

Debreceni Egyetem

Informatikai Kar

Digitális kúpszeletek

Témavezető:

dr. Aszalós László

egyetemi adjunktus

Készítette:

Király Zoltán

Gazdaságinformatikus

DEBRECEN

2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Alapdefiníciók, jelölések	3
3. A kúpszeletek matematikai háttere	5
3.1 Történelmi előzmény	5
3.2 A kúpszeletek fajtái	5
3.3 Elfajult esetek	7
3.4 Kúpszeletek, mint mértani helyek	7
4. Szakasz és egyenes.....	8
4.1 A 4 szomszédságú eset	8
4.2 A 8 szomszédságú eset	11
4.3 A 6 szomszédságú eset	13
5. A digitális kör.....	15
5.1 A 4 szomszédságú eset	15
5.2 A 8 szomszédságú eset	16
5.3 A 6 szomszédságú eset	17
6. Ellipszis.....	18
6.1 A 4 szomszédságú eset	18
6.2 A 8 szomszédságú eset	20
6.3 A 6 szomszédos eset	22
7. Hiperbola	23
7.1 A 4 szomszédságú esetek	23
7.2 A 8 szomszédságú eset	25
7.3 A 6 szomszédsági eset	26
8. Parabola.....	28
8.1 A 4 szomszédságú eset	28
8.2 A 8 szomszédságú eset	29
8.3 A 6 szomszédságú eset	30
9. Implementáció.....	31
10. Összefoglalás	33
Irodalomjegyzék.....	34

1. Bevezetés

Szakdolgozatom témája a digitális kúpszeletek, amely fontos része a digitális képfeldolgozás témakörének. A célja ennek a leírásnak, hogy bemutassa néhány egyszerű geometriai alakzatát a digitális síknak. Megfogalmazásom a digitális távolságon és a tárgyak karakterisztikus Euklideszi tulajdonságain alapszik. A dolgozatban elemzésre kerülnek olyan digitális alakzatok tulajdonságai, mint az egyenes, kör, parabola, hiperbola és az ellipszis.

A leírásban használt hosszúságok a klasszikus négyzetrácsról jól ismert 4 és a 8 szomszédú hosszúságok, illetve egy speciális esetről a 6 szomszédú hosszúságon alapszanak. A $(\mathbb{Z}^2, 4)$, $(\mathbb{Z}^2, 8)$ és a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ jelöléseket fogjuk használni a terek megnevezésére.

Egy olyan távolságfüggvényt használok, mely a pontok között a lehető legrövidebb út távolságán alapszik, minden egyes lépésnél csak a szomszédsági kritériumokat használva.

A szakdolgozatom második fejezetében bemutatásra kerülnek azok az alapdefiníciók és jelölések, melyeket használni fogunk az egész dolgozat alatt.

A harmadik fejezet egy rövid áttekintést nyújt a kúpszeletekről általánosságban és egy rövid történelmi betekintést is ad.

A további fejezetekben a célkitűzésem a $(\mathbb{Z}^2, 4)$, $(\mathbb{Z}^2, 8)$ és a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkokon a különböző digitális kúpszeletek általános, és néhány speciális esetének ábrázolása, az elért eredmények bemutatása. Céloom megvalósításához a Microsoft Office Excel beépített Visual Basic for Application (VBA) alkalmazásának segítségével készítettem egy segédletet, mely a dolgozatban leírt definíciók alapján a különböző síkokon kirajzolja a felhasználó által megadott paraméterekből a kúpszeleteket. A szakdolgozatban lévő ábrák készítése is ennek az alkalmazásnak a segítségével történt.

2. Alapdefiníciók, jelölések

Ebben a részben néhány olyan definíció és jelölést adunk meg, amely az egész dolgozatban azonos szerepkörben fordul elő.

Jelölje $\mathbb{Z}^2$ a 2 dimenziós digitális teret, vagyis $\mathbb{Z}^2 = \{(z_i)_{i=1}^2 : z_i \in \mathbb{Z}\}$. A $\mathbb{Z}^2$ elemeire, mint pontokra fogunk hivatkozni.

Megjegyezzük, hogy az N dimenziós digitális tér éppúgy tekinthető az egészkoordinátájú rácsponthalmaznak, mint az ezen pontok által meghatározott N dimenziós egységkockák halmazának, ahol minden kockát a középpontjának koordinátái reprezentálnak.

A $\mathbb{Z}^2$ téren természetes módon értelmezhető a koordinátánkénti összeadás és az egész számmal való szorzás, ha $p = (p_i)_{i=1}^2$, $q = (q_i)_{i=1}^2$ és t egy tetszőleges egész szám, akkor $p + q \doteq (p_i + q_i)_{i=1}^2$, $tp \doteq (tp_i)_{i=1}^2$.

DEFINÍCIÓ. Egy V térben értelmezett távolságfüggvényről akkor mondjuk, hogy „metrika” tulajdonságú, ha $\forall p, q, r \in V$ esetén teljesülnek a következő feltételek (Nagy Benedek, 2003a):

1. $d(p, q) = 0$, akkor és csak akkor, ha $p = q$,
2. $d(p, q) = d(q, p)$ (szimmetria),
3. $d(p, q) = d(q, r) \geq d(p, r)$ (háromszög-egyenlőtlenség)

A fenti feltételekből következik, hogy a függvény nem vehet fel negatív értéket. A dolgozatban a V halmaz elemeire általában egészértékű vektorokkal fogunk hivatkozni. Egy p pont i . koordinátáját p_i -vel fogjuk jelölni.

DEFINÍCIÓ. Legyen p és q két adott pont $\mathbb{Z}^2$ -ban. Legyen $k \in \mathbb{N}$, amelyre $0 \leq k \leq N$. Azt mondjuk, hogy a p és a q pontok „ k -szomszédok”, ha teljesülnek a következő tulajdonságok (Nagy Benedek, 2003b):

1. $|p_i - q_i| \leq 1$ minden $1 \leq i \leq N$ egész esetén.
2. $\sum |p_i - q_i| \leq k$, minden $1 \leq i \leq N$ esetén.

Ha a második feltételben egyenlőség áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy a p és a q pontok szigorú értelemben vett k -szomszédok.

DEFINÍCIÓ. Legyenek p és q a $\mathbb{Z}^2$ tér két pontja. A p -ből q -ba vezető B -útnak nevezünk olyan $\Pi(p, q; B) = (p_0, \dots, p_m)$ véges pontsorozatot, aminek a $p_i \in \mathbb{Z}^2$, $i = 1, \dots, m$ elemeire teljesül,

hogy $p_0 = p$, $p_m = q$ és p_{i-1}, p_i pontok b_i -szomszédok minden $1 \leq i \leq m$ egész szám esetén (Orosz Ágota, 2005a).

A $\mathbb{Z}^2$ tér bármely két pontja között létezik legrövidebb B -út, ami általában nem egyértelmű, és nem szükségképpen egyezik meg valamely q -ból p -be vezető minimális hosszú B -úttal.

DEFINÍCIÓ. Ha a $p, q \in \mathbb{Z}^2$ pontok esetén létezik p -ból q -ba vezető B -út, és a $(p = p_0, p_1, \dots, p_m = q)$ egy rövidebb ilyen út, akkor m -et a p és q pontok B -távolságának nevezzük és $d(p, q; B)$ -vel jelöljük (Orosz Ágota, 2005b).

TÉTEL. A p és a q pontok B -távolsága a következő képlettel számítható ki (Orosz Ágota, 2005c):

$$d(p, q; B) = \max_{i \leq N} (d_i(w)),$$

ahol

$$d_i(w) = \max \{h \mid \sum_{j=1}^i v(j) > \sum_{j=1}^{h-1} b^{(i)}(j)\}.$$

3. A kúpszeletek matematikai háttere

3.1 Történelmi előzmény

Eukleidész (i.e. 365 - 300)

A nagy matematikus már foglalkozott kúpszeletekkel. Könyvet is írt a témában, ami azonban elveszett. Alapvető művében, a *Sztoikheia II.* kötetében geometriai algebrával foglalkozik. Számunkra ez azért fontos, mert olyan feladatokkal foglalkozik, amelyek fontos szerepet játszottak a kúpszeletek elnevezésében.

Pergei Apollóniosz (i.e. 260 - 190)

Alexandriában, majd Pergében dolgozva alkotta meg nyolckötetes kúpszeletekről szóló könyvét, a *Kónikát*. Tárgyalásának új módja, hogy a szümpptomákat minden esetben speciálisan, konjugált átmérőpárra írta fel (az érintő az x , az átmérő az y tengely), mai szóhasználatnál ferdeszögű koordináta-rendszerben, másrésről mind a parabolát, mind az ellipszist, mind a hiperbolát azonos eljárással vizsgálta.

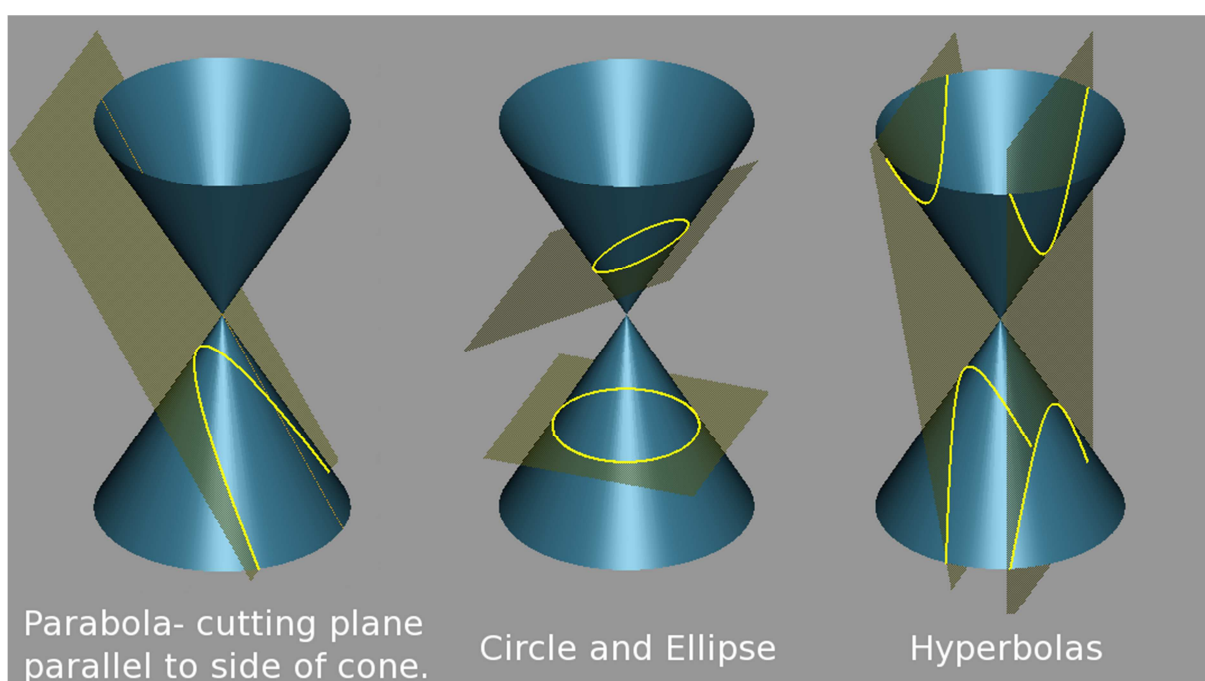
Az első négy kötet görögül, a következő három arabul maradt ránk. A VIII. kötetet 1710-ben Papposz hivatkozásaira támaszkodva Edmund Halley angol matematika-történész rekonstruálta. Az I., II., III. és IV. könyv a kúpszeletek, mint egyetlen ferde körkúp különböző síkmetszeteivel, a kúpszeletek szümpptomáival, konjugált átmérővel, érintővel, aszimptotával, pólussal és polárisal illetve fokális tulajdonságokkal foglalkozik. Az V. kúpszeletek érintőiről és evolútáiról szól. A kúpszeletek egybevágóságával és hasonlóságával a VI. kötet foglalkozik, míg a VII.-et a konjugált átmérőkre szánta. A legutolsó rész lényegében szerkesztési feladatokat tartalmaz.

3.2 A kúpszeletek fajtái

A matematikában a kúpszelet olyan síkgörbe, mely egy kúp, pontosabban egyenes körkúp és sík áthatásaként jön létre. A kúpszeleteket már i. e. 200 körül felismerték és nevet adtak nekik, amikor is a pergei Apollóniosz tanulmányozta tulajdonságaikat.

Két jól ismert kúpszelet a kör és az ellipszis. Ezek akkor jönnek létre, ha a kúp és a sík metszete zárt görbe. Az ellipszis azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól

mért távolságának összege állandó, amely állandó nagyobb az adott pontok távolságánál. A kör az ellipszis speciális esete akkor, ha a sík merőleges a kúp tengelyére. Ha a sík párhuzamos a kúp alkotójával, a kúpszeletet parabolának hívják. A parabola azon pontok mértani helye a síkban, amik egy adott egyenestől és egy adott (az egyenesre nem illeszkedő) ponttól egyenlő távolságra vannak. Végül, ha a metszet nyitott görbe és nem párhuzamos az alkotóval, a görbe hiperbola. A hiperbola azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának különbsége állandó, amely állandó kisebb az adott pontok távolságánál. Ebben az esetben a sík a kúp mindkét felét áthatja két széteső görbét alkotva, bár az egyiket gyakran figyelmen kívül hagyják.



1. ábra: Kúpszeletek származtatásának szemléltetése.

(http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/48/Conic_sections_2.png/450px-Conic_sections_2.png)

3.3 Elfajult esetek

Elfajult esetek akkor keletkeznek, ha a sík a kúp csúcsán megy keresztül. Ebben az esetben az áthatási görbe ponttá, egyenessé, vagy két metsző egyenessé fajul. Ezeket az eseteket gyakran nem sorolják a kúpszeletek közé.

3.4 Kúpszeletek, mint mértani helyek

Mindegyik kúpszeletet mértani helyként is lehet definiálni, vagyis minden P pontjuknak meghatározott tulajdonságaik vannak:

- Kör: $\{ z \mid d(z, c) = r \}$, ahol c egy adott pont (a középpont) és r egy adott állandó távolság, (a sugár).
- Ellipszis: $\{ z \mid d(z, p) + d(z, q) = r \}$, ahol p, q két nem egybeeső pont (a fókuszok) és $d > d(p, q)$ egy adott állandó távolság (a nagytengely).
- Hiperbola: $\{ z \mid |d(z, p) - d(z, q)| = r \}$, ahol p, q két nem egybeeső pont (a fókuszok) és $d < d(p, q)$ egy adott távolság.
- Parabola: $\{ z \mid d(z, p) = d(z, L) \}$, ahol p egy adott pont (a fókusz) és L egy adott egyenes (a direktrix), mely nem tartalmazza az p fókuszt.

A projektív geometriában a kúpszeletek úgy definiálhatók, hogy mindegyik pontjukat egy adott ponttól (fókusz) és egy adott görbétől egyenlő távolságra vannak.

4. Szakasz és egyenes

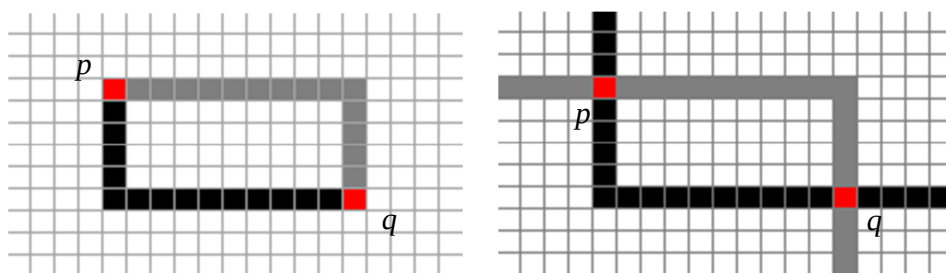
Ebben a részben a szakasz és az egyenes következő Euklideszi tulajdonságait fogjuk használni: pontok halmaza a két pontot összekötő legrövidebb úton, illetve megvizsgáljuk azokat az eseteket is, amikor egy egyenest két pont határoz meg, azaz a két ponttól egyforma távolságokra lévő pontok halmaza lesz az egyenes.

Mivel a digitális síkon számos legrövidebb út létezik két adott pont között, ezért kiválasztunk néhány speciális esetet.

4.1 A 4 szomszédságú eset

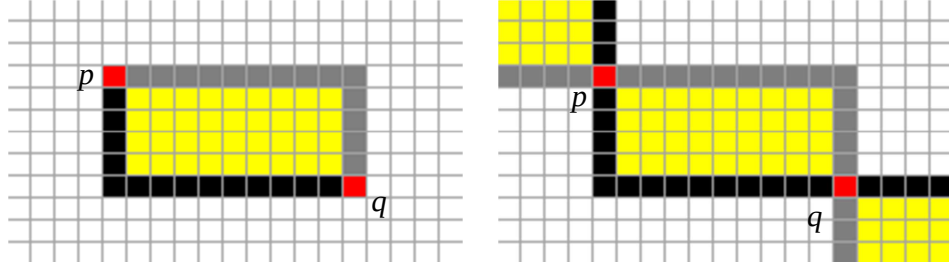
DEFINÍCIÓ. Legyen $p = (p_1, p_2)$, valamint $q = (q_1, q_2)$ két különböző pont a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon. Minimális hosszal a $\Pi_4(p, q)$ utat *szakasznak* hívjuk a p és a q pont között, ha minden $r = (r_1, r_2) \in \Pi_4(p, q)$ -ra legalább az egyik feltétel teljesül a következők közül: $r_1 = p_1$, $r_1 = q_1$, $r_2 = p_2$, $r_2 = q_2$ (Nagy Benedek, Orosz Ágota, 2007a).

A definíció két extrém utat ad a két pont között. Mégpedig az első, amit a $(p_1 + \text{sgn}(q_1 - p_1)t, p_2)$, ahol $t = 0, \dots, |q_1 - p_1|$; $(q_1, p_2 + \text{sgn}(q_2 - p_2)t)$, $t = 0, \dots, |q_2 - p_2|$ pontok adnak. A másikat a $(p_1, p_2 + \text{sgn}(q_2 - p_2)t)$, $t = 0, \dots, |q_2 - p_2|$ és $(p_1 + \text{sgn}(q_1 - p_1)t, q_2)$, ahol $t = 0, \dots, |q_1 - p_1|$ pontok adják. Amikor $p_1 = q_1$ vagy $p_2 = q_2$, akkor ezek a szakaszok azonosak.



1-2. ábra: extrém esetek a két pontot összekötő szakaszra és a két ponton keresztülmenő egyenesre a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon.

A probléma ezekkel az esetekkel, hogy a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ sík két adott pontját összekötő legrövidebb szakaszokból és a két ponton átmenő legrövidebb egyenesekből véges sok létezik ebben a digitális térben.



3-4. ábra: Két pontot összekötő lehetséges szakaszok, és a két ponton átmenő lehetséges egyenesek útjai a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon.

Ez a két ábra jól szemlélteti a két pontot legrövidebb úton összekötő véges sok szakasz útjait és a két ponton legrövidebb úton átmenő véges sok egyenes útjait is. A két extrém eset közötti, sárgával megjelölt pontokon bárhogy haladva ugyanazt a távolságot kapjuk a két pont között. Így ez az eset problémás, mivel pontosan nem tudjuk meghatározni a szakaszt és az egyenest a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon.

DEFINÍCIÓ. Legyen $p = (p_1, p_2)$ egy pont a $\mathbb{Z}^2$ síkon és $s_1, s_2 \in \{-1, 1\}$. Azt mondjuk, hogy $L(p, s_1, s_2)$ egy *digitális egyenes* a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ térben, ha a $(p_1 + s_1 t, p_2)$ és a $(p_1, p_2 + s_2 t)$ pontok építik fel, ahol $t \in \mathbb{N}$. (Nagy Benedek, Orosz Ágota, 2007b)

Továbbá $L^h(p_2)$ -t *vízszintes egyenesnek* hívjuk, ha a (t, p_2) pontok alkotják ($t \in \mathbb{Z}$) és hasonlóan $L^v(p_1)$ -et *függőleges egyenesnek* hívjuk.

LEMMA. Ha $p, q \in \mathbb{Z}^2$ és $p_1 \neq q_1, p_2 \neq q_2$ akkor pontosan két egyenes létezik, melyek tartalmazzák a p és a q pontokat (Nagy Benedek, Orosz Ágota, 2007c).

Ez a két egyenes a következő pontokból áll:

$$L((p_1, q_2), \text{sgn}(q_1 - p_1), \text{sgn}(p_2 - q_2)) \text{ és } L((q_1, p_2), \text{sgn}(p_1 - q_1), \text{sgn}(q_2 - p_2)).$$

LEMMA. Ha p és q két különböző pont a $\mathbb{Z}^2$ síkon és $p_1 = q_1$ vagy $p_2 = q_2$ akkor létezik egy vízszintes vagy egy függőleges egyenes és végtelenül sok más egyenes, melyek tartalmazzák a p és a q pontokat (Nagy Benedek, Orosz Ágota, 2007d).

Az első esetenél: $L^v(p_1)$ és $L((p_1, t), s_1, \text{sgn}(p_2 - t))$, ahol $s_1 \in \{-1, 1\}$ és t egy egész szám, melyre teljesül, hogy $\text{sgn}(p_2 - t)\text{sgn}(q_2 - t) \geq 0$.

A második esetenél a vízszintes egyenes lesz az $L^h(p_2)$, és az összes többi egyenes a következő módon alakul:

$$L((t, p_2), \text{sgn}(p_1 - t), s_2), \text{ ahol } s_2 \in \{-1, 1\} \text{ és } \text{sgn}(p_1 - t)\text{sgn}(q_1 - t) \geq 0.$$

Azok a fogalmak, amiket fent meghatároztunk, az Euklideszi szakaszhoz és egyeneshez hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek. Az egyenes bármely két pontját összekötő rész egy szakasz, és így ez a szakasz az egyenes egy része. Jegyezzük meg itt, hogy a digitális szakasz és egyenes más definícióját használva, ez az állítás nem lesz igaz bármely két pontjára a digitális egyenesnek.

DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy két egyenes párhuzamos, ha az egyik egyenes minden pontja ugyanolyan távolságra van a másik egyenes megfelelő pontjaitól.

Nézzük meg azonban, hogy ezen a síkon ez nem lesz igaz a két egyenesre, hogy minden pontjuk ugyanolyan távolságra lesz a másiktól.

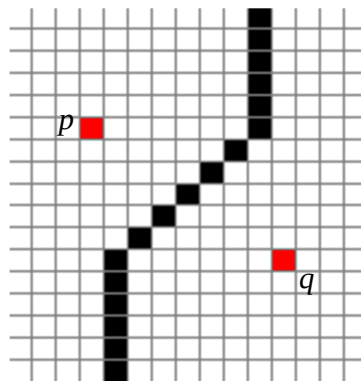
Most elemezzük az előző Euklideszi kikötést. A következő módon működik a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ térben.

TÉTEL. Ha L_1 egy egyenes és p egy pont, amely nem része az L_1 egyenesnek, akkor létezik egy olyan, egyedülálló módon meghatározott egyenes, amely párhuzamos L_1 -el és tartalmazza a p pontot. (Nagy Benedek, Orosz Ágota, 2007e)

Egy másik megfogalmazás lehet még, ha azt az esetet vesszük, amikor az egyenes azon pontok halmaza, melyek két adott ponttól egyenlő távolságra vannak. Ha a két adott pont között a távolság páratlan szám, abban az esetben a két pont által megadott egyenes nem létezik a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon.

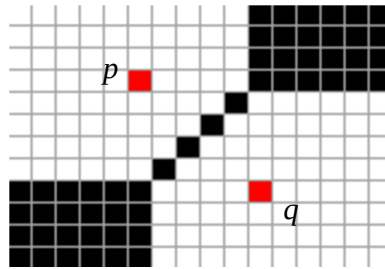
DEFINÍCIÓ. Legyen $p = (p_1, p_2)$ és $q = (q_1, q_2)$ két pont a $\mathbb{Z}^2$ síkon és legyen z egy természetes szám. Azt mondjuk, hogy a p és a q ponttól egyforma távolságra lévő pontok halmaza meghatároz egy digitális egyenest a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon, ha az adott pontok rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

$$\{ z \mid d(p, z) = d(q, z) \}.$$



5. ábra: Két pont által meghatározott egyenes a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon.

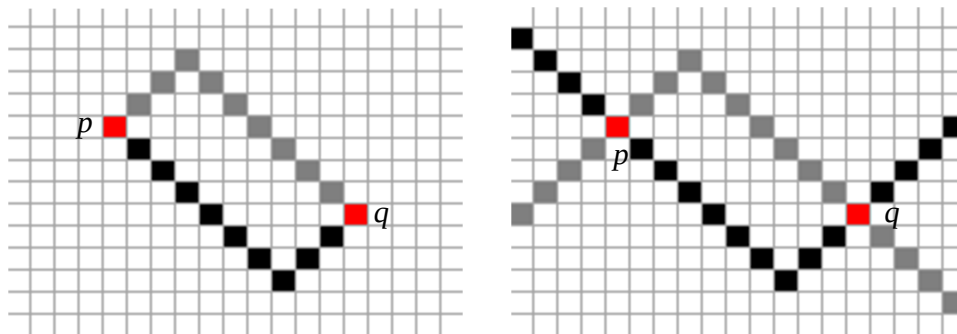
Ennél az esetben is előfordulhatnak extrém esetek, melyek a digitális egyenes, és a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon vett távolságdefiníció alapján furcsa képet adnak.



6. ábra: Extrém eset a két pont által meghatározott digitális egyenesre a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon.

4.2 A 8 szomszédságú eset

Válasszuk ki ezen a rácson azt a szakaszt és egyenest, mely szintén a legrövidebb út extrém eseteit mutatja be. Általában két különböző szakasz létezik két adott pont között, a pontok koordináta értékeik egyenrangúsága miatt.



7-8. ábra: Extrém esetek a két pontot összekötő szakaszra és egyenesre a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.

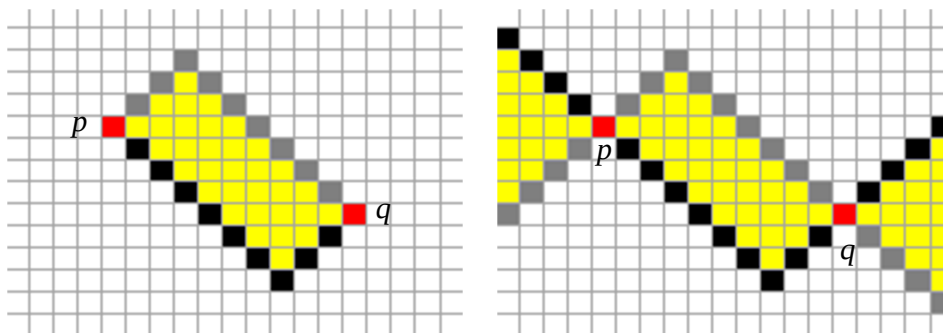
DEFINÍCIÓ. Legyen $p = (p_1, p_2)$ és $q = (q_1, q_2)$ két tetszőleges pont a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon. Azt mondjuk, hogy $\Pi_8(p, q)$ legrövidebb út egy szakasz a p és a q pont között, ha

$$|p_1 - r_1| = |p_2 - r_2| \text{ vagy } |q_1 - r_1| = |q_2 - r_2|,$$

minden $r = (r_1, r_2) \in \Pi_8(p, q)$ (Nagy Benedek, Orosz Ágota, 2007f).

Ezeket a szakaszokat is ki lehet terjeszteni egyenesekké hasonló módon, mint a 4 szomszédsós esetben.

Itt is találkozunk azzal a problémával, hogy ennél az esetben sem határozható meg pontosan a szakasz és az egyenes, mivel a két pontot összekötő szakaszból, illetve a két ponton átmenő egyenesből a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon is véges sok létezik, amelyek legrövidebb utat adnak.

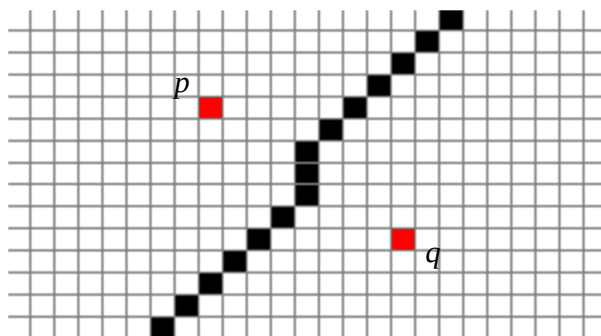


9-10. ábra: Két pontot összekötő lehetséges szakaszok, és a két ponton átmenő lehetséges egyenesek útjai a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.

Amikor azt az esetet nézzük, hogy az egyenes azon pontok halmaza, melyek két adott ponttól egyenlő távolságra vannak, akkor itt is elmondható, hogyha a két adott pont között a távolság páratlan szám, abban az esetben a két pont által megadott egyenes nem létezik a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.

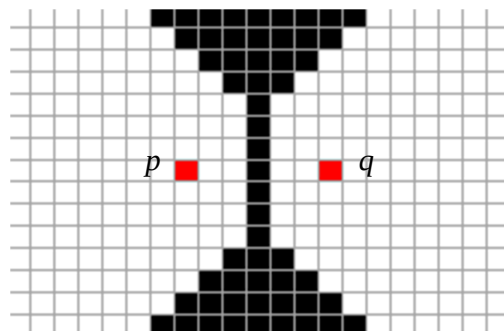
DEFINÍCIÓ. Legyen $p = (p_1, p_2)$ és $q = (q_1, q_2)$ két pont a $\mathbb{Z}^2$ síkon és legyen z egy természetes szám. Azt mondjuk, hogy a p és a q ponttól egyforma távolságra lévő pontok halmaza meghatároz egy digitális egyenest a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon, ha az adott pontok rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

$$\{ z \mid d(p, z) = d(q, z) \}.$$



11. ábra: Két pont által meghatározott egyenes a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.

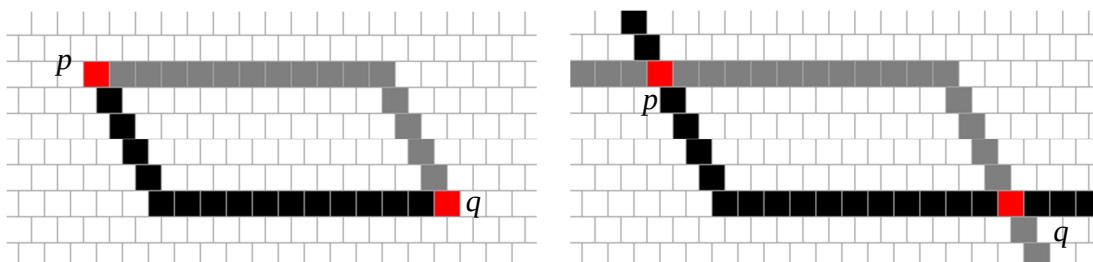
Ennél az esetnél is találkozhatunk extrém esettel, mely szintén furcsa képet ad a digitális egyenesről a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.



12. ábra: Extrém eset a két pont által meghatározott digitális egyenesre a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.

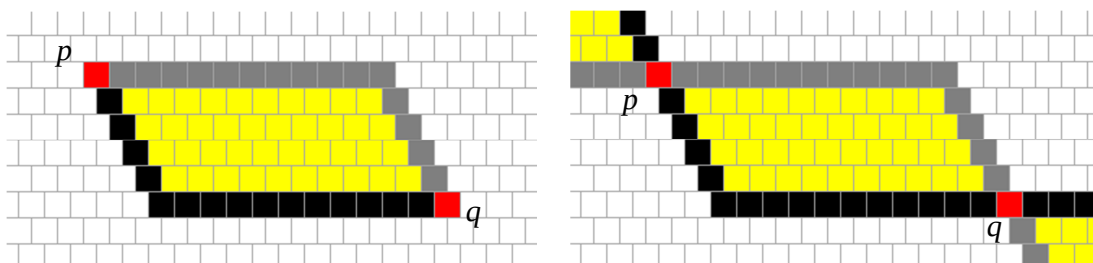
4.3 A 6 szomszédságú eset

Nézzük meg, hogyan is rajzolódnak ki a fejezetben tárgyalt alakzatok ezen a speciális rácson. Itt is ugyanazt a távolságdefiníciót használjuk, mint az előzőekben. Elsőként nézzük meg itt is azt a szakaszt és egyenest, mely a legrövidebb út extrém eseteit mutatja be. Itt is, mint az előzőekben, két különböző szakasz létezik két adott pont között, a pontok koordináta értékeik egyenrangúsága miatt. Ezek a szakaszok itt is kiterjeszthetők egyenesekké.



13-14. ábra: Extrém esetek a két pontot összekötő szakaszra és egyenesre a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon.

Hasonlóan, mint eddig, itt is fennáll az a probléma, amikor a két pontot összekötő legrövidebb útból véges sok létezik, ezért pontosan nem határozható meg a szakasz és az egyenes a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon sem, mivel így azokból is véges sok lehet.

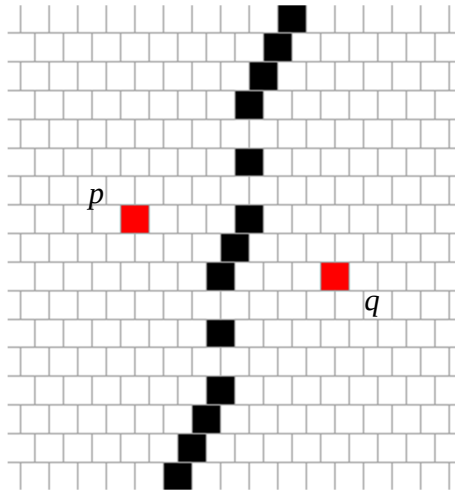


15-16. ábra: Két pontot összekötő lehetséges szakaszok, és a két ponton átmenő lehetséges egyenesek útjai a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon.

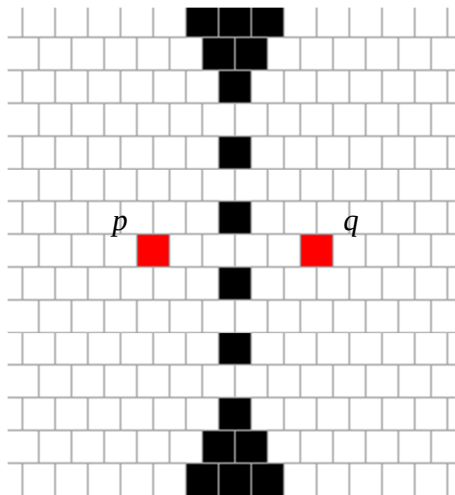
Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor azt a definíciót használjuk az egyenesre, hogy az egyenes két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza. Itt már nem szükséges azt a kikötés feltennünk, hogy csak akkor létezne az egyenes, ha a két pont közötti távolság páratlan szám lenne, hiszen ennél a lehetőségnél is kirajzolódik az egyenes a speciális rács miatt.

DEFINÍCIÓ. Legyen $p = (p_1, p_2)$ és $q = (q_1, q_2)$ két pont a $\mathbb{Z}^2$ síkon és legyen r egy természetes szám. Azt mondjuk, hogy a p és a q ponttól egyforma távolságra lévő pontok halmaza meghatároz egy digitális egyenest a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon, ha az adott pontok rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

$$\{ z \mid d(p, z) = d(q, z) \}.$$



17. ábra: Két pont által meghatározott egyenes a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.



18. ábra: Extrém eset a két pont által meghatározott digitális egyenesre a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon.

5. A digitális kör

A digitális körök a $\mathbb{Z}^2$ téren jól megvizsgálhatóak. Először nézzük meg a 4 szomszédságú esetet.

5.1 A 4 szomszédságú eset

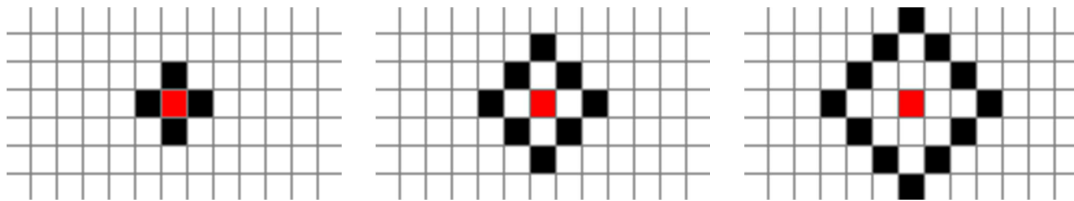
DEFINÍCIÓ. A kör vagy körvonal egy sík azon pontjainak halmaza, amelyek a sík egy meghatározott pontjától (középpont) adott távolságra (sugár) vannak. Jelölje c a középpontot és legyen r a sugár. Ekkor a kör a következő lesz:

$$\{ z \mid d(z, c) = r \}.$$

Legyen p egy adott pont a $\mathbb{Z}^2$ síkon. Azt tudjuk, hogy a p középpontú és r sugarú kör a következőképpen néz ki a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon:

$$(p_1 + s_1 t, p_2 + s_2(r - t)),$$

ahol $0 \leq t \leq r$ és $s_1, s_2 \in \{-1, 1\}$. Ezek a körök a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon ismert szakaszokból épülnek fel, és egyfajta gyémánt alakjuk van.



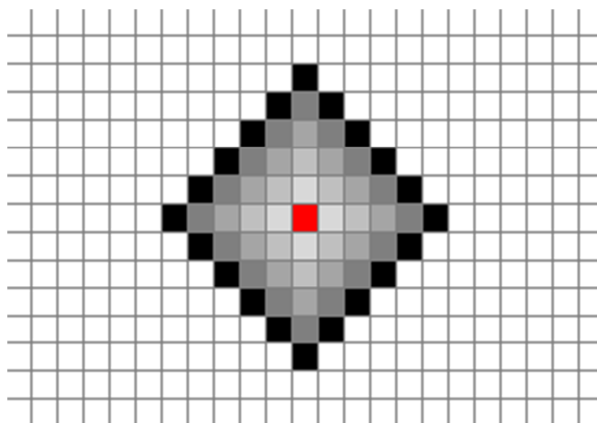
1-3. ábra: Az 1, 2 illetve 3 sugarú kör ábrázolása a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon.

Tehát a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon egy *origó* középpontú és r sugarú kör pontjai a következők lesznek:

$$(\pm t, \pm (r - t)),$$

ahol $t = 0, 1, \dots, r$.

Ezen a síkon, az *origó* középpontú digitális kört 4 pont fog meghatározni, mégpedig a $(0, +r)$, $(0, -r)$, $(+r, 0)$ és a $(-r, 0)$ koordinátájú pontok. Magát a kört pedig az ezeket a pontokat összekötő, a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon már bemutatott szakaszok alkotják.



4. ábra: A 4 szomszédságú körök ábrázolása a $\mathbb{Z}^2$ térben.

5.2 A 8 szomszédságú eset

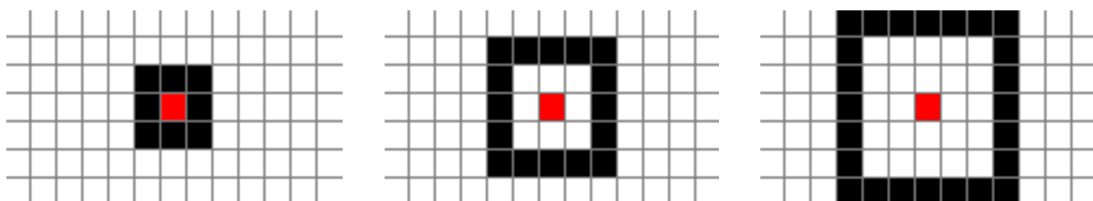
Most nézzük meg a digitális kört a 8 szomszédságú eseteknél. A $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon két pont távolsága a következő módon számolható ki:

$$d(p, q; B) = \max\{|q_1 - p_1|, |q_2 - p_2|\}.$$

Ennek az lesz a következménye, hogy a digitális körnek a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon négyzet alakja lesz, és a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon ábrázolt szakaszokból épül fel. A p középpontú és r sugarú digitális kör ekkor a következő pontokból épül fel:

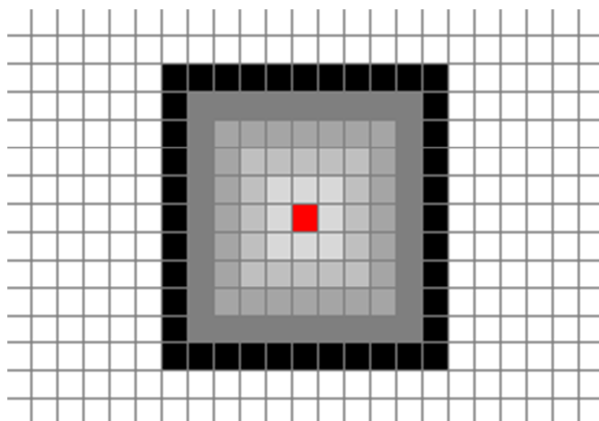
$$(p_1 \pm sr \pm (1-s)t, p_2 + st \pm (1-s)r),$$

ahol $-r \leq t \leq r$ és $s \in \{-1, 1\}$.



5-7. ábra: Az 1, 2 illetve 3 sugarú kör ábrázolása a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.

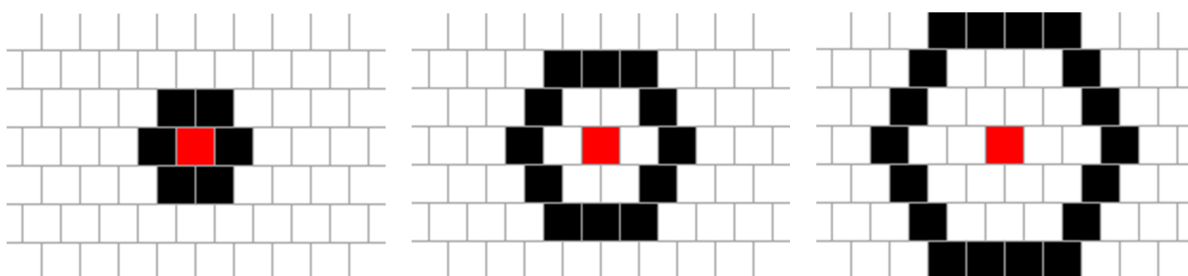
Ezeket a köröket tehát a $(+r, +r)$, $(+r, -r)$, $(-r, +r)$ és a $(-r, -r)$ pontok határozzák meg. Magát a kört pedig az ezeket a pontokat összekötő, a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon ábrázolt szakaszok alkotják.



8. ábra: A 8 szomszédságú körök ábrázolása a $\mathbb{Z}^2$ térben

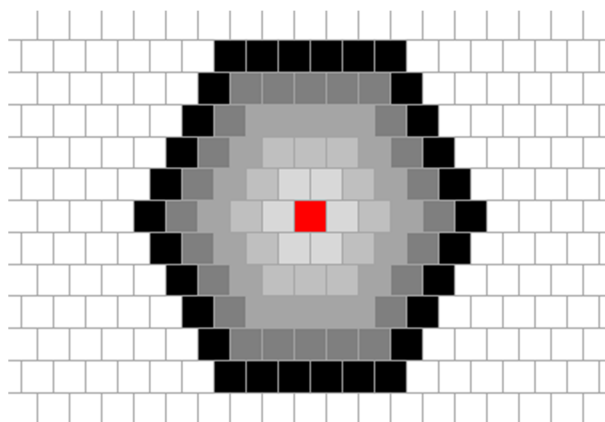
5.3 A 6 szomszédságú eset

Ebben a részben nézzük meg, hogy a speciális rácson hogyan is néznek ki a különböző sugarú digitális körök.



9-11. ábra: Az 1, 2 illetve 3 sugarú kör ábrázolása a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon.

Itt a digitális kör pontjaira ugyanazt a távolságdefiníciót használtuk, mint a 4 és a 8 szomszédságú eseteknél. Látható, hogy ezen a rácson a kör ábrázolása optimálisabb, hiszen a digitális kör alakja itt már jobban hasonlít az Euklideszi kör alakjához.



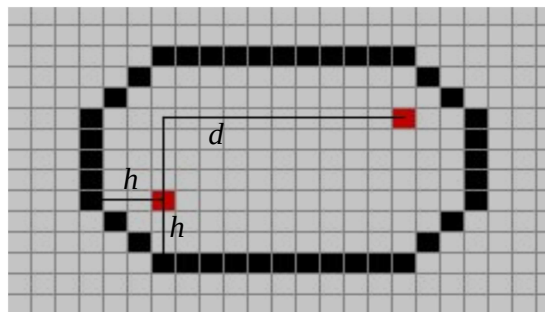
12. ábra: A 6 szomszédságú körök ábrázolása a $\mathbb{Z}^2$ térben

6. Ellipszis

Ebben a részben meghatározzuk az ellipszis pontjait a különböző síkokon. Az ellipszist úgy definiálhatjuk, mint olyan pontok halmaza, amelynek két adott ponttól vett távolságának az összege állandó.

6.1 A 4 szomszédságú eset

Nézzünk először meg egy általános rajzot, ami segít megérteni a későbbi jelöléseket.



1. ábra: Az ellipszis paramétereinek szemléltetése

DEFINÍCIÓ. Legyen p és q két különböző pont a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon és legyen r egy természetes szám. Az $E(p, q; r)$ digitális ellipszis pontjai olyan z pontok lesznek, melyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

$$\{ z \mid d(z, p) + d(z, q) = r \}.$$

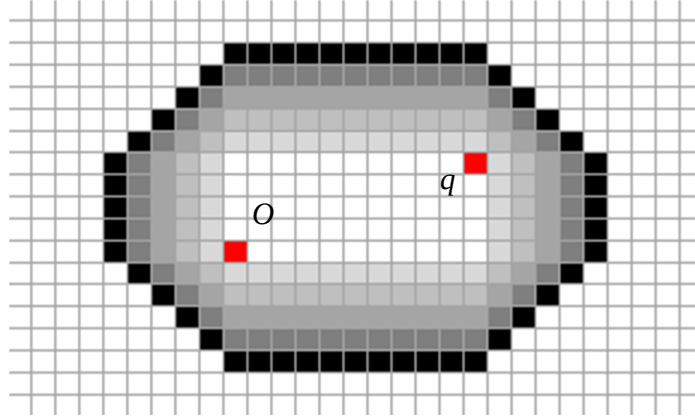
Jegyezzük meg azt, hogy ha $r < d = d(p, q)$ vagy d és r paritása nem egyezik meg, akkor $E(p, q; r)$ egy üres halmaz. Ugyanakkor ha d páros, akkor p és q megfelelő koordinátáinak paritása vagy azonos, vagy mindkettő eltérő, ezért $d(z, p)$ és $d(z, q)$ azonos paritású, így az ellipszisnek csak páros r esetén lesznek pontjai. Ha d páratlan, akkor r is az, így elegendő, ha olyan ellipszisekről beszélünk, amelyek alakja $E(p, q; d + 2h)$ formájúak.

Továbbá az eltolásinvariancia és a szimmetria miatt az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az ellipszis egyik fókuszpontja lesz az origó, és a másik fókuszpont koordinátái pozitívak lesznek, mert azokat a megfelelő koordinátaértékek negálásával kaptuk meg.

TÉTEL. Ha $q \in (\mathbb{Z}^2, 4)$ egy pont és $q_1, q_2 \geq 0$, $d = d(0, q)$ és legyen h egy pozitív egész szám (Nagy Benedek, Orosz Ágota, 2007g).

Ekkor az $E(0, q; d + 2h)$ digitális ellipszis pontjai pontosan a következők lesznek:

1. $(-t, t - h), \quad t = 0, 1, \dots, h,$
2. $(-t, q_2 + h - t), \quad t = 0, 1, \dots, h,$
3. $(-h, t), \quad t = 0, 1, \dots, q_2,$
4. $(t, -h), \quad t = 0, 1, \dots, q_1,$
5. $q - v,$ minden eddigi felsorolt v pont esetén.

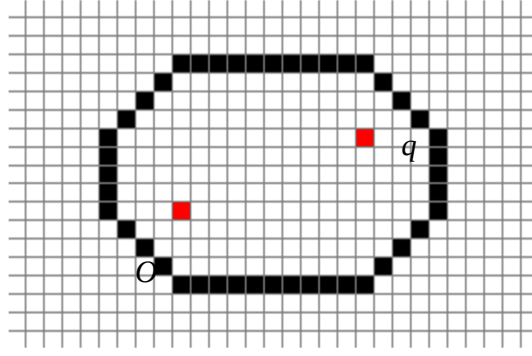


2. ábra: Egymást követő ellipszisek a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon, melyeket a h növelésével kaptunk.

Vegyük észre, hogy a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon az ellipsziseket 8 darab pont fogja meghatározni, magukat az ellipsziseket pedig az ezeket a pontokat összekötő szakaszok alkotják.

PÉLDA. Legyen $q = (10, 4)$ és $h = 4$. Ebben az esetben $d = 14$. Az $E(0, q; 22)$ ellipszist ekkor a következő pontok alkotják:

1. $(0, -4)$ és a $(-4, 0)$ pontokat összekötő szakasz (ez a szakasz a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkhoz tartozik)
2. $(0, 8)$ és a $(-4, 4)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkhoz tartozó szakasz
3. $(-4, 0)$ és a $(-4, 4)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkhoz tartozó szakasz
4. $(0, -4)$ és a $(10, -4)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkhoz tartozó szakasz
5. $q - v$, minden eddigi v pont esetén a következő
 - $(10, 8)$ és a $(14, 4)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkhoz tartozó szakasz
 - $(10, -4)$ és a $(14, 0)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkhoz tartozó szakasz
 - $(14, 4)$ és a $(14, 0)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkhoz tartozó szakasz
 - $(10, 8)$ és a $(0, 8)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkhoz tartozó szakasz



3. ábra: Az $E(0, q = (10, 4); 22)$ ellipszis pontjai a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon

6.2 A 8 szomszédságú eset

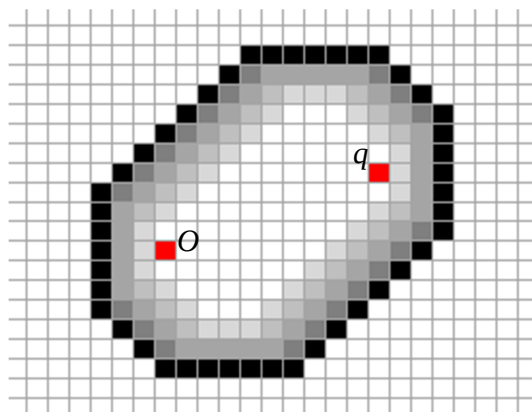
Ellentétben a 4 szomszédságú esetnél, a 8 szomszédságúnál nem szükséges, hogy az r és a d azonos paritásúak legyenek, bár ennél ez esetnél az ellipszis rajzolata hiányos lesz.

A koordináták szimmetria tulajdonsága és az eltolásinvariancia miatt itt is kikötünk néhány feltételt a fókuszpontokra.

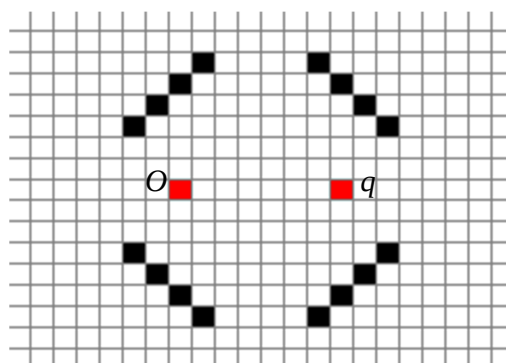
TÉTEL. Legyen $q \in (\mathbb{Z}^2, 8)$, $q_1 \geq q_2 \geq 0$, $d = d(0, q)$, és legyen h egy pozitív egész szám. Az $E(0, q; d + h)$ ellipszis pontjai a következők lesznek (szükséges, hogy a koordináták egész számok legyenek) (Nagy Benedek, Orosz Ágota, 2007h):

1. $(-h/2, t)$, $-h/2 \leq t \leq h/2$,
2. $(t, (q_1 + q_2 + h)/2)$, $(q_1 + q_2 - h)/2 \leq t \leq (q_1 + q_2 + h)/2$,
3. $(t - h, t)$, $h/2 \leq t \leq (q_1 + q_2 + h)/2$,
4. $(t, -h - t)$, $-h/2 \leq t \leq (q_1 - q_2 - h)/2$,
5. $q - v$, minden eddigi felsorolt v pont esetén.

MEGJEGYZÉS. Ebben a tételben az 1. és a 2. esetek $(\mathbb{Z}^2, 4)$ szakaszokat adnak. Ha h páratlan, illetve ha h és d paritása nem egyező, akkor ezek a szakaszok hiányozhatnak. A 3. és a 4. esetek $(\mathbb{Z}^2, 8)$ szakaszokat adnak.



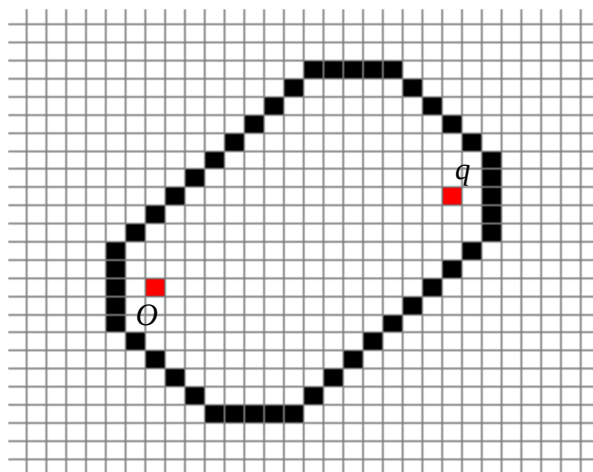
4. ábra: Egymást követő ellipszisek a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon, melyeket a h növelésével kaptunk.



5. ábra: Az $E(0, q = (0, 7); 12)$ speciális ellipszis pontjai a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.

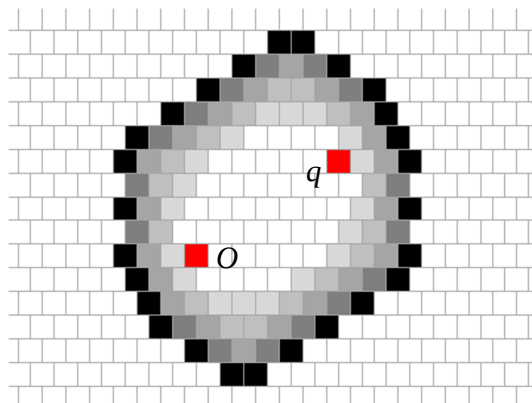
PÉLDA. Legyen $q = (15, 5)$, és $h = 4$. Ekkor $d = 15$ és az $E(0, q, 23)$ ellipszist az alábbi pontok alkotják:

1. $(-2, -2)$ és a $(-2, 2)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkhoz tartozó szakasz,
2. $(8, 12)$ és a $(12, 12)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkhoz tartozó szakasz,
3. $(-2, 2)$ és a $(8, 12)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkhoz tartozó szakasz,
4. $(-2, -2)$ és a $(3, -7)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkhoz tartozó szakasz,
5. $q - v$, minden eddigi felsorolt v pont esetén.

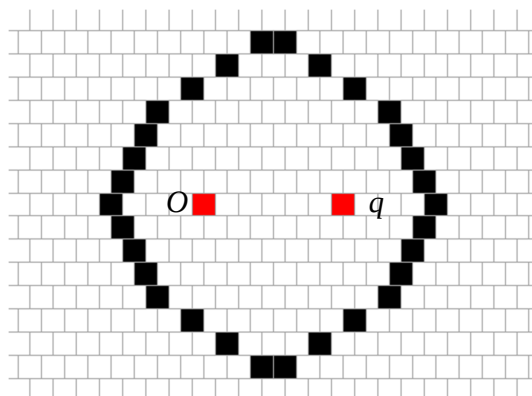


6. ábra: Az $E(0, q = (15, 5); 23)$ ellipszis pontjai a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon

6.3 A 6 szomszédos eset



7. ábra: Egymást követő ellipszisek a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon, melyeket a h növelésével kaptunk.

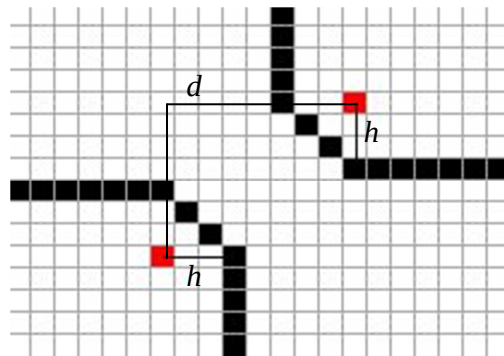


8. ábra: Egy speciális ellipszis pontjai a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon.

7. Hiperbola

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogyan is rajzolódik ki a hiperbola az adott rácson, különböző szomszédosságokat nézve. A hiperbola úgy definiálható, mint azon pontok halmaza, melyeknek két rögzített ponttól való távolságának különbsége állandó.

Nézzünk először meg egy általános rajzot, ami segít megérteni a későbbi jelöléseket.



1. ábra: A hiperbola paramétereinek szemléltetése

7.1 A 4 szomszédosságú esetek

DEFINÍCIÓ. Legyen p és q két különböző pont a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon, és legyen r egy természetes szám. A $H(p, q; r)$ *digitális hiperbola* pontjai azok a z pontok lesznek, melyekre teljesül az alábbi tulajdonság:

$$\{ z \mid |d(z, p) - d(z, q)| = r. \}$$

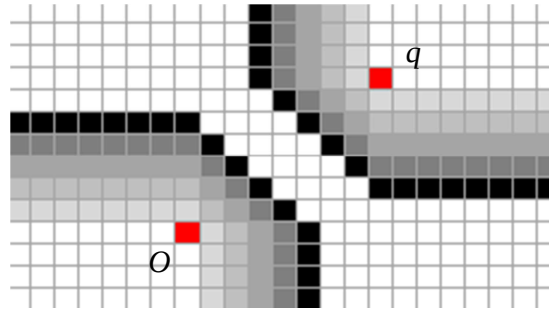
Jegyezzük itt meg, hogy ha $r > d = d(p, q; (\mathbb{Z}^2, 4))$, akkor a $H(p, q; r)$ az egy üres halmaz lesz. Itt is, akár csak az ellipszis eseténél, ha d páros, akkor r -nek is párosnak kell lennie, illetve ha d páratlan, akkor r -nek is annak kell lennie. Ezekből kiindulva elegendő olyan hiperbolákról beszélnünk, melyek alakjai a következők:

$$H(p, q; d - 2h)$$

Nézzük meg ezen hiperbolák pontjait, azzal a feltevással, hogy a második fókuszpont koordinátái pozitívak.

TÉTEL. Legyen $q \in (\mathbb{Z}^2, 4)$, $q_1, q_2 \geq 0$, $d = d(0, q)$ és legyen $h > d / 2$ egy pozitív egész szám. A $H(0, q; d - 2h)$ digitális hiperbola pontjai ekkor pontosan a következők lesznek (Nagy Benedek, Orosz Ágota, 2007i):

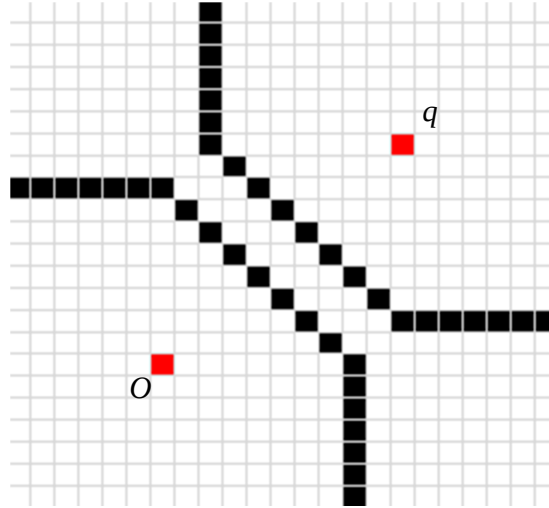
1. $(t, h - t)$, $\max\{0, h - q_2\} \leq t \leq \min\{q_1, h\}$,
2. ha $h > q_1$, akkor $(t, h - q_1)$, $t \geq q_1$,
 ha $h < q_1$, akkor (h, t) , $t \leq 0$,
 ha $h = q_1$, akkor (t_1, t_2) , $t_1 \geq q_1$, $t_2 \leq 0$,
3. ha $h > q_2$, akkor $(h - q_2, t)$, $t \geq q_2$,
 ha $h < q_2$, akkor (t, h) , $t \leq 0$,
 ha $h = q_2$, akkor (t_1, t_2) , $t_2 \geq q_2$, $t_1 \leq 0$,
4. $q - v$, minden eddig felsorolt v pont esetén.



2. ábra: Egymást követő hiperbolák a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon, melyeket a h növelésével kaptunk.

PÉLDA. Legyen $q = (10, 10)$ és $h = 8$. Ennél az esetnél $d = 20$ lesz. A $H(0, q = (10, 10); 4)$ hiperbolát az alábbi pontok alkotják:

1. $(0, 8)$ és a $(8, 0)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 8)$ szakasz,
2. $(8, 0)$, $(8, -1)$, $(8, -2)$, ... pontokból álló $(\mathbb{Z}^2, 4)$ félegyenes
3. $(0, 8)$, $(-1, 8)$, $(-2, 8)$, ... pontokból álló $(\mathbb{Z}^2, 4)$ félegyenes
4. $q - v$, minden eddigi v pont esetén, azaz
 $(10, 2)$ és a $(2, 10)$ pontokat összekötő $(\mathbb{Z}^2, 8)$ szakasz,
 $(2, 10)$, $(2, 11)$, $(2, 12)$, ... pontokból álló $(\mathbb{Z}^2, 4)$ félegyenes
 $(10, 2)$, $(11, 2)$, $(12, 2)$, ... pontokból álló $(\mathbb{Z}^2, 4)$ félegyenes

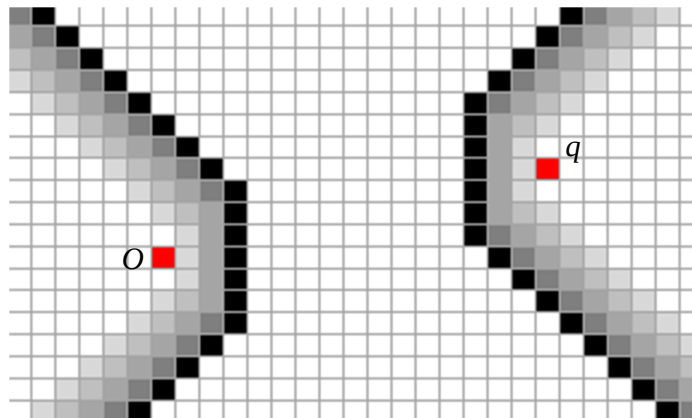


3. ábra: A $H(0, q = (10, 10), 4)$ hiperbola illusztrációja a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon.

7.2 A 8 szomszédságú eset

TÉTEL. Legyen $q \in (\mathbb{Z}^2, 8)$, $q_1, q_2 \geq 0$, $d = d(0, q)$ és legyen $0 < h < d$ egy természetes szám. A $H(0, q; d - h)$ digitális hiperbolát alkotó pontok a következők lesznek (Nagy Benedek, Orosz Ágota, 2007j):

1. $(h/2, t)$, $\max\{-h/2, q_2 - q_1 + h/2\} \leq t \leq h/2$,
2. $(h - t, t)$, $t \geq h/2$,
3. ha $h > q_1 - q_2$, akkor $(t, h + q_2 - q_1 - t)$, $h/2 \leq t$,
 ha $h < q_1 - q_2$, akkor $(t, t - h)$, $t \leq h/2$,
 ha $h = q_1 - q_2$, akkor (t_1, t_2) , $t_2 \geq -h/2$, $t_2 + h \leq t_1 \leq -t_2$,
4. $q - v$, minden eddig felsorolt v pont esetén.



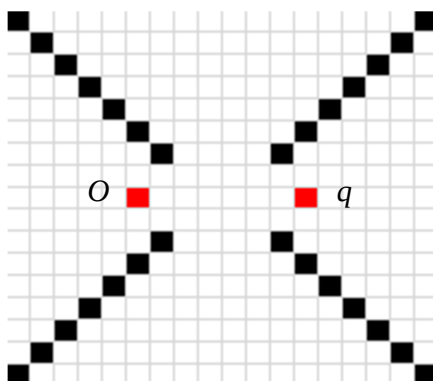
4. ábra: Egymást követő hiperbolák a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon, melyeket a h növelésével kaptunk.

Észrevehető, hogy a hiperbola általában egy-egy $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon ábrázolható szakaszból, és két-két $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon ábrázolható félegyenesből áll. Vannak azonban olyan esetek is, ahol az említett szakaszok hiányozhatnak.

PÉLDA. Legyen $q = (8, 0)$ és $h = 3$. Ebben az esetben $d = 8$ és a $H(0, q = (8, 0); 5)$ digitális hiperbola pontjai a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon a következő egész koordinátájú pontok lesznek:

1. $(1, 2), (0, 3), (-1, 4), \dots$ pontok által meghatározott $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon ábrázolható félegyenes
2. $(1, -2), (0, -3), (-1, -4), \dots$ pontok által meghatározott $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon ábrázolható félegyenes
3. $q - v$, minden eddig felsorolt v pont esetén, azaz
 $(6, 2), (7, 3), (8, 4), \dots$ pontok által meghatározott $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon ábrázolható félegyenes
 $(6, -2), (7, -3), (8, -4), \dots$ pontok által meghatározott $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon ábrázolható félegyenes

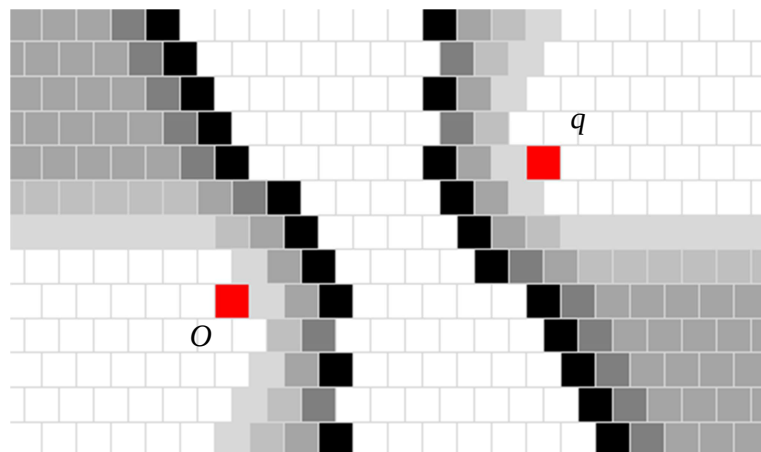
Ennél az esetnél észrevehető, hogy nincsenek benne a fent említett szakaszok.



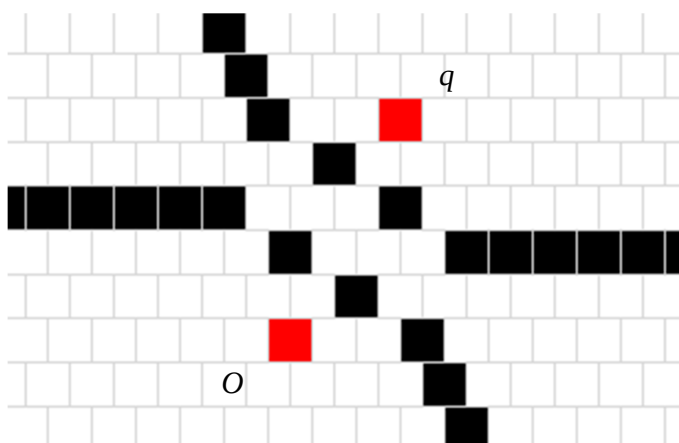
5. ábra: A $H(0, q = (8, 0); 5)$ digitális hiperbola ábrázolása a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.

7.3 A 6 szomszédsági eset

Nézzük meg ezen a speciális rácson, hogyan is néz ki a digitális hiperbola. Ezen a síkon minden pontnak 6 szomszédja van. A használt távolságdefiníció nem változott az előzőekhez képest.



6. ábra: Egymást követő hiperbolák a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon, melyeket a h növelésével kaptunk.



7. ábra: Egy digitális hiperbola ábrázolása a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon.

8. Parabola

A parabolát úgy lehet definiálni, mint azon pontok mértani helyei a síkban, melyek egyenlő távolságra vannak egy adott ponttól és egy ezen a ponton át nem haladó adott egyenestől.

Nézzük meg most a parabola ábrázolásait a vizsgált síkokban.

8.1 A 4 szomszédságú eset

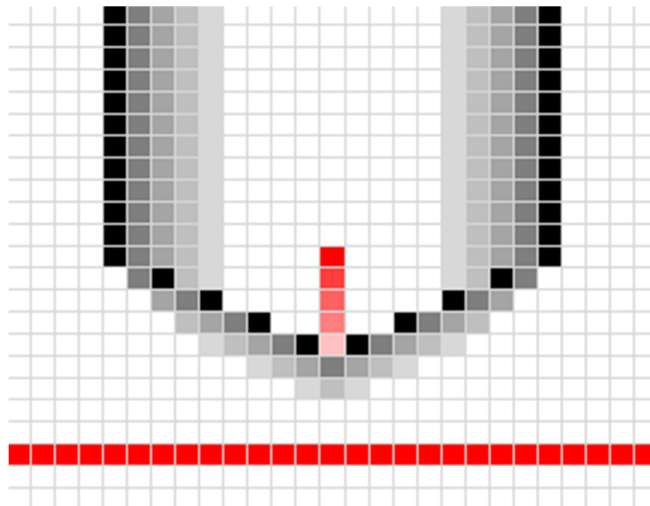
DEFINÍCIÓ. Legyen L egy egyenes és legyen p egy pont a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon. A $P(L, p)$ digitális parabola azon z pontok halmaza lesz, melyek rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

$$\{ z \mid d(z, P) = d(z, L) \}.$$

Ahogy azt már korábban láttuk, a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon különböző egyeneseket is lehet definiálni, ebből következik, hogy több különböző típusú parabola is létezik. Az egyszerűség kedvéért a következőkben csak azokat a parabolákat fogjuk megnézni ahol az egyenesek a koordináta tengelyekhez hasonló egyenesek lesznek.

TÉTEL. Legyen $p = (0, p_2) \in (\mathbb{Z}^2, 4)$, $p_2 > 0$, és legyen L az origóra illeszkedő vízszintes egyenes. A $P(p, L)$ parabola egész koordinátájú pontjai a következők lesznek:

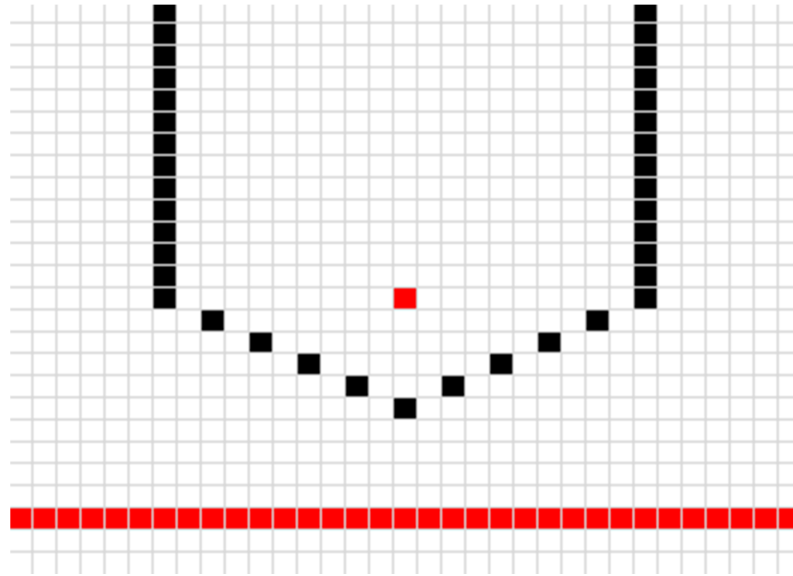
1. $(\pm p_2, t)$, ahol $t \geq p_2$,
2. $(\pm (p_2 - 2t), p_2 - t)$, ahol $t = 0, \dots, \left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor$.



1. ábra. Egymást követő parabolák a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon, melyek a $d(p, L)$ csökkenésével változnak.

PÉLDA. Legyen $p = (0, 10)$ és legyen L az origón áthaladó vízszintes egyenes. Ekkor a $P(p, L)$ digitális parabola pontjai a következők lesznek:

1. $(10, 10), (10, 11), (10, 12), \dots$ pontok által meghatározott $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon ábrázolható egyenes
2. $(10, 10), (8, 9), (6, 8), (4, 7), (2, 6)$ és $(0, 5)$ pontok
3. $(-10, 10), (-10, 11), (-10, 12), \dots$ pontok által meghatározott $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon ábrázolható egyenes
4. $(-10, 10), (-8, 9), (-6, 8), (-4, 7), (-2, 6)$ és $(0, 5)$ pontok



2. ábra: Egyszerű eset a $P((0, 10), L)$ digitális parabola pontjai a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ síkon.

8.2 A 8 szomszédságú eset

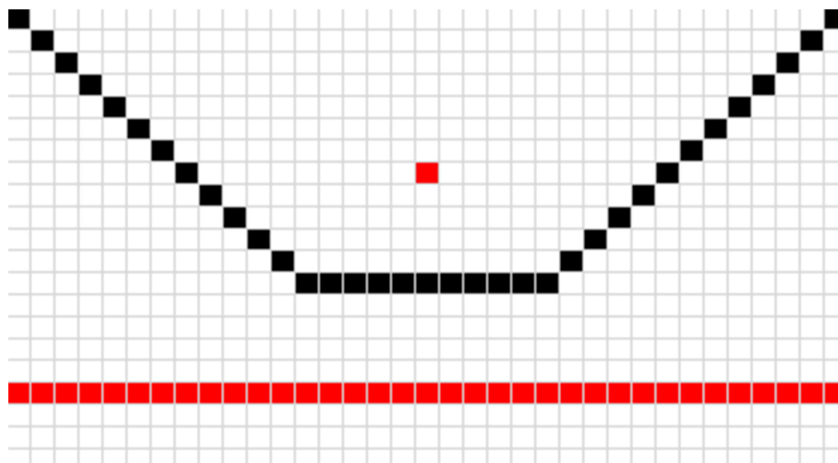
TÉTEL. Legyen $p = (0, p_2) \in (\mathbb{Z}^2, 8)$ és $p_2 > 0$. Legyen L az origóra illeszkedő vízszintes egyenes. A $P(p, L)$ parabola egész koordinátájú pontjai a következők lesznek:

1. $(\pm t, t)$, ahol $\frac{p_2}{2} \leq t$,
2. $(\pm t, \frac{p_2}{2})$, ahol $0 \leq t \leq \frac{p_2}{2}$.

Nézzük meg az előző példában vizsgált parabolát a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.

PÉLDA. Legyen $p = (0, 10)$ és legyen L az origón áthaladó vízszintes egyenes. Ekkor a $P(p, L)$ digitális parabola pontjai a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon a következők lesznek:

1. $(5, 5), (6, 6), (7, 7), \dots$ pontok által meghatározott $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon ábrázolható egyenes
2. $(0, 5), (\pm 1, 5), (\pm 2, 5), (\pm 3, 5), (\pm 4, 5), (\pm 5, 5)$ pontok,
3. $(-5, 5), (-6, 6), (-7, 7), \dots$ pontok által meghatározott $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon ábrázolható egyenes

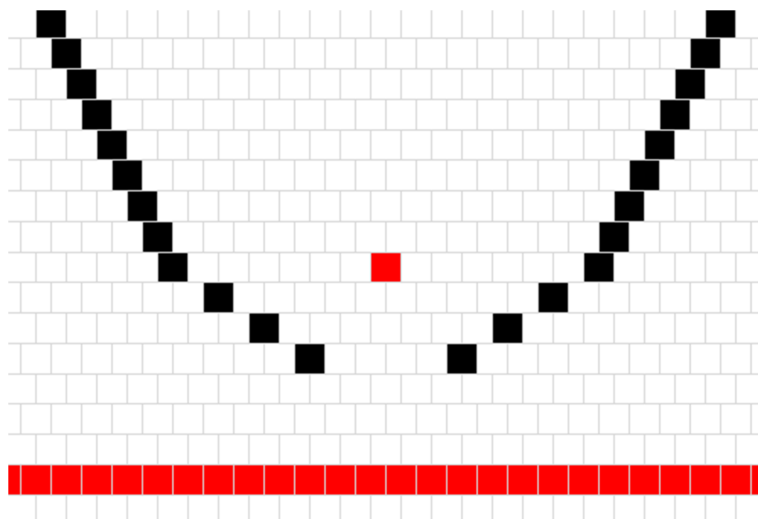


3. ábra: Egyszerű eset a $P((0, 10), L)$ digitális parabola pontjai a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ síkon.

8.3 A 6 szomszédságú eset

Nézzük meg ennél a résznél, hogyan is rajzolódnak ki a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon a digitális parabola pontjai.

TÉTEL. Legyen $p = (0, p_2) \in (\mathbb{Z}^2, 6)$, $p_2 > 0$, és legyen L az origóra illeszkedő vízszintes egyenes. A $P(p, L)$ parabola egész koordinátájú pontjai a következőképpen néznek ki:



4. ábra: Egyszerű eset a $P((0, 7), L)$ digitális parabola pontjai a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon.

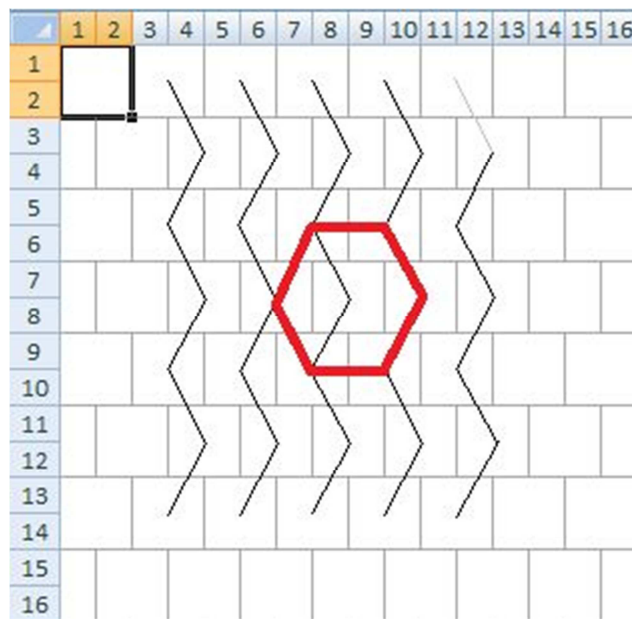
9. Implementáció

A dolgozat elkészítésénél rendkívül fontos szerepet játszik az illusztráció. Ahhoz, hogy a különböző digitális síkokon jól ábrázolhatóak legyenek a kúpszeletek, készítettem egy alkalmazást, amely segít azok megjelenítésében. A program elkészítéséhez a Microsoft Office Excel 2007 beépített VBA programozási nyelvét használtam.

A 4 és a 8 szomszédos eseteknél minden cella egy pontot jelöl. A 6 szomszédos esetben azonban egy pont 4 cella egyesítéséből jött létre. Ezt később látni fogjuk, hogy miért.

A könnyű átláthatóság miatt minden egyes kúpszeletet – és azokat is külön nézve a három síkon – külön lapfültre került.

A 6 szomszédos eseteknél egy speciális rácsot használtam, amit úgy készítettem el, hogy – már az egyesített cellákat tekintve – minden második sor egy fél egységgel el van tolva az eredetihez képest. Célom ezzel az volt, hogy egy hatszöghöz hasonló rácsozatot hozzak létre a $\mathbb{Z}^2$ térben.



1. ábra: A $(\mathbb{Z}^2, 6)$ digitális sík megvalósításának bemutatása



Nézzük meg, hogyan is néznek ki a szomszédos pontok mindhárom vizsgált sík esetében.

Limp Bizkit - Rollin.mp3

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3				1			
4			1		1		
5				1			
6							
7							

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3			1	1	1		
4			1		1		
5			1	1	1		
6							
7							

2-3. ábra: Szomszédos pontok a $(\mathbb{Z}^2, 4)$ és a $(\mathbb{Z}^2, 8)$ digitális síkon.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3					1		1					
4												
5				1			1					
6												
7					1		1					
8												
9												
10												

4. ábra: Szomszédos pontok a $(\mathbb{Z}^2, 6)$ digitális síkon.

A kúpszeletek kirajzolása a dolgozatban tárgyalt távolságdefiníciók alapján történik. Minden esetben a felhasználó által megadott paraméterek alapján történik a kúpszelet ábrázolása. A program futása során a paraméterként megadott pontok, és azok a cellák, melyekre igaz az adott kúpszelet definíciója, egy szám értéket kaptak. A paraméterként megadott pontokhoz egy 2-es értéket, az adott feltételeket teljesítő cellákhoz pedig egy 1-es értéket rendeltem. A cellák színezése pedig a *Feltételes Formázás* menüpont segítségével és ott az általam megadott szabályokkal automatikusan történik.

10. Összefoglalás

A dolgozat során megismerkedhettünk a digitális kúpszeletekkel a $(\mathbb{Z}^2, 4)$, $(\mathbb{Z}^2, 8)$ és $(\mathbb{Z}^2, 6)$ síkon. Ezek tárgyalása során sor került a használt módszerek elméleti és matematikai hátterének ismertetésére, működésük vizsgálatára. Megértésüket sokban elősegítették az ábrák és a példafeladatok.

Célkitűzésem azonban mégsem teljes. Mint már korábban beláttuk, a két ponton átmenő digitális egyenes esete nem egyértelmű, ugyanis ezen definíció szerint az egyenes nem határozható meg pontosan egyik vizsgált síkon sem. Továbbá, az így definiált egyenesek kiterjesztése egyre nagyobb területet fed le a digitális síkon, ami viszont így teljes egészében lefedi a digitális síkot. Az általános eset tehát az lenne, ha a parabola definíciójában az egyenest úgy határoznánk meg, mint azon pontok halmaza, melyek két adott ponttól egyenlő távolságra vannak. Láthattuk azonban, hogy e definíció szerint mindhárom síkon az egyenes szokatlan képet ad. Mivel így a digitális parabola általános esete további kutatást igényel, ezért azt az egyszerű esetet használtam, amikor az egyenes a különböző síkokon egy vízszintes egyenes képét adta. Ezzel a választásommal viszont magának a digitális parabolának a képe szemléletesebb lett.

Az általam írt alkalmazás azonban szinte bármely kúpszelet általános esetének a kirajzolásánál megfelelően működik mindhárom vizsgált digitális síkon, és ez nagyban elősegítette a szakdolgozatom elkészítését.

Irodalomjegyzék

- [1] NAGY BENEDEK, *Neighbourhood sequences in different grids, PhD dissertation*, University of Debrecen, 2003
- [2] KLETTE, R., ROSENFELD, A., *Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Picture Analysis*, San Francisco, 2004.
- [3] OROSZ ÁGOTA, *Digitális geometria, digitális alakzatok (szakdolgozat)*, Debreceni Egyetem, 2005
- [4] NAGY BENEDEK, OROSZ ÁGOTA, Simple digital objects on Z^2 , ICAI 2007, 7th International Conference on Applied Informatics, Eger, Hungary, volume I. 139-146., 2007
- [5] WIKIPEDIA, *Kúpszelet*, [hu.wikipedia.org](http://hu.wikipedia.org/wiki/K%C3%BAszelet)
<http://hu.wikipedia.org/wiki/K%C3%BAszelet>
Letöltve: 2010. szeptember 20.
- [6] KÓS RITA, *Kúpszelet-történelem*, www.komal.hu
<http://www.komal.hu/cikkek/dandelin/tortenelem.h.shtml>
Letöltve: 2010. október 4.

Ezúton szeretném megragadni az alkalmat arra, hogy köszönetemet és tiszteletemet fejezzem ki Dr. Aszalós László témavezetőnek, aki a szakdolgozatom elkészítéséhez nagyban hozzájárult.

Valamint szeretném kifejezni köszönetemet családtagjaimnak, akik segítségükkel mindvégig támaszt nyújtottak egyetemi tanulmányaim során.