. Például a tengelyes tükrözéssel való foglalkozás még szorosán, kapcsolódik az egyszerű feladatokhoz, rajzolásokhoz és konkrétan a tükörhöz való alkalmazáshoz.

Középiskolában a diákok már jobban belemerülnek ezek tanulmányozásába, ismereteket szereznek más transzformációkról is, mint például a középpontos és a csúsztatva tükrözésekről, a kicsinyítésről és a nagyításról. Előtérbe kerülnek a definíciók, a tételek és a bizonyítások. Megismerik a háromszögek egybevágóságának és hasonlóságának alapeseteit. Továbbá rájönnek, hogy egyes transzformációk előállíthatók más transzformációk segítségével.

Legelőször komolyan csak a felsőoktatás által ismeri meg a hallgató a fixponttételt. Itt új szemszögből, mélyebben dolgozzák fel ezt a témakört.

A szakdolgozatom megírásával az volt a célom, hogy ezen tudásanyagot összefoglaljam és példákkal érthetőbbé tegyem. A dolgozatom váza azt az elvet követi, hogy először a hasonlósági és az egybevágósági transzformációkat elevenítem fel röviden. Majd ezeket követően rátérek az affin transzformáció kifejtésére. Továbbá érdekességként bemutatom a forgatva és a tükrözve nyújtásokat. Ebben a részben arra törekedtem, hogy magyarázatommal közelebb hozzam, és érthetőbbé tegyem az itt lévő fogalmakat, és példákon keresztül illusztráljam a gyakorlati hasznukat. Végezetül a projektív sík fixponttételével zárom az egészet egy kerek egységbe.

# 1. fejezet

## Hasonlósági transzformáció

**1.1. Definíció.** Az  $\varphi: \varepsilon \rightarrow \varepsilon$  (illetve  $\varphi: \alpha \rightarrow \alpha$ , ahol az  $\alpha$  az euklideszi tér egy síkja) **hasonlósági transzformációnak** vagy **hasonlóságnak** nevezzük, ha  $\exists k \in \mathbf{R}, k > 0$ , hogy  $\forall P, Q \in \varepsilon : d(\varphi(P), \varphi(Q)) = kd(P, Q)$  teljesül.  $k$ -t a **hasonlóság arányának** nevezzük.

**1.2. Definíció.** Legyen adva egy  $O$  pont és egy  $k > 0$  valós szám. A tér (sík) egy  $O$ -tól különböző  $P$  pontjához rendeljük hozzá az  $\overrightarrow{OP}$  azon  $P'$  pontját, melyre  $OP' = kOP$ . Legyen továbbá  $O$  képe  $O$ . Ez a leképezés olyan  $k$  arányú hasonlóság, melynél minden egyenes képével párhuzamos. A leképezés megtartja a „között van” relációt, továbbá tetszőleges félegyenes és képe egyező irányúak.

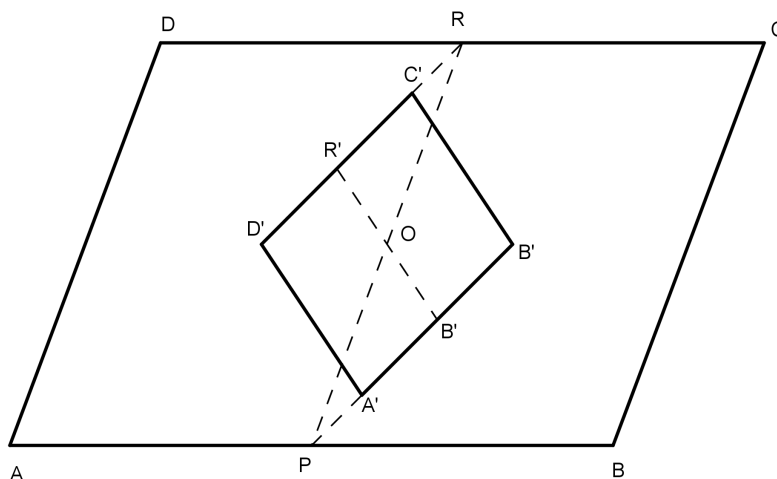
1.3. *Megjegyzés.* Minden hasonlósági transzformáció egyenestartó, szögtartó és rendezéstartó.

**1.4. Tétel (A hasonlóságok fixponttétele).** *Ha egy hasonlóság nem izometria, akkor egyértelműen létezik fixpontja.*

*Bizonyítás.* Egyértelműség: abból következik, hogy két fixpont létezése esetén a hasonlóság aránya egy lenne.

Létezés, síkbeli eset. Rögzítünk egy síkot. Legyen adva az  $ABCD$  paralelogramma (1.1. ábra). Ennek képe az  $A'B'C'D'$  paralelogramma. Ha a két paralelogramma középpontosan hasonló, akkor az állítás nyilvánvaló. Egyébként  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{P\}$ ,  $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{C'D'} = \{R\}$ .  $P$  képe  $P' \in \overleftrightarrow{A'B'}$ .  $R$  képe

$R' \in \overleftrightarrow{C'D'}$ .  $\overleftrightarrow{PR}$  és  $\overleftrightarrow{P'R'}$  metszik egymást, mert ellenkező esetben  $PP'RR'$  paralelogramma lenne, azaz az egymásnak megfelelő  $\overline{PR}$  és  $\overline{P'R'}$  aránya egy lenne. Jelölje  $O$  a metszés pontot. A párhuzamos szelőktétele miatt  $\frac{OP}{OR} = \frac{O'P'}{O'R'}$  is teljesül mivel minden hasonlóság aránytartó. A hasonlóság a között van relációt is megtartja, ezért  $O = O'$ .  $\square$



1.1. ábra.

## 2. fejezet

# Egybevágósági transzformáció

**2.1. Definíció.** Legyen  $H \subset \varepsilon, \sigma: H \rightarrow H$  leképezés. A  $P \in H$  pontot a  $\sigma$  leképezés **fixpontjának** nevezzük, ha  $\sigma(P) = P$ .

**2.2. Definíció.** A  $T \subset H$  ponthalmaz a  $\sigma$  leképezés **invariáns alakzata**(vagy **fixalakzata**), ha  $\sigma(T) = \{\sigma(P) | P \in T\} = T$ .  $T$ -t **pontonként fix alakzatnak** nevezzük, ha  $\forall P \in T: \sigma(P) = P$ . A  $\sigma$  neve **involutórikus leképezés**, ha nem identitás, de  $\sigma^2 = id$ .

**2.3. Definíció.** Ha  $H = \varepsilon$  vagy  $H \in \mathcal{P}, \sigma: H \rightarrow H$  bijektív leképezés és minden egyenes képe egyenes, akkor  $\sigma$  neve **egyenestartó vagy affin leképezés**. Ha  $H = \varepsilon$  vagy  $H \in \mathcal{P}$  és  $\sigma: H \rightarrow H$  olyan bijekció, hogy  $\forall P, Q \in H: d(P, Q) = d(\sigma(P), \sigma(Q))$  teljesül, akkor  $\sigma$ -t **izometriának** vagy **egybevágósági transzformációnak** nevezzük. Ha  $H \in \mathcal{P}$ , akkor **síkizometriáról** beszélünk.

**2.4. Definíció.** Legyen  $l$  a rögzített  $\alpha$  sík egyenese. Értelmezzük a következő leképezést:  $\varrho_l: \alpha \rightarrow \alpha, \varrho_l(P) = P$ , ha  $P \in l$ . Ha  $P \notin l$ , akkor  $\varrho_l(P)$  legyen az az egyértelmű pont, melyre  $\overline{P\varrho_l(P)}$  felező merőlegese  $l$ .  $\varrho_l$ -t az  $l$  **egyenesre vonatkozó tükrözésnek** nevezzük.

**2.5. Definíció.** Legyen  $\alpha \in \mathcal{P}$ . Értelmezzük a következő leképezést:  $\varrho_\alpha: \varepsilon \rightarrow \varepsilon, \varrho_\alpha(P) = P$ , ha  $P \in \alpha$ . Ha  $P \notin \alpha$ , akkor  $\varrho_\alpha(P)$  legyen az az egyértelmű pont, melyre  $\overline{P\varrho_\alpha(P)}$  felező merőleges síkja  $\alpha$ .  $\varrho_\alpha$ -t az  $\alpha$  **síkra vonatkozó tükrözésnek** nevezzük.

**2.6. Megjegyzés.**  $\varrho_l$  olyan involutórikus leképezés, mely  $l$  oldalait felcseréli.  $\varrho_\alpha$  olyan involutórikus leképezés, mely  $\alpha$  oldalait felcseréli. Mind síkra vonatkozó tükrözés, mind az egyenesre vonatkozó tükrözés bijektív.

**2.7. Tétel.**

1. Minden síkizometria legfeljebb 3 tengelyes tükrözés szorzata.
2. Minden térizometria legfeljebb 4 síkra vonatkozó tükrözés szorzata.

**2.8. Tétel.**

1. Egy  $k$  arányú hasonlóság inverze  $\frac{1}{k}$  arányú hasonlóság.
2. Egy  $k$  arányú és  $l$  arányú hasonlóság szorzata  $kl$  arányú hasonlóság.
3. A hasonlóságok csoportot alkotnak a kompozíció szorzás műveletére.
4. Az egybevágóságok pontosan az 1 arányú hasonlóságok.

2.9. *Megjegyzés (Az affin leképezések fixponttétele).* Ha  $f: \varepsilon \rightarrow \varepsilon$  affin leképezés és  $\ker(f - id_V) = \{0\}$ , akkor  $f$ -nek egyértelműen létezik fixpontja. Jelölje  $f$  a szóban forgó hasonlóságot. Az a kérdés, hogy

$$\ker(\vec{f} - id_V) = 0$$

teljesül-e? Legyen  $(\vec{f} - id_V)(\vec{PQ}) = 0$ . Ekkor

$$\begin{aligned} (f(P)f(Q)) - (\vec{PQ}) = 0 &\Rightarrow f(P)f(Q) = \vec{PQ} \Rightarrow f(P)f(Q) = PQ \\ &\Rightarrow k \cdot PQ = PQ \Rightarrow P = Q, \end{aligned}$$

mert ha  $P \neq Q$  lenne, akkor egybevágóságról lenne szó.

## 3. fejezet

# Affin transzformáció

**3.1. Definíció.** Az  $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  bijektív transzformációt **affin transzformációnak** nevezzük, ha

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall x, y \in \mathbf{R}^n: F(tx + (1-t)y) = tF(x) + (1-t)F(y),$$

vagy ezzel egyenértékűen  $F = \tau_v \circ \phi$ , ahol  $\phi \in \text{GI}(\mathbf{R}^n)$  egyértelműen létező lineáris automorfizmus és  $\tau_v: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, x \mapsto x + v$  ( $v \in \mathbf{R}^n$ ) egyértelműen létező eltolás.  $\phi$ -t az **F lineáris részének** nevezzük.

Az  $x \in \mathbf{R}^n$  vektor az F fixpontja akkor és csak akkor, ha  $\phi(x) + v = x$  vagy más alakban, ha  $(\phi - id)(x) = -v$ .

**3.2. Tétel.** Az  $F = \tau_v \circ \phi$  affin transzformációnak egyértelműen létezik fixpontja akkor és csak akkor, ha  $\phi - id$  az  $\mathbf{R}^n$  izomorfizmusa. Sőt az egyértelműen létező fixpont  $(\phi - id)^{-1}(-v)$ .

**3.3. Következmény (Hasonlóságok fixponttétele).** Ha a hasonlóság  $\mathbf{R}^n$ -ben nem izometria, akkor egyértelműen létezik fixpontja.

### Konstrukció

3.4. *Megjegyzés.* Továbbiakban az  $x \neq y \in \mathbf{R}^2$  esetén az  $xy$  jelentse, a  $tx + (1-t)y$ , ( $t \in \mathbf{R}$ ) egyenest, míg az  $[xy]$  szakasznál  $tx + (1-t)y, t \in [0, 1]$ .

**3.5. Tétel.** Legyen  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, z \mapsto F(z) = z'$  affin transzformáció a síkban. Legyen  $(a, b, c, d)$  paralelogramma, legyen  $a, b, c, d \in \mathbf{R}^2$  nem kollineáris pontjai úgy, hogy  $b - a = c - d$ . Tételezzük fel ráadásul, hogy  $\text{rang}(b - a, b' - a') = \text{rang}(d - a, d' - a') = 2$ . Legyen végül is

$$ab \cap a'b' = p, dc \cap d'c' = r, bc \cap b'c' = q, \text{ és } ad \cap a'd' = s.$$

Ezen jelölésekkel

1. ha  $F$ -nek  $m$  az egyetlen fixpontja, akkor  $m = pr \cap q's'$ .
2. ha  $F$ -nek nincs fixpontja, akkor  $pr \parallel qs$ , de  $pr \neq qs$ .
3. ha  $F$ -nek van pontonként fix egyenese, akkor ez az egyenes  $pr = qs$ .

*Bizonyítás.* A harmadik állítás és a megfordítása nyilvánvaló.

Ha  $F$  tengelyes affin transzformáció, akkor a megfelelő egyenesek mindegyike a tengelyen metszik egymást.

Megfordítva, ha  $pr = qs$ , akkor  $t \in \mathbf{R}$  esetén  $p = ta + (1 - t)b$ . Miután  $cb \parallel ad$  és  $c'b' \parallel d'a'$ , (3) magában foglalja:

$$p = ts + (1 - t)q \implies p = ta' + (1 - t)b' \implies p = p' \text{ és hasonlóan } r = r'.$$

Így  $pr = qs$  egyenes pontonként fix egyenes.

Most az első állítást bizonyítjuk (3.1. ábra). A  $p$  és  $r$  pontok definíciójából következik és ezt folytatva a  $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ -ra:

$$(4) \quad p = \alpha \cdot a + (1 - \alpha)b = \beta \cdot a' + (1 - \beta)b'$$

$$(5) \quad r = \gamma \cdot d + (1 - \gamma)c = \delta \cdot d' + (1 - \gamma)c' \text{ azaz}$$

$$(6) \quad p' = \alpha \cdot a' + (1 - \alpha)b'$$

$$(7) \quad r' = \gamma \cdot d' + (1 - \gamma)c' \text{ (6)-ból és (4)-ből kapjuk, hogy}$$

$$(8) \quad p - p' = (\alpha - \beta)(a' - b') \text{ Hasonlóképpen (7)-ből és (5)-ből kapjuk, hogy}$$

$$(9) \quad r - r' = (\gamma - \delta)(d' - c') \text{ Miután } (a', b', c', d') \text{ paralelogramma, folytatva}$$

$$(10) \quad a' - b' = d' - c' = x \text{ A } t \in \mathbf{R}, \text{ (8)-t szorozva } t\text{-vel és (9)-t szorozva } (1 - t)\text{-vel, ez oda vezet, hogy}$$

$$(11) \quad tp' - tp = t(\alpha - \beta)x$$

$$(12) \quad (1 - t)r' - (1 - t)r = (1 - t)(\gamma - \delta)x \text{ Most (11)-t és (12)-t összeadva, kapjuk, hogy}$$

$$(13) \quad tp' + (1 - t)r' = tp + (1 - t)r + [t(\alpha - \beta) + (1 - t)(\gamma - \delta)]x \text{ Vegyük észre, hogy ha } \phi = id \text{ lineáris automorfizmus, akkor meg tudjuk határozni } t\text{-t, úgy, hogy}$$

(14)  $t(\alpha - \beta) + (1 - t)(\gamma - \delta) = 0 \iff t[(\alpha - \beta) - (\gamma - \delta)] = -(\gamma - \delta)$   
 Valóban, indirekt bizonyítással, ha  $(\alpha - \beta) - (\gamma - \delta) = 0$ , akkor (8)-ból és (9)-ből kapjuk, hogy

$$p' - p = r' - r \implies \phi(p) - p = \phi(r) - r \implies (\phi - id)(p - r) = 0,$$

amely lehetetlen. A (13)-as formulát  $t = -\frac{\gamma - \delta}{(\alpha - \beta) - (\gamma - \delta)}$ -vel helyettesítve:  $tp' + (1 - t)r' = tp + (1 - t)r$ -vé egyszerűsödik. A kapott pontot jelöljük  $m$ -mel. Most alkalmazva  $m$ -re  $F$ -t, azt kapjuk, hogy

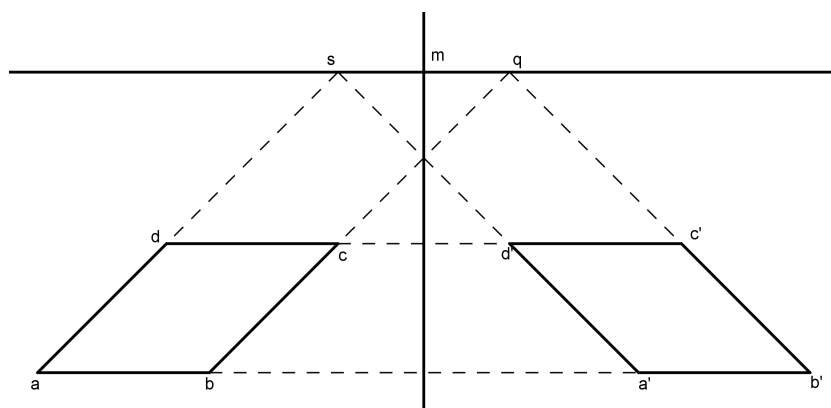
$$F(m) = F(tp + (1 - t)r) = tp' + (1 - t)r' = m$$

Ez azt jelenti, hogy az  $m$  fixpont a  $pr$  egyenesen van és analóg módon a  $qs$  egyenesen is. Így az első állítást bizonyítottuk.

Továbbá a (13)-as elemzés a második állításhoz vezet. Ha  $\alpha - \beta = \gamma - \delta = 0$ , akkor a (8)-ból és (9)-ből kapjuk, hogy  $p' = psr' = r$ , ami azt jelenti, hogy  $F$   $p$ -t és  $r$ -t fixen hagyja. Ha az affin transzformáció két különböző pontot fixen hagy, akkor ezen pontokat összekötő egyenesek minden pontját fixen hagyja. Ez a harmadik eset, így ha  $F$ -nek nincs fixpontja, akkor  $\alpha - \beta = \gamma - \delta \neq 0$ . A (8)-ból és (9)-ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p' - p = r' - r &\iff \phi(p - r) = p - r \iff \phi(p - r) - (p - r) = 0 \\ &\iff p - r \in \text{Ker}(\phi - id) \end{aligned}$$

Analóg módon  $q - s \in \text{Ker}(\phi - id)$ . Miután  $\dim \text{Ker}(\phi - id) = 1$ , tehát az következik, hogy  $q - s \parallel p - r$ . Ez a második állítás. □



3.1. ábra.

**3.6. Tétel (A sík affin geometria alapvető tételének egyszerű következménye).** *A sík minden affin transzformációja előáll hasonlóság és tengelyes affin transzformáció szorzataként.*

3.7. *Megjegyzés.* Legyen  $F$  olyan affin transzformáció, amely

$$(p, q, r) \mapsto (p', q', r').$$

Jelölje  $\chi$  azt a hasonlóságot, amelyiknél  $\chi(p) = p'$  és  $\chi(q) = q'$ . Akkor  $F$   $\chi$  és a tengelyes affin transzformáció szorzata.  $[p', q', \chi(r) \rightarrow r']$  Ha  $f$ -nek egyetlen fixpontja van, akkor ezt válasszuk  $p$ -nek és így  $p = p'$ .

**3.8. Tétel.** *Ha a sík affin transzformációjának  $p$  az egyetlen fixpontja, akkor a  $p$  középpontú forgatás  $p$  középpontú középpontos hasonlóság és tengelyes affinitás szorzata, ahol  $p$  a tengelyen van.*

**3.9. Tétel.** *Minden fixpont nélküli affin transzformáció a síkban eltolás és tengelyes affin transzformáció szorzata.*

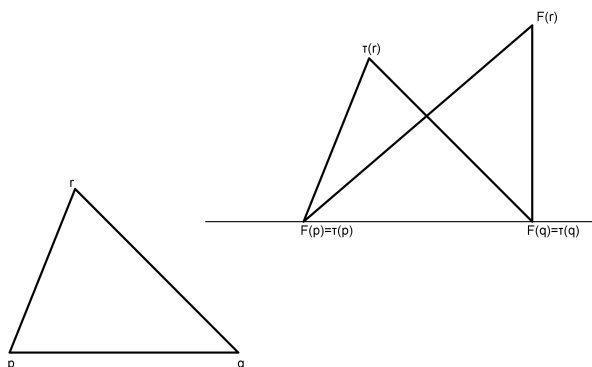
*Bizonyítás.* A fixponttétel következményeként ebben az esetben

$$\dim \text{Ker}(\phi - id) \geq 1 \quad (3.2. \text{ ábra}).$$

Legyen  $q - p \in \text{Ker}(\phi - id)$ ,  $(p, q \in \mathbf{R}^2, p \neq q)$ . Akkor

$$F(q) - F(p) = q - p, \text{ ezért } (p, q)\text{-t } (F(p), F(q))\text{-ba}$$

tudjuk eltolni. A  $p \mapsto F(p)$  által meghatározott eltolást  $\tau$ -val jelöljük. A  $(p, q, r) \mapsto (F(p), F(q), F(r))$ -val tudjuk megadni. Ez az affinitás a  $\tau$  eltolás és a tengelyes affin transzformáció szorzata.  $[F(p), F(q), F(r) \mapsto F(r)] \quad \square$



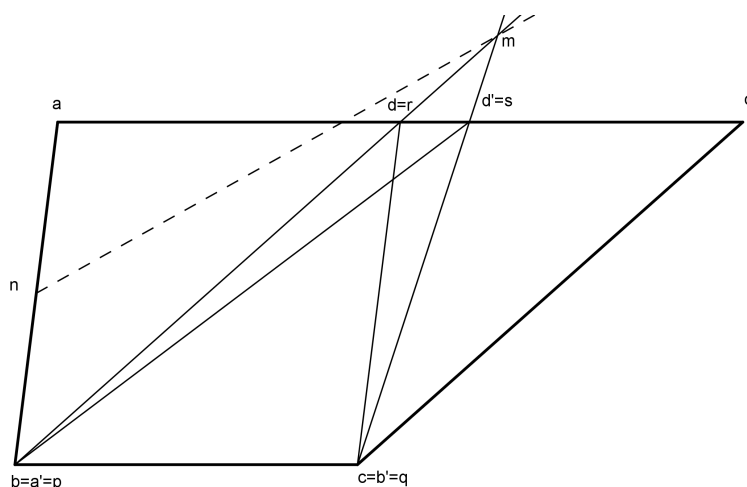
3.2. ábra.

### Az equiaffin eset

**3.10. Definíció.** A sík affin transzformációja, ami a területet megtartja az **equiaffin transzformáció**.

3.11. *Megjegyzés.* Legyenek  $p, q, r$  kollineáris pontok  $\mathbf{R}^2$ -ben. Az egyértelmű affin transzformáció, amely a  $p$ -t fixen hagyja, míg  $q$ -t és  $r$ -et felcseréli, ezt **affin tükrözésnek** nevezzük és  $[p, q \leftrightarrow r]$ -rel jelöljük. Legyen továbbá  $s$   $qr$  szakasz felező pontja. A fent említett affin tükrözés  $ps$  minden pontját fixen hagyja, de a másikat nem. Tehát minden euklideszi tükrözés affin tükrözés. Legyenek  $p, q, r$  nem kollineáris pontok  $\mathbf{R}^2$ -ben. Az egyértelmű affin transzformáció a  $p$ -re illeszkedő  $qr$ -rel párhuzamos egyenes minden pontját fixen hagyja és  $q$ -t  $r$ -be képezi.  $[p, q \rightarrow r]$ -rel jelöljük és **nyírásnak** nevezzük.  $[p, q \rightarrow r]$  nyírásnak van  $p$ -re illeszkedő és  $qr$ -rel párhuzamos egyenese. A fixpontok konstrukciójából a Veblen ismert tételének bizonyítása könnyen bevezethető.

**3.12. Tétel (Veblen tétele).** *A sík minden equiaffin transzformációja két affin transzformáció szorzata.*



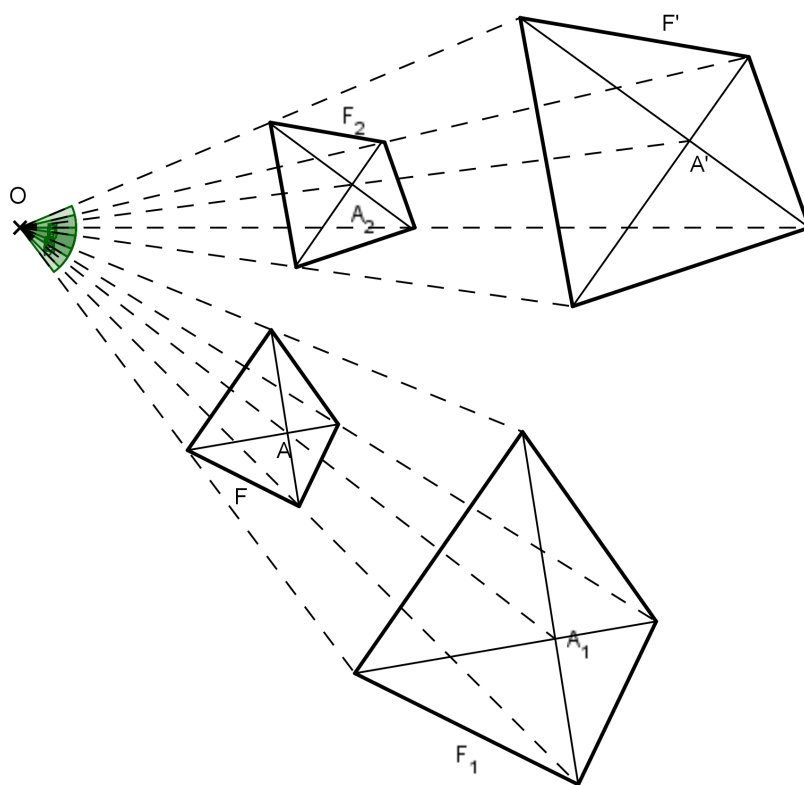
3.3. ábra.

*Bizonyítás.* Ha a sík equiaffin transzformációja különbözik az eltolástól, félfordulattól vagy a nyírástól, akkor  $(a, b, c, d) \mapsto (b, c, c', d')$ ,  $ad = d'c'$  alakban adható meg, ahol  $(a, b, c, d)$  paralelogramma. A fixpontok konstrukcióját a 3.3. ábra illusztrálja. Legyen  $n$   $[ab]$  szakasz középpontja. Az  $n$ -t kössük össze az egyértelműen létező  $m$  fixponttal vagy a fixmentes esetben húzzunk

párhuzamost  $n$ -en keresztül  $pr$ -rel ( $qs$ -sel). Ebben az egyértelműen létező fixpont esetben az affinitást az  $(a, b, m) \mapsto (b, c, m)$  adja, azonkívül fixpontmentes esetben  $(a, b, d) \mapsto (b, c, d')$ . Mindkét esetben az affinitás a  $[t, a \leftrightarrow b]$  és  $[p, a \leftrightarrow c]$  affin tükrözés kompozíciója. A nyírás eset könnyen kezelhető:  $[p, q \rightarrow r]$  nyírás éppen  $[p, q \leftrightarrow s]$  és  $[p, s \leftrightarrow r]$  affin tükrözés szorzata, ahol  $s$  a  $p$  középpontú  $qr$  forgatás képén van. Eltolás és a félfordulat 2 euklideszi tükrözés szorzata, így az állítás nyilván való.  $\square$

## 4. fejezet

### Forgatva nyújtás



4.1. ábra.

**4.1. Definíció.** Legyen  $F_1$  az  $F$  alakzathoz középpontosan hasonló, ahol  $O$  a középpontos hasonlóság centruma és  $k$  az aránya. Majd forgassuk el az  $O$  pont körül az  $\alpha$  szöggel az  $F_1$  alakzatot az  $F'$  helyzetbe. Ezt a transzformációt, mely az  $F$  alakzatot az  $F'$  helyzetbe átvitte, **forgatva nyújtásnak** nevezzük. Az  $O$  pont a **forgatva nyújtás középpontja** (4.1. ábra).

4.2. *Megjegyzés.*

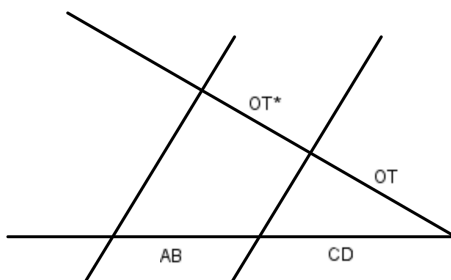
1. Látható, hogy a forgatva nyújtás két fő jellemzője:  $k$  arányú hasonlóság és  $\alpha$  forgatási szög.
2. **A forgatva nyújtást mésképpen is megvalósíthatjuk:** Először az  $O$  középpont körül  $\alpha$  szöggel elforgatjuk az  $F$  alakzatot az  $F_2$  helyzetbe. Majd alkalmazzuk az  $F_2$ -t  $F$ -be átvivő  $O$  középpontú,  $k$  arányú középpontos hasonlóságot.
3. Ebből látható, hogy a sorrend mindegy. Tehát az eredményen semmit nem változtat, ha először egy  $O$  középpontú és  $k$  arányú középpontos hasonlóságot, majd egy  $O$  pont körül  $\alpha$  szögű forgatást hajtunk végre, vagy először egy  $O$  középpontú  $\alpha$  szögű forgatást végzünk és utána egy  $O$  középpontú  $k$  arányú középpontos hasonlóságot.

#### Forgatva nyújtás alkalmazása egy adott $l$ egyenesre

Az  $l'$  megszerkesztéséhez először az  $l^*$  egyenest keressük meg. Az  $l^*$  egyenest az  $l$  egyenesből egy  $O$  középpontú  $k$  arányú középpontos hasonlósággal kaphatjuk meg (4.2. ábra). Tegyük fel, hogy  $k = \frac{AB}{CD}$ , ekkor

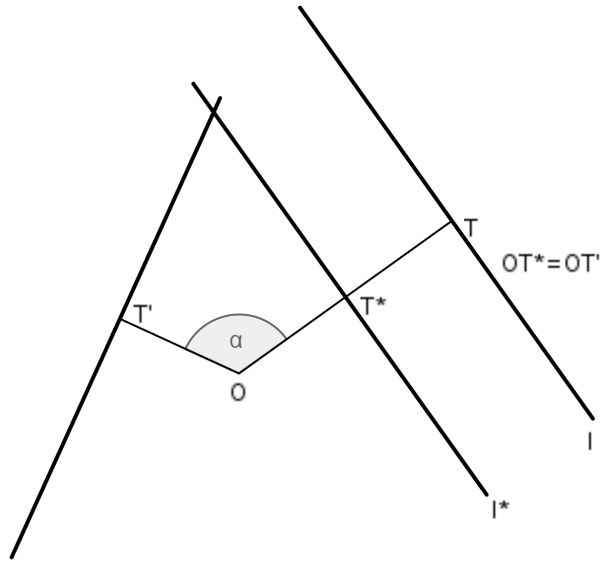
$$\frac{AB}{CD} = \frac{OT^*}{OT} \implies OT^* = \frac{AB}{CD} \cdot OT.$$

Itt a párhuzamos szelők tételét alkalmazzuk.



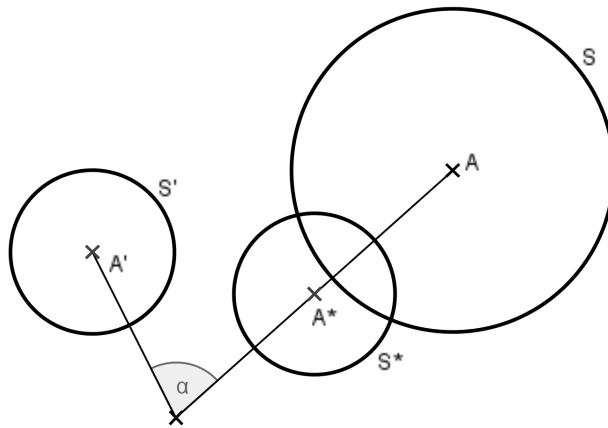
4.2. ábra.

Ezek után az  $l^*$  egyenest elforgatjuk az  $O$  középpont körül  $\alpha$  szöggel  $l'$  helyzetbe (4.3 ábra).



4.3. ábra.

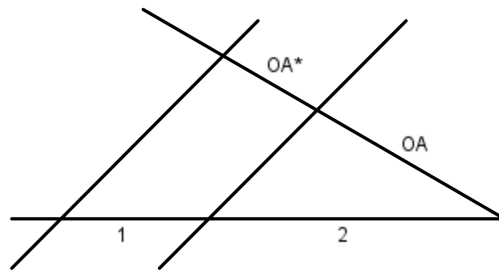
**Forgatva nyújtás alkalmazása egy adott  $S$  körre**



4.4. ábra.

Először meghatározzuk az  $S$  kör  $A$  középpontjának az  $O$  középpontú  $k$  arányú (most példaképpen  $k = \frac{1}{2}$ ) középpontos hasonlósági képét, vagyis az  $S^*$  kör  $A^*$  középpontját:

$$\frac{1}{2} = \frac{OA^*}{OA} \implies OA^* = \frac{1}{2} \cdot OA \quad (4.5. \text{ ábra}).$$



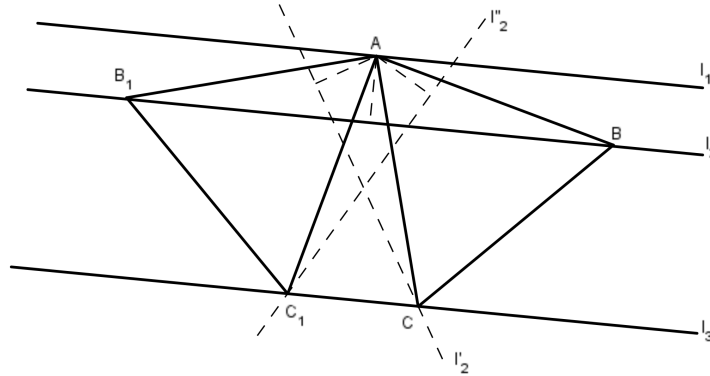
4.5. ábra.

Majd ezek után elforgatjuk  $S^*$  kört  $O$  középpont körül  $\alpha$  szöggel  $S'$  helyzetbe (4.4. ábra).

### I. Pont körüli elforgatás

4.3. *Megjegyzés.* Ez a forgatva nyújtás olyan speciális esete, ahol a hasonlóság aránya  $k = 1$ .

4.4. *Példa.* Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, melynek a csúcsai három párhuzamos egyenesen helyezkednek el.



4.6. ábra.

### Megoldás:

Jelöljük a keresett háromszöget  $ABC\Delta$ -gel, melynek csúcsai rendre  $l_1, l_2, l_3$  egyeneseken helyezkednek el (4.6. ábra). Vegyünk fel az  $l_1$  egyenesen egy  $A$  pontot. Ezek után forgassuk el a  $B$  pontot tartalmazó  $l_2$  egyenest az  $A$  pont körül  $60^\circ$ -kal. Az így kapott  $l_2$  egyenes és az  $l_3$  egyenes metszéspontja lesz a keresett háromszög  $C$  csúcsa. Mivel az  $l_2$  egyenest az  $A$  pont körül  $60^\circ$ -kal két irányba is eltudjuk forgatni, így a feladatnak két darab megoldása van.

4.5. *Megjegyzés.*

1. Ha az  $A$  pont helyett egy másik  $A'$  pontot vettünk volna fel az  $l_1$  egyenesen, akkor természetesen ebből a pontból is megszerkeszthettük volna az  $A'B'C'\Delta$  szabályos háromszöget. Ez az  $A'B'C'\Delta$  az  $ABC\Delta$   $AA'$  nagyságú és  $l_1$  irányú eltolt képe. A geometriában az ilyen megoldások között nem teszünk különbséget. Tehát épp ezért a feladat megoldása független a pont megválasztásától. De ha az  $l_1, l_2, l_3$  egyenesek nem párhuzamosak, akkor a feladatot hasonlóan lehet megoldani, de ebben az esetben már a feladatnak végtelen sok megoldása van. Mert ha különbözőképpen választjuk meg az  $A$  pontot, akkor nem kapunk egybevágó háromszögeket.
2. Ez a feladat általánosítható, ha az egyenlő oldalú háromszögeket tetszőleges háromszögekhez hasonló háromszögekkel helyettesítjük.

## II. Középpontos hasonlóság

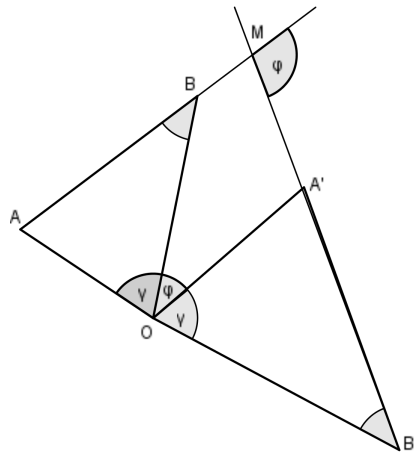
**4.6. Definíció.** Ha egy transzformáció megtartja minden háromszögnek a körüljárási irányát vagyis az irányítását, akkor **irányítástartó transzformációról** beszélünk.

**4.7. Megjegyzés.** Minden irányítástartó középpontos hasonlóság nyújtva forgatás, vagyis a nyújtva forgatáson olyan középpontos hasonlóság és elforgatás szorzatát értjük, amelynél a hasonlóság és elforgatás középpontja egybeesik.

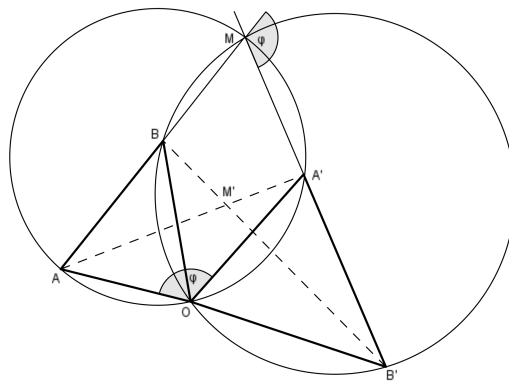
*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy adott egy olyan hasonlóság, amit az  $ABC\Delta$  és  $A'B'C'\Delta$  háromszögek egymáshoz rendelésével tudunk megadni (4.7. ábra). Legyen  $\lambda$  a hasonlóság aránya. Feltesszük, hogy  $\lambda \neq 1$ , vagyis nem egybevágóságról van szó.

Ha  $ABC\Delta$  és  $A'B'C'\Delta$  egyállású háromszögek, akkor középpontos hasonlósággal, tehát egy nulla szögű elforgatással egymásba vihetők. Tegyük fel, hogy az  $ABC\Delta$  és  $A'B'C'\Delta$  háromszögek nem egyállásúak. Legyen az általunk meghatározott hasonlóságnak  $O$  a fixpontja, így az  $ABO\Delta$  és  $A'B'O\Delta$  háromszögek hasonlóak és egyező irányításúak.

Legyen  $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'O B' = \gamma$  és  $\sphericalangle AOA' = \phi$ . Ekkor szükségképpen  $\sphericalangle BOB' <$  is egyenlő  $\phi$ , így az  $AOB\Delta$  háromszöget vagyis az  $ABC\Delta$  háromszöget is az  $O$  körüli  $\phi$  szögű elforgatás, majd pedig az  $O$  középpontú  $\frac{A'B'}{AB}$  arányú hasonlóság  $OA'B'\Delta$  háromszögbe vagyis  $A'B'C'\Delta$  háromszögbe viszi.  $\square$



4.7. ábra.



4.8. ábra.

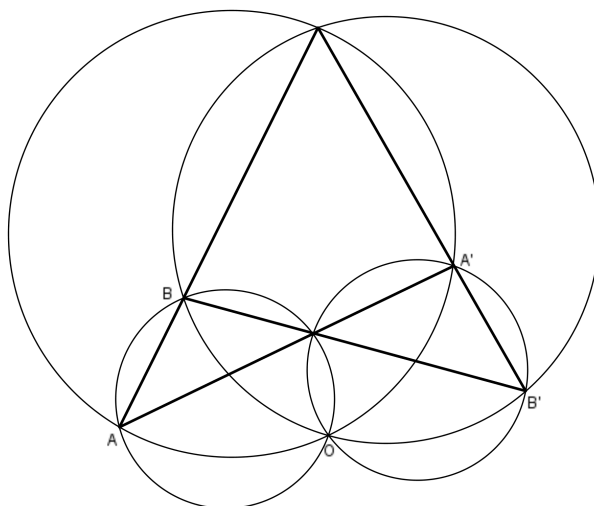
**4.8. Tétel.** *A forgatva nyújtásnál a középpont, egy tetszőleges pont és a képe, valamint a ponton átmenő tetszőleges egyenesnek és képének a metszéspontja egy körön van.*

*Bizonyítás.* Ha a 4.7. ábrán csak az  $AB$  és  $A'B'$  szakaszpár lenne megadva, akkor is meg tudnánk szerkeszteni az  $O$  középpontot. Mivel az  $AB$  egyenesét éppen  $\phi$  szöggel kellene elforgatni, hogy az  $A'B'$ -vel párhuzamos helyzetbe kerüljön. Legyen  $M$  az  $AB$  és  $A'B'$  egyenesek metszéspontja (4.8. ábra). Mivel az  $OAMA'$  és az  $OBMB'$  négyszögeknél az  $O$ -nál lévő és a szemközti  $M$  csúcsánál lévő külső szög egyenlő, ezért a négyszögeink húrnégyszögek. Így az  $AMA'\Delta$  és  $BMB'\Delta$  háromszögek köré írt körök az  $O$  pontban metszik egymást.

A szerkesztés menetét nem befolyásolja az  $AB$  és az  $A'B'$  szakaszok más elhelyezkedése sem.  $\square$

**4.9. Következmény (A négy háromszög tétele).** Ha sík négy egyenese négy háromszöget zár közre, akkor az ezek köré írt körök egy ponton mennek át.

*Bizonyítás.* Ha a 4.8. ábrát tekintjük, akkor észrevehetjük, hogy az  $AOA'\Delta$  és  $BOB'\Delta$  háromszögek egyező irányítású hasonló háromszögek. Mivel  $\angle AOA' = \angle BOB' = \phi$  és  $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ , így a két háromszög megegyezik egy szögben és a szöget közrefogó oldalak arányában. Tehát létezik olyan hasonlóság, pontosabban egy forgatva nyújtás, amely  $AOA'\Delta$  háromszöget átviszi  $BOB'\Delta$  háromszögbe. Jelölje az  $AA'$  és a  $BB'$  egyenesek metszéspontját  $M'$ , és alkalmazzuk erre az esetre az előbbi tételünket, így az  $OABM$  és  $OA'B'M'$  egy-egy körön lévő pontnégyes.



4.9. ábra.

A 4.9. ábrán felvettünk négy olyan egyenest, amelyek páronként metszik egymást és nem megy át közülük három egy ponton. Ezt követően jelöljük ki rajtuk a metszéspontok által meghatározott  $AB$  és  $A'B'$  szakaszokat. Mivel van olyan forgatva nyújtás, amely  $AB$ -t átviszi  $A'B'$ -be, így ebből következik a bizonyítandó tétel.  $\square$

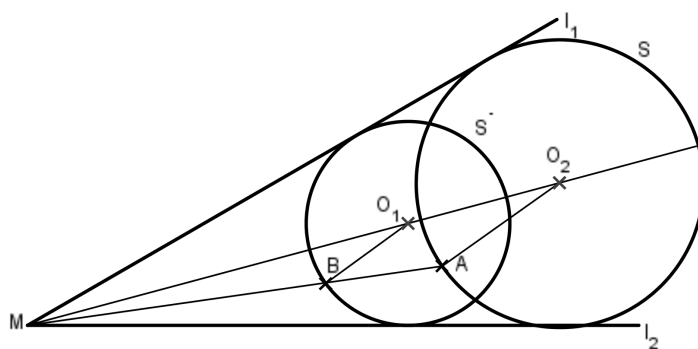
4.10. *Példa.* Szerkesszünk olyan  $S$  kört, amely

a; két adott  $l_1$  és  $l_2$  egyenest érint és átmegy az adott  $A$  ponton.

b; átmegy két adott ponton  $A$ -n és  $B$ -n és az adott  $l$  egyenest érinti.

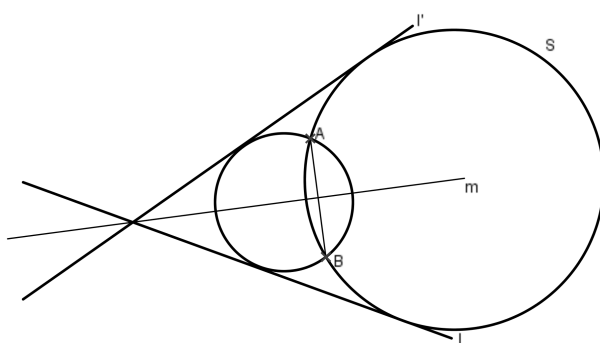
**Megoldás:**

- a;
  - Ha  $l_1$  és  $l_2$  párhuzamosak, akkor a feladat megoldása egyszerű.
  - Különben messe egymást az  $l_1$  és  $l_2$  egyenes az  $M$  pontban és legyen  $S$  abban az  $l_1 M l_2$  szögtartományba írt tetszőleges kör, mely az  $A$  pontot belsejében tartalmazza. Az  $MA$  egyenesnek az  $\overline{S}$ -sal való metszéspontját jelöljük  $B$ -vel (4.10. ábra).



4.10. ábra.

A keresett  $S$  kör középpontosan hasonló lesz az  $\overline{S}$  körhöz, ahol  $M$  a középpont és az arány  $k = \frac{MA}{MB}$ . Vegyük észre, hogy  $O_1 B \parallel O_2 A$ . Mivel ismerjük a hasonlóság középpontját és arányát,  $S$ -et könnyen megszerkeszthetjük.

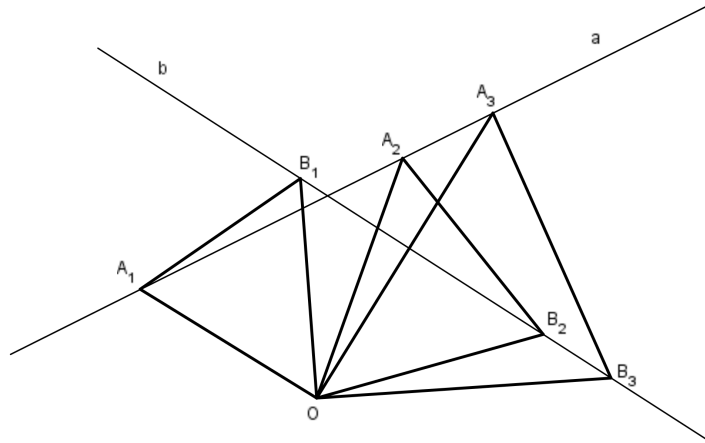


4.11. ábra.

- b; Legyen  $m$  az  $AB$  szakasz felezőmerőlegese,  $l'$  pedig az  $l$  tükörképe  $m$ -re (4.11. ábra). A keresett  $S$  körnek érintenie kell  $l$  egyenest és

metszenie kell  $A$  és  $B$  pontokat. Tehát a  $b$ ; részt visszavezettük az  $a$ ; feladatra.

4.11. *Megjegyzés.* Adjunk meg a síkon egy  $a$  egyenest és egy  $O$  pontot. Legyen továbbá  $A_1; A_2; \dots; A_n$  pontok az  $a$  egyenes pontjai. Majd alkalmazzuk ezen pontokra az  $O$  középpontú forgatva nyújtást, így az  $a$  egyenest  $b$  egyenesbe és az  $A_1; A_2; \dots$  pontokat pedig rendre a  $b$  egyenes  $B_1; B_2; \dots$  pontjaiba viszi át. A keletkező  $OA_1B_1\Delta; OA_2B_2\Delta \dots$  háromszögek egyező irányításúak és hasonlóak (4.12. ábra). Ennek a megjegyzésnek a megfordítása adja a következő tételünket:

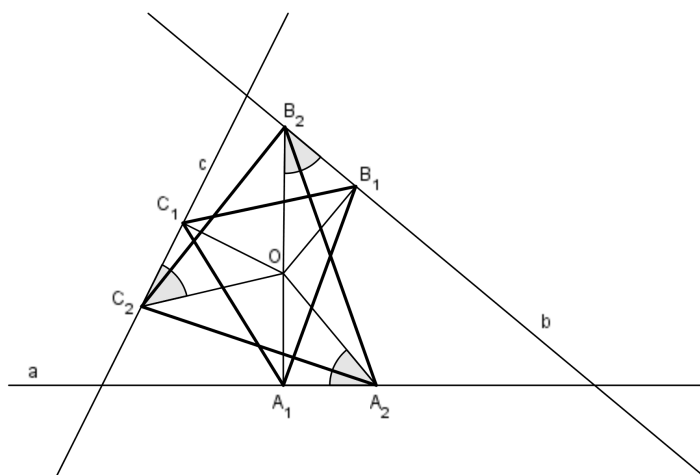


4.12. ábra.

**4.12. Tétel.** Ha az  $OA_1B_1\Delta; OA_2B_2\Delta \dots; OA_nB_n\Delta$  egyező irányítású hasonló háromszögek és az  $A_1; A_2; \dots; A_n$  pontok egy a egyenesen vannak, akkor egy b egyenesen helyezkednek el a  $B_1; B_2; \dots; B_n$  pontok is.

**4.13. Következmény.** Ha az  $OA_1B_1C_1 \dots N_1; OA_2B_2C_2 \dots N_2; \dots; OA_nB_nC_n \dots N_n$  sokszögek hasonlóak és  $A_1; A_2; \dots; A_n$  pontok egy a egyenesen vannak, akkor egy egyenesen vannak a  $B_1; B_2; \dots; B_n$ ; a  $C_1; C_2; \dots; C_n$ ;  $\dots$ ; az  $N_1; N_2; \dots; N_n$  pont  $n$ -esek is, mert az előző tétel külön-külön alkalmazható  $OA_iB_i; OA_iC_i; \dots; OA_iN_i$  típusú háromszögekre.

**4.14. Tétel.** Ha adottak az  $a; b; c$ ; egyenesek, akkor a sík minden  $O$  pontjához tartozik egy háromszögalak, talpponti háromszögének az alakja, ami  $O$  változtatásával természetesen változik.



4.13. ábra.

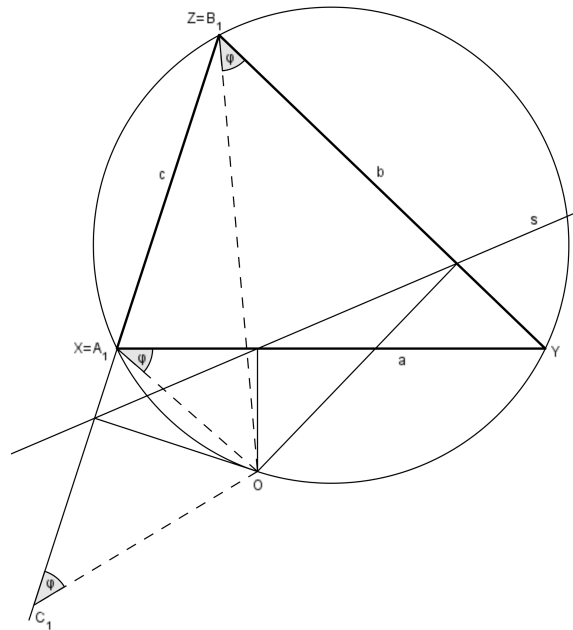
*Bizonyítás.* Ha 4.8. és 4.12. ábrákat jól megfigyeljük, akkor észreveszük hogy, az  $a$  egyenes  $A_1; A_2; \dots$  pontjainak a képeit a  $b$  egyenesen az  $O$  középpontú nyújtva forgatásnál úgy is megszerkeszthetjük, hogy az  $O$ -ból a  $B_i$  ponthoz olyan egyenest húzunk, amely ugyanakkora szöget zár be a  $b$  egyenes egy megjelölt irányával, mint amekkorát az  $OA_i$  zár be az egyenes megfelelő irányával.

Vegyünk fel a síkon három egyenest:  $a$ -t,  $b$ -t és  $c$ -t és egy  $O$  pontot. Legyen továbbá rendre  $h_1, h_2$  illetve  $h_3$  olyan  $O$  középpontú forgatva nyújtás, amely  $a$ -t  $b$ -be,  $b$ -t  $c$ -be illetve  $c$ -t  $a$ -ba viszi át (4.13. ábra). Legyenek rendre  $A_1; B_1; C_1$  az  $O$ -ból az  $a$ -ra,  $b$ -re illetve  $c$ -re bocsátott merőlegesek talppontjai.

Ezt az  $A_1B_1C_1\Delta$  háromszöget az  $O$  pont által az adott egyeneseken létrehozott **talpponti háromszögnek** nevezzük. A bizonyítás elején elmondottak alapján következik, hogy  $h_1$  az  $A_1$ -et  $B_1$ -be,  $h_2$  a  $B_1$ -et  $C_1$ -be és  $h_3$  pedig  $C_1$ -et  $A_1$ -be viszi át. Legyen most  $A_2$  az  $a$ -nak egy másik pontja. Ezt a  $h_1$   $B_2$ -be, ezt  $h_2$  a  $C_2$ -be és ezt pedig  $h_3$  az  $A_2$ -be viszi át. Tehát  $OA_2; OB_2$  és  $OC_2$  szakaszok azonos szöget zárnak be rendre az  $a, b$  illetve  $c$  egyenessel. Az  $A_1B_1C_1\Delta$  és  $A_2B_2C_2\Delta$  háromszögek hasonlóak, mivel hasonló háromszögrészekből tevődnek össze. Általánosabban az  $A_2B_2C_2\Delta$  háromszöget is szokás az  $O$  pont által létrehozott (egyik) talpponti háromszögnek nevezni vagyis az  $O$  pont által létrehozott talpponti háromszögek tehát mind hasonlóak.  $\square$

4.15. *Megjegyzés.* Ha  $O$  a háromszög köré írt kör középpontja, akkor a hozzá tartozó háromszögalak a háromszöggel azonos, hiszen a derékszöghöz tartozó talppontok éppen az oldalfelező pontok.

**4.16. Tétel.** *A háromszög köré írt kör tetszőleges  $O$  pontjaiból az oldalakra emelt merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak. Ezt az egyenest az  $O$ -hoz tartozó **Simson-egyenesnek** vagy **Wallace-egyenesnek** nevezik.*



4.14. ábra.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy az  $O$  pont az  $XYZ\Delta$  háromszög köré írt körön van (4.14. ábra). Most az előző tételben szereplő  $a; b$  illetve  $c$  egyenesek szerepét rendre az  $XY; YZ$  illetve  $ZX$  egyenesek fogják betölteni.

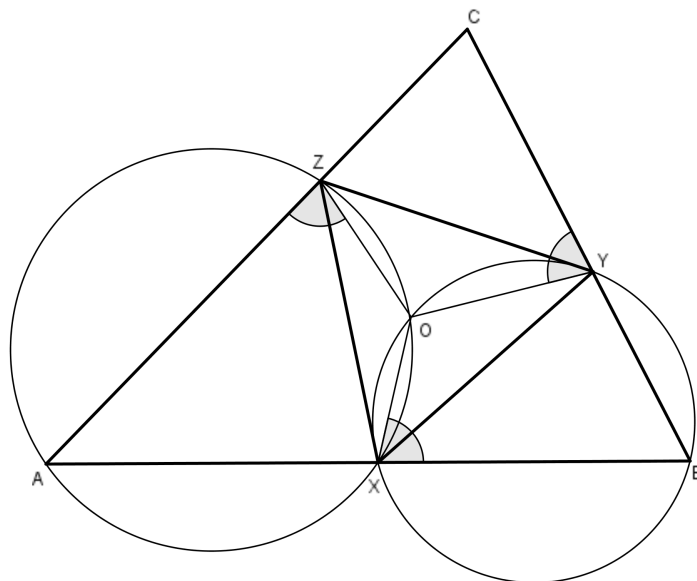
Legyen  $A_1$  az  $XY$  egyenes  $X$  pontja. Mivel a kerületi szögek tétele szerint  $\angle OXY = \angle OZY = \phi$ , ezért  $B_1$  a  $Z$  ponttal azonos. Legyen továbbá  $C_1$  a  $ZX$  egyenesnek olyan pontja, amelyre teljesül, hogy  $\angle OC_1Z = \phi$ . Mivel az  $A_1, B_1$  és  $C_1$  pontok mindegyike rajta van az  $XZ$  egyenesen, ezért kell, hogy az  $O$ -hoz tartozó valamennyi talpponti háromszög egyenes szakasszá fadjuljon el és ebből a tényből következik a bizonyítandó állítás.  $\square$

**4.17. Példa.** Szerkesszük meg azt az általános háromszöghöz hozzátartozó  $O$  pontot, amelyhez egy adott szabályos háromszögalak tartozik.

**Megoldás:**

Legyen adott az  $ABC\Delta$  általános háromszög (4.15. ábra). Ebbe írjunk bele egy olyan szabályos háromszöget, amelynek  $X; Y$  és  $Z$  csúcsai rendre az

$AB$ ;  $BC$  és  $CA$  oldalegyeneseken helyezkednek el. Messe egymást az  $AXZ\Delta$  és  $BYX\Delta$  háromszögek köré írt kör az  $X$ -en kívül az  $O$  pontban. Mivel  $AXOZ$  és  $BYOX$  húrnégyszögek, ezért  $\sphericalangle OXB = \sphericalangle OYC = \sphericalangle OZA$ , és ez éppen azt jelenti, hogy  $XYZ\Delta$  az  $O$ -hoz tartozó egyik talpponti háromszög és mivel ez szabályos, így az  $O$  pont által létrehozott valamennyi talpponti háromszög szabályos.



4.15. ábra.

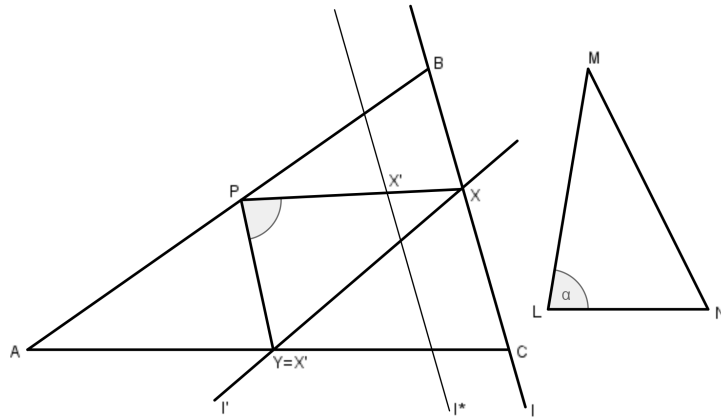
### Lássunk példákat most forgatva nyújtásra

4.18. *Példa.* Az  $ABC\Delta$  háromszögbe írjunk olyan  $PXY\Delta$  háromszöget, mely egy adott  $LMN\Delta$  háromszöghöz hasonló. (P az AB oldal adott pontja)

#### Megoldás:

Tételüzzök fel, hogy a feladat meg van oldva (4.16. ábra).

Az  $Y$  pontot az  $X$  pontból forgatva nyújtással kapjuk meg, ahol a forgatva nyújtás középpontja  $P$ , az aránya  $k = \frac{LN}{LM}$ , és a forgatás szöge  $\alpha = \sphericalangle MLN$ , ami a feladatban szereplő  $LMN\Delta$   $C$  csúcsánál lévő szög. Ebből következik, hogy az  $Y$  pont egy olyan egyenesen van, amelyet  $BC = l$ -ből  $P$  középpontú  $k = \frac{LN}{LM}$  arányú és  $\alpha$  szögű forgatva nyújtással kapunk. Tehát  $l^* = \overleftrightarrow{XY}$ . Ugyan akkor  $Y$  pont rajta van az  $\overleftrightarrow{AC}$  egyenesen is. Következésképpen  $Y$  éppen  $\overleftrightarrow{XY}$  és  $\overleftrightarrow{AC}$  metszéspontja lesz.



4.16. ábra.

Képletekkel:

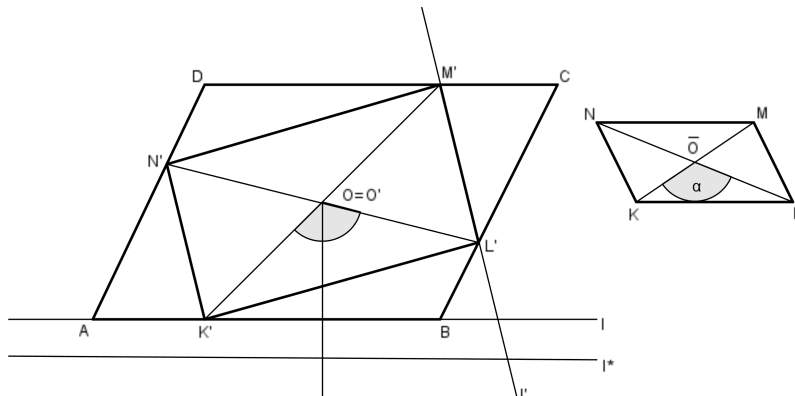
$$X \in \overleftrightarrow{BC} = l \implies X' \in l' \text{ és } X' = Y \in \overleftrightarrow{AC} \implies X' = Y \in l' \cap \overleftrightarrow{AC}$$

4.19. *Megjegyzés.*

- Ha  $l \parallel AC$ , akkor nincs megoldása.
- Ha  $l$  és  $AC$  egybesik, akkor végtelen sok megoldás van.

4.20. *Példa.* Az  $ABCD$  paralelogrammába írjunk egy adott  $KLMN$  paralelogrammához hasonló paralelogrammát.

**Megoldás:**

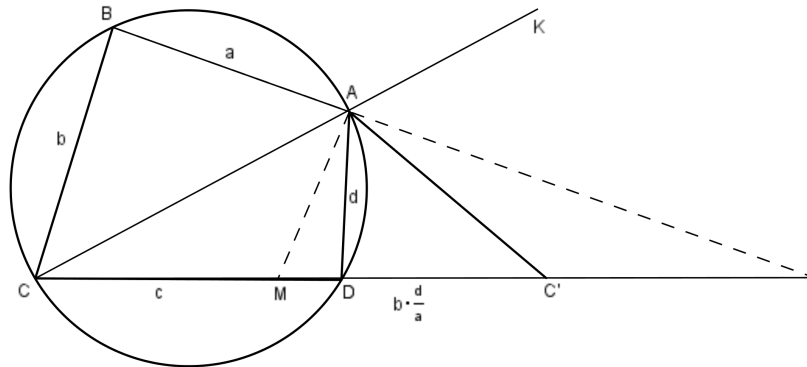


4.17. ábra.

Tételezzük fel, hogy  $K'L'M'N'$  paralelogramma az a keresett paralelogramma, amely  $ABCD$  paralelogrammába van beírva (4.17. ábra). A két paralelogramma átlóinak a metszéspontjai egybeesnek vagyis  $O = O'$ -vel. Ezek után  $K'L'O\Delta$  hasonló  $KL\bar{O}\Delta$ -gel, ahol  $\bar{O}$  a  $KLMN$  paralelogramma középpontja. Ebből következik, hogy az  $ABCD$  paralelogramma  $AB = l$  oldalegyenesét az  $O$  középpontú  $k = \frac{\overline{OL}}{\overline{OK}}$  arányú,  $K\bar{O}L\angle = \alpha$  szögű forgatva nyújtás olyan  $l'$  egyenesbe viszi, mely a  $\overleftrightarrow{BC}$  egyenessel való metszéspontja éppen a keresett paralelogramma  $L'$  csúcsa lesz.

4.21. *Példa.* Szerkesszünk olyan  $ABCD$  húrnégyszöget, melynek oldalai adottak:  $AB = a, BC = b, CD = c$  és  $DA = d$ .

**Megoldás:**



4.18. ábra.

Tételezzük fel, hogy a feladat meg van oldva (4.18. ábra). Ekkor az  $ABC\Delta$ -et az  $A$  középpontú  $k = \frac{d}{a}$  arányú  $\alpha = \angle BAD$  szögű forgatva nyújtás  $ADC'\Delta$ -be viszi. Tehát  $B' = D$  és a  $C$  képe  $C'$   $\overleftrightarrow{CD}$  egyenes meghosszabításra kerül, mert  $\angle ABC' + \angle ADC' = 180^\circ$ . Majd ezek után  $ACC'\Delta$ -ben ismert  $CD = c$  és  $DC' = \frac{d}{a}$  és  $AD = d$  és ezen kívül, hogy  $\frac{AC'}{AC} = \frac{d}{a}$  arány. Ezért megtudjuk szerkeszteni.

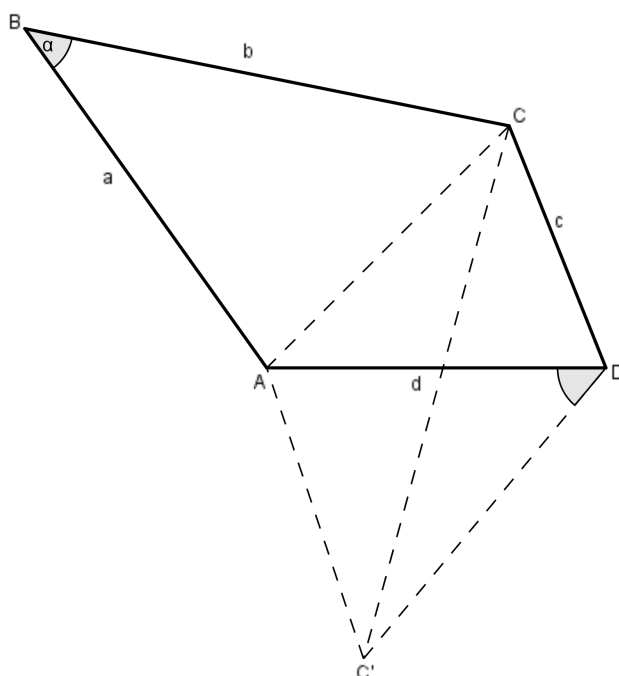
Szerkesztés menete:

1. Vegyük fel  $CC'$  szakaszt.
2. Az  $ACC'\Delta$   $A$  csúcsánál lévő szögfelező  $N$  és  $M$  pontokban metszik  $\overleftrightarrow{CC'}$  egyenest.

3. Tudjuk, hogy  $\frac{C'M}{CM} = \frac{C'N}{CN} = \frac{d}{a}$ . Ezeket a pontokat meg lehet szerkeszteni, mert  $\angle MAN = 90^\circ$ , következésképpen  $MN$  szakasz fölé rajzolt Thalesz kör és a  $D$  középpontú  $\alpha$  sugarú kör metszéspontja lesz.
4. Ha az  $AC$  szakasz fölé  $a$  és  $b$  oldalú háromszögeket szerkesztünk, akkor megkapjuk a keresett négyszöget.

4.22. *Megjegyzés.* A feladatnak vagy egy megoldása van, vagy nincs megoldása.

4.23. *Példa.* Szerkesszünk  $ABCD$  négyszöget, ha adott a  $B$  és  $D$  csúcánál lévő szögeknek összege és oldalainak hossza:  $AB = a, BC = b, CD = c$  és  $DA = d$ .



4.19. ábra.

### Megoldás:

Tételezzük fel, hogy  $ABCD$  négyszög meg van szerkesztve (4.19. ábra). Majd az  $ABC\Delta$ -et az  $A$  középpontú  $k = \frac{d}{a}$  arányú  $BAD\angle$  szögű forgatva nyújtás  $ADC'\angle$ -be viszi, ahol  $DC' = \frac{d}{a} \cdot b$  és  $\angle CDC' = \angle B + \angle D$ . Legyen  $M$  és  $N$  a  $CC'$  szakasz olyan pontjai, amelyre teljesülnek, hogy  $\frac{C'M}{CM} = \frac{C'N}{CN} = \frac{d}{a}$ . Ekkor  $A$  az  $MN$  szakasz fölé rajzolt Thálesz-kör és a  $D$  középpontú,  $d$  sugarú kör metszéspontja lesz.



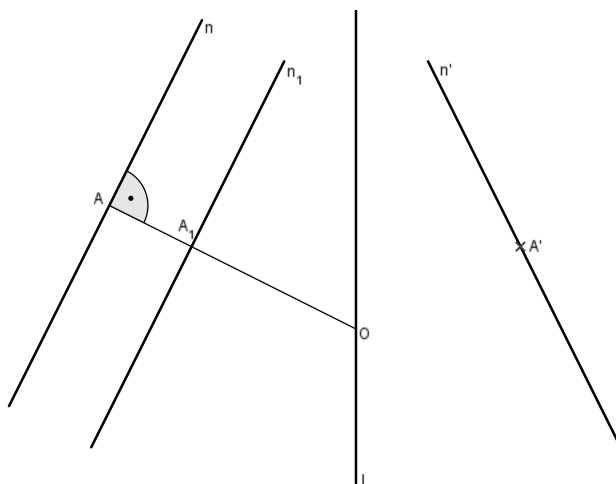
**5.1. Definíció.** Legyen az  $F_1$  alakzat középpontosan hasonló az  $F$ -hez az  $O$  középpontra vonatkozóan, ahol a hasonlóság aránya  $k$  pozitív. Az  $F'$  pedig az  $F_1$ -gyel tengelyesen szimmetrikus egy az  $O$  ponton átmenő egyenesre vonatkozóan. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $F'$  alakzatot  $F$ -ből  $k$  arányú **tükrözve nyújtással** kaptuk. Az  $O$  pontot és az  $l$  egyenest a **tükrözve nyújtás középpontjának** illetve **tengelyének** nevezzük (5.1. ábra).

5.2. *Megjegyzés.*

1. A tükrözve nyújtást úgy is meg lehet valósítani, hogy először az  $l$  egyenesre tükrözünk – ekkor az  $F$  alakzat  $F_2$ -be megy át –, majd utána pedig egy  $O$  középpontú és  $k$  arányú középpontos hasonlósággal  $F_2$ -t  $F'$ -be visszük.
2. A tükrözve nyújtás egy  $O$  középpontú középpontos hasonlóság és egy  $O$  ponton átmenő  $l$  egyenesre vonatkozó tükrözés szorzata.
3. Látható, hogy ha az  $F'$  alakzatot  $F$ -ből tükrözve nyújtással kapjuk, akkor  $F$ -hez is eljuthatunk  $F'$ -ből tükrözve nyújtással, de itt már a hasonlóság aránya  $\frac{1}{k}$ , míg az  $O$  középpont és az  $l$  tengely ugyanaz.

### Tükrözve nyújtás alkalmazása egy adott $l$ egyenesre

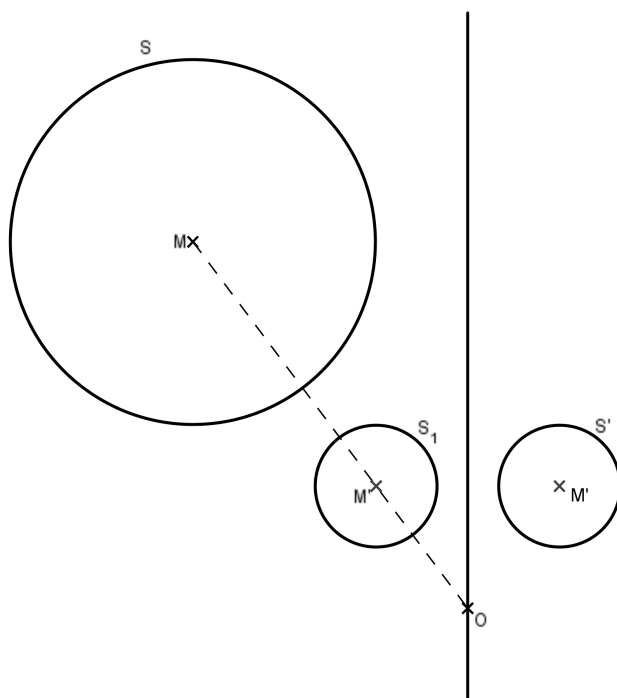
Először az  $n$  egyenesre alkalmazzuk az  $O$  középpontú  $k$  arányú középpontos hasonlóságot, így kapjuk meg az  $n_1$  egyenest. Majd ezt az  $n_1$  egyenest kell az  $O$  ponton átmenő  $l$  egyenesre (tengelyre) tükrözni. Ezzel megkaptuk a keresett egyenest (5.2. ábra).



5.2. ábra.

### Tükrözve nyújtás alkalmazása egy adott $S$ körre

Először az  $S$  körre alkalmazzuk az  $O$  középpontú  $k$  arányú középpontos hasonlóságot, így létrejön az  $S_1$  kör. Majd ezt tükrözzük az  $l$  egyenesre, mely egyenes az  $O$  ponton megy át. Ezzel megkaptuk a keresett  $S'$  kört (5.3. ábra).



5.3. ábra.

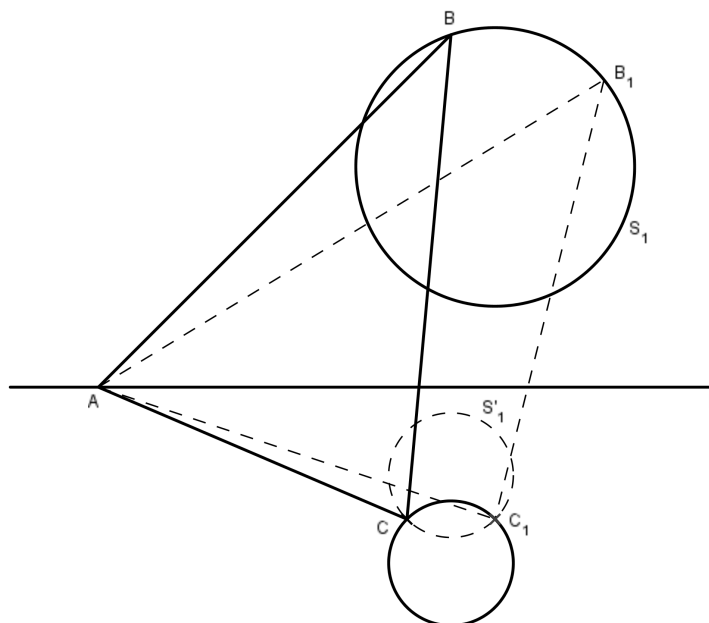
#### 5.3. Megjegyzés.

1. A valódi tükrözve nyújtásnak egyetlen fixpontja van: az  $O$  középpont, és a helyben maradó egyenese az  $l$  tengely és az  $O$  pontban ráemelt merőleges.
2. Az  $l$  egyenesre vonatkozó tökrözés egy  $k = 1$  arányú tükrözve nyújtásnak felel meg.

5.4. *Példa.* Adott az  $l$  egyenes, rajta az  $A$  pont és az  $S_1, S_2$  körök. Szerkesszünk olyan  $ABC\Delta$  háromszöget, melyben az  $l$  egyenes az  $A$  csúcsnál lévő szöget felezi, a  $B$  és  $C$  csúcsok sz  $S_1$  illetve  $S_2$  körön vannak, és az  $AB, AC$  oldalak aránya az adott  $m : n$  érték.

**Megoldás:**

Tegyük fel, hogy megszerkesztettük az  $ABC\Delta$  háromszöget (5.4. ábra). A  $B$  pontot a  $C$ -be egy  $A$  középpontú,  $l$  tengelyű és  $\frac{n}{m}$  arányú tükrözve nyújtás viszi át. Ha ezt a tükrözve nyújtást alkalmazzuk az  $S_1$  körre, akkor megkapjuk  $S'_1$  kört. Ezért a  $C$  pont egyidejűleg rajta van  $S_2$ -n és azon az  $S'_1$  körön, melyet  $S_1$ -ből a fenti tükrözve nyújtással kapjuk. A feladatnak attól függően van kettő vagy egy megoldása vagy egyetlenegy sem, hogy az  $S'_1$  körnek és az  $S_2$  körnek hány metszéspontja van.



5.4. ábra.

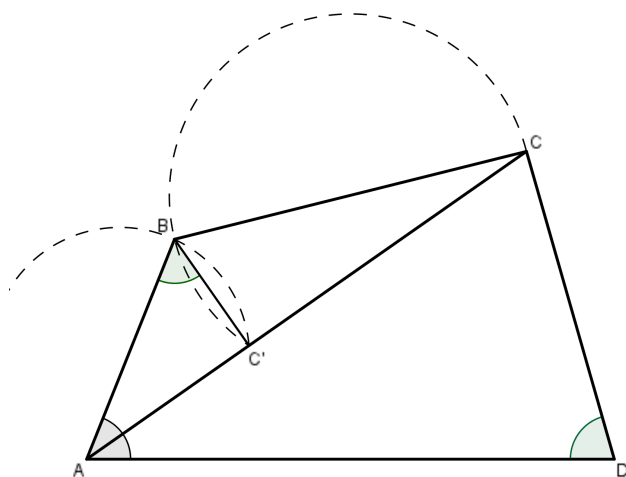
5.5. *Példa.* Szerkesszünk olyan  $ABCD$  négyszöget, amelynek  $AC$  átlója az  $A$  csúcsánál lévő szög szögfelezője, ha

- a; adott az  $AB$  és a  $CD$  oldal, az  $AC$  átló és a  $B$  és  $C$  csúcsoknál lévő szögek különbsége.
- b; adott a  $BC$  és a  $CD$  oldal, valamint az  $AB$  és az  $AD$  oldalak aránya és a  $B$  és a  $D$  csúcsoknál lévő szögek különbsége.
- c; adott az  $AB$  és az  $AD$  oldal, az  $AC$  átló valamint a  $BC$  és  $CD$  oldalak aránya.

**Megoldás:**

Tegyük fel, hogy megszerkesztettük az  $ABCD$  négyszöget (5.5. ábra). Az  $A$  középpontú,  $AC$  tengelyű és  $\frac{AB}{AD}$  arányú tükrözve nyújtás az  $ADC\Delta$  háromszöget az  $ABC'\Delta$  háromszögbe viszi.

- a; Ismerjük az  $AC$  átlót és továbbá az  $AC' = AC \cdot \frac{AB}{AD}$  összefüggést is. Továbbá tudjuk azt is, hogy  $ABC'\sphericalangle = ADC\sphericalangle$  és ez azt jelenti, hogy a  $C'BC\sphericalangle = ABC\sphericalangle - ADC\sphericalangle = B\sphericalangle - D\sphericalangle$  vagyis  $B$  csúcs a  $CC'$  szakasz fölé rajzolt  $B\sphericalangle - D\sphericalangle$  látószögű körív és az  $A$  középpontú,  $AB$  sugarú kör metszéspontja lesz. Ezek után a  $D$  csúcs már könnyen megszerkeszthető. A feladatnak legfeljebb egy megoldása van.



5.5. ábra.

- b; Mivel ismerjük a  $BC$  és  $BC' = DC \cdot \frac{AB}{AD}$  oldalakat és továbbá, hogy a  $C'BC\sphericalangle = B\sphericalangle - D\sphericalangle$ , így a  $CBC'\Delta$  háromszöget meg tudjuk szerkeszteni. Az  $A$  csúcs a  $CC'$  egyenes olyan pontja lesz, hogy  $\frac{AC'}{AC} = \frac{AB}{AD}$ . A feladatnak egyetlen megoldása van.
- c; Itt ismerjük a  $BC : BC' = BC : (CD \cdot \frac{AB}{AD}) = \frac{BC}{CD} = \frac{AD}{AB}$  arányt. A  $B$  pontot úgy kapjuk meg, hogy megszerkesztjük azon pontok mértani helyét, melyeknek a  $C$  és a  $C'$  pontoktól mért távolságainak aránya az adott  $\frac{BC}{CD} = \frac{AD}{AB}$  érték és vesszük ennek és az  $A$  középpontú,  $AB$  sugarú körnek a metszéspontját. Ennek a feladatnak is legfeljebb egy megoldása van.

## 6. fejezet

# Fixponttétel a projektív síkon

6.1. *Megjegyzés.* A projektív sík két legfontosabb fogalma: az **ideális pont** és az **ideális egyenes**.

- A legegyszerűbben az ideális pontot úgy tudjuk elképzelni, hogy az egyenes pontjainak halmazához hozzácsatolunk egy újabb pontot, amely következő tulajdonságokkal rendelkezik:
  - a sík párhuzamos egyenesének a halmazához hozzárendelünk egy ideális pontot, amely minden párhuzamos egyenesen rajta van, csakis ezeken az egyeneseken;
  - egy adott egyenesnek pontosan csak egy ideális pontja van;
  - egy ideális pontot az egyenes nyaláb egy tetszőleges egyenesével adhatunk meg;
  - a párhuzamos egyenesek ezzel az ideális ponttal egy ponton átmenő egyenesekké vagyis metszőkké válnak

vagyis röviden **az azonos irányvektorú egyeneseknek azonos az ideális pontja**.

- Egy sík egyenesének ideális pontjai a sík ideális egyenesét alkotják. Az ideális egyenes néhány fontosabb jellemzője:
  - A sík ideális egyenese a sík minden egyenesét metszi.
  - Egy adott síknak pontosan csak egy ideális egyenese van.
  - A párhuzamos síkoknak közös ideális egyenesük van.

- Egy ideális egyenest egy síkkal vagy pedig a vele párhuzamos síkokkal lehet magadni.
- Az ideális egyenesek halmazát **ideális síknak** nevezzük.

Az előbb megismert ideális elemekkel bővített síkot **projektív síknak** nevezzük.

6.2. *Megjegyzés.* Az ideális pontok mellett a sík többi pontját **közönséges pontoknak** nevezzük.

Egy közönséges és egy ideális pontot összekötő egyenesen olyan egyenest értünk, amely átmegy az adott közönséges ponton és párhuzamos az ideális pontot megadó egyenessel.

Az ideális pont és egyenes megjelenése maga után vonta az új koordináta fogalom megjelenését, így jelent meg a pont és az egyenes Descartes-féle homogén koordinátái.

**6.3. Definíció.** Az  $\{i, j, o\}$  síkbeli koordináta-rendszerben a  $P(x, y)$  ponthoz rendeljük hozzá az összes olyan  $(x_1, x_2, x_3)$  számhármast, amelyre  $\frac{x_1}{x_3} = x$  és  $\frac{x_2}{x_3} = y$  teljesül. Az ilyen számhármast a  $P$  **pont homogén koordinátáinak** nevezzük.

**6.4. Definíció.** Az  $ax + by + c = 0$  egyenletű  $e$  egyeneshez rendeljük hozzá azt az  $(u_1, u_2, u_3)$  számhármast, amelyre  $u_1 : u_2 : u_3 = a : b : c$  azaz valamilyen  $\lambda \neq 0$  számmal  $u_1 = \lambda a, u_2 = \lambda b, u_3 = \lambda c$ . Ezt az  $(u_1, u_2, u_3)$  számhármast az  $e$  **egyenes homogén koordinátájának** nevezzük.

**6.5. Következmény.** Az  $x = (x_1, x_2, x_3)$  közönséges pont  $e$  egyenesen való illeszkedésének feltétele, hogy  $ex = 0$  vagyis  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ .

**6.6. Definíció (Dualitás elve).** Minden olyan tételből, amelyben csak a pont, az egyenes és a köztük lévő kapcsolatként az illeszkedés szerepel, érvényes tételt kapunk, ha a tételben a pont helyett egyenest, egyenes helyett pontot, illeszkedés helyett illeszkedést mondunk.

6.7. *Megjegyzés.* Tegyük fel, hogy  $ux = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$  egyenlet az  $u$  egyenes egyenlete.

- Ha  $u$  rögzített, akkor azt szoktuk modani, hogy  $u$  pontsorának az egyenlete.  
**Pontsor:** egy egyenesre illeszkedő pontok halmaza.
- Ha  $x$  rögzített, akkor pedig azt mondjuk, hogy  $x$  sugársorának az egyenlete.  
**Sugársor:** az egy pontra illeszkedő egyenesek halmaza.

**6.8. Definíció.** Az  $ABC\Delta$  és az  $A'B'C'\Delta$  háromszögek egy  $S$  pontra nézve **perspektívek**, ha az  $AA'$ ,  $BB'$  és  $CC'$  egyenesek az  $S$  tartópontú sugársorhoz tartoznak vagyis átmennek az  $S$  ponton.

**6.9. Definíció.** Az  $ABC\Delta$  és az  $A'B'C'\Delta$  háromszögek egy  $s$  egyenesre nézve (**tengelyesen**) **perspektívek**, ha az  $AB, A'B'; BC, B'C'; CA, C'A'$  egyenespárok  $X, Y, Z$  metszéspontjai az  $s$  egyenes pontsorához tartoznak vagyis illeszkednek az  $s$  egyenesre.

**6.10. Tétel (Desargues-féle háromszögtétel).** *Ha az  $ABC\Delta$  és az  $A'B'C'\Delta$  háromszögek az  $S$  pontra nézve perspektívek, akkor tengelyesen is perspektívek és ez fordítva is igaz vagyis: ha tengelyesen perspektívek, akkor pontra nézve is azok.*

**6.11. Definíció (Kettősviszony).**

- Legyen  $X, Y$  és  $Z$  közönséges pontok homogén koordinátahármasai rendre  $x, y$  és  $z$  rendre és legyen továbbá ezen pontok egy egyenesre illeszkedő pontok vagyis  $z = \lambda x + \mu y$ , akkor az  $(XYZ)$  osztóviszony értéke éppen  $\frac{\mu y_3}{\lambda x_3}$ .
- Legyen most  $X, Y, Z$  és  $U$  egy egyenes négy pontja és homogén koordinátáik rendre  $x, y, z$  és  $u$ . Tegyük fel, hogy  $z = \lambda x + \mu y$  és  $u = \rho x + \sigma y$ , akkor az  $X, Y, Z$  és  $U$  pontnégyes kettősviszonyán a  $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\sigma}{\rho}$  hányadost értjük.  
Jelölésben:  $(XYZU) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\sigma}{\rho}$

A Kettősviszony legfontosabb tulajdonságai:

1. Ha  $X, Y, Z$  és  $U$  közönséges pontok, akkor  $(XYZU) = \frac{XYZ}{XYU}$ .
2. Ha  $U$  az  $XY$  egyenes ideális pontja, akkor  $(XYZU) = -(XYZ)$ .
3. **Egyértelműségi tétel:** Ha  $(XYZU) = (XYZU')$ , akkor  $U = U'$ .
4. Azt a pontnégyest, amelynek kettősviszonya  $-1$ , azt **harmónikus pontnégyesnek** nevezzük.  
Ha  $C$  az  $AB$  szakasz felezőpontja,  $D$  pedig ideális pontja, akkor  $A, B, C$  és  $D$  harmónikus pontnégyes.
5. Az  $(ABCD)$  kettősviszonya,
  - akkor pozitív, ha  $C$  és  $D$  az  $AB$  szakaszon belül vagy azon kívül van,

- akkor negatív, ha  $C$  és  $D$  közül az egyik az  $AB$  szakszon belül, míg a másik azon kívül van.

### Síkbeli kollinációk

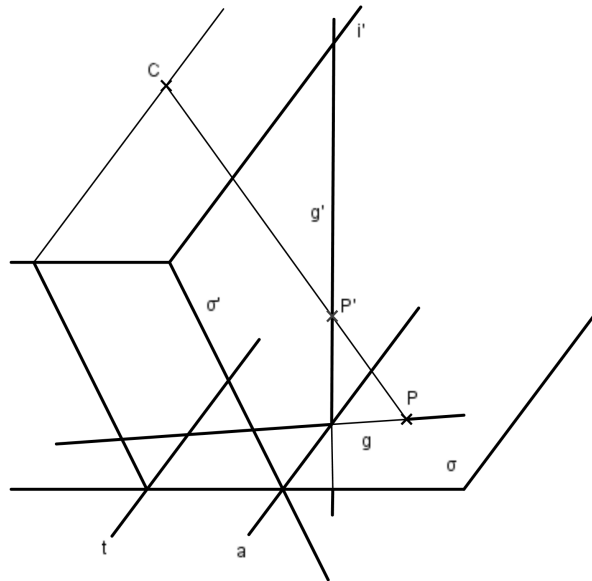
**6.12. Definíció.** Egy transzformáció akkor és csakis akkor hasonlóság, ha egyenestartó és szögtartó.

Az **egyenestartás** azt jelenti, hogy ha  $A, B$  és  $C$  az egyenes három pontja, akkor az  $A', B'$  és  $C'$  is egy egyenesen vannak.

A **szögtartás** pedig azt jelenti, hogy  $A$  és  $B$  a  $C$  csúcsú szög egy-egy szárán helyezkedik el, akkor  $ACB \sphericalangle = A'B'C' \sphericalangle$ .

**6.13. Definíció.** A projektív tér egyenestartó transzformációit **kollineációknak** nevezzük.

A továbbiakban a kétdimenziós kollineációkkal, azaz a síknak síkra való egyenestartó leképezéseivel foglalkozunk. Ezek közül a legismertebb a **középpontos (centrális) vetítések**.



6.1. ábra.

**6.14. Definíció. Középpontos (centrális) vetítés** Legyen adott a  $\sigma$  és a  $\sigma'$  sík, és az egyikükre sem illeszkedő  $C$  pont. Ezt követően rendeljük hozzá a  $\sigma$  sík minden  $P$  pontjához a  $CP$  egyenesnek azt a  $P'$  pontját, amely a  $\sigma'$  és a  $CP$  metszeteként áll elő (6.1. ábra).

6.15. *Megjegyzés.* Ez a hozzárendelés egyenestartó, mert ha  $g$  a  $\sigma$  sík tetszőleges egyenese, akkor a  $C$  és  $g$  által meghatározott síknak és a  $\sigma'$ -nek a metszésvonala  $g'$ , tartalmazza a  $g$  egyenes minden pontjának a képét. A  $\sigma$  és  $\sigma'$  síkok metszésvonala, az  $e$  egyenes pontjai fixpontok.

6.16. *Megjegyzés.* Legyen a  $\sigma$  sík ideális egyenese  $i$ . Ennek a képét,  $i$ -t oly módon kaphatjuk meg, hogy a  $C$  ponton át a  $\sigma$ -val párhuzamosan fektetett sík metszi ki  $\sigma'$  síkból. Továbbá a  $C$  ponton át a  $\sigma'$ -vel párhuzamosan húzott sík  $\sigma$ -t olyan  $t$  egyenesben metszi, amelynek a  $\sigma'$  sík ideális egyenese,  $t'$ . Ezzel beláttuk, hogy  $\sigma$  és  $\sigma'$  pontjai között a megfeleltetés valóban kölcsönösen egyértelmű.

**A középpontos vetítés csak a projektív térben kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés,** mert például: a  $t$  egyenes pontjainak nincsenek megfelelői a  $\sigma'$  síkon.

**6.17. Tétel (Pappoz-Steiner tétel).** *Ha  $a, b, c$  és  $d$  egyenesek egy sugár-sor egyenesei és egy  $e$  egyenes ezeket rendre az  $x, y, z$  és  $u$  pontokban metszi, akkor az így kapott pontnégyesnek és sugárnégyesnek a kettősviszonya egyenlő.*

**6.18. Következmény.** A középpontos vetítés egy pontnégyes kettősviszonyát nem változtatja meg.

6.19. *Megjegyzés.* Ha a  $\sigma'$  síkot ráforgatjuk a  $\sigma$  síkra az  $a$  egyenes mentén, akkor az így kapott  $\sigma = \sigma'$  síkban a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, egyenestartó és kettősviszonytartó.

**6.20. Definíció.** A síkot önmagára leképező kollineációt, amelynek van olyan tengelye, melynek minden pontja fixpont **axiális (tengelyes) kollineáció**nak nevezzük.

6.21. *Megjegyzés.* Az axiális kollineáció duális párja a **centrális (középpontos) kollineáció**, ennek középpontja van, vagyis egy olyan fixpont, melyen átmenő minden egyenes fixegyenes.

6.22. *Megjegyzés.*

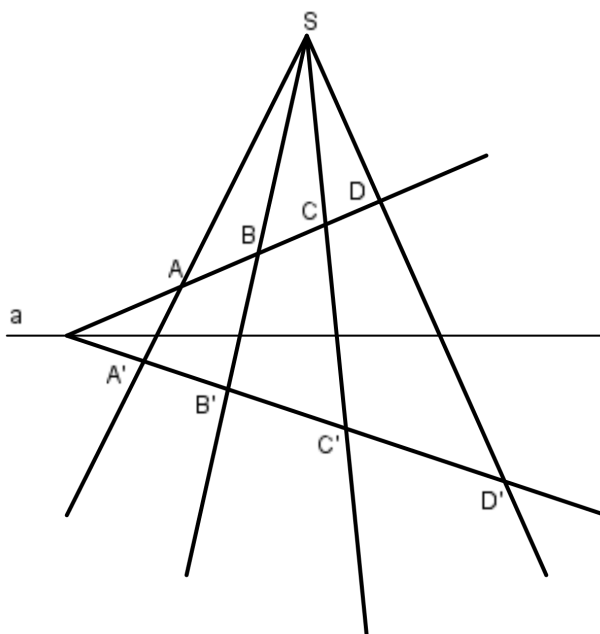
- Két fixpontot összekötő egyenes fixegyenes. Ha  $F_1$  és  $F_2$  fixek és  $A$  az  $F_1F_2$  egyenes egy pontja, akkor természetesen  $A'$ -nek is rajta kell lennie az  $F_1$  és  $F_2$  pontok által meghatározott egyenesen.
- Két fixegyenes metszéspontja fixpont.
- Ha a kollineációnak két tengelye van, akkor az azonosság. Mert a sík minden pontján átmegegy két fixegyenes, amelyek a tengelyeket fixpontokban metszi.

- Egy kollineációnak nem lehet két középpontja. Mert a sík tetszőleges  $P$  pontját ezekkel összekötve két fixegyeneset kapunk, tehát  $P$  is fixpont, így van két egyenes, amelynek minden pontja fixpont, vagyis van két tengely, ami lehetetlen.
- Ha a kollineációnak van a tengelyen kívüli fixpontja, akkor az középpont. Mert a rajta átmenő minden egyenesnek van még egy fixpontja, a tengellyel alkotott metszéspontja.

**6.23. Definíció.** Kollineációnál a centrum és a tengely mindig együttesen lép fel, az ilyen kollineációkat **centrális-axiális kollineációknak** vagy rövidebben **c-a kollineációknak** nevezzük.

Ha a c-a kollineáció középpontja a tengelyen van, akkor **elációról** beszélünk.

**6.24. Tétel.** A c-a kollineáció kettősvizonytartó leképezés.

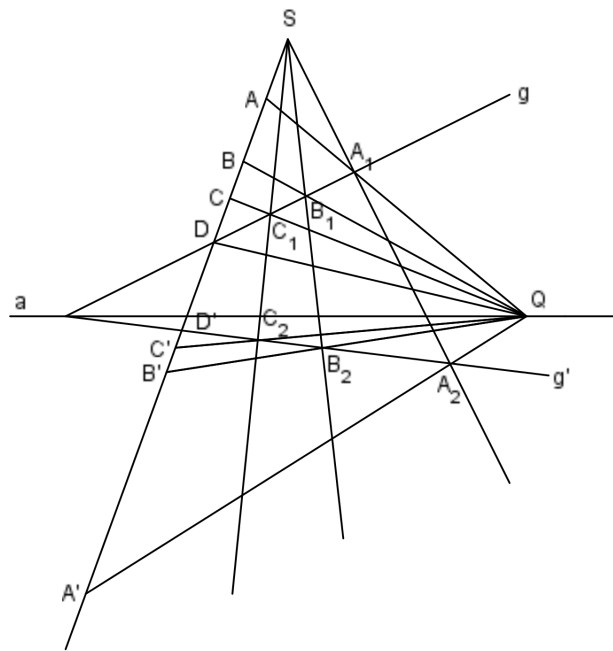


6.2. ábra.

*Bizonyítás.* A Papposz-Steiner tétel alapján elegendő ezt a pontnégyesek kettősvizonyára megmutatni.

Ha az  $A, B, C$  és  $D$  pontok egyenese nem megy át az  $S$  centrumon, akkor az állítás következik abból, hogy  $A, B, C$  és  $D$  pontnégyes  $S$ -ből való vetülete éppen az  $A', B', C'$  és  $D'$  pontnégyes, tehát  $(ABCD) = (A'B'C'D')$

(6.2. ábra). Ha viszont az  $A, B, C$  és  $D$  pontok az  $S$ -en átmenő egyenesen vannak, akkor összekötjük ezeket az  $a$  tengely egy az egyenesükre nem illeszkedő  $Q$  pontjával. Majd  $QA, QB, QC$  és  $QD$  egyeneseket egy  $S$ -re nem illeszkedő  $g$  egyenes az  $A_1, B_1, C_1$  és  $D$  pontokban metszi, ezeket a kollineáció az  $A_2, B_2, C_2$  és  $D'$  pontokba viszi át. Azonban  $Q$ -ból az utóbbiak vetületei az  $SA$  egyenesen éppen az  $A', B', C'$  és  $D'$  pontok és a vetítések miatt  $(ABCD) = (A_1B_1C_1D) = (A_2B_2C_2D') = (A'B'C'D')$  (6.3. ábra).  $\square$



6.3. ábra.

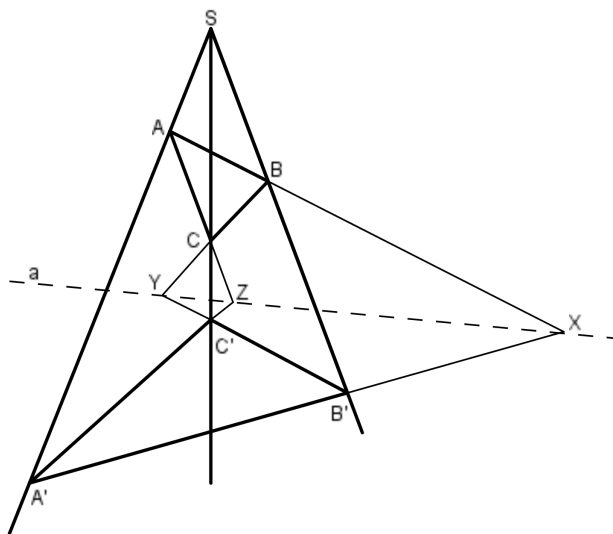
**6.25. Tétel.** *A síkbeli kollineációk csoportot alkotnak. Minden síkbeli kollineáció előállítható  $c$ -a kollineációk szorzataként.*

Ezen tételből már egyszerűen következik a **kollineációk alaptételének** nevezett összefüggés, melynek a következő két formája ismert:

**6.26. Tétel (Kollineációk alaptétele).**

1. Minden kollineáció kettőviszonytartó.
2. Ha adott a síkon két pontnégyes:  $A, B, C, D$  és  $A', B', C', D'$  úgy, hogy egyik pontnégyesben sincs három pont egy egyenesen, akkor egy és csak egy olyan kollineáció van, amely az  $A, B, C, D$  pontokat rendre az  $A', B', C', D'$  pontokba viszi át.

**6.27. Tétel.** Legyen  $S$  a sík egy tetszőleges pontja és a egy egyenese. Legyen továbbá adva egy  $P, P'$  pontpár, amelyek összekötő egyenese átmegy az  $S$ -en. Ez annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzék egyértelműen olyan  $c$ -a kollineáció, amelynek középpontja  $S$ , tengelye  $a$  és  $P$ -t  $P'$ -be viszi át az, hogy a síkon érvényes legyen a Desargues-tétel.



6.4. ábra.

*Bizonyítás.* Ha a  $c$ -a kollineációk léteznek, akkor érvényes a Desargues-tétel. Legyen  $ABC\Delta$  és  $A'B'C'\Delta$  két olyan háromszög, amelyek az  $S$  pontra perspektívek (6.4. ábra). Legyen továbbá  $AB$  és  $A'B'$  egyenesek metszéspontja  $X$ ,  $AC$  és  $A'C'$  egyenesek metszéspontja  $Z$ , és legyen  $a$  egyenes az  $X$  és  $Z$  pontokat tartalmazó egyenes. Az  $S$  középpontú,  $a$  tengelyű és az  $A$   $A'$ -be vivő  $c$ -a kollineáció az  $X$ -et önmagába viszi át, ezért  $AX$  egyenes képe  $A'X$ , következésképpen  $B$  képe  $B'$ .

Az előzőekhez hasonlóan:

$AZ$  képe  $A'Z$ , ezért  $C$  képe  $C'$ , ebből következik, hogy  $BC$  képe  $B'C'$ , ezért e két egyenes az  $a$  tengely  $Y$  pontjában metszik egymást. Tehát a két háromszög tengelyesen perspektív. Most tegyük fel, hogy a síkon érvényes a Desargues-tétel.

Legyen adva egy  $S$  pont,  $a$  egyenes és egy olyan  $A$  és  $A'$  pontpár, amelyre teljesül, hogy  $AA'$  egyenes átmegy az  $S$  ponton. Ha a megadott adatokkal létezik a  $c$ -a kollineáció, akkor ez egyértelmű. Legyen  $B$  a sík  $SA$  egyenesére nem illeszkedő pontja és messe  $AB$  egyenes  $a$ -t  $X$  pontban.  $B$  képének,  $B'$ -nek szükségképpen rajta kell lennie az  $SB$  és  $XA'$  egyeneseken, tehát a

helyzete egyértelműen meghatározott. A  $c$ -a kollineáció létezéséhez azt kell belátnunk, hogy ha a sík tetszőleges  $C$  pontjának a képét az előbbi módon akár az  $A$ , akár a  $B$  pont segítségével szerkesztjük meg, akkor képként ugyanazt a  $C'$  pontot kapjuk.

**Bizonyítás:**

Messe  $AC$  az  $a$  egyenest  $Z$  pontban, és  $BC$  pedig  $Y$  pontban.  $C'$  pontnak rajta kell lennie az  $A'Z$  és  $B'Y$  egyeneseken, tehát  $C'$  ezek metszéspontja. Így azonban az  $ABC\Delta$  és  $A'B'C'\Delta$  háromszögek az  $a$  egyenesre perspektívek, ezért az  $S$  pontra nézve is azok. Tehát  $C$  és  $C'$  összekötő egyenese átmegy  $S$ -en és így  $C'$  valóban  $c$ -a kollineációs képe a  $C$  pontnak.  $\square$

6.28. *Megjegyzés (A csoport algebrai definíciója).* **Csoport**nak nevezünk egy olyan  $G$  halmazt, amelyen definiálva van egy  $*$  kétváltozós művelet és teljesülnek a következő feltételek:

1. a  $*$  művelet asszociatív;
2. a  $G$  halmaznak van  $e$  neutrális eleme;
3. a  $G$  halmaz minden  $a$  eleméhez hozzárendelhető egy olyan  $b \in G$  elem, hogy  $a * b = b * a = e$ . A  $b$  elemet az  $a$  elem inverzének nevezzük és  $a^{-1}$ -gyel jelöljük.

**Kommutatív csoport:** Ha a csoportművelet kommutatív, akkor a csoportot **kommutatív csoport**nak vagy **Abel-csoport**nak nevezzük.

6.29. *Megjegyzés (Hasonlóságok alaptulajdonságai).*

- **Definíció:** A **hasonlóságok (hasonlósági transzformációk)** a leképezések osztályát alkotják. A hasonlóság olyan kölcsönösen egyértelmű ponttranszformáció, amely tetszőleges  $P, Q$  pontpárhoz olyan  $P', Q'$  pontpárt rendel, amelyre  $\frac{P'Q'}{PQ} = \lambda$ .

A  $\lambda$  neve: a **hasonlóság aránya**,  $P'$ -t  $P$  **képének**,  $P$ -t  $P'$  **őisének** nevezzük.

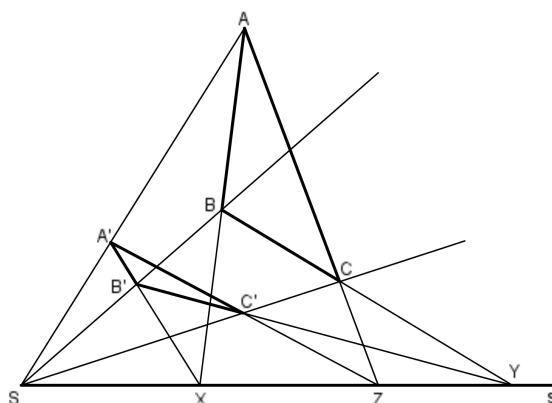
- A sík hasonlósági csoportot alkotnak. Mert
  - a  $*$  művelet: a transzformációk egymás utáni alkalmazása, amit a **transzformációk szorzatának** nevezzük. A transzformációk szorzata asszociatív vagyis a  $t_1, t_2, t_3$  transzformációkra teljesül, hogy  $(t_1 t_2) t_3 = t_1 (t_2 t_3)$ .
  - az  $e$  neutrális elem: olyan transzformáció, amely minden ponthoz önmagát rendeli, amit **azonosság**nak vagy **egységtranszformáció**nak nevezzük.

- Azt a transzformációt pedig, amely a  $P'$  pontot visszaviszi a  $P$  pontba az eredeti transzformáció inverzének nevezzük. A  $t$  transzformáció inverzét  $t^{-1}$ -nel jelöljük. A transzformációnak és inverzének szorzata egységtanszformáció:  $tt^{-1} = t^{-1}t = e$ .

**6.30. Tétel.** *A közös tengelyű c-a kollineációk csoportot alkotnak.*

**6.31. Tétel.** *A közös tengelyű elációk kommutatív csoportot alkotnak.*

**6.32. Tétel. kis Desargues-tétel:** *Ha az  $ABC\Delta$  és  $A'B'C'\Delta$  háromszögek olyanok, hogy az  $AA', BB', CC'$  egyenesek egy  $S$  ponton mennek át és az  $AB$  és  $A'B'$  egyenesek egy  $X$  pontban, a  $BC$  és  $B'C'$  egyenesek egy  $Y$  pontban metszik egymást, és  $S$  az  $XY = s$  egyenesen van, akkor a  $CA$  és  $C'A'$  egyenesek  $Z$  metszéspontja is rajta van az  $s$  egyenesen (6.5. ábra).*



6.5. ábra.

**6.33. Megjegyzés.** A c-a kollineációk speciális esetei tartalmazzák az elemi síkgeometria leggyakoribb transzformációit.

A c-a kollineáció:

1. tengelyes affinitás, ha a középpont ideális pont.
2. középpontos hasonlóság, ha a tengely ideális egyenes.
3. tengelyes tükrözés, ha a középpont a tengelyre merőleges irányú ideális pont.
4. eltolás, ha eláció, amelynél a tengely ideális egyenes, a középpont ideális pont.

**6.34. Tétel.** *A projektív síkon minden projektív transzformációnak van fixpontja és fixegyenes.*

## 7. fejezet

### Összegzés

A szakdolgozat megírásakor arra törekedtem, hogy olyan témaköröket fejtssek ki jobban és világítsak meg, amelyeket az egyetemen csak részben vagy egyáltalán nem érintettünk, de szorosan kapcsolódnak a fixponttételekhez. Ezen megfontolásból a legelső két fejezetre, a hasonlósági és az egybevágósági transzformációkra kevésbé tértem ki, mivel ezeket az elmúlt években mélyrehatóan megismertük.

Az ezeket követő affin transzformáció a fixponttételekre való rálátásomat szélesítette. Ennek köszönhetően más szemszögből kezdtem szemlélni a témát. A szemléletváltás akkor következett be, amikor kimondtuk azt a tételt, ami világossá teszi számunkra, hogy mikor is létezik az affin transzformációnak egyértelműen fixpontja, majd ezt követően ennek következményeként visszajutunk a hasonlóságok fixponttételéhez. A további két témakör megírásakor törekedtem, hogy minél érthetőbben és szemléletesebben mutassam be a forgatva és a tükrözve nyújtást. Ezt próbáltam a feladat választással még eredményesebbé tenni. A példák segítségével igyekeztem kiaknázni az ezekben a transzformációkban rejlő lehetőségeket. A megértést szolgálják a feladatokhoz készített nagy ábrák is. Az utolsó témakört az egyetemen csak részben érintettük, így kihívást jelentett a projektív síkban a fixpontétel kidolgozása. Ennek megértése és elmagyarázása céljából jobban belemélyedtem és részletesebben fejtettem ki a háttérismereteket.

Zárásképpen úgy gondolom, hogy a szakdolgozatomból a forgatva és a tükrözve nyújtás az a két témakör, amelyeket középiskolában is mernék tanítani. Természetesen ezt csak érdekességképpen mutatnám be. Maximum 1-2 órában megismertetném az osztályomat az adott fogalmakkal és az elmondottakat pedig példákkal illusztrálnám.

# Irodalomjegyzék

- [1] Kovács Zoltán: *Geometria. Az euklideszi geometria metrikus megalapozása*, Debreceni Egyetem, Kossuth Egyetemi Kiadó, 2002.
- [2] Kovács Zoltán: *On the fixed points of an affine transformation: an elementary view*, *Teaching Mathematics and Computer Science* 4/1 (2006) 101-110.
- [3] Molnár Emil: *Elemi matematika II. (Geometriai transzformációk)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [4] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1998.
- [5] Reiman István: *A geometria és határterületei*, Gondolat, Budapest, 1986.
- [6] Bódi Béla: *Algebra I. A csoportelmélet alapjai*, Debreceni Egyetem, Kossuth Egyetemi Kiadó, 2002.