

# A rúd és a héj fogalmának bevezetése a három-dimenziós euklideszi tér merev és deformálható kiegészítő alterekre bontásának segítségével

LÁMER GÉZA

Debrecen Egyetem, glamer@eng.unideb.hu

*Abstract. In the paper we show the possibility of introduction of rod's and shell's theory using partitioning the three-dimensional Euclidean space for complementary rigid and deformable subspace.*

*Kulcsszavak. rúd- és héjelmélet, Bernoulli–Navier-hipotézis, Kirchhoff–Love-hipotézis, merev és deformálható kiegészítő alterek, merev test és merev keresztmetszet analógia, merev test és merev vastagság analógia*

## Bevezetés

Az anyagi pont mechanikai viselkedését az anyagi pontra ható erővel és az anyagi pont eltolódásával (pályagörbéjével) jellemezzük. A merev test mechanikai viselkedését a merev testre ható erővel és nyomatékkal, valamint a merev test egy referenciapontjának eltolódásával (pályagörbéjével) és a merev testnek a referenciapontja körüli elfordulásával jellemezzük. A deformálható szilárd test mechanikai viselkedését alapvetően a test alakjának megváltozásával, valamint a testben belül ébredő belső erőkkel (feszültségekkel) jellemezzük. Az alak megváltozásának, illetve a feszültség bevezetéséhez ugyan alkalmazzuk mind az eltolódásnak, mind az erőnek a fogalmát, de mind az eltolódást, mind a belső erőt nem a test referenciapontjához, hanem a test minden pontjához hozzárendeljük. Egyúttal olyan jelenséget vizsgálunk – az alak megváltozása –, amelyet eddig figyelmen kívül hagytunk.

Két egyedi test – a karcsú rúd és vékony héj – esetében kijelölhető a testnek egy-egy „elemi” része – rúd esetén a rúdtengelyre merőleges két, egymáshoz közelfekvő keresztmetszet által kimetszett elemi rúdszelet, héj esetén a héj középfelületére merőleges két-két, egymáshoz közelfekvő és egymásra is merőleges metsző felület által kimetszett elemi héjszelet –, amely a test egészéhez képest kicsinynek tekinthető. Ezért feltételezhető, hogy a test elemi részének viselkedése első közelítésben, csakúgy, mint egy test egészének esetében, merev testként modellezhető. Ez lehetővé teszi egyrészt, hogy a rúd és a héj viselkedését merev keresztmetszetek és a merev vastagságok együtteseként írjuk le, másrészt, hogy a keresztmetszet és a vastagság kinematikai és dinamikai jellemzését a merev test viselkedésének analógiájára határozzuk meg. A valós mechanikai viselkedés leírásához hozzá kell tenni, hogy a

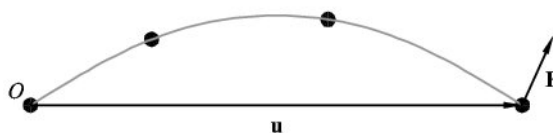
rúd tengelye és a héj középfelülete megváltoztatja az alakját. Ez a közelítés sugallja, hogy az Euklideszi teret bontsuk fel egy merev és egy deformálható (kiegészítő) altérre.

A modellalkotásban a merev altérben felhasználható a merev test analógiája, a (kiegészítő) deformálható altérben a deformálódás jellemzésére a folytonosság fogalmát, és az ahhoz kapcsolódó matematikai apparátust kell alkalmazni. Ez utóbbi az oka annak, hogy a folytonos (és topológiailag rendezett) ponthalmazokon értelmezett testek mechanikai viselkedését leíró összefüggések (alakváltozások, egyensúlyi, illetve mozgásegyenletek) parciális differenciális kifejezésekkel, illetve parciális differenciálegyenletekre vonatkozó (kezdetiérték- és) peremérték-feladatok formájában írhatók fel.

A mechanika alapfogalmait általában az anyagi pont és a merev test mozgásának vizsgálata során sajátítjuk el. A deformálható szilárd testek mechanikai viselkedését elsősorban nem a test helyváltoztató mozgása, hanem a test alakjának megváltozása jellemzi. Ez utóbbi lényegében eltérő mechanikai jelenség, mivel az anyagi pont térbeliségétől egyszerűen eltekintünk, a merev test esetén annak méreteit változatlanok tekintjük. Az alak megváltozását a testben kijelölhető görbék hosszának és a görbék által bezárt szögek megváltozásával jellemezhetjük. A deformálható szilárd test alakjának megváltozása független a test egészének mozgásától, ezért úgy tekinthetjük, hogy a test alakjának megváltozását kiváltó (külső) erők egyensúlyban vannak. A test egyes modelljeinek mechanikai jellemzése az alábbiakban foglalható össze.

## 1. Anyagi pont, merev test, deformálható szilárd test

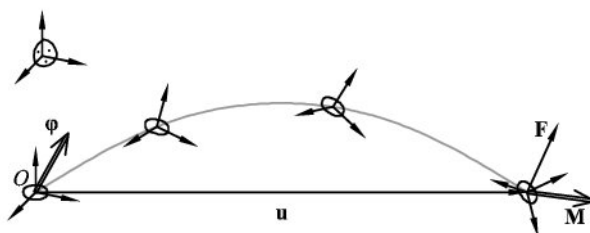
Az anyagi pont mechanikai viselkedését az anyagi pontra ható erővel és az anyagi pont eltolódásával (pályagörbéjével) jellemezzük. A modellben azt a tényt, hogy egy háromdimenziós testet vizsgálunk, egyszerűen figyelmen kívül hagyjuk: sem a testnek a referencia pont körüli forgását, sem a test alakjának megváltozását nem vesszük figyelembe. Ezzel összhangban a testre ható erőknek külön-külön a testre gyakorolt hatását, valamint a test referencia pontjára vett nyomatékainak létezését figyelmen kívül hagyjuk, és csak a referenciapontban vett eredő erőt vesszük figyelembe (lásd az 1. ábrát).



1. ábra. Az anyagi pont mechanikai jellemzése

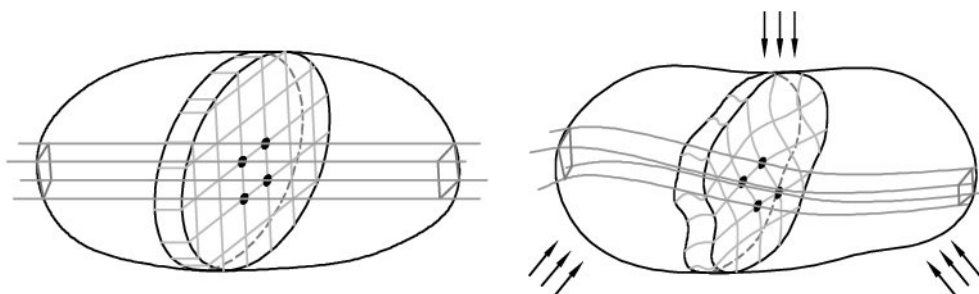
A merev test mechanikai viselkedését a merev testre ható erővel és nyomatékkal, valamint a merev test egy referenciapontjának eltolódásával (pályagörbéjével) és a merev testnek a referenciapontja körüli elfordulásával jellemezzük. A modellben azt a tényt, hogy egy háromdimenziós test a rá ható erők hatása alatt méreteit és alakját megváltoztatja, egyszerűen figyelmen kívül hagyjuk: a testnek a referencia pont körüli forgását figyelembe vesszük, de a test

alakjának megváltozását nem vesszük figyelembe. Ezzel összhangban a testre ható erőknek a test referencia pontjára vett nyomatékainak létezését figyelembe vesszük, de az erőknek külön-külön a testre gyakorolt hatását figyelmen kívül hagyjuk, következésképpen az erőknek a referenciapontban vett eredő erejét és eredő nyomatékát vesszük figyelembe (lásd a 2. ábrát).



2. ábra. A merev test mechanikai jellemzése

A deformálható szilárd test mechanikai viselkedését három szempont szerint jellemezzük: 1.) a deformálható szilárd test megváltoztatja az alakját (lásd a 3. ábrát), 2. a deformálható szilárd testben belső erők (feszültségek) ébrednek, 3.) a különböző anyagból álló deformálható szilárd test alakjának megváltozása függ az anyag fajtájától. Az anyagi viselkedés, a teljesség igénye nélkül, lehet rugalmas, képlékeny, viszkózus. A modellben azt a tényt helyezzük előtérbe, hogy a háromdimenziós test a rá ható erők hatása alatt méreteit és alakját megváltoztatja. Ezzel összhangban nem a testre ható erőknek a test referencia pontjára vett eredő erejét és nyomatékát vesszük figyelembe (hiszen a test egészének mozgását nem vizsgáljuk), hanem az egyes erőknek a testre gyakorolt hatását követjük nyomon a testen belül, pontról pontra.



3. ábra. A deformálható szilárd test kinematikai jellemzése.

A pálcaszerű és a szeletszerű test értelmezése

Általánosságban a testben kijelölhető tetszőleges görbék és felületek a külső erők hatása alatt megváltoznak: a görbék és felületek „deformációja” (értsd: leképezése) nem merevtestszerű, hanem a hosszak és a görbületek megváltozásával jár együtt; ugyanakkor ez a változás, azaz a leképezés, folytonos. Mindemellett az egyes görbék egy-egy kisebb szakaszának, vagy a felületek egy-egy kisebb felületidomának leképezése közelíthető merevtestszerű leképezéssel. (Példaként gondoljunk a függvény érintőjének és a függvény alatti területnek a szemléletes közelítő meghatározására.) Világos, hogy ez csak közelítés lehet, a pontos leíráshoz a közelítést végtelenül kicsiny szakaszra, illetve felületidomra kell „kiterjeszteni”, azaz határátmenetet kell

végrehajtani. (A nyilvánvaló analógia a differenciál- és integrálszámításban alkalmazott határátmenet.) A háromdimenziós test esetében rendszerint élünk is ezzel a módszerrel; lásd a deformálható szilárd testekre vonatkozó rugalmasságtant, képlékenységtant, vagy a kontinuummechanikát [2,16,17].

A 3. ábrán a deformálható szilárd testben kijelöltünk két résztartományt: egyiket pálcaszerűnek, a másikat szeletszerűnek ábrázoltuk. A kijelöléshez az első esetben négy, egy-egy (azonos) koordinátavonalban metsződő koordinátafelületet, a második esetben két, ugyanahhoz a két koordinátahoz tartozó koordinátafelületet alkalmaztunk. A négy koordinátafelülettel értelmezett pálcaszerű test esetében a koordinátafelületek metszésvonalaihoz tartozó koordinátát kitüntetett koordinátának, a másik két koordinátát eliminált koordinátának nevezzük. (Az elnevezés értelmét az adja, hogy a rúdelméletben a rúdtengelyen értelmezett változó szerepel, a keresztmetszetben értelmezett másik kettő nem [4,7,9,11].) A négy koordinátafelülettel értelmezett pálcaszerű testnek értelmezzük a hosszát és a keresztmetszetét. A pálcaszerű test hossza a kitüntetett koordinátavonalakból az eredeti test pereme által kimetszett görbeszakaszok hossza közül a legnagyobb. A pálcaszerű test keresztmetszete a kitüntetett koordinátavonal egyes pontjain áthaladó (az eliminált koordinátákat tartalmazó) koordinátafelületből a négy koordinátafelülettel kimetszett felületidoma. A pálcaszerű testet akkor fogjuk, mechanikai technikus terminus szerint, rúdszerűnek, vagy matematikai szempontból vonalszerűnek nevezni, ha a pálcaszerű test bármely keresztmetszetének átmérője elenyészően kicsiny a test hosszához viszonyítva. A két koordinátafelülettel értelmezett test esetében, hasonló módon a rúd esetéhez, a koordinátafelületekhez tartozó koordinátákat kitüntetett koordinátáknak, a harmadik koordinátát eliminált koordinátának nevezzük (lásd *uo.*). A két koordinátafelülettel értelmezett szeletszerű testnek értelmezzük a hosszát és a szélességét, valamint a vastagságát (amit az egyöntetű nyelvhasználat okán helyenként keresztmetszetnek is fogunk nevezni). A szeletszerű test vastagsága az eliminált koordinátavonalakból a két koordinátafelülettel kimetszett görbeszakaszok hossza közül a legnagyobb. A vastagságokat felező koordinátafelületet a szeletszerű test középfelületének nevezzük. A középfelületből az eredeti test pereme által kimetszett felületidom a szeletszerű test középfelületidoma (középlapja). A közép-felületidom átmérőjét tekintjük a szeletszerű test hosszának, a másodlagos átmérőjét szélességének. A szeletszerű testet akkor fogjuk, mechanikai technikus terminus szerint, héjszerűnek, vagy matematikai szempontból felületszerűnek nevezni, ha a szeletszerű test vastagsága elenyészően kicsiny a test hosszához és szélességéhez viszonyítva.

Az „elenyészően kicsiny” méretek értelmezése egy-egy testen belül sugallja annak a lehetőségét, hogy az „elenyészően kicsiny” méretű geometriai alakzat a test deformációja során nem, vagy csak elenyésző (értsd: elhanyagolható) mértékben változik. Azaz, szemléletesen a 3. ábrára hivatkozva, a rúdszerű test keresztmetszetei nem deformálódnak, azok merev síkidomként képeződnek le, míg a keresztmetszeten áthaladó egyes kitüntetett koordinátavonalak (a merevtestszerű keresztmetszet korlátozó hatása mellett) meggyűrűsödnek, torzulnak és megnyúlnak. Ehhez hasonlóan, ismét szemléletesen a 3. ábrára hivatkozva, a héjszerű test keresztmetszetei (értsd: vastagságai) nem deformálódnak, azok merev szakaszokként

képeződnek le, míg a keresztmetszeten áthaladó egyes kitüntetett koordinátavonalak alkotta koordinátafelületek (a merevtestszerű keresztmetszet korlátozó hatása mellett) meggörbülnek, torzulnak és megnyúlnak. Az így értelmezett testek tekinthetők félig merev és félig deformálható testnek, másképpen fogalmazva az Euklideszi tér egy-egy egyedi alakú teste esetében szemléletesen értelmeztük a háromdimenziós Euklideszi tér felbontását merev és deformálható kiegészítő alterekre.

A fentiek alapján lehetőség nyílik arra, hogy a rúdszerű és héjszerű testek mechanikai jellemzése során felhasználjuk a merev testet jellemző mechanikai viselkedést. Nevezeten, hogy a keresztmetszetek eltolódnak és elfordulnak, de nem deformálódnak, valamint, hogy egy-egy keresztmetszetben annak referenciapontjához csak (eredő) erőt és (eredő) nyomatékot rendeljünk. Ugyanakkor a rúdszerű test keresztmetszetét fizikai testként két metsző sík közé eső szeletként értelmezzük, tehát a keresztmetszet két „oldal”-ához kell egy-egy belső erőt rendelni. Hasonlatosan ehhez a héjszerű test keresztmetszetét fizikai testként két-két metsző sík közé eső kettős szeletként értelmezzük, tehát a „keresztmetszet” négy „oldal”-ához kell egy-egy belső erőt rendelni.

A háromdimenziós Euklideszi tér felbontása merev és deformálható kiegészítő alterekre egyrészt lehetővé teszi, hogy a merev test mechanikájának alapfogalmait alkalmazzuk a merev altérre, másrészt szükségessé teszi, hogy kiterjesztjük a merev test mechanikájának fogalmait a deformálódó altérre. A felbontás azt is lehetővé teszi, hogy rúdszerű test esetében egy, héjszerű test esetében két változóban kelljen a kiterjesztést végrehajtani, és ne rögtön mindhárom változóban.

A rúd és hég mechanikai viselkedésének modellezése a háromdimenziós Euklideszi tér merev és deformálható kiegészítő alterekre bontása segítségével az alábbi lépésekből áll össze.

- Az egyedi geometriai testek (rúd és hég) értelmezése
- A rudak és héjak egyedi mechanikai viselkedésének értelmezése (a keresztmetszetek leképezésének és keresztmetszetben ébredő erők eloszlásának korlátozása; az eliminált koordináták szerint rögzített eloszlások meghatározása)
- A rudak és héjak egyedi mechanikai viselkedésének leírása (a keresztmetszetek egymáshoz viszonyított eltérő leképezését, és az egyes keresztmetszetben eltérő belső erők ébredését leíró összefüggések meghatározása; a kitüntetett koordináták szerinti változásokra vonatkozó egyenletek felállítása)
- A rudak és héjak egyedi mechanikai viselkedése leírása matematikai feltételének, a felállított elmélet alkalmazása korlátainak meghatározása

Jelen tanulmányban az első két pontot tekintjük át, és rámutatunk arra, hogy milyen matematikai apparátus alkalmazása szükséges ahhoz, hogy a harmadik pontot végre lehessen hajtani, de magukat az összefüggéseket már nem vezetjük le. A továbbiakban áttekintjük a negyedik pont főbb feltételeit. Végezetül kitérünk arra, hogy a háromdimenziós Euklideszi tér merev és deformálható kiegészítő alterekre bontása nem „általánosítható” tovább tér-pont

felbontásra, azaz a háromdimenziós test esetében a merevtestszerű modell a tér null-méretű alterére nem alkalmazható.

## 2. A rúd és héj, mint egyedi geometriai test

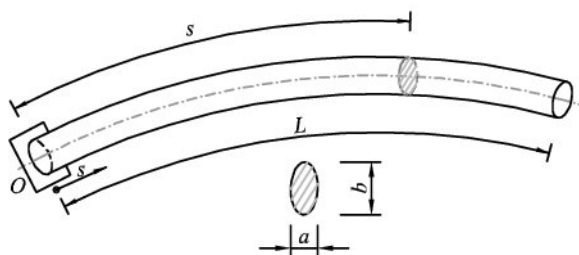
### 2.1. A rúd, mint vonalszerű geometriai forma (test)

Egy  $\Omega(s, q^1, q^2)$  testet akkor tekintünk vonalszerű (rúdszerű) geometriai testnek, ha fennáll az alábbi két feltétel.

1. A test tekinthető, mint egy görbére felfűzött síkidomok összessége.
2. A test síkidomainak befoglaló méretei a test hosszához képest elhanyagolhatóak.

A fenti két feltétel matematikailag az alábbi módon fogalmazható meg. A test előállítható az  $s$  koordinátavonalon megadott  $L = [s^1, s^2]$  görbeszakasz és az  $s$  koordinátától sima módon függő  $K(s)$  síkidomok (keresztmetszetek) direkt szorzataként:  $\Omega = L \times K(s)$  (lásd a 4. ábrát). A geometriai forma fenti értelmezésében az  $L$  a rúd tengelyét, egyúttal a rúd hosszát (is) jelöli; a  $K(s)$  síkidomok a keresztmetszetek, amelyek befoglaló méreteit, illetve átmérőjét és másodlagos átmérőjét  $a(s)$ , illetve  $b(s)$ , ezek legnagyobb értékeit  $a$ , illetve  $b$  jelöli (lásd a 4. ábrát). Ennek megfelelően, ha  $\ll$  jelöli (balról jobbra olvasva) a nagyságrendben kisebb összefüggést, akkor fennáll az  $a, b \ll L$  összefüggés.

A vonalszerű test értelmezéséhez hozzá tartozik a test részletes vizsgálata. Például a vonalszerű testek osztályozása a tengelye alapján (egyenes, síkgörbe, térgörbe), a keresztmetszete alapján (síkidom-felületidom, változó-állandó, egyszeresen-többszörösen összefüggő, alakja « $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\circ$ , I, U, L stb.», összetettsége és az  $a$  és  $b$  egymáshoz viszonyított nagyságrendje szerint), a tengely és a keresztmetszet illeszkedése alapján (szög, dőféspont, a síkidom tehetetlenségi főirányainak és a görbe normálvektorai egymáshoz viszonyított elrendezése szerint). Ennek ismertetésétől eltekintünk.



4. ábra. A vonalszerű geometriai forma (test) értelmezése

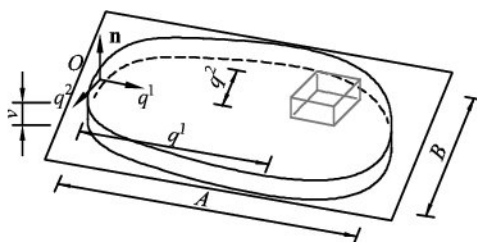
### 2.2. A héj, mint felületszerű geometriai forma (test)

Egy  $\Omega(q^1, q^2, s)$  testet akkor tekintünk felületszerű (héjszerű) geometriai testnek, ha fennáll az alábbi két feltétel.

1. A test tekinthető, mint egy felületidomra felfűzött egyenes szakaszok összessége.
2. A test vastagsága a felületidom hosszához és szélességéhez képest elhanyagolható.

A fenti két feltétel matematikailag az alábbi módon fogalmazható meg. A test előállítható a  $q^1$  és  $q^2$  koordinátafelületen megadott  $K[q^1, q^2]$  felületidom és az  $s$  koordinátavonalon megadott, a  $q^1$  és  $q^2$  koordinátáktól sima módon függő  $v = [s_1(q^1, q^2), s_2(q^1, q^2)]$  egyenes szakaszok (vastagságok  $\equiv$  keresztmetszetek) direkt szorzataként:  $\Omega = K \times v(q^1, q^2)$  (lásd az 5. ábrát). A geometriai forma fenti értelmezésében a  $K$  ( $s = 0$ ) a héj középfelületét, egyúttal a héj középfelületén a héjból kimetszett felületidomot (is) jelöli; a  $K$  középfelületen a test pereme által kimetszett felületidom befoglaló méreteit, illetve átmérőjét és másodlagos átmérőjét, mint a felületidom és egyúttal a felületszerű test szélességet és hosszát  $A$ , illetve  $B$  jelöli (lásd az 5. ábrát). Ennek megfelelően fennáll a  $v \ll A, B$  összefüggés.

A felületszerű test értelmezéséhez hozzá tartozik a test részletes vizsgálata. Például a felületszerű testek osztályozása a középfelülete alapján (sík, egyszer, illetve kétszer görbült felület, egyszeresen-többszörösen összefüggő, alakja « $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\circ$  stb.» és az  $A$  és  $B$  egymáshoz viszonyított nagyságrendje szerint), a keresztmetszete alapján (egyenes-görbe, változó-állandó), a középfelület és a keresztmetszet illeszkedése alapján (szög). Ennek ismertetésétől eltekintünk.



5. ábra. A felületszerű geometriai forma (test) értelmezése

3. A rúd és héj mechanikai viselkedésének bevezetése a merev alterek – keresztmetszet és vastagság – segítségével

3.1. A háromdimenziós Euklideszi tér mechanikai viselkedésének felbontása a tér merev és deformálható kiegészítő alterekre bontása segítségével

A háromdimenziós Euklideszi tér felbontása merev és deformálható kiegészítő alterekre maga után vonja azt is, hogy felbontjuk a háromdimenziós Euklideszi tér mechanikai viselkedését merev és deformálható kiegészítő alterek viselkedésére. A felbontás alap gondolata, hogy van egy deformálható altér (görbe, vagy felület) és van egy merev, vagyis nem deformálható altér (síkidom, illetve egyenes szakasz).

A vonalszerű test esetében az alábbi deformációk lehetségesek. A test tengelye, mint görbe

- nyúlik,
- változik a görbülete

- változik a torziója.

A vonalszerű test esetében az alábbi deformációk nem lehetségesek. A test tengelyének, mint görbének, és a test keresztmetszetének, mint síkidomnak

- nem változik az illeszkedési szöge, továbbá

a test keresztmetszetének, mint síkidomnak

- nem változik az alakja (a saját síkjában nem deformálódik, azaz nem kontrahálódik),
- nem változik az altér görbülete (a saját síkjából nem deformálódik, továbbra is sík marad, azaz nem hajlik meg és nem öblösödik ki).

A fenti kinematika jellemzéssel összhangban a vonalszerű test esetében az alábbi belső erők értelmezhetőek. A test tengelyének deformációja kapcsán

- a nyúláshoz normálerőt,
- a görbületváltozáshoz hajlító nyomatékot,
- a torzióváltozáshoz csavaró nyomatékot

rendelünk.

A test tengelye, mint görbe, és a test keresztmetszete, mint síkidom

- illeszkedési szögének változatlansága okán hajlítási nyíróerőt

nem értelmezzük.

*Megjegyzések.* 1. Az egyensúly miatt értelmezzük hajlítási nyíróerőt, de nem kötjük a rúd (nyírási) alakváltozásához. 2. Két független szög értelmezhető, ezért két független hajlítási nyíróerőt kell értelmezni. 3. A nyírási alakváltozás miatt nem csak az illeszkedés szöge változik, hanem a keresztmetszet kilép a saját síkjából; „öblösödik”.

A test keresztmetszetének, mint síkidomnak a saját síkja deformációjának hiánya miatt

- a keresztmetszet síkjában ébredő kétirányú normálerőt és csúsztató erőt

nem értelmezzük.

A test keresztmetszetének, mint síkidomnak a saját síkjából kitérő deformációjának (görbülés és öblösödés) hiánya miatt

- a keresztmetszetet hajlító nyomatékot és a hozzá tartozó hajlítási nyíróerőket

nem értelmezzük.

A felületszerű test esetében az alábbi deformációk lehetségesek. A test középfelülete, mint felület

- nyúlik és nyíródik a saját „síkjában” (érintő terében),
- változik a görbülete (görbületesi tenzora).

A felületszerű test esetében az alábbi deformációk nem lehetségesek. A test középfelületének, mint felületnek, és a test vastagságának, mint (egyenes) szakasznak

- nem változik az illeszkedési szöge, továbbá

a test vastagságának, mint (egyenes) szakasznak

- nem változik a hossza (a saját egyenesében nem deformálódik, azaz nem kontrahálódik),

- nem változik az altér görbülete (a saját egyeneséből nem deformálódik, továbbra is egyenes marad, azaz nem hajlik meg, nem öblösödik ki, és nem csavarodik el).

A fenti kinematika jellemzéssel összhangban a felületszerű test esetében az alábbi belső erők értelmezhetőek. A test középfelületének deformációja kapcsán

- a nyúláshoz és a nyíródáshoz a saját „síkjában” feszítő erőket (membránerőket),
- a görbületváltozáshoz hajlító és csavaró nyomatékokat

rendelünk.

A test középfelülete, mint felület, és a test vastagsága, mint (egyenes) szakasz

- illeszkedési szögének változatlansága okán hajlítási nyíróerőt

nem értelmezzük.

*Megjegyzések.* 1. Az egyensúly miatt értelmezzük hajlítási nyíróerőt, de nem kötjük a héj (nyírási) alakváltozásához. 2. Két független szög értelmezhető, ezért két független hajlítási nyíróerőt kell értelmezni. 3. A nyírási alakváltozás miatt nem csak az illeszkedés szöge változik, hanem a vastagság kilép a saját egyeneséből; „öblösödik”.

A test vastagságának, mint (egyenes) szakasznak a saját egyenese deformációjának hiánya miatt

- a vastagság irányába eső normálerőt

nem értelmezzük.

A test vastagságának, mint (egyenes) szakasznak a saját egyeneséből kitérő deformációjának (görbülés, öblösödés és elfordulás) hiánya miatt

- a vastagságot hajlító nyomatékokat, az ahhoz tartó hajlítási nyíróerőket, valamint a vastagságot (a normál egyenes körül elfordító) csavaró nyomatékokat

nem értelmezzük.

	$s$	$q^1, q^2$
$s$	Normálerő Kétirányú hajlító nyomaték Csavaró nyomaték Kettősnyomaték (bimoment)	Hajlítási nyíróerő a keresztmetszetben
$q^1, q^2$	Hajlítási nyíróerő a keresztmetszetben	Keresztmetszet síkján belüli két normálerő és csúsztató erő (kontrakció)

6. ábra. A rúdszerű testben ébredő belső erők

	$s$	$q^1, q^2$
$s$	Vastagság egyenesén belüli normálerő (kontrakció)	Hajlítási nyíróerő a vastagságban
$q^1, q^2$	Hajlítási nyíróerő a vastagságban	Kétirányú normálerő és csúsztató erő (membránerő) Kétirányú hajlító nyomaték és csavaró nyomaték

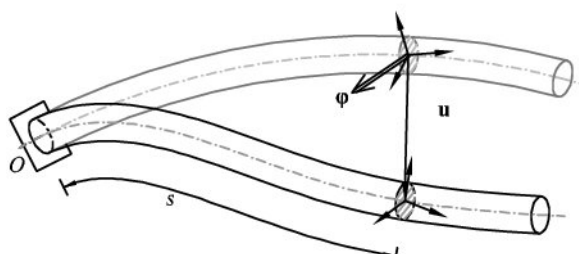
7. ábra. A héjszerű testben ébredő belső erők

A két táblázat alapján leolvasható, hogy a kétféle modell – rúd és héj – egymás duálisai.

*Megjegyzések.* 1. A vonalszerű és felületszerű test akkor lesz rúd, illetve héj, amikor értelmezzük az alakváltozását és a belső erőket. 2. Az értelmezett alakváltozások és belső erők függvényében két nagyobb csoportot különböztetünk meg: húzott-nyomott szerkezet (nyomott ív, tárcsa és membránhéj), valamint hajlított szerkezet (hajlított rúd, lemez és héj). 3. A kinematikailag határozatlan testek esetében kötélről és ponyváról beszélünk.

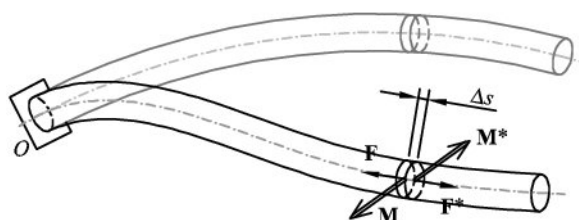
### 3.2. A rúd viselkedésének modellezése merev altér – keresztmetszet – fogalmának segítségével

A merev altér a keresztmetszet merevtestszerű eltolódását és elfordulását teszi lehetővé; az illeszkedés szöge változatlan (lásd a 8. ábrát).



8. ábra. A rúd kinematikai jellemzése

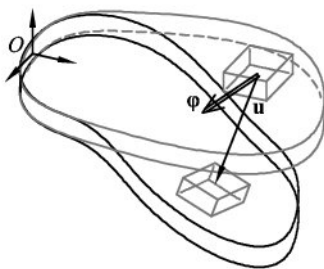
A merev altér a keresztmetszet „két oldalán” egy-egy eredő erő és egy-egy eredő nyomaték értelmezést teszi lehetővé (lásd a 9. ábrát).



9. ábra. A rúd dinamikai jellemzése

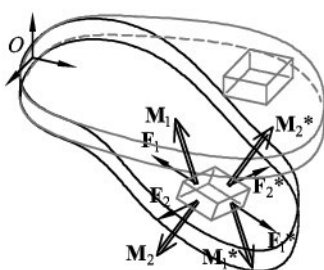
### 3.3. A héj viselkedésének modellezése merev vastagság fogalmának segítségével

A merev altér a vastagság merevtestszerű eltolódását és elfordulását teszi lehetővé; az illeszkedés szöge változatlan (lásd a 10. ábrát).



10. ábra. A héj kinematikai jellemzése

A merev altér a vastagság „négy oldalán” egy-egy eredő erő és egy-egy eredő nyomaték értelmezést teszi lehetővé (lásd a 11. ábrát).



11. ábra. A héj dinamikai jellemzése

### 3.4. Megjegyzések

A vonalszerű és felületszerű test viselkedésének leírására bevezetett közelítő modell a merev keresztmetszet és merev vastagság fogalmán, valamint a tengelyhez, illetve a középfelülethez való rögzített illeszkedési szög fogalmán, mint feltételeken – hipotéziseken – alapul. A valóságban mind a rúd keresztmetszete, mind a héj vastagsága deformálódik mind a saját alterében, mind abból kitérően (mint alacsonyabb dimenziójú altér a beágyazó térben), valamint a keresztmetszet illeszkedése a tengelyhez, illetve a középfelülethez változik. A két (analóg) feltevésrendszer általában (geometriai) hipotézisnek nevezik. A rúd esetében Bernoulli-Navier-hipotézisről (LOVE [16], ANTMANN [1]), lemez esetén Kirchhoff-hipotézisről, míg héjak esetén Love-hipotézisről (LOVE [16], NAGHDI [20]) szokás beszélni. Ezekkel a hipotézisekkel felépített rúd- és héjelméleteket szokás klasszikus rúd- és héjelméleteknek nevezni.

A rúd- és héjelméletek „általánosítás”-ának alapja, hogy a merevtestszerű viselkedés egyes „komponenseit” nem zárjuk ki, hanem figyelembe vesszük. Az egyes „komponensek” az alábbiak (lásd pl. LÁMER [4,7,9,11], illetve NIORDSON [21]).

1. A merev és a deformálódó alterek illeszkedése: a keresztmetszet, illetve a vastagság illeszkedésének változása a tengelyhez, illetve a középfelülethez: nyírt rúd- és héj-elméletek.
2. A „merev” altér deformációja a kiegészítő altérben: a keresztmetszet öblösödése, illetve a vastagság görbülése: az öblösödő rudak és deformálódó vastagságú héjelméletek. Ide tartozik a Vlaszov-féle vékonyfalú rudak elemélete (lásd pl. VLASZOV [22], LUZSIN [18],

MUTTNYÁNSZKY [19]), vagy a rudak vizsgálata csavarási alakváltozás figyelembevételével (lásd pl. CHOLNOKY [2]).

3. A „merev” altér deformációja a saját alterében: a keresztmetszet, illetve a vastagság deformációja a saját síkjában, illetve vonalában: a kontrahálódó rúd- és héjelméletek (lásd pl. NIORDSON [21]).

Ezen kívül létez(het)nek ezek kombinációi.

A sík keresztmetszetek hipotézise mellett, más hipotéziseket is alkalmazhatunk, például az erősen görbült alakú testek esetén a síkidom keresztmetszetének adott hatványkitevő szerinti görbülésének hipotézise (lásd pl. MUTTNYÁNSZKY [19]).

A geometriai formák, szerkezet és numerikus módszer, illetve az „elmélet” (értsd: rúd- és héjelmélet) közötti kapcsolatokat lásd pl. LÁMER [6].

### 3.5. Áttekintés a modellezés további lépéseiről

A modellezés további lépései az alábbiak (lásd pl. LÁMER [4,7,9,11]).

1. Olyan koordinátarendszert kell választani, amely „automatikusan” biztosítja, hogy a rúd keresztmetszetei, illetve a héj vastagságai ne deformálódjanak. Ehhez a rúd tengelyére, illetve a héj középfelületére felépített koordinátarendszert kell alkalmazni.
2. A belső erők egyensúlyára vonatkozóan fel kell használni, hogy a két, egymáshoz „végtelenül közel fekvő” keresztmetszetben ébredő erők között a folytonosság okán kapcsolat található. A kapcsolat nem más, mint a Taylor-sor.
3. A rúd palástján, illetve a héj alsó és felső felületén (ezek az eliminált felületek) ható erőket a rúd tengelyére, illetve a héj középfelületére kell áthelyezni (ott, mint eredő erőt és eredő nyomatékot kell meghatározni).
4. A rúd tengelyének, illetve a héj középfelületének pontjaiban értelmezett vektorértékű belső erőket „szét kell kenni” a rúd keresztmetszetében, illetve a héj vastagsága mentén. Ehhez (részben) fel kell használni azt a tényt, hogy sem a rúd keresztmetszete, sem a héj vastagsága nem változik.

*A rúd tengelyre, illetve a héj középfelületére épített koordinátarendszer.* (Lásd pl. LÁMER [9,11].)

Rúd esetén a három koordinátatengely irányvektora a rúdtengely érintő- és két normálvektora. Ezért ebben az esetben a keresztmetszet mind a deformálatlan, mind a deformált helyzetben a tengely normálsíkjába esik, nem változik az illeszkedés szöge, és nem változik a keresztmetszetet hordozó altér típusa (a sík sík marad). Ugyanakkor változik a rúd(tengely) hossza (a normálvektor nyúlását figyelembe vesszük), és a rúd(tengely) alakja (a rúdtengely görbülését és torzióját figyelembe vesszük). A rúd tengelyére felépített koordinátarendszerben a deformált állapotbeli keresztmetszetet a deformálatlan állapotbeli keresztmetszet merevtestszerű leképezésével nyerjük. Héj esetén a három koordinátatengely irányvektora a héj középfelületének normál- és két érintővektora. Ezért ebben az esetben a vastagság mind a deformálatlan, mind a deformált helyzetben a középfelület normálegyenésébe esik, nem változik az illeszkedés szöge, és nem változik a vastagságot hordozó altér típusa (az egyenes egyenes

marad). Ugyanakkor változik a héj(középlapjájának a hossza és a szélessége, valamint a középfelület kirajzolható alakja (az érintővektorok nyúlásait és szögváltozásait figyelembe vesszük), és héj (térben elfoglalt) alakja (a héj középfelületének görbülését-torzióját figyelembe vesszük). A héj középfelületére felépített koordinátarendszerben a deformált állapotbeli vastagságát a deformálatlan állapotbeli vastagság merevtestszerű leképezésével nyerjük.

*A belső erőkre vonatkozó egyensúlyi egyenlet és a folytonosság kapcsolata.* (Lásd pl. CHOLNOKY [2], illetve Muttnyánszky [19].) Példaként az egyenes tengelyű rúd húzás-nyomás igénybevételét tekintjük. A rúdtengely  $x$  koordinátájú pontjában hat az  $\mathbf{N}(x)$  belső erő és az  $\mathbf{n}(x)$  megoszló terhelés. A rúdtengely  $x + \Delta x$  koordinátájú pontjában hat az  $\mathbf{N}(x + \Delta x)$  belső erő és az  $\mathbf{n}(x + \Delta x)$  megoszló terhelés. A rúd anyagának folytonossága, a  $\Delta x$  kicsinysége okán az  $\mathbf{N}$  belső erő sorba fejthető az  $x$  pontban, és elegendő a sorfejtés első tagját megtartani.

$$\mathbf{N}(x + \Delta x) = \mathbf{N}(x) + \Delta \mathbf{N}(x) = \mathbf{N}(x) + \frac{d\mathbf{N}(x)}{dx} \Delta x \quad (1)$$

Ekkor az egyensúly vetületi egyenlete:

$$-\mathbf{N}(x) + \mathbf{N}(x + \Delta x) + \mathbf{n}(x)\Delta x = -\mathbf{N}(x) + \mathbf{N}(x) + \frac{d\mathbf{N}(x)}{dx} \Delta x + \mathbf{n}(x)\Delta x = 0 \quad (2)$$

Átrendezés után az egyensúly differenciális alakja a következő:

$$\frac{d\mathbf{N}(x)}{dx} + \mathbf{n}(x) = 0 \quad (3)$$

Hasonló eljárással állíthatjuk elő a rúd és a héj igénybevételeire vonatkozó egyensúlyi egyenleteket.

*A feszültségeloszlások a keresztmetszetben, illetve a vastagság mentén.* A rúd keresztmetszete, valamint a héj vastagsága változatlanságának a következménye, hogy a normálfeszültség eloszlása állandó (normálerő a rúdban, feszítőerő a tárcsában és a héjban), illetve lineáris (hajlító nyomatékok a rúdban, a lemezben és a héjban). A hajlítási nyírófeszültség eloszlása a geometriai hipotézistől független meg gondolásokkal adható meg (kvadrátikus). A csavaró nyírófeszültség eloszlása lineáris (körhenger alakú rúd esetében, lemez és héj csavaró nyomatéka, mint a nyomatéktenzor mellékátlóbeli komponense). A normálfeszültség eloszlását a bimoment, a nyírófeszültség eloszlását a csavaró nyomaték esetén összetettebb eljárással (a keresztmetszet torziónyomatékának kiszámításával, illetve a rugalmasságtan csavarási feladatának megoldásával) határozhatjuk meg (lásd pl. VLASZOV [22], LUZSIN [18], CHOLNOKY [2], illetve MUTTNYÁNSZKY [19]).

## 4. A deformálható szilárd test értelmezésének lehetősége deformálható és merev kiegészítő alterek szorzataként

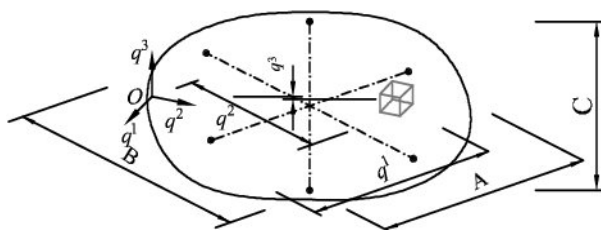
### 4.1. Merev és deformálható altér rúd, héj és test esetén

A rúd esetében a tengely a deformálható altér, a kiegészítő altér a merev síkidom (azaz a keresztmetszet). A rúd összefüggéseinek felírása során rendszerint két keresztmetszet által közrezárt rúdszeletet vizsgálunk. A héj esetében a középfelület a deformálható altér, a kiegészítő altér a merev szakasz (azaz a vastagság). A héj összefüggéseinek felírása során rendszerint két-két, a héj középfelületére merőleges koordinátafelülettel kimetszett héjszeletet vizsgálunk. Analógiaként felvethető, hogy a merev alterek (síkidom  $\rightarrow$  szakasz) „sor”-ának következő eleme a pont: síkidom  $\rightarrow$  szakasz  $\rightarrow$  pont, vagyis a háromdimenziós test összefüggéseinek felírása során három-három, páronként különböző koordinátavonalakhoz tartozó koordinátafelülettel kimetszett (izoperimetrikus) téglatestet kell vizsgálni (ez mind a rugalmasságtanban, mind a kontinuummechanikában így is van). Az analógia második ága, a deformálható alterek „sor”-ának (görbe  $\rightarrow$  felület) következő eleme maga a tér: görbe  $\rightarrow$  felület  $\rightarrow$  tér. Vagyis kínálkozik az a lehetőség, hogy a rúd és a héj mintájára értelmezzük a deformálható szilárd testet lokálisan merev alterek (merev „izoperimetrikus” téglányok) segítségével. A szó szerinti „általánosítás” a következő.

Egy  $\Omega(q^1, q^2, q^3)$  testet akkor tekintünk térszerű (testszerű) geometriai testnek, ha fennáll az alábbi két feltétel.

1. A test tekinthető, mint egy háromdimenziós tartomány minden pontjára felfűzött pontok (azaz merev „izoperimetrikus” téglányok) összessége.
2. A test pontjainak (azaz merev „izoperimetrikus” téglányok) befoglaló méretei a test befoglaló méreteihez képest elhanyagolhatóak.

Formálisan a deformálható szilárd test az „izoperimetrikus” téglányokkal ábrázolható (lásd a 12. ábrát).



12. ábra. A „térszerű” geometriai forma (test) értelmezése

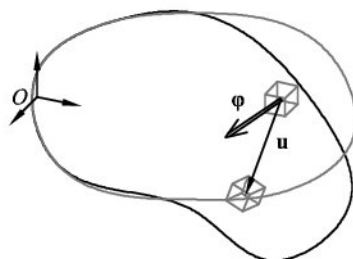
Ugyanakkor a megfogalmazás egyik olvasatban tautológia (a háromdimenziós tartomány minden pontjára felfűzött pont), a második olvasatban ellenmondást tartalmaz (a háromdimenziós tartomány minden pontjára felfűzött téglatest). A tautológia lényege, hogy a háromdimenziós test minden pontjához érintőtér csatolható, de pont nem, ugyanis a tartomány

maga kontinuumszámosságú sok pont összessége. Az ellentmondás lényege, hogy ha a kontinuumszámosságú sok pont mindegyikéhez véges méretű téglányt kapcsolunk, akkor azok egymásba metszenek, és nem alkotnak folytonos ponthalmazt a háromdimenziós Euklideszi térben, vagy ha a vizsgált tartományt pl. véges sok koordinátafelületekkel véges méretű téglányok összességére hasítjuk fel, akkor a test geometriája (és majd az arra épített elmélet) függ az osztástól.

Azaz a deformálható szilárd test fogalma egy háromdimenziós deformálható és egy nulldimenziós merev altér direkt szorzataként nem értelmezhető ellentmondásmentesen.

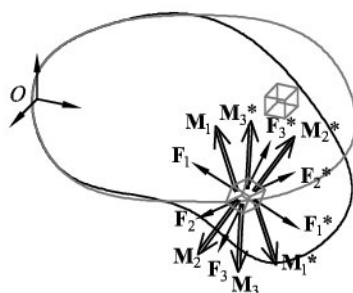
#### 4.2. A test mechanikai viselkedésének modellezése merev résztartományok (téglányok) összességével

A formális analógia alapján a merev altér a téglányok merevtestszerű eltolódását és elfordulását teszi lehetővé; a téglányok és a pont „illeszkedési szöge” változatlan (lásd a 13. ábrát).



13. ábra. A test kinematikai jellemzése

A formális analógia alapján a merev altér, azaz a téglányok „hat oldalán” egy-egy eredő erő és egy-egy eredő nyomaték értelmezést teszi lehetővé (lásd a 14. ábrát).



14. ábra. A test dinamikai jellemzése

#### 4.3. A modellezés következő lépései

A modellezés során következő lépéseit a 3.5. pont alapján tekintjük át.

1. Olyan koordinátarendszert kell választani, amely „automatikusan” biztosítja, hogy a rúd keresztmetszetei, illetve a héj vastagságai ne deformálódjanak.

A rúddal és a héjjal ellentétben tetszőleges, értsd: egy háromdimenziós deformálható és egy nulldimenziós merev altér direkt szorzataként értelmezett, háromdimenziós test esetén ilyen koordinátarendszer nem választható. A háromdimenziós térben felvett tetszőleges koordinátarendszer tetszőleges folytonos leképezése során a háromdimenziós tér metrikája pontról pontra változik. Egyetlen olyan leképezés(csoport) létezik, amely során a metrika változatlan marad: az euklideszi tér mozgásainak csoportja (eltolás, elforgatás és tükrözés). Ebben az esetben viszont alakváltozás nem lép fel.

2. *A belső erők egyensúlyára vonatkozóan fel kell használni, hogy a két, egymáshoz „végtelenül” közel fekvő keresztmetszetben ébredő erők között a folytonosság okán kapcsolat található. A kapcsolat nem más, mint a Taylor-sor.*

Formálisan ez a lépés végrehajtható. Példaként az egyenes tengelyű rúd csavarási igénybevételét tekintjük. A rúdtengely  $x$  koordinátájú pontjában hat az  $\mathbf{M}(x)$  belső nyomaték és az  $\mathbf{m}(x)$  megoszló csavaró terhelés. A rúdtengely  $x + \Delta x$  koordinátájú pontjában hat az  $\mathbf{M}(x + \Delta x)$  belső nyomaték és az  $\mathbf{m}(x + \Delta x)$  megoszló csavaró terhelés. A rúd anyagának folytonossága, a  $\Delta x$  kicsinyisége okán az  $\mathbf{M}$  belső nyomaték sorba fejthető az  $x$  pontban, és elegendő a sorfejtés első tagját megtartani.

$$\mathbf{M}(x + \Delta x) = \mathbf{M}(x) + \Delta \mathbf{M}(x) = \mathbf{M}(x) + \frac{d\mathbf{M}(x)}{dx} \Delta x \quad (4)$$

Ekkor az egyensúly nyomatéki egyenlete:

$$-\mathbf{M}(x) + \mathbf{M}(x + \Delta x) + \mathbf{m}(x)\Delta x = -\mathbf{M}(x) + \mathbf{M}(x) + \frac{d\mathbf{M}(x)}{dx} \Delta x + \mathbf{m}(x)\Delta x = 0 \quad (5)$$

Átrendezés után az egyensúly differenciális alakja a következő:

$$\frac{d\mathbf{M}(x)}{dx} + \mathbf{m}(x) = 0 \quad (6)$$

Ekkor az egyensúly vetületi egyenlete:

Átrendezés után az egyensúly differenciális alakja a következő:

Hasonló eljárással nyerhetjük a téglány esetében nyomatéki egyenletek, de hármat kapunk, és mindhárom koordináta irányában értelmezett nyomatékvektor szerepel mindhárom nyomatéki egyensúlyi egyenletben.

3. *A rúd palástján, illetve a héj alsó és felső felületén ható erőket a rúd tengelyére, illetve a héj középfelületére kell áthelyezni (mint eredő erő és eredő nyomaték meghatározása).*

A rúd és héjelmélettel ellentétben egy háromdimenziós deformálható és egy nulldimenziós merev altér direkt szorzataként értelmezett háromdimenziós test esetében a 3. „lépés”, értelmetlen, mivel nincs eliminált koordináta és nincs eliminált perem.

4. *A rúd tengelyének, illetve a héj középfelületének pontjaiban értelmezett vektorértékű belső erőket „szét kell kenni” a rúd keresztmetszetében, illetve a héj vastagsága mentén. Ehhez*

*(részben) fel kell használni azt a tényt, hogy sem a rúd keresztmetszete, sem a héj vastagsága nem változik.*

Ez az a „lépés”, ahol tetten érhető, hogy a merev téglányon értelmezett belső erővektor és belső nyomatékvektor a háromdimenziós test vizsgálat során nem a „végső” belső erő, hanem azokat, hasonlóan a rúd- és a héjelméletekhez, szét kell kenni a merev altér pontjai fölött. Ez rúd esetében a keresztmetszetet, héj esetén a vastagságot, test esetén egy pontot jelent. Vagyis háromdimenziós deformálható test×merev pont konstrukciójú test esetében nincs hová szétkeni a belső erő- és nyomatékvektort, azokat az adott ponthoz kell kötni. Ugyanakkor a nyomatékvektor, értelmezése szerint, egy erőnek egy pontra vett nyomatéka. Rúd és héj esetén a feszültség elsőrendű nyomatékaként értelmezzük a hajlító és a csavaró nyomatékot, a nyomatékokat tehát nem egy ponthoz, hanem egy véges területű síkidomhoz (a keresztmetszethez), illetve egy véges hosszúságú szakaszhoz (a vastagsághoz) rendeljük, mint belső erőt. Tehát ebben a két modellben belső ellenmondás nincs. Egy háromdimenziós deformálható test×merev pont konstrukciójú test esetén fennáll az a kérdés, hogy mi is a ponthoz rendelt nyomaték mechanikai tartalma, hiszen nem áll módunkban erő×erőkar felbontás alapján magyarázatot adni, vagyis a pontonként bevezetett nyomaték egy olyan matematikai fogalom, amely nem modellez mechanikai jelenséget. A deformálható szilárd testnek véges téglányokra való felbontása formálisan feloldja ezt az ellentmondást abban az értelemben, hogy mind az erővektorból, mind a nyomatékvektorból az adott, véges méretű téglány felületéhez, pl. az elemi szilárdságtan érvelése alapján (lásd pl. CHOLNOKY [2]), egyértelműen lehet feszültséget rendelni. Ugyanakkor háromdimenziós deformálható test×merev pont konstrukciójú test esetén három értelmezési nehézség merül fel. Az egyik, hogy ebben a megközelítésben nem értelmezünk nyomatéki feszültséget, hanem a téglányok felületén értelmezett (lineárisan) változó feszültség adja a nyomatékot. A másik, hogy nincs garancia arra nézve, hogy a különböző méretű téglányokra való felosztás esetén a test ugyanazon pontjaiban ugyanolyan feszültségállapotot nyerünk. Végül nincs arra nézve se garancia, hogy a téglányokra („végelemekre”) osztás módszerében a téglányok peremén a feszültségek (és az alakváltozások, valamint az eltolódások és elfordulások) folytonosak lennének. E két utóbbi nehézség fennállásában bizonyosak lehetünk. A harmadik nehézség vizsgálatával kezdjük. A végelemanalízis legfőbb lépéseinek egyike, hogy a résztartományra osztást követően olyan egyenleteket is figyelembe vesz az elmélet megalkotása során, amely a résztartományok határán az állapotfüggvények (eltolódások, alakváltozások, feszültségek) folytonosságát (még ha adott hibahatáron belül is, de) biztosítja. A második nehézség vizsgálatával folytatjuk. Minden végeelem esetén konvergencia vizsgálatot végeznek, amely valamely feladattípus (pl. lineáris rugalmasságtan) adott elemtípusra (pl. rúdelem, héjelem, tárcsaelem, térbeli végeelem) esetén meghatározta a résztartományok azon maximális méreteit, amely mellett a számítási hiba adott hibahatáron belül van.

#### 4.4. Következtés

A deformálható és merev kiegészítő alterek vonal×síkidom, felület×szakasz „sorozatnak” a következő elemeként felfogható tér×pont. Ugyanakkor, amíg a síkidom és a szakasz értelmezhető merev testként, addig a pont nem. A rúd és a héj esetén a rúd deformálható alterének (a rúd tengelyének), illetve a héj deformálható alterének (a héj középfelületének) minden pontjához formálisan egy eltolódás vektort és egy elfordulás vektort rendelünk. Formálisan, mert valójában rúd esetén nem a rúd tengelyének egy pontja fordul el, hanem a rúd tengelyéhez kötött keresztmetszet. Pontosabban az egydimenziós rúdtengelynek a háromdimenziós térben megadott (folytonos) eltolódása a kíséző triéder elfordulását eredményezi, és mivel a rúd keresztmetszetét a rúdtengely kíséző triéderéhez kötöttük, vele fordul a rúd keresztmetszete is. Hasonlóan ehhez, héj esetén nem a héj középfelületének egy pontja fordul el, hanem a héj középfelületéhez kötött vastagság. Pontosabban a kétdimenziós héjfelületnek a háromdimenziós térben megadott (folytonos) eltolódása a kíséző triéder elfordulását eredményezi, és mivel a héj vastagságát a héjfelület kíséző triéderéhez kötöttük, vele fordul a héj vastagsága is. Folytatva az analógiát, a deformálható szilárd test (görbevonaltú koordináta-rendszernek tekintve) minden pontjához egy „merev pontot” rendelve, a görbevonaltú koordináta-rendszer minden pontjához hozzárendelt kíséző triéder elfordulása adja meg a kíséző triéderhez rendelt „merev pont” elfordulását. Maga a megfogalmazás egyrészt nem értelmezhető, hiszen a pont, nem lévén kiterjedése, nem fordul el, másrészt nem szolgál új ismerettel, mivel a kontinuummechanikából, a rugalmasságtanból ismert, hogy nem egy pont fordul el, hanem a pont környezete, illetve a ponton áthaladó irányvektor (érintő vektor) fordul el (LOVE [16], LUR'E [17], LÁMER [8-10]). Ennek megfelelően a háromdimenziós deformálható test×merev pont konstrukciójú test kinematikai szabadságfoka egyedül a pontjainak az eltolódása, továbbá a háromdimenziós deformálható test×merev pont konstrukciójú testben független elfordulásvektor nem értelmezhető. Ezzel összhangban, utalva a nyomaték erő×erőkar értelmezésére, megmutatható, hogy a háromdimenziós deformálható test×merev pont konstrukciójú test dinamikai szabadságfoka egyedül a pontjaiban értelmezett feszültségtenzor, továbbá „nyomatéki” feszültségtenzor nem értelmezhető.

A klasszikus rúd és héj mintájára az eltolódással és feszültségtenzorral értelmezett kontinuumot klasszikus kontinuumnak nevezzük. A fenti eredmények megfogalmazhatók úgy, hogy a klasszikus kontinuum a kontinuum minden pontjához hozzárendelhető elfordulásvektor és „nyomatéki” feszültségtenzor bevezetésével nem általánosítható.

A nyert eredmények összhangban vannak néhány korábbi kutatási eredménnyel (KUNYIN [3], LÁMER [5]).

A periodikus elrendezésű diszkrét rendszer értelmezhető általánosított kontinuumként (rácskontinuumként) oly módon, hogy a diszkrét ponthalmaz felett folytonos értelmezési tartományú eltolódás, elfordulás és további kinematikai, valamint feszültségi, „nyomatéki” feszültségi és további dinamikai változók értelmezhetők, és az ezek meghatározására levezetett

folytonos parciális differenciálegyenletekkel leírt rendszer lenne az általánosított kontinuum. *Megjegyzés.* A belső szabadságfokokat valójában nem egy kontinuumszámosságú ponthalmaz minden pontjához, hanem az abba ágyazott, véges számú ponthoz rendeljük (lásd pl. KUNYIN [3], LÁMER [12-15]). Ezek ismertetése kívül esik jelen tanulmány keretein.

## 5. Összefoglalás

A tanulmányban a rúd- és héjelmélet bevezetésének lehetőségét a háromdimenziós euklideszi tér merev és deformálható (kiegészítő) alterekre bontásának segítségével mutattuk be. Ennek során a rudat egy deformálható vonal és egy merev síkidom, a héjat egy deformálható felület és egy merev szakasz direkt szorzataként állítottuk elő. Megmutattuk, hogy a direkt szorzatok elemeinek egyenkénti jellemzése alapján a rudakat és a héjakat, mint geometriai formákat csoportosíthatjuk/osztályozhatjuk. Rúd esetében például egyenes, síkgörbe, térgörbe tengelyű rúd, állandó és változó keresztmetszetű rúd, egyszeresen vagy többszörösen összefüggő keresztmetszetű rúd vezethető be. Héj esetében például sík középfelületű tárcsa, illetve lemez, egyszer, illetve kétszer görbült középfelületű héj, egyszeresen vagy többszörösen összefüggő középfelületű héj, állandó és változó vastagságú héj értelmezhető.

Megmutattuk, hogy a direkt szorzat elemeinek deformációja alapján rúd- és héjelméleti osztályok határozhatók meg. Négy független osztály különíthető el.

*Klasszikus rúd- és héjelmélet:* csak a rúd tengelye és a héj középfelülete deformálódik, a rúd tengelye és keresztmetszete, valamint a héj középfelülete és vastagsága által bezárt szög nem változik, továbbá a rúd keresztmetszete, illetve a héj vastagsága nem deformálódik.

*Nyírt rúd- és héjelmélet:* a rúd tengelye és a héj középfelülete deformálódik, valamint a rúd tengelye és keresztmetszete, valamint a héj középfelülete és vastagsága által bezárt szög változik, továbbá a rúd keresztmetszete, illetve a héj vastagsága nem deformálódik.

*Öblösödő rúd- és héjelmélet:* a rúd tengelye és a héj középfelülete deformálódik, a rúd tengelye és keresztmetszete, valamint a héj középfelülete és vastagsága által bezárt szög nem változik, a rúd keresztmetszete, illetve a héj vastagsága a saját síkjából, illetve egyeneséből deformálódik.

*Kontrahálódó rúd- és héjelmélet:* a rúd tengelye és a héj középfelülete deformálódik, a rúd tengelye és a keresztmetszete, valamint a héj középfelülete és vastagsága által bezárt szög nem változik, a rúd keresztmetszete, illetve a héj vastagsága a saját síkjában, illetve egyenesében deformálódik.

A három nemklasszikus változathól kettő-kettő, vagy mindhárom „összevonható”. Ennek megfelelően elviekben

$$1 + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8$$

lehetséges rúd- és héjelméleti változat/modell értelmezhető. *Megjegyzés.* Különböző nyírási, öblösödi és kontrahálódási függvények bevezetésével különböző alváltozatok különíthetők el.

Megmutattuk, hogy deformálható térbeli test nem értelmezhető deformálható háromdimenziós altér és a nulldimenziós merev kiegészítő altér direkt szorzataként. Másképpen megfogalmazva a klasszikus kontinuum a kontinuum minden pontjához hozzárendelhető elfordulásvektor és „nyomatéki” feszültségtenzor bevezetésével nem általánosítható.

## Hivatkozások

- [1] Antman, S.S.: The Theory of Rods. In: Encyclopaedia of Physics. Vol VIa/2, Springer, N.Y. 1972. pp. 641-703
- [2] Cholnoky Tibor, dr.: Mechanika. II. kötet. Szilárdságtan Harmadik, átdolgozott kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
- [3] Kunin, I.A.: Elastic Media with Microstructure I., II. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 2011-12, translated from Russian, 1975.
- [4] Lámer G.: Deduction of Two- and Single-Variable Problems from the Three-Variable Problem = Newsletter, Techn. Univ. of Budapest, II (1), 1984. pp. 5-11
- [5] Lámer G.: Contradictions in the Theory of Micropolar Elasticity and Their Causes = Newsletter, Techn. Univ. of Budapest, II (1), 1984. pp. 12-16
- [6] Lámer G.: Geometric Forms – Structures – Numerical Methods = Newsletter, Techn. Univ. of Budapest, II (2), 1984. pp. 23-34
- [7] Lámer G.: On a Unified Interpretation of the Theory of Shells and Rods = Newsletter, Techn. Univ. of Budapest, III (3), 1985. pp. 5-11
- [8] Lámer G.: Notes on the Theory of Large Displacement with Small Strain = Periodica Politechnica 29 (1-2), 1985. pp. 53-65
- [9] Lámer G.: A kis alakváltozások mellett nagy elmozdulásokat végző tökéletesen rugalmas héjak és rudak elméleteinek matematikai alapjai. Kandidátusi értekezés. Budapest, 1990.
- [10] Lámer G.: A kis alakváltozások mellett nagy elmozdulást végző kontinuum kinematikájáról = Építés-, Építészettudomány XXIII (1-2), 1992-93. pp. 35-59
- [11] Lámer G.: Két- és egyváltozós feladatok levezetése a háromváltozós feladatból. Sajátosságai a kontinuummechanikában = Építés-, Építészettudomány XXIII (1-2), 1992-93. pp. 61-92
- [12] Lámer G.: A deformálható szilárd, folytonos közegek matematikai modellezésének egyes kérdéseiről: topológikus, metrikus és numerikus szempontok. = In: Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2013. Konferencia (Budapest, 2013. november hó 6.) Szerk.: Török Á. – Görög Péter – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2013. [A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtára 16. kötet] pp. 317-332

- [13] Lámer G.: Continuous and Discrete Models in the Mechanics of Deformable Solid Bodies. Proceedings of the Annual Session of Scientific Papers. Vol. XVII. (XXVII) "IMT Oradea" 2018. May 31. – June 1. pp. 125-130
- [14] Lámer G.: Közégek mechanikai viselkedésének folytonos és diszkrét modellezése. Három modelltípus. = In: Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2018. Konferencia (Budapest, 2018. április hó 19.) Szerk.: Török Á. – Görög Péter – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2018. [A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtára 23. kötet] pp. 165-182
- [15] Lámer G.: Folytonos és diszkrét modellek a deformálható szilárd testek mechanikájában. In: Műszaki Tudomány az Észak-kelet Magyarországi régióban. Szolnok, 2018. május hó 31. Konferencia kiadványa. Szerk.: Bodzás Sándor. Debreceni Akadémiai Bizottság Műszaki Szakbizottsága, Debrecen, 2018.
- [16] Love, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Fourth ed. Cambridge, At the University Press, 1927.
- [17] Lur'e, A.I.: Theory of Elasticity. Springer. Berlin - Heidelberg - New York, 2005.
- [18] Лужин, О.В.: Теория тонкостенных стержней замкнутого профиля и ее применение в мостостроении. Изд. ВИА, Москва, 1959.
- [19] Muttnyánszky Ádám: Szilárdságtan. Harmadik kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1961.
- [20] Naghdi, P.M.: The Theory of Shells and Plates. In: Encyclopaedia of Physics. Vol VIa/2, Springer, N.Y. 1972. pp. 425-640
- [21] Niordson, F.I.: A Consistent Refined Shell Theory = DCAMM. The Techn. Univ. of Denmark. Report N° 104., May 1976.
- [22] Власов, В.З.: Тонкостенные упругие стержни. ГИСЛ, Москва-Ленинград, 1940.