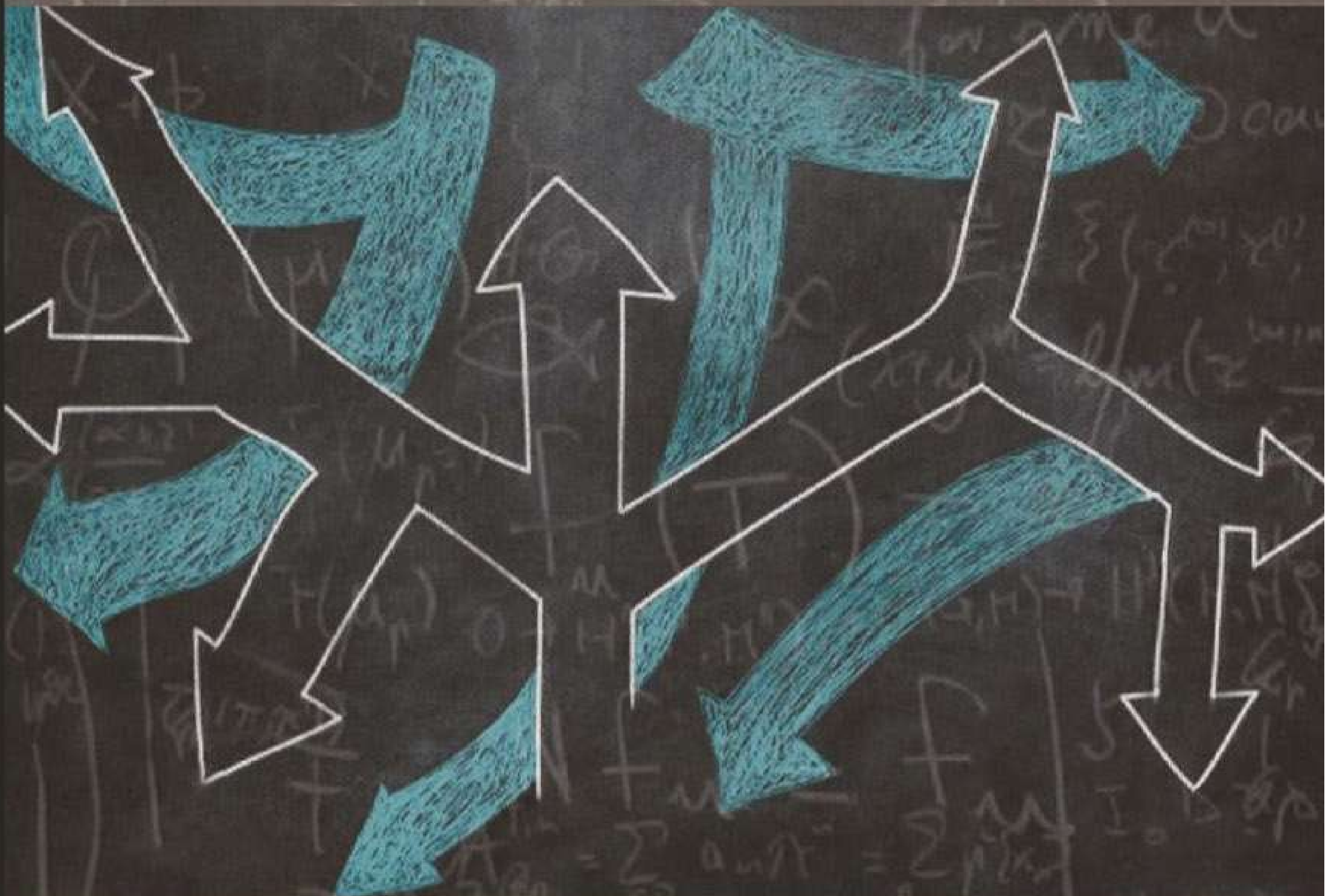
Dr. Kézi Csaba Gábor

Analízis mérnököknek



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

DR. KÉZI CSABA GÁBOR

ANALÍZIS MÉRNÖKÖKNEK

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2021

Lektorálta:

Dr. Nagy Gergő
egyetemi adjunktus
Debreceni Egyetem TTK Analízis Tanszék

ISBN 978-963-318-904-7

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Nyomdai munkálatokat
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2021-ben
dupress.unideb.hu

1. fejezet

Elemi függvények és függvénytranszformációk

1.1. Függvényekkel kapcsolatos fogalmak

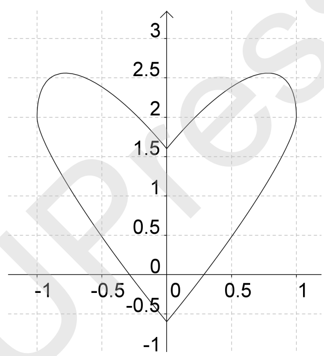
1.1.1. Definíció. Legyenek A és B nem üres halmazok! Ha az A halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzárendeljük a B halmaz egy-egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést *függvény*nek nevezzük. Jele: $f\colon A \to B$.

Az A halmazt *alaphalmaz*nak, a B halmazt *képhalmaz*nak nevezzük.

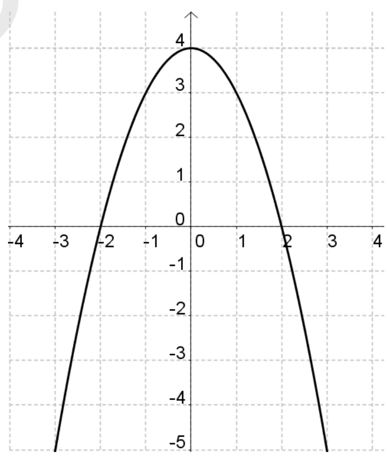
Az A alaphalmaznak azt részhalmazát, amelyhez a képhalmaznak valamely eleme hozzá lett rendelve, a függvény *értelmezési tartomány*ának mondjuk. Az f függvény értelmezési tartományát úgy jelöljük, hogy D_f.

A képhalmaznak a függvény helyettesítési értékeit tartalmazó részhalmazát a függvény *értékkészlet*ének nevezzük. Az f függvény értékkészletét R_f-fel jelöljük.

1.1.2. Példa. Az alábbi hozzárendelés nem függvény:



Az alábbi hozzárendelés függvény:



1.1.3. Definíció. Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény *grafikon*jának nevezzük az

$$\mathrm{graf}(f) = \{(x; y) \mid x \in A\}$$

halmazt.

1.1.4. Definíció. Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen *zérushely*e van, ha $f(x_0) = 0$.

1.1.5. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény zérushelye az $x^2 = 0$ egyenlet megoldása, vagyis $x = 0$.

1.1.6. Példa. Az $f(x) = 2^x$ függvénynek nincs zérushelye, mert a $2^x = 0$ egyenletnek nincs megoldása.

1.1.7. Definíció. Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény

- *alulról korlátos*, ha az értékkészlete alulról korlátos;
- *felülről korlátos*, ha az értékkészlete felülről korlátos;
- *korlátos*, ha az értékkészlete korlátos.

Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény *infimum*a, illetve *szuprémum*a az értékkészletének infimuma, illetve szuprémuma.

1.1.8. Példa. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény értékkészlete: $[0; \infty[$.

Tehát a függvény alulról korlátos, infimuma: 0. Felülről nem korlátos, így nem korlátos.

1.1.9. Példa. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$ függvény értékkészlete: $]-\infty; 0]$.

Tehát a függvény felülről korlátos, szuprémuma: 0. Alulról nem korlátos, így nem korlátos.

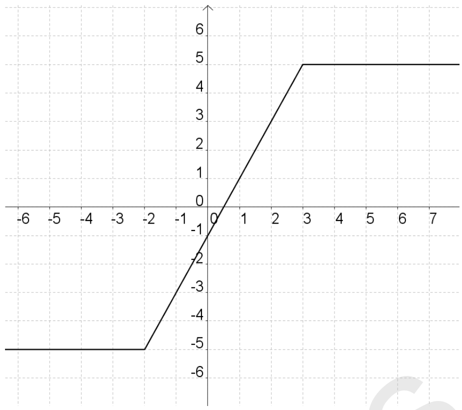
1.1.10. Példa. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvény értékkészlete: $]-\infty; \infty[$.

Tehát a függvény alulról sem, és felülről sem korlátos.

1.1.11. Definíció. Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény

- *monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in A$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, teljesül, hogy $f(x_1) \le f(x_2)$;
- *monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in A$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, teljesül, hogy $f(x_1) \ge f(x_2)$;
- *szigorúan monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$;
- *szigorúan monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

1.1.12. Példa. Az alábbi függvény monoton növekvő, de nem szigorúan monoton növekvő:



1.1.13. Példa. Tekintsük az $f(x) = 2x^3 + 5x + 4$ függvényt! Tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in D_f$ olyanok, hogy $x_1 < x_2$! Ekkor $x_1 - x_2 < 0$, így

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1^3 + 5x_1 + 4 - \left(2x_2^3 + 5x_2 + 4\right) = \\ = 2 \cdot \left(x_1^3 - x_2^3\right) + 5 \cdot (x_1 - x_2) < 0,$$

tehát $f(x_1) < f(x_2)$. Azt kaptuk, hogy ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$, ami azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő.

1.1.14. Definíció. Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen

- *maximuma* van, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in A$ esetén, azaz ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legnagyobb eleme;
- *minimuma* van, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in A$ esetén, azaz ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legkisebb eleme;
- *szélsőértéke* van, ha minimuma vagy maximuma van az x_0 helyen.

1.1.15. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény minimum helye: $x = 0$, minimum értéke: $f(0) = 0$.

1.1.16. Példa. Az $f(x) = -x^2$ függvény maximum helye: $x = 0$, maximum értéke: $f(0) = 0$.

1.1.17. Definíció. Az x_0 valós szám $r > 0$ sugarú környezetén az

$$]x_0 - r; x_0 + r[$$

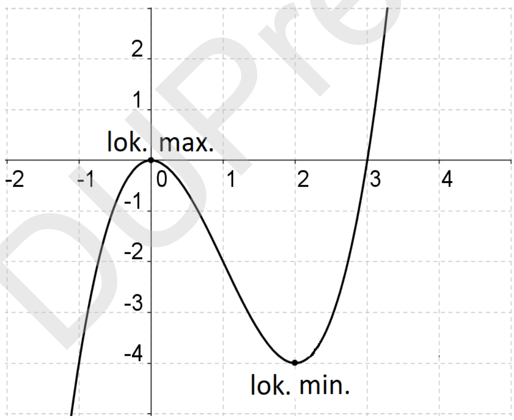
intervallumot értjük.

1.1.18. Definíció. Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen

- *lokális (helyi) maximum*a van, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$ valós szám, amelyre $f(x) \leq f(x_0)$ teljesül minden $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$ esetén, azaz ha f-nek van olyan környezete, amelyben $f(x_0)$ a legnagyobb függvényérték;
- *lokális (helyi) minimum*a van, ha létezik $\varepsilon > 0$ valós szám úgy, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$ esetén, azaz ha f-nek van olyan környezete, amelyben $f(x_0)$ a legkisebb függvényérték;
- *lokális szélsőérték*e van, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az x_0 helyen.

1.1.19. Megjegyzés. Ha létezik olyan r pozitív valós szám, hogy az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökkenő az $[x_0 - r; x_0]$ intervallumon és monoton növekvő az $[x_0, x_0 + r]$ intervallumon, akkor f-nek az x_0 helyen lokális minimuma van.

Ha létezik olyan r pozitív valós szám, hogy az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő az $[x_0 - r; x_0]$ intervallumon és monoton csökkenő az $[x_0; x_0 + r]$ intervallumon, akkor f-nek az x_0 helyen lokális maximuma van.



1.1.20. Definíció. Legyen I egy nyílt intervallum. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény

- *konvex*, ha minden $u, v \in I$, $u < v$ esetén az $\big(u; f(u)\big)$ és $\big(v; f(v)\big)$ pontokat összekötő szakasz az f függvény felett halad, azaz ha minden $u, v \in I$ és minden $t \in [0; 1]$ esetén

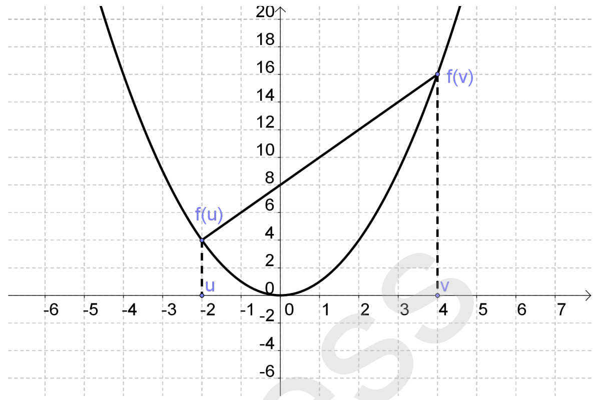
$$f\big(t \cdot u + (1 - t) \cdot v\big) \leq t \cdot f(u) + (1 - t) \cdot f(v).$$

  A $t \cdot u + (1 - t) \cdot v$, ahol $t \in [0; 1]$, a számegyenesen az u és v pontokat összekötő szakaszt jelenti.

Az $f\big(t \cdot u + (1-t) \cdot v\big)$ az előbbi szakaszon felvett függvényértékek halmaza.

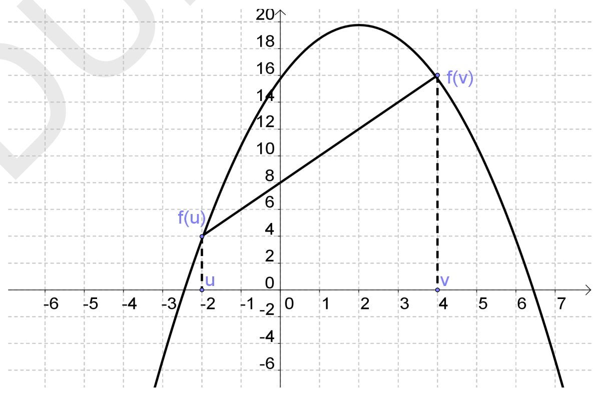
A $t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(v)$ az $\big(u; f(u)\big)$ és $\big(v; f(v)\big)$ pontokat összekötő szakasz.

A leírtakat mutatja az alábbi ábra:



- *konkáv*, ha minden $u, v \in I$, $u < v$ esetén az $\big(u; f(u)\big)$ és $\big(v; f(v)\big)$ pontokat összekötő szakasz az f függvény alatt halad, azaz ha minden $u, v \in I$ és minden $t \in [0; 1]$ esetén

$$f\big(t \cdot u + (1-t) \cdot v\big) \geq t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(v).$$



1.1.21. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény konvex.

1.1.22. Definíció. Legyen I egy nyílt intervallum. Az $f \colon I \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in I$ helyen *inflexiós hely*e van, ha x_0-ban megváltozik a konvexitása, azaz létezik $r > 0$ úgy, hogy az $[x_0 - r; x_0]$ intervallumon f konkáv és az

$[x_0; x_0 + r]$ intervallumon konvex, vagy az $[x_0 - r; x_0]$ intervallumon f konvex és az $[x_0; x_0+r]$ intervallumon konkáv. Ilyenkor az $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontot *inflexiós pont*nak hívjuk.

1.1.23. Definíció. Legyen az A halmaz szimmetrikus az origóra, ami azt jelenti, hogy ha $x \in A$, akkor $-x \in A$.

Azt mondjuk, hogy az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény

- *páros*, ha $f(-x) = f(x)$ minden $x \in A$ esetén;
- *páratlan*, ha $f(-x) = -f(x)$ minden $x \in A$ esetén.

1.1.24. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény páros, mert

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

1.1.25. Példa. Az $f(x) = x^3$ függvény páratlan, mert

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

1.1.26. Megjegyzés. Egy függvény

- pontosan akkor páros, ha a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre;
- pontosan akkor páratlan, ha a grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

1.1.27. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *periódikus*, ha van olyan $p \in \mathbb{R}$ pozitív valós szám, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x + p) = f(x).$$

Ha az f függvény periódikus, akkor végtelen sok megfelelő p érték van. Ha a definícióban meghatározott tulajdonságú p értékek halmazának van legkisebb eleme, akkor ezt a számot az f függvény *periódus*ának nevezzük.

1.1.28. Definíció. Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ és a $g\colon A \to \mathbb{R}$ függvények

- *összege* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$;
- *különbsége* $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$;
- *szorzata* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$;
- *hányadosa* $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ha $g(x) \neq 0$, $x \in A$ esetén.

1.1.29. Definíció. Az $f\colon A \to B \subset \mathbb{R}$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ha különböző elemekhez különböző elemeket rendel.

1.1.30. Megjegyzés. Az, hogy egy függvény kölcsönösen egyértelmű, szemléletesen azt jelenti, hogy ha a függvény grafikonját „vízszintes vonalakkal elmetsszük, akkor mindenhol legfeljebb egy metszéspontot kapunk”.

1.1.31. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény nem kölcsönösen egyértelmű, mert például $f(-1) = f(1)$.

1.1.32. Példa. Az $f(x) = x$ függvény kölcsönösen egyértelmű.

1.1.33. Definíció. Legyenek A és B a valós számok halmazának tetszőleges részhalmazai, továbbá f, illetve g az A, illetve B halmazon értelmezett valós értékű függvények. Tegyük fel, hogy a g függvény értékkészlete részhalmaza az f függvény értelmezési tartományának. Az f és g függvények *kompozíció*ján vagy *összetett függvény*én a $f \circ g \colon A \to \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$ függvényt értjük.

1.1.34. Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy általában

$$f \circ g \neq g \circ f,$$

vagyis a függvények kompozíciója, mint művelet nem kommutatív.

1.1.35. Példa. Ha $f(x) = \sin x$ és $g(x) = 4x + 10$, akkor

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = \sin(4x + 10)$$

és

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = 4 \cdot \sin x + 10.$$

1.1.36. Megjegyzés. Az $f \colon A \to \mathbb{R}$ függvény iverzén azt az f^{-1} módon jelölt függvényt értjük, melyre

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$$

teljesül.

1.1.37. Példa. Az $f(x) = x^3$ függvény inverze $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, mert

$$f \circ f^{-1}(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

és

$$f^{-1} \circ f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

1.1.38. Tétel. Egy függvénynek pontosan akkor létezik inverze (azaz pontosan akkor invertálható), ha kölcsönösen egyértelmű.

1.1.39. Megjegyzés. Ha az $f \colon A \to \mathbb{R}$ függvény invertálható, akkor

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = f(x).$$

1.1.40. Definíció. Legyen $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény és $B \subset A$! Azt mondjuk, hogy $g\colon B \to \mathbb{R}$ az f függvény B halmazra való *leszűkítés*e, ha $g(x) = f(x)$ minden $x \in B$ esetén. Jele: $f|_B$.

1.1.41. Definíció. Legyen $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subset C$! Azt mondjuk, hogy $g\colon C \to \mathbb{R}$ az f függvény C halmazra való *kiterjesztés*e, ha $g(x) = f(x)$ minden $x \in A$ esetén.

1.1.42. Példa. Például az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény nem invertálható, de az f függvény $[0; \infty[$ intervallumra való leszűkítése már igen.

Kidolgozott feladatok

1. Feladat. Adjuk meg az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$ függvény helyettesítési értékét az $x = 2$ helyen!

Megoldás:

A helyettesítési érték: $f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 4 + 2 = 10$.

2. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 2x - x^2$ függvényt! Számoljuk ki az

$$f(a+4) - f(a-4)$$

értéket, ha $a \in \mathbb{R}$ paraméter.

Megoldás:

Mivel

$$\begin{aligned} f(a+4) &= 2 \cdot (a+4) - (a+4)^2 = 2a + 8 - (a^2 + 8a + 16) = \\ &= 2a + 8 - a^2 - 8a - 16 = -a^2 - 6a - 8, \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} f(a-4) &= 2 \cdot (a-4) - (a-4)^2 = 2a - 8 - (a^2 - 8a + 16) = \\ &= 2a - 8 - a^2 + 8a - 16 = -a^2 + 10a - 24, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} f(a+4) - f(a-4) &= -a^2 - 6a - 8 - (-a^2 + 10a - 24) = \\ &= -a^2 - 6a - 8 + a^2 - 10a + 24 = -16a + 16. \end{aligned}$$

3. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2 - 3$ függvényt! Adjuk meg az

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

kifejezés tovább nem egyszerűsíthető alakját!

Megoldás:

Mivel $f(b) = b^2 - 3$ és $f(a) = a^2 - 3$, ezért

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{b^2 - 3 - (a^2 - 3)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \\ &= \frac{(b-a) \cdot (b+a)}{b - a} = b + a. \end{aligned}$$

4. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt! Adjuk meg az

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

kifejezés tovább nem egyszerűsíthető alakját!

Megoldás:

Mivel

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2,$$

ezért

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = \\ = \frac{h\cdot(2x+h)}{h} = 2x+h.$$

5. Feladat. Tekintsük az $f\colon]-\infty;0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-x}$ függvényt! Adjuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyre a függvényérték 4!

Megoldás:

Azt az x értéket keressük, amelyre $\sqrt{-x} = 4$ teljesül. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy $-x = 16$. A keresett szám tehát az $x = -16$.

6. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $f(x) = \sqrt{8-2x}$ függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a $8-2x \geq 0$ egyenlőtlenséget, amiből azt kapjuk, hogy $x \leq 4$, így az értelmezési tartomány a $]-\infty;4]$ intervallum.

7. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $f(x) = \sqrt{4x-x^2}$ függvény értelmezve van!

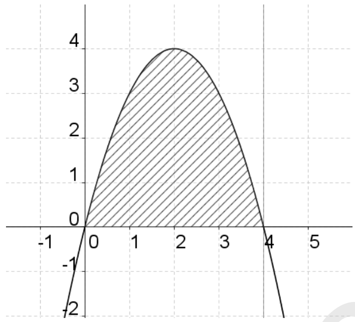
Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak pozitív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a

$$4x - x^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséget. Az egyenlőtlenséget grafikusan oldjuk meg.

Ehhez első lépésben meghatározzuk az $x \mapsto 4x - x^2$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk a $4x - x^2 = 0$ egyenletet. Kiemelve x-et azt kapjuk, hogy $x \cdot (4 - x) = 0$, így $x = 0$, illetve $x = 4$.
Ezután felvázoljuk az $x \mapsto 4x - x^2$ függvény grafikonját:



Leolvashatjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása és így egyben az f függvény értelmezési tartománya: $x \in [0; 4]$.

8. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \lg(2x - 8)$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Tudjuk, hogy a logaritmus függvény csak pozitív számokra értelmezhető, így logaritmus mögötti kifejezésnek pozitívnak kell lenni, azaz meg kell oldanunk a $2x - 8 > 0$ egyenlőtlenséget, amiből azt kapjuk, hogy $x > 4$, így a függvény értelmezési tartománya a $]4; \infty[$ intervallum.

9. Feladat. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \log_2 \left(\frac{x+3}{x-2} - 2 \right)$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Páros gyökkitevőjű gyök alatt csak nemnegatív számok szerepelhetnek, így teljesülnie kell az

$$\frac{x+3}{x-2} - 2 > 0$$

feltételnek. Közös nevezőre hozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{x+3}{x-2} - 2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x+3-2\cdot(x-2)}{x-2} > 0.$$

Felbontva a zárójelet, majd összevonva azt kapjuk, hogy

$$\frac{x+3-2x+4}{x-2} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-x+7}{x-2} > 0.$$

Egy tört csak akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű.

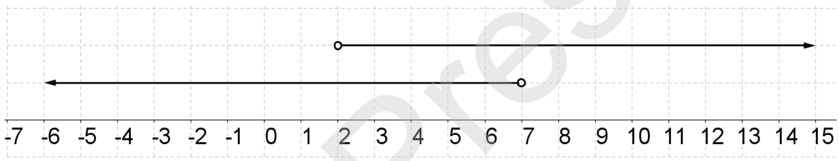
I. eset: $\frac{+}{+}$, vagyis a számláló és a nevező is pozitív. Ekkor

$$-x+7>0 \quad \text{és} \quad x-2>0,$$

azaz

$$x<7 \quad \text{és} \quad x>2.$$

A kapott megoldásokat számegyenesen ábrázolva



leolvashatjuk a közös részt, így az első eset megoldása: $x \in \,]2;7[$.

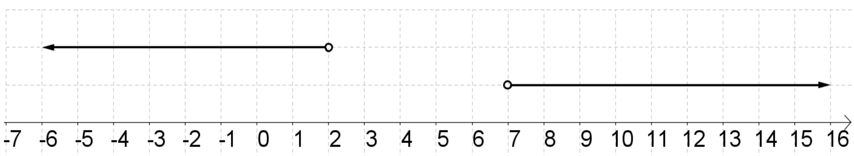
II. eset: $\frac{-}{-}$, vagyis a számláló és a nevező is negatív. Ekkor

$$-x+7<0 \quad \text{és} \quad x-2<0,$$

azaz

$$x>7 \quad \text{és} \quad x<2.$$

A kapott megoldásokat számegyenesen ábrázolva



leolvashatjuk a közös részt, így azt kapjuk, hogy a második esetnek nincs megoldása.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása a $]2;7[$ intervallum.

10. Feladat. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \log_2(4^x - 7 \cdot 2^x + 10)$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

A logaritmus mögött csak potitív szám állhat, ezért

$$4^x - 7 \cdot 2^x + 10 > 0.$$

Vezessük be a $2^x = y$ jelölést! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$y^2 - 7y + 10 > 0.$$

Ennek a másodfokú kifejezésnek a zérushelyei:

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

azaz $y_1 = 2$, illetve $y_2 = 5$. Ezt felhasználva az y-ban másodfokú egyenlőtlenség megoldása:

$$y \in]-\infty; 2[\cup]5; \infty[.$$

Ha $y < 2$, akkor $y = 2^x$ miatt $2^x < 2$, így $x < 1$.

Ha $y > 2$, akkor $y = 2^x$ miatt $2^x > 5$, így $x > \frac{\lg 5}{\lg 2}$.

Tehát a függvény értelmezési tartománya:

$$x \in]-\infty; 1[\cup \left]\frac{\lg 5}{\lg 2}; \infty\right[.$$

11. Feladat. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} + \sqrt{x + 3}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Egy tört nevezője nem lehet nulla, ezért $x^2 - 4 \neq 0$, tehát $x \neq \pm 2$.

A gyökjel alatt nem lehet negatív szám, ezért $x + 3 \geq 0$, így $x \geq -3$.

Tehát az értelmezési tartomány:

$$x \in [-3; \infty[\setminus \{-2; 2\}.$$

12. Feladat. Vizsgáljuk meg paritás szempontjából az

$$f(x) = \frac{x^4}{\sin 5x}$$

függvényt!

Megoldás:

Felhasználva, hogy a szinusz függvény páratlan, azaz $\sin(-x) = -\sin x$, azt kapjuk, hogy

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{\sin(-5x)} = \frac{x^4}{-\sin 5x} = -\frac{x^4}{\sin 5x} = -f(x),$$

így a függvény páratlan.

13. Feladat. Vizsgáljuk meg paritás szempontjából szerint az

$$f(x) = \frac{x^6}{\cos 4x}$$

függvényt!

Megoldás:

Felhasználva, hogy a koszinusz függvény páros, azaz $\cos(-x) = \cos x$, azt kapjuk, hogy

$$f(-x) = \frac{(-x)^6}{\cos(-4x)} = \frac{x^6}{\cos 4x} = f(x),$$

így a függvény páros.

14. Feladat. Vizsgáljuk meg paritás szempontjából szerint az

$$f(x) = \frac{4^x - 1}{4^x + 1}$$

függvényt!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = \frac{4^{-x} - 1}{4^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{4^x} - 1}{\frac{1}{4^x} + 1} = \frac{\frac{1-4^x}{4^x}}{\frac{1+4^x}{4^x}} = \frac{1 - 4^x}{1 + 4^x} = -\frac{4^x - 1}{4^x + 1} = -f(x),$$

így a függvény páratlan.

15. Feladat. Vizsgáljuk meg paritás szempontjából az

$$f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}$$

függvényt!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = (-x)^4 + \frac{1}{(-x)^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} = f(x),$$

így a függvény páros.

16. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2 + ax - 3$ és $g(x) = x^2 - 4x + b$ függvényeket! Tudjuk, hogy

$$f(x) \cdot g(x) = x^4 - 22x^2 + 9.$$

Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét!

Megoldás:

Mivel

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (x^2 + ax - 3) \cdot (x^2 - 4x + b) = \\ &= x^4 - 4x^3 + bx^2 + ax^3 - 4ax^2 + abx - 3x^2 + 12x - 3b = \\ &= x^4 + (a-4) \cdot x^3 + (b - 4a - 3) \cdot x^2 + (ab + 12) \cdot x - 3b, \end{aligned}$$

ezért $a - 4 = 0$, $b - 4a - 3 = -22$, $ab + 12 = 0$ és $-3b = 9$.
Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $a = 4$, míg az utolsóból azt, hogy $b = -3$. Ezek kielégítik a $b - 4a - 3 = 0$ és az $ab + 12 = 0$ egyenleteket is, így $a = 4$ és $b = -3$ valóban megoldás.

17. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \cos x$ és a $g(x) = x^2 + 2x - 3$ függvényeket!

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!

b) Határozzuk meg az $g \circ f$ összetett függvényt!

Megoldás:

a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 2x - 3) = \cos(x^2 + 2x - 3).$$

b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g\big(f(x)\big) = g(\cos x) = (\cos x)^2 + 2 \cdot \cos x - 3 \\ &= \cos^2 x + 2 \cdot \cos x - 3. \end{aligned}$$

18. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 2^x$ és a $g(x) = 2x + 1$ függvényeket!

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!

b) Határozzuk meg az $g \circ f$ összetett függvényt!

c) Adjuk meg az $f \circ g(x) = g \circ f(x) + 11$ egyenlet megoldását!

Megoldás:

a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x + 1) = 2^{2x+1}.$$

b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(2^x) = 2 \cdot 2^x + 1.$$

c) A megoldandó egyenlet:

$$2^{2x+1} = 2 \cdot 2^x + 1 + 11.$$

Mivel $2^{2x+1} = 2^{2x} \cdot 2$, ezért az egyenlet

$$2 \cdot 2^{2x} = 2 \cdot 2^x + 12$$

alakú lesz. Bevezetve a $2^x = y$ jelölést azt kapjuk, hogy

$$2y^2 = 2y + 12 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 - y - 6 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

adódik, így $y_1 = -2$, illetve $y_2 = 3$. Mivel $y = 2^x$, ezért $2^x = -2$ nem lehetséges. Ha $y = 3$, akkor $2^x = 3$, így $x = \frac{\lg 3}{\lg 2}$.

19. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ és a $g(x) = x + 2$ függvényeket!

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!

b) Határozzuk meg az $g \circ f$ összetett függvényt!

c) Határozzuk meg az $f \circ f$ összetett függvényt!

d) Határozzuk meg az $g \circ g$ összetett függvényt!

e) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az összetett függvények értelmezve vannak!

f) Oldjuk meg az $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ egyenletet!

Megoldás:

a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+2) = \sqrt{x+2}.$$

b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 2.$$

c) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}.$$

d) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$g \circ g(x) = g\big(g(x)\big) = g(x+2) = x+2+2 = x+4.$$

e) Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartománya:
$$D_{f \circ g} = [-2; \infty[.$$

A $g \circ f$ függvény értelmezési tartománya:
$$D_{g \circ f} = [0; \infty[.$$

f) Megoldjuk a
$$\sqrt{x+2} = \sqrt{x} + 2$$
egyenletet. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd elvégezve az összevonásokat és megfelelően rendezve az egyenletet
$$\begin{aligned} x+2 &= (\sqrt{x}+2)^2 \\ x+2 &= x + 4 \cdot \sqrt{x} + 4 \\ -0{,}5 &= \sqrt{x} \end{aligned}$$
adódik, ami ellentmondás, ugyanis az egyenlet bal oldalán negatív számot kaptunk, míg a jobb oldalon egy szám négyzetgyöke, ami nem lehet negatív.

20. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ és a $g(x) = x^2 + 3$ függvényeket.

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!

b) Határozzuk meg a $g \circ f$ összetett függvényt!

c) Határozzuk meg az $f \circ f$ összetett függvényt!

d) Határozzuk meg a $g \circ g$ összetett függvényt!

Megoldás:

a) Az $f \circ g$ összetett függvény:

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3}.$$

b) Az $g \circ f$ összetett függvény:

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 3.$$

c) Az $f \circ f$ összetett függvény:

$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

d) A $g \circ g$ összetett függvény:

$$g \circ g(x) = g\big(g(x)\big) = g(x^2 + 3) = (x^2 + 3)^2 + 3 = x^4 + 6x^2 + 12.$$

21. Feladat. Bontsuk fel külső és belső függvény összetételére az

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

függvényt!

Megoldás:

Ha az f függvényt $f(x) = k \circ b(x)$ alakban írjuk fel, akkor k a külső függvény és b a belső függvény, ahol $k(x) = \dfrac{1}{x}$, és $b(x) = x^2 + 4$.

22. Feladat. Bontsuk fel külső és belső függvény összetételére az

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

függvényt!

Megoldás:

Ha az f függvényt $f(x) = k \circ b(x)$ alakban írjuk fel, akkor k a külső függvény és b a belső függvény, ahol $k(x) = \sqrt{x}$, és $b(x) = 4 - x^2$.

23. Feladat. Bontsuk fel külső és belső függvény összetételére az

$$f(x) = \log_2(x^2 + 4x + 1)$$

függvényt!

Megoldás:

Ha az f függvényt $f(x) = k \circ b(x)$ alakban írjuk fel, akkor k a külső függvény és b a belső függvény, ahol $k(x) = \log_2 x$, és $b(x) = x^2 + 4x + 1$.

24. Feladat. Bontsuk fel külső és belső függvény összetételére az

$$f(x) = 2^{\sin x}$$

függvényt!

Megoldás:

Ha az f függvényt $f(x) = k \circ b(x)$ alakban írjuk fel, akkor k a külső függvény és b a belső függvény, ahol $k(x) = 2^x$, és $b(x) = \sin x$.

25. Feladat. Bontsuk fel külső és belső függvény összetételére az

$$f(x) = 3^{x^2+4x+5}$$

függvényt!

Megoldás:

Ha az f függvényt $f(x) = k \circ b(x)$ alakban írjuk fel, akkor k a külső függvény és b a belső függvény, ahol $k(x) = 3^x$, és $b(x) = x^2 + 4x + 5$.

26. Feladat. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 6$ függvényt!

a) Invertálható-e a függvény?

b) Ha igen, határozzuk meg az inverzét!

c) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az f függvényt és az inverzét!

d) Milyen geometriai kapcsolat figyelhető meg a függvény és inverze között?

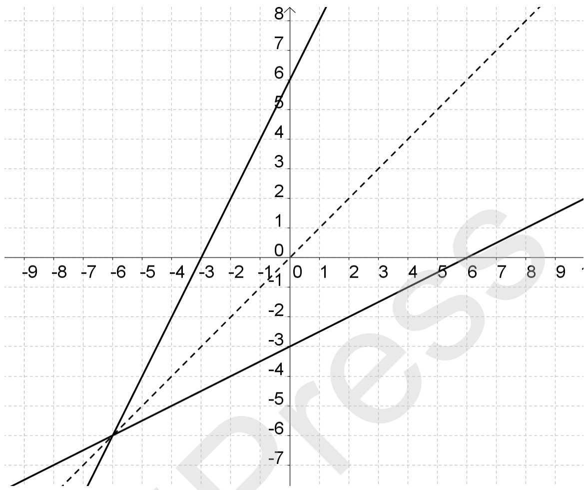
Megoldás:

a) Az f függvény grafikonja egy egyenes, így kölcsönösen egyértelmű, azaz különböző elemekhez különböző elemeket rendel, tehát invertálható.

b) Az inverz függvény meghatározásához először az $y = 2x + 6$ egyenletet kell tekintenünk, amiben megcserélve az x és y szerepét azt kapjuk, hogy $x = 2y + 6$. Ebből kifejezve az y-t, $y = \frac{x-6}{2}$ adódik, így az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = \frac{x-6}{2} = \frac{1}{2}x - 3.$$

c) A függvény és az inverz függvény grafikonja:



d) Geometriailag egy függvény inverzét úgy határozhatjuk meg, hogy a függvényt tükrözzük az $y = x$ egyenletű egyenesre.

27. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \log_2(x-3) + 2$ függvényt!

a) Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát!

b) Számoljuk ki az f függvény inverzét!

c) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az f függvényt és az inverzét!

Megoldás:

a) Az f függvény értelmezési tartománya: $x > 3$.

b) Legyen $y = \log_2(x-3) + 2$! Az x és y szerepét megcserélve azt kapjuk, hogy

$$x = \log_2(y-3) + 2.$$

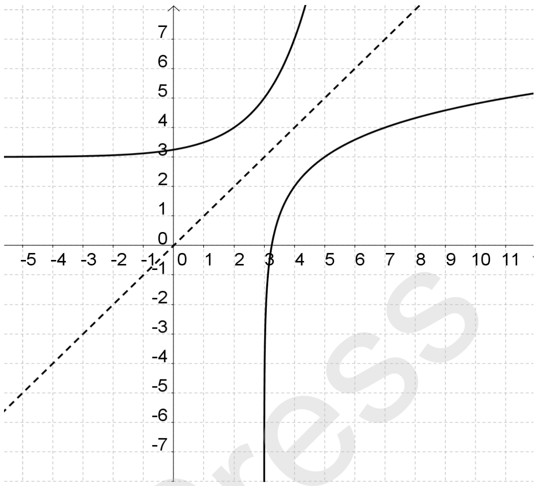
Ebből az y-t kifejezve

$$x - 2 = \log_2(y-3) \quad \Rightarrow \quad 2^{x-2} = y - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 2^{x-2} + 3$$

adódik, így az f inverze:

$$f^{-1}(x) = 2^{x-2} + 3.$$

c) Az f függvénynek és az inverzének a grafikonja:



28. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 3^{x-4} + 2$ függvényt!

a) Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát!

b) Számoljuk ki az f függvény inverzét!

c) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az f függvényt és az inverzét!

Megoldás:

a) Az f függvény értelmezési tartománya: $\mathbb{R}$.

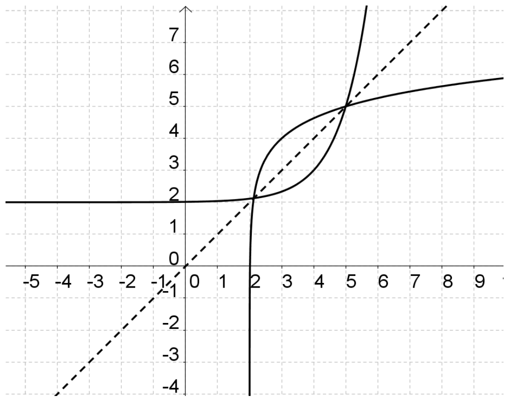
b) Legyen $y = 3^{x-4} + 2$! Az x és y szerepét megcserélve azt kapjuk, hogy $x = 3^{y-4} + 2$. Ebből az y-t kifejezve

$$x - 2 = 3^{y-4} \quad \Rightarrow \quad \log_3(x-2) = y - 4 \quad \Rightarrow \quad y = \log_3(x-2) + 4$$

adódik, így az f inverze:

$$f^{-1}(x) = \log_3(x-2) + 4.$$

c) Az f függvénynek és az inverzének a grafikonja:



29. Feladat. Egy termék x darabjának előállítási költsége forintban kifejezve:

$$C(x) = 100x \cdot \sqrt{x} + 1\,000.$$

a) Mennyi lesz a költség, ha 9 darab terméket gyártunk?

b) Mennyi lesz a költség, ha 16 darab terméket gyártunk?

c) Mennyivel növekszik a költség, ha az eredetileg tervezett a darab helyett $a + 1$ darab terméket gyártunk?

d) Hány darab terméket tudunk előállítani 101 000 forintból?

Megoldás:

a) Ha 9 darab terméket gyártunk, akkor

$$C(9) = 100 \cdot 9 \cdot \sqrt{9} + 1\,000 = 3\,700\,\mathrm{Ft}.$$

b) Ha 16 darab terméket gyártunk, akkor

$$C(16) = 100 \cdot 16 \cdot \sqrt{16} + 1\,000 = 7\,400\,\mathrm{Ft}.$$

c) Ha a darab terméket gyártunk, akkor a költség

$$C(a) = 100a \cdot \sqrt{a} + 1\,000.$$

Ha $a + 1$ darab terméket gyártunk, akkor a költség

$$C(a+1) = 100 \cdot (a+1) \cdot \sqrt{a+1} + 1\,000.$$

A költség növekedése:

$$\begin{aligned} C(a+1)-C(a) &= 100\cdot(a+1)\cdot\sqrt{a+1}+\\ &\quad + 1\,000 - 100a\cdot\sqrt{a} - 1\,000 =\\ &= 100\cdot\big((a+1)\cdot\sqrt{a+1} - a\cdot\sqrt{a}\big). \end{aligned}$$

d) Meg kell oldanunk a

$$101\,000 = 100x\cdot\sqrt{x} + 1\,000$$

egyenletet. Az egyenlet mindkét oldalából vonjunk ki 1 000-t, majd a kapott egyenlet mindkét oldalát osszuk 100-zal. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$100\,000 = 100x\cdot\sqrt{x}$$
$$1\,000 = x\cdot\sqrt{x}.$$

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$1\,000\,000 = x^3.$$

Köbgyököt vonva mindkét oldalból azt kapjuk, hogy $x = 100$. Tehát 100 darab terméket tudunk előállítani 101 000 forintból.

1.2. Elemi függvények

1.2.1. Definíció. Legyen n egy természetes szám és legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok és $a_n \neq 0$. Ekkor a

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

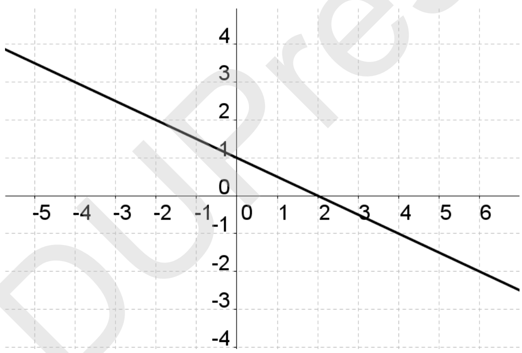
függvényt *n-edfokú polinomfüggvény*nek nevezzük.

1.2.2. Definíció. Az $f(x) = m \cdot x + b$ függvény elsőfokú polinomfüggvény, ahol m-et a függvény *meredekség*ének mondjuk.

1.2.3. Megjegyzés. Az elsőfokú polinomfüggvények grafikonja egyenes.

1.2.4. Definíció. Az $f(x) = m \cdot x + b$ elsőfokú polinom függvény *irányszög*én azt az $0 \leq \alpha < \pi$ szöget értjük, amelyre $m = \mathrm{tg}\alpha$ teljesül.

1.2.5. Példa. Az $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ függvény grafikonja:



- Az egyenes meredeksége: $m = -\frac{1}{2}$.
- Az egyenes irányszöge: $\alpha \approx 153{,}43°$.

1.2.6. Tétel. Ha $f(x)$ és $g(x)$ olyan polinomok, hogy $g(x)$ sehol sem zérus, akkor egyértelműen léteznek olyan $h(x)$ és $m(x)$ polinomok, hogy

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) + m(x)$$

és $m(x)$ fokszáma $g(x)$ fokszámánál kisebb.

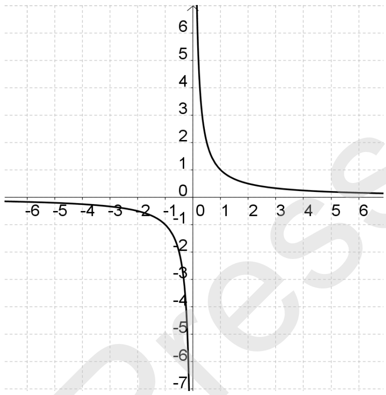
1.2.7. Példa. Legyen $f(x) = x^2 + 7x + 13$ és $g(x) = x + 3$. Ekkor

$$x^2 + 7x + 13 = (x + 3) \cdot (x + 4) + 1.$$

1.2.8. Definíció. Az f függvényt *racionális törtfüggvény*nek nevezzük, ha léteznek olyan p és nem azonosan zérus q polinomok, hogy

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

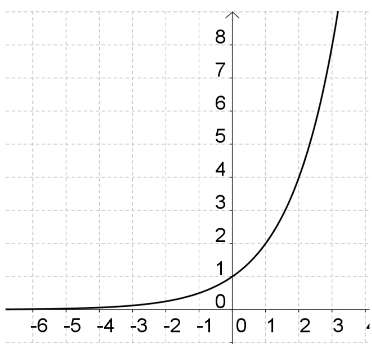
1.2.9. Példa. Az $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény racionális törtfüggvény, grafikonja:



1.2.10. Definíció. Legyen $0 < a \neq 1$ valós szám. Az $f(x) = a^x$ függvényt *exponenciális függvény*nek nevezzük.

1.2.11. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy az exponenciális függvény irracionális kitevőinek precíz értelmezéséhez határértékszámításra lenne szükség, amely témakör tárgyalására jelen jegyzetben nem kerül sor.

1.2.12. Példa. Az $f(x) = 2^x$ függvény grafikonja:



1.2.13. Megjegyzés. A későbbiekben többször fogunk találkozni az

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

függvénnyel, ahol e az úgynevezett Euler-féle szám, a természetes alapú logaritmus alapszáma ($\mathrm{e} \approx 2{,}718$).

Ez a függvény rendkívül fontos szerepet tölt be a mérnöki és gazdasági számításokban egyaránt.

A későbbiekben többször fogunk vele találkozni.

1.2.14. Definíció. *Szinusz hiperbolikusz* függvénynek nevezzük az

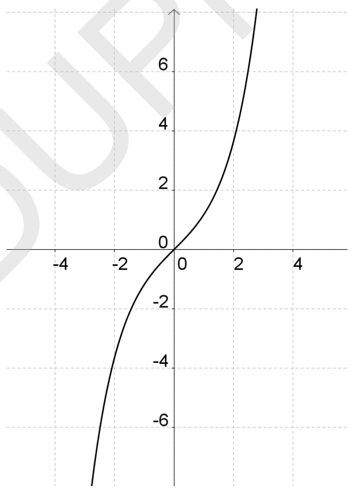
$$\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

függvényt.

1.2.15. Példa. Például az $\operatorname{sh}(\ln 2)$ értéke:

$$\operatorname{sh}(\ln 2) = \frac{\mathrm{e}^{\ln 2} - \mathrm{e}^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

1.2.16. Megjegyzés. Az $\operatorname{sh} x$ függvény grafikonja:

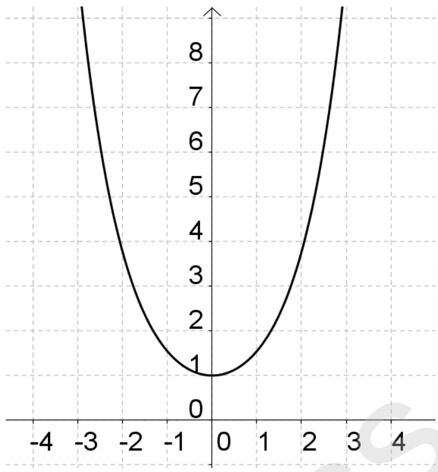


1.2.17. Definíció. *Koszinusz hiperbolikusz* függvénynek nevezzük a

$$\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

függvényt.

1.2.18. Megjegyzés. A $\operatorname{ch} x$ függvény grafikonja:



1.2.19. Megjegyzés. A $\operatorname{ch} x$ függvény grafikonját „láncgörbének” is nevezik.

1.2.20. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

1.2.21. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x).$$

1.2.22. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$$

1.2.23. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$$

azaz $\operatorname{ch} x$ páros függvény.

1.2.24. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x,$$

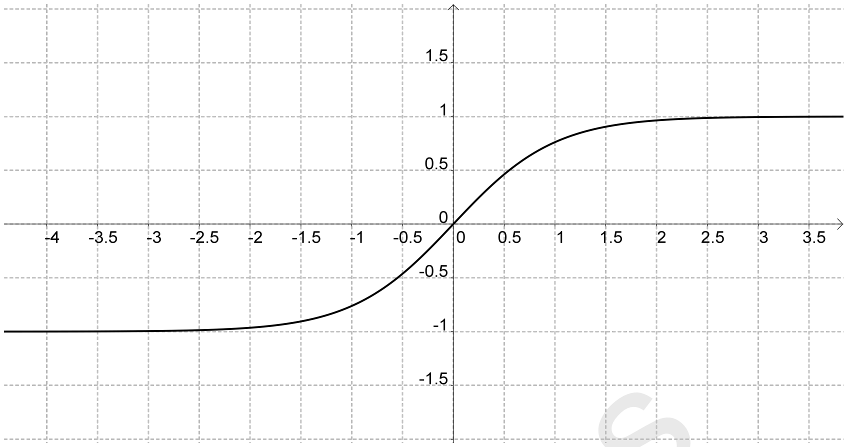
azaz $\operatorname{sh} x$ páratlan függvény.

1.2.25. Definíció. *Tangens hiperbolikusz* függvénynek nevezzük a

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

függvényt.

1.2.26. Megjegyzés. A $\operatorname{th} x$ függvény grafikonja:

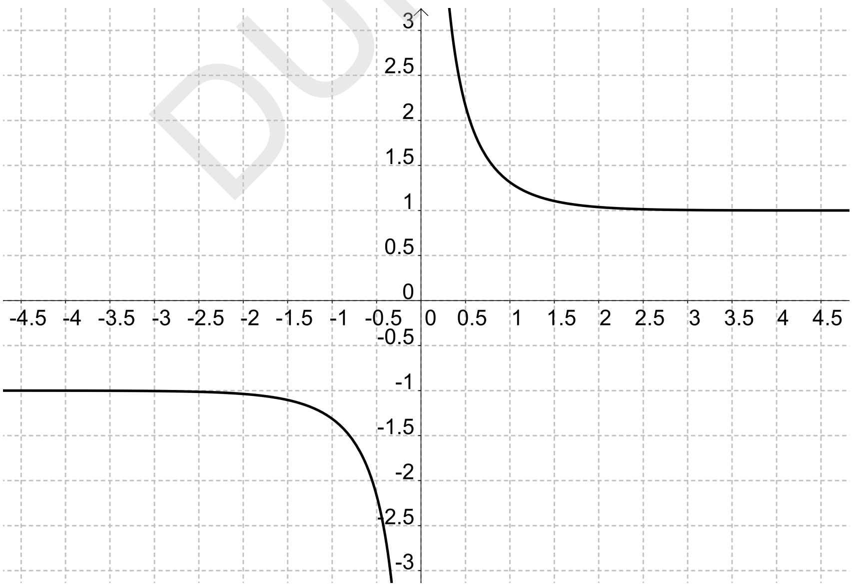


1.2.27. Definíció. *Kotangens hiperbolikusz* függvénynek nevezzük a

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

függvényt.

1.2.28. Megjegyzés. A $\operatorname{cth} x$ függvény grafikonja:



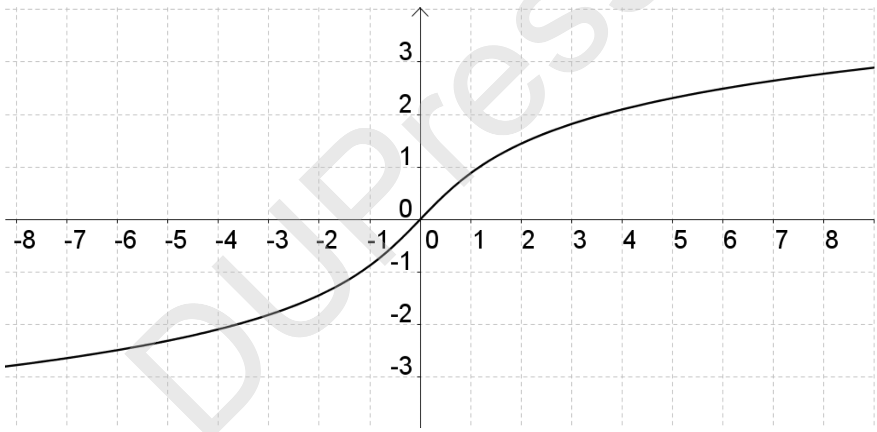
1.2.29. Definíció. Az $f(x) = a^x$ függvény invertálható, inverze az *a-alapú logaritmus* függvény: $\log_a x$. Speciálisan szokás alkalmazni az $\lg x = \log_{10} x$ és az $\ln x = \log_e x$ jelöléseket.

1.2.30. Definíció. Az $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{cth} x$ függvényeket összefoglaló néven *hiperbolikus függvények*nek nevezzük.

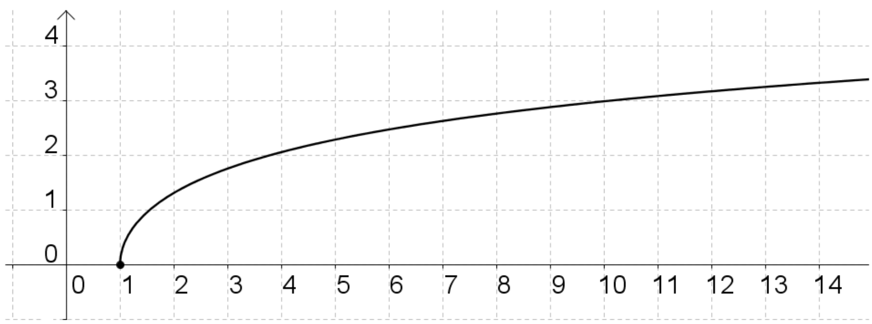
1.2.31. Definíció. A hiperbolikus függvények inverzeit *area* függvényeknek nevezzük.

- A $\operatorname{sh} x$ függvény inverze: $\operatorname{arsh} x$;
- A $[0; \infty[$ intervallumra leszűkített $\operatorname{ch} x$ függvény inverze: $\operatorname{arch} x$;
- A $\operatorname{th} x$ függvény inverze: $\operatorname{arth} x$;
- A $\operatorname{cth} x$ függvény inverze: $\operatorname{arcth} x$.

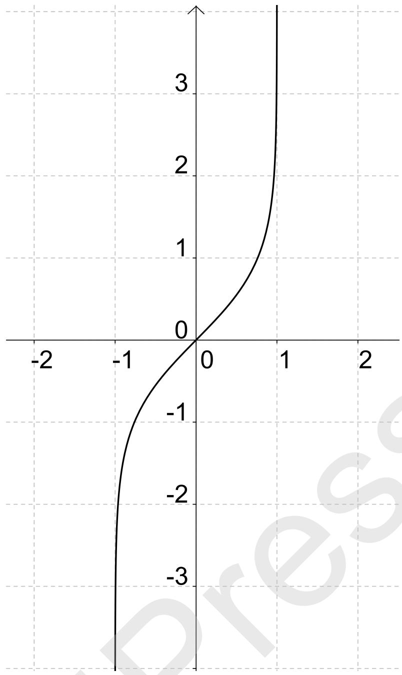
1.2.32. Megjegyzés. Az $\operatorname{arsh} x$ függvény grafikonja:



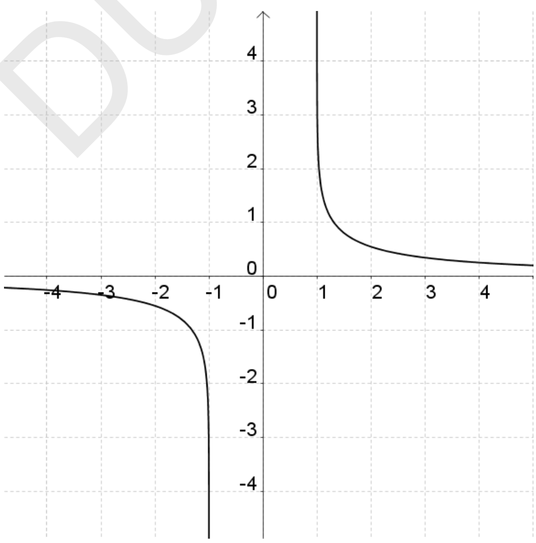
1.2.33. Megjegyzés. Az $\operatorname{arch} x$ függvény grafikonja:



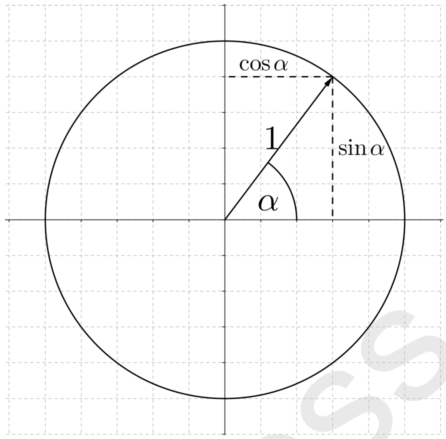
1.2.34. Megjegyzés. Az $\operatorname{arth} x$ függvény grafikonja:



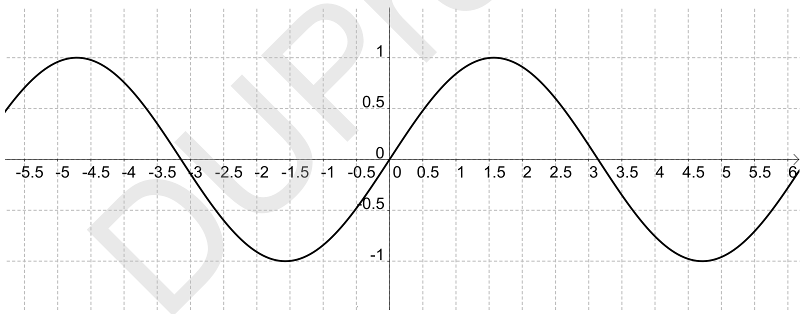
1.2.35. Megjegyzés. Az $\operatorname{arcth} x$ függvény grafikonja:



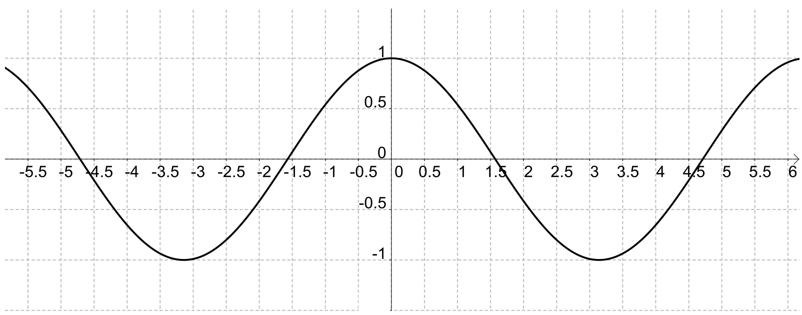
1.2.36. Definíció. Legyen x egy tetszőleges valós szám. A koordinátarendszer $(1;0)$ koordinátájú pontjának origó körüli x radián nagyságú szöggel való elforgatásával keletkezett pont első koordinátáját (abszcisszáját) *koszinusz*nak, második koordinátáját (ordinátáját) *szinusz*nak nevezzük.



1.2.37. Megjegyzés. A $\sin x$ függvény grafikonja:



1.2.38. Megjegyzés. A $\cos x$ függvény grafikonja:



1.2.39. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(-x) = \cos x$, azaz a koszinusz függvény páros.

1.2.40. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin(-x) = -\sin x$, azaz a szinusz függvény páratlan.

1.2.41. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

1.2.42. Tétel. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y.$$

1.2.43. Következmény. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

1.2.44. Következmény. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

1.2.45. Következmény. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

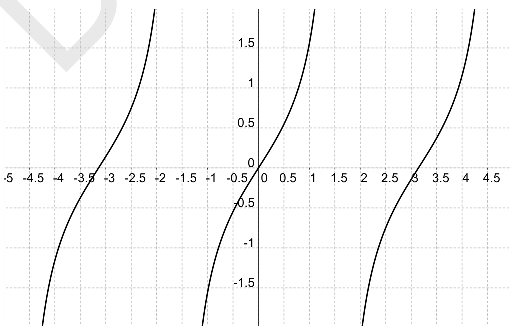
$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y.$$

1.2.46. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

1.2.47. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$.

1.2.48. Definíció. *Tangens* függvénynek nevezzük a $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ függvényt.

1.2.49. Megjegyzés. A $\operatorname{tg} x$ függvény grafikonja:



1.2.50. Tétel. A $\operatorname{tg} x$ függvény páratlan, azaz minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\}$ esetén

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$

1.2.51. Tétel. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $\operatorname{tg}(x+y)$ értelmezve van teljesül, hogy

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

1.2.52. Következmény. Minden olyan x esetén, amelyre $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{tg}(2x)$ értelmezve van:

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

1.2.53. Tétel. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $\operatorname{tg}(x-y)$ értelmezve van teljesül, hogy

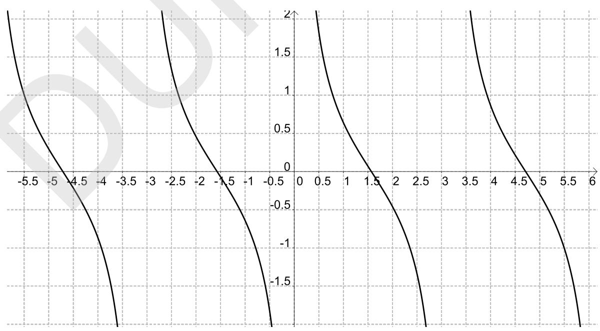
$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

1.2.54. Definíció. *Kotangens* függvénynek nevezzük az

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

függvényt.

1.2.55. Megjegyzés. A $\operatorname{ctg} x$ függvény grafikonja:



1.2.56. Megjegyzés. Minden $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ esetén

$$\operatorname{ctg}\ x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

1.2.57. Tétel. A $\operatorname{ctg} x$ függvény páratlan, azaz minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\}$ esetén

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

1.2.58. Tétel. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $\operatorname{ctg}(x+y)$ értelmezve van teljesül, hogy
$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}.$$

1.2.59. Következmény. Minden olyan x esetén, amelyre $\operatorname{ctg} x$ és $\operatorname{ctg}(2x)$ értelmezve van:
$$\operatorname{ctg}(2x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}.$$

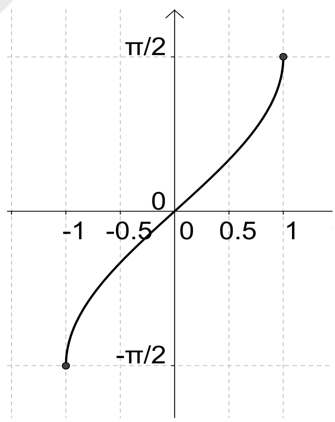
1.2.60. Következmény. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $\operatorname{ctg}(x-y)$ értelmezve van teljesül, hogy
$$\operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}.$$

1.2.61. Definíció. A $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ függvényeket összefoglaló néven *trigonometrikus függvények*nek nevezzük.

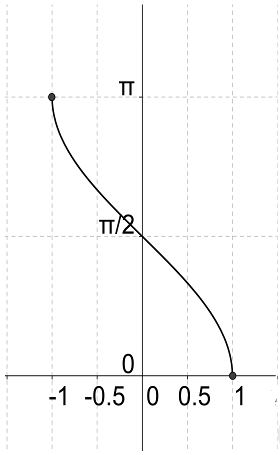
1.2.62. Definíció. A trigonometrikus függvények inverzeit *arkusz* függvényeknek nevezzük.

- A $\sin x$ függvény $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra való leszűkítésének inverze: $\arcsin x$;
- A $[0; \pi]$ intervallumra leszűkített $\cos x$ függvény inverze: $\arccos x$;
- A $\operatorname{tg} x$ függvény $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumra való leszűkítésének inverze: $\operatorname{arctg} x$;
- A $]0; \pi[$ intervallumra leszűkített $\operatorname{ctg} x$ függvény inverze: $\operatorname{arcctg} x$.

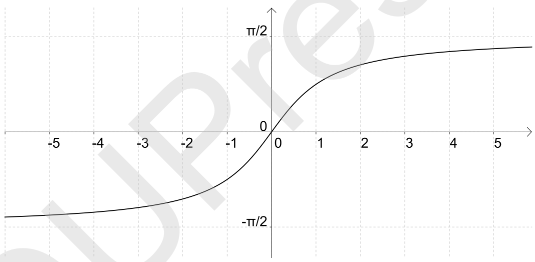
1.2.63. Megjegyzés. Az $\arcsin x$ függvény grafikonja:



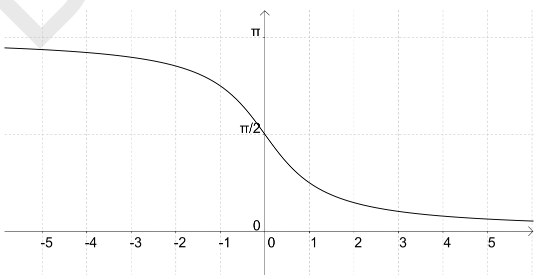
1.2.64. Megjegyzés. Az $\arccos x$ függvény grafikonja:



1.2.65. Megjegyzés. Az $\operatorname{arctg} x$ függvény grafikonja:



1.2.66. Megjegyzés. Az $\operatorname{arcctg} x$ függvény grafikonja:

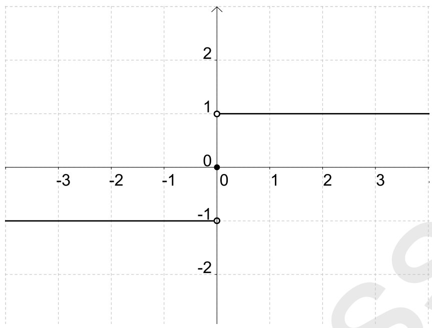


1.2.67. Definíció. *Elemi függvény*eknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek az $x; \sin x; \mathrm{e}^x$ függvényekből véges sok összeadással, konstanssal való szorzással, szorzással, osztással, inverz képzéssel és összetett függvény képzéssel állíthatók elő.

1.2.68. Definíció. *Szignum függvény*nek vagy más szóval *előjel függvény*nek nevezzük az

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt. A függvény grafikonja:



Kidolgozott feladatok

30. Feladat. Az $f(x) = m \cdot x + b$ függvény grafikonjára illeszkednek a $(-2; 5)$ és $(3; -5)$ pontok.

a) Határozzuk meg az m és b értékeket!

b) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

Megoldás:

a) A f függvény -2 helyen vett helyettesítési értéke 5, ezért $5 = -2m + b$.

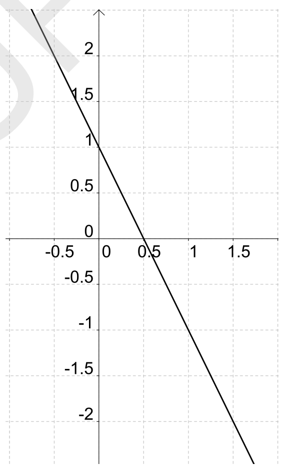
A függvény helyettesítési értéke a 3 helyen -5, ezért $-5 = 3m + b$.

Az első egyenletből kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy $10 = -5m$, így $m = -2$.

Ezt visszahelyettesítve például az $5 = -2m + b$ egyenletbe azt kapjuk, hogy $b = 1$. Tehát a keresett függvény:

$$f(x) = -2x + 1.$$

b) Az f függvény $\frac{1}{2}$-nél metszi az x tengelyt, és 1-nél metszi az y tengelyt. Ez alapján fel tudjuk rajzolni a függvény grafikonját:



31. Feladat. Adjuk meg

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$$

pontos értékét!

Megoldás:

Tekintsük elsőként a

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

azonosságot. Osszuk el mindkét oldalt $\cos^2 x$-el és alkalmazzuk, hogy minden

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

esetén

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ekkor

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ezt felhasználva

$$\operatorname{tg}^2(\arccos x) = \frac{1}{x^2} - 1,$$

így minden $|x| \leq 1$ esetén

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{|x|}$$

teljesül. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 2 = \sqrt{3}.$$

32. Feladat. Számoljuk ki $\operatorname{ch}(\ln 6)$ pontos értékét!

Megoldás:

Felhasználva a $\operatorname{ch} x$ függvény definícióját azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ch}(\ln 6) = \frac{e^{\ln 6} + e^{-\ln 6}}{2} = \frac{6 + \frac{1}{6}}{2} = \frac{37}{12}.$$

33. Feladat. Számoljuk ki $\operatorname{sh}(\ln 2)$ pontos értékét!

Megoldás:

Felhasználva a $\operatorname{sh} x$ függvény definícióját azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{sh}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

34. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\mathrm{sh}^2 x - 7 \cdot \mathrm{ch} x + 11 = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$$

azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{ch}^2 x - 7 \cdot \mathrm{ch} x + 10 = 0.$$

Bevezetve a $\mathrm{ch} x = k$ jelölést, a $k^2 - 7k + 10 = 0$ egyenlethez jutunk. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

így $k_1 = 2$, illetve $k_2 = 5$. Mivel $\mathrm{ch} x = k$, ezért egyrészt $\mathrm{ch} x = 2$, másrészt $\mathrm{ch} x = 5$.

- Elsőként legyen $\mathrm{ch} x = 2$. Ekkor a $\mathrm{ch} x$ függvény definíciójából azt kapjuk, hogy

  $$\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}{2} = 2.$$

  Bevezetve az $\mathrm{e}^x = a$ jelölést azt kapjuk, hogy

  $$a + \frac{1}{a} = 4 \qquad \Rightarrow \qquad a^2 - 4a + 1 = 0.$$

  Az egyenlet megoldására

  $$a_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

  adódik. Mivel $\mathrm{e}^x = a$, ezért egyrészt

  $$\mathrm{e}^x = 2 + \sqrt{3},$$

  amiből azt kapjuk, hogy

  $$x_1 = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right),$$

  másrészt pedig

  $$\mathrm{e}^x = 2 - \sqrt{3}$$

  miatt

  $$x_2 = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right).$$

- Második esetben $\mathrm{ch} x = 5$. Ekkor a $\mathrm{ch} x$ függvény definíciójából azt kapjuk, hogy

  $$\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 5 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x}}{2} = 5.$$

  Vezessük be most az $\mathrm{e}^x = b$ jelölést! Ekkor az

  $$b + \frac{1}{b} = 10 \qquad \Rightarrow \qquad b^2 - 10b + 1 = 0$$

  egyenlethez jutunk. Az egyenlet megoldására

  $$b_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-4}}{2} = \frac{10 \pm 4 \cdot \sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2 \cdot \sqrt{6}$$

  adódik. Mivel egyrészt $\mathrm{e}^x = b$, ezért

  $$\mathrm{e}^x = 5 + 2 \cdot \sqrt{6} \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = \ln\left(5 + 2 \cdot \sqrt{6}\right),$$

  másrészt pedig

  $$\mathrm{e}^x = 5 - 2 \cdot \sqrt{6}$$

  miatt

  $$x_4 = \ln\left(5 - 2 \cdot \sqrt{6}\right).$$

35. Feladat. Oldjuk meg az $\mathrm{sh}\, x = \frac{3}{4}$ egyenletet!

Megoldás:

Mivel

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{3}{4}.$$

A közös nevezővel szorozva

$$2\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} = 3$$

adódik. Bevezetve az $y = \mathrm{e}^x$ jelölést azt kapjuk, hogy

$$2y - \frac{2}{y} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad 2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

adódik, így $y_1 = 2$, illetve $y_2 = -\frac{1}{2}$.
Ha $y = 2$, akkor $\mathrm{e}^x = 2$, így $x = \ln 2$.
Ha $y = -\frac{1}{2}$, akkor nem kapunk megoldást, mivel $\mathrm{e}^x \neq -\frac{1}{2}$.

36. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

minden $|x| < 1$ esetén!

Megoldás:

Mivel

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

továbbá

$$\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{és} \quad \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},$$

ezért

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$

Ennek a függvénynek keressük az inverzét.
Legyen

$$y = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}!$$

Megcserélve az x-et és y-t azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{\mathrm{e}^{2y} - 1}{\mathrm{e}^{2y} + 1}.$$

A nevezővel szorozva

$$x \cdot \left(\mathrm{e}^{2y} + 1\right) = \mathrm{e}^{2y} - 1$$

adódik. Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{e}^{2y}(x-1) = -1 - x \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{2y} = \frac{1+x}{1-x}.$$

Mindkét oldal logaritmusát véve

$$2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

adódik, így a keresett inverz függvény:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

amivel igazoltuk az állítást.

1.3. Függvénytranszformációk

1.3.1. Tétel. Legyen $f\colon A \to \mathbb{R}$ egy függvény! Ekkor

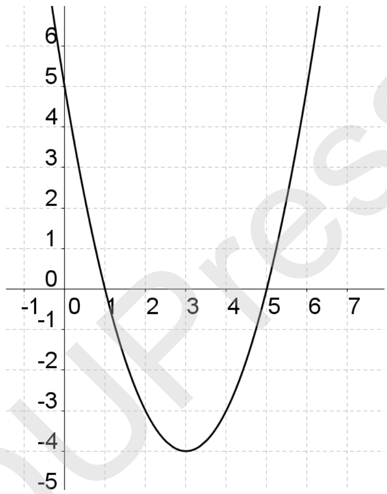
- ha $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x + c \in D_f$, akkor $f(x + c)$ grafikonja az f függvény grafikonjának a $(-c; 0)$ vektorral való eltolása, azaz ha c pozitív valós szám, akkor a függvény grafikonja balra, ha c negatív valós szám, akkor a függvény grafikonja jobbra tolódik c-vel;
- ha $c \in \mathbb{R}$, akkor $f(x) + c$ grafikonja az f függvény grafikonjának a $(0; c)$ vektorral való eltolása, azaz ha c pozitív valós szám, akkor a függvény grafikonja felfelé, ha c negatív valós szám, akkor a függvény grafikonja lefelé tolódik c-vel;
- $-f$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának x-tengelyre tükrözése;
- ha $a > 1$, akkor $a \cdot f$ grafikonja az f grafikonjának a-szoros nyújtása;
- ha $0 < a < 1$, akkor $a \cdot f$ grafikonja az f grafikonjának a-szoros zsugorítása;
- ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, akkor $f(-x)$ az f grafikonjának y-tengelyre való tükrözése;
- ha $a > 1$ olyan valós szám, hogy $x \cdot a \in D_f$, akkor $f(a \cdot x)$ grafikonja az f grafikonjának $\frac{1}{a}$-szoros zsugorítása;
- ha $0 < a < 1$ olyan valós szám, hogy $x \cdot a \in D_f$, akkor $f(a \cdot x)$ grafikonja az f grafikonjának $\frac{1}{a}$-szoros nyújtása;
- az $|f|$ grafikonja az f grafikonjából úgy kapható meg, hogy az x tengely alatti részt (vagyis a negatív függvényértékeket) tükrözzük az x tengelyre;
- ha $x \in D_f$ esetén $|x| \in D_f$, akkor $f\big(|x|\big)$ grafikonja az f grafikonjából úgy kapható meg, hogy a pozitív számokhoz tartozó függvényértékeket tükrözzük az y tengelyre.

Kidolgozott feladatok

37. Feladat. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)^2-4$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A függvény

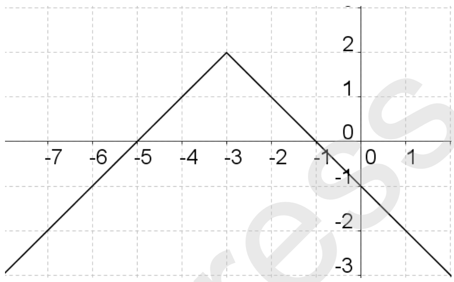
- értelmezési tartománya: $\mathbb{R} =]-\infty; \infty[$;
- értékkészlete: $[-4; \infty[$;
- zérushelyei: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty; 3]$; szigorúan monoton növekvő, ha $x \in [3; \infty[$;
- alulról korlátos, infimuma: -4, felülről nem korlátos;
- minimuma van, minimum hely: $x = 3$, minimum érték: $y = -4$;
- mindenhol konvex;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;

- nem periodikus;
- nem invertálható, mert például $f(2) = f(4)$.

38. Feladat. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x+3|+2$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A függvény

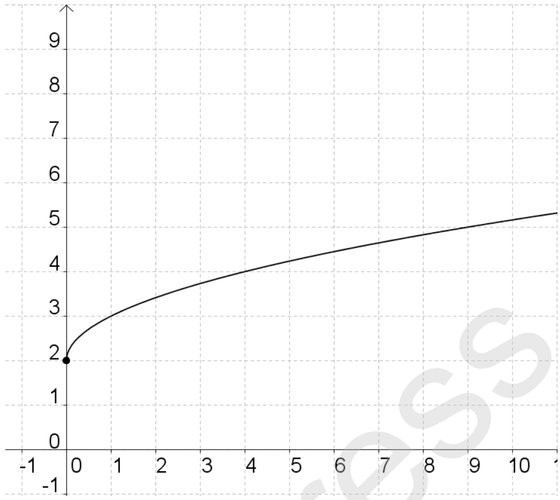
- értelmezési tartománya: $\mathbb{R} =]-\infty; \infty[$;
- értékkészlete: $]-\infty; 2]$;
- zérushelyei: $x_1 = -5$, $x_2 = -1$;
- szigorúan monoton növekvő, ha $x \in]-\infty; -3]$; szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in [-3; \infty[$;
- alulról nem korlátos, felülről korlátos, szuprémuma: 2;
- maximuma van, maximum hely: $x = -3$, minimum érték: $y = 2$;
- mindenhol konkáv;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- nem invertálható, mert például $f(-4) = f(-2)$.

39. Feladat. Tekintsük az $f\colon [0; \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}+2$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény?

Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



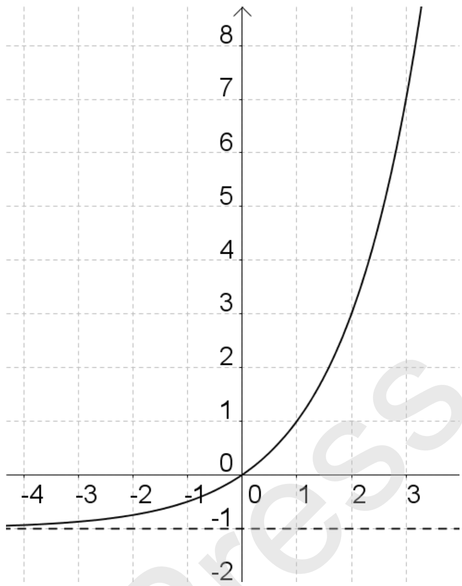
A függvény

- értelmezési tartománya: $[0; \infty[$;
- értékkészlete: $[2; \infty[$;
- zérushelye nincs;
- szigorúan monoton növekvő;
- alulról korlátos, infimuma: 2, felülről nem korlátos;
- minimuma van, minimum hely: $x = 0$, minimum érték: $y = 2$;
- mindenhol konkáv;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- invertálható.

40. Feladat. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - 1$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



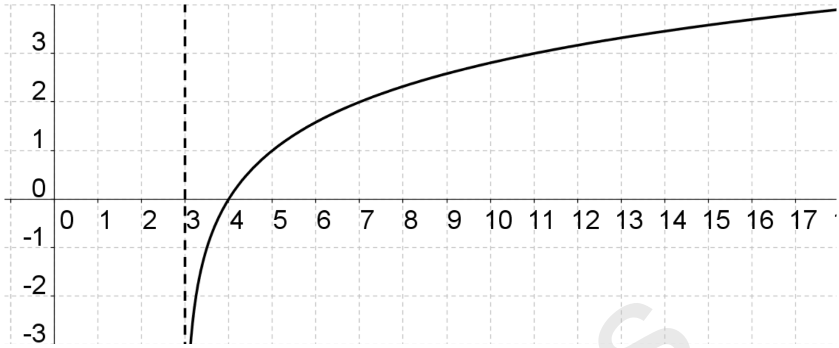
A függvény

- értelmezési tartománya: $\mathbb{R} =]-\infty; \infty[$;
- értékkészlete: $]-1; \infty[$;
- zérushelye: $x = 0$;
- szigorúan monoton növekvő;
- alulról korlátos, infimuma: -1, felülről nem korlátos;
- szélsőértéke nincs;
- mindenhol konvex;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- invertálható.

41. Feladat. Tekintsük az $f\colon]3; \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x-3)$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



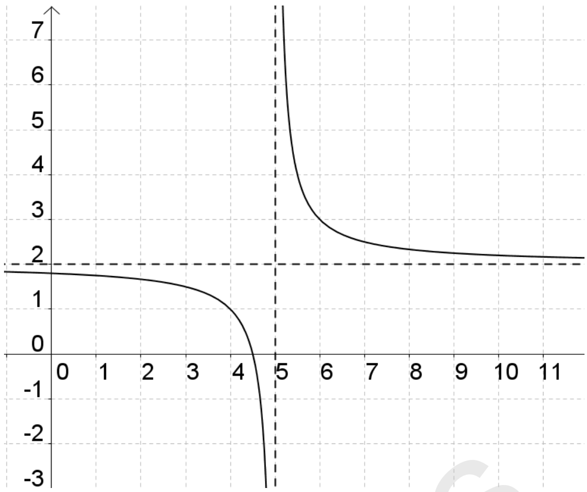
A függvény

- értelmezési tartománya: $]3;\infty[$;
- értékkészlete: $]-\infty;\infty[$;
- zérushelye: $x=4$;
- szigorúan monoton növekvő;
- nem korlátos;
- nincs szélsőértéke;
- mindenhol konkáv;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- invertálható.

42. Feladat. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R}\backslash 3 \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-5}+2$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A függvény

- értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{5\}$;
- értékkészlete: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- zérushelye: $x = 4{,}5$;
- szigorúan monoton csökkenő;
- nem korlátos;
- nincs szélsőértéke;
- konkáv, ha $x \in]-\infty; 5[$; konvex, ha $x \in]5; \infty[$;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- invertálható.

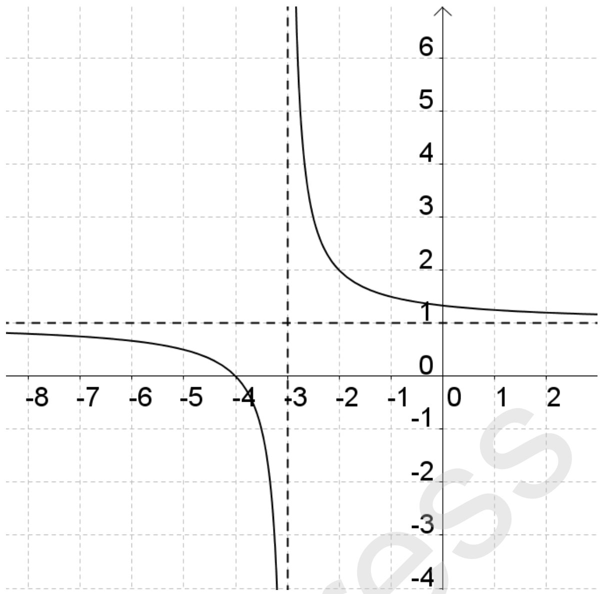
43. Feladat. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+4}{x+3}$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

Átalakítás után azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{x+4}{x+3} = \frac{x+3+1}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+3} + 1.$$

A függvény grafikonja:



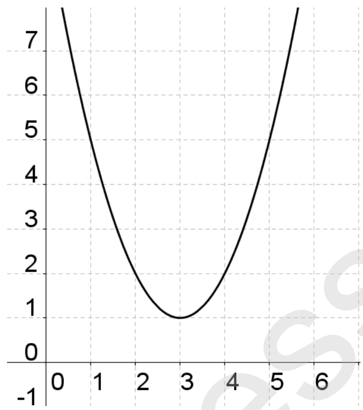
A függvény

- értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$;
- értékkészlete: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- zérushelye: $x = -4$;
- szigorúan monoton csökkenő;
- nem korlátos;
- nincs szélsőértéke;
- konkáv, ha $x \in]-\infty; -3[$; konvex, ha $x \in]-3; \infty[$;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- invertálható.

44. Feladat. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 10$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

Átalakítás után azt kapjuk, hogy
$$f(x) = x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1.$$
A függvény grafikonja:



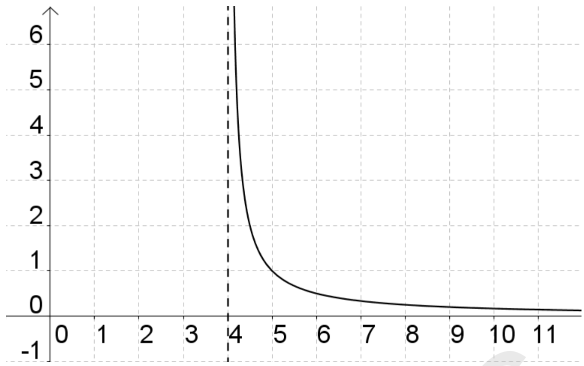
A függvény

- értelmezési tartománya: $\mathbb{R} =]-\infty; \infty[$;
- értékkészlete: $[1; \infty[$;
- zérushelye: nincs;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty; 3]$; szigorúan monoton növekvő, ha $x \in [3; \infty[$;
- alulról korlátos, infimuma: 1, felülről nem korlátos;
- minimuma van, minimum hely: $x = 3$, minimum érték: $y = 1$;
- mindenhol konvex;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- nem invertálható, mert például $f(1) = f(5)$.

45. Feladat. Tekintsük az $f\colon]4; \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-4}$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



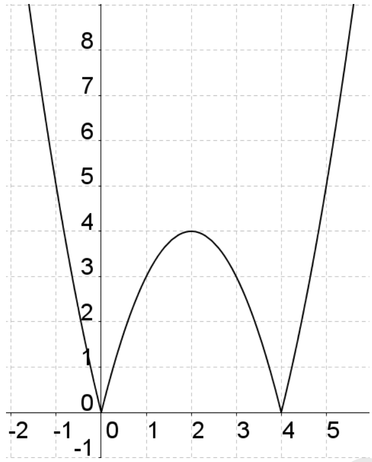
A függvény

- értelmezési tartománya: $]4;\infty[$;
- értékkészlete: $]0;\infty[$;
- zérushelye: nincs;
- szigorúan monoton csökkenő;
- alulról korlátos, infimuma: 0, felülről nem korlátos;
- szélsőértéke nincs;
- mindenhol konvex;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- invertálható.

46. Feladat. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |(x-2)^2 - 4|$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



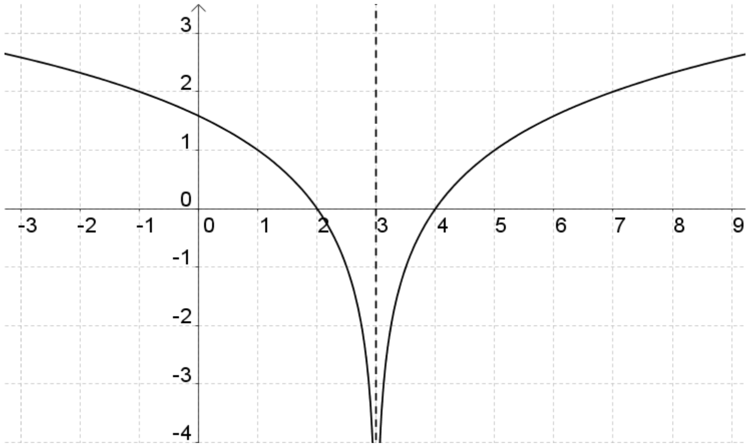
A függvény

- értelmezési tartománya: $\mathbb{R} =]-\infty; \infty[$;
- értékkészlete: $[0; \infty[$;
- zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty; 0] \cup [2; 4]$; szigorúan monoton növekvő, ha $x \in [0; 2] \cup [4; \infty[$;
- alulról korlátos, infimuma: 0, felülről nem korlátos;
- minimuma van, minimum hely: $x = 0$ és $x = 4$; minimum érték: $y = 0$; lokális maximuma van, lokális maximum hely: $x = 2$; lokális maximum érték: $y = 4$;
- konvex, ha $x \in]-\infty; 0] \cup [4; \infty[$; konkáv, ha $x \in [0; 4]$
- inflexiós pontjai: $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- nem invertálható, mert például $f(0) = f(4)$.

47. Feladat. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \setminus 3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 |x - 3|$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

<u>**Megoldás:**</u>

A függvény grafikonja:



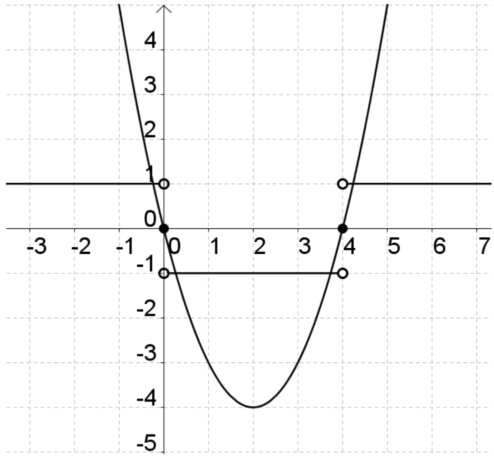
A függvény

- értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$;
- értékkészlete: $]-\infty; \infty[$;
- zérushelyei: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty; 3[$; szigorúan monoton növekvő, ha $x \in]3; \infty[$;
- nem korlátos;
- nincs szélsőértéke;
- értelmezési tartományának minden pontjában konkáv;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- nem invertálható, mert például $f(1) = f(5)$.

48. Feladat. Vázoljuk fel az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4x)$ függvény grafikonját!

Megoldás:

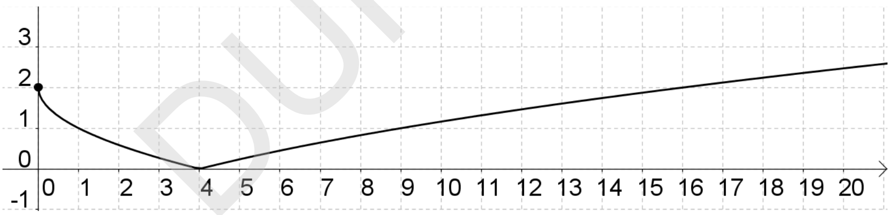
Mivel $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$, ezért az $x \mapsto x^2 - 4x$ és az f függvény grafikonja:



49. Feladat. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sqrt{x} - 2|$ függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet! Határozzuk meg a zérushelyet! Jellemezzük a függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás szerint! Periodikus-e a függvény? Adjuk meg az inflexiós pontot! Invertálható-e a függvény?

<u>**Megoldás:**</u>

A függvény grafikonja:



A függvény

- értelmezési tartománya: $[0; \infty[$;
- értékkészlete: $[0; \infty[$;
- zérushelyei: $x = 4$;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in [0; 4]$; szigorúan monoton növekvő, ha $x \in [4; \infty[$;
- alulról korlátos, infimuma: 0, felülről nem korlátos;
- minimuma van, minimum hely: $x = 4$, minimum érték: $y = 0$;
- konvex, ha $x \in [0; 4]$; konkáv, ha $x \in [4; \infty[$;

- inflexiós pontja: $x = 4$;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- nem invertálható, mert például $f(1) = f(9)$.

50. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 2^{x^2-6x+10}$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az f függvény értelmezhető!

b) Ha $f(x) = k \circ b(x)$, akkor adjuk meg a k és b függvényeket, azaz bontsuk fel külső és belső függvény összetételére az f függvényt!

c) Vázoljuk fel a k külső függvény grafikonját!

d) Adjuk meg a k függvény értékkészletét és zérushelyét! Jellemezzük a k külső függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás, periodicitás szerint!

e) Vázoljuk fel a b belső függvény grafikonját!

f) Adjuk meg a b függvény értékkészletét és zérushelyét! Jellemezzük a b belső függvényt monotonitás, korlátosság, szélsőérték, konvexitás, paritás, periodicitás szerint! Adjuk meg az inflexiós pontját!

g) Invertálható-e a k függvény? Ha igen, adjuk meg és ábrázoljuk az inverzét!

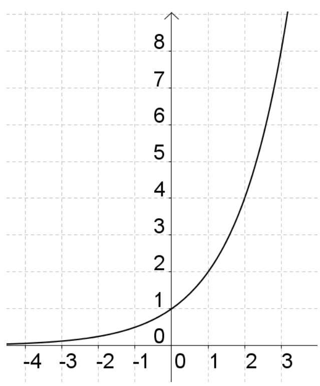
h) Invertálható-e a b függvény? Ha igen, adjuk meg és ábrázoljuk az inverzét!

Megoldás:

a) Az f függvény a teljes valós számok halmazán értelmezhető.

b) A külső függvény: $k(x) = 2^x$. A belső függvény: $x^2 - 6x + 10$.

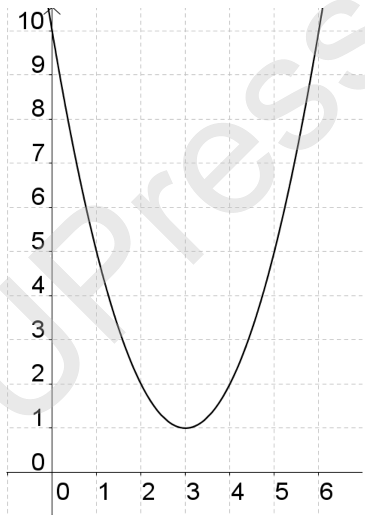
c) A k külső függvény grafikonja:



d) A k függvény

- értékkészlete: $]0; \infty[$;
- zérushelye nincs;
- szigorúan monoton növekvő;
- alulról korlátos, infimuma: 0;
- nincs szélsőértéke;
- értelmezési tartományának minden pontjában konvex;
- nincs inflexiós pontja;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;

e) Mivel $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$, ezért a b belső függvény grafikonja:



f) A b függvény

- értékkészlete: $[1; \infty[$;
- zérushelye nincs;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty; 3]$, szigorúan monoton növekvő, ha $x \in [3; \infty[$;
- alulról korlátos, infimuma: 1;
- minimuma van, minimum hely: $x = 3$; minimum érték: $y = 1$;
- értelmezési tartományának minden pontjában konvex;
- nincs inflexiós pontja;

- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;

g) Invertálható, inverze: $k^{-1}(x) = \log_2 x$.
h) Nem invertálható, mert például $b(2) = b(4)$.

1.4. Elemi függvények alkalmazásai

1.4.1. Szinuszos feszültség. Ha egy téglalap alakú vezető keretet egyenletesen forgatunk ω szögsebességgel egy homogén B indukciójú mágneses térben úgy, hogy a keret forgástengelye merőleges a mágneses tér erővonalaira, akkor a vezető keret két kivezetésén, idő szerint szinuszosan váltakozó feszültség keletkezik.

Ha feltételezzük, hogy a keret felülete F, akkor a keletkezett *feszültség pillanatnyi érték*e

$$U(t) = \omega \cdot B \cdot F \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

függvénnyel írható le.

Ha a keret N darab menetet tartalmaz fémvezetőből, akkor

$$U(t) = N \cdot \omega \cdot B \cdot F \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Az ω értéket a feszültség *körfrekvenciájá*nak nevezzük, amelyre teljesül, hogy $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, ahol f a feszültség *frekvenciája* vagy a keret forgásának *fordulatszám*a, továbbá $f = \dfrac{1}{T}$, ahol T a feszültség *periódusideje*.

Az $U_{\max} = N \cdot \omega \cdot B \cdot F$ jelöléssel a feszültség-idő függvény az

$$U(t) = U_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

alakban is felírható.

1.4.2. Harmonikus rezgőmozgás. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test kitérés-idő függvénye:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

sebesség-idő függvénye:

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

gyorsulás-idő függvénye:

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

1.4.3. Radioaktív anyagok bomlása. Ha a 0 időpillanatban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan atomok száma:

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t},$$

ahol λ az úgynevezett *bomlási állandó*.

1.4.4. Nyomás. A kilométerben megadott h magasságban uralkodó nyomást a

$$p(h) = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1275 \cdot h}$$

függvény adja meg, ahol p_0 a Föld felszínén mért légnyomás értékét jelenti, ami $100\,000\,\mathrm{Pa}$.

1.4.5. Definíció. A *keresleti függvény* egy termék minden lehetséges árához hozzárendeli a hozzá tartozó keresett mennyiséget. A függvényt $D(p)$-vel (demand) vagy $f(p)$-vel szokás jelölni.

1.4.6. Definíció. A keresleti függvény inverzét *inverz keresleti függvény*nek nevezzük. Az inverz keresleti függvény minden egyes mennyiségegységhez hozzárendeli azt az árat, amely mellett a vizsgált személy vagy csoport még éppen hajlandó az adott terméket megvásárolni. Az említett árat *rezervációs ár*nak nevezzük.

1.4.7. Definíció. Ha egy termékből q mennyiséget gyártunk, akkor az *átlagbevétel*:

$$AR(q) = \frac{R(q)}{q}.$$

1.4.8. Definíció. *Profit*nak vagy *nyereség*nek nevezzük a bevétel és költség különbségét:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q).$$

1.4.9. Definíció. *Fedezeti pont*nak nevezzük azt a pontot, amely azon termelési mennyiséghez tartozik, amikor a profit zérus.

1.4.10. Megjegyzés. Azon termelési mennyiség esetén, amikor a profit zérus, a bevételi függvény és költségfüggvény értéke azonos.

1.4.11. Megjegyzés. Az átlagköltség függvény minimuma a fedezeti pont.

1.4.12. Definíció. *Üzembezárási pont*nak nevezzük az átlagos változó költség függvény minimumát.

1.4.13. Példa. Egy vállalat teljes költségfüggvénye:

$$C(q) = q^3 - 4q^2 + 10q + 10,$$

ahol q a vállalat által termelt mennyiség. Ekkor a fix költség: 10, a változó költség függvény:

$$VC(q) = q^3 - 4q^2 + 10q.$$

Az átlagköltség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 4q + 10 + \frac{10}{q}.$$

Az átlagos fix költség függvény:

$$AFC(q) = \frac{10}{q},$$

az átlagos változó költség függvény:

$$AVC(q) = q^2 - 4q + 10.$$

Az üzembezárási pont az előbbi függvény minimuma:

$$AVC(q) = q^2 - 4q + 10 = (q-2)^2 + 6,$$

így $q = 2$ az a termelési mennyiség, amely az üzem bezárását jelenti.

1.4.14. Definíció. A *kínálat* egy vagy több termék azon mennyisége, amivel az általunk vizsgált személy vagy vállalat rendelkezik, és azt adott ár mellett eladni is hajlandó. Kézenfekvőnek tűnik, hogy minden lehetséges árszinthez az emellett érvényes kínálatot rendeljük hozzá, létrehozva így a *kínálati függvény*t. Ezt $S(p)$-vel jelölhetjük (supply), ahol p az adott termék ára.

1.4.15. Megjegyzés. A vállalatok kínálati függvényei monoton növekvőek, vagyis az ár emelkedésével a kínált mennyiség is nő.

1.4.16. Definíció. A keresleti és kínálati függvény metszéspontját *egyensúlyi pont*nak hívjuk. Az egyensúlyi ponthoz tartozó mennyiséget *egyensúlyi mennyiség*nek, az egyensúlyi ponthoz tartozó árat *egyensúlyi ár*nak nevezzük.

1.4.17. Példa. Egy termék keresleti függvénye:

$$f(p) = 150 - 3p,$$

kínálati függvénye:

$$S(p) = 2p - 20.$$

Az árat euro-ban értjük, a mennyiséget ezer darabban. Az egyensúlyi árat az $f(p) = S(p)$ egyenlet megoldása adja:

$$\begin{aligned} 150 - 3p &= 2p - 20 \\ 170 &= 5p, \end{aligned}$$

amiből azt kapjuk, hogy $p = 34$ euro. Ekkor az egyensúlyi mennyiség:

$$q = f(34) = S(34) = 150 - 3 \cdot 34 = 48,$$

tehát $q = 48.000$ darab termék az egyensúlyi mennyiség.

1.4.18. Definíció. Amikor a kereslet nagyobb, mint a kínálat, *túlkereslet*ről vagy más szóval *hiány*ról beszélünk. Ha a kínálat nagyobb, mint a kereslet, akkor *túlkínálat*ról beszélünk, ilyenkor *felesleg* keletkezik.

1.4.19. Definíció. *Hasznossági függvény*nek nevezzük azt a függvényt, amely a gazdaság egy szereplőjének (vagy bizonyos esetekben a társadalom egészének) meghatározott javakhoz kapcsolódó preferenciáit matematikai eszközökkel modellezi.

1.4.20. Megjegyzés. A hasznossági függvénytől elvárjuk, hogy monoton növekvő és konkáv legyen. Lényegében az azt jelenti, hogy ha az általunk vizsgált termékből többet vásárolunk, akkor az nagyobb hasznosságot eredményez, továbbá a növekvő mennyiségekhez „egyre kevésbé növekvő” hasznot rendel. A hasznossági függvényt $U(x)$-el jelöljük (utility).

1.4.21. Példa. Például az $U(x) = \sqrt{x}$ függvény vagy az $U(x) = \log_2 x$ függvény teljesíti az előbb leírt követelményeket.

Kidolgozott feladatok

51. Feladat. Számoljuk ki az $U(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ hasznossági függvény helyettesítési értékét az $x = 16$ helyen!

Megoldás:

A helyettesítési érték: $U(16) = 2 \cdot \sqrt{16} = 8$.

52. Feladat. Egy motor tekercsét $50\,[\mathrm{Hz}]$ frekvenciájú, $U_{\mathrm{max}} = 325\,[\mathrm{V}]$ maximális feszültségű hálózatra kötünk. Adjuk meg a feszültség-idő függvényt!

Megoldás:

A körfrekvencia:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 100\pi \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] = 314{,}16 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right].$$

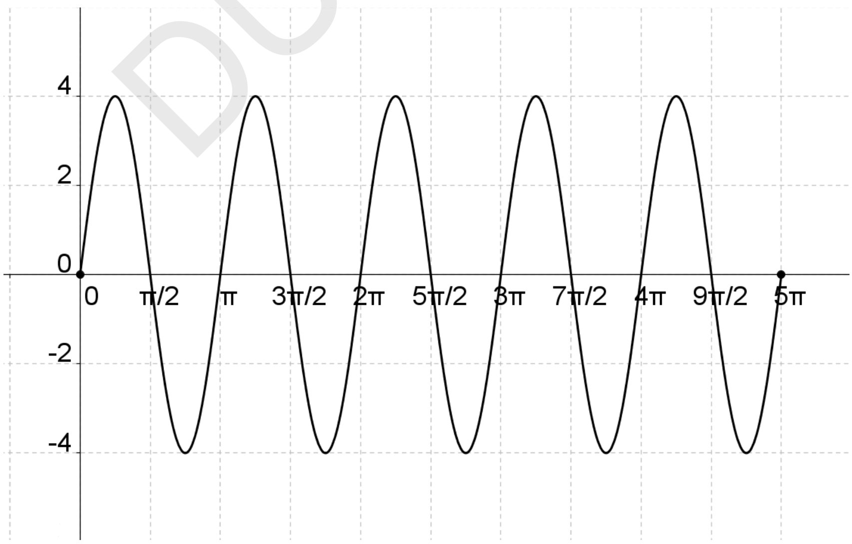
A feszültség-idő függvény:

$$U(t) = 325 \cdot \sin(100\pi \cdot t).$$

53. Feladat. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test kitérés-idő függvénye:

$$y(t) = 4 \cdot \sin(2t),$$

ahol az időt másodpercben, a kitérést méterben mérjük. Felvázoljuk a függvény grafikonját a $[0; 5\pi]$ időintervallumon:



54. Feladat. A ^{14}C szénizotóp radioaktív. Tudjuk, hogy a ^{14}C-et tartalmazó anyagban 5 570 év alatt csökken a felére a ^{14}C atomok száma, azaz 5 570 év a felezési idő. Számoljuk ki a bomlási állandót!

Megoldás:

Mivel
$$0{,}5N_0 = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda\cdot 5\,570},$$
ezért N_0-lal egyszerűsítve
$$0{,}5 = \mathrm{e}^{-5\,570\lambda}$$
adódik. Ha vesszük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát, akkor azt kapjuk, hogy
$$\ln 0{,}5 = -5\,570\lambda,$$
így a bomlási állandó:
$$\lambda = -0{,}000124.$$

55. Feladat. Milyen magasságban lesz a légnyomás a Föld felszínén mért érték negyede?

Megoldás:

Mivel a nyomás értéke a magasság függvényében
$$p(h) = \mathrm{e}^{-0{,}1275\cdot h},$$
ezért
$$\frac{1}{4}p_0 = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1275\cdot h}.$$
Ha egyszerűsítünk p_0-lal, akkor azt kapjuk, hogy
$$\frac{1}{4} = \mathrm{e}^{-0{,}1275\cdot h}.$$
Vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát:
$$\ln 4 = 0{,}1275h \qquad \Rightarrow \qquad h \approx 10{,}873\,[\mathrm{km}].$$
Azt kaptuk tehát, hogy 10 873 méter magasságban lesz a légnyomás a Föld felszínén mért érték negyede.

56. Feladat. Egy termék iránti keresleti függvény $f(p) = 100 - 5p$ darab. A termék árát dollárban, a termék iránti keresletet ezer darabban értjük.

a) Adjuk meg a keresletet $p = 3$ dolláros ár esetén!

b) Ábrázoljuk a keresleti függvényt a $[0; 20]$ intervallumon!

c) Határozzuk meg a bevételi függvényt!

d) Vázoljuk fel a bevételi függvény grafikonját a $[0; 20]$ intervallumon!
e) Milyen egységár esetén lesz a bevétel maximális?
f) Mennyi a maximális bevétel?

Megoldás:

a) Mivel $f(3) = 100 - 5 \cdot 3 = 85$, ezért 3 dolláros egységár esetén 85 darab terméket adnak el.

b) A keresleti függvény grafikonja:

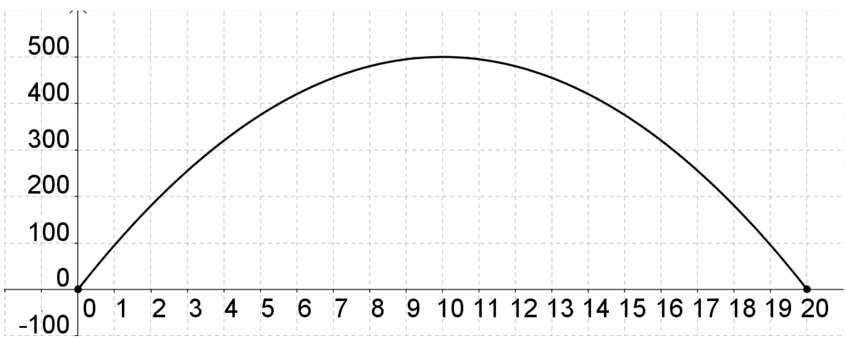
c) A bevételi függvény:

$$R(p) = p \cdot f(p) = p \cdot (100 - 5p) = 100p - 5p^2.$$

d) Mivel

$$100p - 5p^2 = -5 \cdot (p^2 - 20p) = -5 \cdot \left[(p-10)^2 - 100\right] =$$
$$= -5 \cdot (p-10)^2 + 500,$$

ezért a függvény grafikonja:



e) Az előbbi függvény maximum helye: $p = 10$, így 10 dolláros egységár esetén lesz maximális a bevétel.

f) Ekkor a maximális bevétel:

$$R(10) = 10 \cdot f(10) = 10 \cdot 50 = 500\,\$.$$

2. fejezet

Sorozatok, sorok, függvények folytonossága, határértéke

2.1. Sorozatok

2.1.1. Definíció. Egy természetes számok halmazán értelmezett valós értékű függvényt *valós számsorozat*nak nevezünk. Az

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

sorozat esetén a sorozat $n \in \mathbb{N}$ helyen felvett helyettesítési értékére a függvényeknél megszokott $a(n)$ jelölés helyett az a_n jelölést szokás használni, amit úgy olvasunk ki, hogy a *sorozat n-edik tagja* vagy úgy, hogy a sorozat *n-edik eleme*.

2.1.2. Példa. Ha $a_n = 2n + 1$, akkor a sorozat harmadik eleme:

$$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

2.1.3. Definíció. Az a_n sorozat

- *monoton növekvő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$;
- *monoton csökkenő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$;
- *szigorúan monoton növekvő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n < a_{n+1}$;
- *szigorúan monoton csökkenő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n > a_{n+1}$;
- *monoton*, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő;
- *szigorúan monoton*, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

2.1.4. Példa. Tekintsük az $a_n = \dfrac{1}{n}$ sorozatot! Ekkor

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n \cdot (n+1)} = \frac{-1}{n \cdot (n+1)} < 0,$$

így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+1} - a_n < 0$, azaz $a_{n+1} < a_n$, tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

2.1.5. Definíció. Az a_n sorozat

- *felülről korlátos*, ha létezik olyan K valós szám, hogy $a_n \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén;
- *alulról korlátos*, ha létezik olyan k valós szám, hogy $a_n \geq k$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén;
- *korlátos*, ha alulról és felülről korlátos.

2.1.6. Megjegyzés. Az a_n sorozat szuprémuma, infimuma, maximuma, minimuma a függvényeknél megismert módon értelmezhető.

2.1.7. Példa. Az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat felülről korlátos, szuprémuma: 1. A sorozat alulról is korlátos, infimuma: 0. Tehát a sorozat korlátos.

2.1.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat *konvergens*, és a határértéke a, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ úgynevezett küszöbindex, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$. Jelölés: $a_n \to a$, vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Azt mondjuk, hogy egy sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

2.1.9. Példa. Az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat konvergens és a határértéke: 0, ugyanis

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Így n_0=$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ választással adódik a definíció szerint, hogy a sorozat konvergens.

2.1.10. Tétel. Egy sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik olyan valós szám, melynek bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.

Bizonyítás: Mivel az a_n sorozat konvergens, ezért definíció szerint létezik olyan n_0 természetes szám, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon,$$

azaz

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

tehát a_n az a-nak az ε sugarú környezetében van véges sok (legfeljebb n_0) elem kivételével.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy van olyan a valós szám, amelynek bármely ε sugarú környezetében végtelen sok sorozatelem van. Válasszuk n_0-nak a környezetből kimaradó elemek közül a legnagyobb indexűt! ■

2.1.11. Tétel. Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor az egyértelműen meghatározott.

2.1.12. Tétel. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

2.1.13. Megjegyzés. Az előbbi állítás megfordítása azonban nem igaz, azaz van olyan sorozat, amelyik korlátos, de nem konvergens.

Például az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens.

2.1.14. Tétel. Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens és határértéke a pontos felső korlátja.

Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens és határértéke a pontos alsó korlátja.

2.1.15. Definíció. Legyen a_n egy sorozat és $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton függvény! A $b_n = a_{\varphi(n)}$ sorozatot az a_n sorozat részsorozatának nevezzük.

2.1.16. Példa. Az $a_n = (-1)^n$ sorozat egy részsorozata: $b_n = a_{2n} = 1$.

2.1.17. Tétel. Ha egy sorozat konvergens, akkor minden részsorozata is konvergens és határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.

2.1.18. Tétel. Ha egy sorozat korlátos, akkor van konvergens részsorozata.

2.1.19. Példa. Az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak $a_{2n} = 1$ és

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$$

konvergens részsorozatai.

2.1.20. Definíció. Az a_n sorozatnak az a valós szám torlódási pontja, ha van a sorozatnak a-hoz konvergáló részsorozata.

2.1.21. Példa. Az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak -1 és 1 is torlódási pontja.

2.1.22. Tétel. Ha egy sorozat konvergens, akkor pontosan egy torlódási pontja van.

2.1.23. Definíció. Egy a_n sorozat torlódási pontjai halmazának infimuma a sorozat *limesz inferior*ja. Jele: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Egy sorozat torlódási pontjai halmazának szuprémuma a sorozat *limesz szuperior*ja. Jele: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.1.24. Példa. Az $a_n = (-1)^n$ sorozat limesz inferiora: -1, limesz szuperiorja: 1.

2.1.25. Tétel. Egy a_n sorozat pontosan akkor konvergens, ha

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

és ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

2.1.26. Definíció. Az a_n sorozat *végtelenhez divergál*, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $a_n \geq K$.

2.1.27. Definíció. Az a_n sorozat *mínusz végtelenhez divergál*, ha teljesül, hogy minden $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $a_n \leq k$.

2.1.28. Tétel. (konvergencia és a műveletek kapcsolata)
Ha a_n és b_n konvergens és az a_n sorozat határértéke a, a b_n sorozat hatáértéke b és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

- $a_n + b_n$ konvergens sorozat és a határértéke: $a + b$;
- $a_n \cdot b_n$ konvergens sorozat és a határértéke: $a \cdot b$;
- $\lambda \cdot a_n$ konvergens sorozat és a határértéke: $\lambda \cdot a$;
- ha $b_n \neq 0$ (minden $n \in \mathbb{N}$ esetén) és $b \neq 0$, akkor $\dfrac{a_n}{b_n}$ konvergens sorozat és a határértéke: $\dfrac{a}{b}$.

2.1.29. Példa. Az $a_n = \frac{2}{n} + 1$ sorozat határértéke: $0 + 1 = 1$.

2.1.30. Tétel. (rendőr-tétel)
Ha a_n, b_n és c_n olyan sorozatok, melyekre

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

és az a_n sorozat határértéke a és a c_n sorozat hatérértéke szintén a, akkor a b_n sorozat határértéke is a.

2.1.31. Példa. Az $a_n = \frac{\sin n}{n}$ sorozat esetén

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n},$$

így mivel $-\frac{1}{n} \to 0$ és $\frac{1}{n} \to 0$, ezért az a_n sorozat határértéke is 0.

2.1.32. Tétel. Nevezetes határértékek:

- Az $a_n = \dfrac{1}{n^k}$ sorozat határértéke minden $k > 0$ esetén 0.
- Legyen $P(n) = \alpha_p \cdot n^p + \ldots + \alpha_1 \cdot n + \alpha_0$ egy p-edfokú polinom és tegyük fel, hogy $\alpha_p > 0$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} P(n) = \infty$.
- Legyen $P(n) = \alpha_p \cdot n^p + \ldots + \alpha_1 \cdot n + \alpha_0$ egy p-edfokú polinom és tegyük fel, hogy $\alpha_p < 0$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} P(n) = -\infty$.

- Legyen $P(n) = \alpha_p \cdot n^p + \ldots + \alpha_1 \cdot n + \alpha_0$ egy p-edfokú polinom, vagyis $\alpha_p \neq 0$ és $Q(n) = \beta_q \cdot n^q + \ldots + \beta_1 \cdot n + \beta_0$ egy q-adfokú polinom, vagyis $\beta_q \neq 0$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \dfrac{a_p}{b_q}, \text{ ha } p = q \\ 0, \text{ ha } p < q \\ \infty, \text{ ha } p > q, \text{továbbá } p \text{ és } q \text{ előjele azonos} \\ -\infty, \text{ ha } p > q, \text{továbbá } p \text{ és } q \text{ előjele nem azonos.} \end{cases}$$

- Az $a_n = \sqrt[n]{a}$ sorozat határértéke minden $a > 0$ esetén 1.
- Az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat határértéke 1.
- Az $a_n = q^n$ sorozat határértéke $-1 < q < 1$ esetén 0.
- Az $a_n = q^n$ sorozat határértéke $q \leq -1$ esetén nem létezik.
- Az $a_n = q^n$ sorozat $q > 1$ végtelenhez divergál.
- Az $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke az e szám ($\mathrm{e} \approx 2{,}718$).
- Minden a valós szám esetén az $a_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$ sorozat határértéke: e^a.
- Minden a valós szám esetén az $a_n = \frac{a^n}{n!}$ sorozat határértéke: 0.

2.1.33. Példa. Az $a_n = \frac{1}{n^3}$ sorozat határértéke: 0.

2.1.34. Példa. Az $a_n = n^2 + 3n + 2$ sorozat végtelenhez divergál.

2.1.35. Példa. Az $a_n = -n^2 + 3n + 2$ sorozat mínusz végtelenhez divergál.

2.1.36. Példa. Az $a_n = \dfrac{n^2 + 3n}{2n^2 + 5}$ sorozat határértéke: $\dfrac{1}{2}$.

2.1.37. Példa. Az $a_n = \dfrac{n^2 + 3n}{2n^3 + 5}$ sorozat határértéke: 0.

2.1.38. Példa. Az $a_n = \dfrac{n^3 + 3n}{2n^2 + 5}$ sorozat végtelenhez divergál.

2.1.39. Példa. Az $a_n = \dfrac{-n^3 + 3n}{2n^2 + 5}$ sorozat mínusz végtelenhez divergál.

2.1.40. Példa. Az $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sorozat határértéke: 0.

2.1.41. Példa. Az $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ sorozat határértéke: 0.

2.1.42. Példa. Az $a_n = 2^n$ sorozat végtelenhez divergál.

2.1.43. Példa. Az $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ sorozat határértéke: e^{-2}.

Kidolgozott feladatok

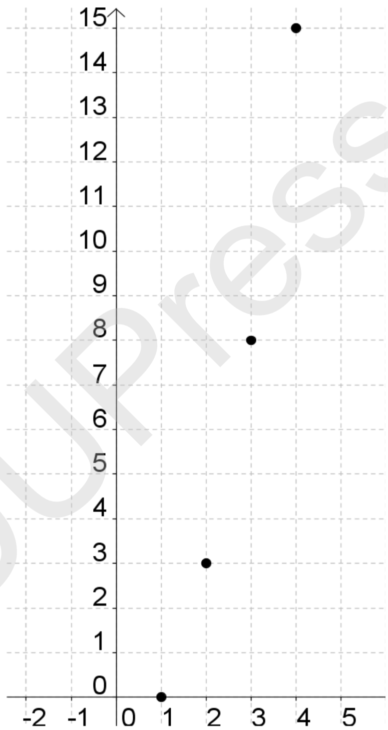
57. Feladat. Számoljuk ki és ábrázoljuk az $a_n = n^2 - 1$ sorozat első 4 elemét!

Megoldás:

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 15.$$

A sorozat első 4 tagjának ábrázolása:



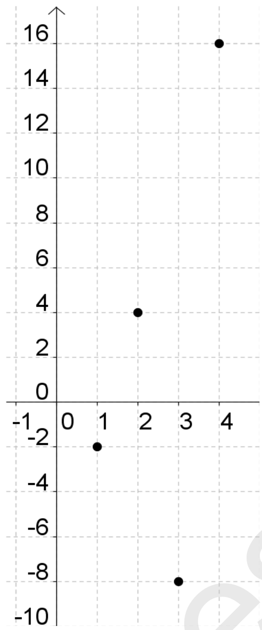
58. Feladat. Számoljuk ki és ábrázoljuk az $a_n = (-2)^n$ sorozat első 4 elemét!

Megoldás:

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = -2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = -8, \quad a_4 = 16.$$

A sorozat első 4 tagjának ábrázolása:



59. Feladat. Számoljuk ki az $a_n = 2 + \dfrac{6}{n}$ sorozat első 4 elemét!

Jellemezzük a sorozatot monotonitás, határérték, korlátosság, szélsőérték szerint! Adjuk meg a sorozat torlódási pontját! Határozzuk meg a limesz szuperiort és a limesz inferiort!

<u>**Megoldás:**</u>

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = 8, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 3{,}5.$$

A sorozat

- szigorúan monoton csökkenő;
- konvergens, határértéke: 2;
- infimuma: 2; szuprémuma: 8;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos;
- minimuma: nincs; maximuma: 8;
- torlódási pont: 2;
- $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ és $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

60. Feladat. Számoljuk ki az $a_n = 4 - \dfrac{12}{n}$ sorozat első 4 elemét!
Jellemezzük a sorozatot monotonitás, határérték, korlátosság, szélsőérték szerint! Adjuk meg a sorozat torlódási pontját! Határozzuk meg a limesz szuperiort és a limesz inferiort!

Megoldás:

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = -8, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1.$$

A sorozat

- szigorúan monoton növekvő;
- konvergens, határértéke: 4;
- infimuma: -8; szuprémuma: 4;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos;
- minimuma: -8; maximuma: nincs;
- torlódási pont: 4;
- $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 4$ és $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

61. Feladat. Számoljuk ki az $a_n = (-1)^n$ sorozat első 4 elemét! Jellemezzük a sorozatot monotonitás, határérték, korlátosság, szélsőérték szerint! Adjuk meg a sorozat torlódási pontjait! Határozzuk meg a limesz szuperiort és a limesz inferiort!

Megoldás:

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 1.$$

A sorozat

- nem monoton;
- divergens;
- infimuma: -1; szuprémuma: 1;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos;
- minimuma: -1; maximuma: 1;
- torlódási pontok: -1 és 1;
- $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ és $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

62. Feladat. Számoljuk ki az $a_n = (-2)^n$ sorozat első 4 elemét! Jellemezzük a sorozatot monotonitás, határérték, korlátosság, szélsőérték szerint! Adjuk meg a sorozat torlódási pontját! Határozzuk meg a limesz szuperiort és a limesz inferiort!

Megoldás:

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = -2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = -8, \quad a_4 = 16.$$

A sorozat

- nem monoton;
- divergens;
- infimuma: nincs; szuprémuma: nincs;
- nem korlátos;
- minimuma: nincs; maximuma: nincs;
- torlódási pont: nincs;
- $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$: nincs; $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$: nincs.

63. Feladat. Számoljuk ki az $a_n = (-1)^n \cdot \frac{6}{n}$ sorozat első 4 elemét! Jellemezzük a sorozatot monotonitás, határérték, korlátosság, szélsőérték szerint! Adjuk meg a sorozat torlódási pontját! Határozzuk meg a limesz szuperiort és a limesz inferiort!

Megoldás:

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = -6, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = 1{,}5.$$

A sorozat

- nem monoton;
- konvergens, határértéke: 0;
- infimuma: -6; szuprémuma: 3;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos;
- minimuma: -6; maximuma: 3;
- torlódási pont: 0;
- $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

64. Feladat. Számoljuk ki az $a_n = n^2 + 1$ sorozat első 4 elemét! Jellemezzük a sorozatot monotonitás, határérték, korlátosság, szélsőérték szerint!

Megoldás:

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = 17.$$

A sorozat

- szigorúan monoton növekvő;
- végtelenhez divergál;
- infimuma: 2; szuprémuma: nincs;
- alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos;
- minimuma: 2; maximuma: nincs.

65. Feladat. Számoljuk ki az $a_n = -n^2+1$ sorozat első 4 elemét! Jellemezzük a sorozatot monotonitás, határérték, korlátosság, szélsőérték szerint!

Megoldás:

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = -8, \quad a_4 = -15.$$

A sorozat

- szigorúan monoton csökkenő;
- mínusz végtelenhez divergál;
- infimuma: nincs; szuprémuma: 0;
- felülről korlátos, alulról nem korlátos, így nem korlátos;
- minimuma: nincs; maximuma: 0.

66. Feladat. Számoljuk ki az $a_n = 2^n$ sorozat első 4 elemét! Jellemezzük a sorozatot monotonitás, határérték, korlátosság, szélsőérték szerint!

Megoldás:

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 16.$$

A sorozat

- szigorúan monoton növekvő;
- végtelenhez divergál;
- infimuma: 2; szuprémuma: nincs;

- alulról korlátos, felülről nem korlátos, ezért nem korlátos;
- minimuma: 2; maximuma: nincs.

67. Feladat. Tekintsük az $a_n = \frac{n}{n+1}$ sorozatot!

a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő!

b) Mutassuk meg, hogy a sorozat korlátos! Adjuk meg a sorozat infimumát és szuprémumát!

c) Adjuk meg a sorozat minimumát és maximumát!

d) Konvergenes-e a sorozat? Válaszunkat indokoljuk!

e) Ha konvergens, akkor hanyadik elemtől kezdve esnek a sorozatelemek a határérték $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ sugarú környezetébe, azaz $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$-hez határozzuk meg a küszöbindexet!

Megoldás:

a) Mivel
$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2},$$
ezért azt kapjuk, hogy
$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)} =$$
$$= \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} > 0.$$
Mivel $a_{n+1} - a_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén pozitív, így
$$a_{n+1} - a_n > 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} > a_n,$$
amiből az következik, hogy a sorozat szigorúan monton növekvő.

b) Mivel a sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért alulról korlátos, pontos alsó korlátja az első eleme, azaz
$$\inf(a_n) = a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$
Mivel
$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$
ezért a sorozat felülről korlátos, pontos felső korlátja $\sup(a_n) = 1$.
A sorozat korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

c) A sorozat minimuma: $\frac{1}{2}$. Maximum nem létezik.

d) Mivel a sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens, pontos felső korlátja a határértéke, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

e) A küszöbindex meghatározásához az

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség legkisebb pozitív egész megoldását keressük, ahol a a sorozat határértéke. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10}.$$

Közös nevezőre hozva

$$\left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

adódik. Az abszolút érték definíciója miatt azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10},$$

amiből $10 < n+1$, azaz $n > 9$ adódik, így a küszöbindex $n_0 = 10$.

68. Feladat. Tekintsük az $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$ sorozatot!

a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozatot szigorún monoton növekvő!

b) Mutassuk meg, hogy a sorozat korlátos!

c) Adjuk meg a sorozat minimumát és maximumát!

d) Konvergenes-e a sorozat? Indokoljuk válaszunkat!

e) Ha konvergens, akkor hanyadik elemtől kezdve esnek a sorozatelemek a határérték $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ sugarú környezetébe, azaz $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$-hoz határozzuk meg a küszöbindexet!

Megoldás:

a) Mivel

$$a_{n+1} = \frac{2\cdot(n+1)+1}{3\cdot(n+1)+2} = \frac{2n+3}{3n+5},$$

ezért

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \frac{2n+3}{3n+5}-\frac{2n+1}{3n+2} = \\
&= \frac{(2n+3)\cdot(3n+2)-(3n+5)\cdot(2n+1)}{(3n+5)\cdot(3n+2)} = \\
&= \frac{6n^2+13n+6-6n^2-13n-5}{(3n+5)\cdot(3n+2)} = \\
&= \frac{1}{(3n+5)\cdot(3n+2)},
\end{aligned}
$$

a kapott kifejezés minden $n \in \mathbb{N}$ számra pozitív, tehát

$$
a_{n+1}-a_n>0 \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1}>a_n,
$$

amiből következik, hogy a sorozat szigorúan monton növekvő.

b) Mivel a sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért alulról korlátos, pontos alsó korlátja az első eleme, azaz

$$
\inf(a_n) = a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{3\cdot 1+2} = \frac{3}{5}.
$$

Mivel

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{n+\frac{1}{2}}{n+\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{n+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{n+\frac{2}{3}} = \\
&= \frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{n+\frac{2}{3}} < \frac{2}{3},
\end{aligned}
$$

felülről korlátos, pontos felső korlátja $\sup(a_n) = \dfrac{2}{3}$.

A sorozat korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

c) A sorozat minimuma $\dfrac{3}{5}$, maximuma nem létezik.

d) Mivel a sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens, pontos felső korlátja a határértéke, azaz

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}.
$$

e) A küszöbindex meghatározásához az

$$
|a_n - a| < \varepsilon
$$

egyenlőtlenség legkisebb pozitív egész megoldását keressük, ahol a a sorozat határértéke. Az adatok behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{2n+1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{100}.$$

Közös nevezőre hozva

$$\left|\frac{3\cdot(2n+1)-2\cdot(3n+2)}{3\cdot(3n+2)}\right|<\frac{1}{100}$$

adódik, így azt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{6n+3-6n-4}{9n+6}\right|<\frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-1}{9n+6}\right|<\frac{1}{100}$$

Az abszolút érték elvégzése után

$$\frac{1}{9n+6}<\frac{1}{100}$$

adódik, így $100<9n+6$, tehát $\frac{94}{9}<n$, ami azt jelenti, hogy a küszöbindex $n_0=11$.

69. Feladat. Adjunk példát olyan sorozatokra, melyre

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} b_n=\infty$$

úgy, hogy

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-\infty$.

Megoldás:

A következőkben megadunk egy-egy lehetséges példát. Nyilván számtalan más jó megoldás is létezik.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-2n)=0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-n)=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-2n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$.

70. Feladat. Adjunk példát olyan sorozatokra, melyre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

úgy, hogy

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 3;$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0;$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$

Megoldás:

A következőkben megadunk egy-egy lehetséges példát. Nyilván számtalan más jó megoldás is létezik.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n} = 3;$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0;$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1.$

71. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a_n monoton növekvő, akkor $-a_n$ monoton csökkenő!

Megoldás:

Ha a_n monoton növekvő, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Ekkor

$$-a_n \geq -a_{n+1},$$

tehát $-a_n$ monoton csökkenő.

72. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a_n monoton csökkenő, akkor $-a_n$ monoton növekvő!

Megoldás:

Ha a_n monoton csökkenő, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Ekkor

$$-a_n \leq -a_{n+1},$$

tehát $-a_n$ monoton növekvő.

73. Feladat. Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{n^2+3n+5}{4n^2-7n+6}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal, azaz n^2-tel! Ekkor azt

$$a_n = \frac{n^2+3n+5}{4n^2-7n+6} = \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{7n}{n^2}+\frac{6}{n^2}} = \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{4-\frac{7}{n}+\frac{6}{n^2}}$$

adódik. Felhasználva a határérték és a műveletek közötti kapcsolatra vonatkozó kapcsolatot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+0+0}{4-0+0} = \frac{1}{4}.$$

74. Feladat. Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{3n^2+6n+7}{6n^3-9n+5}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal, azaz n^3-nal:

$$a_n = \frac{3n^2+6n+7}{6n^3-9n+5} = \frac{\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{6-\frac{9}{n^2}+\frac{5}{n^3}} \to 0.$$

75. Feladat. Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{4n^2+7n-8}{3n+5}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal, azaz n-nel:

$$a_n = \frac{4n^2+7n-8}{3n+5} = \frac{4n+7-\frac{8}{n}}{3+\frac{5}{n}} \to \infty.$$

76. Feladat. Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{(2n+3)^2 - 4 \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{n^2 + 5n + 1}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Mivel

$$(2n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 9 \quad \text{és} \quad (n+1) \cdot (n-1) = n^2 - 1,$$

ezért

$$a_n = \frac{4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 + 4}{n^2 + 5n + 1} = \frac{12n + 13}{n^2 + 5n + 1} =$$

$$= \frac{\frac{12}{n} + \frac{13}{n^2}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} \to \frac{0}{1} = 0.$$

77. Feladat. Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{(n+2)^3 - 4 \cdot (n+1)^2}{2n^3 + n - 1}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Mivel

$$(n+3)^3 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27,$$

és

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

ezért

$$a_n = \frac{n^3 + 9n^2 + 27n + 27 - n^2 - 2n - 1}{2n^3 + n - 1} = \frac{n^3 + 8n^2 + 25n + 26}{2n^3 + n - 1} =$$

$$= \frac{1 + \frac{8}{n} + \frac{25}{n^2} + \frac{26}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}} \to \frac{1}{2}.$$

78. Feladat. Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{2n^2 - \sqrt{3 + n^4}}{3n + 2n^2}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

A számlálót és a nevezőt is n^2-tel osztva azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{2n^2 - \sqrt{3+n^4}}{3n+2n^2} = \frac{2 - \sqrt{\frac{3}{n^4}+1}}{\frac{3}{n}+2} \to \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

79. Feladat. Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{9n^2+7n+3} - 3n$ sorozat határértékét!

Megoldás:

Bővítsük a sorozatot a $\sqrt{9n^2+7n+3} + 3n$ kifejezéssel:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{9n^2+7n+3} - 3n = \\ &= \left(\sqrt{9n^2+7n+3} - 3n\right) \cdot \frac{\sqrt{9n^2+7n+3}+3n}{\sqrt{9n^2+7n+3}+3n}. \end{aligned}$$

A szorzás és az összevonás után azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{9n^2+7n+3-9n^2}{\sqrt{9n^2+7n+3}+3n} = \frac{7n+3}{\sqrt{9n^2+7n+3}+3n}.$$

A nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal elosztjuk a számlálót és a nevezőt, így

$$a_n = \frac{7+\frac{3}{n}}{\sqrt{9+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}+3} \to \frac{7+0}{\sqrt{9+0+0}+3} = \frac{7}{6}$$

adódik.

80. Feladat. Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{36n^2+8n+7} - 6n$ sorozat határértékét!

Megoldás:

Bővítsük a sorozatot a $\sqrt{36n^2+8n+7} + 6n$ kifejezéssel:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{36n^2+8n+7} - 6n = \\ &= \left(\sqrt{36n^2+8n+7} - 6n\right) \cdot \frac{\sqrt{36n^2+8n+7}+6n}{\sqrt{36n^2+8n+7}+6n}. \end{aligned}$$

A szorzás és az összevonás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{36n^2 + 8n + 7 - 36n^2}{\sqrt{36n^2 + 8n + 7} + 6n} = \frac{8n + 7}{\sqrt{36n^2 + 8n + 7} + 6n}.$$

A nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal elosztjuk a számlálót és a nevezőt, így

$$a_n = \frac{8 + \frac{7}{n}}{\sqrt{36 + \frac{8}{n} + \frac{7}{n^2}} + 6} \to \frac{8}{6+6} = \frac{2}{3}$$

adódik.

81. Feladat. Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{3^{n+1}}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Felhasználva a hatványozás azonosságait azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n + 3^n}{3 \cdot 3^n}.$$

A számlálót és nevezetőt is osszuk el 3^n-nel:

$$a_n = \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{3}.$$

Felhasználva, hogy $q^n \to 0$, ha $-1 < q < 1$, azt kapjuk, hogy

$$a_n \to \frac{1}{3}.$$

82. Feladat. Határozzuk meg az

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

A sorozat határértékét a

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

nevezetes határértékre vezetjük vissza:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^{n+3} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+3} =$$

$$= \left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{n+3} = \left[\left(1+\frac{1}{-n-2}\right)^{-n-2}\right]^{\frac{n+3}{-n-2}} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

ugyanis

$$\frac{n+3}{-n-2} = \frac{1+\frac{3}{n}}{-1-\frac{2}{n}} \to -1.$$

83. Feladat. Határozzuk meg a

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{3n+2}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

A sorozat határértékét a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

nevezetes határértékre vezetjük vissza:

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{3n+2} = \left(\frac{2n+5-4}{2n+5}\right)^{3n+2} = \left(1-\frac{4}{2n+5}\right)^{3n+2} =$$

$$= \left(1+\frac{-4}{2n+5}\right)^{3n+2} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n+5}{-4}}\right)^{\frac{2n+5}{-4}}\right]^{\frac{-4}{2n+5}\cdot(3n+2)} \to e^{-6} = \frac{1}{\mathrm{e}^6},$$

ugyanis

$$\frac{-12n-8}{2n+5} = \frac{-12-\frac{8}{n}}{2+\frac{5}{n}} \to -6.$$

84. Feladat. Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{(-1)^n\cdot(n+2)}{2n+3}$$

sorozat torlódási pontjait, limesz inferiorját, limesz szuperiorját! Konvergens-e a sorozat?

Megoldás:

Mivel

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2n+3}, & \text{ha n páros} \\ -\dfrac{n+2}{2n+3}, & \text{ha n páratlan,} \end{cases}$$

ezért

$$a_n \to \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{ha n páros} \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{ha n páratlan.} \end{cases}$$

Tehát a torlódási pontok halmaza: $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. Tehát

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Mivel $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \neq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, ezért a sorozat nem konvergens.

85. Feladat. Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot (n+2)}{2n^2+3}$$

sorozat torlódási pontjait, limesz inferiorját, limesz szuperiorját! Konvergens-e a sorozat?

Megoldás:

Mivel

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2n^2+3}, & \text{ha n páros} \\ -\dfrac{n+2}{2n^2+3}, & \text{ha n páratlan,} \end{cases}$$

ezért

$$a_n \to \begin{cases} 0, & \text{ha n páros} \\ 0, & \text{ha n páratlan.} \end{cases}$$

Tehát a sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, a 0, így

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{és} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Mivel $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, ezért a sorozat konvergens, határértéke: 0.

86. Feladat. Határozzuk meg az r sugarú kör területét a körbe írt szabályos n-szögek területeinek határértékével!

Megoldás:

A kör területét a körbe írt szabályos n-szögek területeinek határértékével fogjuk kiszámolni. A szabályos n-szög egy háromszögének területe a trigonometrikus területképlet szerint

$$T_\triangle = \frac{r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}}{2}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy a szabályos n oldalú sokszög területe:

$$T = n \cdot \frac{r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}}{2} = r^2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot \pi \to r^2\pi,$$

ugyanis

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n} = 1.$$

87. Feladat. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$ teljesül! Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$ sorozat határértékét!

Megoldás:

Mivel

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \quad \text{és} \quad \binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!},$$

ezért

$$a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}}{\frac{n!}{3! \cdot (n-3)!}} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot \frac{3! \cdot (n-3)!}{n!} = \frac{3}{n-2},$$

így a sorozat határértéke: 0.

88. Feladat. Tekintsük az $a_n = \dfrac{3^n}{4 \cdot 3^n + 1}$ sorozatot!

a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat monoton növekvő!

b) Számoljuk ki a sorozat határértékét!

c) Adjuk meg a sorozat infimumát és szuprémumát!

d) Korlátos-e a sorozat?

e) Adjuk meg a sorozat minimumát és maximumát!

f) Határozzuk meg a sorozat torlódási pontját!

g) Számoljuk ki $\varepsilon = \frac{1}{1\,000}$ esetén a küszöbindexet!

Megoldás:

a) Mivel

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{4 \cdot 3^{n+1} + 1} = \frac{3 \cdot 3^n}{12 \cdot 3^n + 1},$$

ezért

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3 \cdot 3^n}{12 \cdot 3^n + 1} - \frac{3^n}{4 \cdot 3^n + 1} = \frac{12 \cdot 9^n + 3 \cdot 3^n - 12 \cdot 9^n - 3^n}{(12 \cdot 3^n + 1) \cdot (4 \cdot 3^n + 1)} =$$
$$= \frac{2 \cdot 3^n}{(12 \cdot 3^n + 1) \cdot (4 \cdot 3^n + 1)} > 0,$$

így $a_{n+1} - a_n > 0$, tehát a_n monoton növekvő.

b) A sorozat határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4 \cdot 3^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4 + \frac{1}{3^n}} = \frac{1}{4}.$$

c) A sorozat infimuma:

$$a_1 = \frac{3^1}{4 \cdot 3^1 + 1} = \frac{3}{13}.$$

A sorozat szuprémuma:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

d) A sorozat korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

e) A sorozat minimuma: $\frac{3}{13}$. A maximuma nincs.

f) Mivel a sorozat konvergens, ezért a sorozat torlódási pontja a határértéke, azaz $\frac{1}{4}$.

g) Mivel
$$\left|\frac{3^n}{4\cdot 3^n+1}-\frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4\cdot 3^n-4\cdot 3^n-1}{4\cdot(4\cdot 3^n+1)}\right| = \left|\frac{-1}{4\cdot 3^n+1}\right| = \frac{1}{4\cdot 3^n+1},$$
ezért
$$\frac{1}{4\cdot 3^n+1}<\frac{1}{1\,000} \quad\Rightarrow\quad 1\,000<4\cdot 3^n+1.$$
Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy
$$249{,}75<3^n \quad\Rightarrow\quad \lg 249{,}75<\lg 3^n \quad\Rightarrow\quad \lg 249{,}75<n\cdot\lg 3,$$
így $n>5{,}02$, tehát a küszöbindex: $n_0=6$.

2.2. Sorok

2.2.1. Definíció. Legyen a_n egy valós számsorozat! Az

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots +$$

végtelen összeget az a_n sorozat elemeiből képzett *sor*nak nevezzük és

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

módon vagy egyszerűen $\sum a_n$ módon jelöljük. Az

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

összeget a $\sum a_n$ sor *n-edik részletösszeg*ének mondjuk.

2.2.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ *sor konvergens*, ha az n-edik részletösszeg sorozata konvergens. Ilyenkor az n-edik részletösszeg sorozat határértékét a *sor összeg*ének mondjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Ha egy sor nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*.

2.2.3. Tétel. Ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

2.2.4. Megjegyzés. Az előbb tétel szerint, ha nem teljesül, hogy az a_n sorozat határértéke 0, akkor a $\sum a_n$ sor nem konvergens.

Ha az a_n sorozat határétéke 0, akkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens vagy divergens.

2.2.5. Példa. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 + n$$

sor divergens, mert az $a_n = 2 + n$ sorozat határértéke nem 0.

2.2.6. Tétel. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

sor konvergens, ha $n > 1$, divergens, ha $n \leq 1$.

2.2.7. Tétel. (minoráns teszt)
Tegyük fel, hogy a_n és b_n nem-negatív elemekből álló sorozatok és $a_n \leq b_n$ minden n természetes szám esetén. Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens.

2.2.8. Példa. Legyen $n \geq 2$! Mivel a $\sum 1n$ sor divergens, és $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$, ezért a $\sum \frac{1}{n-1}$ sor is divergens.

2.2.9. Tétel. (majoráns teszt)
Tegyük fel, hogy a_n és b_n nem-negatív elemekből álló sorozatok és $a_n \leq b_n$ minden n természetes szám esetén. Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens.

2.2.10. Példa. Mivel a $\sum 1n^2$ sor konvergens, és $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2+1}$, ezért a $\sum \frac{1}{n^2+1}$ sor is konvergens.

2.2.11. Tétel. (Cauchy-féle gyökteszt)
Tekinstük a $\sum a_n$ sort!

- Ha $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens;
- Ha $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens.

2.2.12. Tétel. (geometriai vagy más szóval mértani sorozat)
Ha q olyan valós szám, melyre $|q| < 1$ teljesül, akkor a $\sum q^n$ sor konvergens és

$$\sum a_n = a \cdot \frac{1}{1-q},$$

ahol a a sorösszeg első tagja.

2.2.13. Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Kidolgozott feladatok

89. Feladat. Számoljuk ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$$

sorösszeget!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

teljesül, az eredeti sorösszeget két mértani sor összegére bontottuk. Mértani sor összege

$$a \cdot \frac{1}{1-q},$$

ahol a a sorösszeg első tagja, q a kvóciens. Ezt felhasználva egyrészt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

másrészt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

így az eredeti sorösszeg:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

90. Feladat. Számoljuk ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+2}}{7^{n-1}}$$

sorösszeget!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+2}}{7^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 3^n + 25\cdot 5^n}{\frac{1}{7}\cdot 7^n} = 7\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\cdot 3^n}{7^n} + 25\cdot\frac{5^n}{7^n}\right) =$$
$$= 21\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n + 175\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n,$$

teljesül, az eredeti sorösszeget két mértani sor összegére bontottuk. Mértani sor összege

$$a\cdot\frac{1}{1-q},$$

ahol a a sorösszeg első tagja, q a kvóciens. Ezt felhasználva, egyrészt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{7}} = \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{4} = \frac{3}{4},$$

másrészt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{7}} = \frac{5}{7}\cdot\frac{7}{2} = \frac{5}{2},$$

így az eredeti sorösszeg:

$$21\cdot\frac{3}{4} + 175\cdot\frac{5}{2} = \frac{63}{4} + \frac{875}{2} = \frac{1813}{4}.$$

91. Feladat. Számoljuk ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^{2n+1}}$$

sorösszeget!

Megoldás:

A hatványozás azonosságait felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25^n} = \frac{1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{25^n}.$$

A mértani sorok összegére vonatkozó képlet szerint a sorösszeg:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^{2n+1}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{25}\right)^n = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{25}{24} = \frac{5}{24}.$$

92. Feladat. Számoljuk ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

sorösszeget!

Megoldás:

Definíció szerint:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)}.$$

Parciális törtek összegére bontva az $\frac{1}{k\cdot(k+1)}$ törtet azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}.$$

Mindkét oldalt szorova a közös nevezővel

$$1 = A \cdot (k+1) + B \cdot k$$

adódik, így $1 = (A+B) \cdot k + A$, amiből a megfelelő tagok együtthatóit összehasonlítva $A = 1$ és $A + B = 0$ következik, így $B = -1$. Tehát azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

így

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.\end{aligned}$$

93. Feladat. Számoljuk ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)}$$

sorösszeget!

Megoldás:

Definíció szerint:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}.$$

Parciális törtek összegére bontva az $\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}$ törtet azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{A}{2k+1} + \frac{B}{2k+3}.$$

Mindkét oldalt szorozva a közös nevezővel

$$1 = A\cdot(2k+3) + B\cdot(2k+1)$$

adódik, így

$$1 = (2A+2B)\cdot k + 3A + B.$$

A két oldalon a megfelelő tagok együtthatóit összehasonlítva $3A + B = 1$, illetve $A + B = 0$ adódik, amiből $B = -A$. Ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $A = \frac{1}{2}$, így $B = -\frac{1}{2}$. Tehát

$$\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

94. Feladat. Konvergens-e a $\sum \frac{2n}{3^n}$ sor?

Megoldás:

Mivel

$$\sqrt[n]{\frac{2n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{2n}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}{3},$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1\cdot 1}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

ezért a Cauchy-féle gyökteszt szerint a sor konvergens.

95. Feladat. Konvergens-e a $\sum \frac{2^n}{n^2}$ sor?

Megoldás:

Mivel

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2},$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} = 2 > 1,$$

ezért a Cauchy-féle gyökteszt szerint a sor divergens.

96. Feladat. Egy 2 egység oldalú szabályos háromszögnek rajzoljuk meg a középvonalait. A kapott háromszögnek újra rajzoljuk meg a középvonalait, és így tovább. Az eljárást végtelen sokszor elvégezve határozzuk meg a keletkezett háromszögek kerületeinek és területeinek összegét!

Megoldás:

A kerület esetében az eredeti háromszög kerülete 6 egység, az első beírt háromszög kerülete 3 egység, a következő beírt háromszög kerülete 1,5 egység, és így tovább. Tehát a keletkezett háromszögek kerülete:

$$K = 6 + 3 + 1{,}5 + \ldots = 6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 6\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 6\cdot 2 = 12.$$

A terület esetében az eredeti háromszög területe :

$$2^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

Az első beírt háromszög területe: $\frac{\sqrt{3}}{4}$, a következő beírt háromszög területe: $\frac{\sqrt{3}}{16}$, és így tovább. Tehát a keletkezett háromszögek területének összege:

$$T = \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

97. Feladat. Alakítsuk közönséges törtté a $0{,}\dot{3}$ végtelen szakaszos tizedestörtet!

Megoldás:

A mértani sor összegképletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}0{,}\dot{3} = 0{,}333\ldots &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \ldots = \\ &= \frac{3}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right) = \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

98. Feladat. Alakítsuk közönséges törtté a $0{,}\dot{1}$ végtelen szakaszos tizedestörtet!

Megoldás:

A mértani sor összegképletét felhasználva

$$\begin{aligned}0{,}\dot{1} = 0,111\ldots &= \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + \ldots = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right) = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

99. Feladat. Alakítsuk közönséges törtté a $0{,}\dot{1}\dot{2}$ tizedestörtet!

Megoldás:

A mértani sor összegképletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}0{,}\dot{1}\dot{2} = 0{,}121212\ldots &= \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1\,000} + \frac{2}{10\,000} + \ldots = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \ldots\right) + \frac{2}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \ldots\right) = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} + \frac{2}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{100}{99} + \frac{2}{100} \cdot \frac{100}{99} = \\ &= \frac{10}{99} + \frac{2}{99} = \frac{12}{99}.\end{aligned}$$

100. Feladat. Alakítsuk közönséges törtté $0{,}\dot{1}0\dot{8}$-at!

Megoldás:

A mértani sor összegképletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0{,}\dot{1}0\dot{8} = 0{,}108108\ldots &= \frac{1}{10} + \frac{8}{1\,000} + \frac{1}{10\,000} + \frac{2}{1\,000\,000} + \ldots = \\
&= \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{1\,000} + \ldots\right) + \frac{8}{1\,000} \cdot \left(1 + \frac{1}{1\,000} + \ldots\right) = \\
&= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1\,000}} + \frac{8}{1\,000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1\,000}} = \\
&= \frac{1}{10} \cdot \frac{1\,000}{999} + \frac{8}{1\,000} \cdot \frac{1\,000}{999} = \frac{100}{999} + \frac{8}{999} = \frac{108}{999} = \frac{4}{37}.
\end{aligned}$$

101. Feladat. Határozzuk meg az x számjegy értékét, ha tudjuk, hogy a $0{,}\dot{4}\dot{x}$ szám egy racionális szám négyzete!

Megoldás:

A mértani sor összegképletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0{,}\dot{4}\dot{x} = 0,4x4x4x\ldots &= \frac{4}{10} + \frac{x}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{x}{10000} + \ldots = \\
&= \frac{4}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \ldots\right) + \frac{x}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \ldots\right) = \\
&= \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} + \frac{x}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \\
&= \frac{4}{10} \cdot \frac{100}{99} + \frac{x}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{40}{99} + \frac{x}{99} = \frac{40+x}{99}.
\end{aligned}$$

Tehát valamely p és q egész számokra

$$\frac{40+x}{99} = \left(\frac{p}{q}\right)^2.$$

Könnyen látható, hogy $x = 4$ esetén lesz a keresett racionális szám négyzetszám, ugyanis ekkor $\frac{44}{99} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

102. Feladat. Oldjuk meg az x számjegyre az

$$1{,}\dot{x} \cdot 3{,}\dot{x} = \frac{9x-1}{10}$$

egyenletet!

Megoldás:

Mivel egyrészt

$$\begin{aligned}1,\dot{x} = 1,xxx\ldots &= 1 + \frac{x}{10} + \frac{x}{100} + \ldots = \\ &= 1 + \frac{x}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right) = \\ &= 1 + \frac{x}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1 + \frac{x}{9},\end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned}3,\dot{x} = 3,xxx\ldots &= 3 + \frac{x}{10} + \frac{x}{100} + \ldots = \\ &= 3 + \frac{x}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right) = \\ &= 3 + \frac{x}{10} \cdot \frac{10}{9} = 3 + \frac{x}{9},\end{aligned}$$

ezért a megoldandó egyenlet

$$\left(1 + \frac{x}{9}\right)\left(3 + \frac{x}{9}\right) = \frac{9x-1}{10}.$$

A zárójeleket felbontva

$$3 + \frac{4x}{9} + \frac{x^2}{81} = \frac{9x-1}{10}$$

adódik. A közös nevezővel szorozva mindkét oldalt azt kapjuk, hogy

$$2430 + 360x + 10x^2 = 729x - 81 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 - 369x + 2511 = 0.$$

Megoldva a másodfokú egyenletet

$$x_{1,2} = \frac{369 \pm 189}{20}$$

adódik, azonban mivel x egy számjegy, ezért csak $x = 9$ lesz megoldás.

2.3. Függvények folytonossága, határértéke

2.3.1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}$ és $f\colon D \to \mathbb{R}$, legyen továbbá x_0 a D halmaz torlódási pontja, azaz olyan pont, amelynek bármely környezetében van D-beli elem. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik a *határérték*e az x_0 helyen és az egyenlő A-val, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D$ sorozat esetén az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $f(x_0)$-hoz konvergál. Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Az f függvény bal oldali határértéke az x_0 helyen A, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n < x_0$ sorozat esetén az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $f(x_0)$-hoz konvergál. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = A$.

Az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen A, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n > x_0$ sorozat esetén az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $f(x_0)$-hoz konvergál. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$.

2.3.2. Tétel. Egy függvénynek akkor létezik a határértéke az x_0 helyen, ha ott a bal oldali és jobb oldali határértéke megegyezik.

2.3.3. Definíció. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az x_0 helyen, ha az x_0 helyen létezik a határértéke az f függvénynek és ez a határték megegyezik az x_0-beli helyettesítési értékkel, azaz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.3.4. Definíció. Tekintsük az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen x_0 a D halmaz torlódási pontja! Ha az

- $x_0 \in D_f$;
- létezik $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

feltételek közül legalább az egyik nem teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 helyen *szakadás*a van.

Ha létezik az f függvény x_0-beli határértéke és az véges, de $x_0 \notin D_f$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0} \neq f(x_0)$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 helyen *megszüntethető szakadás*a van.

Ha létezik az f függvénynek az x_0 helyen bal oldali és jobb oldali határértéke, de azok különböző értékűek, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 helyen *ugrás*a van.

Ha az f függvénynek az x_0 helyen megszüntethető szakadása vagy ugrása van, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 helyen *elsőfajú szakadás*a van.

Ha az f függvénynek az x_0 helyen olyan szakadási helye van, amely nem elsőfajú szakadás, akkor azt mondjuk, hogy *másodfajú szakadási hely*e van az f-nek az x_0 helyen.

2.3.5. Definíció. Ha az f függvény az x_0 helyen nincs értelmezve, de létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ határérték, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonosan kiterjeszthető*, és az

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq x_0; \\ L, & \text{ha } x \neq x_0 \end{cases}$$

módon definiált függvényt az f *folytonos kiterjesztés*ének nevezzük.

2.3.6. Tétel. Ha az f és g függvényeknek az x_0 helyen létezik határértéke és az f függvény határértéke A, a g függvény határértéke B az x_0 helyen és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

- az $f+g$ függvénynek létezik határértéke az x_0 helyen és az egyenlő $A+B$-vel;
- az $f \cdot g$ függvénynek létezik határértéke az x_0 helyen és az egyenlő $A \cdot B$-vel;
- az $\lambda \cdot f$ függvénynek létezik határértéke az x_0 helyen és az egyenlő $\lambda \cdot A$-val;
- ha $g(x) \neq 0$ és $B \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ függvénynek létezik határértéke az x_0 helyen és az egyenlő $\frac{A}{B}$-vel.

2.3.7. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, továbbá $a_n \neq 0$! A

$$P(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

polinom esetén

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{ha } a_n < 0 \end{cases}$$

és

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } a_n > 0 \text{ és n páros} \\ -\infty, & \text{ha } a_n < 0 \text{ és n páros} \\ -\infty, & \text{ha } a_n > 0 \text{ és n páratlan} \\ \infty, & \text{ha } a_n < 0 \text{ és n páratlan.} \end{cases}$$

2.3.8. Tétel. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^k}$ függvény határértéke a végtelenben minden $k > 0$ esetén 0.

2.3.9. Tétel. Az $f(x) = q^x$ függvény határértéke a végtelenben $-1 < q < 1$ esetén 0.

2.3.10. Tétel. Az $f(x) = q^x$ függvény határértéke a végtelenben $q > 1$ esetén végtelen.

2.3.11. Tétel. Az $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ függvény határértéke a végtelenben az e szám.

2.3.12. Definíció. Az $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $y = b$ egyenletű egyenes *függőleges aszimptotá*ja, ha

$$\lim_{x\to b-} f(x) = -\infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = \infty \quad \text{vagy}$$
$$\lim_{x\to b+} f(x) = -\infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to b+} f(x) = \infty.$$

2.3.13. Példa. Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek az $y = 0$ egyenletű egyenes függőleges aszimptotája.

2.3.14. Példa. Az $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ függvénynek az $y = 3$ és az $y = -3$ egyenletű egyenesek függőleges aszimptotái.

2.3.15. Definíció. Az $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $y = a$ egyenletű egyenes *vízszintes aszimptotá*ja, ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = a.$$

2.3.16. Példa. Az $f(x) = 2^x$ függvény az $x = 0$ egyenletű egyenes vízszintes aszimptotája.

2.3.17. Definíció. Az $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $y = ax + b$ egyenletű egyenes *ferde aszimptotá*ja, ha

$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - ax + b\big) = 0 \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0.$$

2.3.18. Tétel. Ha az $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $y = ax + b$ egyenletű egyenes ferde aszimptotája, akkor

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

és

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - ax\big).$$

2.3.19. Példa. Tekintsük az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvényt! Ekkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1.$$

Másrészt

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = x$.

Kidolgozott feladatok

103. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x-5}{2x^2+5x-2}$$

határértéket!

Megoldás:

A nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal osztjuk a számlálót és a nevezőt is. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x-5}{2x^2+5x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{5+0-0}{2+0-0} = \frac{5}{2}.$$

104. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-1}{5x^3-2x+4}$$

határértéket!

Megoldás:

A nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal osztjuk a számlálót és a nevezőt is. Ekkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-1}{5x^3-2x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}} = \frac{0+0-0}{5+0+0} = 0.$$

105. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+7x+2}{7-5x}$$

határértéket!

Megoldás:

A nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal osztjuk a számlálót és a nevezőt is. Ekkor

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+7x+2}{7-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x+7+\frac{2}{x}}{\frac{7}{x}-5} = \infty.$$

106. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+1}{7+3x}$$

határértéket!

Megoldás:

A függvény folytonos, így

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+1}{7+3x} = \frac{3\cdot 2^2+1}{7+3\cdot 2} = \frac{13}{13} = 1.$$

107. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 3}(x^2-8x+1)$$

határértéket!

Megoldás:

A függvény folytonos, így

$$\lim_{x\to 3}(x^2-8x+1) = 3^2-8\cdot 3+1 = -14.$$

108. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 1}(3x-2)$$

határértéket!

Megoldás:

A függvény folytonos, így

$$\lim_{x\to 1}(3x-2) = 3\cdot 1-2 = 1.$$

109. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

határértéket!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$a^2-b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$$

azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4.$$

110. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{x}$$

határértéket!

Megoldás:

Emeljünk ki a számlálóban x-et, majd egyszerűsítsünk. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(x+5)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+5)=0+5=5.$$

111. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

határértéket!

Megoldás:

A számlálóban az x^2-2x+1 kifejezést átalakítva, majd egyszerűsítve a kapott törtet azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)=0.$$

112. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$$

határértéket!

Megoldás:

Mivel $x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)$ és $x^2-4x+4=(x-2)^2$, ezért

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)\cdot(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=0.$$

113. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$$

határértéket!

Megoldás:

Közös nevezőre hozva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\cdot(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\cdot(x+2)}.$$

Az egyszerűsítés, majd a határérték elvégzése után

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

adódik.

114. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$$

határértéket!

Megoldás:

Közös nevezőre hozva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x+3-6}{(x-3)\cdot(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\cdot(x+3)}.$$

Az egyszerűsítés, majd a határérték elvégzése után

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

adódik.

115. Feladat. Tekintsük az

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{ha } x<-1\\ x^2-2, & \text{ha } x\geq -1\end{cases}$$

függvényt!

a) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

b) Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető!

c) Határozzuk meg a függvény értékkészletét és zérushelyét!

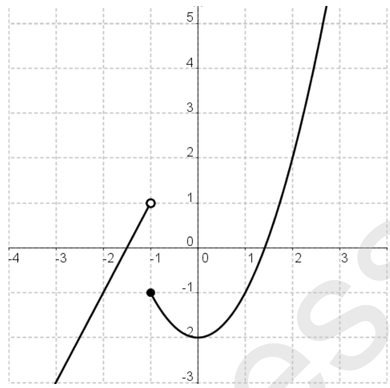
d) Adjuk meg a függvény szélsőértékének típusát, helyét és értékét!

e) Folytonos-e a függvény? Ha nem, adjuk meg a szakadási helyeit, valamint a szakadási helyekben a bal- és jobb oldali határértéket!

f) Adjuk meg a függvény $-\infty$-beli és ∞-beli határértékét!

Megoldás:

a) A függvény grafikonja:



b) Az értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

c) Az értékkészlet: $\mathbb{R}$. A zérushelyek: $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = \sqrt{2}$.

d) A függvénynek lokális minimuma van.
A lokális minimum hely: $x = 0$. A lokális minimum érték: $y = -2$.

e) Nem folytonos, szakadási helye: $x = -1$. A függvény bal oldali, illetve jobb oldali határértéke a szakadási helyen:

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to -1+} f(x) = -1.$$

f) A függvény $-\infty$-beli, illetve ∞-beli határértéke:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

116. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x}, & \text{ha } x \geq 1 \\ 2^x + 3, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

függvényt!

a) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

b) Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető!

c) Határozzuk meg a függvény értékkészletét és zérushelyét!

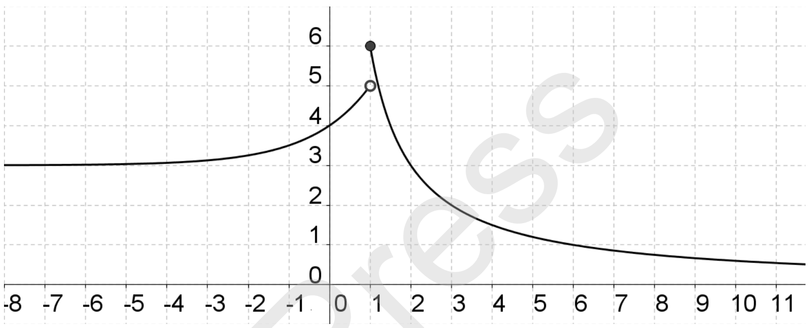
d) Adjuk meg a függvény szélsőértékének típusát, helyét és értékét!

e) Folytonos-e a függvény? Ha nem, adjuk meg a szakadási helyeit, valamint a szakadási helyekben a bal- és jobb oldali határértéket!

f) Adjuk meg a függvény $-\infty$-beli és ∞-beli határértékét!

Megoldás:

a) A függvény grafikonja:



b) Az értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

c) Az értékkészlet: $]0;6]$. A zérushely: nincs.

d) Nincs szélsőérték.

e) Nem folytonos, szakadási helye: $x = 1$. A függvény bal oldali, illetve jobb oldali határértéke a szakadási helyen:

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = 5 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to -1+} f(x) = 6.$$

f) A függvény $-\infty$-beli, illetve ∞-beli határértéke:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = 0.$$

117. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt!

a) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

b) Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető!

c) Határozzuk meg a függvény értékkészletét és zérushelyét!

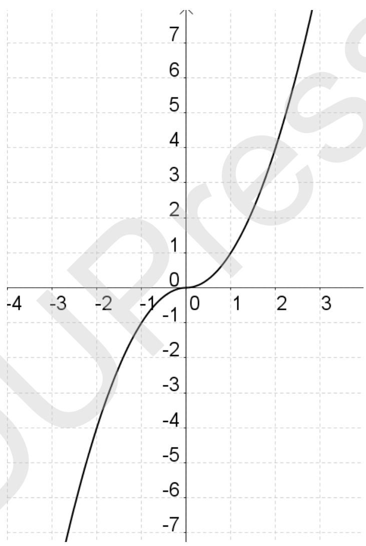
d) Adjuk meg a függvény szélsőértékének típusát, helyét és értékét!

e) Folytonos-e a függvény? Ha nem, adjuk meg a szakadási helyeit, valamint a szakadási helyekben a bal- és jobb oldali határértéket!

f) Adjuk meg a függvény $-\infty$-beli és ∞-beli határértékét!

Megoldás:

a) A függvény grafikonja:



b) Az értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

c) Az értékkészlet: $\mathbb{R}$. A zérushely: $x = 0$.

d) Nincs szélsőérték.

e) Folytonos.

f) A függvény $-\infty$-beli, illetve ∞-beli határértéke:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

118. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & \text{ha } x > 0 \\ x^2, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvényt!

a) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

b) Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető!

c) Határozzuk meg a függvény értékkészletét és zérushelyét!

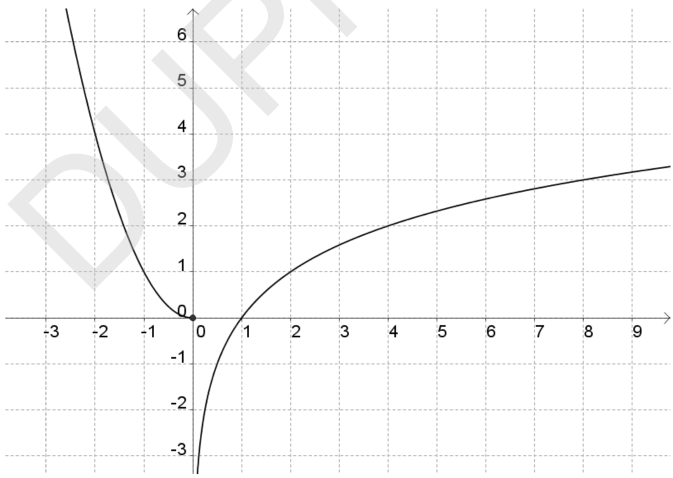
d) Adjuk meg a függvény szélsőértékének típusát, helyét és értékét!

e) Folytonos-e a függvény? Ha nem, adjuk meg a szakadási helyeit, valamint a szakadási helyekben a bal- és jobb oldali határértéket!

f) Adjuk meg a függvény $-\infty$-beli és ∞-beli határértékét!

Megoldás:

a) A függvény grafikonja:



b) Az értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

c) Az értékkészlet: $\mathbb{R}$. A zérushelyek: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

d) Nincs szélsőérték.

e) Nem folytonos, szakadási helye: $x = 0$. A függvény bal oldali, illetve jobb oldali határértéke a szakadási helyen:
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty.$$

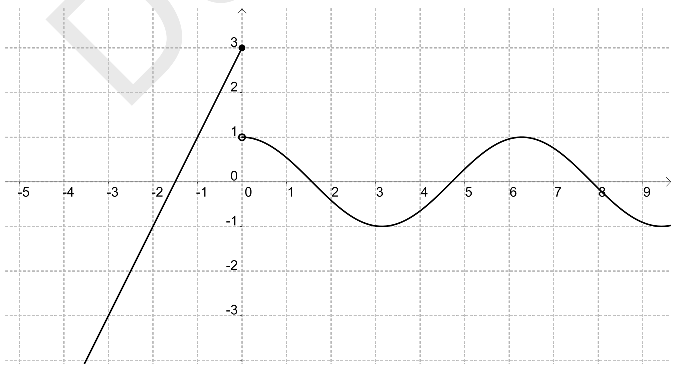
f) A függvény $-\infty$-beli, illetve ∞-beli határértéke:
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = \infty.$$

119. Feladat. Tekintsük az
$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{ha } x \le 0 \\ \cos x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$
függvényt!

a) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!
b) Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető!
c) Határozzuk meg a függvény értékkészletét és zérushelyét!
d) Adjuk meg a függvény szélsőértékének típusát, helyét és értékét!
e) Folytonos-e a függvény? Ha nem, adjuk meg a szakadási helyeit, valamint a szakadási helyekben a bal- és jobb oldali határértéket!
f) Adjuk meg a függvény $-\infty$-beli és ∞-beli határértékét!

<u>**Megoldás:**</u>

a) A függvény grafikonja:



b) Az értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

c) Az értékkészlet: $]-\infty; 3]$. A zérushelyek: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{N}$.

d) Nincs szélsőérték.

e) Nem folytonos, szakadási helye: $x = 0$. A függvény bal oldali, illetve jobb oldali határértéke a szakadási helyen:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 3 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = 1.$$

f) A függvény $-\infty$-beli, illetve ∞-beli határértéke:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = \text{nem létezik.}$$

120. Feladat. Adjuk meg a p valós számot úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & \text{ha } x \leq 1; \\ px + 3, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen!

Megoldás:

Mivel

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 2 \cdot 1 + 6 = 8$$

és

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = p \cdot 1 + 3 = p + 3,$$

ezért $p + 3 = 8$, vagyis $p = 5$ esetén lesz a függvény folytonos.

3. fejezet

Differenciálszámítás

3.1. Differenciahányados, differenciálhányados fogalma

3.1.1. Megjegyzés. A jegyzet további részében, ha mást nem mondunk I egy rögzített nyílt intervallumot jelöl.

3.1.2. Definíció. Tekintsük az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt és legyenek x_1 és x_2 olyan valós számok, melyekre $x_1, x_2 \in I$ és $x_1 \neq x_2$. Az f függvény $\big(x_1; f(x_1)\big)$ és $\big(x_2; f(x_2)\big)$ pontjaihoz tartozó *differenciahányados*án az

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

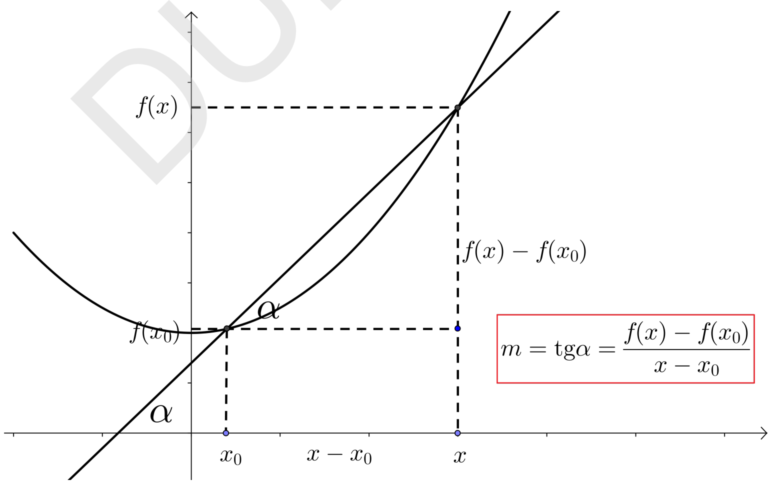
hányadost értjük.

3.1.3. Definíció. Legyen $x_0 \in I$. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény x_0 helyhez tartozó *differenciahányados függvény*e a

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad x \in I \setminus \{x_0\}$$

függvény.

3.1.4. Megjegyzés. A differenciahányados geometria jelentése az $\big(x_0; f(x_0)\big)$, $\big(x; f(x)\big)$ pontokon áthaladó szelő meredeksége.



3.1.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* az $x_0 \in I$ helyen, ha a differenciahányados függvényének létezik az x_0 helyen határértéke, és az véges, azaz létezik és véges az

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték. Ekkor ezt a határértéket az f függvény x_0-beli *differenciálhányados*ának, vagy *derivált*jának nevezzük. Azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható*, ha értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható.

Jelölések: $f'(x_0),\ \dfrac{df}{dx}(x_0),\ \dot{f}(t),\ \dfrac{d}{dx}f(x_0)$.

3.1.6. Tétel. Megmutatható, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határéték, és véges.

3.1.7. Definíció. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény x_0 helyhez tartozó *bal oldali differenciálhányados*án (*bal oldali derivált*ján) az

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határértéket értjük, ha az létezik és véges.

Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény x_0 helyhez tartozó *jobb oldali differenciálhányados*án (*jobb oldali derivált*ján) az

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határértéket értjük, ha az létezik és véges.

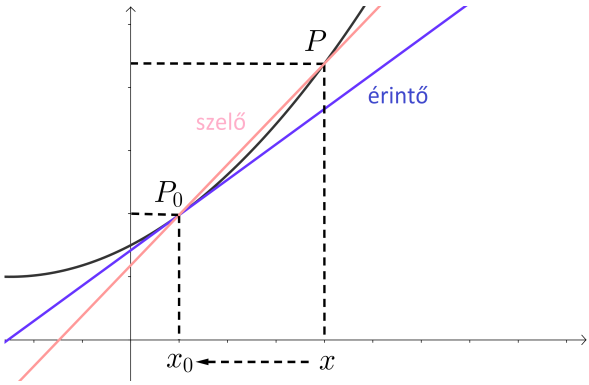
3.1.8. Tétel. Könnyen látható, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, ha ott létezik a bal oldali és jobb oldali deriváltja és azok értéke egyenlő.

3.1.9. Definíció. Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor az

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

egyenletű egyenest az f függvény $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontbeli *érintő egyenes*ének, vagy egyszerűen *érintő*jének mondjuk.

3.1.10. Megjegyzés. A differenciálhányados geometriai jelentése a függvény grafikonjának $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott érintő egyenesének meredeksége.



3.1.11. Megjegyzés. Az alábbi táblázatban összefoglaljuk a differenciahányados és differenciálhányados definícióját, annak az átírását, valamint a geometriai és fizikai jelentést:

	differenciahányados	differenciálhányados
definíció	$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
definíció	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
geom. jelentés	szelő meredeksége	érintő meredeksége
fizikai jelentés	átlagos megváltozás	pillanatnyi érték

Kidolgozott feladatok

121. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt és legyen $x_0 = 5$.

a) Határozzuk meg az f függvény differenciahányados függvényének legegyszerűbb alakját az x_0 helyen!

b) A kapott eredményt felhasználva adjuk meg az f függvény differenciálhányadosának értékét az x_0 helyen!

c) Határozzuk meg az f függvény grafikonjának $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott e érintő egyenesének meredekségét!

d) Írjuk fel az e egyenes egyenletét!

e) Adjuk meg az e egyenes irányszögét!

Megoldás:

a) Mivel

$$f(x_0) = f(5) = 5^2 = 25,$$

ezért a differenciahányados függvény $x \neq 5$ esetén:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 5^2}{x - 5} = \frac{(x-5)\cdot(x+5)}{x-5} = x + 5.$$

b) A differenciálhányados az x_0 helyen:

$$f'(5) = \lim_{x\to 5}(x+5) = 5 + 5 = 10.$$

c) Az érintő egyenes meredeksége: $m = f'(5) = 10$.

d) Az egyenes egyenletét $y = m\cdot x + b = 10x + b$ alakban keressük.

Az egyenes illeszkedik az $\big(5; f(5)\big) = (5; 25)$ pontra, így

$$25 = 10\cdot 5 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = -25,$$

tehát az egyenes egyenlete: $y = 10x - 25$.

e) Az e egyenes irányszöge:

$$\operatorname{tg}\alpha = 10 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx 84{,}29^\circ.$$

122. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvényt és legyen $x_0 = 2$.

a) Határozzuk meg az f függvény differenciahányados függvényének legegyszerűbb alakját az x_0 helyen!

b) A kapott eredményt felhasználva adjuk meg az f függvény differenciálhányadosának értékét az x_0 helyen!

c) Határozzuk meg az f függvény grafikonjának $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott e érintő egyenesének meredekségét!
d) Írjuk fel az e egyenes egyenletét!
e) Adjuk meg az e egyenes irányszögét!

Megoldás:

a) A differenciahányados függvény:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}}{x - 2} = \frac{4 - x^2}{4x^2 \cdot (x-2)} = \\ = \frac{(2-x)\cdot(2+x)}{4x^2 \cdot (x-2)} = -\frac{x+2}{4x^2}.$$

b) A differenciálhányados az $x_0 = 2$ helyen:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} -\frac{(x+2)}{4x^2} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}.$$

c) Az érintő egyenes meredeksége: $m = f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

d) Az érintő egyenes egyenlete: $y = -\dfrac{1}{4}x + b$.

Az egyenes illeszkedik a $\big(2; f(2)\big) = \big(2; \frac{1}{4}\big)$ pontra, így

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \cdot 2 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{3}{4},$$

tehát az egyenes egyenlete:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

e) Az egyenes irányszöge:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx 165{,}96^\circ.$$

123. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt és legyen $x_0 = 4$.

a) Határozzuk meg az f függvény differenciahányados függvényének legegyszerűbb alakját az x_0 helyen!
b) A kapott eredményt felhasználva adjuk meg az f függvény differenciálhányadosának értékét az x_0 helyen!
c) Határozzuk meg az f függvény grafikonjának $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott e érintő egyenesének meredekségét!

d) Írjuk fel az e egyenes egyenletét!

e) Adjuk meg az e egyenes irányszögét!

Megoldás:

a) A differenciahányados függvény:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 2} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2) \cdot (\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}.$$

b) A differenciálhányados az $x_0 = 4$ helyen:

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

c) Az érintő egyenes meredeksége: $m = f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

d) Az érintő egyenes egyenlete:

$$y = \frac{1}{4}x + b.$$

Az egyenes illeszkedik a $\big(4; f(4)\big) = (4; 2)$ pontra, így

$$2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = 1,$$

tehát az egyenes egyenlete:

$$y = \frac{1}{4}x + 1.$$

e) Az egyenes irányszöge:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx 14{,}04^\circ.$$

124. Feladat. Egy hűtőbe tett üdítőital hőmérsékletét a

$$T(t) = \frac{300}{t^2 + t + 10} \; [^\circ\mathrm{C}]$$

függvénnyel modellezzük, ahol t a hűtőbe helyezéstől eltelt időt jelenti órában.

a) Határozzuk meg, hogy hány $[^\circ\mathrm{C}]$-os volt az üdítőital, amikor betettük a hűtőbe?

b) Hány $[^\circ\mathrm{C}]$-os volt az üdítőital egy óra elteltével?

c) Mennyi a hőmérsékletváltozás átlagos gyorsasága az első két órában?

Megoldás:

a) Mivel

$$T(0) = \frac{300}{3 \cdot 0^2 + 0 + 10} = \frac{300}{10} = 30,$$

ezért az üdítőital 30[°C]-os volt, amikor betettük a hűtőbe.

b) Mivel

$$T(1) = \frac{300}{1^2 + 1 + 10} = \frac{300}{14} = 25$$

ezért 25 [°C]-os volt az üdítőital egy óra elteltével.

c) Mivel

$$T(2) = \frac{300}{2^2 + 2 + 10} = 18{,}75,$$

ezért a hőmérsékletváltozás átlagos gyorsasága az első két órában

$$\frac{T(2) - T(0)}{2 - 0} = \frac{18{,}75 - 30}{2 - 0} = -5{,}625 \left[\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{h}}\right].$$

125. Feladat. A $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ formulát felhasználva bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^2$ függvény deriváltja: $f'(x) = 2x$!

Megoldás:

Mivel $f(x) = x^2$ esetén

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h \cdot (2x + h)}{h} = 2x + h,$$

ezért $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} 2x + h = 2x + 0 = 2x.$

3.2. Deriválási szabályok

A következőkben $r \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{R}$ és $a > 0$! Az alábbi táblázatban megadjuk az elemi függvények deriváltfüggvényeit.

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
c	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^r	$]0;\infty[$	$r \cdot x^{r-1}$	$]0;\infty[$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$]0;\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]0;\infty[$
$\log_a x$	$]0;\infty[$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$]0;\infty[$
$\arcsin x$	$[-1;1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arccos x$	$[-1;1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$

$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{cth} x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\operatorname{arsh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arch} x$	$[1; \infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1; \infty[$
$\operatorname{arth} x$	$]-1; 1[$	$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1; 1[$
$\operatorname{arcth} x$	$]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$	$-\frac{1}{1-x^2}$	$]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$

Az alábbi tételekben a deriválásra vonatkozó műveleti szabályokat adjuk meg.

3.2.1. Tétel. Ha az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, akkor az összegük (különbségük) is differenciálható az x_0 helyen és

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

3.2.2. Példa. Ha $u(x) = x^2 + 3$, akkor

$$u'(x) = (x^2 + 3)' = (x^2)' + 3' = 2x + 0 = 2x.$$

3.2.3. Tétel. Ha $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in I$ helyen és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható az x_0 helyen és

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

3.2.4. Példa. Ha $u(x) = 5 \sin x$, akkor

$$u'(x) = (5 \sin x)' = 5 \cdot (\sin x)' = 5 \cos x.$$

3.2.5. Tétel. Ha az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, akkor a szorzatuk is differenciálható x_0 helyen és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

3.2.6. Példa. Ha $u(x) = x^2 \cdot \sin x$, akkor

$$u'(x) = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x.$$

3.2.7. Következmény. Ha az $f, g, h\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, akkor a szorzatuk is differenciálható x_0 helyen és

$$(f \cdot g \cdot h)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot h(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot h(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) \cdot h'(x_0).$$

3.2.8. Példa. Ha $u(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot 2^x$, akkor

$$\begin{aligned} u'(x) &= (x^2)' \cdot \sin x \cdot 2^x + x^2 \cdot (\sin x)' \cdot 2^x + x^2 \cdot \sin x \cdot (2^x)' = \\ &= 2x \cdot \sin x \cdot 2^x + x^2 \cdot \cos x \cdot 2^x + x^2 \cdot \sin x \cdot 2^x \cdot \ln 2. \end{aligned}$$

3.2.9. Következmény. Ha az $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, akkor a szorzatuk is differenciálható x_0 helyen és

$$\begin{aligned} &(f \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdot \ldots \cdot f_n(x_0) + \\ &+ f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0) \cdot \ldots \cdot f_n(x_0) + \ldots + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdot \ldots \cdot f_n'(x_0). \end{aligned}$$

3.2.10. Tétel. Ha az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, továbbá $g(x) \neq 0$ $(x \in I)$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható az x_0 helyen és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}.$$

3.2.11. Példa. Ha $u(x) = \frac{x^2}{\sin x}$, akkor

$$u'(x) = \frac{(x^2)' \cdot \sin x - x^2 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x}.$$

3.2.12. Tétel. Legyenek I és J nyílt intervallumok. Ha a $g\colon I \to J$ függvény differenciálható az x_0 helyen, továbbá az $f\colon J \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható a $g(x_0)$ helyen, akkor az $f \circ g\colon I \to \mathbb{R}$ összetett függvény is differenciálható az x_0 helyen és

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0).$$

3.2.13. Megjegyzés. Az előbbi tétel szerint összetett függvényt tehát úgy deriválunk, hogy először deriváljuk a külső függvényt, abba a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az így kapott eredményt megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

3.2.14. Példa. Ha $f(x) = \sin(x^2+1)$, akkor a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin x & k'(x) &= \cos x \\ b(x) &= x^2+1 & b'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$f'(x) = \cos(x^2+1)\cdot 2x.$$

3.2.15. Következmény. Legyenek I, J és K nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy a $h\colon I \to J$ függvény differenciálható az x_0 helyen, a $g\colon J \to K$ függvény differenciálható a $h(x_0)$ helyen és az $f\colon K \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható a $g\big(h(x_0)\big)$ helyen, akkor az $f \circ g \circ h\colon I \to \mathbb{R}$ összetett függvény is differenciálható az x_0 helyen és

$$(f\circ g\circ h)'(x_0) = f'\Big(g\big(h(x_0)\big)\Big)\cdot g'\big(h(x_0)\big)\cdot h'(x_0).$$

3.2.16. Példa. Az $u(x) = \cos\big(\sin(x^2+1)\big)$ függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = -\sin\big(\sin(x^2+1)\big)\cdot\cos(x^2+1)\cdot 2x.$$

3.2.17. Definíció. Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az I intervallumon, továbbá a deriváltja differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* x_0-ban. Jelölés:

$$\big(f'(x_0)\big)' = f''(x_0).$$

Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény $k-1$-szer differenciálható az I intervallumon, továbbá a $k-1$-edrendű deriváltja differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f *k-szor differenciálható* x_0-ban. Jelölés:

$$\big(f^{(k-1)}(x_0)\big)' = f^{(k)}(x_0).$$

Kidolgozott feladatok

126. Feladat. Adjuk meg az $u(x) = x^5 + 2$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = (x^5)' + 2' = 5x^4.$$

127. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x^2} + 5$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Mivel $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ és $\frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$, ezért

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-2} + 5,$$

így az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{-3} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{4}{x^3}.$$

128. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + 2x + 3$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Mivel $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, ezért

$$u(x) = 5x^{-\frac{2}{3}} + 2x + 3,$$

így az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = -\frac{10}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} + 2 = -\frac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{x^5}} + 2.$$

129. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = (x^2)' \cdot \operatorname{tg} x + x^2 \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2x \cdot \operatorname{tg} x + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

130. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \sqrt{x} \cdot 5^x$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Mivel $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, ezért

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot 5^x,$$

így az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' \cdot 5^x + x^{\frac{1}{2}} \cdot (5^x)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^x + x^{\frac{1}{2}} \cdot 5^x \cdot \ln 5 =$$
$$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot 5^x + \sqrt{x} \cdot 5^x \cdot \ln 5.$$

131. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = 4^x \cdot \lg x$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = 4^x \cdot \ln 4 \cdot \lg x + 4^x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10} =$$
$$= 4^x \cdot \ln 4 \cdot \lg x + \frac{4^x}{x \cdot \ln 10}.$$

132. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{\mathrm{e}^x}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = \frac{(x^2+3x-1)' \cdot \mathrm{e}^x - (x^2+3x-1) \cdot (\mathrm{e}^x)'}{(\mathrm{e}^x)^2} = $$
$$= \frac{(2x+3) \cdot \mathrm{e}^x - (x^2+3x-1) \cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}$$

A számlálóban e^x-et kiemelve, majd elvégezve az egyszerűsítést

$$u'(x) = \frac{(2x+3) \cdot \mathrm{e}^x - (x^2+3x-1) \cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^x \cdot (2x+3-x^2-3x+1)}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{4-x-x^2}{\mathrm{e}^x}.$$

133. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \frac{x^8}{\sin x}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = \frac{(x^8)' \cdot \sin x - x^8 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{8x^7 \cdot \sin x - x^8 \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$$

134. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \frac{2^x}{\log_3 x}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = \frac{(2^x)' \cdot \log_3 x - 2^x \cdot (\log_3 x)'}{\log_3^2 x} = \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \log_3 x - 2^x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3}}{\log_3^2 x} =$$
$$= \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \log_3 x - \frac{2^x}{x \cdot \ln 3}}{\log_3^2 x}.$$

135. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{x^2 \cdot \sin x}$ függvényt!

Megoldás:

Legyen

$$A(x) = x^2 + \sqrt[3]{x} = x^2 + x^{\frac{1}{3}}$$

és

$$B(x) = x^2 \cdot \sin x.$$

Ekkor

$$A'(x) = 2x + \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

és

$$B'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x.$$

Tehát

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{A'(x) \cdot B(x) - A(x) \cdot B'(x)}{B^2(x)} = \\ &= \frac{(2x + \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}) \cdot x^2 \cdot \sin x - (x^2 + \sqrt[3]{x}) \cdot (2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x)}{(x^2 \cdot \sin x)^2}. \end{aligned}$$

136. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = (x^2 + 7x + 2) \cdot \sin x$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$\begin{aligned} u'(x) &= (x^2 + 7x + 2)' \cdot \sin x + (x^2 + 7x + 2) \cdot (\sin x)' = \\ &= (2x + 7) \cdot \sin x + (x^2 + 7x + 2) \cdot \cos x. \end{aligned}$$

137. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = x \cdot \sin x \cdot \mathrm{e}^x$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = (x)' \cdot \sin x \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot (\sin x)' \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \sin x \cdot (\mathrm{e}^x)' =$$
$$= \sin x \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \cos x \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \sin x \cdot \mathrm{e}^x.$$

138. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \ln(\sin x)$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \ln x & k'(x) &= \frac{1}{x} \\ b(x) &= \sin x & b'(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

139. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \ln(x^2 + 3x)$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \ln x & k'(x) &= \frac{1}{x} \\ b(x) &= x^2 + 3x & b'(x) &= 2x + 3. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}.$$

140. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \mathrm{e}^x & k'(x) &= \mathrm{e}^x \\ b(x) &= \sin x & b'(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = \mathrm{e}^{\sin x} \cdot \cos x.$$

141. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = 3^{\operatorname{tg} x}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= 3^x & k'(x) &= 3^x \cdot \ln 3 \\ b(x) &= \operatorname{tg} x & b'(x) &= \tfrac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = 3^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{3^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 3}{\cos^2(x)}.$$

142. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = (x^2 + 2)^{10}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= x^{10} & k'(x) &= 10x^9 \\ b(x) &= x^2 + 2 & b'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = 10 \cdot (x^2 + 2)^9 \cdot 2x = 20x \cdot (x^2 + 2)^9.$$

143. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \operatorname{tg}(x^2 + x)$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \operatorname{tg} x & k'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ b(x) &= x^2 + x & b'(x) &= 2x + 1. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = \frac{1}{\cos^2(x^2 + x)} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{\cos^2(x^2 + x)}.$$

144. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & k'(x) &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ b(x) &= x^2 + 5x + 6 & b'(x) &= 2x + 5. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 5x + 6)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 5) = \frac{2x + 5}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 5x + 6}}.$$

145. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = (x^2 + 4)^3 \cdot \sin(x^4 + 2x + 1)$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Legyen

$$A(x) = (x^2 + 4)^3$$

és

$$B(x) = \sin(x^4 + 2x + 1).$$

Az A függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= x^3 & k'(x) &= 3x^2 \\ b(x) &= x^2 + 4 & b'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$A'(x) = 3 \cdot (x^2+4)^2 \cdot 2x = 6x \cdot (x^2+4)^2.$$

A B függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin x & \qquad k'(x) &= \cos x \\ b(x) &= x^4+2x+1 & \qquad b'(x) &= 4x^3+2. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$B'(x) = \cos(x^4+2x+1) \cdot (4x^3+2).$$

Tehát az u függvény deriváltfüggvénye:

$$\begin{aligned} u'(x) &= A'(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot B'(x) = \\ &= 6x \cdot (x^2+4)^2 \cdot \sin(x^4+2x+1) + \\ &+ (x^2+4)^3 \cdot \cos(x^4+2x+1) \cdot (4x^3+2). \end{aligned}$$

146. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \frac{\sin(\sqrt{x}) + \sqrt{\sin x}}{\mathrm{e}^{2x}}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Vezessük be az

$$A(x) = \sin(\sqrt{x}) \qquad B(x) = \sqrt{\sin x} = (\sin x)^{\frac{1}{2}}$$
$$C(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

jelöléseket.
Az A függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin x & \qquad k'(x) &= \cos x \\ b(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & \qquad b'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A'(x) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

A B függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & k'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ b(x) &= \sin x & b'(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$B'(x) = \frac{1}{2} \cdot (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2 \cdot \sqrt{\sin x}}.$$

A C függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \mathrm{e}^x & k'(x) &= \mathrm{e}^x \\ b(x) &= 2x & b'(x) &= 2. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$C'(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot 2.$$

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = \frac{\big(A(x) + B(x)\big)' \cdot C(x) - \big(A(x) + B(x)\big) \cdot C'(x)}{C^2(x)} =$$

$$\frac{\big(A'(x) + B'(x)\big) \cdot C(x) - \big(A(x) + B(x)\big) \cdot C'(x)}{C^2(x)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\cos(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{\cos x}{2 \cdot \sqrt{\sin x}}\right) \cdot \mathrm{e}^{2x} - \big(\sin(\sqrt{x}) + \sqrt{\sin x}\big) \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot 2}{\mathrm{e}^{4x}}.$$

147. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \frac{\sin(x^2 + 3)}{\log_2(7x + 5)} + \cos^5 x$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Vezessük be az

$$A(x) = \sin(x^2 + 3); \qquad B(x) = \log_2(7x + 5)$$
$$C(x) = \cos^5 x$$

jelöléseket.
Az A függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$k(x) = \sin x \qquad k'(x) = \cos x$$

$$b(x) = x^2 + 3 \qquad b'(x) = 2x.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A'(x) = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x.$$

A B függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$k(x) = \log_2 x \qquad k'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$$

$$b(x) = 7x + 5 \qquad b'(x) = 7.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$B'(x) = \frac{1}{(7x+5) \cdot \ln 2} \cdot 7 = \frac{7}{(7x+5) \cdot \ln 2}.$$

A C függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$k(x) = x^5 \qquad k'(x) = 5x^4$$

$$b(x) = \cos x \qquad b'(x) = -\sin x.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$C'(x) = 5 \cdot (\cos x)^4 \cdot (-\sin x) = -5 \cdot \cos^4 x \cdot \sin x.$$

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = \frac{A'(x) \cdot B(x) - A(x) \cdot B'(x)}{B^2(x)} + C'(x) =$$

$$= \frac{\cos(x^2+3) \cdot 2x \cdot \log_2(7x+5) - \sin(x^2+3) \cdot \dfrac{7}{(7x+5) \cdot \ln 2}}{\log_2^2(7x+5)} -$$

$$- 5 \cdot \cos^4 x \cdot \sin x.$$

148. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \frac{\sqrt{x^5 + 3x} + \mathrm{e}^{\sin x}}{\ln(4x+1) \cdot \operatorname{ctg}(x^2+2)}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Vezessük be az

$$A(x) = \sqrt{x^5 + 3x} \qquad B(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$$
$$C(x) = \ln(4x+1) \qquad D(x) = \mathrm{ctg}(x^2+2)$$

jelöléseket.
Az A függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & k'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ b(x) &= x^5 + 3x & b'(x) &= 5x^4 + 3. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^5 + 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (5x^4 + 3).$$

A B függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \mathrm{e}^x & k'(x) &= \mathrm{e}^x \\ b(x) &= \sin x & b'(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$B'(x) = \mathrm{e}^{\sin x} \cdot \cos x.$$

A C függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \ln x & k'(x) &= \frac{1}{x} \\ b(x) &= 4x + 1 & b'(x) &= 4. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$C'(x) = \frac{1}{4x+1} \cdot 4 = \frac{4}{4x+1}.$$

A D függvény esetén a külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \mathrm{ctg} x & k'(x) &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\ b(x) &= x^2 + 2 & b'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$D'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x^2+2)} \cdot 2x = -\frac{2x}{\sin^2(x^2+2)}.$$

Az u függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = \frac{\big(A(x)+B(x)\big)' \cdot C(x) \cdot D(x) - \big(A(x)+B(x)\big) \cdot \big(C(x) \cdot D(x)\big)'}{C^2(x) \cdot D^2(x)} =$$

$$= \frac{\big(A'(x)+B'(x)\big) \cdot C(x) \cdot D(x)}{C^2(x) \cdot D^2(x)} -$$

$$- \frac{\big(A(x)+B(x)\big) \cdot \big(C'(x) \cdot D(x) + C(x) \cdot D'(x)\big)}{C^2(x) \cdot D^2(x)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{5x^4+3}{-2\cdot\sqrt{x^5+3x}} + \mathrm{e}^{\sin x} \cdot \cos x\right) \cdot \ln(4x+1) \cdot \operatorname{ctg}(x^2+2)}{\big(\ln(4x+1) \cdot \operatorname{ctg}(x^2+2)\big)^2} -$$

$$- \frac{\big(\sqrt{x^5+3x} + \mathrm{e}^{\sin x}\big) \cdot \left(\frac{4 \cdot \operatorname{ctg}(x^2+2)}{4x+1} - \frac{\ln(4x+1) \cdot 2x}{\sin^2(x^2+2)}\right)}{\Big(\ln(4x+1) \cdot \operatorname{ctg}(x^2+2)\Big)^2}.$$

149. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \ln(\sin^2 x)$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Ha $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2$ és $h(x) = \sin x$, akkor

$$u(x) = f \circ g \circ h(x) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big),$$

így a többszörösön összetett függvény deriváltja:

$$u'(x) = f'\Big(g\big(h(x)\big)\Big) \cdot g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x).$$

Tehát

$$u'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = 2\operatorname{ctg} x.$$

150. Feladat. Adjuk meg az

$$u(x) = \sin(x^2+3x)^5$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Ha $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^5$ és $h(x) = x^2 + 3x$, akkor

$$u(x) = f \circ g \circ h(x) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big),$$

így a többszörösön összetett függvény deriváltja:

$$u'(x) = f'\Big(g\big(h(x)\big)\Big) \cdot g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x).$$

Tehát

$$u'(x) = \cos(x^2 + 3x)^5 \cdot 5 \cdot (x^2 + 3x)^4 \cdot (2x + 3).$$

151. Feladat. Legyenek f és g differenciálható függvények, melyek helyettesítési értékét, valamint a deriváltfüggvények helyettesítési értékét az $x = 1; 2; 3$ helyen az alábbi táblázat mutatja:

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	1
$f'(x)$	1	4	2
$g(x)$	2	1	4
$g'(x)$	4	2	3

Legyen $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ és $h(x) = g \circ f(x)$. Határozzuk meg a $p'(3)$ és $h'(2)$ értékeket!

Megoldás:

Felhasználva a szorzatfüggvény deriválási szabályát azt kapjuk, hogy

$$p'(3) = f'(3) \cdot g(3) + f(3) \cdot g'(3) = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 11.$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$h'(2) = g'\big(f(2)\big) \cdot f'(2) = g'(1) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16.$$

adódik.

152. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x \cdot \sin 2x$ függvényt! Határozzuk meg az $f'(\pi)$ értéket!

Megoldás:

A szorzat és összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \sin 2x + 2x \cdot \cos 2x.$$

Ekkor $f'(\pi) = \sin 2\pi + 2\pi \cdot \cos 2\pi = 2\pi$.

153. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-8}}$$

függvényt! Határozzuk meg az $f'(3)$ értéket!

Megoldás:

A hányados és összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-8} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2-8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x^2-8} = \frac{\sqrt{x^2-8} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-8}}}{x^2-8} =$$

$$= \frac{x^2-8-x^2}{\sqrt{x^2-8} \cdot (x^2-8)} = \frac{-8}{(x^2-8)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ezt felhasználva $f'(3) = -8$.

154. Feladat. Tekintsük az

$$u(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+7x+8} \cdot 3^{\cos x}}{\lg(6x+1)+1}$$

függvényt! Határozzuk meg az $f'(0)$ értéket!

Megoldás:

Vezessük be az

$$A(x) = \sqrt[3]{x^2+7x+8}; \qquad B(x) = 3^{\cos x};$$
$$C(x) = \lg(6x+1)+1$$

jelöléseket!

Az A függvény külső függvénye, belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$k(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \qquad k'(x) = \tfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$
$$b(x) = x^2+7x+8 \qquad b'(x) = 2x+7.$$

Tehát

$$A'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2+7x+8)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+7).$$

A B függvény külső függvénye, belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{array}{rclrcl} k(x) & = & 3^x & k'(x) & = & 3^x \cdot ln3 \\ b(x) & = & \cos x & b'(x) & = & -\sin x. \end{array}$$

Tehát

$$B'(x) = 3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot (-\sin x).$$

A C függvény külső függvénye, belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{array}{rclrcl} k(x) & = & \lg x & k'(x) & = & \frac{1}{x \cdot \ln 10} \\ b(x) & = & 6x+1 & b'(x) & = & 6. \end{array}$$

Tehát

$$C'(x) = \frac{1}{(6x+1) \cdot \ln 10} \cdot 6 = \frac{6}{(6x+1) \cdot \ln 10}.$$

Felhasználva a szorzat és hányados függvény deriválási szabályát azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{[A'(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot B'(x)] \cdot C(x) - \big(A(x) \cdot B(x)\big) \cdot C'(x)}{C^2(x)}.$$

Tehát

$$f'(0) = \frac{[A'(0) \cdot B(0) + A(0) \cdot B'(0)] \cdot C(0) - \big(A(0) \cdot B(0)\big) \cdot C'(0)}{C^2(0)}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} A(0) &= \sqrt[3]{0^2 + 7 \cdot 0 + 8} = 2; \\ B(0) &= 3^{\cos 0} = 3; \\ C(0) &= \lg(6 \cdot 0 + 1) + 1 = 1, \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} A'(0) &= \frac{1}{3} \cdot (0^2 + 7 \cdot 0 + 8)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2 \cdot 0 + 7) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{12}; \\ B'(0) &= 3^{\cos 0} \cdot \ln 3 \cdot (-\sin 0) = 0; \\ C'(0) &= \frac{6}{(6 \cdot 0 + 1) \cdot \ln 10} = \frac{6}{\ln 10}, \end{aligned}$$

ezért azt kapjuk, hogy

$$f'(0) = \frac{\left(\frac{7}{12} \cdot 3 + 2 \cdot 0\right) \cdot 1 - (2 \cdot 3) \cdot \frac{6}{\ln 10}}{1} = \frac{7}{4} - \frac{36}{\ln 10}.$$

155. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \operatorname{tg}(x^2+3x)^{10}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x^2+3x)^{10}} \cdot 10 \cdot (x^2+3x)^9 \cdot (2x+3) = \frac{(x^2+3x)^9 \cdot (20x+30)}{\cos^2(x^2+3x)^{10}}$$

156. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \ln(x^5+3)^6$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \frac{1}{(x^5+3)^6} \cdot 6 \cdot (x^5+3)^5 \cdot 5x^4 = \frac{30x^4 \cdot (x^5+3)^5}{(x^5+3)^6} = \frac{30x^4}{x^5+3}.$$

157. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \operatorname{sh}\left(\sqrt{x^2+3}\right)$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{x^2+3}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2+3}}.$$

158. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{2x+1}\right)$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \operatorname{sh}\left(\sqrt{2x+1}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x \cdot \operatorname{sh}\left(\sqrt{2x+1}\right)}{\sqrt{2x+1}}.$$

159. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \mathrm{e}^{\cos(2x)}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\cos(2x)} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -2 \cdot \mathrm{e}^{\cos(2x)} \cdot \sin(2x).$$

160. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = 3^{\sin(2x)}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = 3^{\sin(2x)} \cdot \ln 3 \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 2 \ln 3 \cdot 3^{\sin(2x)} \cdot \cos(2x).$$

161. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \ln^3(x-1)$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = 3 \cdot \ln^2(x-1) \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{3 \cdot \ln^2(x-1)}{x-1}.$$

162. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \sin^5(x^2+1)$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = 5 \cdot \sin^4(x^2+1) \cdot \cos(x^2+1) \cdot 2x = 10x \cdot \sin^4(x^2+1) \cdot \cos(x^2+1).$$

163. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \operatorname{tg}^4 (x^3 + 5x^2)^{10}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = 4 \cdot \operatorname{tg}^3 (x^3 + 5x^2)^{10} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3 + 5x^2)^{10}} \cdot 10 \cdot (x^3 + 5x^2)^9 \cdot (3x^2 + 10x)$$

164. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$ függvény deriváltjának zérushelyét!

Megoldás:

A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot (1 + x).$$

A derivált függvény zérushelyét az

$$\mathrm{e}^x \cdot (1 + x) = 0$$

egyenlet megoldása adja. Mivel azonban $\mathrm{e}^x \neq 0$, ezért $1 + x = 0$, így $x = -1$.

165. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x$ függvény deriváltjának zérushelyét!

Megoldás:

A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 2x).$$

A derivált függvény zérushelyét az

$$\mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 2x) = 0.$$

egyenlet megoldása adja. Mivel azonban $\mathrm{e}^x \neq 0$, ezért $x^2 + 2x = 0$, azaz $x \cdot (x + 2) = 0$, amiből $x_1 = 0$, illetve $x_2 = -2$ adódik.

166. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvény deriváltjának zérushelyét!

Megoldás:

A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x.$$

A derivált függvény zérushelyét a

$$2x \cdot \ln x + x = 0$$

egyenlet megoldása adja. Ha kiemelünk x-et, akkor az

$$x \cdot (2 \ln x + 1) = 0$$

egyenlethez jutunk. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$, vagy $2 \ln x + 1 = 0$ adódik. Az x értéke nem lehet 0, mivel az nem eleme az $\ln x$ függvény értelmezési tartományának, így csak $2 \ln x + 1 = 0$ teljesülhet. Mindkét oldalból 1-et kivonva, majd az egyenletet 2-vel osztva

$$2 \ln x = -1 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{2}$$

adódik, amiből a logaritmus definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

167. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = x^4 + 8x^2 - 2x + 1$ függvény másodrendű deriváltját!

Megoldás:

A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 4x^3 + 16x - 2.$$

a másodrendű derivált:

$$f''(x) = 12x^2 + 16.$$

168. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = \ln x$ függvény n-edrendű deriváltját!

Megoldás:

A függvény deriváltja :

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

A másodrendű derivált:

$$f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

A harmadrendű derivált:

$$f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

Ebből megsejthető, hogy az n-edrendű derivált:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}.$$

169. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = \sin x$ függvény n-edik deriváltját!

Megoldás:

A függvény deriváltja $f'(x) = \cos x$, második deriváltja $f''(x) = -\sin x$, harmadik deriváltja $f'''(x) = -\cos x$, negyedik deriváltja $f^{(4)}(x) = \sin x$. Innentől kezdve ugyanezek a deriváltak ismétlődnek, így

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } n = 4k \text{ (azaz, ha } n \text{ osztható 4-el)} \\ \cos x, & \text{ha } n = 4k+1 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 1 maradékot ad)} \\ -\sin x, & \text{ha } n = 4k+2 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 2 maradékot ad)} \\ -\cos x, & \text{ha } n = 4k+3 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 3 maradékot ad).} \end{cases}$$

170. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvényt! Határozzuk meg az $f''(1)$ értéket!

Megoldás:

A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1).$$

A másodrendű derivált:

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3.$$

Ezt felhasználva: $f''(1) = 2 \cdot \ln 1 + 3 = 3$.

171. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(1 + x^2)$ függvény másodrendű deriváltjának zérushelyeit!

Megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

A hányados függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2}$$

adódik. Meg kell oldanunk az $f''(x) = 0$ egyenletet. Egy tört csak akkor lehet 0, ha a számlálója 0, így a $2 - 2x^2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amiből $x_1 = -1$, illetve $x_2 = 1$ adódik.

3.3. L'Hospital-szabály

3.3.1. Tétel. (L'Hospital-szabály.)
Legyen $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f, g\colon]a;b[\to \mathbb{R}$, és legyen $a \leq x_0 \leq b$. Ha f és g differenciálható függvények az $]a;b[\setminus\{x_0\}$ halmazon és $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a;b[$-re, továbbá

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

továbbá létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ véges vagy végtelen határérték, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.3.2. Megjegyzés. Az előbbi tétel akkor is érvényben marad, ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$$

vagy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \text{ és } \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

vagy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ és } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty.$$

3.3.3. Megjegyzés. A L'Hospital-szabály „$\frac{0}{0}$" vagy „$\frac{\infty}{\infty}$" alakú határérték meghatározására használható, azonban megfelelő helyettesítéssel más alakú függvények határértéke is kiszámolható a segítségével.
Ha a határérték „$0 \cdot \infty$" alakú, azaz ha f és g olyan függvények, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, akkor az egyik lehetőségünk, hogy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

ami már $\frac{0}{0}$ alakú, ugyanis $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ és mivel $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, ezért $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$. A másik lehetőség, hogy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

ami már $\frac{\infty}{\infty}$ alakú, ugyanis $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ és mivel $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, ezért $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$.

Ha a határérték 0^0 alakú, azaz ha f és g olyan függvények, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, akkor a

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$$

határérték úgy számolható, hogy elvégezzük a

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

átalakítást és ekkor már $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x)$ egy $0\cdot(-\infty)$ alakú határérték, amire már alkalmazható a korábban leírt eljárás.

Kidolgozott feladatok

172. Feladat. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{4x}$ határértéket!

Megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x\to 0} \sin 5x = \sin 0 = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} 4x = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\big(\sin 5x\big)'}{(4x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cdot\cos 5x}{4} = \frac{5}{4}.$$

173. Feladat. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sin(x-4)}{2x-8}$ határértéket!

Megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x\to 4} \sin x - 4 = \sin 0 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 4} 2x - 8 = 2\cdot 4 - 8 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sin(x-4)}{2x-8} = \lim_{x\to 4} \frac{\big(\sin(x-4)\big)'}{(2x-8)'} = \lim_{x\to 4} \frac{\cos(x-4)}{2} = \frac{1}{2}.$$

174. Feladat. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ határértéket!

Megoldás:

A számláló határértéke:

$$\lim_{x\to 1} (x^2 - 2x + 1) = 1^2 - 2\cdot 1 + 1 = 0,$$

a nevező határértéke:

$$\lim_{x\to 1} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{2x} = 0.$$

175. Feladat. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ határértéket!

Megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x\to 0} \sin 2x = \sin 0 = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} \sin 3x = \sin 0 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin 2x\right)'}{\left(\sin 3x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{3\cos 3x} = \frac{2}{3}.$$

176. Feladat. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{\sin 5x}$ határértéket!

Megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x\to 0} (1-\mathrm{e}^x) = 1-\mathrm{e}^0 = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} \sin 5x = \sin 0 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{e}^x}{5\cos 5x} = -\frac{1}{5}.$$

177. Feladat. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-2^{3x}}{x}$ határértéket!

Megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x\to 0} (1-2^{3x}) = 1-1 = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-2^{3x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\cdot 2^{3x}\cdot \ln 2}{1} = -3\ln 2.$$

178. Feladat. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}$ határértéket!

Megoldás:

A számláló határértéke:

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos 2x) = 1-\cos 0 = 1-1 = 0,$$

a nevező határértéke:

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos 4x) = 1-\cos 0 = 1-1 = 0,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\big(1-\cos 2x\big)'}{\big(1-\cos 4x\big)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{4\sin 4x}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének szintén 0 a határértéke, így ismételten alkalmaznunk kell a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{4\sin 4x} = \frac{4\cos 2x}{16\cos 3x} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

179. Feladat. Számoljuk ki a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{5x}}{x^2}$$

határértéket!

Megoldás:

A számláló határértéke:

$$\lim_{x\to\infty} e^{5x} = \infty,$$

a nevező határértéke:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke ∞, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{5x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{5x} \cdot 5}{2x}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének szintén ∞ a határértéke, így ismételten alkalmaznunk kell a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{5x} \cdot 5}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{5x} \cdot 25}{2} = \infty.$$

3.4. Függvényvizsgálat

Ebben a fejezetben a következő rövidítésekkel élünk:

mon.	monotonitás
konv.	konvexitás
lok. min.	lokális minimum
lok. max.	lokális maximum
i.p.	inflexiós pont
n.é.	nincs értelmezve

3.4.1. Tétel. Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Az f függvény pontosan akkor monoton növekvő I-n, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$.

Az f függvény pontosan akkor monoton csökkenő I-n, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \leq 0$.

3.4.2. Tétel. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex I-n, ha $f''(x) \geq 0$ minden $x \in I$ esetén.

Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konkáv I-n, ha $f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

3.4.3. Megjegyzés. Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in I$ helyen megváltozik a konvexitása, akkor f-nek az x_0 helyen *inflexiós hely*e van. Ilyenkor az $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontot *inflexiós pont*nak nevezzük.

3.4.4. Tétel. Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha f-nek az $x_0 \in I$ helyen lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

3.4.5. Megjegyzés. Az előbbi tétel megfordítása nem igaz, ugyanis például az $f(x) = x^3$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyen a deriváltja 0, azonban az f függvénynek az x_0 helyen nincs lokális szélsőértéke.

3.4.6. Tétel. Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ha f-nek az $x_0 \in I$ helyen inflexiós helye van, akkor $f''(x_0) = 0$.

3.4.7. Megjegyzés. Az előbbi tétel megfordítása nem igaz, ugyanis például az $f(x) = x^4$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyen a másorendű deriváltja 0, azonban az f függvénynek az x_0 helyen nincs inflexiós helye.

Kidolgozott feladatok

180. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^3 - 3x$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^3 - 3x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot (x^2 - 3) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$, vagy $x^2 - 3 = 0$.
Az $x^2 - 3 = 0$ egyenlet megoldása: $x = \pm\sqrt{3}$ adódik.
Tehát a függvénynek három zérushelye van: 0; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$.

c) A függvény deriváltja: $f'(x) = 3x^2 - 3$. A deriváltfüggvény zérushelyei, vagyis a $3x^2 - 3 = 0$ egyenlet megoldásai:

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		2		-2	

d) A függvény másodrendű deriváltja: $f''(x) = 6x$. Ennek zérushelye, vagyis a $6x = 0$ egyenlet megoldása: $x = 0$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét, amiből következtethetünk a függvény konvexitására:

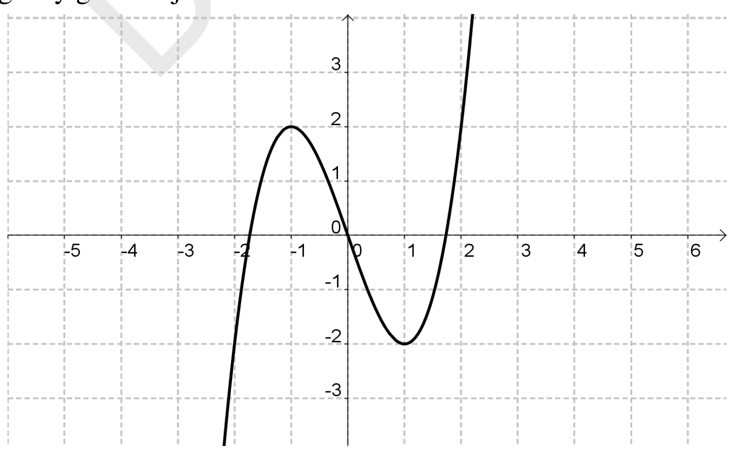
x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		0	

e) Az értelmezési tartomány határpontjai $-\infty$ és ∞.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3 - 3x) = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

h) Korlátosság: nem korlátos.

i) Paritás: páratlan, mert szimmetrikus az origóra.

j) Nincs globális szélsőértéke.

181. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^4 - 4x^3$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

<u>**Megoldás:**</u>

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^4 - 4x^3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^3 \cdot (x - 4) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, vagy $x = 4$.

c) A függvény deriváltja: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a $4x^3 - 12x^2 = 0$ egyenletet. Ebből x^2-et kiemelve

$$x^2 \cdot (4x - 12) = 0$$

adódik, ami csak úgy lehet, ha $x^2 = 0$, azaz $x = 0$, vagy $4x - 12 = 0$, amiből $4x = 12$, így $x = 3$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;3[$	3	$]3;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	nincs szélsőérték	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		0		27	

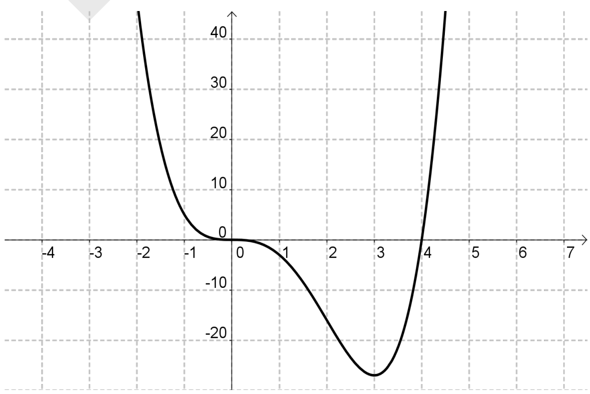
d) A függvény másodrendű deriváltja: $f''(x) = 12x^2 - 24x$. Ennek a zérushelyéhez a $12x^2 - 24x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Ha x-et kiemelünk, akkor $x \cdot (12x - 24) = 0$ adódik. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$ vagy $12x - 24 = 0$, amiből $x = 2$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;2[$	2	$]2;\infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	i.p.	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		0		-16	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^4 - 4x^3) = \infty;$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^4 - 4x^3) = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in [-27; \infty[$.

h) Korlátosság: alulról korlátos, felülről nem korlátos.

i) Paritás: nem páros és nem páratlan.

j) Minimuma van. Minimum hely: $x = 3$. Minimum érték: $y = -27$.

182. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^4 - 2x^2$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

<u>**Megoldás:**</u>

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^4 - 2x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 \cdot (x^2 - 2) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, illetve $x = \pm\sqrt{2}$.

c) A függvény deriváltja: $f'(x) = 4x^3 - 4x$. Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a $4x^3 - 4x = 0$ egyenletet. Ebből $4x$-et kiemelve

$$4x \cdot (x^2 - 1) = 0$$

adódik, ami csak úgy lehet, ha $4x = 0$, azaz $x = 0$, vagy $x^2 - 1 = 0$, amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;0[$	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.
$f(x)$		-1		0

x	$]0;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		-1	

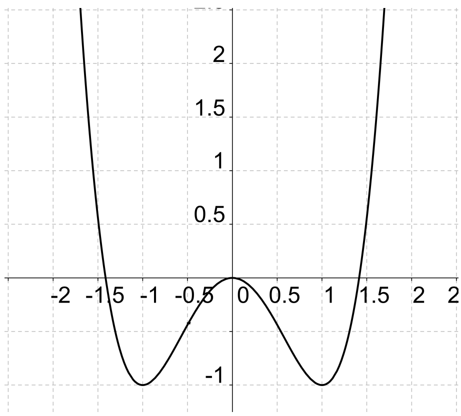
d) A függvény másodrendű deriváltja: $f''(x) = 12x^2 - 4$. Ennek a zérushelyéhez a $12x^2 - 4 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amire azt kapjuk, hogy $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét:

x	$\left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left]-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left]\frac{1}{\sqrt{3}};\infty\right[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	i.p.	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		$-\frac{5}{9}$		$-\frac{5}{9}$	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^4 - 2x^2) = \infty;$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^4 - 2x^2) = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in [-1; \infty[$.

h) Korlátosság: alulról korlátos, felülről nem korlátos.

i) Paritás: páros.

j) Minimuma van. Minimum hely: $x = -1$ és $x = 1$. Minimum érték: $y = -1$.

183. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) A zérushelyet az $x^4-5x^2+4=0$ egyenlet megoldásával kapjuk. Bevezetve a $k=x^2$ jelölést azt kapjuk, hogy

$$k^2-5k+4=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával

$$k_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}$$

adódik, így $k_1=1$, illetve $k_2=4$.

Mivel $k=x^2$, ezért az $x^2=1$ egyenletből azt kapjuk, hogy $x=\pm 1$, az $x^2=4$ egyenletből azt kapjuk, hogy $x=\pm 2$.

c) A függvény deriváltja: $f'(x)=4x^3-10x$. Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a $4x^3-10x=0$ egyenletet. Ebből $2x$-et kiemelve

$$2x\cdot(2x^2-5)=0$$

adódik, ami csak úgy lehet, ha $2x=0$, azaz $x=0$, vagy $2x^2-5=0$, amiből azt kapjuk, hogy $x=\pm\sqrt{2{,}5}$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-\sqrt{2{,}5}[$	$-\sqrt{2{,}5}$	$]-\sqrt{2{,}5};0[$	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.
$f(x)$		$-2{,}25$		$-2{,}25$

x	$]0;\sqrt{2{,}5}[$	$\sqrt{2{,}5}$	$]-\sqrt{25};\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		-1	

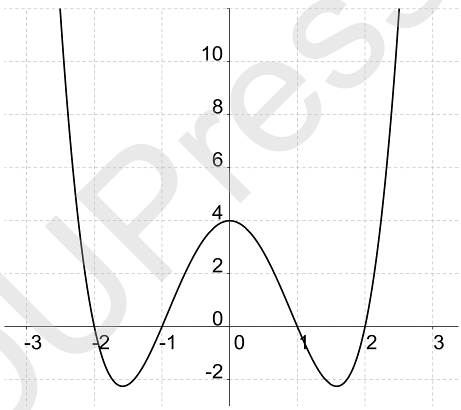
d) A függvény másodrendű deriváltja: $f''(x)=12x^2-10$. Ennek a zérushelyéhez a $12x^2-10=0$ egyenletet kell megoldanunk, amire azt kapjuk, hogy $x=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét:

x	$\left]-\infty;-\sqrt{\frac{5}{6}}\right[$	$-\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\left]-\sqrt{\frac{5}{6}};\sqrt{\frac{5}{6}}\right[$	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\left]\sqrt{\frac{5}{6}};\infty\right[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	i.p.	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		$\frac{19}{36}$		$\frac{19}{36}$	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^4-5x^2+4) = \infty;$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^4-5x^2+4) = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in [-2{,}25;\infty[$.

h) Korlátosság: alulról korlátos, felülről nem korlátos.

i) Paritás: páros.

j) Minimuma van. Minimum hely: $x = -\sqrt{2{,}5}$ és $x = \sqrt{2{,}5}$. Minimum érték: $y = -2{,}25$.

184. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \ln(1+x^2)$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!
d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!
g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!
h) Korlátos-e a függvény?
i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!
j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\ln(1 + x^2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 + x^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0.$$

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2},$$

melynek zérushelye: $x = 0$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		$\ln 1 = 0$	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}.$$

A másodrendű derivált zérushelyei:

$$\frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -2x^2 + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1.$$

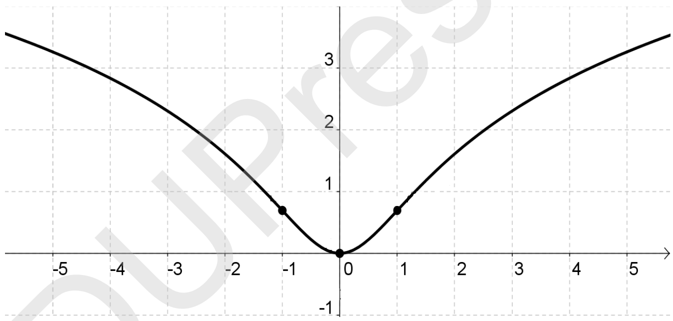
Ennek megfelelően táblázatba foglalva a másodrendű derivált előjelei:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;1[$	1	$]1;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex	i.p.	konkáv
$f(x)$		$\ln 2$		$\ln 2$	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = \infty;$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(1+x^2) = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in [0;\infty[$.

h) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos.

i) Paritás: páros, mert a grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(-x) = f(x)$.

j) Minimuma van. Minimum hely: $x = 0$. Minimum érték: $y = 0$.

185. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x \cdot \ln x$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in]0; \infty[$.

b) Zérushely: az $x \cdot \ln x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$ vagy $\ln x = 0$. Azonban $x = 0$ nem eleme az értelmezési tartománynak, így csak $\ln x = 0$ teljesülhet, amiből $x = 1$ adódik.

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Az $\ln x + 1 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Átrendezve $\ln x = -1$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $x = \mathrm{e}^{-1}$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]0; \mathrm{e}^{-1}[$	e^{-1}	$]\mathrm{e}^{-1}; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		$-\frac{1}{e}$	

d) A függvény másodrendű deriváltja: $f''(x) = \frac{1}{x}$. Mivel $x > 0$, ezért $\frac{1}{x} > 0$, így f értelmezési tartományának minden pontjában konvex.

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban: a 0 pontban a jobboldali határértéket L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk:

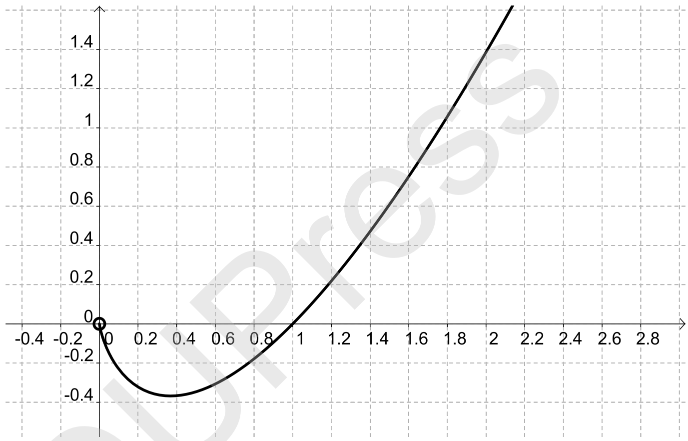
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{1}{x} \cdot \left(x^2\right) = \lim_{x\to 0+} -x = 0.$$

A ∞-beli határérték

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \ln \frac{1}{\mathrm{e}}; \infty\right[= \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty\right[$.

h) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, de felülről nem korlátos, így nem korlátos.

i) Nem páros, nem páratlan.

j) Minimuma van. Minimum hely: $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Minimum érték: $y = -\frac{1}{\mathrm{e}}$.

186. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^3 \cdot \ln x$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!
g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!
h) Korlátos-e a függvény?
i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!
j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in]0;\infty[$.

b) Zérushely: az $x^3 \cdot \ln x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$ vagy $\ln x = 0$. Azonban $x = 0$ nem eleme az értelmezési tartománynak, így csak $\ln x = 0$ teljesülhet, amiből $x = 1$ adódik.

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2 \cdot (3\ln x + 1).$$

Mivel $x \neq 0$, ezért a $3\ln x + 1 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Átrendezve $\ln x = -\frac{1}{3}$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]0;\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}[$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$	$]\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}};\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		$-\frac{1}{3e}$	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = 2x \cdot (3\ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = x \cdot (6\ln x + 5).$$

A másodrendű derivált zérushelye: $x = \mathrm{e}^{-\frac{5}{6}}$. A másodrendű derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]0;\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}}[$	$\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}}$	$]\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}};\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		$-\frac{5}{6}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban: a 0 pontban a jobboldali határértéket L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk:

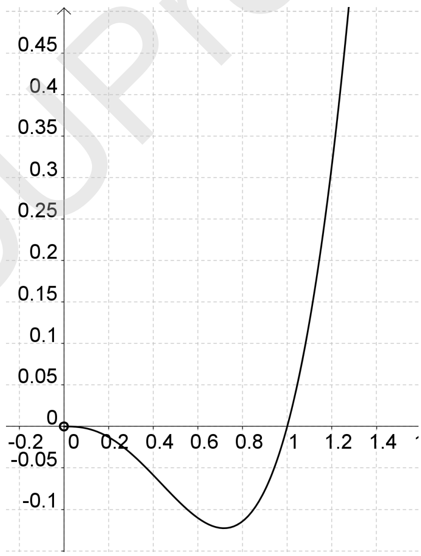
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^3\cdot\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-3}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^4}{3}\right) = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^3}{3} = 0.$$

A ∞-beli határérték

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y\in\left[-\frac{1}{3\mathrm{e}},\infty\right[$.

h) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, de felülről nem korlátos, így nem korlátos.

i) Nem páros, nem páratlan.

j) Minimuma van. Minimum hely: $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$. Minimum érték: $y = -\frac{1}{3\mathrm{e}}$.

187. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x \cdot \ln x^2$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Zérushely: az $x \cdot \ln x^2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$ vagy $\ln x^2 = 0$. Azonban $x = 0$ nem eleme az értelmezési tartománynak, így csak $\ln x^2 = 0$ teljesülhet, amiből $x^2 = 1$ adódik, tehát $x = \pm 1$.

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x^2 + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \ln x^2 + 2.$$

Az $\ln x^2 + 2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Átrendezve $\ln x^2 = -2$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $x^2 = \mathrm{e}^{-2}$, így $x = \pm \mathrm{e}^{-1}$.

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty; -\mathrm{e}^{-1}[$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$]-\mathrm{e}^{-1}; 0[$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	nincs értelmezve
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	nincs értelmezve
$f(x)$		$\frac{1}{e}$		

x	$]0; \mathrm{e}^{-1}[$	e^{-1}	$]\mathrm{e}^{-1}; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		$-\frac{2}{e}$	

d) A függvény másodrendű deriváltja: $f''(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$. Mivel $f''(x) \neq 0$, ezért f-nek nincs inflexiós pontja. Az másodrendű derivált előjelét tartalmazó táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$f''(x)$	$-$	nincs értelmezve	$+$
$f(x)$	konkáv	nincs értelmezve	konvex

e) A 0 pontban a jobb oldali határértéket L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x \cdot \ln x^2 = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x^2}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{x}}{-x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{1}{x} \cdot \left(2x^2\right) = \lim_{x\to 0+} -2x = 0.$$

A 0 pontban a bal oldali határértéket L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} x \cdot \ln x^2 = \lim_{x\to 0-} \frac{\ln x^2}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{2}{x}}{-x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0-} -\frac{1}{x} \cdot \left(2x^2\right) = \lim_{x\to 0-} -2x = 0.$$

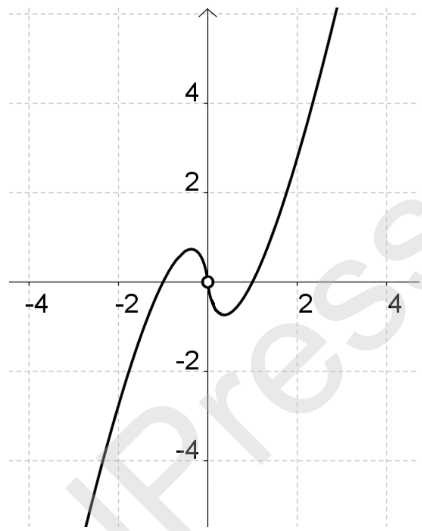
A ∞-beli határérték:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

A $infty$-beli határérték:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

h) Korlátosság: nem korlátos.

i) Páratlan.

j) Nincs szélsőérték.

188. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \ln(4 - x^2)$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!
g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!
h) Korlátos-e a függvény?
i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!
j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in]-2; 2[$.

b) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\ln(4 - x^2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4 - x^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{3}.$$

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{4 - x^2} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{4 - x^2},$$

melynek zérushelye: $x = 0$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-2;0[$	0	$]0;2[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. min.	$\searrow$
$f(x)$		$\ln 4$	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

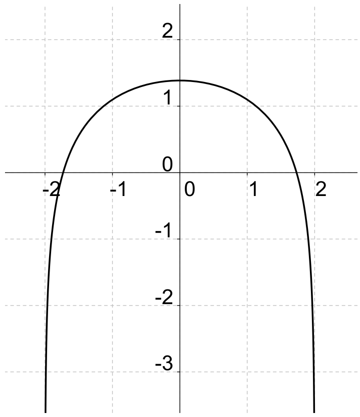
$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (4 - x^2) + 2x \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-2x^2 - 8}{(1 + x^2)^2}.$$

Mivel minden $x \in]-2; 2[$ esetén $f''(x) < 0$, ezért az f függvény értelmezési tartományának minden pontjában konkáv.

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \ln(4 - x^2) = -\infty;$$
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \ln(4 - x^2) = -\infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in]-\infty; \ln 4]$.

h) Korlátosság: a függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos, így nem korlátos.

i) Paritás: páros, mert a grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, azaz minden $x \in]-2;2[$ esetén $f(-x) = f(x)$.

j) Maximuma van. Maximum hely: $x = 0$. Maximum érték: $y = \ln 4$.

189. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \frac{x+3}{e^x}$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

<u>**Megoldás:**</u>

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\frac{x+3}{\mathrm{e}^x} = 0,$$

amiből $x = -3$ adódik.

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - (x+3)\cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^x \cdot (1 - x - 3)}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{-x-2}{\mathrm{e}^x}.$$

Ennek zérushelye, vagyis az $\frac{-x-2}{\mathrm{e}^x}$ egyenlet egyetlen megoldása: $x = -2$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;\infty]$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$f(x)$		e^2	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \frac{-1\cdot \mathrm{e}^x - (-x-2)\cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^x \cdot (-1 + x + 2)}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{x+1}{\mathrm{e}^x}.$$

Ennek egyetlen zérushelye: $x = -1$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét:

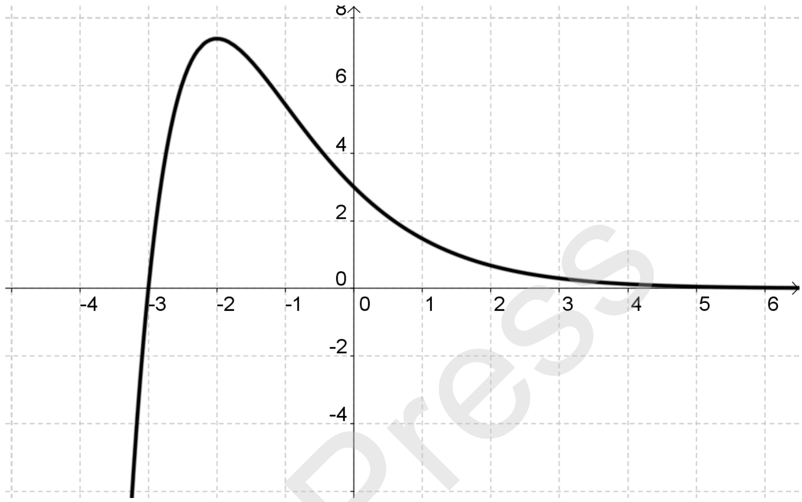
x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		2e	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\cdot(x+3) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \le \mathrm{e}^2$.

h) Korlátosság: a függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos.

i) Paritás: nem páros, nem páratlan.

j) Maximuma van. Maximum hely: $x = -2$. Maximum érték: $y = \mathrm{e}^2$.

190. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \frac{(x+3)^2}{\mathrm{e}^x}$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\frac{(x+3)^2}{\mathrm{e}^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x+3 = 0,$$

amiből $x = -3$ adódik.

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x+3) \cdot \mathrm{e}^x - (x+3)^2 \cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \\ = \frac{\mathrm{e}^x \cdot (x+3) \cdot (2-x-3)}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{(x+3) \cdot (-x-1)}{\mathrm{e}^x}.$$

A deriváltfüggvény zérushelyei, vagyis az

$$\frac{(x+3) \cdot (-x-1)}{\mathrm{e}^x} = 0$$

egyenlet egyetlen megoldásaihoz először az egyenlet mindkét oldalát szorozva a nevezővel azt kapjuk, hogy

$$(x+3) \cdot (-x-1) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője 0, így $x = -3$, illetve $x = -1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-3[$	-3	$]-3;-1[$	-1	$]-1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$f(x)$		0		$4\mathrm{e}$	

d) Mivel a deriváltfüggvény

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{\mathrm{e}^x}$$

alakban is felírható, ezért a függvény másodrendű derivált:

$$f''(x) = \frac{(-2x-4)\cdot \mathrm{e}^x - (-x^2-4x-3)\cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^x \cdot (x^2+2x-1)}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{x^2+2x-1}{\mathrm{e}^x}.$$

A másodrendű derivált zérushelye az

$$\frac{x^2+2x-1}{\mathrm{e}^x} = 0$$

egyenlet megoldása. A nevezővel szorozva $x^2 + 2x - 1 = 0$ adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

A másodrendű derivált előjeleit tartalmazó táblázat:

x	$]-\infty; -1-\sqrt{2}[$	$-1-\sqrt{2}$	$]-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	konvex	i.p.	konkáv
$f(x)$		3,84	

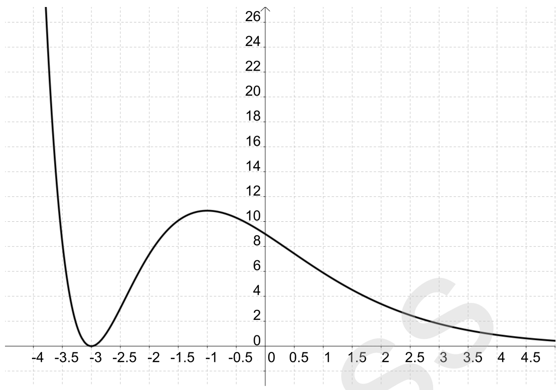
x	$-1+\sqrt{2}$	$]-1+\sqrt{2}; \infty[$
$f''(x)$	0	$+$
$f(x)$	i.p.	konvex
$f(x)$	7,7	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\cdot(x+3)^2 = -\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^2}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot(x+3)}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \geq 0$.

h) Korlátosság: a függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos.

i) Paritás: nem páros, nem páratlan.

j) Minimuma van. Minimum hely: $x = -3$. Minimum érték: $y = 0$.

191. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) Zérushelye nincs.

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-2x^2} \cdot (-4x).$$

Ennek zérushelye, vagyis az $\mathrm{e}^{-2x^2} \cdot (-4x)$ egyenlet egyetlen megoldása: $x = 0$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; \infty]$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$f(x)$		1	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-2x^2} \cdot (-4x) \cdot (-4x) + \mathrm{e}^{-2x^2} \cdot (-4) = \mathrm{e}^{-2x^2} \cdot (16x^2 - 4).$$

A másodrendű derivált zérushelyei: $x = \pm\frac{1}{2}$. A másodrendű derivált előjelei:

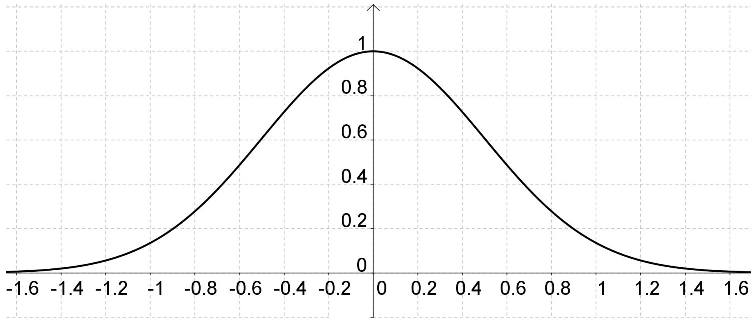
x	$\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$	$-\frac{1}{2}$	$\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$	$\frac{1}{2}$	$\left]\frac{1}{2}; \infty\right[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	i.p.	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-2x^2} = 0;$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^{-2x^2} = 0.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in]0; 1]$.

h) Korlátosság: korlátos.

i) Paritás: páros.

j) Maximuma van. Maximum hely: $x = 0$. Maximum érték: $y = 1$.

192. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \mathrm{e}^{2x^2}$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!
b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!
c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!
d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!
g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!
h) Korlátos-e a függvény?
i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!
j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) Zérushelye nincs.

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{2x^2} \cdot (4x).$$

Ennek zérushelye, vagyis az $\mathrm{e}^{2x^2} \cdot (4x)$ egyenlet egyetlen megoldása: $x = 0$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; \infty]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		1	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{2x^2} \cdot (4x) \cdot (4x) + \mathrm{e}^{2x^2} \cdot 4 = \mathrm{e}^{2x^2} \cdot (16x^2 + 4).$$

A másodrendű deriváltnek nincs zérushelyei. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

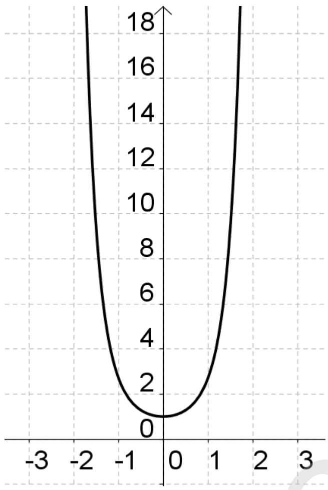
$$\mathrm{e}^{2x^2} \cdot (16x^2 + 4) > 0,$$

ezért f mindenhol konvex.

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x^2} = \infty;$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^{2x^2} = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in [1; \infty[$.

h) Korlátosság: alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos.

i) Paritás: páros.

j) Minimuma van. Minimum hely: $x = 0$. Minimum érték: $y = 1$.

193. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0.$$

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

A deriváltfüggvény zérushelyei:

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$f(x)$		$-\frac{1}{2}.$		$\frac{1}{2}$	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(-x^2+1)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$
$$= \frac{(x^2+1)(-2x^3-2x+4x^3-4x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}.$$

Mivel

$$\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3-6x=0 \quad \Rightarrow \quad 2x\cdot(x^2-3)=0,$$

ezért a másodrendű derivált zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$. Táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét:

x	$]-\infty;<-\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$]-\sqrt{3};0[$	0
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex	i.p.
$f(x)$		$\frac{-\sqrt{3}}{4}$		0

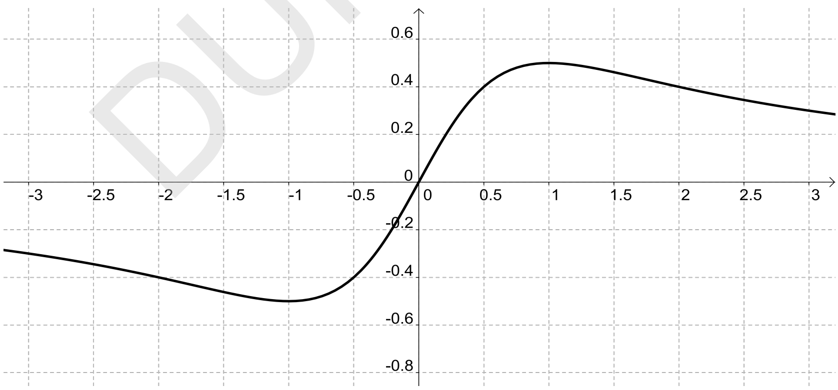
x	$]0;\sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$]\sqrt{3};\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

h) Korlátosság: korlátos.

i) Paritás: páratlan, mert szimmetrikus az origóra.

j) Minimuma és maximuma is van. Minimum hely: $x = -1$. Minimum érték: $y = -\frac{1}{2}$. Maximum hely: $x = 1$. Maximum érték: $y = \frac{1}{2}$.

194. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\frac{x^2+1}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 1 = 0,$$

így nincs zérushelye a függvénynek.

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Ennek zérushelyei, vagyis az $x^2 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai: $x = \pm 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze. (Egy függvény ott is válthat előjelet, ahol nincs értelmezve.)

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;0[$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n. é.
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	n. é.
$f(x)$		-2		n. é.

x	$]0;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		2	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$

Ennek nincs zérushelye, mert egy tört csak akkor nulla, ha a számlálója nulla, így a függvénynek nincs inflexiós pontja, továbbá a másodrendű derivált csak $x = 0$-ban válthat előjelet.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$-$	n. é.	$+$
$f(x)$	konkáv	n. é.	konvex

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

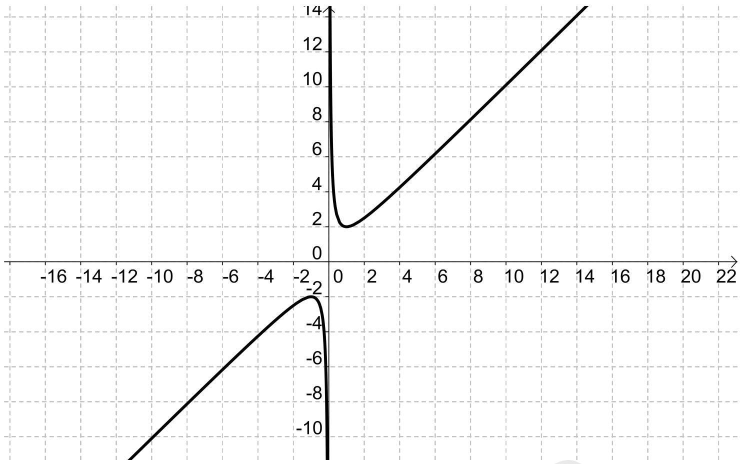
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x} = \infty.$$

$$\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-} x + \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} - n = -\infty.$$

$$\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} x + \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + n = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R} \setminus]-2; 2[$.

h) Korlátosság: a függvény felülről nem korlátos, alulról nem korlátos.

i) Paritás: páratlan.

j) Nincs globális szélsőértéke.

195. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \frac{e^x}{x}$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) A függvény értelmezési tartománya: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Zérushely nincs, mivel az e^x függvény sehol sem 0.

c) A függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \cdot x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x \cdot (x-1)}{x^2},$$

ami pontosan akkor 0, ha $x = 1$. A derivált előjeleiből készített táblázat:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	nincs értelmezve	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	nincs értelmezve	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$				e	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \frac{\left(\mathrm{e}^x \cdot (x-1) + \mathrm{e}^x\right) \cdot 2x}{x^4} = \frac{\mathrm{e}^x \cdot (x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

Ennek a függvénynek nincs zérushelye. A másodrendű derivált előjeltáblázata:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$-$	nincs értelmezve	$+$
$f(x)$	konkáv	nincs értelmezve	konvex

e) A $-\infty$-beli határérték:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = 0.$$

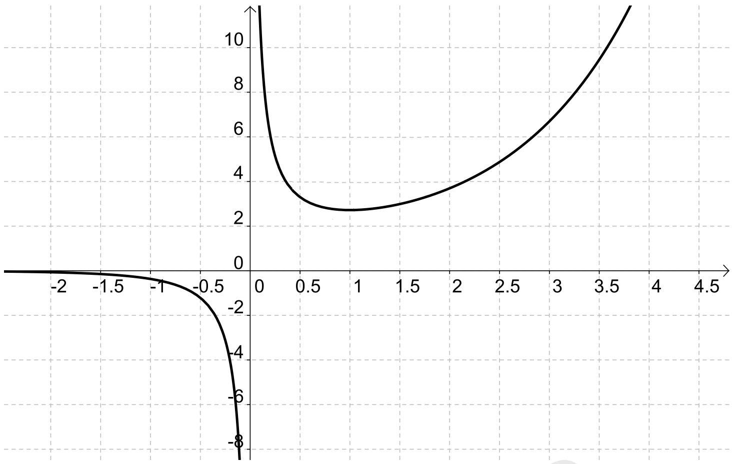
A ∞-beli határérték a L'Hospital-szabály felhasználásával:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = \infty.$$

A 0 helyen a bal oldali, illetve a jobb oldali határérték:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = -\infty; \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in]-\infty; 0[\cup [e; \infty[$.

h) Korlátosság: a függvény felülről nem korlátos, alulról nem korlátos.

i) Paritás: nem páros, nem páratlan.

j) Nincs globális szélsőértéke.

196. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$ függvényt!

a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!

b) Számoljuk ki a függvény zérushelyét!

c) Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

d) Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

e) Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

f) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

g) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

h) Korlátos-e a függvény?

i) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

j) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

<u>**Megoldás:**</u>

a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\frac{x}{4} + \frac{4}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -16,$$

így nincs zérushelye a függvénynek.

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{4} - 4 \cdot x^{-2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2}.$$

A deivált függvény zérushelyei az

$$\frac{1}{4} - \frac{4}{x^2} = 0$$

egyenlet megoldásai. A közös nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4}x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 16 = 0,$$

így $x = \pm 4$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze. (Egy függvény ott is válthat előjelet, ahol nincs értelmezve.)

x	$]-\infty;-4[$	-4	$]-4;0[$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n. é.
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	n. é.
$f(x)$		-2		n. é.

x	$]0;4[$	4	$]4;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		2	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = 16x^{-3} = \frac{16}{x^3}.$$

Ennek nincs zérushelye, mert egy tört csak akkor nulla, ha a számlálója nulla, így a függvénynek nincs inflexiós pontja, továbbá a másodrendű derivált csak $x = 0$-ban válthat előjelet.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$-$	n. é.	$+$
$f(x)$	konkáv	n. é.	konvex

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

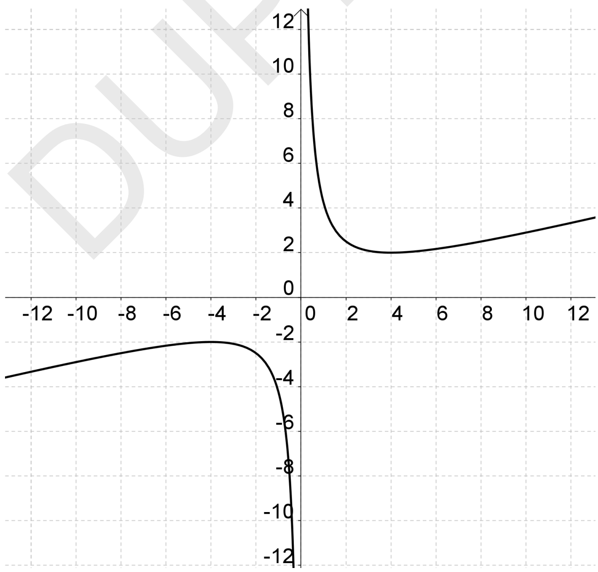
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x} = \infty.$$

$$\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-} x + \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} - n = -\infty.$$

$$\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} x + \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + n = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}\setminus]-2;2[$.

h) Korlátosság: a függvény felülről nem korlátos, alulról nem korlátos.

i) Paritás: páratlan.

j) Nincs globális szélsőértéke.

3.5. Differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata

3.5.1. Tétel. Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor ott folytonos is.

3.5.2. Megjegyzés. Az előbbi tétel megfordítása nem igaz, azaz van olyan folytonos függvény, amely nem differenciálható. Például az $f(x) = |x|$ függvény az $x_0 = 0$ helyen folytonos, de nem differenciálható.

3.5.3. Megjegyzés. Az előbbiek alapján tehát azt mondhatjuk, hogy a folytonosság szükséges, de nem elégséges feltétele a differenciálhatóságnak.

Másképpen fogalmazva: a differenciálhatóság elegendő, de nem szükséges feltétele a folytonosságnak.

Kidolgozott feladatok

197. Feladat. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény folytonos. Mutassuk meg, hogy az $x_0 = 0$ helyen mégsem differenciálható!

Megoldás:

Az f függvény differenciahányados függvénye az $x_0 = 0$ helyen:

$$d(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Mivel

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty,$$

ezért létezik ugyan a differenciahányados határértéke az $x_0 = 0$ helyen, de nem véges, így f nem differenciálható az $x_0 = 0$ helyen.

198. Feladat. Differenciálható-e az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ha } x \le 1 \\ 2x - 3, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény az $x_0 = 1$ helyen?

Megoldás:

Az f függvény bal oldali határértéke az $x_0 = 1$ helyen:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 1^2 + 1 = 2.$$

Az f függvény jobb oldali határértéke az $x_0 = 1$ helyen:

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 2 \cdot 1 - 3 = -1.$$

Mivel $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$, ezért a függvény nem folytonos az $x_0 = 1$ helyen, így ott nem is differenciálható.

199. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \le 1 \\ p \cdot x + 1 - p, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény folytonos! Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy f differenciálható legyen az $x_0 = 1$ helyen!

Megoldás:

Az f függvény bal oldali határértéke az $x_0 = 1$ helyen:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 1^2 = 1.$$

Az f függvény jobb oldali határértéke az $x_0 = 1$ helyen:

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = p \cdot 1 + 1 - p = 1,$$

továbbá $f(1) = 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1),$$

így f folytonos.

A differenciahányados függvény bal oldali határértéke az $x_0 = 0$ helyen:

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x - 1} = \\ = \lim_{x \to 1-} (x + 1) = 2.$$

A differenciahányados függvény jobb oldali határértéke az $x_0 = 0$ helyen:

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{p \cdot x + 1 - p - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{p \cdot (x - 1)}{x - 1} = p.$$

Akkor létezik a határérték, ha a bal oldali és jobb oldali határérték értéke egybeesik, így a függvény $p = 2$ esetén lesz differenciálható.

3.6. Érintési paraméterek

3.6.1. Definíció. Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor az x_0-beli *érintő egyenes*e vagy *érintő*je az

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

egyenletű egyenes.

3.6.2. Definíció. Tekintsük az $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, és az $x_0 \in I$ pontot. Az $\big(x_0; f(x_0)\big)$ ponton áthaladó, az x_0 helyhez tartozó érintő egyenesre merőleges egyenest *normális egyenes*nek nevezzük.

3.6.3. Tétel. A normális egyenes meredeksége $-\frac{1}{f'(x_0)}$ feltéve, hogy $f'(x_0) \neq 0$.

3.6.4. Következmény. Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor az x_0-beli normális egyenesének egyenlete

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

3.6.5. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt! Továbbá legyen $x_0 = 2$. Ekkor $f(x_0) = 4$, $f'(x) = 2x$, így $f'(x_0) = 4$. Ezt felhasználva az f függvény $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjára illeszkedő érintő egyenesének egyenlete:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad \Rightarrow \qquad y = 4 + 4 \cdot (x - 2),$$

azaz $y = 4x - 4$.

A normális egyenes egyenlete:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \qquad \Rightarrow \qquad y = 4 - \frac{1}{4} \cdot (x - 2),$$

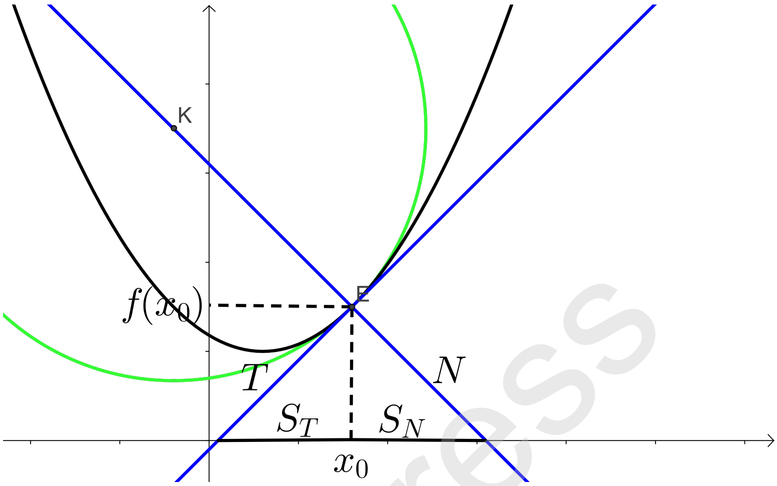
azaz $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{2}$.

3.6.6. Definíció. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in I$ helyhez tartozó

- *tangens szakasz*a a függvényhez húzott érintőnek és az x tengelynek a metszéspontjától az érintési pontig terjedő szakasza;
- *szubtangens*e az x_0-hoz tartozó tangens szakasznak az x-tengelyre eső merőleges vetülete;
- *normális szakasz*a a függvényhez húzott normális egyenesnek és az x-tengelynek a metszéspontjától az $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontig terjedő szakasza;

- *szubnormálisa* az x_0-hoz tartozó normális szakasznak az x-tengelyre eső vetülete.

A tangens szakasz, normális szakasz, szubtangens és szubnormális jelölése rendre: T, N, S_T, S_N.



3.6.7. Tétel. Tekintsük az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen $x_0 \in I$. Az f függvény x_0-beli szubtangens szakaszának hossza:

$$S_T = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right|.$$

Az f függvény x_0-beli tangens szakaszának hossza:

$$T = \left| f(x_0) \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}}{f'(x_0)} \right|.$$

Az f függvény x_0-beli szubnormális szakaszának hossza:

$$S_N = \left| f(x_0) \cdot f'(x_0) \right|.$$

Az f függvény x_0-beli normális szakaszának hossza:

$$N = \left| f(x_0) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x_0)\right)^2} \right|.$$

3.6.8. Definíció. Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, $x_0 \in I$. Ekkor az f függvény x_0-beli *görbület*e

$$g(x_0) = \frac{|f''(x_0)|}{\left(1 + \left(f'(x_0)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Az $x \mapsto g(x)$ függvényt *görbület függvény*nek is nevezzük.

3.6.9. Megjegyzés. A görbület egy függvény grafikonjának az egyenestől való eltérésének mértékét adja meg.

3.6.10. Példa. Tekintsük az $f(x) = mx + b$ egyenest, ahol m és b valós számok. Ekkor $f'(x) = m$, $f''(x) = 0$, így a görbület számlálójában szereplő mennyiség nulla, tehát a görbület nulla, vagyis az egyenes görbülete mindenhol 0.

3.6.11. Tétel. Egy kör görbülete a kör sugarának reciproka.

3.6.12. Példa. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvényt! Az f függvény deriváltja $f'(x) = 2x$, második deriváltja $f''(x) = 2$. A görbület függvény:

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4x^2)^3}}.$$

Az is látható, hogy ez az érték akkor a legnagyobb, ha a nevező a legkisebb, azaz ha $x = 0$. Ekkor $g(0) = 2$. Könnyen látható az is, hogy

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

A kapott eredmény összhangban van azzal, ami a függvény grafikonjából, vagyis a parabola alakjából is jól érzékelhető, nevezetesen, hogy az $f(x) = x^2$ parabola görbülete az origóban a legnagyobb.

3.6.13. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ és $g\colon I \to \mathbb{R}$ legalább n-szer differenciálható függvények *legalább n-edrendben érintik egymást*, ha

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0)\\ f'(x_0) &= g'(x_0)\\ f''(x_0) &= g''(x_0)\\ &\vdots\\ f^{(n)}(x_0) &= g^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

3.6.14. Definíció. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény $x_0 \in I$-beli *simulókör*én azt a kört értjük, mely legalább másodrendben érinti a függvényt az x_0-ban, azaz ha $y = g(x)$ az x_0 szóban forgó környezetében a simulókör, akkor $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0)$, azaz az x_0 helyen az f és g függvények értékei megegyeznek, az x_0 helyen közös az érintőjük, továbbá az x_0-beli görbületük is egyenlő.

3.6.15. Megjegyzés. Meg kell jegyeznünk, hogy természetesen egy kör nem írható le $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényként, azonban ez nekünk nem is szükséges, hiszen elegendő, ha az x_0 pont egy környezetében le tudjuk írni függvénnyel a simulókör egy darabját, amit viszont meg tudunk tenni.

3.6.16. Tétel. A simulókör egyenlete $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$, ahol a kör középpontjának koordinátái:

$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + \big(f'(x_0)\big)^2}{f''(x_0)}, \qquad v = f(x_0) + \frac{1 + \big(f'(x_0)\big)^2}{f''(x_0)},$$

továbbá, ahogyan azt már korábban láttuk, a sugár a görbület reciproka:

$$r = \frac{1}{g} = \frac{\Big(1 + \big(f'(x_0)\big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

Kidolgozott feladatok

200. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt és legyen $x_0 = 1$!

a) Számoljuk ki az f simulókörének középpontját és sugarát!

b) Írjuk fel az f simulókörének egyenletét az x_0 helyen!

Megoldás:

a) Az f függvény deriváltfüggvénye és másodrendű deriváltfüggvénye:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Az elsőrendű és másodrendű deriváltfüggvények helyettesítése értékei az x_0 helyen:

$$f(x_0) = 1 \qquad f'(x_0) = -1 \qquad f''(x_0) = 2.$$

A simulókör középpontjának első koordinátája:

$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}{f''(x_0)} \quad \Rightarrow \quad u = 1 + 1 \cdot \frac{1+1}{2} = 2.$$

A simulókör középpontjának második koordinátája:

$$v = f(x_0) + \frac{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}{f''(x_0)} \quad \Rightarrow \quad v = 1 + \frac{1+1}{2} = 2.$$

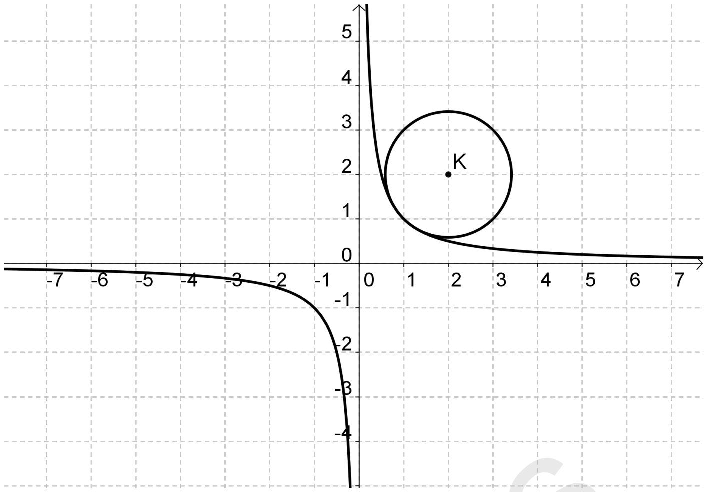
A simulókör középpontja tehát $K = (2;2)$.

A simulókör sugara:

$$r = \left| \frac{\left(1 + \left(f'(x_0)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)} \right| \quad \Rightarrow \quad r = \frac{(1+1)^{\frac{3}{2}}}{2} = \sqrt{2}.$$

b) Tehát a simulókör egyenlete:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2.$$



201. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a kör görbülete a kör sugarának reciproka!

Megoldás:

Az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ezt felhasználva a felső félkört leíró függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \le x \le r.$$

Az f függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Az f függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{r^2 - x^2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}}{r^2 - x^2} = \frac{-(r^2 - x^2) - x^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy a görbület nagysága:

$$g(x_0) = \frac{|f''(x_0)|}{\left(1 + \left(f'(x_0)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left| \frac{-r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right| = \frac{1}{r}.$$

Tehát a kör görbülete valóban a kör sugarának reciproka.

202. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ függvény $x_0 = 0$ helyhez tartozó érintő egyenesének egyenletét!

Megoldás:

Az érintő egyenes egyenlete:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Jelen esetben egyrészt $f(x_0) = f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, másrészt $f'(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot 2$, amiből $f'(x_0) = f'(0) = 2$. Az érintő egyenes egyenlete tehát:

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 0) \qquad \Rightarrow \qquad y = 2x + 1.$$

203. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $x_0 = 4$ helyhez tartozó érintő egyenesének egyenletét!

Megoldás:

Az érintő egyenes egyenlete:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Jelen esetben egyrészt $f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2$, másrészt

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}},$$

amiből $f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{4}$. A keresett egyenes egyenlete

$$y = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{4}x + 1.$$

204. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt és legyen $x_0 = 1$!

a) Írjuk fel az f függvény $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott érintő egyenesének egyenletét!
b) Írjuk fel az f függvény $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott normális egyenesének egyenletét!
c) Adjuk meg az x_0 helyhez tartozó simulókör középpontját!
d) Számoljuk ki a simulókör sugarát!
e) Írjuk fel a simulókör egyenletét!
f) Számoljuk ki a szubtangens szakasz hosszát!
g) Számoljuk ki a szubnormális szakasz hosszát!

h) Számoljuk ki a tangens szakasz hosszát!

i) Számoljuk ki a normális szakasz hosszát!

Megoldás:

a) Az f függvény deriváltja: $f'(x) = 2x$. A másodrendű derivált: $f''(x) = 2$. Kiszámolva a függvényértéket, a derivált értékét és a másodrendű derivált értékét az x_0 helyen

$$f(x_0) = f(1) = 1; \quad f'(x_0) = f'(1) = 2; \quad f''(x_0) = f''(1) = 2$$

adódik. Ebből az érintő egyenes egyenlete:

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1) \qquad \Rightarrow \qquad y = 2x - 1.$$

b) A normális egyenes egyenlete:

$$y = 1 - \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x.$$

c) A simulókör középpontjának koordinátái:

$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}{f''(x_0)}, \qquad v = f(x_0) + \frac{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}{f''(x_0)}.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$u = 1 - 2 \cdot \frac{1+4}{2} = -4, \qquad v = 1 + \frac{1+4}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

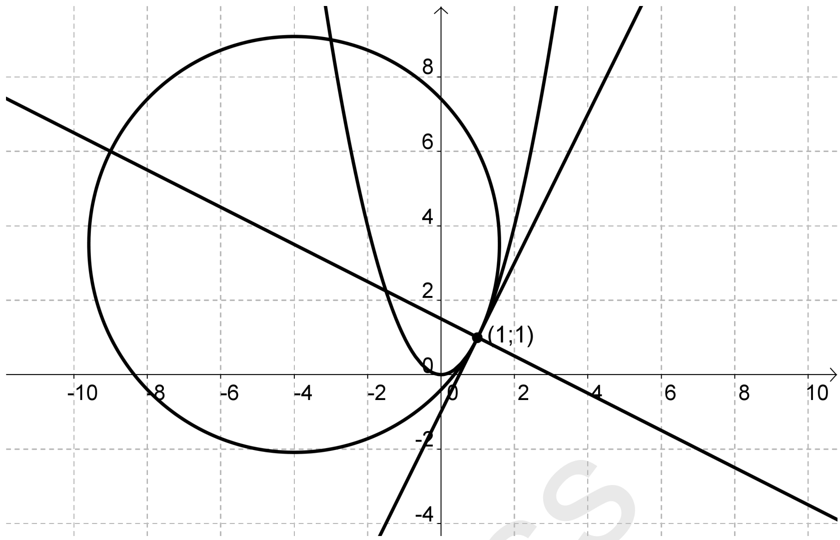
adódik.

d) A simulókör sugara:

$$r = \frac{\left(1 + \left(f'(x_0)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)} = \frac{\sqrt{125}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

e) A simulókör egyenlete tehát

$$(x + 4)^2 + (y - 3{,}5)^2 = \frac{125}{4}.$$



f) A tangens szakasz hossza:

$$T = \left| f(x_0) \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}}{f'(x_0)} \right| = \left| 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

g) A normális szakasz hossza:

$$N = \left| f(x_0) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x_0)\right)^2} \right| = \left| 1 \cdot \sqrt{5} \right| = \sqrt{5}.$$

h) A szubtangens szakasz hossza:

$$S_T = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2},$$

i) A szubnormális szakasz hossza:

$$S_N = |f(x_0) \cdot f'(x_0)| = 1 \cdot 2 = 2.$$

205. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \mathrm{e}^{2x-4}$ függvényt és legyen $x_0 = 2$!

a) Írjuk fel az f függvény $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott érintő egyenesének egyenletét!

b) Írjuk fel az f függvény $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott normális egyenesének egyenletét!

c) Adjuk meg az x_0 helyhez tartozó simulókör középpontját!

d) Számoljuk ki a simulókör sugarát!

e) Írjuk fel a simulókör egyenletét!

f) Számoljuk ki a szubtangens szakasz hosszát!

g) Számoljuk ki a szubnormális szakasz hosszát!

h) Számoljuk ki a tangens szakasz hosszát!

i) Számoljuk ki a normális szakasz hosszát!

Megoldás:

a) Az f függvény deriváltja: $f'(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{2x-4}$.
A másodrendű derivált: $f''(x) = 4 \cdot \mathrm{e}^{2x-4}$.
Kiszámolva a függvényértéket, a derivált értékét és a másodrendű derivált értékét az x_0 helyen

$$f(x_0) = f(1) = 1; \quad f'(x_0) = f'(1) = 2; \quad f''(x_0) = f''(1) = 4$$

adódik. Ebből az érintő egyenes egyenlete:

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 2) \qquad \Rightarrow \qquad y = 2x - 3.$$

b) A normális egyenes egyenlete:

$$y = 1 - \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \qquad \Rightarrow \qquad y = 2 - \frac{1}{2}x.$$

c) A simulókör középpontjának koordinátái:

$$u = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}{f''(x_0)}, \qquad v = f(x_0) + \frac{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}{f''(x_0)}.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$u = 2 - 2 \cdot \frac{1+4}{4} = -\frac{1}{2}, \qquad v = 1 + \frac{1+4}{4} = \frac{9}{4}$$

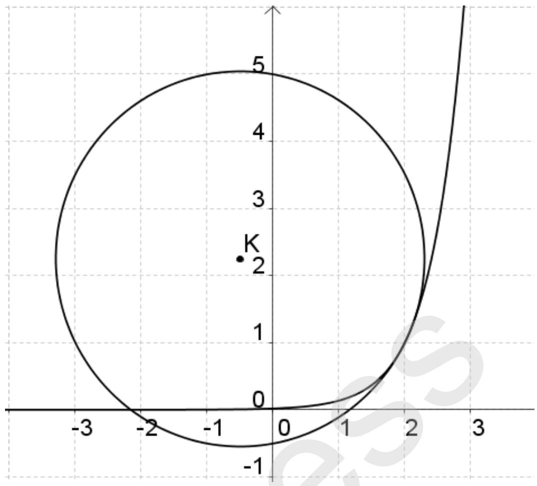
adódik.

d) A simulókör sugara:

$$r = \frac{\left(1 + \left(f'(x_0)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)} = \frac{\sqrt{125}}{4} = \frac{5\sqrt{5}}{4}.$$

e) A simulókör egyenlete tehát

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}.$$



f) A tangens szakasz hossza:

$$T=\left|f(x_0)\cdot\frac{\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}}{f'(x_0)}\right|=\left|1\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

g) A normális szakasz hossza:

$$N=\left|f(x_0)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}\right|=\left|1\cdot\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}.$$

h) A szubtangens szakasz hossza:

$$S_T=\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},$$

i) A szubnormális szakasz hossza:

$$S_N=|f(x_0)\cdot f'(x_0)|=1\cdot 2=2.$$

3.7. Taylor-polinom

3.7.1. Motiváció. Számos elméleti és gyakorlati feladat esetében előfordul, hogy bizonyos bonyolult formulával megadott függvényeket „egyszerűbbekkel” szeretnénk közelíteni. Ebben a fejezetben egy lehetséges ilyen technikát mutatunk be. A közelítés pedig az egyik legegyszerűbb függvényosztállyal, nevezetesen polinomokkal történik.

3.7.2. Definíció. Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ az $x_0 \in I$ helyen n-szer differenciálható függvény. A

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)+ \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

függvényt az f függvény x_0 helyhez tartozó (vagy x_0 körüli) n-edfokú (vagy n-edrendű) *Taylor-polinom*jának nevezzük.

3.7.3. Példa. Felírjuk fel az $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli másodrendű Taylor-polinomját!

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első és második deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 0$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k=0$	e^{3x}	1
$k=1$	$3\mathrm{e}^{3x}$	3
$k=2$	$9\mathrm{e}^{3x}$	9

Az f függvény x_0 pont körüli másodrendű Taylor-polinomja:

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$T_2(x) = 1 + 3\cdot(x-0) + \frac{9}{2}\cdot(x-0)^2$$

adódik. Elvégezve az egyszerűsítéseket azt kapjuk, hogy

$$T_2(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2.$$

3.7.4. Megjegyzés. Ha $T_n(x)$ az f függvény x_0 körüli n-edrendű Taylor-polinomja, akkor

$$T_n(x_0) = f(x_0), \qquad T_n'(x_0) = f'(x_0), \qquad \dots \qquad , T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

3.7.5. Megjegyzés. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény elsőfokú Taylor polinomja

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

ami éppen a függvény grafikonjának $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott érintő egyenest megadó függvény.

3.7.6. Tétel. (Taylor)
Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Tegyük föl, hogy létezik olyan $r > 0$ valós szám, melyre f az $]x_0 - r; x_0 + r[$ intervallumon $n+1$-szer differenciálható. Legyen $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$ tetszőleges. Ekkor létezik ξ valós szám x_0 és x között úgy, hogy

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(\xi),$$

ahol

$$R_{n+1}(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Az R_{n+1} tagot az f függvény *Lagrange-féle maradéktag*jának nevezzük.

3.7.7. Következmény. Ha az előbbi tétel feltételei mellett még az is teljesül, hogy $f^{(n+1)}$ korlátos az $]x_0 - r; x_0 + r[$ intervallumon, akkor az $f(x) - T_n(x)$ függvény n-edrendben kicsi, azaz

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

3.7.8. Tétel. Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény, továbbá $x_0, x \in I$ rögzített. Ha van olyan $K \geq 0$ valós szám, hogy minden x_0 és x közötti y-ra és minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\left| f^{(n)}(y) \right| \leq K,$$

akkor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

3.7.9. Definíció. Az előző tételben szereplő

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

végtelen sort az f függvény x_0 pont körüli *Taylor-sor*ának nevezzük. Ha speciálisan $x_0 = 0$, akkor *MacLaurin sor*ról beszélünk.

3.7.10. Példa. Legyen $f(x) = \frac{1}{1-x}$ és $x_0 = 0$, továbbá $|x| < 1$. Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4},$$

és így tovább, tehát

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \frac{n!}{|1-x|^{n+1}},$$

amiből $f^{(n)}(0) = n!$. Mivel $|x| < 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{(1-\xi)^{n+2}\cdot(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right| = 0,$$

így f Maclaurin sora:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{k!}\cdot(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}x^k = 1 + x + x^2 + \dots.$$

3.7.11. Példa. Legyen $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x_0 = 0$ és $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \qquad \Rightarrow \qquad f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Másrészt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right| = 0,$$

így f Maclaurin sora:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots.$$

Kidolgozott feladatok

206. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli ötödrendű Taylor-polinomját! Ennek segítségével számoljuk ki e közelítő értékét!

Megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első öt deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 0$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	e^{2x}	1
$k = 1$	$2\mathrm{e}^{2x}$	2
$k = 2$	$4\mathrm{e}^{2x}$	4
$k = 3$	$8\mathrm{e}^{2x}$	8
$k = 4$	$16\mathrm{e}^{2x}$	16
$k = 5$	$16\mathrm{e}^{2x}$	32

Az f függvény x_0 pont körüli negyedrendű Taylor-polinomja:

$$T_5(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{6}\cdot(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}\cdot(x - x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{120}\cdot(x - x_0)^5.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$T_5(x) = 1 + 2\cdot(x-0) + \frac{4}{2}\cdot(x-0)^2 + \frac{8}{6}\cdot(x-0)^3 + \frac{16}{24}\cdot(x-0)^4 + \frac{32}{120}\cdot(x-0)^5$$

adódik. Elvégezve az egyszerűsítéseket azt kapjuk, hogy

$$T_5(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5.$$

Az e közelítő értékét úgy kapjuk, ha az előbbi Taylor-polinom értékét kiszámoljuk az $x = \frac{1}{2}$ helyen:

$$\mathrm{e} \approx T_5\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60} \approx 2{,}7167.$$

207. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \ln 2x$ függvény $x_0 = 1/2$ pont körüli negyedrendű Taylor-polinomját! Ennek segítségével számoljuk ki $\ln 2$ közelítő értékét!

Megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első négy deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 1/2$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	$\ln 2x$	0
$k = 1$	$\frac{1}{x}$	2
$k = 2$	$-\frac{1}{x^2}$	-4
$k = 3$	$\frac{2}{x^3}$	16
$k = 4$	$-\frac{6}{x^4}$	-96

Az f függvény x_0 pont körüli negyedrendű Taylor-polinomja:

$$T_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x - x_0)^2 +$$
$$+ \frac{f'''(x_0)}{6}\cdot(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}\cdot(x - x_0)^4.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$T_4(x) = 0 + 2\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{2}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 +$$
$$+ \frac{16}{6}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{96}{24}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)^4$$

adódik. Elvégezve az egyszerűsítéseket azt kapjuk, hogy

$$T_4(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \\ + \frac{8}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^4.$$

Az $\ln 2$ közelítő értékét úgy kapjuk, ha az előbbi Taylor-polinom értékét kiszámoljuk az $x = 1$ helyen:

$$\ln 2 \approx T_3(1) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 - \\ - 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \approx 0{,}5833.$$

208. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $x_0 = 4$ pont körüli másodrendű Taylor-polinomját! Ennek segítségével számoljuk ki $\sqrt{5}$ közelítő értékét!

Megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első két deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 4$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	$\sqrt{x}$	2
$k = 1$	$\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$\frac{1}{4}$
$k = 2$	$-\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}}$	$-\frac{1}{32}$

Az f függvény x_0 pont körüli másodrendű Taylor-polinomja:

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$T_2(x) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{64} \cdot (x - 4)^2.$$

A $\sqrt{5}$ közelítő értékét úgy kapjuk, hogy az előbbi Taylor-polinom értékét kiszámoljuk az $x = 5$ helyen:

$$\sqrt{5} \approx T_2(5) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (5-4) - \frac{1}{64} \cdot (5-4)^2 =$$
$$= 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64} \approx 2{,}23.$$

209. Feladat. Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény $x_0 = 1$ pont körüli harmadrendű Taylor-polinomját! Ennek segítségével számoljuk ki $\operatorname{arctg} 0{,}9$ közelítő értékét!

Megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első három deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az $x_0 = 1$ helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k=0$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{\pi}{4}$
$k=1$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{2}$
$k=2$	$-(1+x^2)^{-2} \cdot 2x$	$-\frac{1}{2}$
$k=3$	$2 \cdot (1+x^2)^{-3} \cdot 4x^2 - (1+x^2)^{-2} \cdot 2$	$\frac{1}{2}$

Az f függvény x_0 pont körüli harmadrendű Taylor-polinomja:

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot (x - x_0)^3.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

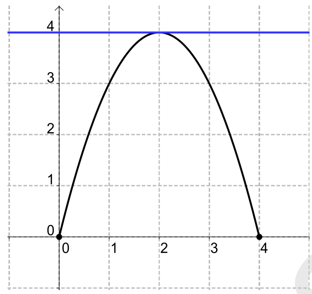
$$T_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (x-1) - \frac{1}{4} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{12} \cdot (x-1)^3 .$$

adódik. Az $\operatorname{arctg} 0{,}9$ közelítő értékét úgy kapjuk, ha az előbbi Taylor-polinom értékét kiszámoljuk az $x = 0{,}9$ helyen:

$$\operatorname{arctg} 0,9 \approx T_3(0,9) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (0,9-1) -$$
$$- \frac{1}{4} \cdot (0,9-1)^2 + \frac{1}{12} \cdot (0,9-1)^3 \approx 0{,}7374.$$

3.8. A differenciálszámítás középértéktételei

3.8.1. Tétel. (Rolle-féle középértéktétel)
Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ az $[a;b]$-on folytonos, az $]a;b[$-on differenciálható függvény, továbbá $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $c \in]a;b[$, hogy $f'(c) = 0$.



3.8.2. Megjegyzés. A Rolle–tétel geometriai tartalma: ha az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és az $]a;b[$-ra való leszűkítése differenciálható, továbbá a függvényértékek az intervallum kezdő- és végpontjában megegyeznek, akkor az $]a;b[$ intervallumnak van olyan c pontja, hogy a $\big(c; f(c)\big)$ pontba húzott érintő egyenes párhuzamos az x tengellyel (azaz a meredeksége nulla).

3.8.3. Tétel. (Cauchy-féle középértéktétel)
Ha $f, g\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ az $[a;b]$-on folytonos, az $]a;b[$-on differenciálható függvények, továbbá minden $x \in]a;b[$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor van olyan $c \in]a;b[$, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3.8.4. Tétel. (Lagrange-féle középértéktétel)
Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ az $[a;b]$-n folytonos, az $]a;b[$ intervallumon differenciálható függvény, akkor van olyan $c \in]a;b[$, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

3.8.5. Megjegyzés. A Lagrange-féle középértéktétel geometriai tartalma: ha az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és az $]a;b[$ intervallumra való leszűkítése differenciálható, akkor az $]a;b[$ intervallumnak van olyan c pontja, amelyre teljesül, hogy a $\big(c; f(c)\big)$ pontba húzott érintő egyenes párhuzamos az $\big(a; f(a)\big)$ és $\big(b; f(b)\big)$ pontokat összekötő szakasszal.

3.8.6. Megjegyzés. Ha az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ számot f átlagos megváltozásként (átlagos változási gyorsaságként) értelmezzük az $[a;b]$ intervallumon, $f'(c)$-t pedig a c-beli pillanatnyi változási gyorsaságként, akkor a középértéktétel azt mondja ki, hogy tetszőleges intervallum esetén lennie kell egy belső pontnak, amelyben a pillanatnyi változási gyorsaság egyenlő a teljes intervallumon vett átlagos változási gyorsasággal.

3.8.7. Példa. Legyen $s(t) = t^2$ egy egyenes pályán mozgó gépkocsi hely–idő függvénye a $[0;2]$ intervallumon. Ekkor az átlagsebessége $4\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$. Megmutatható, hogy a vizsgált időintervallumban van olyan időpillanat, amikor a gépkocsi sebességmérője pontosan $4\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$-ot mutat. Ez az időpillanat az $1\,[\mathrm{s}]$.

3.8.8. Következmény. (Csak a konstans függvények deriváltja nulla.)
Ha az $]a;b[$ nyílt intervallum minden x pontjában $f'(x) = 0$, akkor van olyan c valós szám, hogy $f(x) = c$ minden $x \in]a;b[$ esetén.

3.8.9. Következmény. Azok a függvények, amelyeknek a deriváltja megegyezik, csak egy konstansban térnek el egymástól. Pontosabban, ha az $]a;b[$ nyílt intervallum bármely x pontjában $f'(x) = g'(x)$, akkor létezik olyan c valós szám, hogy $f(x) = g(x) + c$ minden $x \in]a;b[$ esetén.

3.8.10. Tétel. (Darboux-féle középértéktétel)
Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor az f' deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú, azaz bármely $a, b \in I$, $a < b$ esetén ha

$$f'(a) < v < f'(b) \quad \big(\text{vagy } f'(b) < v < f'(a)\big),$$

akkor létezik olyan $u \in]a;b[$, melyre $f'(u) = v$.

Kidolgozott feladatok

210. Feladat. Határozzuk meg az $f\colon [-1;2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2$ függvény esetén azon c valós számokat, amelyekre teljesül, hogy a $\big(c; f(c)\big)$ pontba húzott érintő párhuzamos a $\big(-1; f(-1)\big)$ és $\big(2; f(2)\big)$ pontokat összekötő szelővel!

Megoldás:

A szelő meredeksége

$$m = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{8 - 8 - (-1 - 2)}{3} = 1,$$

így az érintő meredeksége is 1 kell, hogy legyen, azaz teljesülnie kell, hogy $f'(c) = 1$. Mivel $f'(c) = 3c^2 - 4c$, ezért meg kell oldanunk a

$$3c^2 - 4c = 1$$

másodfokú egyenletet, ami ekvivalens azzal, hogy $3c^2 - 4c - 1 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$c_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Mindkét érték eleme az értelmezési tartománynak, így mindkét valós szám megfelel a feladat feltételeinek.

211. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = 4x^5 + x^3 + 7x - 5$ polinom függvénynek pontosan egy valós gyöke van!

Megoldás:

Egy valós gyöke biztosan van a függvénynek, ugyanis egyrést $f(0) = -5$, másrészt $f(1) = 7$, és mivel a polinomok folytonos függvények, és a folytonos függvények bármely két függvényérték közötti közbeeső értéket is felvesznek, ezért létezik olyan a valós szám, amelyre $f(a) = 0$. (A Bolzano-tételre is hivatkozhattunk volna, ami szerint intervallumon értelmezett negatív és pozitív értékeket is felvevő, folytonos függvénynek van zérushelye.)

Ha azonban lenne egy b valós szám is, amelyre $f(b) = 0$, akkor a Rolle-féle középértéktétel miatt létezne olyan $c \in]a;b[$ valós szám, amelyre $f'(c) = 0$. Azonban

$$f'(c) = 20c^4 + 3c^2 + 7$$

ami viszont mindenütt pozitív, így sehol sem lehet nulla. Tehát a Rolle-tétel garantálja, hogy egynél több valós gyök nem lehet.

A feladat elején megmutattuk, hogy egy valós gyök azonban biztos van, így pontosan egy valós gyök van.

212. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = 2x - x^2$ függvénynek azt a pontját, amelyhez húzott érintő egyenes párhuzamos az $A(1;1)$ és a $B(3;-3)$ pontokon áthaladó szelővel!

Megoldás:

A Lagrange–féle középérték tétel garantálja, hogy létezik a megadott szelővel párhuzamos érintő egyenes. A szelő meredeksége az A és B pontokhoz tartozó differenciahányados:

$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 1}{3 - 1} = -2.$$

Mivel a keresett érintő egyenes párhuzamos a szelővel, ezért az érintő egyenes meredeksége szintén -2. Az érintő egyenes meredeksége megegyezik a függvény megfelelő helyen vett deriváltjával, azaz keressük azt az x valós számot, amelyre $f'(x) = -2$ teljesül. Mivel $f'(x) = 2 - 2x$, ezért

$$2 - 2x = -2 \qquad \Rightarrow \qquad 2x = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2.$$

Másrészt a függvényérték a 2 helyen $f(2) = 0$, így a keresett érintési pont $E(2;0)$.

3.9. Szöveges szélsőérték feladatok

3.9.1. Tétel. Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény az $x_0 \in I$ helyen és $f'(x_0) = 0$. Ekkor

- ha $f''(x_0) > 0$, akkor a függvénynek az x_0 helyen lokális minimuma van;
- ha $f''(x_0) < 0$, akkor a függvénynek az x_0 helyen lokális maximuma van.

3.9.2. Megjegyzés. Az előző tétel nem mond semmit, ha $f''(x) = 0$. Például $f(x) = x^4$ esetén $f''(x) = 12x^2$, így $f''(0) = 0$, és f-nek $x_0 = 0$-ban lokális minimuma van. Ha $f(x) = -x^4$, akkor $f''(x) = -12x^2$, így $f''(0) = 0$, és f-nek $x_0 = 0$-ban lokális maximuma van. Ha $f(x) = x^3$, akkor $f''(x) = 6x$, így $f''(0) = 0$, és f-nek $x_0 = 0$-ban nincs lokális szélsőértéke.

3.9.3. Tétel. Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható és $x_0 \in I$ olyan, hogy

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

továbbá $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, akkor

- ha n páratlan, akkor f-nek x_0-ban nincs lokális szélsőértéke;
- ha n páros és $f^{(n)}(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van;
- ha n páros és $f^{(n)}(x_0) < 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális maximuma van.

3.9.4. Megjegyzés. Tekintsük az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, és tegyük fel, hogy f leszűkítése az $]a;b[$ nyílt intervallumra akárhányszor differenciálható. Ekkor f-nek biztosan létezik maximuma és minimuma is, melyeket az alábbi módon határozhatunk meg:

1. Deriváljuk az f függvényt!
2. Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet, ezáltal meghatározva az f stacionárius helyeit!
3. Számoljuk ki a függvényértékeket a stacionárius helyeken, valamint határozzuk meg az $f(a)$ és $f(b)$ függvényértékeket! A kiszámolt értékek közül a legkisebb a függvény abszolút minimuma, a legnagyobb a függvény abszolút maximuma.

3.9.5. Példa. Adjuk meg az $f\colon [-1;4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2$ függvény globális minimumát és maximumát!

A függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 6x$. A $3x^2 - 6x = 0$ egyenlet megoldásai $x = 0$, $x = 2$.

x	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Másrészt

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 = -4 \\ f(0) &= 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0 \\ f(2) &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4 \\ f(4) &= 4^3 - 3 \cdot 4^2 = 64 - 48 = 16. \end{aligned}$$

A függvény abszolút minimum helyei: $x = -1$ és $x = 2$, a minimum érték $y = -4$. Az abszolút maximum hely $x = 4$, a maximum érték $y = 16$.

Kidolgozott feladatok

213. Feladat. Határozzuk meg az $f\colon [-1;2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így létezik minimuma és maximuma is, melyek helye az értelmezési tartomány határpontjaiban van, vagy ott, ahol a függvény deriváltja nulla. A függvény deriváltja

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x \cdot (x-4),$$

ami pontosan akkor 0, ha $x = 0$ vagy $x = 4$. Kiszámoljuk a függvényértékeket az értelmezési tartomány határpontjaiban és ott, ahol a derivált zérus:

$$f(-1) = -2 \qquad f(0) = 5 \qquad f(2) = -11.$$

(Az $x = 4$ nincs benne az f függvény értelmezési tartományában). A függvény minimum értéke tehát: -11, minimum helye: 2, maximum értéke: 5, maximum helye: 0.

214. Feladat. Határozzuk meg az $f\colon [-2;2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így létezik minimuma és maximuma is, melyek helye az értelmezési tartomány határpontjaiban van, vagy ott, ahol a függvény deriváltja nulla. A függvény deriváltja a hányados függvény deriválási szabálya alapján

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2},$$

ami pontosan akkor 0, ha $x = -1$ vagy $x = 1$. Kiszámoljuk a függvényértékeket az értelmezési tartomány határpontjaiban és ott, ahol a derivált zérus:

$$f(-1) = -2 \qquad f(1) = 2 \qquad f(-2) = -\frac{8}{5} \qquad f(2) = \frac{8}{5}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az f függvény minimum értéke: -2, minimum helye: -1, maximum értéke: 2, maximum helye: 1.

215. Feladat. Egy téglalap kerülete $100\,\mathrm{m}$. Határozzuk meg az oldalait úgy, hogy a területe maximális legyen!

Megoldás:

Legyenek a téglalap oldalai x és y. Ekkor a kerület:

$$K = 2x + 2y,$$

így jelen esetben

$$2x + 2y = 100 \qquad \Rightarrow \qquad x + y = 50 \qquad \Rightarrow \qquad y = 50 - x.$$

Ezt felhasználva a téglalap területe:

$$T = x \cdot y = (50 - x) \cdot x = 50x - x^2.$$

Ez egy x-től függő függvény, így jelöljük $T(x)$-el. Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Tehát meg kell oldanunk az $T'(x) = 0$ egyenletet:

$$T'(x) = 50 - 2x,$$

ami pontosan akkor 0, ha $x = 25$. Ekkor $y = 50 - x = 50 - 25 = 25$. A T függvény második deriváltja:

$$T''(x) = -2 < 0,$$

így lokális maximum hely van az $x = 25$ helyen. Tehát a téglalap területe akkor maximális, ha $x = 25\,\mathrm{m}$, $y = 25\,\mathrm{m}$, és ekkor a maximális terület:

$$T = x \cdot y = 25^2 = 625\,\mathrm{m}^2.$$

216. Feladat. Egy tűzfal melletti téglalap alakú kert kerülete $400\,\mathrm{m}$. Határozzuk meg a kert oldalait úgy, hogy a területe a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás:

Legyen a tűzfallal párhuzamos oldal: y; a tűzfalra merőleges oldalak: x. Ekkor a kerület: $K = 2x + y$, így jelen esetben

$$2x + y = 400 \qquad \Rightarrow \qquad y = 400 - 2x.$$

Ezt felhasználva a téglalap területe:

$$T = x \cdot y = (400 - 2x) \cdot y = 400x - 2x^2.$$

Ez egy x-től függő függvény, ezért jelöljük $T(x)$-szel. Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Tehát meg kell oldanunk az $T'(x) = 0$ egyenletet:

$$T'(x) = 400 - 4x,$$

ami pontosan akkor 0, ha $x = 100$. Ekkor $y = 400 - 2x = 400 - 200 = 200$. A T függvény második deriváltja: $T''(x) = -4 < 0$, így $x = 100$ lokális maximum hely. Tehát a téglalap területe akkor maximális, ha $x = 100\,\mathrm{m}$ és $y = 200\,\mathrm{m}$. Ekkor a maximális terület:

$$T = x \cdot y = 100 \cdot 200 = 20\,000\,\mathrm{m}^2.$$

217. Feladat. Felül nyitott négyzet alapú egyenes hasáb felszíne $75\,\mathrm{dm}^2$. Határozzuk meg az éleit úgy, hogy a térfogata a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás:

Jelöljük a hasáb alapéleit x-szel, oldaléleit y-nal. Ekkor a felszíne:

$$A = x^2 + 4xy = 75 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{75 - x^2}{4x}.$$

Ezt behelyettesítjük a térfogatba azt kapjuk, hogy

$$V = x^2 \cdot y = x^2 \cdot \frac{75 - x^2}{4x} = \frac{75x - x^3}{4},$$

amit lederiválva

$$V'(x) = \frac{75 - 3x^2}{4}$$

adódik. Ennek zérushelye $x = \pm 5$, de a geometriai tartalom miatt -5 nem megoldás, így $x = 5\,\mathrm{dm}$. Ekkor

$$y = \frac{75 - 5^2}{4 \cdot 5} = \frac{50}{20} = 2,5\,\mathrm{dm}.$$

A V függvény második deriváltja $V''(a) = -\frac{3x}{2}$, ami $x = 5$ esetén negatív, így valóban maximum van az adott helyen. Ekkor a maximális térfogat:

$$V = x^2 \cdot y = 25 \cdot 2{,}5 = 62{,}5\,\mathrm{dm}^3.$$

218. Feladat. Egy 12 centiméter oldalhosszúságú bádog lemezből nyitott tetejű dobozt kell készítenünk úgy, hogy sarkaiból négyzeteket vágunk ki, az oldalakat pedig felhajtjuk. Mekkora négyzeteket vágjunk ki a sarkokból, hogy a doboz űrtartalma a lehető legnagyobb legyen?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy a négyzet sarkaiból x centimétert vágunk le. Ekkor a kapott test térfogata

$$V(x) = (12 - 2x)^2 \cdot x = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

A V függvény értelmezési tartománya a $[0; 6]$ zárt intervallum. Szélsőérték a határpontokban lehet, vagy ott, ahol a függvény deriváltja 0. Mivel

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144,$$

ezért a $12x^2 - 96x + 144 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletet 12-vel végigosztva $x^2 - 8x + 12 = 0$ adódik. Az egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2},$$

azaz $x_1 = 6$ és $x_2 = 2$ adódik. A V függvény második deriváltja:

$$V''(x) = 24x - 96 \qquad \Rightarrow \qquad V''(2) = -48 < 0,\ V''(6) = 48 > 0.$$

Tehát az $x = 2$ helyen lokális maximum van, az $x = 6$ helyen lokális minimum van a V függvénynek. Továbbá $V(0) = 0$, $V(2) = 32 - 192 + 288 = 128$, $V(6) = 0$. Azt kaptuk tehát, hogy az $x = 2$ helyen van globális maximum hely, melynek értéke 128. Azaz ahhoz, hogy a keletkezett doboz térfogata maximális legyen, a széleitől 2 cm-re kell felhajtanunk a bádoglemezt. Ekkor a maximális térfogat $V = 128\,\mathrm{cm}^3$.

219. Feladat. Egy egyenes pálya mentén mozgó részecske helyét az

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9$$

függvény írja le, ahol az elmozdulást méterben, az eltelt időt másodpercben mérjük. Mekkora a test maximális sebességének nagysága az $[1; 10]$ intervallumban?

Megoldás:

Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát: vagy az intervallumon belsejében lokális szélsőérték formájában, vagy az intervallum határán. A sebesség-idő függvényt a hely-idő függvény deriváltja adja meg:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t.$$

Lokális szélsőérték ott lehet, ahol az első derivált értéke 0.

A $v(t)$ függvény deriváltja $v'(t) = 6t - 12$, ami pontosan akkor 0, ha $t = 2$.

Mivel $v''(t) = 6 > 0$, ezért v-nek a $t = 0$ helyen lokális minimuma van. Mivel azonban a kérdés a sebesség nagyságára vonatkozott, ezért

$$|v(2)| = |3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2| = 12.$$

Tehát az intervallum belsejében a sebesség maximális nagysága 12.

A függvényértékek az intervallum határain:

$$|v(1)| = |3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1| = 9 \quad \text{és} \quad |v(10)| = |3 \cdot 10^2 - 12 \cdot 10| = 180,$$

így a megadott intervallumon a legnagyobb sebesség 180.

220. Feladat. A P pont koordinátái $P(1 + x; 3 + 2x; 1 - x)$. Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy a P pont a lehető legközelebb legyen az origóhoz!

Megoldás:

A P pontnak az origótól való távolsága:

$$d(x) = \sqrt{(1 + x)^2 + (3 + 2x)^2 + (1 - x)^2}.$$

Végezzük el a zárójelek felbontását, majd az összevonásokat:

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{1 + 2x + x^2 + 9 + 12x + 4x^2 + 1 - 2x + x^2} = \\ &= \sqrt{6x^2 + 12x + 11}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a d függvény deriváltja

$$d'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{6x^2 + 12x + 11}} \cdot (12x + 12) = \frac{6x + 6}{\sqrt{6x^2 + 12x + 11}},$$

melynek zérushelye: $x = -1$.

x	$x < -1$	$x = -1$	$x > -1$
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Tehát $x = -1$-nél lokális minimum hely van. Mivel $x = -1$ az egyetlen lokális szélsőérték hely, így az egyben globális minimum hely is. A minimum érték, azaz a P pontnak az origótól való lehető legkisebb távolsága: $d(-1) = \sqrt{5}$ egység.

221. Feladat. Egy bizonyos nyugtatószer esetén a

$$C(t) = \frac{2t}{3 + t^2} \quad (t \geq 0)$$

függvénnyel jól modellezhető a véráramban lévő koncentráció, ahol t az injekció beadásától eltelt idő percben mérve, a $C(t)$ koncentrációt pedig $\mathrm{mg/l}$-ben értjük. Határozzuk meg azt az időpillanatot, amikor a legnagyobb koncentrációban van jelen a nyugtatószer a véráramban!

Megoldás:

A C függvény deriváltja:

$$C'(t) = \frac{2(3+t^2) - 2t \cdot 2t}{(3+t^2)^2} = \frac{-2t^2+6}{(3+t^2)^2}.$$

Ennek zérushelyei $t = \pm\sqrt{3}$. Mivel t az időt jelöli, ezért $t > 0$ miatt $t = \sqrt{3}$ a megoldás.

Látható, hogy $\sqrt{3}$-ban a derivált előjele negatívból pozitívba vált, így ott valóban maximum van. A maximális koncentráció

$$C(\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3+3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}.$$

222. Feladat. Határozzuk meg az

$$x^2 + (p+2) \cdot x + 4p - 2 = 0$$

másodfokú egyenletben szereplő p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege minimális legyen!

Megoldás:

A gyökök összegére és szorzatára vonatkozó Viéte–formulák alapján

$$x_1 + x_2 = -(p+2) \qquad x_1 \cdot x_2 = 4p - 2.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1+x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = \big(-(p+2)\big)^2 - 2 \cdot (4p-2) = \\ &= p^2 + 4p + 4 - 8p + 4 = p^2 - 4p + 8. \end{aligned}$$

A feladatunk az $f(p) = p^2 - 4p + 8$ függvény minimumának megkeresése.

A függvény deriváltja $f'(p) = 2p - 4$, amelynek az egyetlen zérushelye: $p = 2$.

Mivel $f''(p) > 0$, ezért a függvény minden p valós szám esetén konvex, így a $p = 2$ helyen valóban globális minimuma van.

223. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény azon pontját, amelyben a függvény görbületének értéke maximális!

Megoldás:

Mivel $f'(x) = \mathrm{e}^x$ és $f''(x) = \mathrm{e}^x$, ezért a görbületi függvény

$$g(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+[f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{x2}})^3}} = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{(1+\mathrm{e}^{2x})^3}}.$$

Ennek a függvénynek keressük a szélsőértékét, amihez először meghatározzuk a függvény deriváltját. Egyszerűbb azonban a $g^2(x)$ függvénynek a deriváltját meghatározni, ugyanis egyszerűen átgondolható, hogy szélsőérték helye ugyanott lesz a $g(x)$-nek, ahol a $g^2(x)$-nek. Legyen $h(x) = g^2(x)$. Ekkor

$$h'(x) = \frac{2 \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot (1+\mathrm{e}^{2x})^3 - \mathrm{e}^{2x} \cdot 3 \cdot (1+\mathrm{e}^{2x})^2 \cdot 2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^{2x})^6}.$$

Az összevonások és lehetséges egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy

$$h'(x) = -2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x} \cdot \left(-1 + 2\,\mathrm{e}^{2x}\right)}{(1+\mathrm{e}^{2x})^4}.$$

Ennek a függvénynek a zérushelyét a $2\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0$ egyenlet megoldása adja:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{e}^{2x} - 1 &= 0 \\ \mathrm{e}^{2x} &= \frac{1}{2} \\ 2x &= \ln\frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

A derivált függvény előjelét tartalmazó táblázat:

	$x < -\frac{1}{2}\ln 2$	$x = -\frac{1}{2}\ln 2$	$x > -\frac{1}{2}\ln 2$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Azt kaptuk tehát, hogy az

$$x = -\frac{1}{2}\ln 2 = -\ln\sqrt{2} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

helyen lesz maximális az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény görbülete.

3.10. Implicit függvények deriválása

3.10.1. Megjegyzés. Ezen jegyzet korábbi fejezeteiben olyan függvények deriváltjait határoztuk meg, ahol a függvény $y = f(x)$ módon, úgynevezett „*explicite*” alakban volt megadva.

Bizonyos esetekben előfordul, hogy az x és y között olyan összefüggést ismerünk, melyből y explicite nincs kifejezve. Ilyenkor akkor azt mondjuk, hogy „*implicite*” van megadva az y.

Ilyen esetekben is előfordulhat, hogy ki tudjuk fejezni az y-t az x segítségével és így explicit alakot kapunk, azonban olyan esetek is vannak, amikor erre nincs lehetőség.

3.10.2. Definíció. Ha van olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $\big(x, f(x)\big) \in \mathcal{D}_F$ és

$$F\big(x, f(x)\big) = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az $F(x, y) = 0$ egyenlőség egy *implicit egyenlet*et definiál. Az f függvényt az $F(x, y) = 0$ egyenlet által definiált *implicit függvény*nek nevezzük.

3.10.3. Példa. A következőkben példát adunk olyan implicit egyenletre, amely explicitté alakítható és olyanra is, amely nem alakítható hát explicit egyenletté.

(1) Az $y(x) - x^3 = 0$ egyenlet egy implicit egyenlet az y-ra. Ebből azonban könnyen kifejezhetjük az y-t és az $y(x) = x^3$ egyenlethez jutunk, azaz explicit alakot nyerünk, így valójában az $f(x) = x^3$ függvényhez jutottunk.

(2) Az $x^2 + y^2(x) - 49 = 0$ egyenlet szintén implicit egyenlet. Az y-t itt is ki tudjuk fejezni az x segítségével, azonban ekkor két megoldást kapunk:

$$y_1(x) = \sqrt{49 - x^2} \qquad y_2(x) = -\sqrt{49 - x^2}.$$

Egyetlen függvény grafikonjaként nem áll elő a megadott implicit egyenletben szereplő grafikon.

(3) Az $y^2(x) - x + \sin\big(xy(x)\big) = 0$ egyenlet olyan implicit egyenlet, amelyből már ki sem fejezhető az y az x segítségével.

3.10.4. Eljárás. Implicit függvények deriválása:

1. Az implicit egyenlet mindkét oldalát deriváljuk x szerint úgy, hogy y-t az x (differenciálható) függvényeként tekintjük.
2. Rendezzük az egyenletet úgy, hogy az $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ kifejezést tartalmazó tagok egy oldalra kerüljenek.

3. Oldjuk meg a kapott egyenletet $y'(x)$-re!

3.10.5. Példa. Meghatározzuk az $x^2 + y^2(x) = 5$ implicit függvény esetén az y' függvényt!

Az y-t egy x-től függő függvénynek tekintjük. Deriválva az egyenlet mindkét oldalát

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$$

adódik. Kifejezve az egyenletből y'-t azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = -\frac{2x}{2y(x)} \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

Kidolgozott feladatok

224. Feladat. Határozzuk meg az $x^2 + y^2(x) = 1$ implicit függvény esetén az y' függvényt!

Megoldás:

Az y-t egy x-től függő függvénynek tekintjük. Deriválva az egyenlet mindkét oldalát

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$$

adódik. Kifejezve az egyenletből y'-t azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = -\frac{2x}{2y(x)} \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

225. Feladat. Határozzuk meg az $x^3 + y^3(x) - 9x \cdot y(x) = 0$ implicit függvény esetén y'-t!

Megoldás:

Differenciálva a megadott egyenlet mindkét oldalát

$$3x^2 + 3y^2(x) \cdot y'(x) - 9 \cdot \big(y(x) + xy'(x)\big) = 0$$

adódik. Az egyenletet úgy rendezzük, hogy bal oldalon szerepeljenek azok a tagok, amelyek tartalmazzák az y'-t, jobb oldalon pedig azok, amelyek nem tartalmazzák azt. Ezt követően kifejezzük az egyenletből y'-t:

$$y' \cdot \big(3y^2(x) - 9x\big) = 9y(x) - 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = \frac{3y(x) - x^2}{y^2(x) - 3x}.$$

226. Feladat. Határozzuk meg az

$$x^2 + 2y^2(x) - 2x + 16y(x) + 13 = 0$$

implicit egyenlet azon $(x; y)$ pontjait, amelyekbe húzott érintő egyenes párhuzamos az x tengellyel!

Megoldás:

Az egyenlet mindkét oldalát deriválva azt kapjuk, hogy

$$2x + 4y(x) \cdot y'(x) - 2 + 16y'(x) = 0.$$

Ha rendezzük az egyenletet úgy, hogy az y' kifejezést tartalmazó tagok egy oldalon szerepeljenek, míg azok a tagok, amik nem tartalmazzák az y'-t, a másik oldalon, akkor

$$4y(x) \cdot y'(x) + 16y'(x) = 2 - 2x$$

adódik. Kiemelve az y'-t azt kapjuk, hogy

$$y'(x) \cdot \big(4y(x) + 16\big) = 2 - 2x,$$

így

$$y'(x) = \frac{2 - 2x}{4y(x) + 16}.$$

Azokat a pontokat keressük, amelyekben az érintő párhuzamos az x tengellyel, azaz azokat a pontokat, ahol az érintő meredeksége (vagyis y') zérus:

$$\frac{2 - 2x}{4y(x) + 16} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1.$$

Ha $x = 1$, akkor ezt az eredeti egyenletbe behelyettesítve

$$1^2 + 2y^2(1) - 2 \cdot 1 + 16y(1) + 13 = 0$$

adódik. Elvégezve az összevonást a

$$2y^2(1) + 16y(1) + 12 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^2(1) + 8y(1) + 6 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 6 \cdot 4}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{2} = -4 \pm \sqrt{10},$$

azaz $y_1(1) = -4 + \sqrt{10}$, illetve $y_2(1) = -4 - \sqrt{10}$. Tehát a keresett pontok:

$$P_1 = \big(1; -4 + \sqrt{10}\big) \quad P_2 = \big(1; -4 - \sqrt{10}\big).$$

227. Feladat. Határozzuk meg az $x + y^2(x) = 10$ implicit egyenlettel definiált függvény másodrendű deriváltját az $(1; 3)$ pontban!

Megoldás:

Az egyenlet mindkét oldalát deriválva

$$1 + 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = -\frac{1}{2y(x)}$$

adódik. Ismét deriválva a kapott egyenlet mindkét oldalát azt kapjuk, hogy

$$2y'(x) \cdot y'(x) + 2y(x) \cdot y''(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y''(x) = -\frac{(y'(x))^2}{y(x)}$$

Behelyettesítve az y'-re kapott kifejezést azt kapjuk, hogy

$$y''(x) = -\frac{\big(y'(x)\big)^2}{y} = -\frac{1}{4y^3(x)},$$

így a másodrendű derivált értéke az $(1;2)$ pontban:

$$y''(1) = -\frac{1}{4 \cdot 27} = -\frac{1}{108}.$$

228. Feladat. Határozzuk meg az $x^2 + y^2(x) - 6x - 8y(x) = 0$ implicit függvény azon pontjait, ahol a függvény érintő egyenesének meredeksége 0!

Megoldás:

Deriválva az egyenlet mindkét oldalát azt kapjuk, hogy

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) - 6 - 8y'(x) = 0.$$

Ha a bal oldalon csak az $y'(x)$-t tartalmazó tagokat hagyjuk és kiemelünk y'-t, akkor

$$y'(x) \cdot \big(2y(x) - 8\big) = -2x + 6 \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = \frac{6 - 2x}{2y(x) - 8}$$

adódik, ami pontosan akkor zérus, ha $x = 3$. Ekkor az eredeti implicit egyenletből azt kapjuk, hogy

$$9 + y^2(x) - 18 - 8y(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^2(x) - 8y(x) - 9 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával

$$y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2},$$

azaz $y = -1$, illetve $y = 9$. A keresett pontok tehát $(3;-1)$, illetve $(3;9)$.

229. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^x$ függvényt!

Megoldás:

Az $f(x) = x^x$ egyenlet mindkét oldalának a logaritmusát véve azt kapjuk, hogy

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln x^x,$$

amiből
$$\ln\big(f(x)\big) = x \cdot \ln x$$
következik. Mindkét oldalt deriválva
$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln x + 1$$
adódik, így
$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

230. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = x^{\sin x}$ függvényt!

Megoldás:

Az $f(x) = x^{\sin x}$ egyenlet mindkét oldalának a logaritmusát véve azt kapjuk, hogy
$$\ln\big(f(x)\big) = \ln x^{\sin x},$$
amiből
$$\ln\big(f(x)\big) = \sin x \cdot \ln x$$
következik. Mindkét oldalt deriválva az x változó szerint azt kapjuk, hogy
$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x},$$
így
$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

231. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = (\sin x)^x$ függvényt!

Megoldás:

Az $f(x) = (\sin x)^x$ egyenlet mindkét oldalának a logaritmusát véve
$$\ln\big(f(x)\big) = \ln(\sin x)^x$$
adódik, amiből
$$\ln\big(f(x)\big) = x \cdot \ln(\sin x).$$
következik. Mindkét oldalt deriválva azt kapjuk, hogy
$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln(\sin x) + x \operatorname{ctg} x,$$
így
$$f'(x) = f(x) \cdot \big(\ln(\sin x) + x \cdot \operatorname{ctg} x\big) = (\sin x)^x \cdot \big(\ln(\sin x) + x \cdot \operatorname{ctg} x\big).$$

232. Feladat. Deriváljuk az $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ függvényt!

Megoldás:

Az $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ egyenlet mindkét oldalának a logaritmusát véve

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln(\sin x)^{\cos x}$$

adódik, amiből

$$\ln\big(f(x)\big) = \cos x \cdot \ln(\sin x).$$

következik. Mindkét oldalt deriválva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = -\sin x \cdot \ln(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x,$$

így

$$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot (-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \operatorname{ctg} x)\,.$$

233. Feladat. Tekintsük az $y^2(x) - x^2 = \sin\big(x \cdot y(x)\big) + 1$ implicit egyenletet!

a) Adjuk meg az y függvény érintő egyenesének meredekségét a $(0;1)$ pontban!

b) Írjuk fel a $(0;1)$ pontbeli érintő egyenes egyenletét!

Megoldás:

a) Differenciálva a megadott implicit egyenlet mindkét oldalát

$$2y(x) \cdot y'(x) - 2x = \cos\big(x \cdot y(x)\big) \cdot \big(y(x) + x \cdot y'(x)\big)$$

adódik. Felbontva a zárójelet azt kapjuk, hogy

$$2y(x) \cdot y'(x) - 2x = y(x) \cdot \cos\big(x \cdot y(x)\big) + x \cdot y'(x) \cdot \cos\big(x \cdot y(x)\big).$$

Az y' tagot tartalmazó kifejezéseket egy oldalra rendezve

$$2y(x) \cdot y'(x) - x \cdot y'(x) \cdot \cos\big(x \cdot y(x)\big) = y(x) \cdot \cos\big(x \cdot y(x)\big) + 2x$$

adódik. A bal oldalon y'-t kiemelve azt kapjuk, hogy

$$y'(x) \cdot \Big(2y(x) - x \cdot \cos\big(x \cdot y(x)\big)\Big) = y(x) \cdot \cos\big(x \cdot y(x)\big) + 2x.$$

A kapott egyenletből kifejezve y'-t

$$y'(x) = \frac{y(x) \cdot \cos\big(x \cdot y(x)\big) + 2x}{2y(x) - x \cdot \cos\big(x \cdot y(x)\big)}$$

adódik. Behelyettesítve a $(0;1)$ koordinátájú pontot azt kapjuk, hogy az érintő egyenes meredeksége:

$$m = y'(1) = \frac{1 \cdot \cos 0 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}.$$

b) Az érintő egyenes egyenlete:

$$y = 1 + \frac{1}{2} \cdot (x - 0) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{2}x + 1.$$

4. fejezet

Primitív függvény keresési módszerek

4.1. Alapintegrálok

4.1.1. Megjegyzés. Ebben a szakaszban, ha mást nem mondunk, akkor I a valós számok halmazának egy pozitív hosszúságú részintervallumát jelöli.

4.1.2. Definíció. Ha az $F\colon I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy F az f függvény *primitív függvény*e.

4.1.3. Megjegyzés. Ha F primitív függvénye az f függvénynek, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $F + c$ is primitív függvénye az f függvénynek. Tehát, ha egy függvénynek van primitív függvénye, akkor végtelen sok van, melyek csak egy (additív) konstansban térnek el egymástól.

4.1.4. Példa. Az $f(x) = 3x^2$ függvénynek $F_1(x) = x^3$ és $F_2(x) = x^3 + 2$ is primitív függvénye, mert $(x^3)' = 3x^2$ és $(x^3 + 2)' = 3x^2$.

4.1.5. Definíció. Az f függvény összes primitív függvényének halmazát az f függvény *határozatlan integrálján*ak nevezzük. Jele: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

4.1.6. Példa. Az $f(x) = 3x^2$ függvény határozatlan integrálja

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

4.1.7. Tétel. A primitív függvény additív tulajodnságú, azaz ha $f\colon I \to \mathbb{R}$ és $g\colon I \to \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyeknek létezik primitív függvénye, akkor az $f + g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

4.1.8. Példa. Az $f(x) = 4x^3 + 3x^2$ függvény primitív függvényei

$$\int 4x^3 + 3x^2\,\mathrm{d}x = \int 4x^3\,\mathrm{d}x + \int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^4 + x^3 + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

4.1.9. Tétel. A primitív függvény homogén tulajdonságú, azaz ha $f\colon I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor a $\lambda \cdot f$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A következőkben $r \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ és $a > 0$! Az alábbi táblázatban megadjuk az elemi függvények alapintegráljait:

$f(x)$	D_f	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
α	$\mathbb{R}$	$\alpha \cdot x + c$
1	$\mathbb{R}$	$x + c$
x^r	$]0;\infty[$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\operatorname{tg} x + c$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\operatorname{ctg} x + c$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathrm{e}^x + c$
a^x	$\mathbb{R}$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\frac{1}{x}$	$]0;\infty[$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$]0;\infty[$	$\log_a x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	$\arcsin x + c$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	$\arccos x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} x + c$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x + c$

$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x + c$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{th} x + c$
$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{cth} x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arsh} x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$[1; \infty[$	$\operatorname{arch} x + c$
$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1; 1[$	$\operatorname{arth} x + c$
$-\frac{1}{1-x^2}$	$]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$	$\operatorname{arcth} x$

A fenti táblázatokban $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Kidolgozott feladatok

234. Feladat. Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int 2\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int 4x+2\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int 3x^2+6x-8\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int 3^x+4^x\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

n) $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x-2}\,\mathrm{d}x$

o) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+4}{x+2}\,\mathrm{d}x$

p) $\displaystyle\int \frac{x^2-6x+9}{x-3}\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Azokat a függvényeket keressük, amelyek deriváltja 2, így

$$\int 2\,\mathrm{d}x = 2x + c.$$

b) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int 4x+2\,\mathrm{d}x = 4\cdot\int x\,\mathrm{d}x + \int 2\,\mathrm{d}x = \frac{4x^2}{2} + 2x + c = 2x^2 + 2x + c.$$

c) Az integrál additív és homogén tulajdonságát használva

$$\int 3x^2+6x-8\,\mathrm{d}x = 3\cdot\int x^2\,\mathrm{d}x + 6\cdot\int x\,\mathrm{d}x - \int 8\,\mathrm{d}x =$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{2} - 8x + c = x^3 + 3x^2 - 8x + c$$

adódik.

d) Felhasználva az
$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$
azonosságot azt kapjuk, hogy
$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c.$$

e) Felhasználva az
$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$
azonosságot azt kapjuk, hogy
$$\int \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int 2 \cdot x^{-3}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{x^2} + c.$$

f) Felhasználva a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ azonosságot, azt kapjuk, hogy
$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + c.$$

g) Felhasználva a $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ azonosságot, azt kapjuk, hogy
$$\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + c.$$

h) A törtet két tört összegére bontva, majd az integrál additív tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy
$$\int \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x + \ln|x| + c.$$

i) A törtet két tört összegére bontva, majd az integrál additív tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy
$$\int \frac{x^2+x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = \int x + 1\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + c.$$

j) Felhasználva a hatványozás azonosságait, a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ azonosságot, továbbá a törtet két tört összegére bontva, majd az integrál additív tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^2+x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+x}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^5} + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3} + c.$$

k) Felhasználva, hogy $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ és $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, valamint a hatványozás azonosságainak alkalmazásával és az integrál additív tulajdonságának felhasználásával

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{3}} + x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{2}{3}} - 2\cdot x^{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

adódik.

l) Az integrál additív tulajdonsága miatt azt kapjuk, hogy

$$\int 3^x + 4^x\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{4^x}{\ln 4} + c.$$

m) A számlálóhoz 1-et hozzáadva és kivonva, majd az integrál additív tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x - \operatorname{arctg} x + c.$$

n) Felhasználva az $x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)$ azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^2-4}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int x+2\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

adódik.

o) Felhasználva az $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^2+4x+4}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x+2)^2}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int x+2\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

adódik.

p) Felhasználva az $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$) azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x-3)^2}{x-3}\,\mathrm{d}x = \int x - 3\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 3x + c$$

adódik.

A fentiekben $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

235. Feladat. Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int 2 \cdot \cos x + 3 \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2 x + 1\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\, x + 1\,\mathrm{d}x$

<u>**Megoldás:**</u>

a) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{tg}\, x - 2 \cdot \mathrm{ctg}\, x + c.$$

b) Felhasználva, hogy $\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, továbbá az integrál additív tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = $$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - x + c.$$

c) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva

$$\int 2 \cdot \cos x + 3 \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \sin x - 3 \cdot \cos x + c$$

adódik.

d) Felhasználva, hogy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{(\cos x - \sin x)\cdot(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \cos x - \sin x\,\mathrm{d}x = \sin x + \cos x + c.\end{aligned}$$

e) Felhasználva, hogy $\mathrm{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, majd a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ azonosságot alkalmazva

$$\begin{aligned}\int \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1\,\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg} x - x + c\end{aligned}$$

adódik.

f) Felhasználva, hogy $\mathrm{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, majd a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ azonosságot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \mathrm{ctg}^2 x + 1\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} + 1\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 + 1\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg} x + c.\end{aligned}$$

g) Felhasználva, hogy $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int 2\sin x\,\mathrm{d}x = \\ &= -2\cos x + c.\end{aligned}$$

h) Felhasználva, hogy $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int 2\cos x\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\sin x + c.\end{aligned}$$

i) Felhasználva, hogy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, majd a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\int \operatorname{tg}^2 x + 1 \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \\ = \int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c.$$

A fentiekben $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

236. Feladat. Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\int 3^x + 6^x \,\mathrm{d}x$

b) $\int 4x^3 + \cos x + \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{2^{2x} - 4}{2^x - 2} \,\mathrm{d}x$

d) $\int \left(2^x + 3\right)^2 \mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Az integrál additív tulajdonsága miatt

$$\int 3^x + 6^x \,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 6} + c.$$

b) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int 4x^3 + \cos x + \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^4 + \sin x + \mathrm{e}^x + c.$$

c) Mivel

$$2^{2x} - 4 = (2^x)^2 - 2^2 = (2^x - 2) \cdot (2^x + 2),$$

ezért

$$\int \frac{2^{2x} - 4}{2^x - 2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{(2^x - 2) \cdot (2^x + 2)}{2^x - 2} \,\mathrm{d}x = \int 2^x + 2 \,\mathrm{d}x = \\ = \frac{2^x}{\ln 2} + 2x + c.$$

d) Mivel

$$\left(2^x + 3\right)^2 = 2^{2x} + 6 \cdot 2^x + 9 = 4^x + 6 \cdot 2^x + 9,$$

ezért

$$\int \left(2^x + 3\right)^2 \mathrm{d}x = \int 4^x + 6 \cdot 2^x + 9 \,\mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4} + 6 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + 9x + c.$$

A fentiekben $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

237. Feladat. Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \operatorname{th}^2 x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int 7\cdot\operatorname{ch} x + 8\cdot\operatorname{sh}, x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \operatorname{cth}^2 x\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\operatorname{th} x - 3\cdot\operatorname{cth} x + c.$$

b) Felhasználva, hogy $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, továbbá a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ trigonometrikus azonosságot, valamint az integrál additív tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \operatorname{th}^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = x - \operatorname{th} x + c.\end{aligned}$$

c) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva

$$\int 7\cdot\operatorname{ch} x + 8\cdot\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = 7\cdot\operatorname{sh} x + 8\cdot\operatorname{ch} x + c$$

adódik.

d) Felhasználva, hogy $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$ azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)\cdot(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + c.\end{aligned}$$

e) Felhasználva, hogy $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$, majd a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ azonosságot alkalmazva

$$\int \operatorname{cth}^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} + 1 \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cth} x + x + c$$

adódik.

f) Felhasználva, hogy $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$=1, azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)\cdot(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x.$$

A fentiekben $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

238. Feladat. Adjuk meg az

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

függvény azon F primitív függvényét, melyre $F(2) = 16$ teljesül!

Megoldás:

Mivel $x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)$, ezért

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} = x+2,$$

így

$$\int \frac{x^2-4}{x-2} \,\mathrm{d}x = \int x + 2 \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát az f primitív függvényei:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + c.$$

Mivel $F(2) = 16$, ezért

$$16 = \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 10.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 10.$$

239. Feladat. Adjuk meg az

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 4}{\mathrm{e}^x - 2}$$

függvény azon F primitív függvényét, melyre $F(0) = 6$ teljesül!

Megoldás:

Mivel

$$\mathrm{e}^{2x} - 4 = \left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 2^2 = \left(\mathrm{e}^x - 2\right) \cdot \left(\mathrm{e}^x + 2\right),$$

ezért

$$\mathrm{e}^{2x} - 4 = \frac{\left(\mathrm{e}^x - 2\right) \cdot \left(\mathrm{e}^x + 2\right)}{\mathrm{e}^x - 2} = \mathrm{e}^x + 2,$$

így

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x} - 4}{\mathrm{e}^x - 2} \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x + 2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát az f primitív függvényei:

$$F(x) = \mathrm{e}^x + 2x + c.$$

Mivel $F(0) = 6$, ezért

$$6 = \mathrm{e}^0 + 2 \cdot 0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 5.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \mathrm{e}^x + 2x + 5.$$

240. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{4}{x} + 2x$ függvény azon F primitív függvényét, amelynek grafikonja áthalad a $P = (1; 4)$ ponton!

Megoldás:

Mivel

$$f(x) = 4 \cdot x^{-1} + 2x,$$

ezért

$$\int \frac{4}{x} + 2x \,\mathrm{d}x = \int 4 \cdot x^{-1} + 2x \,\mathrm{d}x = 4 \cdot \ln|x| + x^2 + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát az f primitív függvényei:

$$F(x) = 4 \cdot \ln|x| + x^2 + c.$$

Mivel a függvény grafikonja áthalad a $P = (1;4)$ ponton, ezért $F(1) = 4$, így

$$4 = 4 \cdot \ln 1 + 1^2 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 3.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = 4 \cdot \ln|x| + x^2 + 3.$$

241. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = (3x+1)^2$ függvény azon F primitív függvényét, melyre az $F(1) = 6$ feltétel teljesül!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

azt kapjuk, hogy

$$(3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1.$$

Az algebrai átalakítások és a határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$F(x) = \int 9x^2 + 6x + 1 \,\mathrm{d}x = \frac{9x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + x + c = 3x^3 + 3x^2 + x + c.$$

Mivel $F(1) = 6$, ezért

$$3 + 3 + 1 + c = 6 \qquad \Rightarrow \qquad c = -1,$$

így a keresett függvény:

$$F(x) = 3x^3 + 3x^2 + x - 1.$$

242. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = 4^{\log_2 x}$ függvény azon F primitív függvényét, melyre teljesül, hogy $F(2) = 1$ teljesüljön!

Megoldás:

Mivel

$$f(x) = 4^{\log_2 x} = (2^2)^{\log_2 x} = 2^{2 \cdot \log_2 x} = 2^{\log_2 x^2} = x^2,$$

ezért

$$F(x) = \int x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c.$$

Felhasználva, hogy $F(2) = 1$ azt kapjuk, hogy

$$\frac{8}{3} + c = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{5}{3}.$$

Tehát a keresett függvény:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}.$$

243. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 3 - 3x^2$ függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, melyre $F(0) = 0$ teljesül!

a) Határozzuk meg az F leképezési szabályát!

b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!

c) Számoljuk ki az F függvény zérushelyét!

d) Határozzuk meg, hogy az F függvény hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!

e) Jellemezzük konvexitás szerint az F függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

f) Számoljuk ki az F függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

g) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

h) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

i) Korlátos-e a függvény?

j) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

k) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Mivel

$$F(x) = \int 3 - 3x^2 \,\mathrm{d}x = 3x - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + c = 3x - x^3 + c,$$

továbbá $F(0) = 0$, ezért $0 = 0 + c$, azaz $c = 0$, így a keresett primitív függvény:

$$F(x) = 3x - x^3.$$

b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$3x - x^3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot (3 - x^2) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$, vagy $3 - x^2 = 0$. Az utóbbiból $x = \pm\sqrt{3}$ adódik.

Tehát a függvénynek három zérushelye van: 0; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$.

d) A függvény deriváltja: $F'(x) = 3 - 3x^2$. A deriváltfüggvény zérushelyei, vagyis a $3 - 3x^2 = 0$ egyenlet megoldásai:

$$3 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;1[$	1	$]1;\infty[$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\nearrow$
$F(x)$		-2		2	

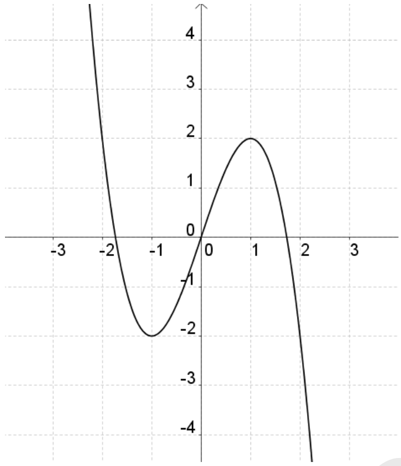
e) A függvény másodrendű deriváltja: $F''(x) = -6x$. Ennek zérushelye, vagyis a $-6x = 0$ egyenlet megoldása: $x = 0$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét, amiből következtethetünk a függvény konvexitására:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$F''(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	konvex	i.p.	konvkáv
$F(x)$		0	

f) Az értelmezési tartomány határpontjai $-\infty$ és ∞.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} (3x - x^3) = \infty;$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} (3x - x^3) = -\infty.$$

g) A függvény grafikonja:



h) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

i) Korlátosság: nem korlátos.

j) Paritás: páratlan, mert szimmetrikus az origóra.

k) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.

244. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 5x^4 - 20x^3$ függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, melyre $F(0) = 0$ teljesül!

a) Határozzuk meg az F leképezési szabályát!

b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!

c) Számoljuk ki az F függvény zérushelyét!

d) Határozzuk meg, hogy az F függvény hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!

e) Jellemezzük konvexitás szerint az F függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

f) Számoljuk ki az F függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

g) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

h) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

i) Korlátos-e a függvény?

j) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

k) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Mivel

$$F(x) = \int 5x^4 - 20x^3 \,\mathrm{d}x = 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 20 \cdot \frac{x^4}{4} + c = x^5 - 5x^4 + c,$$

továbbá $F(0) = 0$, ezért $0 = 0 + c$, azaz $c = 0$, így a keresett primitív függvény:

$$F(x) = x^5 - 5x^4.$$

b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^5 - 5x^4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^4 \cdot (x-5) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$, vagy $x - 5 = 0$. Az utóbbiból $x = 5$ adódik.

Tehát a függvénynek kettő zérushelye van: 0 és 5.

d) A függvény deriváltja: $F'(x) = 5x^4 - 20x^3$. A deriváltfüggvény zérushelyei az

$$5x^4 - 20x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^3 \cdot (x-4) = 0$$

egyenlet megoldásai, így $x = 0$, illetve $x = 4$.

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; 4[$	4	$]1; \infty[$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	lok. min.	$\searrow$	lok. max.	$\nearrow$
$F(x)$		0		-256	

e) A függvény másodrendű deriváltja: $F''(x) = 20x^3 - 60x^2$. Ennek zérushelyei a

$$20x^3 - 60x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 20x^2 \cdot (x-3) = 0$$

egyenlet megoldásai, így $x = 0$, illetve $x = 3$.

A másodrendű derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

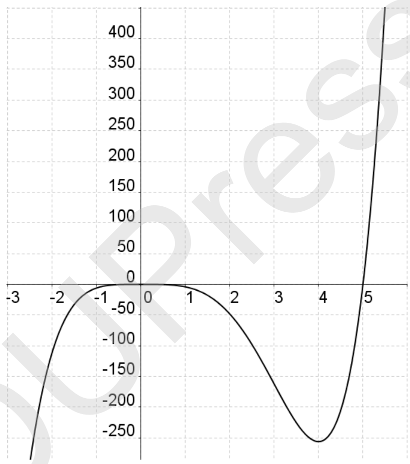
x	$]-\infty;0[$	0	$]0;3[$	3	$]3;\infty[$
$F''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	konkáv		konvkáv	i.p.	konvex
$F(x)$				-162	

f) Az értelmezési tartomány határpontjai $-\infty$ és ∞.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^5 - 5x^4) = \infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}(x^5 - 5x^4) = -\infty.$$

g) A függvény grafikonja:



h) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

i) Korlátosság: nem korlátos.

j) Paritás: nem páros, nem páratlan.

k) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.

4.2. Az $f(ax+b)$ alakú függvények integrálása

4.2.1. Tétel. Legyenek I és J nyílt intervallumok és legyen az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvénynek F egy primitív függvénye és $g\colon J \to \mathbb{R}$ elsőfokú függvény, azaz $g(x) = a \cdot x + b$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$! Tegyük fel, hogy $R_g \subset I$, azaz a g függvény értékkészlete részhalmaza az I intervallumnak. Ekkor az $f \circ g$ függvénynek a J intervallumon egy primitív függvénye

$$\frac{1}{a} \cdot F \circ g(x),$$

azaz

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

4.2.2. Példa. Tekintsük az $f \circ g(x) = \cos(3x+4)$ függvényt!

Ekkor $f(x) = \cos x$ és $g(x) = 3x + 4$.

Az $f(x)$ függvény egy primitív függvénye: $F(x) = \sin x$.

Ekkor $F \circ g(x) = \sin(3x+4)$. Ezt felhasználva

$$\int \cos(3x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(3x+4)}{3} + c$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Kidolgozott feladatok

245. Feladat. Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \cos(4x+3)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \sin(2x+3)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(5x-2)}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(3x+6)}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x+5}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int (3x+1)^{20}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int (1-4x)^3\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-2x}}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \mathrm{sh}\,(2x-1)\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \mathrm{ch}\,(3x+1)\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Mivel $(\sin x)' = \cos x$, ezért

$$\int \cos(4x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(4x+3)}{4} + c.$$

b) Mivel $(\cos x)' = -\sin x$, ezért

$$\int \sin(2x+3)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(2x+3)}{2} + c.$$

c) Mivel $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, ezért

$$\int \frac{1}{\cos^2(5x-2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}\,(5x-2)}{5} + c.$$

d) Mivel $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, ezért

$$\int \frac{1}{\sin^2(3x+6)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{ctg}\,(3x+6)}{3} + c.$$

e) Mivel $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, ezért

$$\int \mathrm{e}^{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x+5}}{2} + c.$$

f) Mivel
$$\int x^{20}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{21}}{21} + c,$$
ezért
$$\int (3x+1)^{20}\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+1)^{21}}{21\cdot 3} + c = \frac{(3x+1)^{21}}{63} + c.$$

g) Mivel
$$\int x^{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{4}}{4} + c,$$
ezért
$$\int (1-4x)^{3}\,\mathrm{d}x = \frac{(1-4x)^{4}}{4\cdot(-4)} = -\frac{(1-4x)^{4}}{16} + c.$$

h) Mivel
$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c,$$
ezért
$$\int \frac{1}{\sqrt{5-2x}}\,\mathrm{d}x = \int (5-2x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{(5-2x)^{\frac{1}{2}}}{-2\cdot\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{5-2x} + c.$$

i) Mivel $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, ezért
$$\int \operatorname{sh}(2x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{ch}(2x-1)}{2} + c.$$

j) Mivel $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, ezért
$$\int \operatorname{ch}(3x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sh}(3x+1)}{3} + c.$$

A fentiekben $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

246. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ függvény azon primitív függvényét, amelynek grafikonja áthalad $P = (0;3)$ ponton!

Megoldás:

Mivel
$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x,$$

ezért

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 + \sin 2x\,\mathrm{d}x = x - \frac{\cos 2x}{2} + c.$$

Mivel azt a primitív függvényt keressük, amelynek grafikonjára illeszkedik a P pont, ezért $F(0) = 3$, így

$$2 = 0 - \frac{\cos 0}{3} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{7}{3}.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{7}{3}.$$

247. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = \left(\mathrm{e}^x + 2\right)^2$ függvény azon primitív függvényét, amelynek grafikonja áthalad $P = (0;1)$ ponton!

Megoldás:

Mivel

$$\left(\mathrm{e}^x + 2\right)^2 = \mathrm{e}^{2x} + 4 \cdot \mathrm{e}^x + 4,$$

ezért

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x} + 4 \cdot \mathrm{e}^x + 4\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + 4 \cdot \mathrm{e}^x + 4x + c.$$

Mivel azt a primitív függvényt keressük, amelynek grafikonjára illeszkedik a P pont, ezért $F(0) = 1$, így

$$1 = \frac{1}{2} + 4 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{7}{2}.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + 4 \cdot \mathrm{e}^x + 4x - \frac{7}{2}.$$

248. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \cos 2x$ függvény azon $F(x)$ primitív függvényét, amelyre $F(0) = 1$ teljesül!

Megoldás:

Mivel

$$F(x) = \frac{\sin 2x}{2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ és $F(0) = 1$, ezért

$$1 = F(0) = \frac{\sin 0}{2} + c = c,$$

így $c = 1$, tehát a keresett primitív függvény

$$F(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 1.$$

249. Feladat. Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{3}{25+16x^2}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás:

Az integrált visszavezetjük az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény integráljára:

$$\int \frac{3}{25+16x^2}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\int \frac{1}{25+16x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{25}\cdot\int \frac{1}{1+\frac{16}{25}x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{25}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{4}{5}x\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{25}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{5}x}{\frac{4}{5}} + c =$$
$$\frac{3}{25}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}x\right)\cdot\frac{5}{4} + c = \frac{3}{20}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}x\right) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

250. Feladat. Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{36-16x^2}}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás:

Az integrált visszavezetjük az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény integráljára:

$$\int \frac{2}{\sqrt{36-16x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int \frac{1}{\sqrt{36-16x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{6}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{36}x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{6}x\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right)}{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

251. Feladat. Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+4x+2}\,\mathrm{d}x$ integrált!

<u>**Megoldás:**</u>

Az integrált visszavezetjük az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény integráljára. Első lépésben teljes négyzetté alakítjuk az $4x^2+4x+2$ kifejezést:

$$4x^2+4x+2=(2x+1)^2+1.$$

Ezt felhasználva

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\operatorname{arctg}(2x+1)}{2}+c,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

252. Feladat. Adjuk meg az $f(x)=(\sin x+\cos x)^2$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0)=\frac{1}{2}$ teljesül!

<u>**Megoldás:**</u>

Mivel

$$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x,$$

ezért

$$F(x)=\int 1+\sin 2x\,\mathrm{d}x=x-\frac{\cos 2x}{2}+c.$$

Mivel $F(0)=0-\frac{\cos 0}{2}+c$ és $F(0)=\frac{1}{2}$, ezért $c=1$, így a keresett primitív függvény:

$$F(x)=x-\frac{\cos 2x}{2}+1.$$

253. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás:**</u>

Mivel

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$
$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x,$$

ezért az első egyenletből kivonva a másodikat, majd 2-vel osztva mindkét oldalt

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

adódik. Ezt felhasználva

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int 1 - \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}.$$

4.3. Az $f'(x)\cdot f(x)$ alakú függvények integrálása

4.3.1. Tétel. Ha $f\colon I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre az $\frac{f'(x)}{f(x)}$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\big|f(x)\big| + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

4.3.2. Példa. A $\frac{2x}{x^2+6}$ függvény integrálja

$$\int \frac{2x}{x^2+6}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+6) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

Kidolgozott feladatok

254. Feladat. Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int 5 \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \operatorname{tg} 3x\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} 3x\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x$

n) $\displaystyle\int \operatorname{cth} x\,\mathrm{d}x$

o) $\displaystyle\int \operatorname{th} 3x\,\mathrm{d}x$

p) $\displaystyle\int \operatorname{cth} 3x\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Ha $f(x) = x^2 + 3$, akkor $f'(x) = 2x$, így az integrál $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakra hozható. Felhasználva, hogy

$$\frac{x}{x^2+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+3},$$

továbbá az integrál homogén tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+3) + c.$$

b) A nevező deriváltja: $2x + 4$. A számlálót 2-vel szorozva a számlálóban a nevező deriváltját kapjuk, így alkalmazható az előbbi módszer. Ahhoz, hogy a kifejezés értéke ne változzon, $\frac{1}{2}$-el is szoroznunk kell, amit az integrál homogenitása miatt kiemelhetünk az integráljel elé. Tehát

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2+4x+5| + c.$$

c) Mivel

$$\frac{1}{x\cdot \ln x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x},$$

ezért

$$\int \frac{1}{x\cdot \ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + c.$$

d) Mivel

$$\frac{1}{\cos^2 x\cdot \mathrm{tg} x} = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg} x},$$

ezért

$$\int \frac{1}{\mathrm{tg}\, x\cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\mathrm{tg}\, x}\,\mathrm{d}x = \ln|\mathrm{tg}\, x| + c.$$

e) Mivel

$$\frac{1}{\sin^2 x\cdot \mathrm{ctg} x} = \frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\mathrm{ctg} x},$$

ezért

$$\int \frac{1}{\mathrm{ctg}\, x\cdot \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\mathrm{ctg}\, x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\mathrm{ctg}\, x| + c.$$

f) Ha $f(x) = \mathrm{e}^x + 1$, akkor $f'(x) = \mathrm{e}^x$, így

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(\mathrm{e}^x+1) + c.$$

g) A számlálót 2-vel szorozva a számlálóban a nevező deriváltját kapjuk, így alkalmazható az előbbi módszer. Ahhoz, hogy a kifejezés értéke ne változzon, $\frac{1}{2}$-el is szoroznunk kell, amit az integrál homogenitása miatt kiemelhetünk az integráljel elé, így

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2\cdot \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot \ln(e^{2x}+1) + c.$$

h) Felhasználva az integrál homogenitását azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{5\cdot\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 5\cdot\int\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 5\cdot\ln|\sin x| + c.$$

i) Mivel $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$, továbbá $(\cos x)' = -\sin x$, ezért

$$\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int\frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c.$$

j) Mivel $\mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$, továbbá $(\sin x)' = \cos x$, ezért

$$\int \mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c.$$

k) Mivel $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$, továbbá $(\cos 3x)' = -3\cdot\sin 3x$, ezért

$$\int \mathrm{tg}\,3x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cdot\int\frac{-3\cdot\sin 3x}{\cos 3x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\ln|\cos(3x)| + c.$$

l) Mivel $\mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$, továbbá $(\sin 3x)' = 3\cdot\sin 3x$, ezért

$$\int \mathrm{ctg}\,3x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\ln|\sin(3x)| + c.$$

m) Mivel $\mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$, továbbá $(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$, ezért

$$\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}\,\mathrm{d}x = \ln|\mathrm{ch}\,x| + c.$$

n) Mivel $\mathrm{cth}\,x = \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}$, továbbá $(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$, ezért

$$\int \mathrm{cth}\,x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{d}x = \ln|\mathrm{sh}\,x| + c.$$

o) Mivel $\mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$, továbbá $(\mathrm{ch}\,3x)' = 3\cdot\mathrm{sh}\,3x$, ezért

$$\int \mathrm{th}\,3x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{sh}\,3x}{\mathrm{ch}\,3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\int 3\cdot\frac{\mathrm{sh}\,3x}{\mathrm{ch}\,3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\ln|\mathrm{ch}\,3x| + c.$$

p) Mivel $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$, továbbá $(\operatorname{sh} 3x)' = 3\cdot\operatorname{ch} 3x$, ezért

$$\int \operatorname{cth} 3x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{sh} 3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\int 3\cdot\frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{sh} 3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\ln|\operatorname{sh} 3x| + c.$$

A fentiekben mindenhol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

255. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 5$ teljesül!

Megoldás:

Mivel

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1) + c,$$

ezért $F(0) = 5$ miatt $5 = \frac{1}{2}\cdot\ln 1 + c$, így $c = 5$. Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1) + 5.$$

256. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \frac{2x}{4+x^2}$$

függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = \ln 4$ teljesül!

a) Határozzuk meg az F leképezési szabályát!

b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!

c) Számoljuk ki az F függvény zérushelyét!

d) Határozzuk meg, hogy F hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!

e) Jellemezzük konvexitás szerint az F függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

f) Számoljuk ki az F függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

g) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

h) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

i) Korlátos-e a függvény?

j) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

k) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Mivel
$$\int \frac{2x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln(4+x^2)+c,$$
ezért $F(0)=\ln 4$ miatt $\ln 4 = \ln 4 + c$, így $c=0$. Tehát a keresett primitív függvény:
$$F(x)=\ln(4+x^2).$$

b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

c) A zérushelyet az $F(x)=0$ egyenlet megoldásával kapjuk:
$$\ln(4+x^2)=0 \qquad \Rightarrow \qquad 4+x^2=1 \qquad \Rightarrow \qquad x^2=-3,$$
ami nem lehetséges, így nincs zérushely.

d) A függvény deriváltja:
$$F'(x)=\frac{1}{4+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{4+x^2},$$
melynek zérushelye: $x=0$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$F(x)$		$\ln 4$	

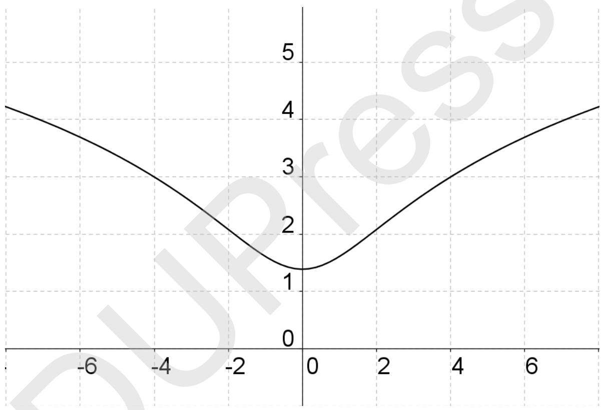
e) A függvény másodrendű deriváltja:
$$F''(x)=\frac{2\cdot(4+x^2)-2x\cdot 2x}{(4+x^2)^2}=\frac{-2x^2+8}{(4+x^2)^2}.$$
A másodrendű derivált zérushelyei:
$$\frac{-2x^2+8}{(4+x^2)^2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad -2x^2+8=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=\pm 2.$$
Ennek megfelelően táblázatba foglalva a másodrendű derivált előjelei:

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;2[$	2	$]2;\infty[$
$F''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	konkáv	i.p.	konvex	i.p.	konkáv
$F(x)$		$\ln 8$		$\ln 8$	

f) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(4+x^2) = \infty;$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(4+x^2) = \infty.$$

g) A függvény grafikonja:



h) Értékkészlet: $y \in [\ln 4; \infty[$.

i) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos.

j) Paritás: páros, mert a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $F(-x) = F(x)$.

k) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = 0$, minimum érték: $y = \ln 4$.

257. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \frac{4x^3}{x^4+1}$$

függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = \ln 4$ teljesül!

a) Határozzuk meg az F leképezési szabályát!

b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!

c) Számoljuk ki az F függvény zérushelyét!

d) Határozzuk meg, hogy F hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!

e) Jellemezzük konvexitás szerint az F függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

f) Számoljuk ki az F függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

g) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

h) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

i) Korlátos-e a függvény?

j) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

k) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

<u>**Megoldás:**</u>

a) Mivel
$$\int \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^4+1) + c,$$
ezért $F(0) = 0$ miatt $0 = \ln 1 + c$, így $c = 0$. Tehát a keresett primitív függvény:
$$F(x) = \ln(x^4+1).$$

b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:
$$\ln(x^4+1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^4 + 1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0.$$

d) A függvény deriváltja:
$$F'(x) = \frac{1}{x^4+1} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{x^4+1},$$
melynek zérushelye: $x = 0$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$F(x)$		0	

e) A függvény másodrendű deriváltja:

$$F''(x)=\frac{12x^2\cdot(x^4+1)-4x^3\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2}=\frac{-4x^6+12x^2}{(x^4+1)^2}.$$

A másodrendű derivált zérushelyei az

$$\frac{-4x^6+12x^2}{(x^4+1)^2}\quad\Rightarrow\quad -4x^6+12x^2=0\quad\Rightarrow\quad 4x^2\cdot(-x^4+3)=0$$

egyenlet megoldásai, azaz $x=0$, illetve $x=\pm\sqrt[4]{3}$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva a másodrendű derivált előjelei:

x	$]-\infty;-\sqrt[4]{3}[$	$-\sqrt[4]{3}$	$]-\sqrt[4]{3};0[$	0
$F''(x)$	$-$	0	$+$	0
$F(x)$	konkáv	i.p.	konvex	
$F(x)$		$2\ln 2$		

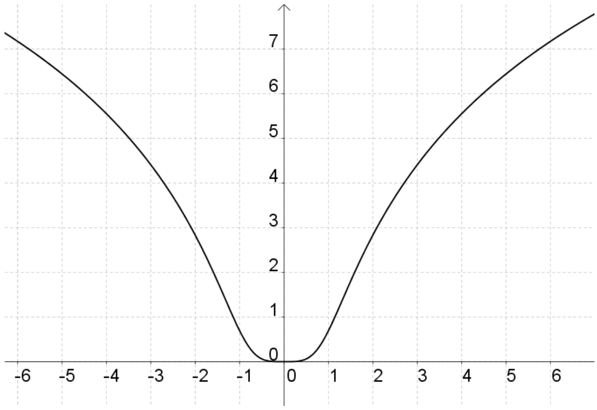
x	$]0;\sqrt[4]{3}[$	$\sqrt[4]{3}$	$]\sqrt[4]{3};\infty[$
$F''(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$	konvex	i.p.	konkáv
$F(x)$		$2\ln 2$	

f) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(x^4+1)=\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\ln(x^4+1)=\infty.$$

g) A függvény grafikonja:



h) Értékkészlet: $y \in [0; \infty[$.

i) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos.

j) Paritás: páros, mert a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $F(-x) = F(x)$.

k) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = 0$, minimum érték: $y = 0$.

4.4. Az $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakú függvények integrálása

4.4.1. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ és legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy az $f^n(x) \cdot f'(x)$ függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor

$$\int f^n(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

4.4.2. Példa. A $\sin^2(x) \cdot \cos x$ függvény $f(x) = \sin x$ és $n = 3$ választással $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakú. Ezért alkalmazható az előbbi tétel, így azt kapjuk, hogy

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^3 x}{3} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Kidolgozott feladatok

258. Feladat. Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \sin^5 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \cos^5 x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} \, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}} \, \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x} \, \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^4+1)^2} \, \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}} \, \mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ctg}^5 x}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Ha $f(x) = \sin x$, akkor $f'(x) = \cos x$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható:

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^6 x}{6} + c.$$

b) Ha $f(x) = \cos x$, akkor $f'(x) = -\sin x$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható:

$$\int \cos^5 x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = -\int \cos^5 x \cdot (-\sin x) \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^6 x}{6} + c.$$

c) Felhasználva, hogy $\frac{1}{\cos^5 x} = \cos^{-5} x$ az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} \, \mathrm{d}x = \int \sin x \cdot \cos^{-5} x \, \mathrm{d}x = -\int -\sin x \cdot \cos^{-5} x \, \mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{\cos^{-4} x}{-4} + c = \frac{1}{4 \cdot \cos^4 x} + c.$$

d) Felhasználva, hogy $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = x^{-\frac{3}{4}}$ az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}} \, \mathrm{d}x = \int \cos x \cdot (\sin x)^{-\frac{3}{4}} \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^{\frac{1}{4}} x}{\frac{1}{4}} + c = 4 \cdot \sqrt[4]{\sin x} + c.$$

e) Ha $f(x) = \ln x$, akkor $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} = \int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^3 x}{3} + c.$$

f) Ha $f(x) = x^4 + 1$, akkor $f'(x) = 4x^3$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható, tehát

$$\int \frac{x^3}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int x^3 \cdot (x^4+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \int 4x^3 \cdot (x^4+1)^{-2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(x^4+1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^4+1} + c.$$

g) Ha $f(x) = 1 + x^2$, akkor $f'(x) = 2x$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható, tehát

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+x^2} + c.$$

h) Ha $f(x) = 1 + x^3$, akkor $f'(x) = 3x^2$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható, tehát

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \cdot \int 3x^2 \cdot (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{1+x^3} + c.$$

i) Ha $f(x) = \operatorname{tg} x$, akkor $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható, tehát

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c.$$

j) Ha $f(x) = \operatorname{ctg} x$, akkor $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható, tehát

$$\int \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int \operatorname{ctg}^2 x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + c.$$

A fentiekben $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

259. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = \sin x \cdot \sqrt{\cos x}$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 3$ teljesül!

Megoldás:

Mivel $\sqrt{\cos x} = (\cos x)^{\frac{1}{2}}$, ezért

$$\int \sin x \cdot (\cos x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -\int -\sin x \cdot (\cos x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot (\cos x)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(\cos x)^3} + c.$$

Mivel $F(0) = 3$, ezért

$$3 = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{1} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{11}{3}.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(\cos x)^3} + \frac{11}{3}.$$

260. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = \frac{1}{2}$ teljesül.

a) Határozzuk meg az F leképezési szabályát!

b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!

c) Számoljuk ki az F függvény zérushelyét!

d) Határozzuk meg, hogy F hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

e) Jellemezzük konvexitás szerint az F függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

f) Számoljuk ki az F függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

g) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

h) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

i) Korlátos-e a függvény?

j) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

k) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Mivel

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x = \int x^3 \cdot (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \int 4x^3 \cdot (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+x^4} + c.$$

és $F(0) = \frac{1}{2}$ miatt $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 0$, ezért

$$F(x) = \frac{\sqrt{1+x^4}}{2}.$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya: $]-\infty; \infty[$.

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát a

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{2} = 0$$

egyenlet megoldása, amiből azt kapjuk, hogy $x^4 = -1$, ami nem lehetséges, így az F függvénynek nincs zérushelye.

d) Mivel $F'(x) = f(x)$, ezért az

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, aminek egyetlen megoldása $x = 0$.

Az első derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	lokális minimum	$\nearrow$
$F(x)$		1	

e) Mivel

$$F''(x) = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{1+x^4} - x^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x^3}{1+x^4} =$$
$$= \frac{3x^2 \cdot (x^4+1) - 2x^6}{(1+x^4) \cdot \sqrt{1+x^4}} = \frac{x^6+3x^2}{(1+x^4) \cdot \sqrt{1+x^4}},$$

így $F''(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért F konvex.

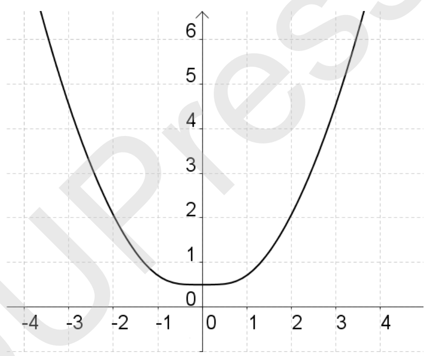
f) Az F függvény határértéke $-\infty$-ben:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \infty.$$

Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \infty.$$

g) Az F függvény grafikonja:



h) Értékkészlet: $y \in [0{,}5; \infty[$.

i) Korlátosság: alulról korlátos, felülről nem korlátos, ezért nem korlátos.

j) Paritás: páros.

k) Abszolút (globális) szélsőérték: minimuma van, minimum hely: $x = 0$, minimum érték: $y = 0{,}5$.

4.5. A $k \circ b(x) \cdot b'(x)$ alakú függvények integrálása

4.5.1. Tétel. Ha I és J intervallumok és $b\colon I \to J$ differenciálható függvény, $K, k\colon J \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy K primitív függvénye k-nak (azaz $K'(x) = k(x)$ minden $x \in J$ esetén). Ekkor

$$\int k \circ g(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = K \circ g(x) + c$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Kidolgozott feladatok

261. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = \mathrm{e}^{5x^4+2x} \cdot (20x^3 + 2)$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 5$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = 5x^4 + 2x$ függvény deriváltja $b'(x) = 20x^3 + 2$, ezért a $k(x) = \mathrm{e}^x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) = \\ = \mathrm{e}^{5x^4+2x} + c$$

adódik. Mivel $F(0) = 5$, ezért

$$5 = \mathrm{e}^0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 4.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \mathrm{e}^{5x^4+2x} + 4.$$

262. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = \sin x^3 \cdot 3x^2$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 2$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = x^3$ függvény deriváltja $b'(x) = 3x^2$, ezért a $k(x) = \sin x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) = \\ = -\cos x^3 + c$$

adódik. Mivel $F(0) = 2$, ezért

$$2 = -\cos 0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 3.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = -\cos x^3 + 3.$$

263. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} \cdot \cos x$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 5$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = \sin x$ függvény deriváltja $b'(x) = \cos x$, ezért a $k(x) = \mathrm{e}^x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) =$$
$$= \mathrm{e}^{\sin x} + c.$$

Mivel $F(0) = 5$, ezért

$$5 = 1 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 4.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \mathrm{e}^{\sin x} + 4.$$

264. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \sin(x^3 - 1)$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(1) = 3$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = x^3 - 1$ függvény deriváltja $b'(x) = 3x^2$, ezért a $k(x) = \sin x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) =$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot \cos(x^3 - 1) + c.$$

Mivel $F(1) = 3$, ezért

$$3 = -\frac{1}{3} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{10}{3}.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \cos(x^3 - 1) + \frac{10}{3}.$$

265. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = (x+2) \cdot \mathrm{e}^{3x^2+12x-15}$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(1) = 4$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = 3x^2 + 12x - 15$ függvény deriváltja $b'(x) = 6x + 12$, ezért a $k(x) = \mathrm{e}^x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) = \\ = \frac{1}{6} \cdot \mathrm{e}^{3x^2+12x-15} + c.$$

Mivel $F(1) = 4$, ezért

$$4 = \frac{1}{6} \cdot \mathrm{e}^0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{23}{6}.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x^2+12x-15}}{6} + \frac{23}{6}.$$

266. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(1) = 0$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = \frac{1}{x} - 1$ függvény deriváltja $b'(x) = -\frac{1}{x^2}$, ezért a $k(x) = \cos x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) =$$
$$= \sin\left(\frac{1}{x} - 1\right) + c.$$

Mivel $F(1) = 0$, ezért

$$0 = \sin\left(\frac{1}{x} - 1\right) + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 0.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \sin\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

267. Feladat. Tekintsük az $f(x) = -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$ függvényt és legyen F az $f(x)$ azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 1$ teljesül!

a) Határozzuk meg az F leképezési szabályát!

b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!

c) Számoljuk ki az F függvény zérushelyét!

d) Határozzuk meg, hogy F hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

e) Jellemezzük konvexitás szerint az F függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

f) Számoljuk ki az F függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

g) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

h) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

i) Korlátos-e a függvény?

j) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

k) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) Mivel a $b(x) = -x^2$ függvény deriváltja $b'(x) = -2x$, ezért a $k(x) = \mathrm{e}^x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + c$$

adódik. Mivel $F(0) = 1$, ezért

$$1 = \mathrm{e}^0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 0.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya: $x \in \mathbb{R}$.

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát az

$$\mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, azonban $\mathrm{e}^{-x^2} \neq 0$, így az F függvénynek nincs zérushelye.

d) Mivel $F'(x) = f(x)$, ezért a

$$-2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, aminek egyetlen megoldása $x = 0$.

Az első derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$F'(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\nearrow$	lokális maximum	$\searrow$
$F(x)$		1	

e) Mivel

$$F''(x) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} - 2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2 + 4x^2).$$

Az $\mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2 + 4x^2) = 0$ egyenlet megoldása: $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. A másodrendű derivált előjeleit tartalmazó táblázat:

x	$\left]-\infty; -\sqrt{\frac{1}{2}}\right[$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\left]-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\left]\sqrt{\frac{1}{2}}; \infty\right[$
$F''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	konvex	i.p.	konkáv	i.p.	konvex
$F(x)$		$e^{-\frac{1}{2}}$		$e^{-\frac{1}{2}}$	

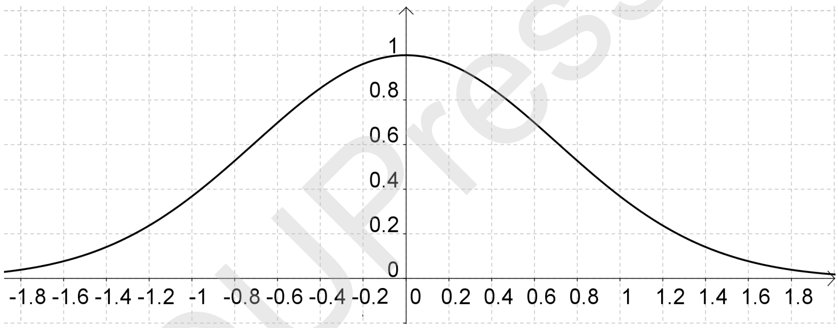
f) Az F függvény határértéke $-\infty$-ben:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0.$$

g) Az F függvény grafikonja:



h) Értékkészlet: $y \in]0; 1]$.

i) Korlátosság: korlátos.

j) Paritás: páros.

k) Abszolút (globális) szélsőérték: maximuma van. Maximum hely: $x = 0$. Maximum érték: $y = 1$.

4.6. Parciális integrálás

268. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \mathrm{e}^x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x & \qquad f'(x) &= \mathrm{e}^x \\ g(x) &= x & \qquad g'(x) &= 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int x \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= x \cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \\ &= x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^x \cdot (x-1) + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám.

269. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \cos x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & \qquad f'(x) &= \cos x \\ g(x) &= x & \qquad g'(x) &= 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x &= x \cdot \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x = \\ &= x \cdot \sin x + \cos x + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

270. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \sin x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos x & \qquad f'(x) &= \sin x \\ g(x) &= x & \qquad g'(x) &= 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x = \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

271. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \operatorname{sh} x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{ch} x & \qquad f'(x) &= \operatorname{sh} x \\ g(x) &= x & \qquad g'(x) &= 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int x \cdot \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x &= x \cdot \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \\ &= x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

272. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \operatorname{ch} x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sh} x & \qquad f'(x) &= \operatorname{ch} x \\ g(x) &= x & \qquad g'(x) &= 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{sh} x - \int \operatorname{sh} x \,\mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

273. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int x \cdot 2^x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 2^x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2^x}{\ln 2} & \qquad f'(x) &= 2^x \\ g(x) &= x & \qquad g'(x) &= 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int x \cdot 2^x \,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} \,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám.

274. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int (8x - 2) \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \mathrm{e}^x$ és $g(x) = 8x - 2$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x & \qquad f'(x) &= \mathrm{e}^x \\ g(x) &= 8x - 2 & \qquad g'(x) &= 8. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int (8x-2)\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (8x-2)\cdot \mathrm{e}^x - \int 8\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \\ = (8x-2)\cdot \mathrm{e}^x - 8\cdot \mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^x \cdot (8x-10) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

275. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int (2x+3)\cdot \cos x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \cos x$ és $g(x) = (2x+3)$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & \qquad f'(x) &= \cos x \\ g(x) &= 2x+3 & \qquad g'(x) &= 2. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int (2x+3)\cdot \cos x \,\mathrm{d}x = (2x+3)\cdot \sin x - \int 2\cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \\ = (2x+3)\cdot \sin x + 2\cdot \cos x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

276. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int 4x\cdot \sin x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \sin x$ és $g(x) = 4x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos x & \qquad f'(x) &= \sin x \\ g(x) &= 4x & \qquad g'(x) &= 4. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int 4x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = -4x \cdot \cos x + \int 4 \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \\ = -4x \cdot \cos x + 4 \cdot \sin x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

277. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \frac{-x-1}{\mathrm{e}^x}$ függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, melyre $F(-2) = 0$ teljesül!

a) Határozzuk meg az F leképezési szabályát!

b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!

c) Számoljuk ki az F függvény zérushelyét!

d) Határozzuk meg, hogy F hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

e) Jellemezzük konvexitás szerint az F függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

f) Számoljuk ki az F függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

g) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

h) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

i) Korlátos-e a függvény?

j) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

k) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) A parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$F(x) = \int \frac{-x-1}{\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x = \int (-x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \\ = (-x-1) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-x}}{-1} - \int -1 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-x}}{-1} \,\mathrm{d}x = (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x} - \int \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x.$$

Mivel

$$\int \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{-1} + c = -\mathrm{e}^{-x} + c,$$

ezért

$$F(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \cdot (x+2) = \frac{x+2}{\mathrm{e}^x} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

Mivel $F(-2) = 0$, ezért

$$\frac{-2+2}{\mathrm{e}^0} + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = 0,$$

így a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \frac{x+2}{\mathrm{e}^x}.$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya: $x \in \mathbb{R}$.

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\frac{x+2}{\mathrm{e}^x} = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = -2$.

d) Az F függvény deriváltja $F'(x) = f(x)$.

Ennek zérushelye, vagyis a

$$\frac{-x-1}{\mathrm{e}^x} = 0$$

egyenlet egyetlen megoldása $x = -1$.

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;\infty]$
$F'(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\nearrow$	lokális maximum	$\searrow$
$F(x)$		e	

e) Az F függvény másodrendű deriváltja:

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - (x+1)\cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^x \cdot (-x)}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{-x}{\mathrm{e}^x}.$$

Ennek zérushelye, vagyis az $F''(x) = 0$ egyenlet megoldása $x = 0$.

A másodrendű derivált előjeleit tartalmazó táblázat:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$F''(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex
$F(x)$		2	

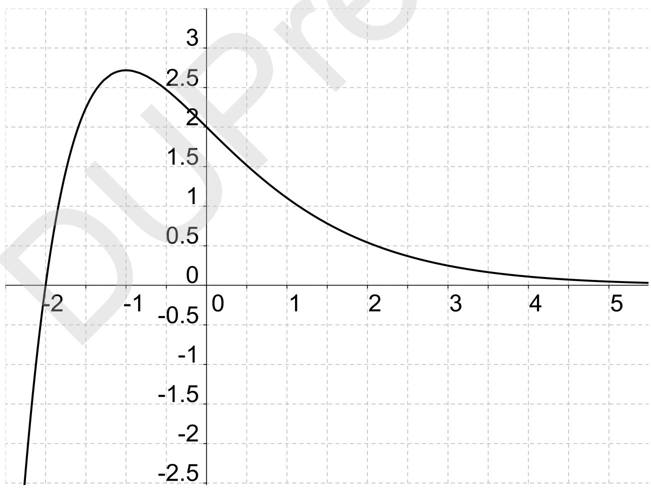
f) Az F függvény határértéke $-\infty$-ben:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\cdot(x+2) = -\infty.$$

Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}\cdot(x+2) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\mathrm{e}^{x}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x}} = 0.$$

g) A függvény grafikonja:



h) Az F függvény értékkészlete: $y \in\,]-\infty;\mathrm{e}]$.

i) Az F függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos, így nem korlátos.

j) Nem páros, nem páratlan.

k) Globális maximuma van. A maximum hely: $x=-1$. A maximum érték: $y=\mathrm{e}$.

278. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int (x^2+7x-1)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás:**</u>

A parciális integrálás képletében az $f_1'(x)=\cos x$ és $g_1(x)=x^2+7x-1$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin x & \qquad f_1'(x) &= \cos x\\ g_1(x) &= x^2+7x-1 & \qquad g_1'(x) &= 2x+7. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva

$$\int f_1'(x)\cdot g_1(x)\,\mathrm{d}x = f_1(x)\cdot g_1(x) - \int f_1(x)\cdot g_1'(x)\,\mathrm{d}x$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\int (x^2+7x-1)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = (x^2+7x-1)\cdot\sin x - \int (2x+7)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x.$$

A kapott

$$\int (2x+7)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

integrál kiszámolása szintén parciális integrálással történik.
Legyen $f_2'(x)=\sin x$ és $g_2(x)=2x+7$! Ekkor:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -\cos x & \qquad f_2'(x) &= \sin x\\ g_2(x) &= 2x+7 & \qquad g_2'(x) &= 2. \end{aligned}$$

Ismételten alkalmazva a parciális integrálás képletét

$$\int f_2'(x)\cdot g_2(x)\,\mathrm{d}x = f_2(x)\cdot g_2(x) - \int f_2(x)\cdot g_2'(x)\,\mathrm{d}x$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int (2x+7)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x &= -(2x+7)\cdot\cos x + \int 2\cdot\cos x\,\mathrm{d}x =\\ &= -(2x+7)\cdot\cos x + 2\cdot\sin x + c_1, \end{aligned}$$

ahol $c_1\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

Az előbb kapott eredményeket is felhasználva

$$\int (x^2+7x-1)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x =$$
$$(x^2+7x-1)\cdot\sin x - \int (2x+7)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$= (x^2+7x-1)\cdot\sin x - \big(-(2x+7)\cdot\cos x + 2\cdot\sin x + c_1\big) =$$
$$= (x^2+7x-1)\cdot\sin x + (2x+7)\cdot\cos x - 2\cdot\sin x - c_1 =$$
$$= (x^2+7x-1)\cdot\sin x + (2x+7)\cdot\cos x - 2\cdot\sin x + c$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

279. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int (x^2+2x-1)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f_1'(x) = \mathrm{e}^{2x}$ és $g_1(x) = x^2+2x-1$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$f_1(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \qquad f_1'(x) = \mathrm{e}^{2x}$$
$$g_1(x) = x^2+2x-1 \qquad g_1'(x) = 2x+2.$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva

$$\int f_1'(x)\cdot g_1(x)\,\mathrm{d}x = f_1(x)\cdot g_1(x) - \int f_1(x)\cdot g_1'(x)\,\mathrm{d}x$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\int (x^2+2x-1)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = (x^2+2x-1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int (2x+2)\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= (x^2+2x-1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int (x+1)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

A kapott

$$\int (x+1)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

integrál kiszámolása szintén parciális integrálással történik.

Legyen $f_2'(x) = \mathrm{e}^{2x}$ és $g_2(x) = x + 1$! Ekkor:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \tfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} & \qquad f_2'(x) &= \mathrm{e}^{2x} \\ g_2(x) &= x+1 & \qquad g_2'(x) &= 1. \end{aligned}$$

Ismételten alkalmazva a parciális integrálás képletét

$$\int f_2'(x) \cdot g_2(x)\,\mathrm{d}x = f_2(x) \cdot g_2(x) - \int f_2(x) \cdot g_2'(x)\,\mathrm{d}x$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int (x+1) \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= (x+1) \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \\ &= (x+1) \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + c_1, \end{aligned}$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.
Az előbb kapott eredményeket is felhasználva

$$\begin{aligned} &\int (x^2 + 2x - 1) \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \\ &= (x^2 + 2x - 1) \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \left((x+1) \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + c_1 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \left(-3 + 2\,x + 2\,x^2\right) - c_1 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \left(-3 + 2\,x + 2\,x^2\right) + c \end{aligned}$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

280. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int 2x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 2x$ és $g(x) = \ln x$ jelöléssel élünk.
Ekkor:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x & \qquad g'(x) &= \tfrac{1}{x} \\ f(x) &= x^2 & \qquad f'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int 2x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = x^2 \cdot \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x =$$
$$= x^2 \cdot \ln x - \int x \, \mathrm{d}x = x^2 \cdot \ln x - \frac{x^2}{2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

281. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 1$ és $g(x) = \ln x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x & \qquad g'(x) &= \tfrac{1}{x} \\ f(x) &= x & \qquad f'(x) &= 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x =$$
$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

282. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int (3x^2 + 2x + 1) \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ és $g(x) = \ln x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x & \qquad g'(x) &= \tfrac{1}{x} \\ f(x) &= x^3 + x^2 + x & \qquad f'(x) &= 3x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int (3x^2+2x+1)\cdot \ln x \,\mathrm{d}x = (x^3+x^2+x)\cdot \ln x - \int (x^3+x^2+x)\cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= (x^3+x^2+x)\cdot \ln x - \int x^2+x+1\,\mathrm{d}x =$$
$$= (x^3+x^2+x)\cdot \ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

283. Feladat. Tekintsük a $\varphi(x) = 9x^2 \cdot \ln x$ függvényt! Legyen F a $\varphi(x)$ függvény azon primitív függvénye, amelyre $F(1) = -1$ teljesül!

a) Határozzuk meg az F leképezési szabályát!

b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!

c) Számoljuk ki az F függvény zérushelyét!

d) Határozzuk meg, hogy F hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő és adjuk meg lokális szélsőértékeit!

e) Jellemezzük konvexitás szerint az F függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!

f) Számoljuk ki az F függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!

g) Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

h) Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

i) Korlátos-e a függvény?

j) Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!

k) Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

Megoldás:

a) A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 9x^2$ és $g(x) = \ln x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x & \qquad g'(x) &= \tfrac{1}{x} \\ f(x) &= 3x^3 & \qquad f'(x) &= 9x^2. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(x) &= \int 9x^2 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = 3x^3 \cdot \ln x - \int 3x^3 \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \\ &= 3x^3 \cdot \ln x - \int 3x^2 \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = 3x^3 \cdot \ln x - x^3 + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.
Mivel $F(1) = -1$, ezért $c = 0$, így a keresett primitív függvény

$$F(x) = 3x^3 \cdot \ln x - x^3.$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya: $x \in]0; \infty[$.

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk. Mivel

$$3x^3 \cdot \ln x - x^3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^3 \cdot (3 \ln x - 1) = 0,$$

ezért $x > 0$ miatt azt kapjuk, hogy $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\mathrm{e}}$.

d) Az F függvény deriváltja $F'(x) = f(x)$.
Ennek zérushelye, vagyis a $9x^2 \cdot \ln x = 0$ egyenlet megoldása $x \neq 0$ miatt $x = 1$.
Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]0;1[$	1	$]1;\infty]$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	lokális minimum	$\nearrow$
$F(x)$		-1	

e) Az F függvény másodrendű deriváltja:

$$F''(x) = f'(x) = 18x \cdot \ln x + 9x = 9x \cdot (2 \ln x + 1).$$

Az $F''(x) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $x \neq 0$ miatt $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. A másodrendű derivált előjeleit tartalmazó táblázat az alábbi:

x	$]0; e^{-\frac{1}{2}}[$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$]e^{-\frac{1}{2}}; \infty]$
$F''(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex
$F(x)$		$-2{,}5 \cdot e^{-\frac{3}{2}}$	

f) Az F függvény határértéke a 0 helyen:

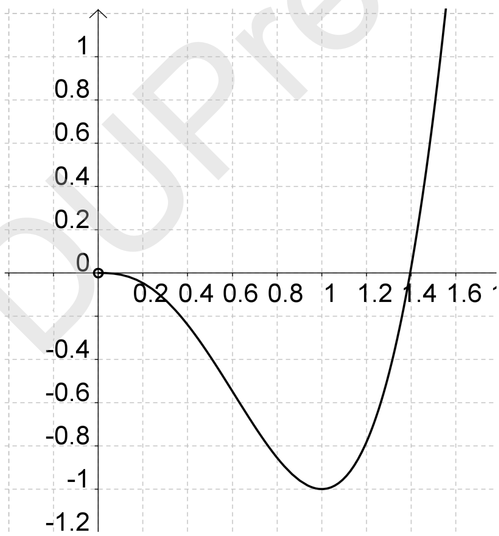
$$\lim_{x \to 0+} F(x) = \lim_{x \to 0+} 3x^3 \cdot \ln x - x^3 = \lim_{x \to 0+} x^3 \cdot (3 \ln x - 1) =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{3 \ln x - 1}{x^{-3}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{3}{x}}{-\frac{3}{x^4}} \lim_{x \to 0+} -x^3 = 0.$$

Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} 3x^3 \cdot \ln x - x^3 = \lim_{x \to \infty} x^3 \cdot (3 \ln x - 1) = \infty.$$

g) A függvény grafikonja:



h) Az F függvény értékkészlete: $y \leq -1$.

i) Az F függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos.

j) Nem páros, nem páratlan.

k) Globális minimuma van. Minimum hely: $x = 1$. Minimum érték: $y = -1$.

284. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int \log_2 x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 1$ és $g(x) = \log_2 x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} g(x) &= \log_2 x & \qquad g'(x) &= \tfrac{1}{x \cdot \ln 2} \\ f(x) &= x & \qquad f'(x) &= 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \log_2 x \, \mathrm{d}x = x \cdot \log_2 x - \int x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} \, \mathrm{d}x = x \cdot \log_2 x - \frac{x}{\ln 2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

285. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int \mathrm{arctg} x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 1$ és $g(x) = \mathrm{arctg}\, x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathrm{arctg}\, x & \qquad g'(x) &= \tfrac{1}{1+x^2} \\ f(x) &= x & \qquad f'(x) &= 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int 1 \cdot \mathrm{arctg}\, x \, \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{arctg}\, x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + c_1, \end{aligned}$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ezért azt kaptuk, hogy

$$\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2) - c_1 = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

286. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int 2x\cdot\operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 2x$ és $g(x) = \operatorname{arctg} x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} g(x) &= \operatorname{arctg} x & \qquad g'(x) &= \tfrac{1}{1+x^2} \\ f(x) &= x^2 & \qquad f'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int 2x\cdot\operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = x^2\cdot\operatorname{arctg} x - \int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Mivel

$$\int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \left(\int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \\ = x - \operatorname{arctg} x + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ezért azt kaptuk, hogy

$$\int x\cdot\operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = x^2\cdot\operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x - c_1 = x^2\cdot\operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

287. Feladat. Határozzuk meg a

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 1$ és $g(x) = \arcsin x$ jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} g(x) &= \arcsin x & \qquad g'(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(x) &= x & \qquad f'(x) &= 1. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int 1 \cdot \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x.$$

Mivel

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \int x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x,$$

ezért a kapott integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakú, így

$$\begin{aligned} \int x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2} \cdot \int -2x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} + c_1, \end{aligned}$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - c_1 = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

288. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int \mathrm{e}^{2x} \sin x \, \mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás:**</u>

A parciális integrálás képletét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin x - \int \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin x - \left(\frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \cos x + \int \frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin x - \frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \cos x - \int \frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} \cdot (2 \sin x - \cos x) - \int \frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Vezessük be az

$$I = \int \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$$

jelölést! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$I = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} \cdot (2 \sin x - \cos x) - \frac{1}{4} \cdot I.$$

Tehát egy egyenletet kaptunk, amit I-re megoldva

$$I = \frac{1}{5} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot (2 \sin x - \cos x) + c$$

adódik.

4.7. Parciális törtekre bontás módszere

4.7.1. Tétel. Minden racionális törtfüggvény felbontható egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegére, amelyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma.

4.7.2. Példa. Tekintsük az $\dfrac{x-5}{x+3}$ törtet! Ekkor:

$$\frac{x-5}{x+3} = \frac{x+3-8}{x+3} = 1 - \frac{8}{x+3}.$$

4.7.3. Megjegyzés. A tételben szereplő felbontást általánosan polinomosztás segítségével lehet elvégezni. Elvégezve a $P(x) : Q(x)$ polinomosztást legyen $M(x)$ a maradék, $H(x)$ az osztás hányadosa. Ekkor

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{M(x)}{Q(x)}.$$

4.7.4. Definíció. Legyenek $A \neq 0$, valamint B és C olyan valós számok, hogy $B \cdot C \neq 0$ és legyen $n \in \mathbb{N}$, továbbá $x_0 \in \mathbb{R}$. Az

$$\frac{A}{(x-x_0)^n}$$

és a

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

alakú törteket, ahol $p^2 - 4q < 0$ (azaz az $x^2 + px + q$ másodfokú polinomnak nincs valós gyöke) *parciális tört*eknek nevezzük.

4.7.5. Példa. Az

$$\frac{5}{(x-3)^4}$$

tört parciális tört.

Az

$$\frac{x+3}{(x^2+x+2)^3}$$

tört parciális tört.

4.7.6. Tétel. Minden olyan racionális törtfüggvény, amelyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, felbontható parciális törtek összegére.

Kidolgozott feladatok

289. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int \frac{2x-3}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Először szorzattá alakítjuk a tört nevezőjét. Ehhez keressük az x^2+5x+6 polinom gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

adódik, így $x_1 = -3$, illetve $x_2 = -2$. Ezt felhasználva

$$x^2+5x+6 = (x+2)\cdot(x+3)$$

adódik. Tehát azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2x-3}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x-3}{(x+2)\cdot(x+3)}\,\mathrm{d}x.$$

A fenti törtet felbontjuk parciális törtek összegére:

$$\frac{2x-3}{(x+2)\cdot(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}.$$

Meghatározzuk az A és B együtthatókat. Mindkét oldalt szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2x-3 = A\cdot(x+3) + B\cdot(x+2).$$

Felbontjuk a zárójelet, majd x hatványai szerint csoportosítjuk a tagokat. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$2x-3 = x\cdot(A+B) + 3A + 2B.$$

A jobb oldal pontosan akkor egyezik meg a bal oldallal, ha az x együtthatója és a konstans tag megegyezik a két oldalon, azaz ha teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2 &=& A &+& B \\ -3 &=& 3A &+& 2B \end{array}\right\}.$$

Az első egyenlet kétszeresét kivonva a második egyenletből $A = -7$ adódik, amelyet visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = 9$. Tehát

$$\int \frac{2x+3}{(x+2)\cdot(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-7}{x+2} + \frac{9}{x+3}\,\mathrm{d}x = \\ = -7\cdot\ln|x+2| + 9\cdot\ln|x+3| + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Felhasználva a logaritmus azonosságait

$$\int \frac{2x+3}{(x+2)\cdot(x+3)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{(x+3)^9}{(x+2)^7}\right| + c$$

adódik.

290. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int \frac{4x+1}{x^2-7x+12}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás:**</u>

Először szorzattá alakítjuk a tört nevezőjét. Ehhez keressük az $x^2 - 7x + 12$ polinom gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7\pm 1}{2}$$

adódik, így $x_1 = 3$, illetve $x_2 = 4$. Tehát

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)\cdot(x-4).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{4x+1}{x^2-7x+12}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x+1}{(x-3)\cdot(x-4)}\,\mathrm{d}x.$$

A fenti törtet felbontjuk parciális törtek összegére:

$$\frac{4x+1}{(x-3)\cdot(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}.$$

Meghatározzuk az A és B együtthatókat. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel

$$4x + 1 = A\cdot(x-4) + B\cdot(x-3)$$

adódik. Felbontjuk a zárójelet, majd x hatványai szerint csoportosítjuk a tagokat:

$$4x + 1 = x \cdot (A + B) - 4A - 3B.$$

A jobb oldal pontosan akkor egyezik meg a bal oldallal, ha az x együtthatója, és a konstans tag megegyezik a két oldalon, azaz ha teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 4 & = & A & + & B \\ 1 & = & -4A & - & 3B \end{array}\right\}.$$

Az első egyenletet 3-szorosát hozzáadva a második egyenlethez $-A = 13$ adódik, így $A = -13$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = 17$. Tehát

$$\int \frac{4x+1}{(x-4)\cdot(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{17}{x-4} - \frac{13}{x-3}\,\mathrm{d}x = \\ = 17 \cdot \ln|x-4| - 13 \cdot \ln|x-3| + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Felhasználva a logaritmus azonosságait

$$\int \frac{4x+1}{(x-4)\cdot(x-3)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{(x-4)^{17}}{(x-3)^{13}}\right| + c$$

adódik.

291. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int \frac{x-2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

A nevezőt felírhatjuk elsőfokú polinomok szorzataként, így

$$\int \frac{x-2}{x\cdot(x^2-1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-2}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}\,\mathrm{d}x$$

adódik. A törtet bontsuk fel parciális törtekre

$$\frac{x-2}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Meghatározzuk az A, B és C együtthatókat. Ehhez először beszorozzuk az előbbi egyenletet a közös nevezővel:

$$x - 2 = A\cdot(x+1)\cdot(x-1) + B\cdot x\cdot(x-1) + C\cdot x\cdot(x+1).$$

A zárójeleket felbontva azt kapjuk, hogy

$$x-2=A\cdot(x^2-1)+B\cdot(x^2-x)+C\cdot(x^2+x)$$
$$x-2=A\cdot x^2-A+B\cdot x^2-B\cdot x+C\cdot x^2+C\cdot x.$$

A tagokat fokszám szerint csoportosítva

$$x-2=(A+B+C)\cdot x^2+(-B+C)\cdot x-A$$

adódik.

Két polinom pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő fokszámú tagok együtthatói egyenlőek, így az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 0 & = & A & + & B & + & C \\ 1 & = & & - & B & + & C \\ -2 & = & -A & & & & \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $A=2$. Ezt behelyettesítve az első és a második egyenletbe a

$$\left.\begin{array}{rcrcr} -2 & = & B & + & C \\ 1 & = & -B & + & C \end{array}\right\}.$$

Az egyenleteket összeadva $2C=-1$, azaz $C=-0{,}5$ adódik. Ezt felhasználva, az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$B-0{,}5=-2 \qquad \Rightarrow \qquad B=-1{,}5.$$

Az A, B és C értékeket behelyettesítve az

$$\frac{x-2}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

összefüggésbe, majd felhasználva az integrál additív és homogén tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\int\frac{x-2}{x\cdot(x^2-1)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x-2}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\int\frac{2}{x}-\frac{1{,}5}{x+1}-\frac{0{,}5}{x-1}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\int\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1{,}5}{x+1}\,\mathrm{d}x-\int\frac{0{,}5}{x-1}\,\mathrm{d}x=$$
$$=2\cdot\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-1{,}5\cdot\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x-0{,}5\cdot\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=$$
$$=2\cdot\ln|x|-1{,}5\cdot\ln|x+1|-0{,}5\cdot\ln|x-1|+c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

292. Feladat. Határozzuk meg a

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Első lépésben parciális törtek összegére bontjuk a törtet. A keresett kifejezést

$$\frac{x+1}{(x-4)^2} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$x+1 = A\cdot(x-4)+B.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$x+1 = Ax-4A+B.$$

A megfelelő fokszámú tagok összehasonlítása után az

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 1 & = & A & & \\ 1 & = & -4A & + & B \end{array}\right\}.$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletbe behelyettesítve az A értékét azt kapjuk, hogy $B=5$. A keresett felbontás tehát:

$$\frac{x+1}{(x-4)^2} = \frac{1}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2}.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x + 5\cdot\int \frac{1}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \ln|x-4| + 5\cdot\int (x-4)^{-2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \ln|x-4| + 5\cdot\frac{(x-4)^{-1}}{-1} + c = \\ &= \ln|x-4| - 5\cdot\frac{1}{x-4} + c = \ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c\end{aligned}$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$.

293. Feladat. Határozzuk meg a

$$\int \frac{x+2}{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Első lépésben parciális törtek összegeként írjuk fel a törtet. A nevező teljes négyzet, így átalakítható az $(x-3)^2$ kifejezéssé. A törtet

$$\frac{x+2}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

alakban keressük. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel

$$x+2 = A\cdot(x-3)+B$$

adódik. A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$x+2 = Ax-3A+B.$$

A megfelelő fokszámú tagok összehasonlítása után az

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 1 & = & A & & \\ 2 & = & -3A & + & B \end{array}\right\}.$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletbe behelyettesítve az A értékét azt kapjuk, hogy $B=5$. A keresett felbontás tehát:

$$\frac{x+2}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2}.$$

Ezt felhasználva az integrál additív és homogén tulajdonsága alapján

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x+2}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + 5\cdot\int (x-3)^{-2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \ln|x-3| + 5\cdot\frac{(x-3)^{-1}}{-1} + c = \ln|x-3| - \frac{5}{x-3} + c
\end{aligned}$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$.

294. Feladat. Határozzuk meg a

$$\int \frac{x+2}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Első lépésben parciális törtek összegeként írjuk fel a törtet. A nevező nevezetes azonosság, így átalakítható az $(x-3)^3$ kifejezéssé. A törtet

$$\frac{x+2}{(x-3)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3}$$

alakban keressük. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel

$$x + 2 = A \cdot (x-3)^2 + B \cdot (x-3) + C$$

adódik. A nevezetes azonosság alkalmazása után azt kapjuk, hogy

$$x + 2 = A \cdot (x^2 - 6x + 9) + B \cdot (x-3) + C.$$

A zárójeleket felbontva, majd fokszám szerint rendezve az egyenletet

$$x + 2 = A \cdot x^2 + (-6A + B) \cdot x + 9A - 3B + C$$

adódik. A megfelelő fokszámú tagok összehasonlítása után az

$$\left.\begin{array}{rclcccc} 0 & = & A & & & & \\ 1 & = & -6A & + & B & & \\ 2 & = & 9A & - & 3B & + & C \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletbe behelyettesítve az A értékét azt kapjuk, hogy $B = 1$. Ezután a harmadik egyenletből $C = 5$ adódik. A keresett felbontás tehát:

$$\frac{x+2}{(x-3)^3} = \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{5}{(x-3)^3}.$$

Ezt felhasználva az integrál additív és homogén tulajdonsága alapján

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x+2}{(x-3)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{5}{(x-3)^3}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int (x-3)^{-2}\,\mathrm{d}x + 5\cdot\int (x-3)^{-3}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + 5\cdot\frac{(x-3)^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{x-3} - \frac{5}{2\cdot(x-3)^2} + c = \\
&= \frac{-2\cdot(x-3)-5}{2\cdot(x-3)^2} = \frac{-2x+1}{2\cdot(x-3)^2}
\end{aligned}$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$.

295. Feladat. Határozzuk meg a

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás:**</u>

Első lépésben parciális törtek összegére bontjuk a törtet. A keresett kifejezést

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

alakban keressük. Az egyenlet mindkét oldalát a közös nevezővel szorozva

$$x^2+2x+3 = A\cdot(x-1)\cdot(x^2+1) + B\cdot(x^2+1) + (Cx+D)\cdot(x-1)^2$$

adódik. A nevezetes azonosság alkalmazása és a zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
x^2+2x+3 = A\cdot(x^3-x^2+x-1) + Bx^2 + B+ \\
+ (Cx+D)\cdot(x^2-2x+1).
\end{aligned}$$

Ismét felbontva a zárójeleket

$$\begin{aligned}
x^2+2x+3 = Ax^3 - Ax^2 + Ax - A + Bx^2 + B+ \\
+ Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D
\end{aligned}$$

adódik. Fokszám szerint csökkenő sorrendbe rendezve a tagokat azt kapjuk, hogy

$$x^2 + 2x + 3 = (A + C) \cdot x^3 + (-A + B - 2C + D) \cdot x^2 + \\ + (A + C - 2D) \cdot x - A + B + D.$$

A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak meg kell egyezni, így az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} A & & & + & C & & & = & 0 \\ -A & + & B & - & 2C & + & D & = & 1 \\ A & & & + & C & - & 2D & = & 2 \\ -A & + & B & & & + & D & = & 3 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A lineáris egyenletrendszert megoldhatjuk például Gauss-eliminációval. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Az első sort hozzáadva a második és negyedik sorhoz, valamint az első sor -1-szeresét hozzáadva a harmadik sorhoz azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

A második sor -1-szeresét hozzáadva a negyedik sorhoz, majd megcserélve a harmadik és a negyedik sort azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Ezen mátrixból visszaírva a lineáris egyenletrendszert

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} A & & & + & C & & & = & 0 \\ & & B & - & C & + & D & = & 1 \\ & & & & 2C & & & = & 2 \\ & & & & & - & 2D & = & 2 \end{array}\right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $D = -1$. A harmadik egyenletből $C = 1$ adódik. A második egyenletből $B = 3$, míg az első egyenletből $A = -1$ következik.

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2 \cdot (x^2+1)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Mivel

$$\int \frac{-1}{x-1}\,\mathrm{d}x = -1 \cdot \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = -1 \cdot \ln|x-1| + c_1,$$

és

$$\int \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \int (x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c_2 = -\frac{3}{x-1} + c_2,$$

és

$$\int \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + c_3,$$

ahol $c_1; c_2; c_3 \in \mathbb{R}$, ezért

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2 \cdot (x^2+1)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\ln|x-1| + c_1 - \frac{3}{x-1} + c_2 + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + c_3 =$$
$$= -\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + c.$$

296. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int \frac{2x+2}{x \cdot (x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

A törtet parciális törtekre bontva

$$\frac{2x+2}{x \cdot (x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$

adódik.

Az A, B és C együtthatók meghatározásához az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel, felbontjuk a zárójeleket, elvégezzük az összevonásokat, majd a tagokat fokszám szerint csoportosítjuk:

$$\begin{aligned} 2x+2 &= A\cdot(x^2+1)+(Bx+C)\cdot x \\ 2x+2 &= Ax^2+A+Bx^2+Cx \\ 2x+2 &= (A+B)\cdot x^2+Cx+A. \end{aligned}$$

Két polinom pontosan akkor egyezik meg, ha a megfelelő fokszámú tagok együtthatói megegyeznek, így az

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 0 & = & A & + & B & & \\ 2 & = & & & & & C \\ 2 & = & A & & & & \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ebből $A=2$, $B=-2$ és $C=2$ adódik. Ezeket visszahelyettesítve az

$$\frac{x+1}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

egyenletbe, majd felhasználva az integrál additív tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+2}{x\cdot(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{x}+\frac{-2x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x+\int \frac{-2x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x+\int \frac{-2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\cdot\ln|x|-\ln(x^2+1)+2\cdot\operatorname{arctg} x+c, \end{aligned}$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

297. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Mivel

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{2x}{x^2+1}=1+\frac{2x}{x^2+1},$$

ezért

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 1+\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x+\ln(x^2+1)+c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

4.8. Integrálás helyettesítéssel

4.8.1. Tétel. Legyenek I és J a valós számok halmazának pozitív hosszúságú részintervallumai! Ha a $g\colon I \to J$ függvény differenciálható és létezik az $f\colon J \to \mathbb{R}$ függvény határozatlan integrálja, akkor létezik az $f \circ g \cdot g'$ függvény határozatlan integrálja és

$$\int \big(f \circ g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ g(x).$$

4.8.2. Következmény. Ha a $g\colon I \to J$ függvény differenciálható és invertálható, továbbá létezik az $f\colon J \to \mathbb{R}$ függvény határozatlan integrálja, akkor létezik az $f \circ g \cdot g'$ függvény határozatlan integrálja és

$$\left(\int \big(f \circ g(t)\big) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot g^{-1}(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4.8.3. Megjegyzés. Az előző következményben szereplő formula azt jelenti, hogy az f függvény integráljának kiszámításához az

$$f \circ g(t) \cdot g'(t)$$

függvény integrálját számoljuk ki, majd annak a g inverzével való kompozícióját vesszük. Ezt a módszert nevezzük a helyettesítéses integrálás módszerének.

A helyettesítés szó arra utal, hogy az x változót helyettesítjük egy $x = g(t)$ függvénnyel annak reményében hogy az $f(x)$ integrálja helyett az $f \circ g(t) \cdot g'(t)$ függvény integrálját egyszerűbben ki lehet számolni.

4.8.4. Példa. Kiszámoljuk az

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad (x > 0)$$

integrált.

Vezessük be a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést. Ekkor $x = g(t) = t^2$, ahol $t \geq 0$. A g függvény deriváltja $\frac{dx}{dt} = g'(t) = 2t$. A következményben szereplő jelöléseket megtartva

$$f \circ g(t) \cdot g'(t) = \frac{\cos t}{t} \cdot 2t,$$

így

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos t}{t} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int 2\cos t\,\mathrm{d}t = 2\sin t + c.$$

Alkalmazva a g inverzével való kompozíciót, ami azt jelenti, hogy „visszahelyettesítjük” a t helyére a $\sqrt{x}$-et azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\sin\sqrt{x} + c.$$

Kidolgozott feladatok

298. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést, amiből

$$x = t^2, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (t^2)' = 2t,$$

így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int \frac{t+1-1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\cdot\int 1-\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\cdot(t-\ln|t+1|)+c = \\ &= 2\cdot\big(\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\big)+c,\end{aligned}$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

299. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítést, amiből

$$x = \ln t, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (\ln t)' = \frac{1}{t}$$

adódik, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t+1-1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int 1-\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = t-\ln|t+1|+c = \mathrm{e}^x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+c,\end{aligned}$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

300. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítést, amiből

$$x = \ln t, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (\ln t)' = \frac{1}{t}$$

adódik, azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + c = \\ = \operatorname{arctg}\mathrm{e}^x + c.$$

301. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int \sqrt{x}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést, amiből

$$x = t^2, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (t^2)' = 2t$$

adódik, azt kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{x}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int t\cdot \mathrm{e}^t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int t^2\cdot \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

A kapott integrálra kétszer alkamazva a parciális integrálás képletét

$$2\cdot\int t^2\cdot\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\cdot\left(t^2\cdot\mathrm{e}^t - \int 2t\cdot\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) = \\ = 2\cdot\left(t^2\cdot\mathrm{e}^t - 2t\cdot\mathrm{e}^t + 2\cdot\mathrm{e}^t\right) + c = \\ = \mathrm{e}^t\cdot(2t^2 - 4t + 4) + c$$

adódik, ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál:

$$\int \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \cdot (2x - 4 \cdot \sqrt{x} + 4) + c.$$

302. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést, amiből

$$x = t^2, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (t^2)' = 2t$$

adódik, azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin t}{t} \cdot 2t \,\mathrm{d}t = 2 \cdot \int \sin t \,\mathrm{d}t = -2\cos t + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.
Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál:

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = -2 \cdot \cos \sqrt{x} + c.$$

303. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int \cos \sqrt[3]{x} \,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\sqrt[3]{x} = t$ helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$x = t^3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 3t^2.$$

A helyettesítést végrehajtva

$$\int \cos \sqrt[3]{x} \,\mathrm{d}x = \int 3t^2 \cdot \cos t \,\mathrm{d}t$$

adódik. A kapott integrálra a parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy
$$\int 3t^2 \cdot \cos t \, \mathrm{d}t = 3t^2 \cdot \sin t - \int 6t \cdot \sin t \, \mathrm{d}t.$$
A $6t \cdot \sin t$ függvényre ismét alkalmazzuk a parciális integrálás képletét. Ekkor
$$\int 6t \cdot \sin t \, \mathrm{d}t = -6t \cdot \cos t + \int 6 \cdot \cos t \, \mathrm{d}t = -6t \cdot \cos t + 6 \cdot \sin t + c_1$$
adódik, ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Tehát azt kaptuk, hogy
$$\int 3t^2 \cdot \cos t \, \mathrm{d}t = 3t^2 \cdot \sin t + 6t \cdot \cos t - 6 \cdot \sin t + c,$$
ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt[3]{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál
$$\int \cos \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{x^2} \cdot \sin \sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} \cdot \cos \sqrt[3]{x} - 6 \cdot \sin \sqrt[3]{x} + c.$$

304. Feladat. Számoljuk ki az
$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$
integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést
$$x = t^2, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (t^2)' = 2t$$
adódik. Ezt felhasználva
$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos t}{2t} \cdot 2t \, \mathrm{d}t = \int \cos t \, \mathrm{d}t = \sin t + c,$$
ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál:
$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \sin \sqrt{x} + c.$$

305. Feladat. Számoljuk ki az
$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \, \mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\sqrt{x+1} = t$ helyettesítést

$$x = t^2 - 1, \quad \text{amiből} \quad \frac{dx}{dt} = 2t$$

adódik. A helyettesítést végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2 \cdot \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1 - \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2 \cdot (t - \operatorname{arctg} t) + c = \\ &= 2\left(\sqrt{x+1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}\right) + c,\end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

306. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int x \cdot \sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\sqrt{x+2} = t$ helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$x = t^2 - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 2t.$$

A helyettesítést végrehajtva

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x &= \int (t^2-2) \cdot t \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int 2t^4 - 4t^2\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{2}{5} \cdot t^5 - \frac{4}{3} \cdot t^3 + c,\end{aligned}$$

aadódik, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt[3]{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál:

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{5} \cdot (\sqrt{x+2})^5 - \frac{4}{3} \cdot (\sqrt{x+2})^3 + c = \\
&= (\sqrt{x+2})^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot (x+2) - \frac{4}{3}\right) + c = \\
&= (\sqrt{x+2})^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2}{5}x - \frac{8}{15}\right) = \\
&= \frac{2}{15} \cdot (\sqrt{x+2})^{\frac{3}{2}} \cdot (3x-4) + c.
\end{aligned}$$

5. fejezet

Riemann-integrál és alkalmazásai

5.1. A Riemann-integrál definíciója

5.1.1. Definíció. Legyenek a és b olyan valós számok, melyekre $a < b$ teljesül és tekintsük az $[a; b]$ intervallumot. Legyen

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Ekkor a

$$d = \big\{[x_0; x_1]; [x_1; x_2]; \ldots ; [x_{n-1}; x_n]\big\}$$

halmazt az $[a; b]$ intervallum egy *bosztás*nak vagy *felosztás*ának nevezzük.

A beosztás *finomság*a az osztópontok által keletkezett részintervallumok hosszának maximuma.

Azt mondjuk, hogy a d beosztás *ekvidisztáns*, ha

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1},$$

azaz a d halmazban szereplő intervallumok egyenlő hosszúságúak.

Az $x_0; x_1; \ldots ; x_n$ valós számokat a beosztás *osztópont*jainak mondjuk.

Az $[a; b]$ intervallum összes beosztásainak halmazát $\mathcal{D}[a; b]$ módon jelöljük.

Azt mondjuk, hogy a beosztások egy sorozata *minden határon túl finomodó* vagy más szóval *normális beosztássorozat*, ha az osztópontok számával végtelenhez tartva, a leghosszabb részintervallum hossza is nullához tart.

5.1.2. Példa. Az $[1; 6]$ intervallumnak a

$$d = \big\{[1; 2]; [2; 3]; [3; 4]; [4; 5]; [5; 6]\big\}$$

halmaz egy ekvidisztáns beosztása.

A beosztás osztópontjainak halmaza:

$$\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

A beosztás finomsága 1 egység.

5.1.3. Definíció. Legyen $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és

$$d = \big\{[x_{i-1}; x_i] \,\big|\, i = 1, 2, \ldots , n\big\}$$

az $[a; b]$ intervallum egy beosztása.
Vezessük be az

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots , n)$$

és az

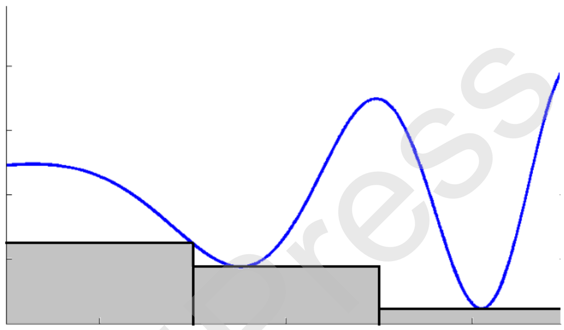
$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

jelöléseket!

Az

$$s(f;d) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

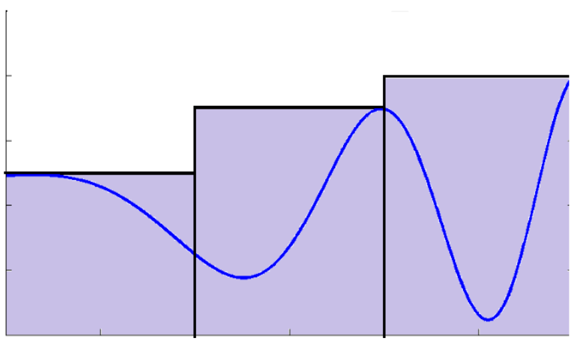
összeget az f függvény d beosztásához tartozó *alsó integrálközelítő összegé*nek nevezzük.



Az

$$S(f;d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

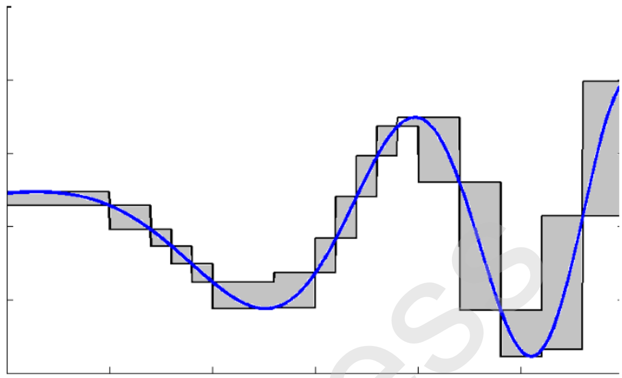
összeget az f függvény d beosztásához tartozó *felső integrálközelítő összegé*nek mondjuk.



Az

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d)$$

értéket az f függvény d beosztásához tartozó *oszcillációs összeg*ének hívjuk. Ezt a fogalmat az alábbi ábra szemlélteti:



5.1.4. Példa. Tekintsük az $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvényt! A $[0;1]$ intervallumot osszuk fel 5 egyenlő részre.

Ekkor minden keletkezett részintervallum hossza $\frac{1}{5} = 0{,}2$, így a beosztás finomsága is $0{,}2$.

A beosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \{0; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8; 1\},$$

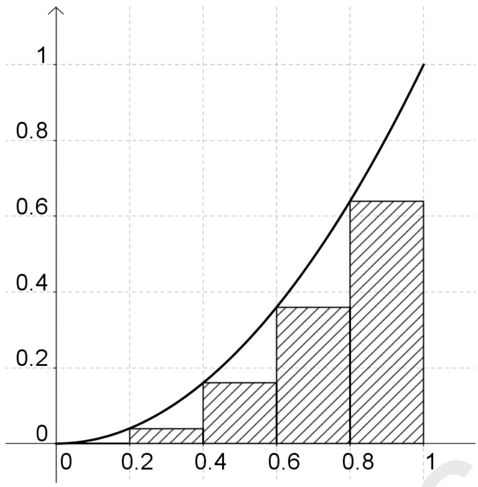
A beosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \big\{[0; 0{,}2]; [0{,}2; 0{,}4]; [0{,}4; 0{,}6]; [0{,}6; 0{,}8]; [0{,}8; 1]\big\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned} s(f;d) &= 0 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = \\ &= 0{,}2 \cdot (0{,}04 + 0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = 0{,}2 \cdot 1{,}2 = 0{,}24. \end{aligned}$$

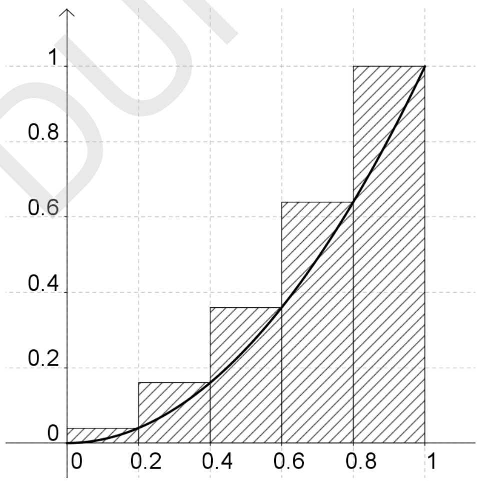
A függvény grafikonját, valamint az alsó integrálközelítő összeget az alábbi ábra szemlélteti:



A felső integrálközelítő összeg:

$$S(f;d) = 0{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 0{,}2 \cdot (0{,}04 + 0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64 + 1) = 0{,}2 \cdot 2{,}2 = 0{,}44.$$

A függvény grafikonját, valamint a felső integrálközelítő összeget az alábbi ábra szemlélteti:



Az oszcillációs összeg:

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d) = 0,44 - 0,24 = 0{,}2.$$

5.1.5. Megjegyzés. Ha az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1};x_i]} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

és

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1};x_i]} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

5.1.6. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, továbbá d_1 és d_2 az $[a;b]$ intervallum beosztásai, akkor

$$s(f;d_1) \le S(f;d_2),$$

tehát bármely alsó integrálközelítő összeg nem nagyobb, mint bármely felső integrálközelítő összeg.

5.1.7. Következmény. Az alsó integrálközelítő összegek halmaza felülről korlátos és a felső integrálközelítő összegek halmaza alulról korlátos.

5.1.8. Definíció. Az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának pontos felső korlátját az f függvény *alsó integrál*jának nevezzük:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{d \in \mathcal{D}[a;b]} s(f;d).$$

Az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény felső integrálközelítő összegei halmazának pontos alsó korlátját az f függvény *felső integrál*jának nevezzük:

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{d \in \mathcal{D}[a;b]} S(f;d).$$

5.1.9. Megjegyzés. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.1.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény *Riemann-integrálható*, ha

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Közös értéküket az f függvény *Riemann-integrálján*ak nevezzük. Jele:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.1.11. Megjegyzés. Nem-negatív értékű, Riemann-integrálható függvény Riemann-integráljának geometriai jelentése a függvény grafikonjának az x tengellyel bezárt területe.

5.1.12. Megjegyzés. Negatív értékű, Riemann-integrálható függvény esetén a függvény Riemann-integrálja abszolút értékének geometriai jelentése a függvény grafikonjának az x tengellyel bezárt területe.

5.1.13. Megjegyzés. Egy Riemann-integrálható függvény Riemann-integráljának geometriai jelentése a függvény grafikonjának az x tengellyel bezárt „előjeles” területe.

Kidolgozott feladatok

307. Feladat. Tekintsük az $f\colon [1;4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4}{x}$ függvényt! Az $[1;4]$ intervallumot három egyenlő részre osztjuk.

a) Határozzuk meg a beosztás finomságát!

b) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeget!

c) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

d) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeget!

e) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

f) Adjuk meg az f függvény d beosztásához tartozó oszcillációs összeget!

<u>**Megoldás:**</u>

a) A keletkezett részintervallumok hossza 1, így a beosztás finomsága 1.

b) A beosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \{1; 2; 3; 4\},$$

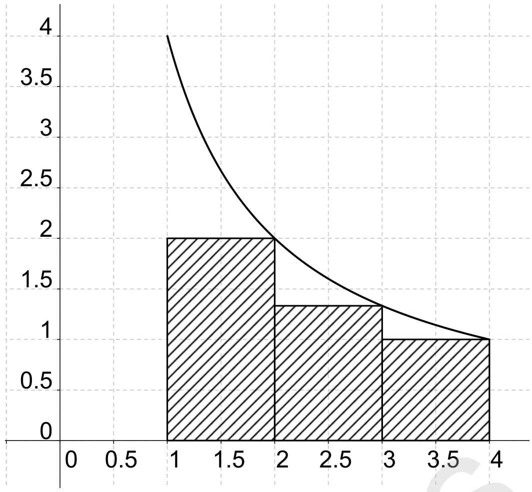
A beosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \big\{[1;2]; [2;3]; [3;4]\big\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$s(f;d) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot 1 = 2 + \frac{4}{3} + 1 = \frac{13}{3}.$$

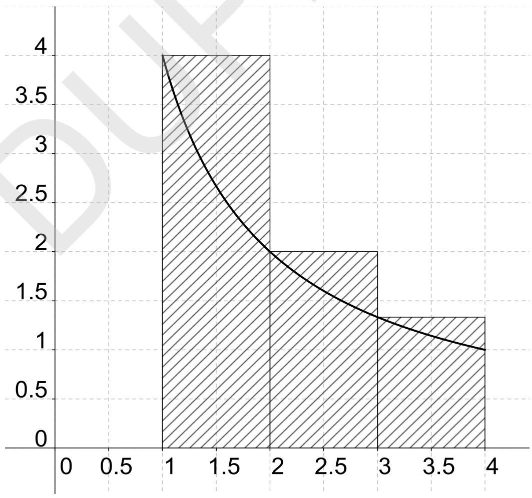
c) A függvény grafikonja és az alsó integrálközelítő összeg:



d) A felső integrálközelítő összeg:

$$S(f;d) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{4}{3} = 4 + 2 + \frac{4}{3} = \frac{22}{3}.$$

e) A függvény grafikonja és a felső integrálközelítő összeg:



f) Az oszcillációs összeg:

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d) = \frac{22}{3} - \frac{13}{3} = 3.$$

308. Feladat. Tekintsük az $f\colon [0;2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvényt! A $[0;2]$ intervallumot négy egyenlő részre osztjuk.

a) Határozzuk meg a beosztás finomságát!

b) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeget!

c) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeget!

Megoldás:

a) Ha a $[0;2]$ intervallumot 4 egyenlő részre osztjuk fel, akkor a keletkezett részintervallumok hossza $\frac{2}{4} = 0{,}5$, így a beosztás finomsága $0{,}5$.

b) A beosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \{0; 0{,}5; 1; 1{,}5; 2\},$$

A beosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \big\{[0; 0{,}5]; [0{,}5; 1]; [1; 1{,}5]; [1{,}5; 2]\big\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned} s(f;d) &= 0{,}5 \cdot 2^0 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}5} + 0{,}5 \cdot 2^1 + 0{,}5 \cdot 2^{1{,}5} = \\ &= 0{,}5 \cdot (1 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{8}) = 3{,}62. \end{aligned}$$

c) A felső integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned} S(f;d) &= 0{,}5 \cdot 2^{0{,}5} + 0{,}5 \cdot 2^1 + 0{,}5 \cdot 2^{1{,}5} + 0{,}5 \cdot 2^2 = \\ &= 0{,}5 \cdot (\sqrt{2} + 2 + \sqrt{8} + 4) = 5{,}12. \end{aligned}$$

5.2. A Riemann integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

5.2.1. Megjegyzés. Ebben a szakaszban az alsó integrálközelítő összegre, illetve felső integrálközelítő összegre, valamint az oszcillációs összegre használni fogjuk az $s_n(f;d)$, illetve $S_n(f;d)$, valamint az $\mathcal{O}_n(f;d)$ jelöléseket is ott, ahol fontos hangsúlyozni, hogy n részre osztjuk fel az $[a;b]$ intervallumot.

5.2.2. Tétel. Legyen $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és

$$d = \big\{[x_{i-1};x_i] \,\big|\, i = 1, 2, \dots, n\big\}$$

az $[a;b]$ intervallum egy beosztása.

Legyen $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$, ahol $i = 1, \dots, n$. Ha az f függvény Riemann-integrálható az $[a;b]$ intervallumon, akkor

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

5.2.3. Tétel. Az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az $[a;b]$ intervallumon és az integrál értéke I, ha az $[a;b]$ intervallumnak van olyan beosztássorozata, amelyhez tartozó alsó integrálközelítő összeg és a felső integrálközelítő összeg konvergens és mindkettő határértéke I, azaz

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f;d) = \lim_{n\to\infty} S_n(f;d) = I.$$

5.2.4. Következmény. Az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha a felső integrálközelítő összeg és alsó integrálközelítő összeg különbsége nullához tart:

$$\lim_{n\to\infty} \big(S_n - s_n\big) = 0,$$

azaz ha az oszcillációs összeg határértéke zérus:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{O}_n(f;d) = 0.$$

5.2.5. Következmény. Az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az $[a;b]$ intervallumon, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan d beosztása az $[a;b]$ intervallumnak, amelyhez tartozó $\mathcal{O}(f;d)$ oszcillációs összeg ε-nál kisebb, azaz a függvény grafikonja lefedhető ε-nál kisebb összterületű téglalapokkal.

5.2.6. Megjegyzés. A 5.2.4, illetve a 5.2.5 következményeket Riemann-kritériumként is szokás említeni.

5.2.7. Tétel. Ha az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény monoton, akkor Riemann-integrálható.

5.2.8. Tétel. Ha az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor Riemann-integrálható.

5.2.9. Tétel. Ha az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény szakadási helyeinek halmaza megszámlálható számosságú, akkor f Riemann-integrálható.

5.2.10. Következmény. Ha az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvénynek véges sok helyen van szakadása, akkor f Riemann-integrálható.

Kidolgozott feladatok

309. Feladat. Tekintsük az $f\colon [0;9] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt! Bizonyítsuk be, hogy az f függvény Riemann-integrálható a $[0;9]$ intervallumon! A bizonyításhoz azt a kritériumot használjuk, ami szerint a függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha a $[0;9]$ intervallumot n egyenlő részre osztva az oszcillációs összeg nullához tart, ha $n \to \infty$. Adjuk meg a Riemann-integrál értékét is!

Megoldás:

A beosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \left\{0; 9 \cdot \frac{1}{n}; 9 \cdot \frac{2}{n}; \ldots; 9 \cdot \frac{n-1}{n}; 9\right\},$$

A beosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \left\{\left[0; 9 \cdot \frac{1}{n}\right]; \left[9 \cdot \frac{1}{n}; 9 \cdot \frac{2}{n}\right]; \ldots; \left[9 \cdot \frac{n-1}{n}; 9\right]\right\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned}
s_n(f;d) &= \frac{9}{n} \cdot 0 + \frac{9}{n} \cdot \sqrt{9 \cdot \frac{1}{n}} + \frac{9}{n} \cdot \sqrt{9 \cdot \frac{2}{n}} + \ldots + \frac{9}{n} \cdot \sqrt{9 \cdot \frac{n-1}{n}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{9}{n} \cdot 3 \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n-1}\right) = \\
&= \frac{27}{n \cdot \sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n-1}\right).
\end{aligned}$$

A felső integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned}
S_n(f;d) &= \frac{9}{n} \cdot \sqrt{9 \cdot \frac{1}{n}} + \frac{9}{n} \cdot \sqrt{9 \cdot \frac{2}{n}} + \ldots + \frac{9}{n} \cdot \sqrt{9 \cdot \frac{n-1}{n}} + \frac{9}{n} \cdot \sqrt{9} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{9}{n} \cdot 3 \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right) = \\
&= \frac{27}{n \cdot \sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right).
\end{aligned}$$

Az oszcillációs összeg a felső és alsó integrálközelítő összeg különbsége, így

$$\mathcal{O}_n(f;d) = S_n(f;d) - s_n(f;d) = \frac{27}{n \cdot \sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} = \frac{27}{n}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{27}{n} = 0,$$

amivel igazoltuk az állítást.

310. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^2$ függvény a $[0;1]$ intervallumon Riemann-integrálható! A bizonyítás elvégzéséhez használjuk azt a kritériumot, hogy egy függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha az alsó integrálközelítő összegek és a felső integrálközelítő összegek sorozatának határértéke megegyezik! Számoljuk ki az $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ értéket is!

Megoldás:

Első lépésben a $[0,1]$ intervallumot n egyenlő részre osztjuk. A keletkezett osztópontok halmaza:

$$\mathcal{D} = \left\{0, \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \ldots; \frac{n-1}{n}; 1\right\}.$$

Az osztópontok által keletkezett részintervallumok:

$$d = \left\{\left[0; \frac{1}{n}\right]; \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right]; \ldots; \left[\frac{n-1}{n}; 1\right]\right\}.$$

A beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeg:

$$s_n(f;d) = \frac{1}{n} \cdot \left(0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2\right).$$

Felhasználva, hogy az első n természetes szám négyzetének összege

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

azt kapjuk, hogy az alsó integrálközelítő összeg:

$$s_n(f;d) = \frac{1}{n^3} \cdot (0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}.$$

Ebből az alsó integrálközelítő összegek határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f;d) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^3} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-n)\cdot(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3}.$$

A beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeg:

$$S_n(f;d) = \frac{1}{n}\cdot\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right).$$

Felhasználva, hogy az első n természetes szám négyzetének összege

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

azt kapjuk, hogy

$$S_n(f;d) = \frac{1}{n^3}\cdot(1^2+2^2\ldots+(n-1)^2+n^2) =$$
$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

Ebből a felső integrálközelítő összegek határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;d) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^3} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n)\cdot(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3}.$$

Mivel az alsó és felső integrálközelítő összegek hatátértéke megegyezik, ezért a függvény Riemann integrálható, és az integrál értéke:

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

311. Feladat. A Riemann-integrálhatóság valamelyik elegendő feltételét alkalmazva mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 12$$

függvény Riemann-integrálható a $[0; 6]$ intervallumon!

Megoldás:

Mivel az f függvény zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, ezért Riemann-integrálható.

312. Feladat. A Riemann-integrálhatóság elegendő feltételeit alkalmazva mutassuk meg, hogy az $f(x) = \cos x$ függvény Riemann-integrálható a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon!

Megoldás:

Mivel az f függvény korlátos és monoton csökkenő, ezért Riemann-integrálható.

Mivel az f függvény korlátos és folytonos, ezért Riemann-integrálható.

5.3. A Riemann-integrál tulajdonságai, Newton-Leibniz tétel

5.3.1. Megjegyzés. Ebben a szakaszban, ha mást nem mondunk, akkor I a valós számok halmazának egy pozitív hosszúságú részintervallumát jelöli.

5.3.2. Definíció. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

azaz az integrálás határainak felcserélésével a Riemann-integrál értéke előjelet vált.

5.3.3. Tétel. Ha $f, g\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, akkor

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

azaz a Riemann-integrál additív tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy összeget tagonként integrálhatunk.

5.3.4. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

azaz a Riemann-integrál homogén tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy konstans szorzó kiemelhető az integrál elé.

5.3.5. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor $|f|$ is Riemann-integrálható és

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

5.3.6. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény és $c \in [a;b]$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

azaz a Riemann-integrál intervallum additív tulajdonságú.

5.3.7. Következmény. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

azaz, ha az integrál kezdő- és végpontja megegyezik, akkor az integrál értéke zérus.

5.3.8. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény és $[c;d] \subset [a;b]$, akkor az f függvény $[c;d]$ intervallumra való leszűkítése is Riemann-integrálható.

5.3.9. Tétel. Ha $f\colon [-a;a] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható páratlan függvény, akkor

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

5.3.10. Tétel. Ha $f\colon [-a;a] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható páros függvény, akkor

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.3.11. Tétel. Ha $f, g\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ olyan Riemann-integrálható függvények, melyekre $g(x) \le f(x)$ teljesül, akkor

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

azaz a Riemann-integrál monoton tulajdonságú.

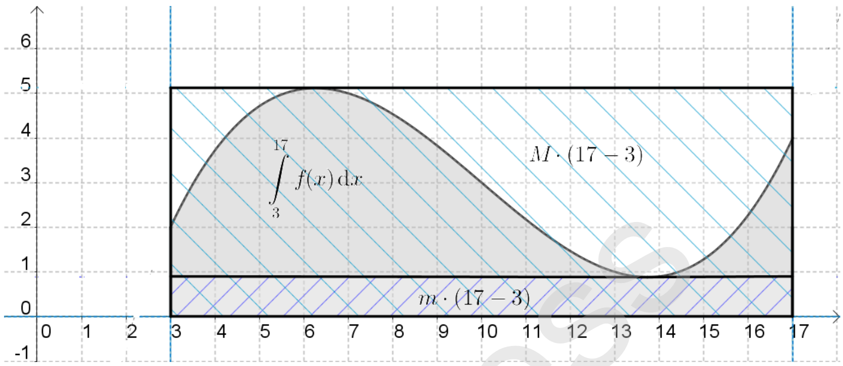
5.3.12. Következmény. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény és $f(x) \ge 0$ minden $x \in [a;b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

5.3.13. Tétel. (Az integrálszámítás első középértéktétele.)

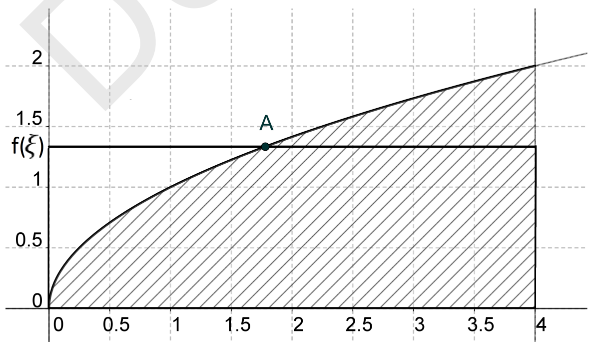
Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor léteznek olyan m és M valós számok, hogy

$$m \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \cdot (b-a).$$



5.3.14. Tétel. (Az integrálszámítás második középértéktétele.)
Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor létezik olyan ξ valós szám, hogy

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b-a).$$



5.3.15. Tétel. (Newton-Leibniz tétel.)
Legyen $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény az $[a;b]$ intervallumon és differenciálható az $]a;b[$ intervallumon. Legyen továbbá F az f egy primitív függvénye.

Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

5.3.16. Példa. Kiszámoljuk az $f(x) = 3x$ függvény Riemann-integrálját a $[0;1]$ intervallumon a Newton-Leibniz tétel alkalmazásával:

$$\int_0^1 3x\,\mathrm{d}x = \left[3 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{0}{2} = \frac{3}{2}.$$

5.3.17. Definíció. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor az

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad x \in [a;b]$$

függvényt az f függvény *felső határ függvény*ének vagy más szóval *területmérő függvény*ének nevezzük.

5.3.18. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor a területmérő függvénye folytonos.

5.3.19. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény és folytonos az $x_0 \in]a;b[$ helyen, továbbá F az f területmérő függvénye, akkor a F differenciálható az x_0 helyen és $F'(x_0) = f(x_0)$.

5.3.20. Tétel. Minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.

5.3.21. Megjegyzés. Nem minden primitív függvény írható fel véges sok tag összegeként, azaz zárt alakban.

Például az $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ függvény folytonos, ezért Riemann-integrálható, azonban nem létezik zárt alakban felírható primitív függvénye.

5.3.22. Tétel. Ha $f, g\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, valamint f és g folytonosan differenciálhatóak az $]a;b[$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.3.23. Példa. Kiszámoljuk az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x$ integrál értékét.

Az előbbi tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x =$$

$$= [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

A számolást úgy is elvégezhettük volna, hogy az $x \cdot \cos x$ függvény egy primitív függvényét határozzuk meg, majd azt követően alkalmazzuk a Newton-Leibniz tételt.

5.3.24. Következmény. Ha $f, g\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, továbbá f és g differenciálhatóak a $]a;b[$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x.$$

5.3.25. Tétel. Ha $g\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonosan differenciálható függvény és $f\colon]g(a); g(b)[\to \mathbb{R}$ korlátos és folytonos, akkor

$$\int_a^b f \circ g(t) \cdot g'(t) \,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

5.3.26. Példa. Kiszámoljuk az $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ integrál értékét!

Végezzük el a $t = \sqrt{x}$ helyettesítést. Ekkor $t^2 = x$, így $\frac{dx}{dt} = 2t$. Tehát

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{4}} \frac{\mathrm{e}^t}{t} \cdot 2t \,\mathrm{d}t = \int_0^2 2 \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t =$$

$$= [2 \cdot \mathrm{e}^t]_0^2 = 2 \cdot \mathrm{e}^2 - 2.$$

Kidolgozott feladatok

313. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int_4^4 x^2 + x \cdot \mathrm{e}^{x^2} + 3x \,\mathrm{d}x$$

Riemann-integrál értékét!

Megoldás:

Mivel

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

ezért

$$\int_4^4 x^2 + x \cdot \mathrm{e}^{x^2} + 3x \,\mathrm{d}x = 0.$$

314. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int_{-3}^{3} \sin x \,\mathrm{d}x$$

Riemann-integrál értékét!

Megoldás:

Mivel az $f(x) = \sin x$ függvény páratlan és a $[-3; 3]$ az origóra szimmetrikus intervallum, ezért

$$\int_{-3}^{3} \sin x \,\mathrm{d}x = 0.$$

315. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = x^7 \cdot \cos x$ függvény Riemann-integrálját a $[-5; 5]$ intervallumon!

Megoldás:

Mivel $f(-x) = (-x)^7 \cdot \cos(-x) = -x^7 \cdot \cos x$, ezért $f(-x) = -f(x)$, így az f függvény páratlan. A $[-5; 5]$ intervallum az origóra szimmetrikus, ezért

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

316. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = x^3 + 3x$ függvény Riemann-integrálját a $[-1; 1]$ intervallumon!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = (-x)^3 + 3 \cdot (-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = -f(x),$$

ezért $f(-x) = -f(x)$, így az f függvény páratlan. A $[-1; 1]$ intervallum az origóra szimmetrikus, ezért

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

317. Feladat. Ha f Riemann integrálható függvény a $[0; 6]$ intervallumon és

$$\int_{0}^{6} f(x)\, \mathrm{d}x = 30,$$

valamint

$$\int_{0}^{2} f(x)\, \mathrm{d}x = 12,$$

akkor mivel egyenlő $\displaystyle\int_{2}^{6} f(x)\, \mathrm{d}x$?

Megoldás:

A Riemann-integrál intervallum additivitási tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_{0}^{2} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{2}^{6} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{6} f(x)\, \mathrm{d}x,$$

így

$$\int_{2}^{6} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{6} f(x)\, \mathrm{d}x - \int_{0}^{2} f(x)\, \mathrm{d}x = 30 - 12 = 18.$$

318. Feladat. Ha f és g Riemann integrálható függvények a $[0; 4]$ intervallumon és

$$\int_{0}^{4} f(x)\, \mathrm{d}x = 5,$$

valamint

$$\int_{0}^{4} g(x)\, \mathrm{d}x = 7,$$

akkor mivel egyenlő $\int_0^4 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$?

Megoldás:

A Riemann-integrál additív tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^4 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 5 + 7 = 12.$$

319. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = \cos 2x$ függvény Riemann-integrálját a $[0;\pi]$ intervallumon a Newton-Leibniz tétel felhasználásával!

Megoldás:

Mivel az $f(x) = \cos 2x$ függvény egy primitív függvénye $F(x) = \frac{\sin 2x}{2}$, ezért

$$\int_0^\pi \cos 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\sin 2\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2} = 0.$$

320. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = x^3$ függvény Riemann-integrálját a $[0;4]$ intervallumon a Newton-Leibniz tétel felhasználásával!

Megoldás:

Mivel az $f(x) = 2x$ függvény egy primitív függvénye $F(x) = x^2$, ezért

$$\int_0^4 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = 4^4 - 0^4 = 256.$$

321. Feladat. Határozzuk meg az a valós szám értékét úgy, hogy

$$\int_a^{2a} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{56}{3}$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel

$$\int_a^{2a} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{2a} = \frac{8a^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{7a^3}{3},$$

ezért a feltétel szerint

$$\frac{7a^3}{3} = \frac{56}{3} \quad \Rightarrow \quad a^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

322. Feladat. Határozzuk meg az $\int\limits_{-1}^{2} x^2 - 4x + 1 \,\mathrm{d}x$ integrál értékét!

Megoldás:

Meghatározunk egy primitív függvényt, majd alkalmazzuk a Newton-Leibniz tételt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^{2} x^2 - 4x + 1 \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + x\right]_{-1}^{2} = \\ &= \left(\frac{2^3}{3} - 2\cdot 2^2 + 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2\cdot(-1)^2 + (-1)\right) = \\ &= \left(\frac{8}{3} - 8 + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - 1\right) = 0.\end{aligned}$$

323. Feladat. Határozzuk meg az $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^{2x+3} \,\mathrm{d}x$ integrál értékét!

Megoldás:

A Newton-Leibniz tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^{2x+3} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x+3}}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{\mathrm{e}^{2\cdot 1+3}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2\cdot 0+3}}{2} = \frac{\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3}{2}.$$

324. Feladat. Számoljuk ki az $\int_0^\pi x\cdot\cos x \,\mathrm{d}x$ integrál értékét!

Megoldás:

A parciális integrálás Riemann-integrálra vonatkozó tétele szerint

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{\pi} x\cdot\cos x \,\mathrm{d}x &= [x\cdot\sin x]_0^\pi - \int\limits_{0}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = [x\cdot\sin x]_0^\pi + [\cos x]_0^\pi = \\ &= \pi\cdot\sin\pi - 0\cdot\sin 0 + \cos\pi - \cos 0 = -2.\end{aligned}$$

A számolást úgy is elvégezhettük volna, hogy az $x\cdot\cos x$ függvény egy primitív függvényét határozzuk meg, majd azt követően alkalmazzuk a Newton-Leibniz tételt.

325. Feladat. Számoljuk ki az $\int_0^9 \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ integrál értékét!

Megoldás:

Végezzük el a $t = \sqrt{x}$ helyettesítést. Ekkor $t^2 = x$, így $\frac{dx}{dt} = 2t$. Tehát

$$\int\limits_0^9 \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\sqrt{0}}^{\sqrt{9}} \frac{2\mathrm{e}^t}{t} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^3 2 \cdot \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^3 = \mathrm{e}^6 - 1.$$

5.4. Folytonos függvények átlagértéke

5.4.1. Motiváció. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és az $[a;b]$ intervallumot n darab egyenlő részre osztjuk az $x_0, x_1, \dots, x_n$ osztópontok segítségével, akkor az f függvényértékek átlaga:

$$\frac{f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{k=0}^{n} f(x_k).$$

Ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük, azaz ha vesszük az $n \to \infty$ határátmenetet, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.4.2. Definíció. Az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény átlagértéke:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.4.3. Példa. Az $f(x) = 3x$ függvény átlagértéke a $[0;2]$ intervallumon

$$\frac{1}{2-0} \cdot \int\limits_0^2 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (6-0) = 3.$$

5.4.4. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor van olyan ξ valós szám, hogy

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi),$$

tehát az átlagérték előáll függvényértékként.

5.4.5. Megjegyzés. Ha $v(t)$ egy vízszintes pályán mozgó test sebesség-idő függvénye, akkor a $[t_1; t_2]$ időintervallumban az átlagsebesség:

$$\overline{v} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot [s(t)]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \big(s(t_2) - s(t_1)\big) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Kidolgozott feladatok

326. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt!

a) Határozzuk meg az f függvény átlagértékét a $[0; 9]$ intervallumon!

b) Határozzuk meg azt a ξ valós számot, amelyre $\overline{f} = f(\xi)$ teljesül!

Megoldás:

a) Mivel

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18,$$

ezért a függvényértékek átlaga:

$$\overline{f} = \frac{1}{9} \cdot 18 = 2.$$

b) Keressük a $\sqrt{\xi} = 2$ egyenletnek a $[0; 9]$ intervallumba eső megoldását. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy $\xi = 4$.

327. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 4x - x^2$ függvényt!

a) Határozzuk meg az f függvény átlagértékét a $[0; 2]$ intervallumon!

b) Határozzuk meg azt a ξ valós számot, amelyre $\overline{f} = f(\xi)$ teljesül!

Megoldás:

a) Mivel

$$\int_0^2 4x - x^2\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3},$$

ezért a függvényértékek átlaga:

$$\overline{f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

b) Keressük a $4\xi - \xi^2 = \frac{8}{3}$ egyenletnek a $[0; 2]$ intervallumba eső megoldását. Az egyenletet nullára redukálva azt kapjuk, hogy

$$4\xi - \xi^2 - \frac{8}{3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3\xi^2 - 12\xi + 8 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$\xi_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-96}}{6} = \frac{6 \pm 2\cdot\sqrt{3}}{3}$$

adódik, így $\xi_1 \approx 3{,}16$, illetve $\xi_2 \approx 0{,}85$.

Mivel $\xi_1 \notin [0;2]$, ezért egyetlen ξ érték létetik, $\xi \approx 0{,}85$.

328. Feladat. Egy test sebesség-idő függvénye

$$v(t) = -t^2 + 6t \qquad \big(t \in [0;6]\big).$$

Az időt másodpercben, a sebességet $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$-ban mérjük. Határozzuk meg a $[0;6]$ időintervallumon az átlagsebességet!

Megoldás:

Mivel

$$\int\limits_0^6 -t^2 + 6t\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^3}{3} + 3t^2\right]_0^6 = -72 + 3\cdot 36 = 36,$$

ezért az átlagsebesség:

$$\overline{v} = \frac{1}{6}\cdot\int\limits_0^6 -t^2 + 6t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\cdot 36 = 6\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

5.5. Területszámítás integrálással

5.5.1. Tétel. Az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény grafikonja, az x tengely, az $x = a$ és az $x = b$ egyenesesek által közrezárt (korlátos) síkidom területét úgy határozzuk meg, hogy

1) kiszámoljuk az f függvény zérushelyeit;
2) az f zérushelyei segítségével az $[a;b]$ intervallumot részekre osztjuk;
3) meghatározzuk az egyes intervallumokon az f függvény Riemann-integrálját;
4) a kapott integrálok abszolútértékét összeadjuk.

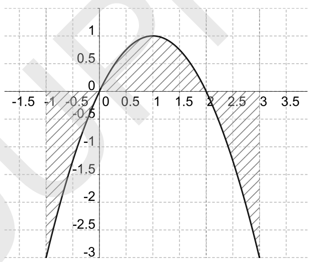
5.5.2. Példa. Kiszámoljuk az $f(x) = -x^2 + 2x$ függvénynek az x tengellyel bezárt területét a $[-1;3]$ intervallumon.

Az f függvény zérushelyei a

$$-x^2 + 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot (-x + 2) = 0$$

egyenlet megoldásai, azaz $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 2$.

A függvény grafikonját és a keresett területet mutatja az alábbi ábra:



Tehát a $[-1;0]$, a $[0;2]$ és a $[2;3]$ intervallumokon kell kiszámolnunk az f függvény Riemann-integrálját.

Az f függvény Riemann-integrálja a $[-1;0]$ intervallumon:

$$\int_{-1}^{0} -x^2 + 2x \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = -\frac{4}{3}.$$

Az f függvény Riemann-integrálja a $[0;2]$ intervallumon:

$$\int_{0}^{2} -x^2 + 2x \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{2} = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}.$$

Az f függvény Riemann-integrálja a $[2;3]$ intervallumon:

$$\int_2^3 -x^2+2x\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_2^3=(-9+9)-\left(-\frac{8}{3}+4\right)=-\frac{4}{3}.$$

Tehát a keresett terület:

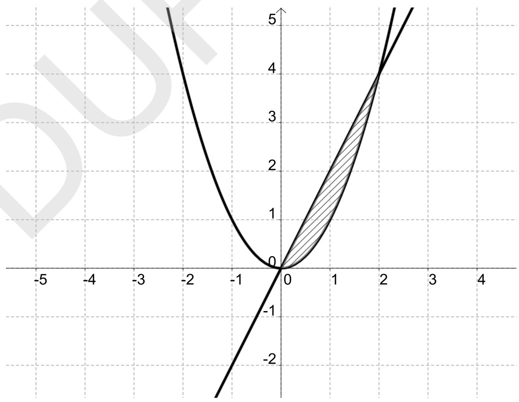
$$T=3\cdot\frac{4}{3}=4.$$

5.5.3. Tétel. Az $f,g\colon[a;b]\to\mathbb{R}$ folytonos függvények grafikonjai, az $x=a$ és az $x=b$ egyenesesek által közrezárt (korlátos) síkidom területét úgy határozzuk meg, hogy

1) megoldjuk az $f(x)=g(x)$ egyenletet;
2) a kapott megoldások segítségével az $[a;b]$ intervallumot részekre osztjuk;
3) meghatározzuk az egyes intervallumokon az $f(x)-g(x)$ függvény Riemann-integrálját;
4) a kapott integrálok abszolútértékét összeadjuk.

5.5.4. Példa. Kiszámoljuk az $f(x)=x^2$ és $g(x)=2x$ függvények grafikonjai által közrezárt területet.

Először vázoljuk fel a függvények grafikonjait:



A függvények grafikonjainak metszéspontjait a $x^2=2x$ egyenlet megoldásai adják. Az egyenletet nullára rendezve, majd szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy

$$x^2-2x=0\qquad\Rightarrow\qquad x\cdot(x-2)=0.$$

Mivel egy szorzat csak úgy lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, ezért $x_1=0$, illetve $x_2=2$.

A két függvény grafikonja által közrezárt terület:

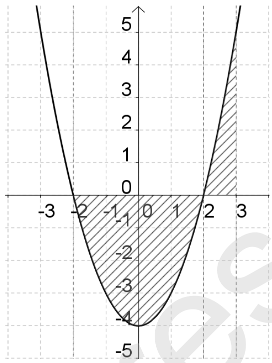
$$T = \int_0^2 2x - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Kidolgozott feladatok

329. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = x^2 - 4$ függvénynek az x tengellyel bezárt területét a $[-2;3]$ intervallumon!

Megoldás:

A keresett területet az alábbi ábra szemlélteti:



Az f függvény zérushelyei:

$$x^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 2.$$

Mindkét zérushely a $[-2;3]$ intervallumban van. A zérushelyek a megadott intervallumot két részre bontják, a $[-2;2]$ és a $[2;3]$ intervallumra, ezért ezeken intervallumokon kell kiszámolnunk az f függvény Riemann-integrálját.

Egyrészt

$$\int_{-2}^{2} x^2 - 4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right) = -\frac{32}{3}.$$

Másrészt

$$\int_{2}^{3} x^2 - 4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{3} = (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{7}{3}.$$

A keresett terület:

$$T = \left|\int_{-2}^{2} x^2 - 4\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{2}^{3} x^2 - 4\,\mathrm{d}x\right| = \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = 13.$$

330. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 2 - x^2$ és a $g(x) = -x$ függvényeket!

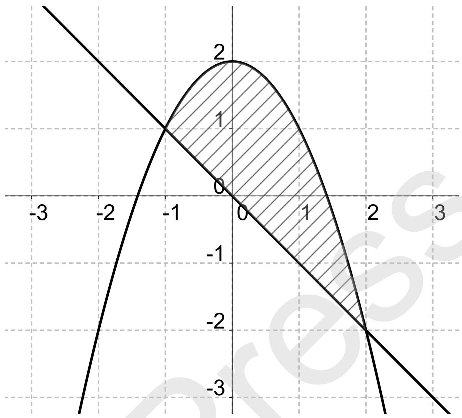
a) Vázoljuk fel közös koordinátarendszerbe az f és g függvények grafikonját!

b) Határozzuk meg az f és g függvények grafikonjainak közös pontjait!

c) Számoljuk ki az f és g függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

a) A függvények grafikonjai:



b) A függvények grafikonjainak metszéspontjait a $2 - x^2 = -x$ egyenlet megoldásai adják. Az egyenletet nullára rendezve $x^2 - x - 2 = 0$ adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

Tehát: $x_1 = -1$, illetve $x_2 = 2$.

c) A két függvény grafikonja által közrezárt terület:

$$T = \int_{-1}^{2} 2 - x^2 - (-x)\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(4 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 6 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{5}{6} = \frac{9}{2}.$$

331. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = x + 2$ függvényeket!

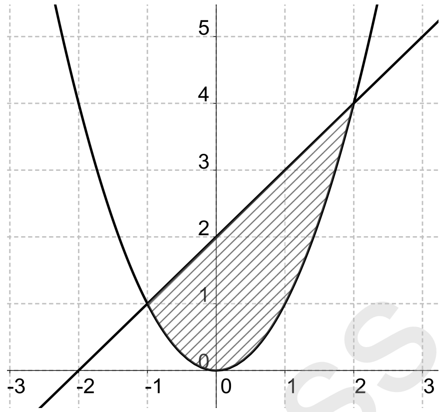
a) Vázoljuk fel közös koordinátarendszerbe az f és g függvények grafikonját!

b) Határozzuk meg az f és g függvények grafikonjainak közös pontjait!

c) Számoljuk ki az f és g függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

a) A függvények grafikonjai:



b) A függvények grafikonjainak metszéspontjait az $x^2 = x+2$ egyenlet megoldásai adják. Az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy $x^2 - x - 2 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

adódik, így $x_1 = -1$, illetve $x_2 = 2$.

c) A keresett terület:

$$T = \int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 4,5.$$

332. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 2^x$ és a $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$ függvényeket!

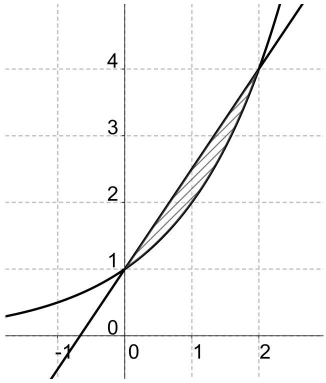
a) Vázoljuk fel közös koordinátarendszerbe az f és g függvények grafikonját!

b) Határozzuk meg az f és g függvények grafikonjainak közös pontjait!

c) Számoljuk ki az f és g függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

a) A függvények grafikonjai:



b) A függvények grafikonjainak metszéspontjait a

$$2^x = \frac{3}{2}x + 1$$

egyenlet megoldásai adják. A megoldásokat grafikusan keressük meg. Az ábrázolásból $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 2$ adódik.

c) A két függvény grafikonja által közrezárt terület:

$$T = \int_0^2 \frac{3}{2}x + 1 - 2^x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + x - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2 =$$

$$= \left(3 + 2 - \frac{4}{\ln 2}\right) + \frac{1}{\ln 2} = 5 - \frac{3}{\ln 2} \approx 0{,}6719.$$

333. Feladat. Az f függvény grafikonja egy olyan parabola, melyre illeszkednek a $(0;1)$, $(1;2)$ és $(2;5)$ pontok!

a) Adjuk meg az f függvény leképezési szabályát!

b) Írjuk az $(0;1)$ és $(2;5)$ pontokra illeszkedő szelő egyenletét!

c) Számoljuk ki az f függvény grafikonja és az előbbi szelő által közrezárt területet!

Megoldás:

a) Az f függvényt $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakban keressük. A feladatunk az a, b és c együtthatók meghatározása. Mivel $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ és $f(2) = 5$,

ezért

$$\begin{aligned}1 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c\\ 2 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c\\ 5 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c\end{aligned}$$

adódik, így a feladatunk az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 1 & = & & & & & c\\ 2 & = & a & + & b & + & c\\ 5 & = & 4a & + & 2b & + & c \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Az első és második sort megcserélve azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Az első sor -4-szeresét hozzáadva a harmadik sorhoz

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

adódik. A második és a harmadik sort megcserélve azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Az utolsó mátrixból felírva a lineáris egyenletrendszert

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2 & = & a & + & b & + & c\\ -3 & = & & - & 2b & - & 3c\\ 1 & = & & & & & c \end{array}\right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből azt kaptuk, hogy $c = 1$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-2b - 3 = -3 \qquad \Rightarrow \qquad b = 0$$

adódik. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$a + 1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad a = 1.$$

Tehát az f függvény grafikonja:

$$f(x) = x^2 + 1.$$

b) Mivel a keresett egyenes meredeksége

$$m = \frac{5-1}{2-0} = 2,$$

ezért a szelő egyenlete

$$y = m \cdot x + k = 2x + k.$$

Mivel $(0; 1)$ pont illeszkedik a szelőre, ezért $k = 1$, így azt kapjuk, hogy a szelő egyenlete: $y = 2x + 1$.

c) Az f függvény grafikonja és a szelő által közrezárt terület:

$$T = \int_0^2 2x + 1 - (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 2x - x^2\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

5.6. Függvény grafikonjának ívhossza, forgástest térfogata és felszíne

5.6.1. Tétel. Legyen $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor az f függvény grafikonjának ívhossza

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

5.6.2. Példa. Kiszámoljuk az $f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$ függvény grafikonjának ívhosszát a $[0;3]$ intervallumon.

Mivel $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$, ezért

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\left(f'(x)\right)^2 = (\sqrt{x})^2 = x,$$

így az ívhossz:

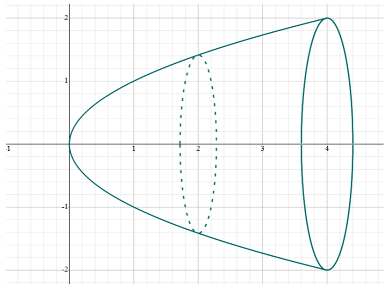
$$L = \int_0^3 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3} \cdot (1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

5.6.3. Tétel. Legyen az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, nem-negatív értékű. Ekkor az f függvény x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogata:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.6.4. Példa. Ha az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját a $[0;4]$ intervallumon megforgatjuk az x tengely körül, akkor a keletkezett forgástest térfogata:

$$V = \pi \cdot \int_0^4 (\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi.$$



5.6.5. Tétel. Legyen az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, nem-negatív értékű. Ekkor az f függvény x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest palástjának területe:

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Kidolgozott feladatok

334. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény grafikonjának ívhosszát a $[-2; 2]$ intervallumon!

Megoldás:

Mivel $f'(x) = \operatorname{sh} x$, ezért az ívhossz

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, \mathrm{d}x.$$

Mivel $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, ezért $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$, így

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 x}\, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} |\operatorname{ch} x|\, \mathrm{d}x.$$

Mivel a $\operatorname{ch} x$ függvény páros, ezért

$$L = 2 \cdot \int_{0}^{2} \operatorname{ch} x\, \mathrm{d}x = 2 \cdot [\operatorname{sh} x]_0^2 = 2 \cdot \operatorname{sh} 2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2} = \frac{\mathrm{e}^4 - 1}{\mathrm{e}^2} \approx 7{,}25.$$

335. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának ívhosszát a $[0; 9]$ intervallumon.

Megoldás:

Mivel $f'(x) = 2x$, így $\left(f'(x)\right)^2 = 4x^2$, tehát

$$L = \int_{0}^{4} \sqrt{1 + 4x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Először meghatározzuk a $\sqrt{1 + 4x^2}$ függvény egy primitív függvényét.

Elvégezve a $2x = \operatorname{sh} t$ helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sh} t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch} t.$$

A helyettesítés végrehajtása után

$$I = \int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$$

adódik. A hiperbolikus függvényekre vonatkozó

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{ch}^2 t = 1 + \operatorname{sh}^2 t,$$

azonosság miatt

$$I = \int \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t.$$

A

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$
$$\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch} 2t$$

hiperbolikus azonosságok megfelelő oldalait összeadva, majd a kapott egyenletet 2-vel osztva azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 t = \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}.$$

Ezt felhasználva

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}\right) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.
Mivel $t = \operatorname{arsh} 2x$, ezért

$$I = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{8} \cdot \operatorname{sh}\left(2 \cdot \operatorname{arsh} 2x\right) + c.$$

Felhasználva, hogy $\operatorname{sh} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha$, ezért

$$I = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \operatorname{sh}\left(\operatorname{arsh} 2x\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh} 2x\right) + c.$$

Mivel $\operatorname{sh}\left(\operatorname{arsh} x\right) = x$, ezért

$$I = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh} 2x\right) + c.$$

A $\operatorname{ch} \alpha = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \alpha}$ azonosság miatt

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\left(\operatorname{arsh} 2x\right)} + c = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1+4x^2} + c. \end{aligned}$$

Tehát

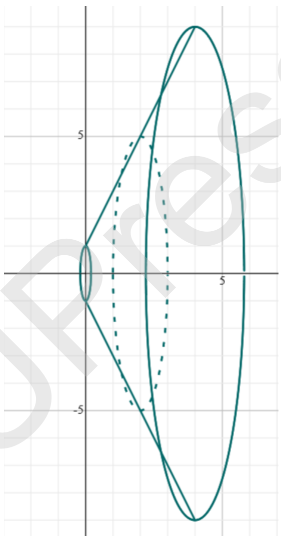
$$L = \int\limits_0^9 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{2}\cdot x \cdot \sqrt{1+4x^2}\right]_0^9 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot \operatorname{arsh} 18 + \frac{1}{2}\cdot 9 \cdot \sqrt{325} \approx 82{,}02.$$

336. Feladat. Az $f\colon [0;4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ függvény grafikonját forgassuk meg az x tengely körül! Számoljuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

Megoldás:

Az f függvény grafikonjának megforgatásával az alábbi forgástest keletkezik:



A forgástest térfogatát a $V = \pi \cdot \int_0^4 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$ képlettel számolhatjuk ki.

Ezt felhasználva a keresett térfogat:

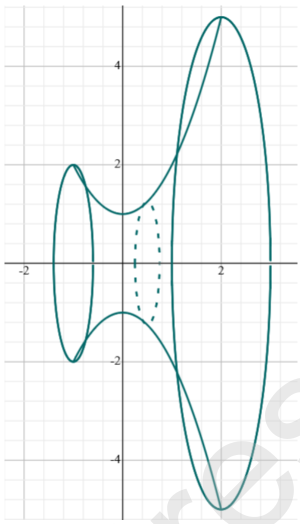
$$V = \pi \cdot \int_0^4 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \left[\frac{(2x+1)^3}{6}\right]_0^4 =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{(2\cdot 4+1)^3}{6}\right) - \pi \cdot \left(\frac{(2\cdot 0+1)^3}{6}\right) = \pi \cdot \frac{728}{6} = \frac{364}{3}\cdot \pi.$$

337. Feladat. Az $f\colon [-1;2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+1$ függvény grafikonját forgassuk meg az x tengely körül! Számoljuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

Megoldás:

Az f függvény grafikonjának megforgatásával a következő forgástest keletkezik:



Mivel

$$\big(f(x)\big)^2 = (x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1,$$

ezért

$$\int_{-1}^{2} (x^2+1)^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x^4 + 2x^2 + 1 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5} + 2\cdot\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} =$$
$$= \left(\frac{2^5}{5} + 2\cdot\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} + 2\cdot\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right) = \frac{78}{5}.$$

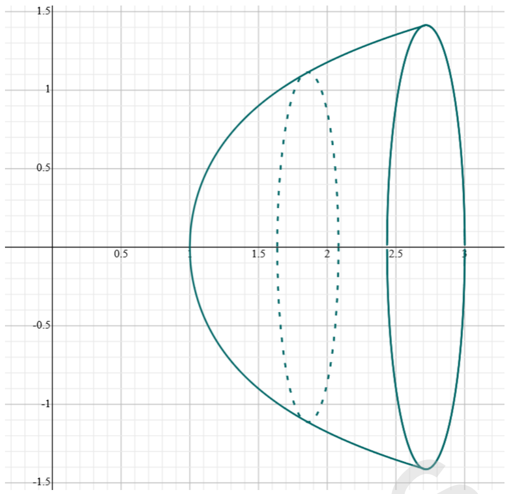
Tehát a keresett térfogat:

$$V = \frac{78}{5}\cdot\pi \approx 49.$$

338. Feladat. Az $f\colon [1;\mathrm{e}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2\ln x}$ függvény grafikonját forgassuk meg az x tengely körül! Számoljuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

Megoldás:

A keletkezett forgástestet az alábbi ábra szemlélteti:



Mivel

$$\big(f(x)\big)^2 = \left(\sqrt{2\ln x}\right)^2 = 2\ln x,$$

ezért a parciáls integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_1^{\mathrm{e}} 2\ln x \,\mathrm{d}x = [2x \cdot \ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 2x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= [2x \cdot \ln x - 2x]_1^{\mathrm{e}} = 2\mathrm{e} \cdot \ln \mathrm{e} - 2\mathrm{e} - (2 \cdot \ln 1 - 2) = 2.$$

A keresett térfogat:

$$V = 2\pi \approx 6{,}28.$$

339. Feladat. Az $f(x) = \sqrt{2x+1}$ függvény grafikonját megforgatjuk az x tengely körül a $[0; b]$ intervallumon! A keletkezett forgástest térfogata 6π. Számoljuk ki a b értékét!

Megoldás:

Mivel a térfogat

$$V = \pi \cdot \int_0^b 2x + 1 \,\mathrm{d}x = \pi[x^2 + x]_0^b = \pi \cdot (b^2 + b),$$

ezért $b^2 + b = 6$, azaz $b^2 + b - 6 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

így $b > 0$ miatt $b = 2$ adódik.

340. Feladat. Számoljuk ki az $f\colon [0;2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának területét!

Megoldás:

A palást területe:

$$A = 2\pi \cdot \int_0^2 f(x) \cdot \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Mivel $f'(x) = 2$, ezért $\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} = \sqrt{5}$. Tehát a palást területe:

$$A = 2\pi \cdot \int_0^2 (2x+1) \cdot \sqrt{5}\,\mathrm{d}x = 2\pi \cdot \sqrt{5} \cdot \left[\frac{(2x+1)^2}{2 \cdot 2}\right]_0^2 =$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\frac{(2 \cdot 2 + 1)^2}{4}\right) - 2\pi \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\frac{(2 \cdot 0 + 1)^2}{4}\right) =$$

$$= 2\pi \cdot 6 \cdot \sqrt{5} = 12\pi \cdot \sqrt{5} \approx 84{,}3.$$

341. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0;4]$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának területét!

Megoldás:

Az f függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

A palást területe:

$$A = 2\pi \cdot \int_0^4 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \cdot \int_0^4 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}\right]_0^4 = 2\pi \cdot \left(\frac{17}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} - 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{17 \cdot \sqrt{17}}{8} \cdot \frac{2}{3} - 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{17 \cdot \sqrt{17} - 1}{6} \cdot \pi \approx 36{,}18.$$

5.7. Síklemez súlypontja

5.7.1. Tétel. Legyenek $\rho\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ és $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Ha egy $\rho(x)$ sűrűségű síklemezt az $x = a$, $x = b$, $y = 0$ egyenesek és az f függvény grafikonja határol, akkor a síklemez tömegközéppontja $S = (x_s; y_s)$, ahol

$$x_s = \frac{\int\limits_a^b x \cdot \rho(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b \big(\rho(x) \cdot f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

5.7.2. Megjegyzés. Ha a sűrűség állandó, akkor a tömegközéppont nem függ a tárgy anyagi minőségétől. Ezekben az esetekben a tömegközéppont helyett a súlypont elnevezést használjuk.

5.7.3. Következmény. Ha egy homogén tömegeloszlású síklemezt az $x = a$, $x = b$, $y = 0$ egyenesek és az f függvény grafikonja határol, akkor a síklemez súlypontja $S = (x_s; y_s)$, ahol

$$x_s = \frac{\int\limits_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

5.7.4. Példa. Kiszámoljuk az $f(x) = \sqrt{x}$ függvénynek a $[0;4]$ intervallumon az x tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

Mivel

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}\right]_0^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot 8\right) = \frac{16}{3}$$

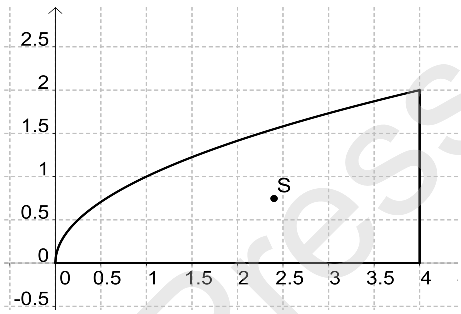
és

$$\int_0^4 x \cdot \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x \cdot x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 =$$
$$= \left[\frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5}\right]_0^4 = \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{64}{5},$$

ezért

$$x_s = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{64}{5}} = \frac{16}{3} \cdot \frac{5}{64} = \frac{5}{12}.$$

Másrészt mivel
$$\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8,$$
ezért
$$y_s = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}.$$
Tehát a súlypont:
$$S = \left(\frac{12}{5}; \frac{3}{4}\right).$$
A homogén síklemezet és a súlypontot az alábbi ábra szemlélteti:



Kidolgozott feladatok

342. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = \sqrt{2x}$ függvénynek a $[0;2]$ intervallumon az x tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

Megoldás:

A síklemez súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int\limits_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Mivel

$$\int_0^2 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} \cdot \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} \cdot \int_0^2 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = $$
$$= \sqrt{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \sqrt{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}\right]_0^2 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{8}\right) = \frac{8}{3}$$

és

$$\int_0^2 x \cdot \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} \cdot \int_0^2 x \cdot \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} \cdot \int_0^2 x \cdot x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$\sqrt{2} \cdot \int_0^2 x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}}\right]_0^2 = \sqrt{2} \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5}\right]_0^2 =$$
$$= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \sqrt{32}\right) = \frac{16}{5},$$

ezért

$$x_s = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{8}{3}} = \frac{16}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{5}.$$

Másrészt mivel

$$\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x = [x^2]_0^2 = 4,$$

ezért

$$y_s = \frac{2}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Tehát a súlypont:

$$S = \left(\frac{6}{5}; \frac{3}{4}\right).$$

343. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvénynek a $[0;2]$ intervallumon az x tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

Megoldás:

A síklemez súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int\limits_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Mivel

$$\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^2 = \mathrm{e}^2 - 1.$$

és a parciális integrálás képlete szerint az $x \cdot \mathrm{e}^x$ függvény egy primitív függvénye

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x,$$

ezért

$$\int\limits_0^2 x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]_0^2 =$$

$$= 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 + 1 = \mathrm{e}^2 + 1,$$

így

$$x_s = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{\mathrm{e}^2 - 1} \approx 1{,}313.$$

Mivel

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^4 - 1}{2}$$

ezért

$$y_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\mathrm{e}^4 - 1}{2}}{\mathrm{e}^2 - 1} \approx 2{,}097.$$

Tehát a súlypont:

$$S = \left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8}\right) \approx (1{,}31; 2{,}1).$$

344. Feladat. Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ függvénynek a $[0;3]$ intervallumon az x tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

Megoldás:

A síklemez súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int\limits_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Mivel

$$\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$$

és

$$\int_0^3 x \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^3 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4},$$

ezért

$$x_s = \frac{\frac{81}{4}}{9} = \frac{9}{4}.$$

Mivel

$$\int_0^3 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \frac{243}{5},$$

ezért

$$y_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{243}{5}}{9} = \frac{27}{10}.$$

Tehát a súlypont:

$$S = \left(\frac{9}{4}; \frac{27}{10}\right).$$

5.8. Mozgástani feladatok

5.8.1. Tétel. Ha a $v\colon [0;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény egy test mozgását leíró sebesség-idő függvény és ismert a test helye a t_0 időpillanatban, akkor a hely-idő függvény:

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

5.8.2. Tétel. Ha az $a\colon [0;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény egy test mozgását leíró gyorsulás-idő függvény és ismert a test sebessége a t_0 időpillanatban, akkor a sebesség-idő függvény:

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Kidolgozott feladatok

345. Feladat. Egy versenyautó gyorsulás-idő függvénye az alábbi alakú lesz:

$$a(t) = \frac{112 - 56\ln(t+1)}{(t+1)^{\frac{3}{2}}},$$

ahol t a veresenyautó indulásától mért időt jelöli.

a) Számoljuk ki a gyorsulást a $t = 0$ időpillanatban!

b) Határozzuk meg a versenyautó sebesség-idő függvényét, felhasználva, hogy az autó nyugalomból indul.

c) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet sikerült végül elérni a gépkocsival!

Megoldás:

a) A gyorsulás a $t = 0$ időpillanatban:

$$a(0) = \frac{112 - 56\ln 1}{(0+1)^{\frac{3}{2}}} = 112\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) A sebesség-idő függvényt a gyorsulás-idő függvény integrálásával kapjuk

$$v(t) = \int_0^t \frac{112 - 56\ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau = 56 \cdot \int_0^t \frac{2 - \ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau.$$

A törtet két tört különbségére felbontva azt kapjuk, hogy

$$\frac{2 - \ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Az első tört integrálja:

$$\int \frac{2}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau = \int 2\cdot(\tau+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= -4\cdot(\tau+1)^{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{4}{\sqrt{\tau+1}} + c.$$

A második tört a parciális integrálás képletével integrálható:

$$\int \frac{\ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau = \int \ln(\tau+1)\cdot(\tau+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \ln(\tau+1)\cdot\frac{(\tau+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{\tau+1}\cdot\frac{(\tau+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= -2\cdot\ln(\tau+1)\cdot(\tau+1)^{-\frac{1}{2}} + 2\cdot\int(\tau+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= -2\cdot\ln(\tau+1)\cdot(\tau+1)^{-\frac{1}{2}} - 4\cdot(\tau+1)^{-\frac{1}{2}} + c =$$

$$= \frac{-2\cdot\ln(\tau+1)-4}{\sqrt{\tau+1}} + c.$$

Ezt felhasználva a sebesség-idő függvény:

$$v(t) = \int_0^t \frac{112-56\ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau = 56\cdot\left[\frac{2\cdot\ln(\tau+1)}{\sqrt{\tau+1}}\right]_0^t =$$

$$= 56\cdot\frac{2\cdot\ln(t+1)}{\sqrt{t+1}} = \frac{112\cdot\ln(t+1)}{\sqrt{t+1}}.$$

c) A maximális sebességet abban az időpillanatban éri el a versenyautó, amikor a gyorsulása zérus, azaz meg kell oldanunk az $a(t)=0$ egyenletet. A

$$\frac{112-56\ln(t+1)}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

egyenletet a nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$112-56\ln(t+1)=0 \qquad\Rightarrow\qquad 2=\ln(t+1),$$

így $\mathrm{e}^2 = t+1$, tehát $t=\mathrm{e}^2-1$.

Tehát $t\approx 6{,}39$ másodperc elteltével éri el a rakéta meghajtású versenyautó a maximális sebességét. Ekkor a maximális sebességének nagysága

$$v(6{,}39)\approx 82{,}41\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

346. Feladat. Egy egyenes pályán mozgó pont sebesség-idő függvénye

$$v\colon[0;8]\to\mathbb{R},\quad v(t)=8t+10.$$

Mekkora utat tesz meg a pont, ha az időt másodpercben, a sebességet $\mathrm{m/s}$-ban mérjük?

Megoldás:

A megtett utat a sebesség-idő függvénynek a megfelelő intervallumon vett integráljaként kapjuk meg, így a megtett út

$$\begin{aligned} s &= \int_0^8 8t + 10\,\mathrm{d}t = \left[4t^2 + 10t\right]_0^8 = \\ &= (4 \cdot 8^2 + 10 \cdot 8) - (4 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0) = 336, \end{aligned}$$

így a megtett út $336\,\mathrm{m}$.

347. Feladat. Egy részecske a $[0; 20]$ időintervallumban egyenes vonalú mozgást végez, sebessége $v(t) = 24 - 2t$. Melyik időpontban maximális a részecskének a kezdőponttól való távolsága? Mekkora ez a maximális távolság?

Megoldás:

Az hely-idő függvényt a sebesség-idő függvény idő szerinti integrálja adja, jelen esetben azzal a kezdeti érték feltétellel, hogy $s(0) = 0$.

Mivel

$$s(t) = \int 24 - 2t\,\mathrm{d}t = 24t - t^2 + c$$

és $s(0) = 0$, ezért $0 = 24 \cdot 0 - 0^2 + c$, amiből $c = 0$ adódik.

Tehát a keresett hely-idő függvény

$$s(t) = 24t - t^2.$$

Ennek a függvénynek keressük a maximumát a $[0; 20]$ intervallumon.

Ezt meghatározhatjuk differenciálszámítás segítségével, de elemi úton is, mivel egy másodfokú függvénynek keressük a szélsőértékét.

Teljes négyzetté alakítjuk a másodfokú kifejezést:

$$s(t) = 24t - t^2 = -1 \cdot (t^2 - 24t) = -1 \cdot \left[(t-12)^2 - 144\right] = -(t-12)^2 + 144.$$

Ebből leolvasható, hogy a maximum hely $t = 12$, a maximum érték pedig $s = 144$, így 12 másodperc elteltével lesz a legtávolabb a pont a kiindulási helytől, és ez a maximális távolság $144\,\mathrm{m}$.

5.9. Improprius integrál

5.9.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f\colon [a;\infty[\to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor definíció szerint

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.9.2. Példa. Az

$$\int_5^\infty \frac{6}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrál esetén az előbbi definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_5^\infty \frac{6}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_5^c \frac{6}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_5^c 6\cdot x^{-2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{6}{x}\right]_5^c = \lim_{c\to\infty} \left(-\frac{6}{c} + \frac{6}{5}\right) = \frac{6}{5},$$

így az improprius integrál értéke $\frac{6}{5}$.

5.9.3. Definíció. Legyen $b \in \mathbb{R}$ és $f\colon\,]-\infty; b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor definíció szerint

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.9.4. Példa. Az

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

integrál értéke:

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \left[\mathrm{e}^x\right]_c^0 = \lim_{c\to-\infty} (1-\mathrm{e}^c) = 1.$$

5.9.5. Definíció. Legyen $f\colon]-\infty;\infty[\to\mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor definíció szerint

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to\infty}} \int\limits_{c}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.9.6. Példa. Az

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrál értéke az előbbi definíció szerint

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to\infty}} \int\limits_{c}^{d} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to\infty}} [\operatorname{arctg} x]_c^d =$$
$$= \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to\infty}} (\operatorname{arctg} d - \operatorname{arctg} c) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

5.9.7. Definíció. Legyen $f\colon [a;b[\to\mathbb{R}$ folytonos függvény és $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=\infty$ vagy $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=-\infty$. Ekkor definíció szerint

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b-} \int\limits_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.9.8. Példa. Az

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

integrál értéke az előbbi definíciót felhasználva

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0} \int\limits_{-1}^{c} x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{c\to 0} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_{-1}^{c} = \lim_{c\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{c^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{1}\right) = -\frac{3}{2},$$

így az improprius integrál értéke $-\frac{3}{2}$.

5.9.9. Definíció. Legyen $f\colon\,]a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$ vagy $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$. Ekkor definíció szerint

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a+} \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.9.10. Példa. Az

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál értéke az előbbi definíciót alkalmazva

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0} \int\limits_c^1 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_c^1 =$$
$$= \lim_{c\to 0} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{c}) = 2,$$

így az improprius integrál értéke 2.

5.9.11. Definíció. Legyen $f\colon [a;s[\cup]s;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x\to s-} f(x) = \infty$ vagy $\lim\limits_{x\to s-} f(x) = -\infty$ vagy $\lim\limits_{x\to s+} f(x) = \infty$ vagy $\lim\limits_{x\to s+} f(x) = -\infty$. Ekkor definíció szerint

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^s f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_s^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.9.12. Példa. Kiszámoljuk az

$$\int\limits_{-2}^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrált. Mivel az előbbi definíció szerint

$$\int\limits_{-2}^0 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0-} \int\limits_{-2}^c \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{c\to 0+} \int\limits_c^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

ezért

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0-}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{c} + \lim_{c\to 0+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{c}^{2} =$$

$$= \lim_{c\to 0-}\left(-\frac{1}{c}+\frac{1}{-2}\right) + \lim_{c\to 0+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{c}\right) = \infty.$$

5.9.13. Definíció. Az előző definíciókban szereplő integrálokat összefoglaló néven *improprius integrálok*nak nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy improprius integrál *konvergens*, ha a definíciójukban szereplő határérték véges.

5.9.14. Megjegyzés. Improprius integrálról akkor beszélünk, ha vagy az intervallum nem korlátos, amin integrálunk, vagy a függvény nem korlátos azon az intervallumon, amin integrálunk.

Kidolgozott feladatok

348. Feladat. Konvergens-e az

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_2^c \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^c = \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

így az improprius integrál konvergens, és az értéke $\frac{1}{2}$.

349. Feladat. Konvergens-e az

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_3^c \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_3^c x^{-3}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_3^c = \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{2c^2}+\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{18},$$

így az improprius integrál konvergens, és értéke $\frac{1}{18}$.

350. Feladat. Konvergens-e az

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját felhasználva

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{-1} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{-1} x^{-3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_c^{-1} =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \left(-\frac{1}{2\cdot(-1)^2} + \frac{1}{2c^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

adódik, így az improprius integrál konvergens, és értéke $-\frac{1}{2}$.

351. Feladat. Konvergens-e az

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_{0}^{c} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \left(-\mathrm{e}^{-c} + 1\right) = 1$$

adódik, így az improprius integrál konvergens, és értéke 1.

352. Feladat. Konvergens-e az

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\ln|x|\right]_1^c =$$
$$= \lim_{c\to\infty}(\ln c - \ln 1) = \infty.$$

Tehát az improprius integrál nem konvergens.

353. Feladat. Konvergens-e az

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^9 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0}\int_c^9 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_c^9 =$$
$$= \lim_{c\to 0}(2\sqrt{9} - 2\sqrt{c}) = 6$$

adódik, így az improprius integrál konvergens, és értéke 6.

5.10. Riemann-integrál közelítő értékének kiszámolása

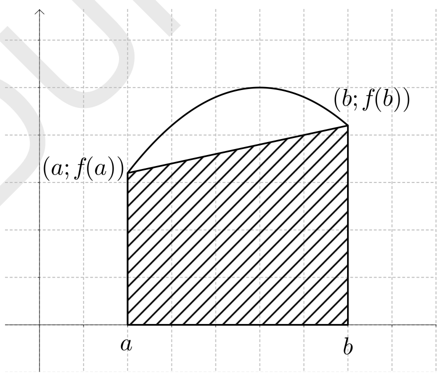
5.10.1. Megjegyzés. Az $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámolása a Newton-Leibniz tétel alkalmazásával sem mindig egyszerű feladat. Sok esetben például az f függvény primitív függvényét nem is tudjuk zárt alakban felírni.

Amikor a primitív függvény megkeresése nehéz vagy akár lehetetlen feladat, akkor az integrál közelítő értékének meghatározása a cél. Ebben a fejezetben két olyan módszerrel ismerkedünk meg, amely segítségével egy folytonos függvény Riemann-integráljának közelítő értékét számolhatjuk ki. Az egyik módszer a trapéz formula, a másik módszer a Simpson formula.

5.10.2. Trapéz formula. Legyen $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a).$$

Tekintsük azt a trapézt, amelyet az $\big(a;f(a)\big)$, $\big(b;f(b)\big)$, $(a;0)$ és $(b;0)$ csúcsok határoznak meg.



Ennek a trapéznak a területe elemi úton is kiszámolható:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a),$$

5.10.3. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{a\leq x\leq b} \left|f''(x)\right|.$$

Tehát a trapéz formulával való közelítés esetén a közelítés maximális hibája:

$$\frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{a\leq x\leq b} \left|f''(x)\right|.$$

5.10.4. Példa. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ függvényt a $[0;1]$ intervallumon! Kiszámoljuk az

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Riemann-integrál közelítő értékét trapéz formulával:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x \approx \frac{f(0)+f(1)}{2} \cdot (1-0) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

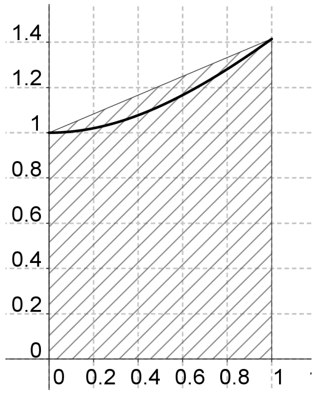
ezért

$$f''(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$$
$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}},$$

így

$$\max_{0\leq x\leq 1} \frac{1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} = 1,$$

tehát a közelítés maximális hibája 1.



5.10.5. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrál közelítő értéknek trapéz formulával való kiszámolását úgy végezzük el, hogy az intervallumot n darab egyenlő részre osztjuk fel és az egyes részintervallumokra alkalmazzuk a trapéz formulát, akkor

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n} \cdot \big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + f(x_n)\big).$$

5.10.6. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, és az $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrál közelítő értékének trapéz formulával való kiszámolását úgy végezzük el, hogy először az intervallumot n darab egyenlő részre osztjuk fel, majd az egyes részintervallumokra alkalmazzuk a trapéz formulát, akkor a közelítés maximális hibája:

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{a \le x \le b} \big|f''(x)\big|.$$

5.10.7. Megjegyzés. Az előző tétel eredményében

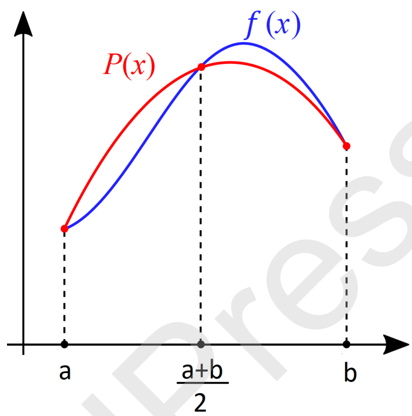
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{a \le x \le b} \big|f''(x)\big| = 0,$$

így az osztópontok számának növelésével a közelítés javul, azza minél több részre osztjuk az alap intervallumot, annál jobb lesz a közelítés.

5.10.8. Simpson formula. Legyen $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

A bizonyítás lényege az, hogy felírjuk az $(a; f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ és $(b; f(b))$ pontokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot, majd a kapott másodfokú függvényt integráljuk.



A kapott integrállal közelítjük az eredeti függvény Riemann-integrálját.

5.10.9. Megjegyzés. A Simpson formula pontosabb értéket ad, mint a trapéz formula.

5.10.10. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ négyszer folytonosan differenciálható függvény, akkor

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \right| \le$$
$$\le \frac{(b-a)^5}{2\,880} \cdot \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

Tehát a Simpson formulával való közelítés esetén a közelítés maximális hibája:

$$\frac{(b-a)^5}{2\,880} \cdot \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

5.10.11. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrál közelítő értéknek Simpson formulával való kiszámolását úgy végezzük el, hogy az intervallumot n darab egyenlő részre osztjuk fel és az egyes részintervallumokra alkalmazzuk a Simpson formulát, akkor

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}\cdot\bigl(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)\ldots+f(x_{2n})\bigr).$$

5.10.12. Tétel. Ha $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ négyszer folytonosan differenciálható függvény és az $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrál közelítő értékének Simpson formulával való kiszámolását úgy végezzük el, hogy az $[a;b]$ intervallumot n darab egyenlő részre osztjuk fel és az egyes részintervallumokra alkalmazzuk a Simpson formulát, akkor a közelítés maximális hibája:

$$\frac{(b-a)^5}{2\,880n^4}\cdot\max_{a\le x\le b}\bigl|f^{(4)}(x)\bigr|.$$

Kidolgozott feladatok

354. Feladat. Tekintsük

$$\int_3^6 \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

a) Közelítsük az integrál értékét trapéz formulával úgy, hogy a $[3;6]$ intervallumot $n = 5$ részintervallumra osztjuk!

b) Becsüljük meg a közelítés hibáját!

c) Közelítsük az integrál értékét Simpson formulával úgy, hogy a $[3;6]$ intervallumot $2n = 10$ részintervallumra osztjuk!

d) Becsüljük meg a közelítés hibáját!

e) Számoljuk ki az integrál pontos értékét!

f) Legalább hány részre osszuk fel a $[3;6]$ intervallumot, ha azt szeretnénk, hogy a trapéz formula esetén a közelítés maximális hibája legfeljebb $0{,}001$ legyen?

Megoldás:

a) Az alapintervallumot 5 egyenlő részre osztjuk, így az keletkező alappontok

$$x_0 = 3; \qquad x_2 = 4{,}2; \qquad x_4 = 5{,}4;$$
$$x_1 = 3{,}6; \qquad x_3 = 4{,}8; \qquad x_5 = 6.$$

Egy részintervallum hossza $0{,}6$.

A trapéz formula általános képlete szerint

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$
$$\approx \frac{b-a}{2n} \cdot \big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big).$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_3^6 \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3-2}}{2} + \sqrt{3{,}6-2} + \sqrt{4{,}2-2} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{4{,}8-2} + \sqrt{5{,}4-2} + \frac{\sqrt{6-2}}{2}\right) =$$
$$= 0{,}6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1{,}6} + \sqrt{2{,}2} + \sqrt{2{,}8} + \sqrt{3{,}4} + \frac{\sqrt{4}}{2}\right) \approx$$
$$\approx 4{,}66.$$

b) A közelítés maximális hibája:

$$\frac{k \cdot (b-a)^3}{12n^2},$$

ahol

$$k = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|.$$

Az $f(x) = \sqrt{x-2} = (x-2)^{\frac{1}{2}}$ függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-2}}.$$

Az f függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{(x-2)^3}},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$k = \max_{x \in [3;6]} \left| \frac{1}{4 \cdot \sqrt{(x-2)^3}} \right| = \frac{1}{4},$$

így a közelítés maximális hibája:

$$\frac{(6-3)^3}{12 \cdot 5^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{400} = 2{,}25 \cdot 10^{-2} = 0{,}0225.$$

c) A Simpson formula esetén az osztópontok száma $2n$, így

$x_0 = 3;$	$x_3 = 3{,}9;$	$x_6 = 4{,}8;$	$x_{10} = 6.$
$x_1 = 3{,}3;$	$x_4 = 4{,}2;$	$x_7 = 5{,}1;$	
$x_2 = 3{,}6;$	$x_5 = 4{,}5;$	$x_9 = 5{,}7;$	

A Simpson formula általános képlete szerint

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{6n}\cdot\left(f(x_0)+4f\left(x_1\right)+2f(x_2)+\right.$$
$$\left.+\,4f\left(x_3\right)+\ldots+4f\left(x_{2n-1}\right)+f(x_{2n})\right).$$

A képletbe behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int_3^6 \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{0{,}6}{6}\cdot\Big(\sqrt{3-2}+4\cdot\sqrt{3{,}3-2}+2\cdot\sqrt{3{,}6-2}+$$
$$+\,4\cdot\sqrt{3{,}9-2}+2\cdot\sqrt{4{,}2-2}+4\cdot\sqrt{4{,}5-2}+$$
$$+\,2\cdot\sqrt{4{,}8-2}+4\cdot\sqrt{5{,}1-2}+2\cdot\sqrt{5{,}4-2}+$$
$$+\,4\cdot\sqrt{5{,}7-2}+\sqrt{6-2}\Big)=$$
$$=\frac{0{,}6}{6}\cdot\Big(\sqrt{1}+4\cdot\sqrt{1{,}3}+2\cdot\sqrt{1{,}6}+4\cdot\sqrt{1{,}9}+$$
$$+\,2\cdot\sqrt{2{,}2}+4\cdot\sqrt{2{,}5}+2\cdot\sqrt{2{,}8}+4\cdot\sqrt{3{,}1}+$$
$$+\,2\cdot\sqrt{3{,}4}+4\cdot\sqrt{3{,}7}+\sqrt{4}\Big)\approx 4{,}667.$$

d) A közelítés maximális hibája:

$$\frac{K\cdot(b-a)^5}{2\,880n^4},$$

ahol

$$K=\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|.$$

Az f függvény harmadrendű deriváltja:

$$f'''(x)=\frac{3}{8}\cdot(x-2)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-2)^5}}.$$

Az f függvény negyedrendű deriváltja:

$$f^4(x)=-\frac{15}{16}\cdot(x-2)^{-\frac{7}{2}}=-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-2)^7}},$$

így $K=\frac{15}{16}$, amiből a közelítés maximális hibája:

$$\frac{(6-3)^5}{2\,880\cdot 5^4}\cdot\frac{15}{16}=\frac{81}{640\,000}=1{,}266\cdot 10^{-4}.$$

e) Az integrál pontos értéke:

$$\int_3^6 \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_3^6 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \approx 4{,}667.$$

f) A közelítés maximális hibája

$$\frac{k \cdot (b-a)^3}{12n^2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 3^3}{12n^2},$$

így a

$$\frac{9}{16n^2} \leq 0{,}001$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk a természetes számok halmazán. Az egyenlőtlenség rendezése után azt kapjuk, hogy

$$562{,}5 \leq n^2,$$

így $n \in \mathbb{N}$ miatt azt kapjuk, hogy $n \geq 24$, így legalább 24 részre kell osztani a $[3;6]$ intervallumot ahhoz, hogy a közelítés maximális hibája 0,001-nél kisebb legyen.

355. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ függvényt a $[0;4]$ intervallumon!

a) Közelítsük az $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ integrál értékét trapéz formulával úgy, hogy a $[0;4]$ intervallumot 4 egyenlő részre osztjuk!

b) Számoljuk ki az integrál pontos értékét!

Megoldás:

a) Az alapintervallumot 4 egyenlő részre osztjuk, így az keletkező osztópontok:

$$x_0 = 0; \qquad x_2 = 2; \qquad x_4 = 4.$$
$$x_1 = 1; \qquad x_3 = 3;$$

Egy részintervallum hossza 1.

A trapéz formula általános képlete szerint

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx\approx \frac{4-0}{2\cdot 4} \cdot \big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\big).$$

Az alábbi táblázat mutatja a függvényértékeket az x_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ helyeken:

x_i	$f(x_i)$
0	$2^{\sqrt{0}} = 1$
1	$2^{\sqrt{1}} = 2$
2	$2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}67$
3	$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}32$
4	$2^{\sqrt{4}} = 4$

A trapéz formula képletébe behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int_0^4 2^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}5 \cdot (1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2{,}67 + 2 \cdot 3{,}32 + 4) \approx 10{,}49.$$

b) Az integrál pontos értékének kiszámolásához első lépésben meghatározzuk az $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ függvény egy primitív függvényét. Ehhez hajtsuk végre a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$x = t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 2t,$$

így

$$\int 2^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2^t \cdot 2t\,\mathrm{d}t.$$

A parciális integrálás képlete szerint

$$\int 2^t \cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2t \cdot \frac{2^t}{\ln 2} - \int 2 \cdot \frac{2^t}{\ln 2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t \cdot 2^t}{\ln 2} - \frac{2 \cdot 2^t}{(\ln 2)^2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel $t = \sqrt{x}$, ezért

$$\int 2^t \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{x} \cdot 2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} - \frac{2 \cdot 2^{\sqrt{x}}}{(\ln 2)^2} + c.$$

Ezt felhasználva

$$\int_0^4 2^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2\sqrt{x}\cdot 2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} - \frac{2\cdot 2^{\sqrt{x}}}{(\ln 2)^2}\right]_0^4 =$$
$$= \frac{16}{\ln 2} - \frac{8}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^2} = \frac{16}{\ln 2} - \frac{6}{(\ln 2)^2} \approx 10{,}59.$$

356. Feladat. Tekintsük

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

a) Közelítsük az integrál értékét trapéz formulával úgy, hogy az $[1;4]$ intervallumot $n=3$ részintervallumra osztjuk!

b) Közelítsük az integrál értékét Simpson formulával úgy, hogy az $[1;4]$ intervallumot $2n=6$ részintervallumra osztjuk!

Megoldás:

a) Az alapintervallumot 3 egyenlő részre osztjuk, így a keletkező alappontok

$$x_0 = 1; \qquad x_2 = 3;$$
$$x_1 = 2; \qquad x_3 = 4.$$

Egy részintervallum hossza 1.

A trapéz formula általános képlete szerint

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$
$$\approx \frac{4-1}{2\cdot 3}\cdot\big(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+f(x_3)\big).$$

Az alábbi táblázat mutatja a függvényértékeket az x_i $(i=1,2,3,4)$ helyeken:

x_i	$f(x_i)$
1	$\frac{\mathrm{e}}{1} \approx 2{,}72$
2	$\frac{\mathrm{e}^2}{2} \approx 3{,}69$
3	$\frac{\mathrm{e}^3}{3} \approx 6{,}7$
4	$\frac{\mathrm{e}^4}{4} \approx 13{,}65$

A trapéz formula képletébe behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}5 \cdot (2{,}72 + 2 \cdot 3{,}69 + 2 \cdot 6{,}7 + 13{,}65) =$$

$$= 0{,}5 \cdot (2{,}72 + 7{,}38 + 13{,}4 + 13{,}65) = 18{,}575.$$

b) Az alapintervallumot 6 egyenlő részre osztjuk, így az keletkező alappontok

$$x_0 = 1; \quad x_3 = 2{,}5; \quad x_6 = 4$$
$$x_1 = 1{,}5; \quad x_4 = 3;$$
$$x_2 = 2; \quad x_5 = 3{,}5;$$

A Simpson formula általános képlete szerint

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{4-1}{6 \cdot 3} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) +$$

$$+ 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6))\,.$$

Az alábbi táblázat mutatja a függvényértékeket az x_i helyeken:

x_i	$f(x_i)$
1	$\frac{\mathrm{e}}{1} \approx 2{,}72$
$1{,}5$	$\frac{\mathrm{e}^{1{,}5}}{1{,}5} \approx 2{,}99$
2	$\frac{\mathrm{e}^{2}}{2} \approx 3{,}69$
$2{,}5$	$\frac{\mathrm{e}^{2{,}5}}{2{,}5} \approx 4{,}87$
3	$\frac{\mathrm{e}^{3}}{3} \approx 6{,}7$
$3{,}5$	$\frac{\mathrm{e}^{3{,}5}}{3{,}5} \approx 9{,}46$
4	$\frac{\mathrm{e}^{4}}{4} \approx 13{,}65$

A Simpson formula képletébe behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}\cdot(2{,}72 + 4\cdot 2{,}99 + 2\cdot 3{,}69 + 4\cdot 4{,}87 +$$

$$+\ 2\cdot 6{,}7 + 4\cdot 9{,}46 + 13{,}65) \approx 17{,}74.$$

Tartalomjegyzék