Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Az információelmélet néhány függvényegyenletének stabilitása

Stability of some functional equations stemming from the theory of information

Gselmann Eszter

Témavezető: Dr. Maksa Gyula

Debreceni Egyetem

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2010

Bevezetés

Az információ fogalmának megalkotása minden kétséget kizáróan a huszadik század második felének egyik legnagyobb vívmánya, hiszen akár a hétköznapi életben is gyakran vagyunk részesei információs folyamatoknak. A modern technika minden nagy újításával kapcsolatban központi szerepet játszik az információtovábbítás, -feldolgozás illetve -tárolás. Az információ azonban sokféleképpen nyilvánulhat meg, például szóban, írásban vagy elektronikusan is.

Az információ matematikai elmélete annak köszönhető, hogy felismerték: az információ mennyiségét számmal lehet jellemezni – hasonlóan ahhoz, ahogyan számmal lehet kifejezni például a távolságot az időt vagy a tömeget.

Miután már az információ mennyiségét számszerűleg mérni tudjuk, az ,,információ" szót tulajdonképpen kétféle – konkrét és absztrakt, illetve kvalitatív és kvantitatív – értelemben használjuk. Információ alatt értjük egyrészt magát a konkrét információt (értesülést), másrészt ennek számszerű mértékét, vagyis a konkrét információban foglalt absztrakt információmenynyiség mértékszámát. Célszerű tehát a konkrét információ számszerű információtartalmát információmennyiségnek nevezni.

A kérdés ezek után az, hogy hogyan történjék az információ mérése. Ezt általában úgy tesszük meg, hogy az információmértékekre bizonyos természetes és lehetőleg gyenge tulajdonságok fennállását követeljük meg. Ebből fakadóan a jellemzési tételek során függvényegyenletek jelennek meg. Eközben számottevően támaszkodunk majd a függvényegyenletek elméletére.

A disszertáció célja néhány – az információelméletben szereplő – függvényegyenlet stabilitásának a vizsgálata. A szerző által elért eredményeket a disszertáció harmadik és negyedik fejezete tartalmazza. Most röviden ismertetni fogjuk ezeket az eredményeket. Mindezek előtt azonban a függvényegyenletek elméletébe engedünk bepillantást, azokat a definíciókat és állításokat soroljuk fel, melyek a későbbi fejezetek megértéséhez szükségesek.

1 Információmértékek

A továbbiakban az $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ és a $\mathbb{C}$ szimbólumok rendre a természetes (pozitív egész), az egész, a racionális, a valós és a komplex számok halmazát jelölik, valamint a pozitív valós, illetve a nemnegatív valós számok halmazára innentől kezdve az $\mathbb{R}_{++}$ és az $\mathbb{R}_{+}$ jelöléseket fogjuk használni.

Legyen $n \geq 2$ egy tetszőleges természetes szám, és tekintsük a

$$\Gamma_n^\circ = \left\{ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n | p_i > 0, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$$

és a

$$\Gamma_n = \left\{ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n | p_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$$

halmazokat. Ekkor az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ függvénysorozatot *információmértéknek* nevezzük, ha minden $n \geq 2$ esetén $I_n : \Gamma_n^\circ \to \mathbb{R}$ vagy minden $n \geq 2$ esetén $I_n : \Gamma_n \to \mathbb{R}$.

A legismertebb információmértékek a *Shannon–entrópia* (lásd Shannon [15]), azaz

$$H_n^1(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i), \quad (p_1, \ldots, p_n \in \Gamma_n^\circ, n \geq 2)$$

és az úgynevezett *α–adfokú entrópia* vagy *Havrda–Charvát entrópia* (lásd Aczél–Daróczy [1], Daróczy [4] és Tsallis [17]), amit a

$$H_n^\alpha(p_1, \ldots, p_n) = \begin{cases} \left(2^{1-\alpha} - 1\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha - 1\right), & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ H_n^1(p_1, \ldots, p_n), & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}$$

módon értelmezünk minden $n \geq 2$ és $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén. Egyszerű számolással látható be, hogy minden $n \geq 2$ és tetszőleges $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén

$$\lim_{\alpha \to 1} H_n^\alpha (p_1, \ldots, p_n) = H_n^1 (p_1, \ldots, p_n),$$

azaz a Shannon–entrópia folytonosan beágyazható az α–adfokú entrópiák családjába.

A információmérték fenti definíciója nyilván túlságosan általános ahhoz, hogy a Shannon–entrópiát vagy az α–adfokú entrópiát jellemezni tudjuk. Felvetődik ezek után az a kérdés, hogy az információmértékekről milyen algebrai, illetve analitikus tulajdonságokat követeljünk meg, hogy az megegyezzen a fenti információmértékek valamelyikével.

Az egyik legalapvetőbb követelmény, mely a jellemzési tételek során is hatékonyan alkalmazható, a rekurzivitás.

Definíció 1.1. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, azt mondjuk, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ információmérték α–*rekurzív*, ha tetszőleges $n \geq 3$ és $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ}$ esetén teljesül az*

$$(1.1)\quad I_n(p_1, \ldots, p_n) = I_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_n) + (p_1 + p_2)^{\alpha} I_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)$$

egyenlőség. Amennyiben $\alpha = 1$, akkor a továbbiakban röviden csak azt fogjuk mondani, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ információmérték rekurzív.

Vegyük észre, hogy a rekurzivitás fogalmának „hasznossága” abban rejlik, hogy ennek a tulajdonságnak köszönhetően elegendő az $I_2 : \Gamma_2^{\circ} \to \mathbb{R}$ függvényt meghatároznunk ahhoz, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ információmértéket jellemezni tudjuk.

Ezenkívül még szükségünk van az alábbi fogalomra is.

Definíció 1.2. *Az $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ információmértéket* szimmetrikus*nak nevezzük, ha*

$$(1.2)\qquad I_n(p_1, \ldots, p_n) = I_n\left(p_{\sigma(1)}, \ldots, p_{\sigma(n)}\right)$$

teljesül minden $n \geq 2$, $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ}$ és tetszőleges $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutáció esetén. Azt mondjuk továbbá, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$

információmérték 3–szemi–szimmetrikus*, ha tetszőleges* $(p_1, p_2, p_3) \in \Gamma_3^\circ$ *esetén fennáll az*

$$I_3(p_1, p_2, p_3) = I_3(p_1, p_3, p_2) \tag{1.3}$$

egyenlőség.

A Shannon–entrópia szimmetrikus, normált és rekurzív, míg az α–adfokú entrópia szimmetrikus, normált és α–rekurzív. A kérdés azonban az, hogy elegendőek–e ezek a tulajdonságok a Shannon–entrópia, illetve az α–adfokú entrópia jellemzéséhez. Mint azt majd látni fogjuk, nem feltétlenül.

Az első jellemzési tétel a Shannon–entrópiára magától Shannontól származik ([15]), a második pedig Hinčintől. Majd, 1956-ban Faddeev lényegesen redukálta mind Shannon, mind Hinčin axiómarendszerét.

Daróczy vette azonban észre először, hogy a Shannon–entrópiának egy a rekurzivitáson és szemi–szimmetrián alapuló jellemzése egyenértékű egy függvényegyenlet, nevezetesen *az információ alapegyenleté*nek egy adott halmazon történő megoldásával, lásd [4].

Tétel 1.1. *Legyen* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, de rögzített és tegyük fel, hogy minden* $n \geq 2$ *esetén* $I_n : \Gamma_n^\circ \to \mathbb{R}$*. Ekkor az* $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ *információmérték pontosan akkor* 3*–szemi–szimmetrikus és* α*–rekurzív, ha az*

$$f(x) = I_2(1-x, x) \quad (x \in]0,1[)$$

módon értelmezett $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ *függvény kielégíti az*

$$f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \tag{1.4}$$

függvényegyenletet minden $(x, y) \in D^\circ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u, v, u+v \in]0,1[\}$ *esetén.*

Az előző tételben az $f\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ ismeretlen függvényre vonatkozó (1.4) függvényegyenlet *az információ paraméteres alapegyenlete*, abban az esetben, ha $\alpha = 1$, akkor az információ alapegyenletéről beszélünk.

Az alábbi tétel (1.4) általános megoldását tartalmazza.

Tétel 1.2. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, de rögzített. Ekkor az $f\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor elégíti ki az információ paraméteres alapegyenletét, ha $\alpha = 1$ esetén van olyan $a \in \mathbb{R}$ és olyan $\varphi\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ függvény, melyre*

$$\varphi(uv) = u\varphi(v) + v\varphi(u), \quad (u, v \in]0,+\infty[)$$

úgy, hogy

$$f(x) = \varphi(x) + \varphi(1-x) + ax, \quad (x \in]0,1[)$$

teljesül, illetve $\alpha = 0$ esetén van olyan $b \in \mathbb{R}$ és olyan $l\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$l(uv) = l(u) + l(v), \quad (u, v \in]0,1[) \tag{1.5}$$

úgy, hogy

$$f(x) = l(1-x) + c, \quad (x \in]0,1[)$$

áll fenn, végül minden egyéb esetben

$$f(x) = cx^\alpha + d(1-x)^\alpha - d, \quad (x \in]0,1[)$$

valamely $c, d \in \mathbb{R}$ mellett.

A szakirodalomban a $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \in [0,1[, x+y \le 1\big\}$ halmazon fennálló (1.4) egyenlet azon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ megoldásait, melyekre még $f(1/2) = 1$ és $f(0) = f(1)$ is teljesül, *információ függvényeknek* nevezik. Mi azonban információfüggvény alatt olyan $f\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ függvényt értünk, mely a D° halamzon kielégíti az (1.4) egyenletet.

Vegyük észre, hogy az 1.1. Tétel értelmében az információmérték és az információfüggvény kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást. Ezért ennek a tételnek a segítségével meg tudjuk adni az összes α–rekurzív, 3–szemi–szimmetrikus információmértéket.

Tétel 1.3. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor az $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ $(I_n : \Gamma_n^\circ \to \mathbb{R}, n \geq 2)$ információmérték pontosan akkor α–rekurzív és 3–szemi–szimmetrikus, ha $\alpha = 1$ esetén*

$$I_n(p_1, \ldots, p_n) = \varphi(p_1) + \sum_{i=2}^{n}(\varphi(p_i) + ap_i) \quad ((p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^\circ)$$

teljesül minden $n \geq 2$–re, ahol $a \in \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén kielégíti a

$$\varphi(uv) = u\varphi(v) + v\varphi(u)$$

egyenletet; $\alpha = 0$ esetén

$$I_n(p_1, \ldots, p_n) = c(n-1) + l(p_1), \quad ((p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^\circ)$$

ahol $l : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ egy logaritmikus függvény, azaz kielégíti az (1.5) egyenletet minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, $c \in \mathbb{R}$; minden más esetben pedig

$$I_n(p_1, \ldots, p_n) = b(p_1^\alpha - 1) + c\left(\sum_{i=2}^{n} p_i^\alpha - 1\right) \quad ((p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^\circ)$$

teljesül tetszőleges $n \geq 2$ esetén valamely $b, c \in \mathbb{R}$ konstansokkal.

2 Függvényegyenletek stabilitása

S. Ulam egy 1940–es, a Wisconsin Egyetemen tartott előadásában néhány matematikai problémát vetett fel. Ezen problémák közül az egyik a függvényegyenletek stabilitáselméletének elindítója lett. Ulam problémája a következő volt (lásd Ulam [18]).

Legyen $(G, \circ)$ egy csoport, $(H, *)$ pedig egy metrikus csoport a d metrikával. Legyenek $\varepsilon \geq 0$ és $f : G \to H$ olyanok, hogy

$$d\left(f(x \circ y), f(x) * f(y)\right) \leq \varepsilon$$

teljesül minden $x, y \in G$ esetén. Igaz–e, hogy létezik olyan $\delta > 0$ és olyan $g : G \to H$ függvény, melyre

$$g(x \circ y) = g(x) * g(y) \quad (x, y \in G)$$

teljesül úgy, hogy

$$d\left(f(x), g(x)\right) \leq \delta$$

is fennáll minden $x \in G$ esetén?

Igenlő válasz esetén azt mondjuk, hogy az

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y) \quad (x, y \in G)$$

függvényegyenlet stabil a G halmazon.

Ulam problémájára először 1941–ben D. H. Hyers adott igenlő választ az alábbi tétel formájában.

Tétel 2.1 (Hyers [11]). *Legyenek X és Y Banach–terek, $\varepsilon \geq 0$ rögzített. Tegyük fel, hogy az $f : X \to Y$ függvény olyan, melyre*

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $x, y \in X$ esetén. Ekkor minden $x \in X$ esetén létezik az

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

határérték, az $a : X \to Y$ függvény additív X-en, azaz

$$a(x + y) = a(x) + a(y)$$

minden $x, y \in X$ esetén és

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $x \in X$ esetén. Továbbá, a fenti formulával megadott $a : X \to Y$ függvény egyértelműen meghatározott.

Hyers tétele a következőt fejezi ki. Amennyiben egy f függvény csak ,,megközelítőleg" elégíti ki az additív Cauchy–egyenletet, akkor létezik egy olyan egyértelműen meghatározott a additív függvény, mely ,,közel" van ehhez az f függvényhez.

Hyers [11] megjelenése óta a fenti eredményt sokan sokféleképpen általánosították. Kézenfekvő továbbá, hogy Ulam problémája nemcsak az additív Cauchy–egyenlet kapcsán vethető fel, hanem más függvényegyenletekkel kapcsolatban is.

A multiplikatív Cauchy–egyenlettel kapcsolatos vizsgálódások például egy igen meglepő eredményre vezettek. Ebben az esetben ugyanis az úgynevezett stabilitási egyenlőtlenségből az következik, hogy a szóban forgó függvény vagy korlátos vagy az egyenletnek magának megoldása. Ezt a jelenséget *szuperstabilitás*nak nevezzük, lásd például Baker [3].

Megtörténhet azonban az is, hogy a stabilitási egyenlőtlenségből az adódik, hogy a szóban forgó függvény nem lehet más, csakis a függvényegyenlet megoldása, ez az úgynevezett *hiperstabilitás*, lásd például Maksa–Páles [14].

A disszertáció harmadik fejezetében a paraméteres alapegyenlet stabilitásának problémájával foglakozunk és mindhárom fogalommal találkozhatunk majd, attól függően, hogy a paraméteres alapegyenletben szereplő α valós szám értéke nulla, egytől különböző pozitív vagy negatív valós szám.

A függvényegyenletek stabilitáselmélete olykor igen változatos módszereket igényel, hiszen általános, minden függényegyenlet esetén működő eljárás nem létezik. Hyers [11] megjelenése után a fő eredmény bizonyításának gondolatmenete, az úgynevezett *Hyers–sorozatok módszere* igen gyümölcsözőnek bizonyult számos függvényegyenlet stabilitásának vizsgálata során. Székelyhidi vette észre először, hogy szoros kapcsolat van a stabilitás és az úgynevezett invariáns közepek között. Ezt a technikát alkalmazva [16]–ben általánosabb körülmények között sikerült igazolnia Hyers tételét.

Később azonban megjelent néhány olyan függvényegyenlet – ilyen például a disszertációban vizsgált paraméteres információ–alapegyenlet is – melyek esetében a módszer nem működik.

3 A paraméteres információ–alapegyenlet stabilitása

Ezt a fejezetet lényegében a Gselmann [7], [8] és a Gselmann–Maksa [10] dolgozatok alapján építettük fel.

A doktori képzés során a fő célom az volt, hogy az alábbi kérdést megválaszoljam.

Feltételezve, hogy $\varepsilon \geq 0$ egy tetszőleges, de rögzített valós szám, $\alpha \in \mathbb{R}$ szintén tetszőleges, de rögzített, $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ pedig egy olyan függvény, melyre

$$\left| f(x) + (1-x)^{\alpha} f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^{\alpha} f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $(x,y) \in D^{\circ}$ esetén, akkor létezik–e a paraméteres információ–alapegyenletnek olyan $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ megoldása, melyre

$$|f(x) - h(x)| \leq K\varepsilon$$

teljesül minden $x \in]0,1[$ esetén valamely $K \in \mathbb{R}$ konstanssal?

Ezt a kérdést sikerült majdnem teljes egészében megválaszolni, a következő tételek formájában.

Az alábbi tétel azt állítja, hogy az információ paraméteres alapegyenlete *hiperstabil* a D° halmazon, feltételezve, hogy az α paraméter értéke negatív, lásd [7].

Tétel 3.1. *Legyenek $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\alpha < 0$, $\varepsilon \geq 0$. Ekkor az $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor elégíti ki az*

$$\left| f(x) + (1-x)^{\alpha} f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^{\alpha} f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon \tag{3.1}$$

egyenlőtlenséget minden $(x,y) \in D^{\circ}$ esetén, ha léteznek olyan $c, d \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy

$$f(x) = cx^{\alpha} + d(1-x)^{\alpha} - d \tag{3.2}$$

teljesül minden $x \in]0,1[$ esetén.

Majd az az esetet tekintettünk, amikor $1 \neq \alpha \geq 0$. Noha $\alpha = 0$ esetén csak stabilitást, míg az $1 \neq \alpha > 0$ esetben szuperstabilitást tudtunk igazolni, mégis egy tételben fogalmazzuk meg ezt a két esetet. Ennek oka pedig az, hogy a két eset bizonyítása teljesen hasonló, lásd még [8].

Tétel 3.2. *Legyenek $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $1 \neq \alpha \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy az $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ függvény tetszőleges $(x,y) \in D^\circ$ esetén kielégíti a*

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon \tag{3.3}$$

egyenlőtlenséget. Ekkor, ha $\alpha = 0$, akkor létezik olyan $l :]0,1[\to \mathbb{R}$ logaritmikus függvény és olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$|f(x) - [l(1-x) + c]| \leq 63\varepsilon \tag{3.4}$$

teljesül minden $x \in]0,1[$ esetén, egyébként pedig léteznek olyan a, b valós konstansok, hogy

$$|f(x) - [ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b]| \leq K(\alpha)\varepsilon \tag{3.5}$$

áll fenn bármely $x \in]0,1[$ esetén, ahol

$$K(\alpha) = 3 + 12 \cdot 2^\alpha + \frac{32 \cdot 3^{\alpha+1}}{|2^{-\alpha} - 1|}.$$

A stabilitás kérdését nemcsak a D°, hanem a

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \in [0,1[, x + y \leq 1\right\}$$

halmazon is vizsgáltuk. Ebben az esetben is azt kaptuk, hogy a paraméteres információ–alapegyenlet rendre stabil, szuperstabil illetve hiperstabil, ha α rendre nulla, egytől különböző pozitív illetve negatív valós szám.

Ezzel a disszertáció fő célkitűzését majdnem sikerült elérnünk. Az alkalmazott módszerek azonban nem bizonyultak eredményesnek abban az esetben, amikor $\alpha = 1$, így az információ alapegyenlete stabilitásának kérdése nyitott maradt.

4 Néhány további függvényegyenlet

Ebben a fejezetben példákat adunk arra, hogy az előző fejezetben bemutatott eredmények miként használhatóak fel arra, hogy segítségükkel további függvényegyenletek stabilitásának kérdését meg tudjuk válaszolni. Az itt ismertetett eredményeket a szerző [6], [7], [8] és [9] dolgozatai tartalmazzák.

Tekintsük az $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ | x + y + z > 0\right\}$ halmazt. Ekkor a $H : S \to \mathbb{R}$ ismeretlen függvényre vonatkozó

$$H(x, y, z) = H(x + y, 0, z) + H(x, y, 0) \quad ((x, y, z) \in S) \tag{4.1}$$

függvényegyenletet *entrópia–egyenlet*nek hívjuk. A (4.1) egyenlettel először A. Kamiński és J. Mikusiński foglalkozott és 1977-ben meghatározták (4.1) általános megoldását, feltételezve, hogy a $H : S \to \mathbb{R}$ függvény szimmetrikus, folytonos és elsőfokú homogén függvény, lásd [13]. Ezt az eredményt Aczél [2] általánosította azáltal, hogy a H ismeretlen függvényre enyhébb regularitási feltételeket követelt meg. Az Aczél [2]–ben található eredményt Daróczynak sikerült általánosítani. Ő az entrópia–egyenlet azon megoldásait határozta meg, melyek esetén a $H : S \to \mathbb{R}$ ismeretlen függvényről csak azt tesszük fel, hogy szimmetrikus, elsőfokú homogén és kielégíti az entrópia–egyenletet, lásd [5].

Az első példában az entrópia–egyenlet stabilitásának kérdését válaszoljuk meg, az alábbi tétel formájában, lásd még Gselmann [6].

Tétel 4.1. *Legyen $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ | x + y + z > 0\right\}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nemnegatív valós szám, tegyük fel továbbá, hogy a $H : S \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az alábbiak.*

$$|H(x, y, z) - H(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \leq \varepsilon_1 \tag{4.2}$$

minden $(x, y, z) \in S$ és tetszőleges $\sigma : \{x, y, z\} \mapsto \{x, y, z\}$ permutáció esetén;

$$|H(x, y, z) - H(x + y, 0, z) - H(x, y, 0)| \leq \varepsilon_2 \tag{4.3}$$

bármely $(x, y, z) \in S^\circ$ *esetén, ahol* S° *jelöli az* S *halmaz belsejét;*

$$|H(tx, ty, 0) - t^\alpha H(x, y, 0)| \leq \varepsilon_3 \tag{4.4}$$

minden $t, x, y \in \mathbb{R}_{++}$ *esetén. Ekkor, ha* $\alpha = 1$*, akkor létezik olyan* $\varphi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ *függvény, melyre*

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x), \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

úgy, hogy

$$|H(x, y, z) - [\varphi(x + y + z) - \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(z)]| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{4.5}$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S^\circ$ *esetén; ha* $\alpha = 0$*, akkor létezik olyan* $a \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$|H(x, y, z) - a| \leq 8\varepsilon_3 + 25\varepsilon_2 + 49\varepsilon_1, \tag{4.6}$$

ha $(x, y, z) \in S^\circ$*; végül, minden más esetben létezik olyan* $c \in \mathbb{R}$*, melyre*

$$|H(x, y, z) - c[(x + y + z)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha - z^\alpha]| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{4.7}$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S^\circ$ *esetén.*

Majd arra a kérdésre keressük a választ, hogy vajon stabil-e az úgynevezett módosított entrópia–egyenlet. Először azonban egy egyszerű asszociativitási egyenletre vonatkozó stabilitási tételt igazolunk.

Tétel 4.2. *Legyenek* $U, V, W \subset \mathbb{R}$ *pozitív hosszúságú intervallumok,* $\varepsilon \geq 0$*. Tegyük fel, hogy az* $A : (U + V) \times W \to \mathbb{R}$ *és a* $B : U \times (V + W) \to \mathbb{R}$ *függvények olyanok, hogy*

$$|A(u + v, w) - B(u, v + w)| \leq \varepsilon \tag{4.8}$$

teljesül minden $u \in U$*,* $v \in V$ *és* $w \in W$ *esetén. Ekkor létezik olyan* $\varphi : U + V + W \to \mathbb{R}$ *függvény, hogy*

$$|A(p, q) - \varphi(p + q)| \leq 2\varepsilon \quad (p \in (U + V),\ q \in W) \tag{4.9}$$

és

$$(4.10) \qquad |B(t,s) - \varphi(t+s)| \le \varepsilon \quad (t \in U,\ s \in (V+W))$$

teljesül.

Ennek az állításnak, illetve az előző fejezet eredményeinek a segítségével az alábbiakat tudtuk igazolni, lásd még [9].

Tétel 4.3. *Legyenek $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\alpha \neq 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ge 0$. Tegyük még fel továbbá, hogy az $f : \mathbb{R}^3_{++} \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy*

$$(4.11) \qquad \left| f(x,y,z) - f(x,y+z,0) - (y+z)^\alpha f\left(0, \frac{y}{y+z}, \frac{z}{y+z}\right)\right| \le \varepsilon_1$$

teljesül minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, valamint tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ és $\sigma : \{x, y, z\} \to \{x, y, z\}$ permutáció esetén

$$(4.12) \qquad |f(x,y,z) - f(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \le \varepsilon_2$$

is teljesül. Ekkor, ha $\alpha < 0$, létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ és olyan $\psi_1 : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$(4.13) \qquad |f(x,y,z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_1(x+y+z)]| \le 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$$

minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén; amennyiben $\alpha = 0$, úgy létezik olyan $\psi_2 : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$(4.14) \qquad |f(x,y,z) - \psi_2(x+y+z)| \le 191\varepsilon_1 + 1263\varepsilon_2; \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++})$$

végül minden más esetben, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén léteznek olyan $\psi_n :]0, 3n] \to \mathbb{R}$ függvények úgy, hogy minden $x, y, z \in]0, n]$ esetén

$$(4.15) \qquad |f(x,y,z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_n(x+y+z)]| \le c_n(\alpha)\varepsilon_1 + d_n(\alpha)\varepsilon_2$$

áll fenn, ahol

$$c_n(\alpha) = 2 + 7 \cdot 2^\alpha n^\alpha K(\alpha) \quad \text{és} \quad d_n(\alpha) = 4 + 7 \cdot 2^{\alpha+2} n^\alpha K(\alpha).$$

Ezzel azt igazoltuk, hogy a módosított entrópia–egyenlet Hyers–Ulam értelemben stabil az egydimenziós alaphalmazon a $\mu(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha \leq 0, x \in \mathbb{R}_{++}$) multiplikatív függvénnyel.

Vegyük azonban észre, hogy ha $0 < \alpha \neq 1$, akkor csak azt tudtuk igazolni, hogy ez a függvényegyenlet tetszőleges, de rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén stabil a $]0,n]\times]0,n]\times]0,n]$ halmazon. Egyszerű számolással látható azonban, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} c_n(\alpha) = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} d_n(\alpha) = +\infty, \quad (1 \neq \alpha > 0)$$

így ezzel a módszerrel a ,,szokásos" Hyers–Ulam stabilitást nem sikerült igazolnunk továbbá, az $\alpha = 1$ esetről szintén nem tudtunk semmit belátni.

Végül egy olyan fügvényegyenlet–rendszer stabilitásának a kérdésével foglalkoztunk, mely az α–rekurzív, 3–szemi–szimmetrikus információmértékeket írja le.

Tétel 4.4. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, (ε_n) pedig egy nemnegatív valós számokból álló sorozat, tegyük fel továbbá, hogy az $I_n : \Gamma_n^{\circ} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$ függvénysorozat kielégíti az alábbi egyenlőtlenségeket*

$$(4.16)\quad \Big|I_n(p_1,\dots,p_n) - I_{n-1}(p_1+p_2,p_3,\dots,p_n) - (p_1+p_2)^{\alpha} I_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right)\Big| \leq \varepsilon_{n-1}$$

minden $n \geq 3$ és $(p_1,\dots,p_n) \in \Gamma_n^{\circ}$ esetén és

$$(4.17)\quad |I_3(p_1,p_2,p_3) - I_3(p_1,p_3,p_2)| \leq \varepsilon_1$$

teljesül a Γ_3° halmazon. Ekkor, ha $\alpha < 0$, akkor léteznek olyan c, d valós számok, hogy

$$(4.18)\quad \left|I_n(p_1,\dots,p_n) - \left[cH_n^{\alpha}(p_1,\dots,p_n) + d\left(p_1^{\alpha}-1\right)\right]\right| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k$$

teljesül minden $n \geq 2$ *és* $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ *esetén; ha* $\alpha = 0$*, akkor létezik olyan* $l : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ *logaritmikus függvény és olyan* $c \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$(4.19) \quad \left| I_n \left(p_1, \ldots, p_n\right) - \left[c H_n^0 \left(p_1, \ldots, p_n\right) + l(p_1) \right] \right| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + 63 \left(n-1\right) \left(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1\right)$$

teljesül tetszőleges $n \geq 2$ *és* $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ *esetén; végül, ha* $1 \neq \alpha > 0$*, akkor léteznek olyan* c, d *valós számok, hogy*

$$(4.20) \quad |I_n(p_1, \ldots, p_n) - [c H_n^\alpha(p_1, \ldots, p_n) + d(p_1^\alpha - 1)]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + (n-1) K(\alpha)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

áll fenn minden $n \geq 2$ *és* $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ *esetén, ahol a* $\sum_{k=2}^{1} \varepsilon_k = 0$ *konvencióval élünk.*

Mivelhogy az információ alapegyenlete stabilitásának a kérdése még nincs megválaszolva, ezért ebben a tételben sem tudtunk semmit sem bizonyítani az $\alpha = 1$ esetben. Megjegyezzük azonban, hogy abban az esetben, ha az információ alapegyenletéről tudnánk, hogy stabil (vagy azt, hogy nem stabil), akkor igazolni tudnánk azt is, hogy a 3–szemi–szimmetrikus, rekurzív információmértékek rendszere is stabil (illetve azt, hogy az sem stabil).

Introduction

It is certainly true that the concept of information is one of the dominant ideas of the second half of the twentieth century. People from all walks of life are concerned with information processing. Many of the inventions of the current era deal with storage, transmission, transformation and retrieval of information.

Information can be manifested however in various forms, for example orally, in writing, electronically, etc. From mathematical point of view, the essence of information is its quantity, and the basic problem is how to measure information quantity.

Commonly it is done by introducing desirable properties for an information measure, then using those properties to determine explicit forms for information measures. While doing this we rely heavily upon the theory of functional equations.

The dissertation deals with the stability problem of some functional equations that appear in the characterization problem of information measures. The main results achieved by the author can be found in the third and in the fourth sections.

In what follows we will summarize the results of the dissertation.

1 Information measures

Let $n \geq 2$ be an arbitrary integer and consider the sets

$$\Gamma_n^{\circ} = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n | p_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

and

$$\Gamma_n = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n | p_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}.$$

A real–valued sequence of functions $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ is called an *information measure*, if for all $n \geq 2$ $I_n : \Gamma_n \to \mathbb{R}$ or for all $n \geq 2$ $I_n : \Gamma_n^{\circ} \to \mathbb{R}$.

Probably the most well–known information measure is the *Shannon–entropy* (see [15]), that is,

$$H_n^1(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i), \quad (p_1, \dots, p_n \in \Gamma_n^{\circ}, n \geq 2)$$

or the *entropy of degree* α (or Havrda–Charvát–entropy or Tsallis entropy), i.e.,

$$H_n^{\alpha}(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} \left(2^{1-\alpha} - 1\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} - 1\right), & \text{if } \alpha \neq 1 \\ H_n^1(p_1, \dots, p_n), & \text{if } \alpha = 1 \end{cases}$$

for all $n \geq 2$, $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ}$, see Daróczy [4], Havrda–Charvát [12] and Tsallis [17].

Using the L'Hospital rule, one can easily see that for arbitrary $n \geq 2$ and $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ}$

$$\lim_{\alpha \to 1} H_n^{\alpha}(p_1, \dots, p_n) = H_n^1(p_1, \dots, p_n),$$

holds, that is, the Shannon–entropy can continuously embedded to the family of entropies of degree α.

Since the notion of an information measure is far too general, one can ask what should be assumed about an information measure so that the entropy of degree alpha could be characterized. One of the most fundamental of all axioms which can be postulated is the recursivity.

Definition 1.1. *Let $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrarily fixed. The information measure $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ is called α–*recursive*, if for all $n \geq 3$ and $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ}$*

$$(1.1)\quad I_n(p_1, \ldots, p_n) = I_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_n) + (p_1 + p_2)^{\alpha} I_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)$$

holds. Furthermore, the 1–recursive information measures will simply be called recursive.

Furthermore, we will use an additional property, namely the 3–semi–symmetry.

Definition 1.2. *The information measure $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ ($I_n : \Gamma_n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$) is called* 3–semi–symmetric, *if*

$$I_3(p_1, p_2, p_3) = I_3(p_1, p_3, p_2)$$

holds for all $(p_1, p_2, p_3) \in \Gamma_3^{\circ}$.

Obviously, the Shannon–entropy is recursive and 3–semi–symmetric and the entropy of degree α is α–recursive and 3–semi–symmetric.

The first characterization theorem is due to Shannon himself, the second is due to Hinčin. Later, in 1956 Faddeev reduced significantly the axioms of Shannon and also that of Hinčin. It was Daróczy however who noticed that the characterization of the Shannon–entropy (based on its recursivity and semi–symmetry) leads to a functional equation, namely to *the fundamental equation of information.*

Theorem 1.1. *Let $\alpha \in \mathbb{R}$ be fixed, $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$, $I_n : \Gamma_n^\circ \to \mathbb{R}$. The information measure $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ is 3–semi–symmetric and α–recursive, if and only if the function $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ defined by*

$$f(x) = I_1(1-x, x) \quad (x \in]0,1[)$$

satisfies functional equation

$$f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \tag{1.2}$$

for all $(x, y) \in \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u, v, u+v \in]0,1[\big\}$.

Functional equation (1.2) appearing in the previous theorem is the celebrated *parametric fundamental equation of information.*

Therefore, if the information measure is α–recursive and 3–semi–symmetric, then knowing the general solutions of (1.2), one can characterize those information measures which have the properties mentioned above.

In the following theorem we will give the general solution of the parametric fundamental equation of information.

Theorem 1.2. *Suppose that α is an arbitrary but fixed real number. The function $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ satisfies functional equation (1.2) on the set D° if, and only if , in case $\alpha = 1$ there exist a function $\varphi :]0, +\infty] \to \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$ such that*

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x) \quad (x, y \in]0, +\infty])$$

in such a way that

$$f(x) = \varphi(x) + \varphi(1-x) + ax, \quad (x \in]0,1[)$$

if $\alpha = 0$, there exist a function $l :]0, +\infty] \to \mathbb{R}$ and $c \in \mathbb{R}$ such that

$$l(xy) = l(x) + l(y) \quad (x, y \in]0, +\infty])$$

and
$$f(x) = l(1-x) + c \quad (x \in]0,1[)$$
is fulfilled, finally, in all other cases there exist $c, d \in \mathbb{R}$ *such that*
$$f(x) = cx^{\alpha} + d(1-x)^{\alpha} - d \quad (x \in]0,1[)$$
holds.

If functional equation (1.2) has to holds on the set
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \in [0,1[, x+y \leq 1\right\}$$
then the function $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ which fulfills (1.2) furthermore $f(1/2) = 1$ and $f(0) = f(1)$ holds, is called in the literature an *information function.* In the dissertation however on an information function we understand a function $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ which is a solution of (1.2) on the set D°.

Using the last two theorems the α–recursive, 3–semi–symmetric information functions can be characterized.

Theorem 1.3. *Let* $\alpha \in \mathbb{R}$ *be arbitrarily fixed. The information measure* $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ *(*$I_n : \Gamma_n^{\circ} \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$*) is* α*–recursive and* 3*–semi–symmetric, if and only if, in case* $\alpha = 1$
$$I_n(p_1, \dots, p_n) = \varphi(p_1) + \sum_{i=2}^{n} (\varphi(p_i) + ap_i) \quad ((p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ})$$
for all $n \geq 2$*, if* $\alpha = 0$
$$I_n(p_1, \dots, p_n) = c(n-1) + l(p_1), \quad ((p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ})$$
for all $n \geq 2$*, in all other cases*
$$I_n(p_1, \dots, p_n) = c(p_1^{\alpha} - 1) + d\left(\sum_{i=2}^{n} p_i^{\alpha} - 1\right) \quad ((p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ})$$

holds for all $n \geq 2$, *where the functions* $\varphi, l :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *satisfy*

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) \quad (x, y \in]0, +\infty])$$

and

$$l(xy) = l(x) + l(y), \quad (x, y \in]0, +\infty])$$

respectively,and $a, c, d \in \mathbb{R}$ *are constants.*

2 Stability of functional equations

During one of his talk, held at the University of Wisconsin S. Ulam posed several problems. One of these problems has became the cornerstone of the stability theory of functional equations, see [18]. Ulam's problem reads as follows.

Let $(G, \circ)$ be a group and $(H, *)$ be a metric group with the metric d. Let $\varepsilon \geq 0$ and $f : G \to \mathbb{R}$ be a function such that

$$d\,(f(x \circ y), f(x) * f(y)) \leq \varepsilon$$

holds for all $x, y \in G$. Is it true that there exist $\delta \geq 0$ and a function $g : G \to \mathbb{R}$ such that

$$g(x \circ y) = g(x) * g(y), \quad (x, y \in G)$$

so that

$$d\,(f(x), g(x)) \leq \delta$$

holds for all $x \in G$?

This question was first answered in 1941 by D. H. Hyers with the following theorem.

Theorem 2.1. *Let $\varepsilon \geq 0$, X, Y be Banach spaces and $f : X \to Y$ be a function. Suppose that*

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

holds for all $x, y \in X$. Then for all $x \in X$ the limit

$$a(x) = \lim_{n \to \mathbb{R}} \frac{a(2^n x)}{2^n}$$

does exist, the function $a : X \to \mathbb{R}$ is additive on X, i.e.,

$$a(x + y) = a(x) + a(y)$$

holds for all $x, y \in X$, furthermore,

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \varepsilon$$

is fulfilled for arbitrary $x \in X$.

The above theorem briefly expresses the following. Assume that X, Y are Banach spaces and the function $f : X \to Y$ satisfies the additive Cauchy equation only 'approximatively'. Then there exists a unique additive function $a : X \to Y$ which is 'close' to the function f. Since 1941 this result has been extended and generalized in a several ways. Furthermore, Ulam's problem can obviously raised not only concerning the Cauchy equation but also in connection other equations, as well.

For instance, the stability problem of the multiplicative Cauchy equation highlighted a new phenomenon, which is nowadays called *superstability*. In this case the so–called stability inequality implies that the function in question is either bounded or it is the exact solution of the functional equation in question, see Baker [3].

In the dissertation we will meet an other notion, namely the *hyperstability*. In this case from the stability inequality we get that the function in question can be nothing else than the exact solution of the functional equation in question, see, e.g. Maksa–Páles [14].

The aim of this dissertation is to investigate the stability of the fundamental equation of information. The main results and also the applications will be listed in the subsequent sections. We will prove stability, superstability and hyperstability according to the value of the parameter α. The results, we will present can be found in Gselmann [7] and in [8].

3 Stability of the parametric fundamental equation of information

This PhD dissertation basically deals with the following problem. Let $\varepsilon \geq 0$ and $\alpha \in \mathbb{R}$ be arbitrarily fixed and let $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ be a function. Assume that the inequality

$$\left| f(x) + (1-x)^{\alpha} f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^{\alpha} f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

is fulfilled for all $(x, y) \in D^{\circ}$. Does there exists a solution of the parametric fundamental equation of information, that is, a function $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ such that

$$h(x) + (1-x)^{\alpha} h\left(\frac{y}{1-x}\right) = h(y) + (1-y)^{\alpha} h\left(\frac{x}{1-y}\right), \quad ((x, y) \in D^{\circ})$$

in such a way that

$$|f(x) - h(x)| \leq K\varepsilon$$

holds for all $x \in]0,1[$ with a certain constant $K \in \mathbb{R}$?

The answer to this question depends heavily on the value of the parameter α. The results we will list below can be found in Gselmann [7], [8] and in Gselmann–Maksa [10].

Theorem 3.1. *Let $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$, $\varepsilon \geq 0$ and $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ be a function. Assume that*

$$\left| f(x) + (1-x)^{\alpha} f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^{\alpha} f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

holds for all $(x, y) \in D^{\circ}$. Then, and only then, there exist $c, d \in \mathbb{R}$ such that

$$f(x) = cx^{\alpha} + d(1-x)^{\alpha} - d$$

for all $x \in]0,1[$.

This theorem expresses that the parametric fundamental equation of information is hyperstable on the set D°, assuming that $\alpha < 0$.

Theorem 3.2. *Let $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ be fixed, $0 \leq \alpha \neq 1, \varepsilon \geq 0$. Suppose that the function $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ satisfies the inequality*

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

for all $(x,y) \in D^\circ$. Then, in case $\alpha = 0$, there exists a logarithmic function $l :]0,1[\to \mathbb{R}$ and $c \in \mathbb{R}$ such that

$$|f(x) - [l(1-x) + c]| \leq 63\varepsilon, \quad (x \in]0,1[)$$

furthermore, if $\alpha \notin \{0,1\}$, there exist $a, b \in \mathbb{R}$ such that

$$|f(x) - [ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b]| \leq K(\alpha)\varepsilon$$

holds for all $x \in]0,1[$, where

$$K(\alpha) = \left|2^{1-\alpha} - 1\right|^{-1} \left(3 + 12 \cdot 2^\alpha + \frac{32 \cdot 3^{\alpha+1}}{|2^{-\alpha} - 1|}\right).$$

From Theorem 3.2. we obtain that the parametric fundamental equation of information is stable if $\alpha = 0$ and superstable in case $1 \neq \alpha > 0$.

The question of stability was examined not only on the set D° but also on the set D. On the closed domain we proved that the parametric fundamental equation of information is stable, superstable and hyperstable, in case α is equal to zero, is a positive real numbers different from one and is a negative number.

Furthermore, in this section we point out the methods we used are not appropriate if the parameter α equals one. Thus the stability problem of the fundamental equation of information is still open.

4 Further functional equations

Finally, the last part of the dissertation contains some applications. This section is builded up with the help of the publications [6], [7], [8] and [9].

This section contains three subsections. In the first we prove that the entropy equation is stable in the sense of Hyers and Ulam (see also Gselmann [6]).

Theorem 4.1. *Let $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ be arbitrary nonnegative real numbers, $\alpha \in \mathbb{R}$, and assume that the function $H : S \to \mathbb{R}$ satisfies the following system of inequalities.*

$$|H(x, y, z) - H\left(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\right)| \leq \varepsilon_1$$

for all $(x, y, z) \in S$ and for all $\sigma : \{x, y, z\} \mapsto \{x, y, z\}$ permutations;

$$|H\left(x, y, z\right) - H\left(x + y, 0, z\right) - H\left(x, y, 0\right)| \leq \varepsilon_2$$

for all $(x, y, z) \in S^{\circ}$, where S° denotes the interior of the set S;

$$|H\left(tx, ty, 0\right) - t^{\alpha}H(x, y, 0)| \leq \varepsilon_3$$

holds for all $t, x, y \in \mathbb{R}_{++}$. Then, in case $\alpha = 1$ there exists a function $\varphi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ which satisfies the functional equation

$$\varphi\left(xy\right) = x\varphi\left(y\right) + y\varphi\left(x\right), \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

and

$$|H\left(x, y, z\right) - \left[\varphi\left(x + y + z\right) - \varphi\left(x\right) - \varphi\left(y\right) - \varphi\left(z\right)\right]| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

holds for all $(x, y, z) \in S^{\circ}$; in case $\alpha = 0$ there exists a constant $a \in \mathbb{R}$ such that

$$|H\left(x, y, z\right) - a| \leq 8\varepsilon_3 + 25\varepsilon_2 + 49\varepsilon_1$$

for all $(x, y, z) \in S^{\circ}$; finally, in all other cases there exists a constant $c \in \mathbb{R}$ such that

$$|H\left(x, y, z\right) - c\left[(x + y + z)^{\alpha} - x^{\alpha} - y^{\alpha} - z^{\alpha}\right]| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

holds on S°.

Then we investigate the so–called modified entropy equation. After giving its general solutions on the multi–dimensional domain, we examine its stability problem on the one–dimensional domain (see Gselmann [9]).

As a preliminary result, first we prove the following stability theorem, that concerns a simple associativity equation.

Theorem 4.2. *Let U, V, W be real intervals, $A : (U+V) \times W \to \mathbb{R}$, $B : U \times (V+W) \to \mathbb{R}$ and suppose that*

$$|A(u+v, w) - B(u, v+w)| \leq \varepsilon$$

holds for all $u \in U$, $v \in V$ and $w \in W$. Then there exists a function $\varphi : U+V+W \to \mathbb{R}$ such that

$$|A(p, q) - \varphi(p+q)| \leq 2\varepsilon \quad (p \in (U+V), q \in W)$$

and

$$|B(t, s) - \varphi(t+s)| \leq \varepsilon \quad (t \in U, s \in (V+W))$$

hold.

With the help of this statement we can prove the following stability type result.

Theorem 4.3. *Let $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1, \varepsilon \geq 0$ and $f : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ be a function. Assume that*

$$\left| f(x, y, z) - f(x, y+z, 0) - (y+z)^{\alpha} f\left(0, \frac{y}{y+z}, \frac{z}{y+z}\right) \right| \leq \varepsilon_1$$

and

$$|f(x, y, z) - f(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \leq \varepsilon_2$$

hold for all $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ and for all permutations $\sigma : \{x, y, z\} \to \{x, y, z\}$.

Then, in case $\alpha < 0$, there exist $a \in \mathbb{R}$ and a function $\varphi_1 : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ such that

$$|f(x, y, z) - [ax^{\alpha} + ay^{\alpha} + az^{\alpha} + \varphi_1(x + y + z)]| \leq 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$$

holds for all $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$.

Furthermore, if $\alpha = 0$, then there exists a function $\varphi_2 : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ such that

$$|f(x, y, z) - \varphi_2(x + y + z)| \leq 191\varepsilon_1 + 1263\varepsilon_2$$

holds for all $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$.

Finally, if $1 \neq \alpha > 0$, then for all $n \in \mathbb{N}$, there exists a function $\psi_n :]0, 3n] \to \mathbb{R}$ such that

$$|f(x, y, z) - [ax^{\alpha} + ay^{\alpha} + az^{\alpha} + \psi_n(x + y + z)]| \leq c_n(\alpha)\varepsilon_n + d_n(\alpha)\varepsilon_2$$

holds for all $x, y, z \in]0, n]$, where

$$c_n(\alpha) = 2 + 7 \cdot 2^{\alpha} n^{\alpha} K(\alpha) \quad \textit{and} \quad d_n(\alpha) = 4 + 7 \cdot 2^{\alpha+2} n^{\alpha} K(\alpha).$$

Briefly, this theorem says that the modified entropy equation is stable in the sense of Hyers and Ulam on its one-dimensional domain with the multiplicative function $\mu(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha \leq 0, x \in \mathbb{R}_{++}$).

In case $1 \neq \alpha > 0$ we obtain however that functional equation in question is stable only on every cartesian product of bounded real intervals of the form $]0, n]^3$, where $n \in \mathbb{N}$. Nevertheless, an easy computation shows that

$$\lim_{n \to +\infty} c_n(\alpha) = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} d_n(\alpha) = +\infty. \quad (1 \neq \alpha > 0)$$

To the best of our knowledge, this is a new phenomenon in the stability theory of functional equations. Thus we cannot prove the 'standard' Hyers–Ulam stability in this case, nor if $\alpha = 1$. This problems are also presented as open problems.

Finally, in the third subsection we deal with the stability of a system of functional equations. Here we prove that the system of equations that defines the α–recursive, 3–semi–symmetric information measures is stable in the sense of Hyers and Ulam (see Gselmann [7], [8] and Gselmann–Maksa [10]).

Theorem 4.4. *Let $n \geq 2$ be a fixed positive integer and $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$ be the sequence of functions $I_n : \Gamma_n^{\circ} \to \mathbb{R}$ and suppose that there exist a sequence (ε_n) of nonnegative real numbers and a real number $\alpha \neq 1$ such that*

$$\begin{aligned} &|I_n(p_1, \ldots, p_n) \\ &\quad - I_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_n) - (p_1 + p_2)^{\alpha} I_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)\Big| \leq \varepsilon_{n-1} \end{aligned}$$

for all $n \geq 3$ and $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ}$, and

$$|I_3(p_1, p_2, p_3) - I_3(p_1, p_3, p_2)| \leq \varepsilon_1$$

holds on Γ_n°. Then, in case $\alpha < 0$ there exist $c, d \in \mathbb{R}$ such that

$$|I_n\left(p_1, \ldots, p_n\right) - \left[cH_n^{\alpha}\left(p_1, \ldots, p_n\right) + d\left(p_1^{\alpha} - 1\right)\right]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k$$

for all $n \geq 2$ and $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ}$. Furthermore, in case $\alpha = 0$ there exists a logarithmic function $l :]0, 1[\to \mathbb{R}$ and $c \in \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} &\left|I_n\left(p_1, \ldots, p_n\right) - \left[cH_n^{0}\left(p_1, \ldots, p_n\right) + l(p_1)\right]\right| \\ &\qquad \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + 63\left(n-1\right)\left(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1\right) \end{aligned}$$

for all $n \geq 2$ and $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ}$. Finally, if $\alpha > 0$ then there exist

$c, d \in \mathbb{R}$ such that

$$|I_n(p_1, \ldots, p_n) - [cH_n^{\alpha}(p_1, \ldots, p_n) + d(p_1^{\alpha} - 1)]| \\ \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + (n-1)K(\alpha)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

holds for all $n \geq 2$ and $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^{\circ}$, where the convention

$$\sum_{k=2}^{1} \varepsilon_k = \sum_{k=2}^{1} \left(\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha} \right) = 0$$

is adopted.

Irodalomjegyzék (References)

[1] J. Aczél, Z. Daróczy, *On measures of information and their characterizations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. **115.** Academic Press, New York-London, 1975.

[2] J. Aczél, *Results on the entropy equation*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), no. 1, 13–17.

[3] J. A. Baker, *The stability of the cosine equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), no. 3, 411–416.s

[4] Z. Daróczy, *Generalized information functions*, Information and Control, **16** (1970), 36–51.

[5] Z. Daróczy, *Remarks on the entropy equation*, Zbornik Rad. Mat. Inst. Beograd (NS), **1(9)** (1976), 31–34.

[6] E. Gselmann, *Stability of the entropy equation*, Publ. Math. Debrecen, közlésre benyújtva, 2009.

[7] E. Gselmann, *Hyperstability of a functional equation*, Acta Math. Hungar., **124** no. 1–2 (2009), 179–188.

[8] E. Gselmann, *Recent results on the stability of the parametric fundamental equation of information*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi., Vol. **25**(2009), no. 1., 65–84.

[9] E. Gselmann, *On the stability of the modified entropy equation*, Results in Math., közlésre elfogadva, 2009.

[10] E. Gselmann, Gy. Maksa, *Stability of the parametric fundamental equation of information for nonpositive parameters*, Aequationes Math., **78** (2009), 271-282.

[11] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **27** (1941), 222–224.

[12] J. Havrda and F. Charvát, *Quantification Method of Classification Processes, Concept of Structural α-Entropy*, Kybernetika, **3** (1967), 30–35.

[13] A. Kamiński, J. Mikusiński, *On the entropy equation*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **22** (1974), 319–323.

[14] Gy. Maksa, Zs. Páles, *Hyperstability of a class of linear functional equations*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.), **17** (2001), no. 2, 107–112.

[15] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J., **27** (1948), 379–423 & 623–656.

[16] L. Székelyhidi, *Note on a stability theorem*, Canad. Math. Bull., **25** (1982), no. 4, 500–501.

[17] C. Tsallis, *Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics*, Journal of Statistical Physics, **52(1-2)** (1988), 479–487.

[18] S. M. Ulam, *Problems in modern mathematics*, Science Editions John Wiley & Sons, Inc., New York 1964.

A jelölt publikációi
(Publications of the author)

[1] E. Gselmann, *On the modified entropy equation*, Banach J. Math. Anal., **2** (2008), no. 1, 84–96.

[2] A. Abbas, E. Gselmann, Gy. Maksa, Z. Sun, *General and continuous solutions of the entropy equation*, American Institute of Physics, Proceedings of the 28th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, **1073** (November 6, 2008), 3–7.

[3] E. Gselmann, *Stability type results concerning the fundamental equation of information of multiplicative type*, Colloquium Math., **114** (2009), 33–40.

[4] E. Gselmann, *Recent results on the parametric fundamental equation of information*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi., **25** (2009),no. 1, 65–84.

[5] E. Gselmann, *Hyperstability of a functional equation*, Acta Math. Hungar., **124** no. 1–2 (2009), 179–188.

[6] E. Gselmann, Gy. Maksa, *The Shannon field of non-negative information functions*, Scientiae Mathematicae Japonicae, **69** (2009), no. 2, 241–248.

[7] E. Gselmann, Gy. Maksa, *Stability of the parametric fundamental equation of information for nonpositive parameters*, Aequationes Math., **78** (2009), 271-282.

[8] E. Gselmann, *On the stability of the modified entropy equation*, Results in Math., közlésre elfogadva, 2009.

[9] E. Gselmann, *Stability of the entropy equation*, Publ. Math. Debrecen, **77/1–2** (2010), 201–210.

[10] Z. Boros, E. Gselmann, *Hyers–Ulam stability of derivations and linear functions*, Aequationes Math., közlésre elfogadva, 2010.

[11] E. Gselmann, Gy. Maksa, *A characterization of the relative entropies*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., közlésre benyújtva, 2009.

[12] E. Gselmann, *On the characterization of derivations through one equation*, Proc. Amer. Math. Soc., közlésre benyújtva, 2009.

[13] E. Gselmann, *Entropy functions and functional equations*, Math. Commun., közlésre benyújtva, 2010.

A jelölt által tartott előadások
(Talks held by the author)

[1] E. Gselmann, *A fraktál–dimenzió*, A Debreceni Egyetem Tehetséggondozó Programjának II. Konferenciája, Debrecen, 2006.

[2] E. Gselmann, *Dimensions of Cantor–type sets*, 7th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Będlewo, Lengyelország, 2007.

[3] E. Gselmann, *On Cantor–type sets*, International Students' Conference on Analysis, Szczyrk, Lengyelország, 2007.

[4] E. Gselmann, *Cantor–típusú halmazok dimenziói*, Országos Tudományos Diákköri Konferencia, Szeged, 2007.

[5] E. Gselmann, *Stability type results concerning the fundamental equation of information of multiplicative type*, 8th Debrecen–Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Poroszló, 2008.

[6] E. Gselmann, *General and continuous solutions of the entropy equation*, International Students' Conference on Analysis, Zamárdi, 2008.

[7] E. Gselmann, *On the general and regular solutions of the modified entropy equation*, Workshop on Functional Equation, Inequalities and Applications dedicated to the 60th birthday of Professor Gyula Maksa, Debrecen, 2008.

[8] E. Gselmann, *Stability of the entropy equation*, Numbers, Functions and Equations '08, Noszvaj, 2008.

[9] E. Gselmann, *A paraméteres információ-alapegyenlet stabilitásáról*, Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet Intézeti Szemináriuma, Debrecen, 2008.

[10] E. Gselmann, *Stability problems in the theory of information*, Workshop on functional equations, Universität Bonn, Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn, Németország, 2008.

[11] E. Gselmann, *On the stability of the modified entropy equation*, 9th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Będlewo, Lengyelország, 2009.

[12] E. Gselmann, *The Shannon field of non-negative information functions*, International Students' Conference on Analysis, Szare, Lengyelország, 2009.

[13] E. Gselmann, *Nemnegativitási problémák az információelméletben*, Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet Intézeti Szemináriuma, Miskolc, 2009.

[14] E. Gselmann *Derivációk stabilitása*, Debreceni Egyetem Matematikai Intézet Analízis Tanszékének Szemináriuma, Síkfőkút, 2009.

[15] E. Gselmann *On the stability of derivations*, The 13th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Małle Ciche, Lengyelország, 2009.

[16] E. Gselmann, *Néhány információelméleti probléma*, A Magyar Tudomány Napja, Tudomány, Innováció, Tehetség, Debrecen, 2009.

[17] E. Gselmann, *Inequalities for additive functions*, The 6th International Students' Conference on Analysis, Síkfőkút, 2010.

[18] E. Gselmann, *A characterization of the relative entropies*, The 10th Debrecen–Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Zamárdi, 2010.

[19] E. Gselmann, *On the characterization of derivations via a single equation*, The 48th International Symposium on Functional Equations, Batz–sur–Mer, Franciaország, 2010.