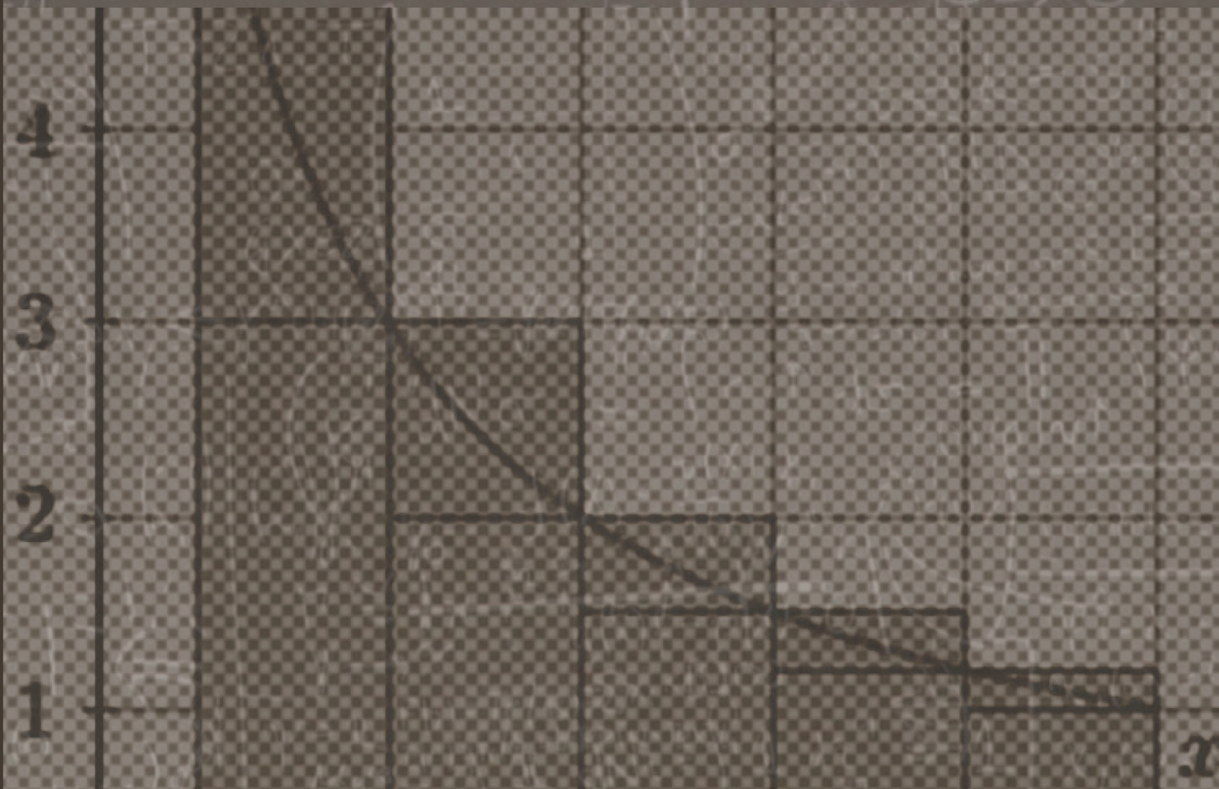


Dr. Kézi Csaba Gábor  
Oktatási segédanyag  
a matematika  
szigorlathoz



Debreceni Egyetem Műszaki Kar  
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM  
MŰSZAKI KAR  
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

Dr. Kézi Csaba Gábor

OKTATÁSI SEGÉDANYAG  
A MATEMATIKA SZIGORLATHOZ



Debreceni Egyetemi Kiadó  
Debrecen University Press

2025

Lektor:  
Dr. Nagy Gergő  
egyetemi docens  
Debreceni Egyetem TTK  
Analízis Tanszék

© Debreceni Egyetemi Kiadó • Debrecen University Press,  
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978-963-615-241-3

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó • Debrecen University Press  
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi  
Nyomdai előkészítés: M. Szabó Monika  
dupress.unideb.hu  
Készült a Debreceni Egyetemi Kiadó nyomdájában, 2025-ben

## Tartalomjegyzék

1. Tétel: Függvénytani fogalmak	5
2. Tétel: Nevezetes függvények	16
3. Tétel: Sorozatok	24
4. Tétel: Differenciálszámítás I.	28
5. Tétel: Differenciálszámítás II.	40
6. Tétel: Differenciálszámítás III.	58
7. Tétel: Differenciálszámítás IV.	62
8. Tétel: Primitív függvény keresési módszerek	66
9. Tétel: Riemann integrál és alkalmazása	86
10. Tétel: Halmazok, valós számok	94
11. Tétel: Komplex számok	98
12. Tétel: Mátrixok	104
13. Tétel: Lineáris egyenletrendszerek	112
14. Tétel: Vektoralgebra	122
15. Tétel: Lineáris leképezések	132
16. Tétel: Többváltozós függvények differenciálszámítása	138
17. Tétel: Kétfváltozós függvények szélsőértékszámítása	144
18. Tétel: Kétfváltozós függvények integrálszámítása	154
19. Tétel: Vektorértékű függvények	158
20. Tétel: Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek	174
21. Tétel: Közönséges másodrendű differenciálegyenletek	186
Irodalomjegyzék	205

## **Előszó**

Ez a tananyag a Debreceni Egyetem Műszaki Karán tanuló azon hallgatók számára készült, akiknek matematika tantárgyból szigorlatozniuk kell.

A segédanyag felépítésében illeszkedik a matematika szigorlatnak megfelelő követelményekhez. Az egyes fejezetek a különböző tételek kidolgozásait tartalmazzák. A tétel címe alatt az adott tételhez tartozó fontosabb elméleti kérdések szerepelnek, majd ezután azok részletes kidolgozása következik. Ezt követően az adott témakörhöz tartozó feladatok szerepelnek, amelynek megoldásait is megtalálja az olvasó.

Hálás vagyok a jegyzet lektorának, Dr. Nagy Gergőnek, a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének egyetemi docensének, valamint Dr. Sipos Dórának, akik megjegyzéseikkel nagyban hozzájárultak jelen oktatási segédanyag elkészüléséhez.

Dr. Kézi Csaba Gábor  
egyetemi docens

## 1. Tétel: Függvénytani fogalmak

1. Mit nevezünk valós változós valós értékű függvénynek?
2. Rajzoljon le egy olyan hozzárendelést, amely valós-valós függvény, és egy olyat, amelyik nem az!
3. Függvény grafikonjának definíciója.
4. Zérushely definíciója.
5. Korlátosság fogalma.
6. Monotonitás fogalma.
7. Globális maximum és minimum definíciója.
8. Nyílt környezet fogalma.
9. Lokális maximum definíciója.
10. Lokális minimum definíciója.
11. Lokális szélsőérték definíciója.
12. Konvex függvény definíciója.
13. Konkáv függvény definíciója.
14. Inflexiós hely és inflexiós pont definíciója.
15. Páros és páratlan függvény definíciója.
16. Páros és páratlan függvények geometriai tulajdonsága.
17. Periodikus függvény definíciója.
18. Műveletek függvényekkel (összeadás, kivonás, szorzás, osztás).
19. Kölcsonösen egyértelmű függvény fogalma.
20. Összetett függvény definíciója.
21. Függvény inverzének fogalma.
22. Függvény inverzének geometriai jelentése.
23. Adjunk meg egy invertálható függvényt és az inverzét!
24. Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy egy függvény invertálható!
25. Mit értünk egy függvény leszűkítésén?
26. Mit értünk egy függvény kiterjesztésén?

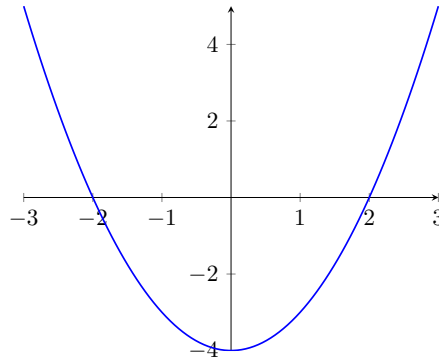
**1.1. Definíció.** Legyenek  $A$  és  $B$  nem üres halmazok! Ha az  $A$  halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzárendeljük a  $B$  halmaz elemeit, akkor ezt a hozzárendelést *valós-valós függvénynek*, más szóval *valós változós valós értékű függvénynek*, röviden *függvénynek* nevezzük. Jele:  $f: A \rightarrow B$ .

Az  $A$  halmazt *alaphalmaznak*, a  $B$  halmazt *képhalmaznak* mondjuk.

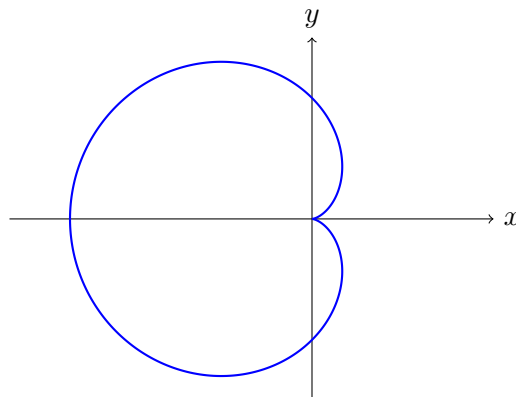
Az  $A$  alaphalmaznak azt a részhalmazát, amelyhez a képhalmaznak valamely eleme hozzá lett rendelve, a függvény *értelmezési tartományának* mondjuk. Az  $f$  függvény értelmezési tartományát úgy jelöljük, hogy  $D_f$ .

A képhalmaznak azon részhalmazát, amely a függvény helyettesítési értékeit tartalmazza, a függvény *értékkészletének* mondjuk. Az  $f$  függvény értékkészletét  $R_f$ -fel jelöljük.

**1.2. Példa.** Az alábbi hozzárendelés valós-valós függvény:



Az alábbi hozzárendelés nem valós-valós függvény:



1.3. **Definíció.** Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *grafikonjának* nevezzük az

$$\text{graf}(f) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$$

halmazt.

1.4. **Definíció.** Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $x_0 \in D_f$  helyen *zérushelye* van, ha  $f(x_0) = 0$ .

1.5. **Definíció.** Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvény

- *alulról korlátos*, ha az értékkészlete alulról korlátos;
- *felülről korlátos*, ha az értékkészlete felülről korlátos;
- *korlátos*, ha az értékkészlete korlátos.

Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *infimuma*, illetve *szuprémuma* az értékkészletének infimuma, illetve szuprémuma.

1.6. **Definíció.** Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvény

- *monoton növekvő*, ha minden  $x_1, x_2 \in A$  esetén, melyre  $x_1 < x_2$ , teljesül, hogy  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ;
- *monoton csökkenő*, ha minden  $x_1, x_2 \in A$  esetén, melyre  $x_1 < x_2$ , teljesül, hogy  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ;
- *szigorúan monoton növekvő*, ha minden  $x_1, x_2 \in A$ ,  $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) < f(x_2)$ ;
- *szigorúan monoton csökkenő*, ha minden  $x_1, x_2 \in A$ ,  $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) > f(x_2)$ .

1.7. **Definíció.** Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $x_0$  helyen

- *maximuma* van, ha  $f(x) \leq f(x_0)$  minden  $x \in A$  esetén, azaz ha  $f(x_0)$  az  $f$  értékkészletének legnagyobb eleme;
- *minimuma* van, ha  $f(x) \geq f(x_0)$  minden  $x \in A$  esetén, azaz ha  $f(x_0)$  az  $f$  értékkészletének legkisebb eleme;
- *szélsőértéke* van, ha minimuma vagy maximuma van az  $x_0$  helyen.

1.8. **Definíció.** Az  $x_0$  valós szám  $r > 0$  sugarú *nyílt környezetén* az

$$]x_0 - r; x_0 + r[$$

nyílt intervallumot értjük.

1.9. **Definíció.** Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $x_0$  helyen *lokális (helyi) maximuma* van, ha létezik olyan  $r > 0$  valós szám, amelyre  $f(x) \leq f(x_0)$  teljesül minden  $x \in ]x_0 - r; x_0 + r[$  esetén, azaz ha  $f$ -nek van olyan környezete, amelyben  $f(x_0)$  a legnagyobb függvényérték.

**1.10. Definíció.** Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $x_0$  helyen *lokális (helyi) minimuma* van, ha létezik  $r > 0$  valós szám úgy, hogy  $f(x) \geq f(x_0)$  minden  $x \in ]x_0 - r; x_0 + r[$  esetén, azaz ha  $f$ -nek van olyan környezete, amelyben  $f(x_0)$  a legkisebb függvényérték.

**1.11. Definíció.** Egy függvénynek az értelmezési tartományának  $x_0$  helyén *lokális szélsőértéke* van, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az  $x_0$  helyen.

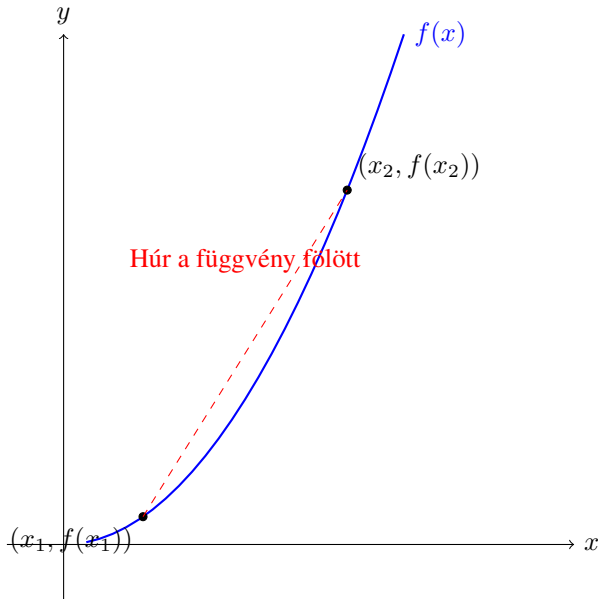
**1.12. Definíció.** Legyen  $I$  egy nyílt intervallum. Az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *konvex*, ha minden  $u, v \in I$ ,  $u < v$  esetén az  $(u; f(u))$  és  $(v; f(v))$  pontokat összekötő szakasz az  $f$  függvény felett halad, azaz ha minden  $u, v \in I$  és minden  $t \in [0; 1]$  esetén

$$f(t \cdot u + (1 - t) \cdot v) \leq t \cdot f(u) + (1 - t) \cdot f(v).$$

A  $t \cdot u + (1 - t) \cdot v$ , ahol  $t \in [0; 1]$ , a számegyenesen az  $u$  és  $v$  pontokat összekötő szakaszt jelenti.

Az  $f(t \cdot u + (1 - t) \cdot v)$  az előbbi szakaszon felvett függvényértékek halmaza.

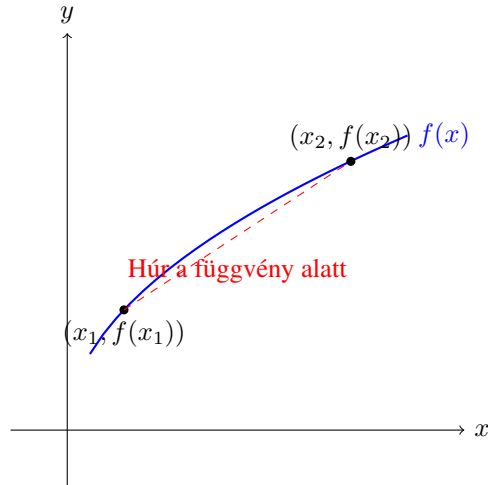
A  $t \cdot f(u) + (1 - t) \cdot f(v)$  az  $(u; f(u))$  és  $(v; f(v))$  pontokat összekötő szakasz.



**1.13. Definíció.** Legyen  $I$  egy nyílt intervallum. Az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény

*konkáv*, ha minden  $u, v \in I$ ,  $u < v$  esetén az  $(u; f(u))$  és  $(v; f(v))$  pontokat összekötő szakasz az  $f$  függvény alatt halad, azaz ha minden  $u, v \in I$  és minden  $t \in [0; 1]$  esetén

$$f(t \cdot u + (1 - t) \cdot v) \geq t \cdot f(u) + (1 - t) \cdot f(v).$$



**1.14. Definíció.** Legyen  $I$  egy nyílt intervallum. Az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $x_0 \in I$  helyen *inflexiós helye* van, ha  $x_0$ -ban megváltozik a konvexitása, azaz létezik  $r > 0$  úgy, hogy az  $[x_0 - r; x_0]$  intervallumon  $f$  konkáv és az  $[x_0; x_0 + r]$  intervallumon konvex, vagy az  $[x_0 - r; x_0]$  intervallumon  $f$  konvex és az  $[x_0; x_0 + r]$  intervallumon konkáv. Ilyenkor az  $(x_0; f(x_0))$  pontot *inflexiós pontnak* hívjuk.

**1.15. Definíció.** Legyen az  $A$  halmaz szimmetrikus az origóra, ami azt jelenti, hogy ha  $x \in A$ , akkor  $-x \in A$ .

Azt mondjuk, hogy az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvény

- *páros*, ha  $f(-x) = f(x)$  minden  $x \in A$  esetén;
- *páratlan*, ha  $f(-x) = -f(x)$  minden  $x \in A$  esetén.

**1.16. Megjegyzés.** Egy függvény

- pontosan akkor páros, ha a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az  $y$  tengelyre;
- pontosan akkor páratlan, ha a grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

**1.17. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *periodikus*, ha van olyan  $p \in \mathbb{R}$  pozitív valós szám, hogy minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén

$$f(x + p) = f(x).$$

Ha az  $f$  függvény periodikus, akkor végtelen sok megfelelő  $p$  érték van. Ha a definícióban meghatározott tulajdonságú  $p$  értékek halmazának van legkisebb eleme, akkor ezt a számot az  $f$  függvény *periódusának* nevezzük.

**1.18. Definíció.** Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  és a  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvények

- *összege*  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $x \in A$ ;
- *különbsége*  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ ,  $x \in A$ ;
- *szorzata*  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ,  $x \in A$ ;
- *hányadosa*  $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , ha  $g(x) \neq 0$ ,  $x \in A$  esetén.

**1.19. Definíció.** Az  $f: A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$  függvény *kölcsönösen egyértelmű*, ha különböző elemekhez különböző elemeket rendel.

**1.20. Definíció.** Legyenek  $A$  és  $B$  a valós számok halmazának tetszőleges részhalmazai, továbbá  $f$ , illetve  $g$  az  $A$ , illetve  $B$  halmazon értelmezett valós értékű függvények. Tegyük fel, hogy a  $g$  függvény értékkészlete részhalmaza az  $f$  függvény értelmezési tartományának. Az  $f$  és  $g$  függvények *kompozícióján* vagy *összetett függvényén* az  $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \circ g(x) = f(g(x))$  függvényt értjük.

**1.21. Definíció.** Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *inverzén* azt az  $f^{-1}$  módon jelölt függvényt értjük, melyre

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$$

teljesül.

**1.22. Megjegyzés.** Ha az  $f$  függvény grafikonját tükrözzük az  $y = x$  egyenletű egyenesre, akkor az inverzfüggvény grafikonját kapjuk meg.

**1.23. Példa.** Az  $f(x) = x^3$  függvény inverze  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ , mert

$$f \circ f^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

és

$$f^{-1} \circ f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

**1.24. Tétel.** Egy függvénynek pontosan akkor létezik inverze (azaz pontosan akkor invertálható), ha kölcsönösen egyértelmű.

**1.25. Definíció.** Legyen  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvény és  $B \subset A$ ! Azt mondjuk, hogy  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f$  függvény  $B$  halmazra való *leszűkítése*, ha  $g(x) = f(x)$  minden  $x \in B$  esetén. Jele:  $f|_B$ .

**1.26. Definíció.** Legyen  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  függvény és  $A \subset C$ ! Azt mondjuk, hogy  $g: C \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f$  függvény  $C$  halmazra való *kiterjesztése*, ha  $g(x) = f(x)$  minden  $x \in A$  esetén.

**Kidolgozott feladatok**

1. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = x^2$  függvényt! Adjuk meg az

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

kifejezés tovább nem egyszerűsíthető alakját!

**Megoldás:**

Mivel

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2,$$

ezért

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \\ &= \frac{h \cdot (2x + h)}{h} = 2x + h. \end{aligned}$$

2. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = \cos x$  és a  $g(x) = x^5 + 2x^2 - 3$  függvényeket!

a) Határozzuk meg az  $f \circ g$  összetett függvényt!

b) Határozzuk meg a  $g \circ f$  összetett függvényt!

**Megoldás:**

a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^5 + 2x^2 - 3) = \cos(x^5 + 2x^2 - 3).$$

b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(\cos x) = (\cos x)^5 + 2 \cdot (\cos x)^2 - 3 \\ &= \cos^5 x + 2 \cdot \cos^2 x - 3. \end{aligned}$$

3. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = \sqrt{x}$  és a  $g(x) = x + 1$  függvényeket!

a) Határozzuk meg az  $f \circ g$  összetett függvényt!

b) Határozzuk meg a  $g \circ f$  összetett függvényt!

c) Adjuk meg az  $f \circ g(x) = g \circ f(x)$  egyenlet megoldását!

**Megoldás:**

a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x+1}.$$

b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x} + 1.$$

c) A megoldandó egyenlet:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + 1.$$

Mivel  $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + 1$ , ezért az egyenlet négyzetre emelés után

$$x + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$$

alakú lesz. A nevezetes azonosság elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$x + 1 = x + 2 \cdot \sqrt{x} + 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \sqrt{x} = 0.$$

Tehát az egyenlet megoldása  $x = 0$ .

4. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

függvényt! Adjuk meg a  $k$  és  $b$  függvényeket úgy, hogy  $f(x) = k \circ b(x)$  teljesüljön!

**Megoldás:**

Ha az  $f$  függvényt  $f(x) = k \circ b(x)$  alakban írjuk fel, akkor  $k$  a külső függvény és  $b$  a belső függvény, ahol  $k(x) = \frac{1}{x}$ , és  $b(x) = x^2 + 4$ .

5. **Feladat.** Tekintsük az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 6$  függvényt!

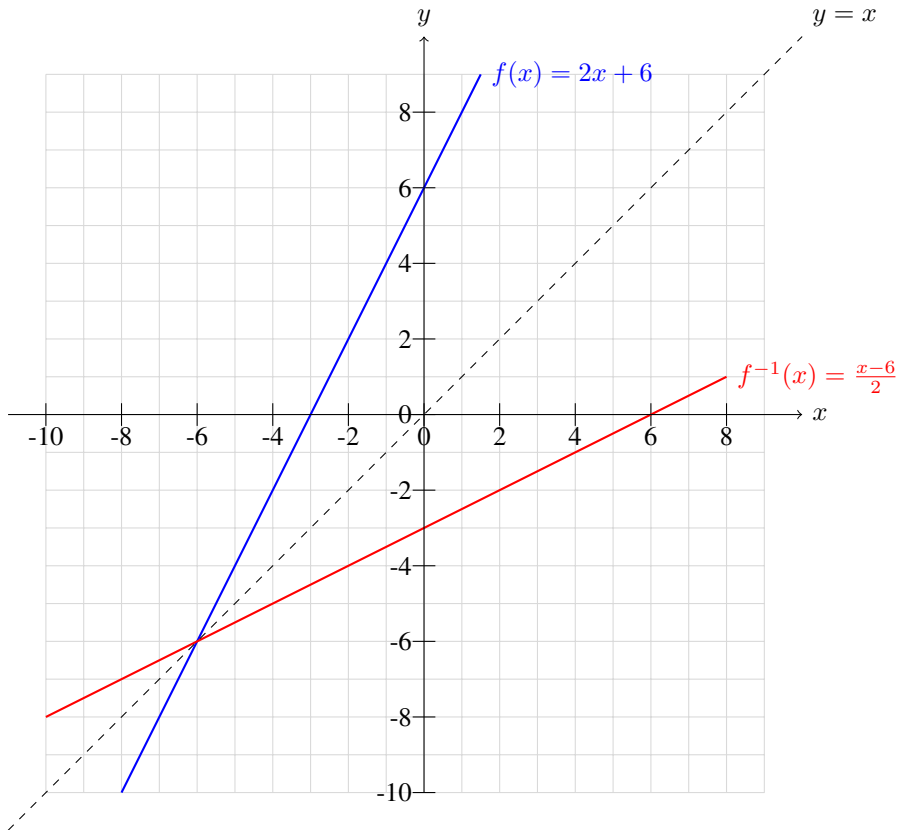
- Invertálható-e a függvény?
- Ha igen, határozzuk meg az inverzét!
- Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az  $f$  függvényt és az inverzét!

**Megoldás:**

- Az  $f$  függvény grafikonja egy egyenes, így kölcsönösen egyértelmű, azaz különböző elemekhez különböző elemeket rendel, tehát invertálható.
- Az inverzfüggvény meghatározásához először az  $y = 2x + 6$  egyenletet kell tekintenünk, amiben megcserélve az  $x$  és  $y$  szerepét azt kapjuk, hogy  $x = 2y + 6$ . Ebből kifejezve az  $y$ -t, megkapjuk az inverzfüggvényt, azaz

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 6}{2} = \frac{1}{2}x - 3.$$

- A függvény és az inverzfüggvény grafikonja:



**6. Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = \log_2(x - 5) + 1$  függvényt!

- Adjuk meg az  $f$  függvény értelmezési tartományát!
- Számoljuk ki az  $f$  függvény inverzét!

**Megoldás:**

- Az  $f$  függvény értelmezési tartománya:

$$x - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 5.$$

- Legyen  $y = \log_2(x - 5) + 1$ ! Az  $x$  és  $y$  szerepét megcserélve azt kapjuk, hogy

$$x = \log_2(y - 5) + 1.$$

Ebből az  $y$ -t kifejezve

$$x - 1 = \log_2(y - 5) \Rightarrow 2^{x-1} = y - 5 \Rightarrow y = 2^{x-1} + 5$$

adódik, így az  $f$  inverze:

$$f^{-1}(x) = 2^{x-1} + 5.$$

## 2. Tétel: Nevezetes függvények

1. Mit nevezünk polinomfüggvénynek?
2. Adja meg az elsőfokú polinomfüggvény általános alakját!
3. Mi az elsőfokú polinomfüggvény képe?
4. Mit nevezünk racionális törtfüggvénynek?
5. Mit nevezünk exponenciális függvénynek?
6. Definiálja a szinusz hiperbolikus függvényt!
7. Vázolja fel a szinusz hiperbolikus függvény grafikonját!
8. Definiálja a koszinusz hiperbolikus függvényt!
9. Vázolja fel a koszinusz hiperbolikus függvény grafikonját!
10. Mit nevezünk koszinusznak? Mit nevezünk szinusznak?
11. Ábrázolja a szinuszfüggvényt!
12. Ábrázolja a koszinuszfüggvényt!
13. Mit értünk elemi függvényen?
14. Definiálja a szignumfüggvényt!

2.1. **Definíció.** Legyen  $n$  egy természetes szám és legyenek  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tetszőleges valós számok és  $a_n \neq 0$ . Ekkor a

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

függvényt  $n$ -edfokú polinomfüggvénynek nevezzük.

2.2. **Definíció.** Az  $f(x) = m \cdot x + b$  függvény elsőfokú polinomfüggvény, ahol  $m$ -et a függvény *meredekségének* mondjuk.

2.3. **Megjegyzés.** Az elsőfokú polinomfüggvények grafikonja egyenes.

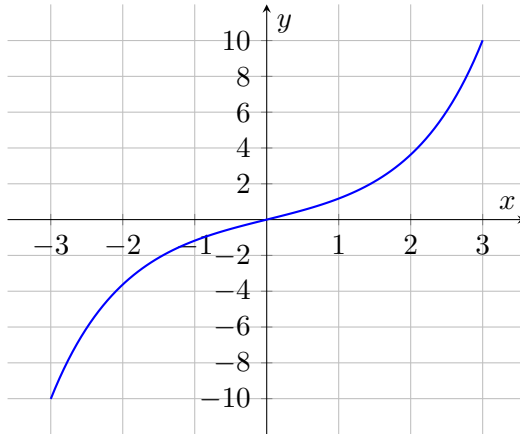
2.4. **Definíció.** Az  $f$  függvényt *racionális törtfüggvénynek* nevezzük, ha léteznek olyan  $p$  és nem azonosan zérus  $q$  polinomok, hogy

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

2.5. **Definíció.** Legyen  $0 < a \neq 1$  valós szám. Az  $f(x) = a^x$  függvényt *exponenciális függvénynek* nevezzük. Speciálisan az  $f(x) = e^x$  függvény is exponenciális függvény, ahol  $e$  az úgynevezett Euler-féle szám, közelítő értéke  $e \approx 2,718$ .

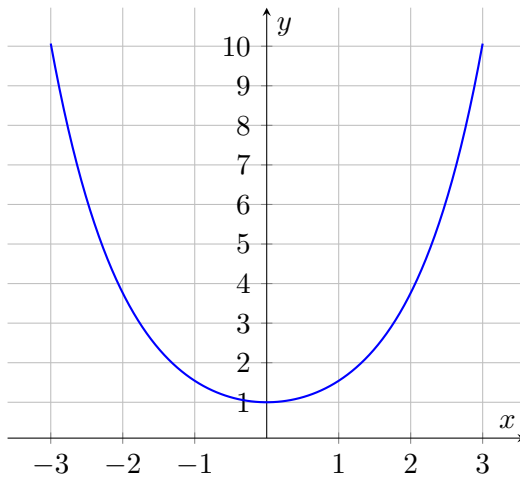
2.6. **Definíció.** Szinusz hiperbolikus függvénynek mondjuk az  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  függvényt.

2.7. **Megjegyzés.** Az  $\operatorname{sh} x$  függvény grafikonja:

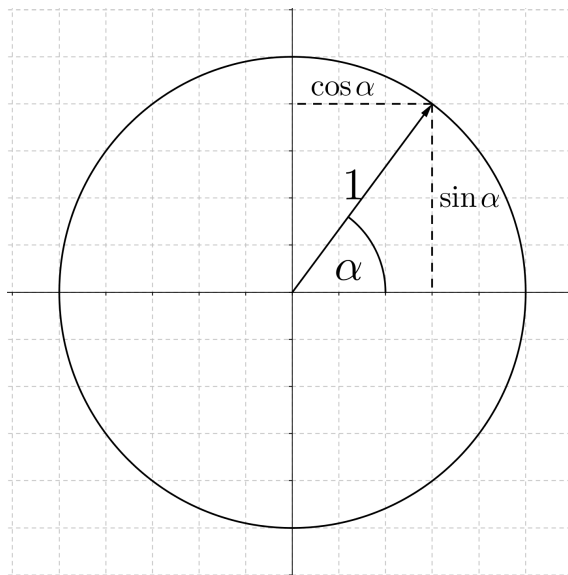


2.8. **Definíció.** Koszinusz hiperbolikus függvénynek hívjuk a  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  függvényt.

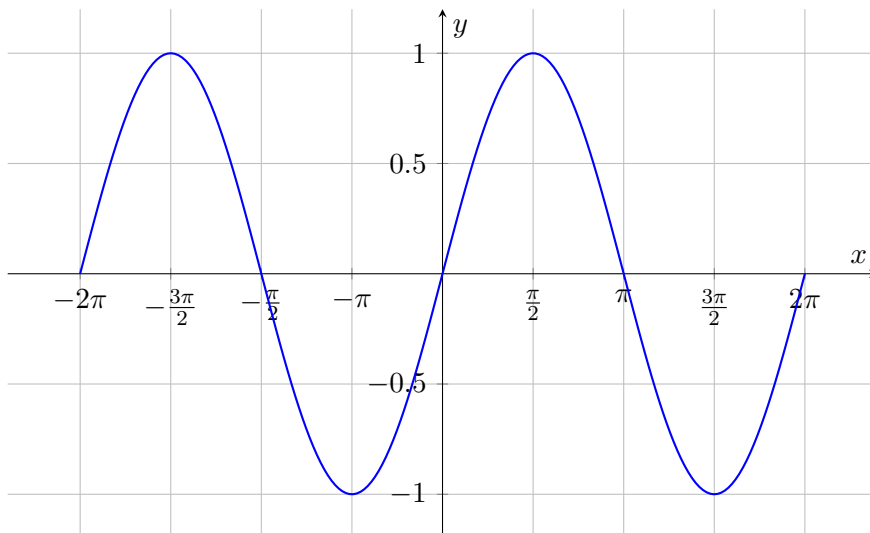
2.9. **Megjegyzés.** A  $\operatorname{ch} x$  függvény grafikonja, az úgynevezett láncgörbe:



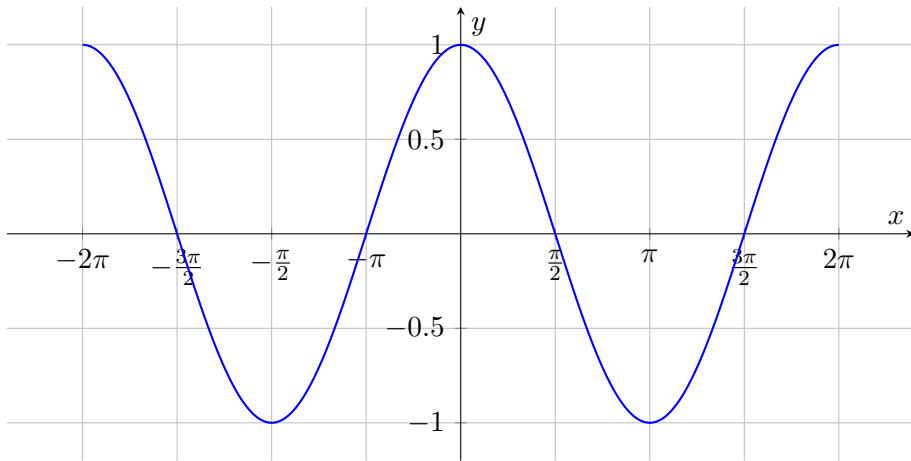
**2.10. Definíció.** Legyen  $x$  egy tetszőleges valós szám. A koordinátarendszer  $(1; 0)$  koordinátájú pontjának origó körüli  $x$  radián nagyságú szöggel való elforgatásával keletkezett pont első koordinátáját (abszcisszáját) *koszinusznak*, második koordinátáját (ordinátáját) *szinusznak* nevezzük.



**2.11. Megjegyzés.** A  $\sin x$  függvény grafikonja:



2.12. **Megjegyzés.** A  $\cos x$  függvény grafikonja:

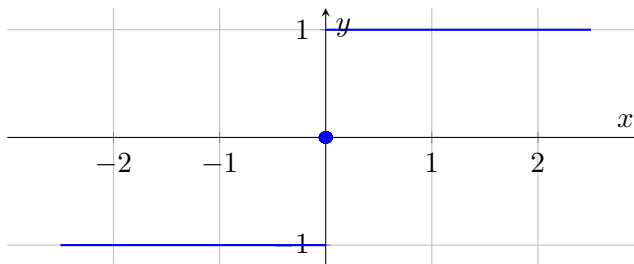


2.13. **Definíció.** *Elemi függvényeknek* nevezzük azokat a függvényeket, amelyek az  $x$ ;  $\sin x$ ;  $e^x$  függvényekből véges sok összeadással, konstanssal való szorzással, osztással, inverz képzéssel és összetett függvény képzéssel állíthatók elő.

2.14. **Definíció.** *Szignum függvénynek* vagy más szóval *előjel függvénynek* nevezzük az

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt. A függvény grafikonja:



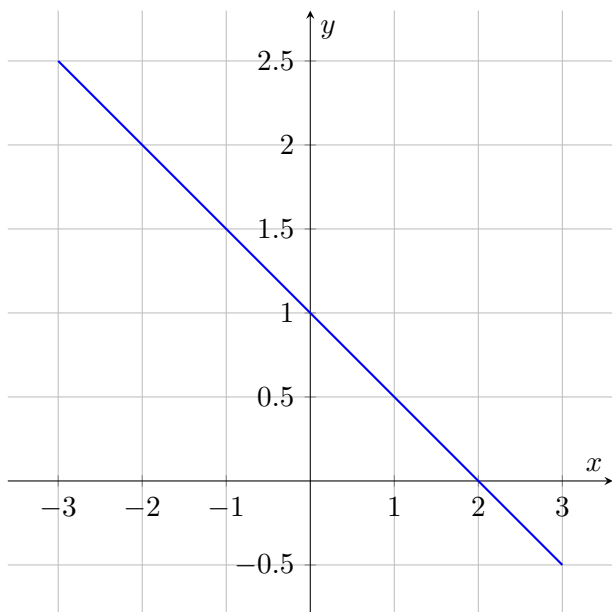
**Kidolgozott feladatok**

7. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$  függvényt!

- Határozzuk meg az egyenes meredekségét!
- Hol metszi az egyenes az  $y$  tengelyt?
- Illeszkedik-e az egyenesre az  $(1; 1)$  pont?
- Számoljuk ki az irányszöget!
- Ábrázoljuk az egyenest!

**Megoldás:**

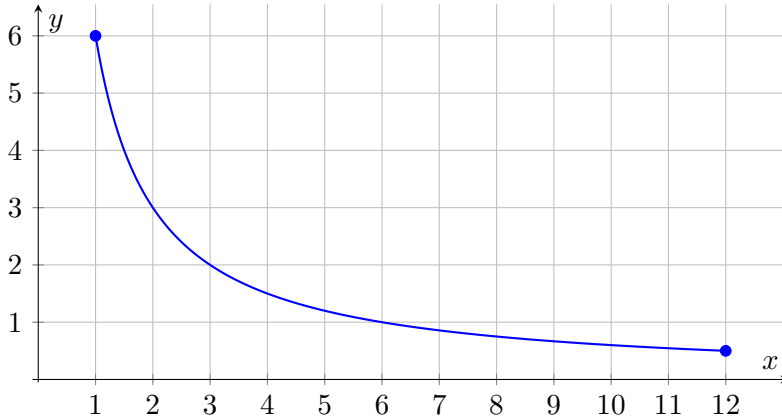
- Az egyenes meredeksége:  $m = -\frac{1}{2}$ .
- Az  $y$  tengelyt a  $(0; 1)$  pontban metszi.
- Mivel  $f(1) = -0,5 + 1 = 0,5 \neq 1$ , ezért nem illeszkedik a pont az egyenesre.
- Az egyenes irányszöge:  $\alpha \approx 153,43^\circ$ .
- Az egyenes képe:



8. **Feladat.** Vázoljuk fel az  $f: [1, 12] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{6}{x}$  függvény grafikonját!

**Megoldás:**

A függvény grafikonja:



9. **Feladat.** Számoljuk ki  $\text{ch}(\ln 3)$  pontos értékét!

**Megoldás:**

Felhasználva a  $\text{ch}x$  függvény definícióját azt kapjuk, hogy

$$\text{ch}(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{7}{6}.$$

10. **Feladat.** Számoljuk ki  $\text{sh}(\ln 2)$  pontos értékét!

**Megoldás:**

Felhasználva a  $\text{sh}x$  függvény definícióját azt kapjuk, hogy

$$\text{sh}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

11. **Feladat.** Oldjuk meg az  $\text{sh} x = \frac{3}{4}$  egyenletet!

**Megoldás:**

Mivel

$$\text{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{3}{4}.$$

A közös nevezővel szorozva

$$2e^x - 2e^{-x} = 3$$

adódik. Bevezetve az  $y = e^x$  jelölést azt kapjuk, hogy

$$2y - \frac{2}{y} = 3 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

adódik, így  $y_1 = 2$ , illetve  $y_2 = -\frac{1}{2}$ .

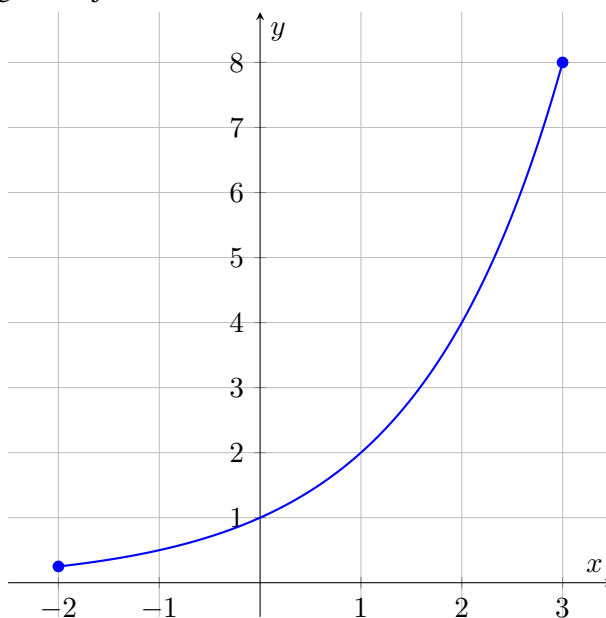
Ha  $y = 2$ , akkor  $e^x = 2$ , így  $x = \ln 2$ .

Ha  $y = -\frac{1}{2}$ , akkor nem kapunk megoldást, mivel  $e^x \neq -\frac{1}{2}$ .

**12. Feladat.** Vázoljuk fel az  $f(x) = 2^x$  függvény grafikonját a  $[-2; 3]$  intervallumon!

**Megoldás:**

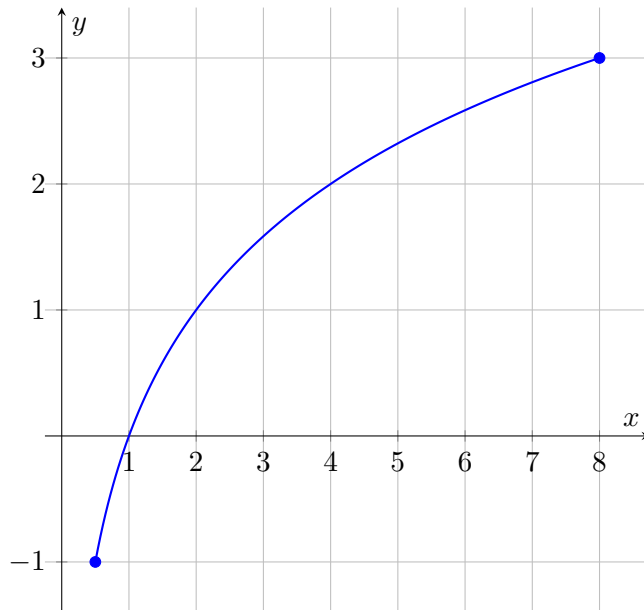
A függvény grafikonja:



**13. Feladat.** Vázoljuk fel az  $f(x) = \log_2 x$  függvény grafikonját a  $[0.5; 8]$  intervallumon!

**Megoldás:**

A függvény grafikonja:



### 3. Tétel: Sorozatok

1. Mit nevezünk valós számsorozatnak?
2. Mikor nevezünk egy sorozatot monoton növekvőnek?
3. Mikor nevezünk egy sorozatot monoton csökkenőnek?
4. Mikor nevezünk egy sorozatot szigorúan monoton növekvőnek?
5. Mikor nevezünk egy sorozatot szigorúan monoton csökkenőnek?
6. Mikor mondjuk azt, hogy egy sorozat felülről korlátos?
7. Mikor mondjuk azt, hogy egy sorozat alulról korlátos?
8. Mikor mondjuk azt, hogy egy sorozat korlátos?
9. Definiálja a konvergens sorozat fogalmát!
10. Definiálja a divergens sorozat fogalmát!
11. Adjon meg egy szükséges és elégséges feltételt a konvergenciára!
12. Milyen kapcsolat van a sorozatok konvergenciája és korlátossága között?
13. Milyen kapcsolat van a monotonitás, korlátosság és határérték között?
14. Fogalmazza meg a határérték és műveletek közötti kapcsolatra vonatkozó tételt!
15. Mit mond ki a rendőr-tétel?

3.1. **Definíció.** A természetes számok halmazán értelmezett valós értékű függvényt *valós számsorozatnak* nevezünk. Az

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

sorozat esetén a sorozat  $n \in \mathbb{N}$  helyen felvett helyettesítési értékére a függvényeknél megszokott  $a(n)$  jelölés helyett az  $a_n$  jelölést szokás használni, amit úgy olvasunk ki, hogy a *sorozat  $n$ -edik tagja* vagy úgy, hogy a sorozat  *$n$ -edik eleme*.

3.2. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $a_n$  sorozat *monoton növekvő*, ha minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $a_n \leq a_{n+1}$ .

3.3. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $a_n$  sorozat *monoton csökkenő*, ha minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $a_n \geq a_{n+1}$ .

3.4. **Definíció.** Az  $a_n$  sorozatot *szigorúan monoton növekvőnek* nevezzük, ha minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $a_n < a_{n+1}$ .

3.5. **Definíció.** Az  $a_n$  sorozatot *szigorúan monoton csökkenőnek* nevezzük, ha minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $a_n > a_{n+1}$ .

**3.6. Definíció.** Az  $a_n$  sorozat *felülről korlátos*, ha létezik olyan  $K$  valós szám, hogy  $a_n \leq K$  minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén.

**3.7. Definíció.** Az  $a_n$  sorozat *alulról korlátos*, ha létezik olyan  $k$  valós szám, hogy  $a_n \geq k$  minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén.

**3.8. Definíció.** Az  $a_n$  sorozat *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos.

**3.9. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $a_n$  sorozat *konvergens*, és a határértéke  $a$ , ha minden  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $n_0 \in \mathbb{N}$  úgynevezett küszöbindex, hogy minden  $n \geq n_0$  esetén  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Jelölés:  $a_n \rightarrow a$ , vagy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**3.10. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

**3.11. Tétel.** Egy sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik olyan valós szám, melynek bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.

**3.12. Tétel.** Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos. Az állítás megfordítása azonban nem igaz, azaz van olyan sorozat, amelyik korlátos, de nem konvergens.

Például az  $a_n = (-1)^n$  sorozat korlátos, de nem konvergens.

**3.13. Tétel.** Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens és határértéke a pontos felső korlátja.

Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens és határértéke a pontos alsó korlátja.

**3.14. Tétel.** (konvergenca és a műveletek kapcsolata)

Ha  $a_n$  és  $b_n$  konvergens és az  $a_n$  sorozat határértéke  $a$ , a  $b_n$  sorozat határértéke  $b$  és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor

- $a_n + b_n$  konvergens sorozat és a határértéke:  $a + b$ ;
- $a_n \cdot b_n$  konvergens sorozat és a határértéke:  $a \cdot b$ ;
- $\lambda \cdot a_n$  konvergens sorozat és a határértéke:  $\lambda \cdot a$ ;
- ha  $b_n \neq 0$  (minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén) és  $b \neq 0$ , akkor  $\frac{a_n}{b_n}$  konvergens sorozat és a határértéke:  $\frac{a}{b}$ .

**3.15. Tétel.** (rendőr-tétel)

Ha  $a_n$ ,  $b_n$  és  $c_n$  olyan sorozatok, melyekre

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

és az  $a_n$  sorozat határértéke  $a$  és a  $c_n$  sorozat határértéke szintén  $a$ , akkor a  $b_n$  sorozat határértéke is  $a$ .

**Kidolgozott feladatok**

14. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az  $a_n = \frac{1}{n}$  sorozat szigorúan monoton csökkenő!

**Megoldás:**

Mivel

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n \cdot (n+1)} = \frac{-1}{n \cdot (n+1)} < 0,$$

ezért minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $a_{n+1} - a_n < 0$ , azaz  $a_{n+1} < a_n$ , tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

15. **Feladat.** Számoljuk ki az  $a_n = 2 + \frac{6}{n}$  sorozat első 4 elemét!

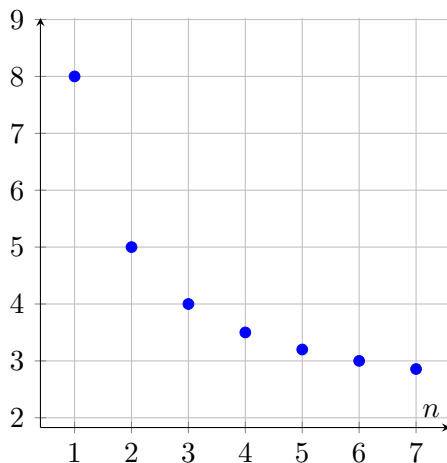
Jellemezzük a sorozatot monotonitás, határérték, korlátosság, szélsőérték szerint!

**Megoldás:**

A sorozat első hét eleme:

$$a_1 = 8, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = \frac{7}{2}, \quad a_5 = \frac{16}{5}, \quad a_6 = 3, \quad a_7 = \frac{20}{7}.$$

A sorozat elemei koordinátarendszerben ábrázolva:



A sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Mivel  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , ezért a sorozat konvergens, és a határértéke: 2.

A sorozat

- infimuma: 2; szuprémuma: 8;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos;
- minimuma: nincs; maximuma: 8.

**16. Feladat.** Számoljuk ki az  $a_n = (-1)^n$  sorozat első 4 elemét! Jellemezzük a sorozatot monotonitás, határérték, korlátosság, szélsőérték szerint!

**Megoldás:**

A sorozat első négy eleme:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 1.$$

A sorozat

- nem monoton;
- divergens;
- infimuma:  $-1$ ; szuprémuma: 1;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos;
- minimuma:  $-1$ ; maximuma: 1.

**17. Feladat.** Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{(2n+3)^2 - 4 \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{n^2 + 5n + 1}$$

sorozat határértékét!

**Megoldás:**

Mivel

$$(2n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 9 \quad \text{és} \quad (n+1) \cdot (n-1) = n^2 - 1,$$

ezért

$$a_n = \frac{4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 + 4}{n^2 + 5n + 1} = \frac{12n + 13}{n^2 + 5n + 1}.$$

A nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal osztva a számlálót és a nevezőt is azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{12}{n} + \frac{13}{n^2}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0,$$

#### 4. Tétel: Differenciálszámítás I.

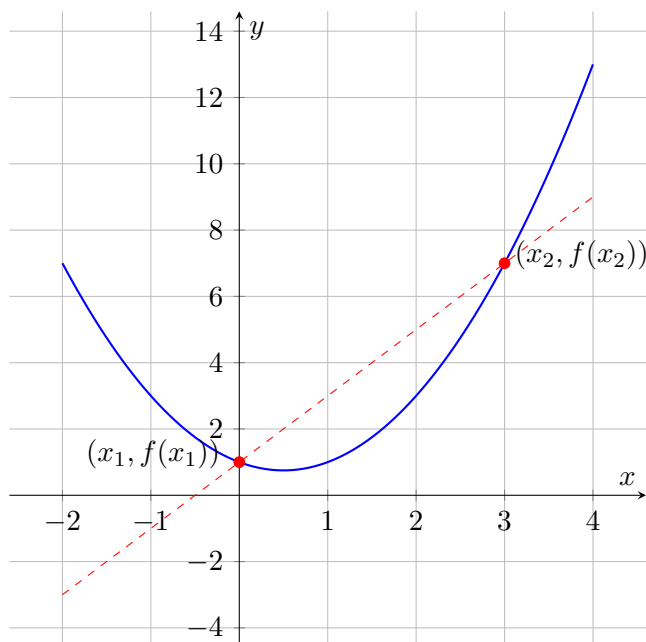
1. Mit nevezünk differenciahányadosnak?
2. Mi a differenciahányados geometriai jelentése?
3. Mit nevezünk differenciahányados függvénynek?
4. Mikor mondjuk, hogy egy függvény differenciálható?
5. Mit nevezünk érintő egyenesnek?
6. Mi az érintő egyenes geometriai jelentése?
7. Foglalja össze a differenciahányados és differenciálhányados definícióját, ekvivalens megfogalmazását, geometriai és fizikai jelentését!
8. Elemi függvények deriváltjai.
9. Két függvény összegének deriváltja.
10. Függvény konstansszorosának deriváltja!
11. Két függvény szorzatának deriváltja.
12. Két függvény hányadosának deriváltja.
13. Összetett függvény deriváltja.
14. Fogalmazza meg szövegesen az összetett függvény deriválási szabályát!
15. Mit értünk egy függvény másodrendű deriváltján?
16. Mit értünk egy függvény  $k$ -adrendű deriváltján?

4.1. **Definíció.** Legyen  $I$  a valós számok halmazának egy nyílt intervalluma. Tekintsük az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt és legyenek  $x_1$  és  $x_2$  olyan valós számok, melyekre  $x_1, x_2 \in I$  és  $x_1 \neq x_2$ . Az  $f$  függvény  $(x_1; f(x_1))$  és  $(x_2; f(x_2))$  pontjaihoz tartozó *differenciahányadosán* az

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

hányadost értjük.

4.2. **Megjegyzés.** A differenciahányados geometriai jelentése az  $(x_1; f(x_1))$ ,  $(x_2; f(x_2))$  pontokon áthaladó szelő meredeksége.



**4.3. Definíció.** Legyen  $x_0 \in I$ . Az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $x_0$  helyhez tartozó *differenciáhányados függvénye* a

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I \setminus \{x_0\}$$

függvény.

**4.4. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *differenciálható* az  $x_0 \in I$  helyen, ha a differenciáhányados függvényének létezik az  $x_0$  helyen határértéke, és az véges, azaz létezik és véges az

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték. Ekkor ezt a határértéket az  $f$  függvény  $x_0$ -beli *differenciálhányadosának*, vagy *deriváltjának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény *differenciálható*, ha értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható.

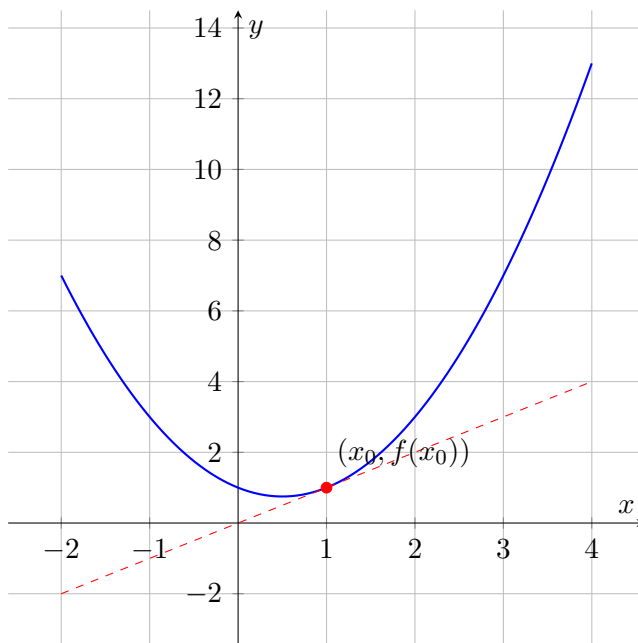
Jelölések:  $f'(x_0)$ ,  $\frac{df}{dx}(x_0)$ ,  $\dot{f}(t)$ ,  $\frac{d}{dx}f(x_0)$ .

**4.5. Definíció.** Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény differenciálható az  $x_0 \in I$  helyen, akkor az

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

egyenletű egyenest az  $f$  függvény  $(x_0; f(x_0))$  pontbeli *érintő egyenesének*, vagy egyszerűen *érintőjének* mondjuk.

4.6. **Megjegyzés.** A differenciálhányados geometriai jelentése a függvény grafikonjának  $(x_0; f(x_0))$  pontjába húzott érintő egyenesének meredeksége.



4.7. **Megjegyzés.** Az alábbi táblázatban összefoglaljuk a differenciálhányados és differenciálhányados definícióját, annak az átírását, valamint a geometriai és fizikai jelentést:

	differenciálhányados	differenciálhányados
definíció	$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
ekvivalens átalakítás	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
geom. jelentés	szelő meredeksége	érintő meredeksége
fizikai jelentés	átlagos megváltozás	pillanatnyi érték

4.8. **Tétel.** Az elemi függvények deriváltjai:

$f(x)$	$D_f$	$f'(x)$	$D_{f'}$
$c$	$\mathbb{R}$	$0$	$\mathbb{R}$
$x$	$\mathbb{R}$	$1$	$\mathbb{R}$
$x^r$	$]0; \infty[$	$r \cdot x^{r-1}$	$]0; \infty[$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$a^x$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$]0; \infty[$	$\frac{1}{x}$	$]0; \infty[$
$\log_a x$	$]0; \infty[$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$]0; \infty[$
$\arcsin x$	$[-1; 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] - 1; 1[$
$\arccos x$	$[-1; 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] - 1; 1[$
$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{cth} x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\operatorname{arsh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arch} x$	$[1; \infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1; \infty[$
$\operatorname{arth} x$	$] - 1; 1[$	$\frac{1}{1-x^2}$	$] - 1; 1[$
$\operatorname{arcth} x$	$] - \infty; -1[ \cup ]1; \infty[$	$-\frac{1}{1-x^2}$	$] - \infty; -1[ \cup ]1; \infty[$

4.9. **Tétel.** Ha az  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények differenciálhatóak az  $x_0 \in I$  helyen, akkor az összegük (különbségük) is differenciálható az  $x_0$  helyen és

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

4.10. **Tétel.** Ha  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható az  $x_0 \in I$  helyen és  $c \in \mathbb{R}$ , akkor  $c \cdot f$  is differenciálható az  $x_0$  helyen és

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

4.11. **Tétel.** Ha az  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények differenciálhatóak az  $x_0 \in I$  helyen, akkor a szorzatuk is differenciálható  $x_0$  helyen és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

4.12. **Tétel.** Ha az  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények differenciálhatóak az  $x_0 \in I$  helyen, továbbá  $g(x) \neq 0$  ( $x \in I$ ), akkor  $\frac{f}{g}$  is differenciálható az  $x_0$  helyen és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

4.13. **Tétel.** Legyenek  $I$  és  $J$  nyílt intervallumok. Ha a  $g: I \rightarrow J$  függvény differenciálható az  $x_0$  helyen, továbbá az  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  függvény differenciálható

a  $g(x_0)$  helyen, akkor az  $f \circ g: I \rightarrow \mathbb{R}$  összetett függvény is differenciálható az  $x_0$  helyen és

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

**4.14. Megjegyzés.** Az előbbi tétel szerint összetett függvényt tehát úgy deriválunk, hogy először deriváljuk a külső függvényt, abba a változó helyére behelyettesítjük az eredeti belső függvényt, majd az így kapott eredményt megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

**4.15. Definíció.** Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény differenciálható az  $I$  intervallumon, továbbá a deriváltja differenciálható az  $x_0 \in I$  helyen, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  kétszer differenciálható  $x_0$ -ban. Jelölés:

$$(f'(x_0))' = f''(x_0).$$

**4.16. Definíció.** Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $k - 1$ -szer differenciálható az  $I$  intervallumon, továbbá a  $k - 1$ -edrendű deriváltja differenciálható az  $x_0 \in I$  helyen, akkor azt mondjuk, hogy  $f$   $k$ -szor differenciálható  $x_0$ -ban. Jelölés:

$$(f^{(k-1)}(x_0))' = f^{(k)}(x_0).$$

**Kidolgozott feladatok**

18. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = x^2$  függvényt és legyen  $x_0 = 1$ .

- Határozzuk meg az  $f$  függvény differenciáhányados függvényének legegyszerűbb alakját az  $x_0$  helyen!
- A kapott eredményt felhasználva adjuk meg az  $f$  függvény differenciálhányadosának értékét az  $x_0$  helyen!
- Határozzuk meg az  $f$  függvény grafikonjának  $(x_0; f(x_0))$  pontjába húzott  $e$  érintő egyenesének meredekségét!
- Írjuk fel az  $e$  egyenes egyenletét!

**Megoldás:**

- a) Mivel  $f(x_0) = f(1) = 1^2 = 1$ , ezért a differenciáhányados függvény  $x \neq 1$  esetén:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

- b) A differenciálhányados az  $x_0$  helyen:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

- c) Az érintő egyenes meredeksége:  $m = f'(1) = 2$ .

- d) Az egyenes egyenletét  $y = m \cdot x + b = 2x + b$  alakban keressük.

Az egyenes illeszkedik az  $(1; f(1)) = (1; 1)$  pontra, így

$$1 = 2 \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = -1,$$

tehát az egyenes egyenlete:  $y = 2x - 1$ .

19. **Feladat.** Adjuk meg az  $u(x) = x^3 + 2x + 1$  függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

Az  $u$  függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = (x^3)' + (2x)' + 1' = 3x^2 + 2.$$

20. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^2} + 5$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

Mivel  $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$  és  $\frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$ , ezért

$$u(x) = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-2} + 5,$$

így az  $u$  függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-3} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} - \frac{4}{x^3}.$$

21. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = x^2 \cdot \operatorname{ctg} x$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

Az  $u$  függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = (x^2)' \cdot \operatorname{ctg} x + x^2 \cdot (\operatorname{ctg} x)' = 2x \cdot \operatorname{ctg} x + x^2 \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

22. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = \sqrt{x} \cdot 3^x$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

Mivel  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ , ezért

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot 3^x,$$

így az  $u$  függvény deriváltfüggvénye:

$$\begin{aligned} u'(x) &= (x^{\frac{1}{2}})' \cdot 3^x + x^{\frac{1}{2}} \cdot (3^x)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^x + x^{\frac{1}{2}} \cdot 3^x \cdot \ln 3 = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot 3^x + \sqrt{x} \cdot 3^x \cdot \ln 3. \end{aligned}$$

23. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{e^x}$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

Az  $u$  függvény deriváltfüggvénye:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{(x^3 + 3x^2 - 1)' \cdot e^x - (x^3 + 3x^2 - 1) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 + 6x) \cdot e^x - (x^3 + 3x^2 - 1) \cdot e^x}{e^{2x}}. \end{aligned}$$

24. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = \frac{x}{\cos x}$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

Az  $u$  függvény deriváltfüggvénye:

$$u'(x) = \frac{(x)' \cdot \cos x - x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \cdot \sin x}{\cos^2 x}.$$

25. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = \ln(\cos x)$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \ln x & k'(x) &= \frac{1}{x} \\ b(x) &= \cos x & b'(x) &= -\sin x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

26. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = e^{\sin x}$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= e^x & k'(x) &= e^x \\ b(x) &= \sin x & b'(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x.$$

27. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = 5^{\operatorname{tg} x}$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= 5^x & k'(x) &= 5^x \cdot \ln 5 \\ b(x) &= \operatorname{tg} x & b'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = 5^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 5}{\cos^2 x}.$$

28. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = (x^2 + 2x)^{100}$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= x^{100} & k'(x) &= 100x^{99} \\ b(x) &= x^2 + 2x & b'(x) &= 2x + 2. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = 100 \cdot (x^2 + 2x)^{99} \cdot (2x + 2).$$

29. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = \operatorname{tg}(x^3 + x^2 + x)$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \operatorname{tg} x & k'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ b(x) &= x^3 + x^2 + x & b'(x) &= 3x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = \frac{1}{\cos^2(x^3 + x^2 + x)} \cdot (3x^2 + 2x + 1) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{\cos^2(x^3 + x^2 + x)}.$$

30. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & k'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ b(x) &= x^2 + 5x + 6 & b'(x) &= 2x + 5. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$u'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 5x + 6)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 5) = \frac{2x + 5}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 5x + 6}}.$$

31. **Feladat.** Adjuk meg az

$$u(x) = \ln(\sin^5 x)$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

Ha  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = x^5$  és  $h(x) = \sin x$ , akkor

$$u(x) = f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))).$$

a többszörösen összetett függvény deriváltja:

$$u'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Mivel  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g'(x) = 5x^4$  és  $h'(x) = \cos x$ , így azt kapjuk, hogy

$$u'(x) = \frac{1}{\sin^5 x} \cdot 5 \cdot \sin^4 x \cdot \cos x.$$

**32. Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \ln^3(x - 1)$$

függvény deriváltfüggvényét!

**Megoldás:**

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = 3 \cdot \ln^2(x - 1) \cdot \frac{1}{x - 1} = \frac{3 \cdot \ln^2(x - 1)}{x - 1}.$$

**33. Feladat.** Számoljuk ki az  $f(x) = x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 3x + 10$  függvény másodrendű deriváltját!

**Megoldás:**

A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 - 16x + 3.$$

A másodrendű derivált:

$$f''(x) = 12x^2 + 48x - 16.$$

## 5. Tétel: Differenciálszámítás II.

1. Milyen kapcsolat van egy differenciálható függvény monotonitása és deriváltja között?
2. Milyen kapcsolat van egy kétszer differenciálható függvény konvexitása és deriváltja között?
3. Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.
4. Igaz-e az előbbi tétel megfordítása?
5. Inflexiós hely létezésének szükséges feltétele.
6. Igaz-e az előbbi tétel megfordítása?

**5.1. Tétel.** Legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény. Az  $f$  függvény pontosan akkor monoton növekvő  $I$ -n, ha minden  $x \in I$  esetén  $f'(x) \geq 0$ .

Az  $f$  függvény pontosan akkor monoton csökkenő  $I$ -n, ha minden  $x \in I$  esetén  $f'(x) \leq 0$ .

**5.2. Tétel.** Az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex  $I$ -n, ha  $f''(x) \geq 0$  minden  $x \in I$  esetén.

Az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konkáv  $I$ -n, ha  $f''(x) \leq 0$  minden  $x \in I$  esetén.

**5.3. Tétel.** Legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény. Ha  $f$ -nek az  $x_0 \in I$  helyen lokális szélsőértéke van, akkor  $f'(x_0) = 0$ .

**5.4. Megjegyzés.** Az előbbi tétel megfordítása nem igaz, ugyanis például az  $f(x) = x^3$  függvénynek az  $x_0 = 0$  helyen a deriváltja 0, azonban az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen nincs lokális szélsőértéke.

**5.5. Tétel.** Legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer differenciálható függvény. Ha  $f$ -nek az  $x_0 \in I$  helyen inflexiós helye van, akkor  $f''(x_0) = 0$ .

**5.6. Megjegyzés.** Az előbbi tétel megfordítása nem igaz, ugyanis például az  $f(x) = x^4$  függvénynek az  $x_0 = 0$  helyen a másodrendű deriváltja 0, azonban az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen nincs inflexiós helye.

**Kidolgozott feladatok**

34. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = x^3 - 9x$  függvényt!

- Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki a függvény zérushelyét!
- Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!
- Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
- Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
- Vázoljuk fel a függvény grafikonját!
- Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

**Megoldás:**

a) Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$ .

b) A zérushelyet az  $f(x) = 0$  egyenlet megoldásával kapjuk, azaz

$$x^3 - 9x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x^2 - 9) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, amiből azt kapjuk, hogy  $x = 0$ , vagy  $x^2 - 9 = 0$ .

Az  $x^2 - 9 = 0$  egyenlet megoldása:  $x = \pm 3$  adódik.

Tehát a függvénynek három zérushelye van: 0; 3; -3.

c) A függvény deriváltja:  $f'(x) = 3x^2 - 9$ . A deriváltfüggvény zérushelyei, vagyis a  $3x^2 - 9 = 0$  egyenlet megoldásai:

$$3x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

$x$	$] -\infty; -\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$] -\sqrt{3}; \sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$] \sqrt{3}; \infty[$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		$6 \cdot \sqrt{3}$		$-6 \cdot \sqrt{3}$	

- d) A függvény másodrendű deriváltja:  $f''(x) = 6x$ . Ennek zérushelye, vagyis a  $6x = 0$  egyenlet megoldása:  $x = 0$ . Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét, amiből következtethetünk a függvény konvexitására:

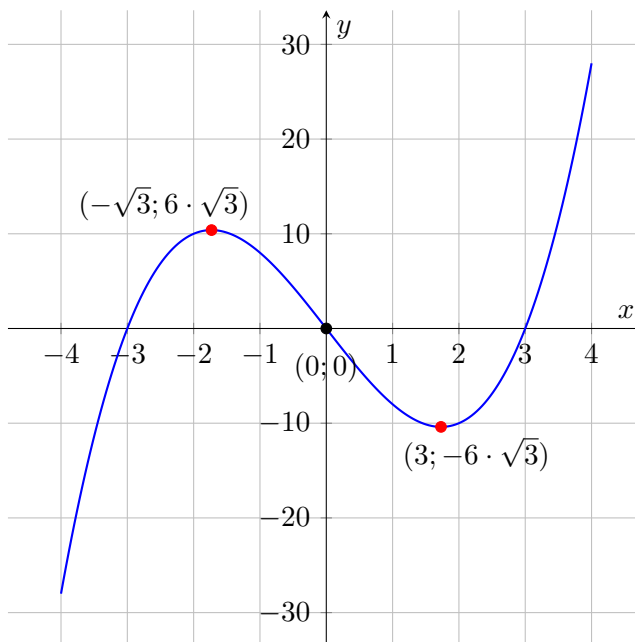
$x$	$] -\infty; 0[$	$0$	$]0; \infty[$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f'(x)$		$0$	

- e) Az értelmezési tartomány határpontjai  $-\infty$  és  $\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x) = \infty.$$

- f) A függvény grafikonja:



- g) Értékkészlet:  $y \in \mathbb{R}$ .

35. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = x^4 - 4x^3$  függvényt!

- Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki a függvény zérushelyét!
- Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!
- Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
- Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
- Vázoljuk fel a függvény grafikonját!
- Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

**Megoldás:**

- Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$ .
- A zérushelyet az  $f(x) = 0$  egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^4 - 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 \cdot (x - 4) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így  $x = 0$ , vagy  $x = 4$ .

- A függvény deriváltja:  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ . Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a  $4x^3 - 12x^2 = 0$  egyenletet. Ebből  $x^2$ -et kiemelve

$$x^2 \cdot (4x - 12) = 0$$

adódik, ami csak úgy lehet, ha  $x^2 = 0$ , azaz  $x = 0$ , vagy  $4x - 12 = 0$ , amiből  $4x = 12$ , így  $x = 3$ . Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

$x$	$] - \infty; 0[$	0	$]0; 3[$	3	$]3; \infty[$
$f'(x)$	–	0	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	nem szélsőérték	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		0		27	

- d) A függvény másodrendű deriváltja:  $f''(x) = 12x^2 - 24x$ . Ennek a zérushelyéhez a  $12x^2 - 24x = 0$  egyenletet kell megoldanunk. Ha  $x$ -et kiemelünk, akkor  $x \cdot (12x - 24) = 0$  adódik. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így  $x = 0$  vagy  $12x - 24 = 0$ , amiből  $x = 2$ . Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét:

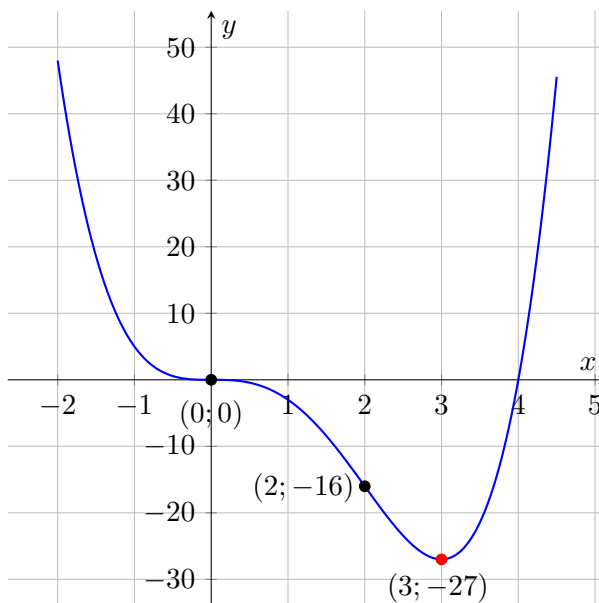
$x$	$] - \infty; 0[$	0	$]0; 2[$	2	$]2; \infty[$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	i.p.	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		0		-16	

- e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 4x^3) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 4x^3) = \infty.$$

- f) A függvény grafikonja:



- g) Értékkészlet:  $y \in [-27; \infty[$ .

36. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = x^4 - 4x^2$  függvényt!

- Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki a függvény zérushelyét!
- Jellemezzük monotonitását és lokális szélsőérték szerint a függvényt!
- Jellemezzük konvexitását szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
- Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
- Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

**Megoldás:**

a) Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$ .

b) A zérushelyet az  $f(x) = 0$  egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^4 - 4x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így  $x = 0$ , illetve  $x = \pm 2$ .

c) A függvény deriváltja  $f'(x) = 4x^3 - 8x$ , amelynek zérushelyei a

$$4x^3 - 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x \cdot (x^2 - 2) = 0$$

egyenlet megoldásai, így  $x = 0$  és  $x = \pm\sqrt{2}$ . A deriváltfüggvény előjelét táblázatban foglaljuk össze:

$x$	$] -\infty; -\sqrt{2}[$	$-\sqrt{2}$	$] -\sqrt{2}; 0[$	0
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.
$f(x)$		-4		0

$x$	$]0; \sqrt{2}[$	$\sqrt{2}$	$] \sqrt{2}; \infty[$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		-4	

- d) A függvény másodrendű deriváltja:  $f''(x) = 12x^2 - 8$ . Ennek a zérushelyéhez a  $12x^2 - 8 = 0$  egyenletet kell megoldanunk, amire azt kapjuk, hogy  $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét:

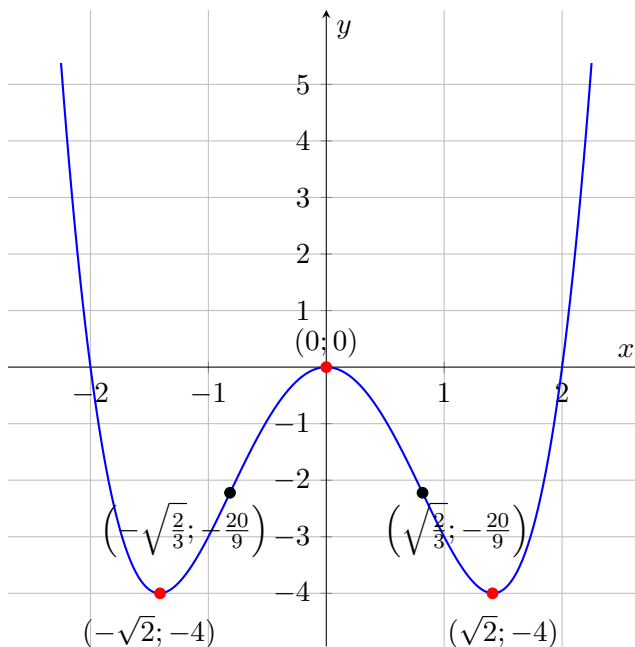
$x$	$] -\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}[$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$] -\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}[$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$] \sqrt{\frac{2}{3}}; \infty[$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	i.p.	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		$-\frac{20}{9}$		$-\frac{20}{9}$	

- e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 2x^2) = \infty.$$

- f) A függvény grafikonja:



37. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$  függvényt!

- Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki a függvény zérushelyét!
- Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!
- Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
- Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
- Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

**Megoldás:**

- Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$ .
- A zérushelyet az  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$  egyenlet megoldásával kapjuk. Bevezetve a  $k = x^2$  jelölést azt kapjuk, hogy  $k^2 - 5k + 4 = 0$ . A másodfokú egyenlet megoldásai  $k_1 = 1$ , illetve  $k_2 = 4$ .  
Mivel  $k = x^2$ , ezért az  $x^2 = 1$  egyenletből azt kapjuk, hogy  $x = \pm 1$ , az  $x^2 = 4$  egyenletből pedig  $x = \pm 2$  adódik.
- A függvény deriváltja  $f'(x) = 4x^3 - 10x$ . A  $4x^3 - 10x = 0$  egyenletből  $2x$ -et kiemelve  $2x \cdot (2x^2 - 5) = 0$  adódik, ami csak úgy lehet, ha  $x = 0$ , vagy  $2x^2 - 5 = 0$ , amiből azt kapjuk, hogy  $x = \pm\sqrt{2,5}$ . Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

$x$	$] -\infty; -\sqrt{2,5}[$	$-\sqrt{2,5}$	$] -\sqrt{2,5}; 0[$	0
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.
$f(x)$		-2,25		0

$x$	$]0; \sqrt{2,5}[$	$\sqrt{2,5}$	$] -\sqrt{2,5}; \infty[$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		-2,25	

- d) A függvény másodrendű deriváltja:  $f''(x) = 12x^2 - 10$ . Ennek a zérushelyéhez a  $12x^2 - 10 = 0$  egyenletet kell megoldanunk, amire azt kapjuk, hogy  $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$ . Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét:

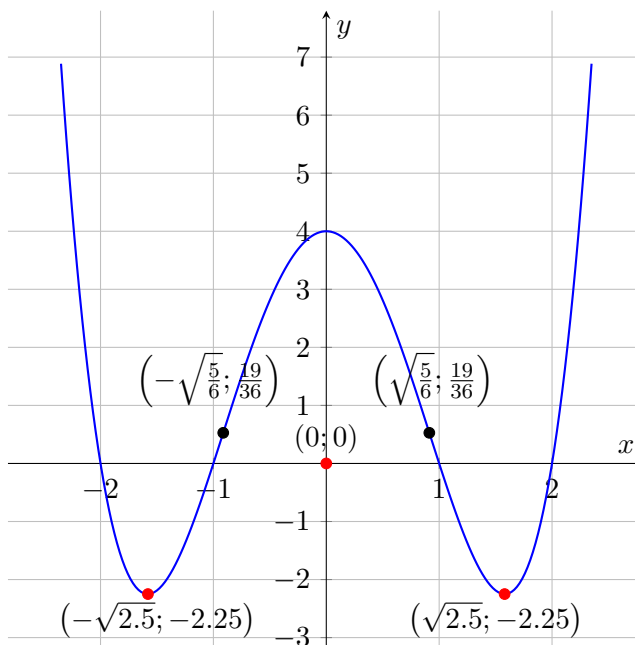
$x$	$] -\infty; -\sqrt{\frac{5}{6}}[$	$-\sqrt{\frac{5}{6}}$	$] -\sqrt{\frac{5}{6}}; \sqrt{\frac{5}{6}}[$	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$] \sqrt{\frac{5}{6}}; \infty[$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	i.p.	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		$\frac{19}{36}$		$\frac{19}{36}$	

- e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 5x^2 + 4) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 5x^2 + 4) = \infty.$$

- f) A függvény grafikonja:



38. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = \ln(1 + x^2)$  függvényt!

- Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki a függvény zérushelyét!
- Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!
- Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
- Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
- Vázoljuk fel a függvény grafikonját!
- Határozzuk meg a függvény értékészletét!
- Korlátos-e a függvény?

**Megoldás:**

a) Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$ .

b) A zérushelyet az  $f(x) = 0$  egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\ln(1 + x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2},$$

melynek zérushelye:  $x = 0$ . Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

$x$	$] - \infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		$\ln 1 = 0$	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}.$$

A másodrendű derivált zérushelyei:

$$\frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Ennek megfelelően táblázatba foglalva a másodrendű derivált előjelei:

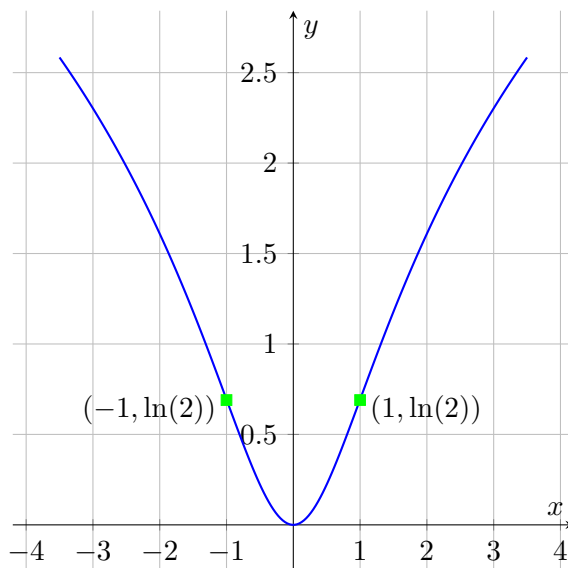
$x$	$] -\infty; -1[$	$-1$	$] -1; 1[$	$1$	$]1; \infty[$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex	i.p.	konkáv
$f(x)$		$\ln 2$		$\ln 2$	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + x^2) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + x^2) = \infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet:  $y \in [0; \infty[$ .

h) A függvény alulról korlátos, de felülről nem korlátos, így nem korlátos.

39. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = \ln(4 - x^2)$  függvényt!

- Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki a függvény zérushelyét!
- Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!
- Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
- Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
- Vázoljuk fel a függvény grafikonját!
- Határozzuk meg a függvény értékkészletét!
- Korlátos-e a függvény?
- Vizsgáljuk meg paritás szerint a függvényt!
- Adjuk meg a függvény abszolút (globális) szélsőértékeit!

**Megoldás:**

a) Értelmezési tartomány:  $x \in ] - 2; 2[$ .

b) A zérushelyet az  $f(x) = 0$  egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\ln(4 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{4 - x^2} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{4 - x^2},$$

melynek zérushelye:  $x = 0$ . Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

$x$	$] - 2; 0[$	0	$]0; 2[$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	lok. min.	$\searrow$
$f(x)$		$\ln 4$	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (4 - x^2) + 2x \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-2x^2 - 8}{(4 - x^2)^2}.$$

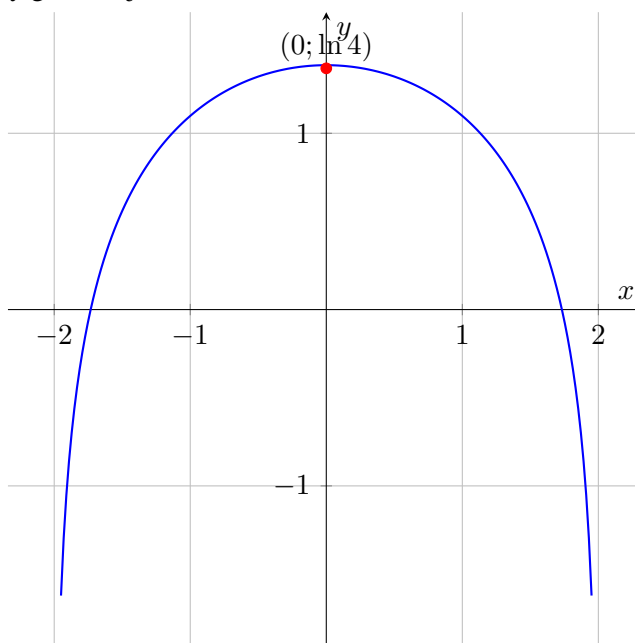
Mivel minden  $x \in ] - 2; 2[$  esetén  $f''(x) < 0$ , ezért az  $f$  függvény értelmezési tartományának minden pontjában konkáv.

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \ln(4 - x^2) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(4 - x^2) = -\infty.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet:  $y \in ] - \infty; \ln 4]$ .

h) Korlátosság: a függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos, így nem korlátos.

i) Paritás: páros, mert a grafikonja szimmetrikus az  $y$  tengelyre, azaz minden  $x \in ] - 2; 2[$  esetén  $f(-x) = f(x)$ .

j) Maximuma van. Maximum hely:  $x = 0$ . Maximum érték:  $y = \ln 4$ .

40. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = \frac{x+3}{e^x}$  függvényt!

- Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki a függvény zérushelyét!
- Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!
- Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
- Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
- Vázoljuk fel a függvény grafikonját!
- Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

**Megoldás:**

a) Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$ .

b) A zérushelyet az  $f(x) = 0$  egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\frac{x+3}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3.$$

c) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{e^x - (x+3) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (1 - x - 3)}{e^{2x}} = \frac{-x - 2}{e^x}.$$

Ennek zérushelye, vagyis a  $\frac{-x-2}{e^x}$  egyenlet egyetlen megoldása:  $x = -2$ .

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

$x$	$] -\infty; -2[$	$-2$	$] -2; \infty]$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$f(x)$		$e^2$	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot e^x - (-x-2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (-1 + x + 2)}{e^{2x}} = \frac{x+1}{e^x}.$$

Ennek egyetlen zérushelye:  $x = -1$ . Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét:

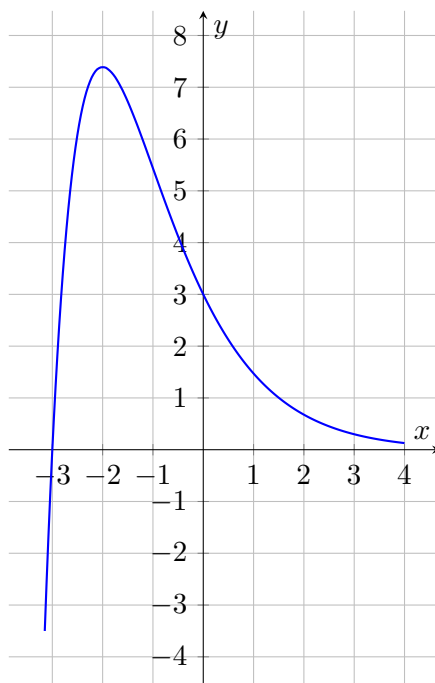
$x$	$] - \infty; -1[$	$-1$	$] - 1; \infty[$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		$2e$	

e) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \cdot (x + 3) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

f) A függvény grafikonja:



g) Értékkészlet:  $y \leq e^2$ .

41. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  függvényt!

- Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki a függvény zérushelyét!
- Határozzuk meg, hogy hol monoton növekvő és hol monoton csökkenő a függvény és adjuk meg a lokális szélsőértékeit!
- Jellemezzük konvexitás szerint a függvényt és adjuk meg az inflexiós pontját!
- Számoljuk ki a határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
- Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

**Megoldás:**

- Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$ .
- A zérushelyet az  $f(x) = 0$  egyenlet megoldásával kapjuk:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

- A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

A deriváltfüggvény zérushelyei:

$$\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

A deriváltfüggvény előjelét táblázatban foglaljuk össze:

$x$	$] - \infty; -1[$	$-1$	$] - 1; 1[$	$1$	$]1; \infty[$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$f(x)$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	

d) A függvény másodrendű deriváltja:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (x^2 + 1)^2 - (-x^2 + 1) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{(x^2 + 1) \cdot (-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

A

$$\frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0$$

egyenlet megoldásait kell meghatároznunk. Egy tört csak akkor lehet nulla, ha a számlálója nulla, ezért

$$2x^3 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot (x^2 - 3) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, ezért a másodrendű derivált zérushelyei:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

Táblázatba foglalva megvizsgáljuk a másodrendű derivált előjelét:

$x$	$] - \infty; -\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$] - \sqrt{3}; 0[$	0
$f''(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex	i.p.
$f(x)$		$\frac{-\sqrt{3}}{4}$		0

$x$	$]0; \sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$] \sqrt{3}; \infty[$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	

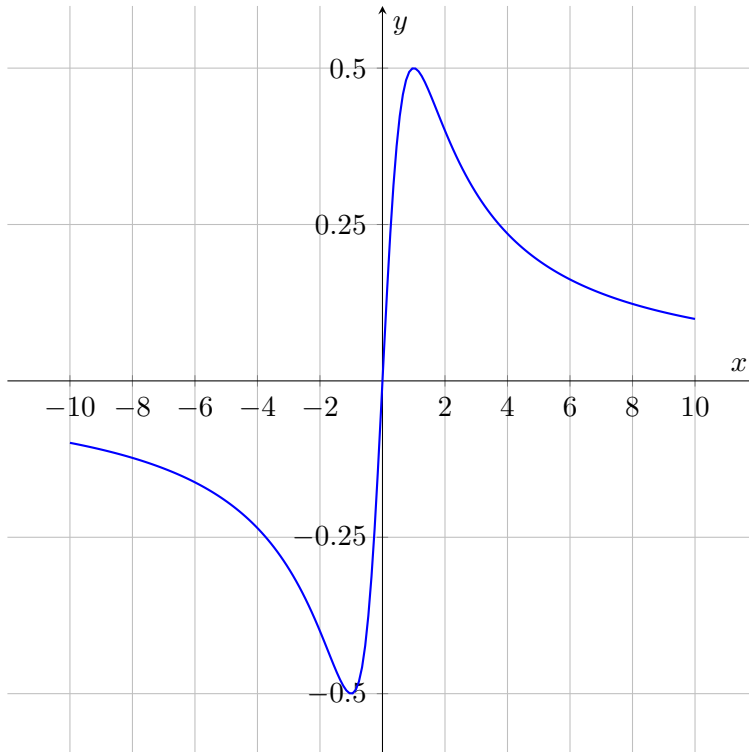
e) A függvény határértéke  $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0.$$

A függvény határértéke  $\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0.$$

f) A függvény grafikonja:



## 6. Tétel: Differenciálszámítás III.

1. Milyen kapcsolat van a folytonosság és differenciálhatóság között?
2. Milyen feltétele a folytonosság a differenciálhatóságnak?
3. Milyen feltétele a differenciálhatóság a folytonosságnak?
4. Mit nevezünk Taylor-polinomnak?
5. Milyen kapcsolat van az elsőfokú Taylor-polinom és az érintőegyenes között?
6. Fogalmazza meg a L'Hospital-szabályt!

6.1. **Tétel.** Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény differenciálható az  $x_0 \in I$  helyen, akkor ott folytonos is.

A tétel megfordítása nem igaz, azaz van olyan folytonos függvény, amely nem differenciálható. Például az  $f(x) = |x|$  függvény az  $x_0 = 0$  helyen folytonos, de nem differenciálható.

6.2. **Megjegyzés.** A folytonosság szükséges, de nem elégséges feltétele a differenciálhatóságnak.

6.3. **Megjegyzés.** A differenciálhatóság elegendő, de nem szükséges feltétele a folytonosságnak.

6.4. **Definíció.** Legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  az  $x_0 \in I$  helyen  $n$ -szer differenciálható függvény. A

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

függvényt az  $f$  függvény  $x_0$  helyhez tartozó (vagy  $x_0$  körüli)  $n$ -edfokú (vagy  $n$ -edrendű) *Taylor-polinomjának* nevezzük.

6.5. **Megjegyzés.** Az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény elsőfokú Taylor polinomja

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

ami éppen a függvény grafikonjának  $(x_0; f(x_0))$  pontjába húzott érintő egyenest megadó függvény.

6.6. **Tétel.** (L'Hospital-szabály.)

Legyen  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $f, g: ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , és legyen  $a \leq x_0 \leq b$ . Ha  $f$

és  $g$  differenciálható függvények az  $]a; b[\setminus\{x_0\}$  halmazon és  $g'(x) \neq 0$  minden  $x \in ]a; b[$ -re, továbbá

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

továbbá létezik a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g'(x)}$  véges vagy végtelen határérték, akkor létezik a

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  határérték is és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**6.7. Megjegyzés.** Az előbbi tétel akkor is érvényben marad, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$$

vagy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

vagy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty.$$

**Kidolgozott feladatok**

42. **Feladat.** Írjuk fel az  $f(x) = e^{8x}$  függvény  $x_0 = 0$  pont körüli másodrendű Taylor-polinomját!

**Megoldás:**

Első lépésben kiszámoljuk a függvény első és második deriváltját, majd meghatározzuk ezek értékeit az  $x_0 = 0$  helyen:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
$k = 0$	$e^{8x}$	1
$k = 1$	$8 \cdot e^{8x}$	8
$k = 2$	$64 \cdot e^{8x}$	64

Az  $f$  függvény  $x_0$  pont körüli másodrendű Taylor-polinomja:

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

Ebbe behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$T_2(x) = 1 + 8 \cdot (x - 0) + \frac{64}{2} \cdot (x - 0)^2$$

adódik. Elvégezve az egyszerűsítéseket azt kapjuk, hogy

$$T_2(x) = 1 + 8x + 32x^2.$$

43. **Feladat.** Számoljuk ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$  határértéket!

**Megoldás:**

Külön kiszámolva a számláló és a nevező határértékét

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x = \sin 0 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos 2x}{3} = \frac{2}{3}.$$

44. **Feladat.** Számoljuk ki a  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$  határértéket!

**Megoldás:**

A számláló határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0,$$

a nevező határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{2x} = 0.$$

45. **Feladat.** Számoljuk ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$  határértéket!

**Megoldás:**

Külön kiszámolva a számláló és a nevező határértékét

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x = \sin 0 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x = \sin 0 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)'}{(\sin 3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{3 \cos 3x} = \frac{2}{3}.$$

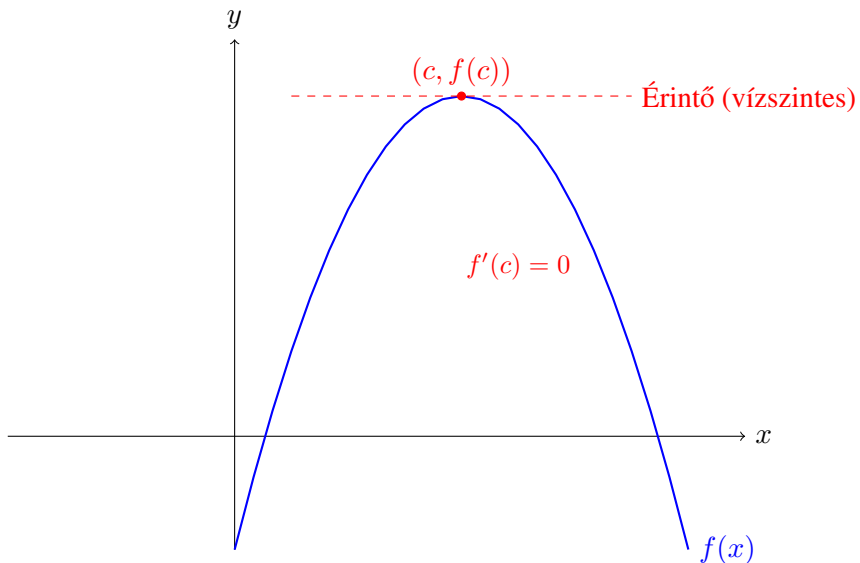
## 7. Tétel: Differenciálszámítás IV.

1. Fogalmazza meg a Rolle-féle középértéktételt!
2. Szemléltesse a Rolle-tétel geometriai jelentését!
3. Fogalmazza meg a Lagrange-féle középértéktételt!
4. Írja le a Lagrange-tétel geometriai tartalmát!

### 7.1. Tétel. (Rolle-féle középértéktétel)

Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  az  $[a; b]$ -on folytonos, az  $]a; b[$ -on differenciálható függvény, továbbá  $f(a) = f(b)$ , akkor van olyan  $c \in ]a; b[$ , hogy  $f'(c) = 0$ .

7.2. **Megjegyzés.** A Rolle-tétel geometriai tartalma: ha az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos és az  $]a; b[$ -ra való leszűkítése differenciálható, továbbá a függvényértékek az intervallum kezdő- és végpontjában megegyeznek, akkor az  $]a; b[$  intervallumnak van olyan  $c$  pontja, hogy a  $(c; f(c))$  pontba húzott érintő egyenes párhuzamos az  $x$  tengellyel (azaz a meredeksége nulla).

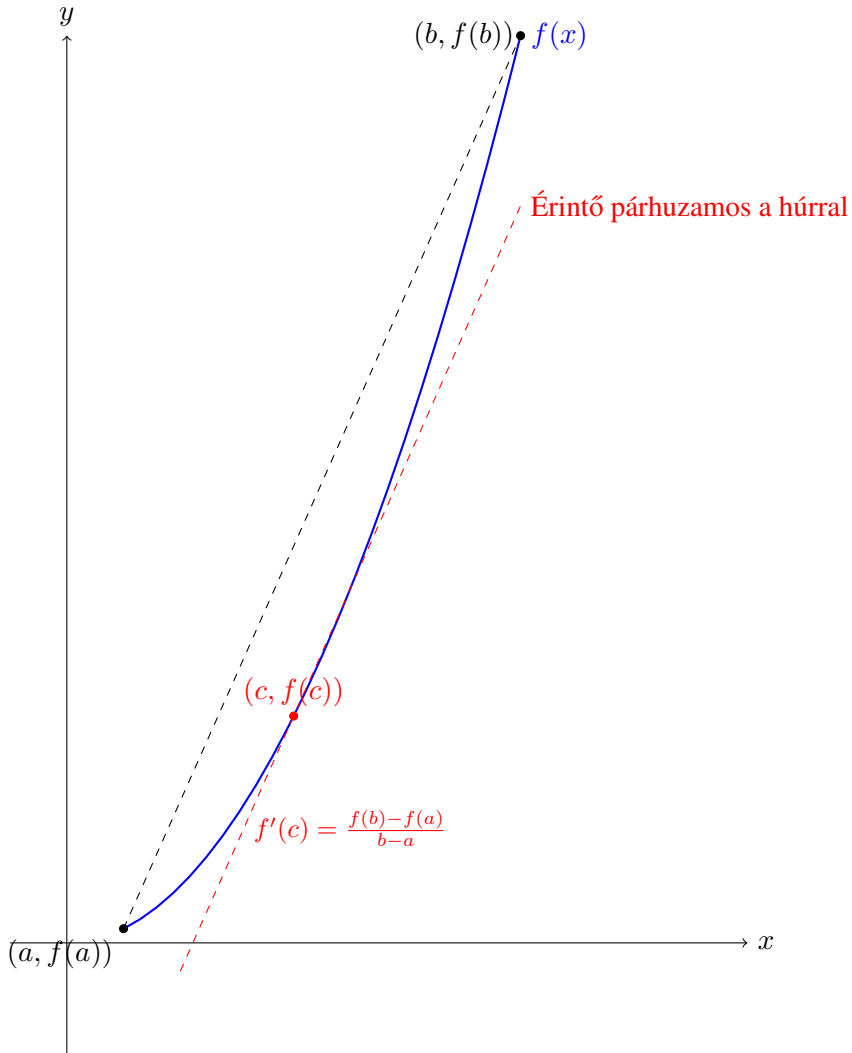


### 7.3. Tétel. (Lagrange-féle középértéktétel)

Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  az  $[a; b]$ -n folytonos, az  $]a; b[$  intervallumon differenciálható függvény, akkor van olyan  $c \in ]a; b[$ , melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

7.4. **Megjegyzés.** A Lagrange-féle középértéktétel geometriai tartalma: ha az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos és az  $]a; b[$  intervallumra való leszűkítése differenciálható, akkor az  $]a; b[$  intervallumnak van olyan  $c$  pontja, amelyre teljesül, hogy a  $(c; f(c))$  pontba húzott érintő egyenes párhuzamos az  $(a; f(a))$  és  $(b; f(b))$  pontokat összekötő szakasszal.



### Kidolgozott feladatok

46. **Feladat.** Határozzuk meg az  $f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 2x^2$  függvény esetén azon  $c$  valós számokat, amelyekre teljesül, hogy a  $(c; f(c))$  pontba húzott érintő párhuzamos a  $(-1; f(-1))$  és  $(2; f(2))$  pontokat összekötő szelővel!

#### Megoldás:

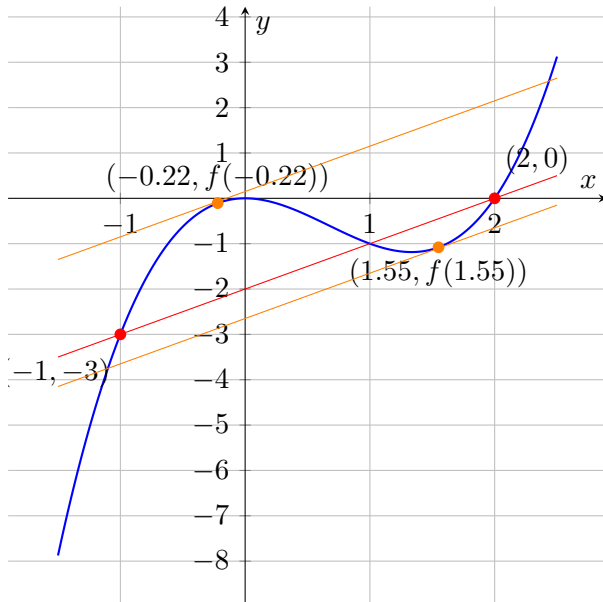
A szelő meredeksége

$$m = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{8 - 8 - (-1 - 2)}{3} = 1,$$

így az érintő meredeksége is 1 kell, hogy legyen, azaz teljesülnie kell, hogy  $f'(c) = 1$ . Mivel  $f'(c) = 3c^2 - 4c$ , ezért meg kell oldanunk a  $3c^2 - 4c = 1$  egyenletet, ami ekvivalens azzal, hogy  $3c^2 - 4c - 1 = 0$ . A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$c_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

adódik. Mindkét érték eleme az értelmezési tartománynak, így mindkét valós szám megfelel a feladat feltételeinek.



47. **Feladat.** Határozzuk meg az  $f(x) = 2x - x^2$  függvénynek azt a pontját, amelyhez húzott érintő egyenes párhuzamos az  $A(1; 1)$  és a  $B(3; -3)$  pontokon áthaladó szelővel!

**Megoldás:**

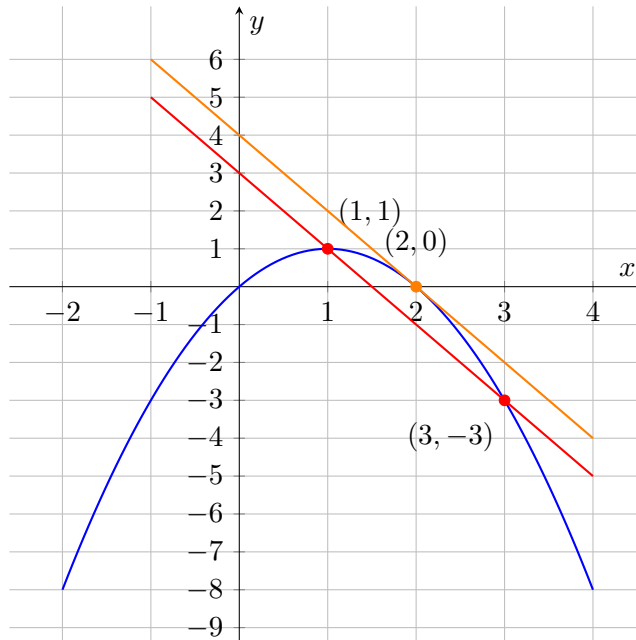
A Lagrange-féle középértéktétel garantálja, hogy létezik a megadott szelővel párhuzamos érintő egyenes. A szelő meredeksége az  $A$  és  $B$  pontokhoz tartozó differencihányados:

$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 1}{3 - 1} = -2.$$

Mivel a keresett érintő egyenes párhuzamos a szelővel, ezért az érintő egyenes meredeksége szintén  $-2$ . Az érintő egyenes meredeksége megegyezik a függvény megfelelő helyen vett deriváltjával, azaz keressük azt az  $x$  valós számot, amelyre  $f'(x) = -2$  teljesül. Mivel  $f'(x) = 2 - 2x$ , ezért

$$2 - 2x = -2 \quad \Rightarrow \quad 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Másrészt a függvényérték a 2 helyen  $f(2) = 0$ , így a keresett érintési pont  $E(2; 0)$ .



## 8. Tétel: Primitív függvény keresési módszerek

1. Mit nevezünk primitív függvénynek?
2. Ha egy függvénynek van primitív függvénye, akkor hány darab van?
3. Mit nevezünk határozatlan integrálnak?
4. Mit jelent a határozatlan integrál additív tulajdonsága?
5. Mit jelent a határozatlan integrál homogén tulajdonsága?
6. Hogyan számolható ki az  $f(ax + b)$  típusú függvények integrálja?
7. Hogyan számolható ki az  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  típusú függvények integrálja?
8. Hogyan számolható ki az  $f^n(x) \cdot f'(x)$  típusú függvények integrálja?
9. Mit nevezünk parciális törtnek?
10. Mit mond ki a parciális törtre bontás tétele?
11. Írja le a parciális integrálás képletét!
12. Milyen típusú függvények integrálására alkalmazható a parciális integrálás képlete?

8.1. **Definíció.** Ha az  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény differenciálható és  $F'(x) = f(x)$  minden  $x \in I$  esetén, akkor azt mondjuk, hogy  $F$  az  $f$  függvény *primitív függvénye*.

8.2. **Megjegyzés.** Ha  $F$  primitív függvénye az  $f$  függvénynek, akkor minden  $c \in \mathbb{R}$  esetén  $F + c$  is primitív függvénye az  $f$  függvénynek. Tehát, ha egy függvénynek van primitív függvénye, akkor végtelen sok van, melyek csak egy (additív) konstansban térnek el egymástól.

8.3. **Definíció.** Az  $f$  függvény összes primitív függvényének halmazát az  $f$  függvény *határozatlan integráljának* nevezzük. Jele:  $\int f(x) dx$ .

8.4. **Tétel.** A primitív függvény additív tulajdonságú, azaz ha  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvények, amelyeknek létezik primitív függvénye, akkor az  $f + g$  függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

8.5. **Tétel.** A primitív függvény homogén tulajdonságú, azaz ha  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor a  $\lambda \cdot f$  függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int f(x) dx.$$

**8.6. Tétel.** Legyenek  $I$  és  $J$  nyílt intervallumok és legyen az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek  $F$  egy primitív függvénye és  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  elsőfokú függvény, azaz  $g(x) = a \cdot x + b$ , ahol  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a \neq 0$ ! Ekkor

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**8.7. Tétel.** Ha  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, amelyre az  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  függvénynek létezik primitív függvénye, akkor

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**8.8. Tétel.** Legyen  $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  és legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, hogy az  $f^n(x) \cdot f'(x)$  függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor

$$\int f^n(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**8.9. Definíció.** Legyenek  $A \neq 0$ , valamint  $B$  és  $C$  olyan valós számok, hogy  $B \cdot C \neq 0$  és legyen  $n \in \mathbb{N}$ , továbbá  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Az

$$\frac{A}{(x - x_0)^n}$$

és a

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

alakú törtet, ahol  $p^2 - 4q < 0$  (azaz az  $x^2 + px + q$  másodfokú polinomnak nincs valós gyöke) *parciális tört*eknek nevezzük.

**8.10. Tétel.** Minden olyan racionális törtfüggvény, amelyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, felbontható parciális törtök összegére.

**8.11. Tétel.** Ha  $f$  folytonos és  $g$  differenciálható függvény, akkor

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

**8.12. Megjegyzés.** A parciális integrálást alkalmazhatjuk  $P(x) \cdot \sin x$ ,  $P(x) \cdot \cos x$ ,  $P(x) \cdot e^x$ , valamint  $P(x) \cdot \ln x$  típusú függvények integrálására, ahol  $P$  tetszőleges  $n$ -edfokú polinom.

**Kidolgozott feladatok**

48. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$\text{a) } \int \frac{x^3 + x^2}{x} dx$$

$$\text{d) } \int 4^x + 5^x dx$$

$$\text{b) } \int \frac{x^2 + x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{e) } \int \frac{x^2 - 9}{x - 3} dx$$

$$\text{c) } \int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x^2} dx$$

$$\text{f) } \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} dx$$

**Megoldás:**

a) A törtet két tört összegére bontva, majd az integrál additív tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^3 + x^2}{x} dx = \int \frac{x^3}{x} + \frac{x^2}{x} dx = \int x^2 + x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c.$$

b) Felhasználva a hatványozás azonosságait, a  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  azonosságot, továbbá a törtet két tört összegére bontva, majd az integrál additív tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2 + x}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + c. \end{aligned}$$

c) Felhasználva, hogy  $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$  és  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ , valamint a hatványozás azonosságainak alkalmazásával és az integrál additív tulajdonságának felhasználásával

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x^2} dx &= \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx = \int x^{-\frac{5}{3}} + x^{-\frac{3}{2}} dx = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c \end{aligned}$$

adódik.

d) Az integrál additív tulajdonsága miatt azt kapjuk, hogy

$$\int 4^x + 5^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{5^x}{\ln 5} + c.$$

e) Felhasználva az  $x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3)$  azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^2 - 9}{x - 3} dx = \int \frac{(x - 3) \cdot (x + 3)}{x - 3} dx = \int x + 3 dx = \frac{x^2}{2} + 3x + c$$

adódik.

f) Felhasználva az  $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$  azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} dx = \int \frac{(x + 2)^2}{x + 2} dx = \int x + 2 dx = \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

adódik.

A fentiekben  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges konstans.

49. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a)  $\int 3 \cdot \cos x + 4 \cdot \sin x dx$

d)  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$

b)  $\int \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{6}{\sin^2 x} dx$

e)  $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$

c)  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

f)  $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$

**Megoldás:**

a) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva

$$\int 3 \cdot \cos x + 4 \cdot \sin x dx = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + c$$

adódik.

b) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{6}{\sin^2 x} dx = 5 \operatorname{tg} x - 6 \cdot \operatorname{ctg} x + c.$$

c) Felhasználva, hogy  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , majd alkalmazva a  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  azonosságot, továbbá az integrál additív tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \operatorname{tg} x - x + c. \end{aligned}$$

d) Felhasználva, hogy  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , majd a  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  azonosságot alkalmazva

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + c \end{aligned}$$

adódik.

e) Felhasználva, hogy  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} \, dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} \, dx = \\ &= \int \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} \, dx = \\ &= \int \cos x - \sin x \, dx = \sin x + \cos x + c. \end{aligned}$$

f) Felhasználva, hogy  $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$  azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\cos x} \, dx &= \int \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos x} \, dx = \int 2 \sin x \, dx = \\ &= -2 \cos x + c. \end{aligned}$$

A fentiekben  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges konstans.

50. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$\text{a) } \int 4x^3 + \cos x + e^x \, dx \qquad \text{b) } \int (2^x + 3)^2 \, dx$$

**Megoldás:**

a) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int 4x^3 + \cos x + e^x \, dx = x^4 + \sin x + e^x + c.$$

b) Mivel

$$(2^x + 3)^2 = 2^{2x} + 6 \cdot 2^x + 9 = 4^x + 6 \cdot 2^x + 9,$$

ezért

$$\int (2^x + 3)^2 \, dx = \int 4^x + 6 \cdot 2^x + 9 \, dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 6 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + 9x + c.$$

A fentiekben  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges konstans.

51. **Feladat.** Adjuk meg az

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

függvény azon  $F$  primitív függvényét, melyre  $F(2) = 16$  teljesül! Ábrázoljuk a függvény grafikonját!

**Megoldás:**

Mivel  $x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$ , ezért

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{x - 2} = x + 2,$$

így

$$\int \frac{x^2 - 4}{x - 2} dx = \int x + 2 dx = \frac{x^2}{2} + 2x + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$ . Tehát az  $f$  primitív függvényei:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + c.$$

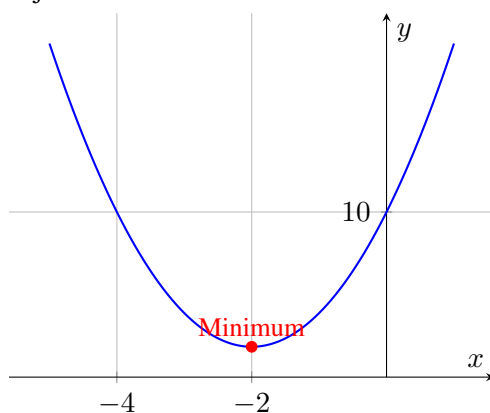
Mivel  $F(2) = 16$ , ezért

$$16 = \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 10.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 10 = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 4x) + 10 = \frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2 + 8$$

A függvény grafikonja:



52. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a)  $\int \cos(3x + 1) dx$

d)  $\int (3x + 1)^{20} dx$

b)  $\int \sin(4x + 5) dx$

e)  $\int (1 + 4x)^3 dx$

c)  $\int e^{2x+5} dx$

f)  $\int \sqrt{2x + 1} dx$

**Megoldás:**

a) Ha  $f(x) = \cos x$ , akkor

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \cos x dx = \sin x + c.$$

A megfelelő tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax + b)}{a},$$

így

$$\int \cos(3x + 1) dx = \frac{\sin(3x + 1)}{3} + c.$$

b) Ha  $f(x) = \sin x$ , akkor

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

A megfelelő tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \sin(4x + 5) dx = -\frac{\cos(4x + 5)}{4} + c.$$

c) Ha  $f(x) = e^x$ , akkor

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + c.$$

A megfelelő tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int e^{2x+5} dx = \frac{e^{2x+5}}{2} + c.$$

d) Ha  $f(x) = x^{20}$ , akkor

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^{20} dx = \frac{x^{21}}{21} + c.$$

A megfelelő tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int (3x + 1)^{20} dx = \frac{(3x + 1)^{21}}{21 \cdot 3} + c = \frac{(3x + 1)^{21}}{63} + c.$$

e) Ha  $f(x) = x^3$ , akkor

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c.$$

A megfelelő tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int (1 + 4x)^3 dx = \frac{(1 + 4x)^4}{4 \cdot 4} = \frac{(1 + 4x)^4}{16} + c.$$

f) Ha  $f(x) = \sqrt{x}$ , akkor

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$$

A megfelelő tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{2x + 1} dx = \frac{(2x + 1)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot \frac{3}{2}} + c = \frac{(2x + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c.$$

A fentiekben  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

53. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a)  $\int \frac{x}{x^2 + 5} dx$

d)  $\int \operatorname{ctg} x dx$

b)  $\int \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 6} dx$

e)  $\int \operatorname{tg} 3x dx$

c)  $\int \operatorname{tg} x dx$

f)  $\int \operatorname{ctg} 3x dx$

**Megoldás:**

- a) Ha  $f(x) = x^2 + 3$ , akkor  $f'(x) = 2x$ , így az integrál  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  alakra hozható. Felhasználva, hogy

$$\frac{x}{x^2 + 5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 5},$$

továbbá az integrál homogén tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x}{x^2 + 5} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2 + 5} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 5) + c.$$

- b) A nevező deriváltja:  $2x + 4$ . A számlálót 2-vel szorozva a számlálóban a nevező deriváltját kapjuk, így alkalmazható az előbbi módszer. Ahhoz, hogy a kifejezés értéke ne változzon,  $\frac{1}{2}$ -el is szoroznunk kell, amit az integrál homogenitása miatt kiemelhetünk az integráljel elé. Tehát

$$\int \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 6} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 6} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2 + 4x + 6| + c.$$

- c) Mivel  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , továbbá  $(\cos x)' = -\sin x$ , ezért

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c.$$

- d) Mivel  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , továbbá  $(\sin x)' = \cos x$ , ezért

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c.$$

- e) Mivel  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , továbbá  $(\cos 3x)' = -3 \cdot \sin 3x$ , ezért

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}(3x) dx &= \int \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} dx = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{-3 \cdot \sin(3x)}{\cos(3x)} dx = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \ln|\cos(3x)| + c. \end{aligned}$$

- f) Mivel  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , továbbá  $(\sin 3x)' = 3 \cdot \cos 3x$ , ezért

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}(3x) dx &= \int \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3 \cos(3x)}{\sin(3x)} dx = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \ln|\sin(3x)| + c. \end{aligned}$$

A fentiekben mindenhol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

54. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int 2x \cdot e^x dx$$

határozatlan integrált!

**Megoldás:**

A parciális integrálás képletében az  $f'(x) = e^x$  és  $g(x) = 2x$  jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f'(x) &= e^x \\ g(x) &= 2x & g'(x) &= 2. \end{aligned}$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int 2x \cdot e^x dx &= 2x \cdot e^x - \int 2e^x dx = \\ &= 2x \cdot e^x - 2e^x + c = 2e^x \cdot (x - 1) + c, \end{aligned}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges valós szám.

55. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int 3x \cdot \cos x dx$$

határozatlan integrált!

**Megoldás:**

A parciális integrálás képletében az  $f'(x) = \cos x$  és  $g(x) = 3x$  jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f'(x) &= \cos x \\ g(x) &= 3x & g'(x) &= 3. \end{aligned}$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int 3x \cdot \cos x dx &= 3x \cdot \sin x - \int 3 \sin x dx = \\ &= 3x \cdot \sin x + 3 \cos x + c, \end{aligned}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

56. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (5x + 1) \cdot \sin x dx$$

határozatlan integrált!

**Megoldás:**

A parciális integrálás képletében az  $f'(x) = \sin x$  és  $g(x) = 5x + 1$  jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos x & f'(x) &= \sin x \\ g(x) &= 5x + 1 & g'(x) &= 5. \end{aligned}$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int (5x + 1) \cdot \sin x \, dx &= -(5x + 1) \cdot \cos x + \int 5 \cos x \, dx = \\ &= -(5x + 1) \cdot \cos x + 5 \sin x + c, \end{aligned}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**57. Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (x^2 + 7x - 1) \cdot \cos x \, dx$$

határozatlan integrált!

**Megoldás:**

A parciális integrálás képletében az  $f_1'(x) = \cos x$  és  $g_1(x) = x^2 + 7x - 1$  jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin x & f_1'(x) &= \cos x \\ g_1(x) &= x^2 + 7x - 1 & g_1'(x) &= 2x + 7. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva

$$\int f_1'(x) \cdot g_1(x) \, dx = f_1(x) \cdot g_1(x) - \int f_1(x) \cdot g_1'(x) \, dx$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\int (x^2 + 7x - 1) \cdot \cos x \, dx = (x^2 + 7x - 1) \cdot \sin x - \int (2x + 7) \cdot \sin x \, dx.$$

A kapott

$$\int (2x + 7) \cdot \sin x \, dx$$

integrál kiszámolása szintén parciális integrálással történik.

Legyen  $f_2'(x) = \sin x$  és  $g_2(x) = 2x + 7$ ! Ekkor:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -\cos x & f_2'(x) &= \sin x \\ g_2(x) &= 2x + 7 & g_2'(x) &= 2. \end{aligned}$$

Ismételten alkalmazva a parciális integrálás képletét

$$\int f_2'(x) \cdot g_2(x) \, dx = f_2(x) \cdot g_2(x) - \int f_2(x) \cdot g_2'(x) \, dx$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int (2x + 7) \cdot \sin x \, dx &= -(2x + 7) \cdot \cos x + \int 2 \cdot \cos x \, dx = \\ &= -(2x + 7) \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x + c_1, \end{aligned}$$

ahol  $c_1 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Az előbb kapott eredményeket is felhasználva

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 7x - 1) \cdot \cos x \, dx &= \\ (x^2 + 7x - 1) \cdot \sin x - \int (2x + 7) \cdot \sin x \, dx &= \\ = (x^2 + 7x - 1) \cdot \sin x - (-(2x + 7) \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x + c_1) &= \\ = (x^2 + 7x - 1) \cdot \sin x + (2x + 7) \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x - c_1 &= \\ = (x^2 + 7x - 1) \cdot \sin x + (2x + 7) \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x + c & \end{aligned}$$

adódik, ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**58. Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int 3x^2 \cdot \ln x \, dx$$

határozatlan integrált!

**Megoldás:**

A parciális integrálás képletében az  $f'(x) = 3x^2$  és  $g(x) = \ln x$  jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x & g'(x) &= \frac{1}{x} \\ f(x) &= x^3 & f'(x) &= 3x^2. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int 3x^2 \cdot \ln x \, dx &= x^3 \cdot \ln x - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= x^3 \cdot \ln x - \int x^2 \, dx = x^3 \cdot \ln x - \frac{x^3}{3} + c,\end{aligned}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**59. Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \ln x \, dx$$

határozatlan integrált!

**Megoldás:**

A parciális integrálás képletében az  $f'(x) = 1$  és  $g(x) = \ln x$  jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned}g(x) &= \ln x & g'(x) &= \frac{1}{x} \\ f(x) &= x & f'(x) &= 1.\end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c,\end{aligned}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**60. Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (3x^2 + 2x) \cdot \ln x \, dx$$

határozatlan integrált!

**Megoldás:**

A parciális integrálás képletében az  $f'(x) = 3x^2 + 2x$  és  $g(x) = \ln x$  jelöléssel élünk. Ekkor:

$$\begin{aligned}g(x) &= \ln x & g'(x) &= \frac{1}{x} \\ f(x) &= x^3 + x^2 & f'(x) &= 3x^2 + 2x\end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 2x) \cdot \ln x \, dx &= (x^3 + x^2) \cdot \ln x - \int (x^3 + x^2) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= (x^3 + x^2) \cdot \ln x - \int x^2 + x \, dx = \\ &= (x^3 + x^2) \cdot \ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c,\end{aligned}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**61. Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 + 5x + 6} \, dx$$

integrált!

**Megoldás:**

Először szorzattá alakítjuk a tört nevezőjét. Ehhez keressük az  $x^2 + 5x + 6$  polinom gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

adódik, így  $x_1 = -2$ , illetve  $x_2 = -3$ . Ezt felhasználva

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3)$$

adódik. Tehát azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 + 5x + 6} \, dx = \int \frac{2x - 3}{(x + 2) \cdot (x + 3)} \, dx.$$

A fenti törtet felbontjuk parciális törtek összegére:

$$\frac{2x - 3}{(x + 2) \cdot (x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3}.$$

Meghatározzuk az  $A$  és  $B$  együtthatókat. Mindkét oldalt szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2x - 3 = A \cdot (x + 3) + B \cdot (x + 2).$$

Felbontjuk a zárójelet, majd  $x$  hatványai szerint csoportosítjuk a tagokat. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$2x - 3 = x \cdot (A + B) + 3A + 2B.$$

A jobb oldal pontosan akkor egyezik meg a bal oldallal, ha az  $x$  együtthatója és a konstans tag megegyezik a két oldalon, azaz ha teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} 2 &= A + B \\ -3 &= 3A + 2B \end{aligned} \right\}.$$

Az első egyenlet kétszeresét kivonva a második egyenletből  $A = -7$  adódik, amelyet visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy  $B = 9$ . Tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{(x+2) \cdot (x+3)} dx &= \int \frac{-7}{x+2} + \frac{9}{x+3} dx = \\ &= -7 \cdot \ln|x+2| + 9 \cdot \ln|x+3| + c, \end{aligned}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Felhasználva a logaritmus azonosságait

$$\int \frac{2x+3}{(x+2) \cdot (x+3)} dx = \ln \left| \frac{(x+3)^9}{(x+2)^7} \right| + c$$

adódik.

**62. Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{2x-4}{x^3-x} dx$$

integrált!

**Megoldás:**

A nevezőt felírhatjuk elsőfokú polinomok szorzataként, így

$$\int \frac{2x-4}{x \cdot (x^2-1)} dx = \int \frac{2x-4}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)} dx$$

adódik. A törtet bontsuk fel parciális törtekre

$$\frac{2x-4}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Meghatározzuk az  $A$ ,  $B$  és  $C$  együtthatókat. Ehhez először beszorozzuk az előbbi egyenletet a közös nevezővel:

$$2x-4 = A \cdot (x+1) \cdot (x-1) + B \cdot x \cdot (x-1) + C \cdot x \cdot (x+1).$$

A zárójeleket felbontva azt kapjuk, hogy

$$2x - 4 = A \cdot (x^2 - 1) + B \cdot (x^2 - x) + C \cdot (x^2 + x)$$

$$2x - 4 = A \cdot x^2 - A + B \cdot x^2 - B \cdot x + C \cdot x^2 + C \cdot x.$$

A tagokat fokszám szerint csoportosítva

$$2x - 4 = (A + B + C) \cdot x^2 + (-B + C) \cdot x - A$$

adódik.

Két polinom pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő fokszámú tagok együtthatói egyenlőek, így az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A + B + C \\ 2 &= -B + C \\ -4 &= -A \end{aligned} \right\}.$$

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy  $A = 4$ . Ezt behelyettesítve az első és a második egyenletbe a

$$\left. \begin{aligned} -4 &= B + C \\ 2 &= -B + C \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenleteket összeadva  $2C = -2$ , azaz  $C = -1$  adódik. Ezt felhasználva, az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$B - 1 = -4 \quad \Rightarrow \quad B = -3.$$

Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  értékeket behelyettesítve az

$$\frac{2x - 4}{x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

összefüggésbe, majd felhasználva az integrál additív és homogén tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 4}{x \cdot (x^2 - 1)} dx &= \int \frac{2x - 4}{x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)} dx = \\ &= \int \frac{4}{x} - \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} dx = 4 \ln |x| - 3 \ln |x + 1| - \ln |x - 1| + c, \end{aligned}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**63. Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{x + 1}{(x - 4)^2}$$

függvény azon  $F$  primitív függvényét, amelyre  $F(5) = 2$  teljesül!

**Megoldás:**

Első lépésben parciális törtek összegére bontjuk a törtet. A keresett kifejezést

$$\frac{x+1}{(x-4)^2} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$x+1 = A \cdot (x-4) + B.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$x+1 = Ax - 4A + B.$$

A megfelelő fokszámú tagok összehasonlítása után az

$$\left. \begin{array}{l} 1 = A \\ 1 = -4A + B \end{array} \right\}.$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletbe behelyettesítve az  $A$  értékét azt kapjuk, hogy  $B = 5$ . A keresett felbontás tehát:

$$\frac{x+1}{(x-4)^2} = \frac{1}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2}.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx = \int \frac{1}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2} dx = \\ &= \int \frac{1}{x-4} dx + 5 \cdot \int \frac{1}{(x-4)^2} dx = \\ &= \ln|x-4| + 5 \cdot \int (x-4)^{-2} dx = \\ &= \ln|x-4| + 5 \cdot \frac{(x-4)^{-1}}{-1} + c = \\ &= \ln|x-4| - 5 \cdot \frac{1}{x-4} + c = \ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \end{aligned}$$

adódik, ahol  $c \in \mathbb{R}$ . Mivel  $F(5) = 2$ , ezért

$$2 = \ln|5-4| - \frac{5}{5-4} + c \Rightarrow c = 7.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \ln|x - 4| - \frac{5}{x - 4} + 7.$$

64. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 6x + 9}$$

függvény azon  $F$  primitív függvényét, amelyre  $F(4) = 5$  teljesül!

**Megoldás:**

Első lépésben parciális törtek összegeként írjuk fel a törtet. A nevező teljes négyzet, így átalakítható az  $(x - 3)^2$  kifejezéssé. A törtet

$$\frac{x + 2}{(x - 3)^2} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{(x - 3)^2}$$

alakban keressük. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel

$$x + 2 = A \cdot (x - 3) + B$$

adódik. A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$x + 2 = Ax - 3A + B.$$

A megfelelő fokszámú tagok összehasonlítása után az

$$\left. \begin{array}{l} 1 = A \\ 2 = -3A + B \end{array} \right\}.$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletbe behelyettesítve az  $A$  értékét azt kapjuk, hogy  $B = 5$ . A keresett felbontás tehát:

$$\frac{x + 2}{(x - 3)^2} = \frac{1}{x - 3} + \frac{5}{(x - 3)^2}.$$

Ezt felhasználva az integrál additív és homogén tulajdonsága alapján

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x + 2}{(x - 3)^2} dx = \int \frac{1}{x - 3} + \frac{5}{(x - 3)^2} dx = \\ &= \int \frac{1}{x - 3} dx + \int \frac{5}{(x - 3)^2} dx = \\ &= \int \frac{1}{x - 3} dx + 5 \cdot \int (x - 3)^{-2} dx = \\ &= \ln|x - 3| + 5 \cdot \frac{(x - 3)^{-1}}{-1} + c = \ln|x - 3| - \frac{5}{x - 3} + c \end{aligned}$$

adódik, ahol  $c \in \mathbb{R}$ . Mivel  $F(4) = 5$ , ezért

$$5 = \ln|4 - 3| - \frac{5}{4 - 3} + c \Rightarrow c = 10.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \ln|x - 3| - \frac{5}{x - 3} + 10.$$

**65. Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{2x + 2}{x^2 + 1} dx$$

integrált!

**Megoldás:**

Mivel

$$\frac{2x + 2}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2 + 1},$$

ezért

$$\int \frac{2x + 2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2 + 1} dx = \ln|x^2 + 1| + 2\arctg x + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**66. Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

függvény azon  $F$  primitív függvényét, amelyre  $F(2) = 10$  teljesül!

**Megoldás:**

Mivel

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$

ezért

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx = \int \frac{x + 1}{(x + 1)^3} dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2} dx = \\ &= \int (x + 1)^{-2} dx = \frac{(x + 1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x + 1} + c, \end{aligned}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Mivel  $F(0) = 10$ , ezért

$$10 = -\frac{1}{3} + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{31}{3}.$$

Tehát a keresett primitív függvény

$$F(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{31}{3}.$$

## 9. Tétel: Riemann integrál és alkalmazása

1. Mit nevezünk beosztásnak? Mikor ekvidisztáns egy beosztás?
  2. Mit nevezünk alsó integrálközelítő összegnek és felső integrálközelítő összegnek?
  3. Mit nevezünk alsó integrálnak és felső integrálnak?
  4. Mikor mondjuk azt, hogy egy függvény Riemann-integrálható?
  5. Mi a Riemann-integrál geometriai jelentése?
  6. Mit jelent az, hogy a Riemann-integrál additív tulajdonságú?
  7. Mit jelent az, hogy a Riemann-integrál homogén tulajdonságú?
  8. Mit jelent az, hogy a Riemann-integrál intervallum additív tulajdonságú?
  9. Mit jelent az, hogy a Riemann-integrál monoton tulajdonságú?
  10. Mit mond ki a Riemann-integrál első középérték tétele?
  11. Mit mond ki a Riemann-integrál második középérték tétele?
  12. Mit állít a Newton-Leibniz tétel?
  13. Mire és hogyan alkalmazható a trapéz formula?
  14. Az  $f$  függvény grafikonját az  $[a; b]$  intervallumon megforgatjuk az  $x$  tengely körül. Hogyan számolható ki a keletkezett forgástest térfogata?
- 9.1. **Definíció.** Legyenek  $a$  és  $b$  olyan valós számok, melyekre  $a < b$  teljesül és tekintsük az  $[a; b]$  intervallumot. Legyen

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Ekkor a

$$d = \{[x_0; x_1]; [x_1; x_2]; \dots; [x_{n-1}; x_n]\}$$

halmazt az  $[a; b]$  intervallum egy *beosztásának* vagy *felosztásának* nevezzük.

A beosztás *finomsága* az osztópontok által keletkezett részintervallumok hosszának maximuma.

Azt mondjuk, hogy a  $d$  beosztás *ekvidisztáns*, ha

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1},$$

azaz a  $d$  halmazban szereplő intervallumok egyenlő hosszúságúak.

Az  $x_0; x_1; \dots; x_n$  valós számokat a beosztás *osztópontjainak* mondjuk.

Az  $[a; b]$  intervallum összes beosztásainak halmazát  $\mathcal{D}[a; b]$  módon jelöljük.

**9.2. Definíció.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény és

$$d = \{[x_{i-1}; x_i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

az  $[a; b]$  intervallum egy beosztása.

Vezessük be az

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

és az

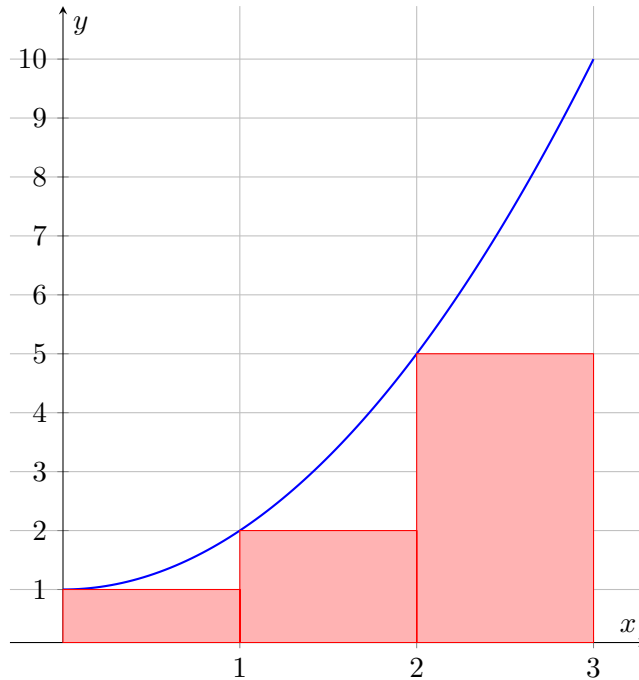
$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

jelöléseket!

Az

$$s(f; d) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

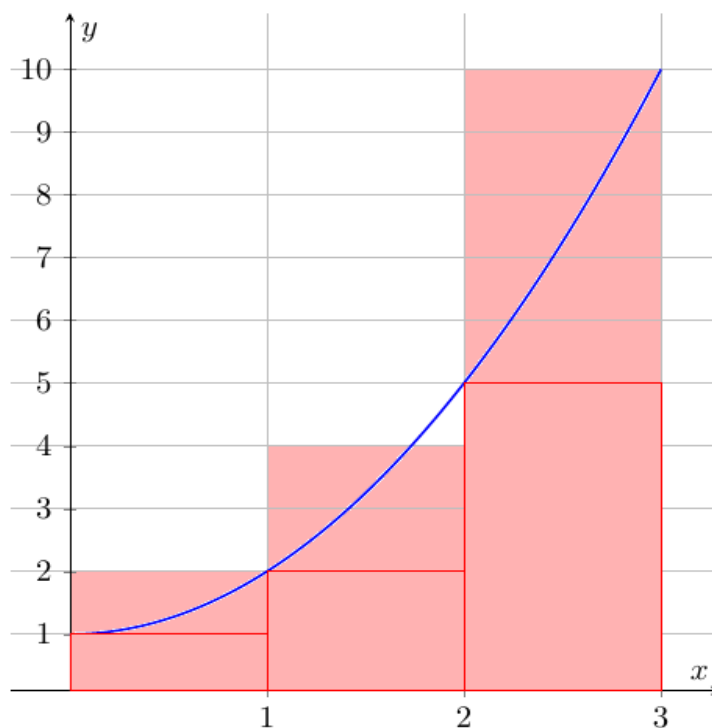
összeget az  $f$  függvény  $d$  beosztásához tartozó *alsó integrálközelítő összegének* nevezzük.



Az

$$S(f; d) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

összeget az  $f$  függvény  $d$  beosztásához tartozó *felső integrálközelítő összegének* mondjuk.



**9.3. Definíció.** Az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának pontos felső korlátját az  $f$  függvény *alsó integráljának* nevezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{d \in \mathcal{D}[a; b]} s(f; d).$$

Az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény felső integrálközelítő összegei halmazának pontos alsó korlátját az  $f$  függvény *felső integráljának* nevezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{d \in \mathcal{D}[a; b]} S(f; d).$$

**9.4. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *Riemann-integrálható*, ha

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\bar{a}} f(x) dx.$$

Közös értéküket az  $f$  függvény *Riemann-integráljának* nevezzük. Jele:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

**9.5. Megjegyzés.** Nem-negatív értékű, Riemann-integrálható függvény Riemann-integráljának geometriai jelentése a függvény grafikonjának az  $x$  tengellyel bezárt területe.

**9.6. Tétel.** Ha  $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvények, akkor

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

azaz a Riemann-integrál additív tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy összeget tagonként integrálhatunk.

**9.7. Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx,$$

azaz a Riemann-integrál homogén tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy a konstans szorzó kiemelhető az integrál elé.

**9.8. Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény és  $c \in [a; b]$ , akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

azaz a Riemann-integrál intervallum additív tulajdonságú.

**9.9. Tétel.** Ha  $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  olyan Riemann-integrálható függvények, melyekre  $g(x) \leq f(x)$  teljesül, akkor

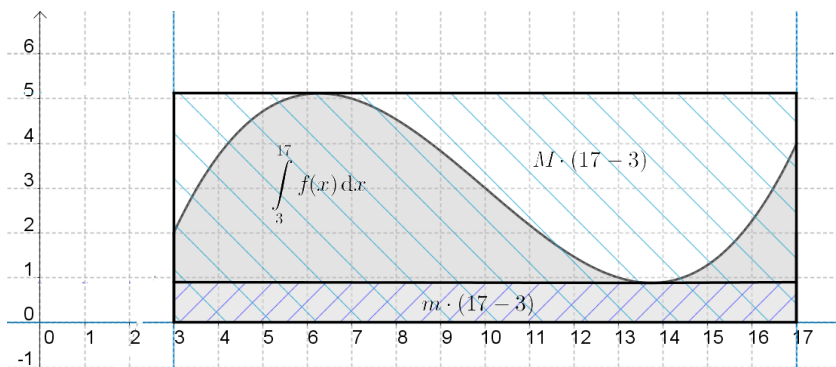
$$\int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx,$$

azaz a Riemann-integrál monoton tulajdonságú.

**9.10. Tétel.** (Az integrálszámítás első középérték tétele.)

Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény, akkor léteznek olyan  $m$  és  $M$  valós számok, hogy

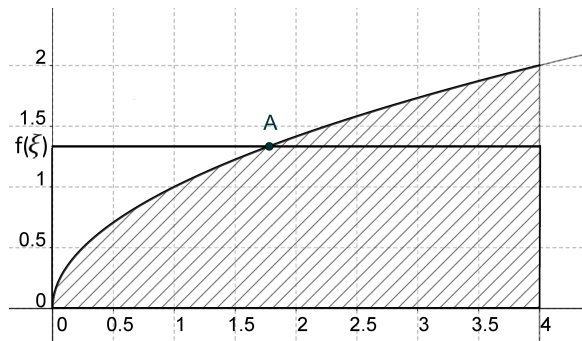
$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M \cdot (b - a).$$



**9.11. Tétel.** (Az integrálszámítás második középérték tétele.)

Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, akkor létezik olyan  $\xi$  valós szám, hogy

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$



9.12. **Tétel.** (Newton-Leibniz tétel.)

Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény az  $[a; b]$  intervallumon és differenciálható az  $]a; b[$  intervallumon. Legyen továbbá  $F$  az  $f$  egy primitív függvénye.

Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

9.13. **Definíció.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a).$$

Tekintsük azt a trapézot, amelyet az  $(a; f(a))$ ,  $(b; f(b))$ ,  $(a; 0)$  és  $(b; 0)$  csúcsok határoznak meg. Ennek a trapéznak a területe elemi úton kiszámolható az előbbi képlettel.

9.14. **Tétel.** Ha az  $f$  függvény grafikonját az  $[a; b]$  intervallumon megforgatjuk az  $x$  tengely körül, akkor a keletkezett forgástest térfogata:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

### Kidolgozott feladatok

67. **Feladat.** Tekintsük az  $f: [1; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{6}{x}$  függvényt! Az  $[1; 6]$  intervallumot három egyenlő részre osztjuk.

- Adjuk meg az  $f$  függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeget!
- Adjuk meg az  $f$  függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeget!
- Vázoljuk fel az  $f$  függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményeket!

### Megoldás:

a) A keletkezett osztópontok halmaza:  $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

A megfelelő részintervallumok halmaza:  $d = \{[1; 2]; [2; 3]; [3; 4]; [4; 5]; [5; 6]\}$ .

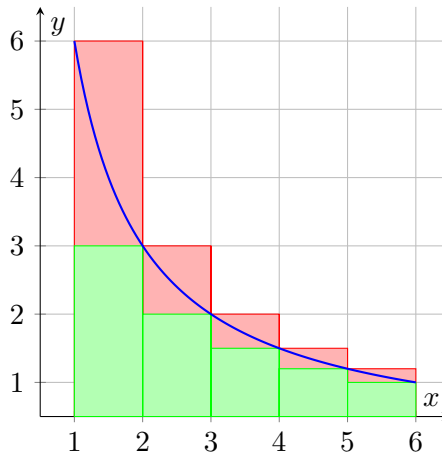
Az alsó integrálközelítő összeg:

$$s(f; d) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot \frac{6}{5} + 1 \cdot 1 = 8,7.$$

b) A felső integrálközelítő összeg:

$$S(f; d) = 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot \frac{6}{5} = 13,7.$$

c) A függvény grafikonja, valamint az alsó és felső integrálközelítő összegek:



68. **Feladat.** Számoljuk ki az  $f(x) = \cos(2x)$  függvény Riemann-integrálját a  $[0; \pi]$  intervallumon a Newton-Leibniz tétel felhasználásával!

**Megoldás:**

Mivel az  $f(x) = \cos(2x)$  függvény egy primitív függvénye  $F(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$ , ezért

$$\int_0^{\pi} \cos(2x) dx = \left[ \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\sin 2\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2} = 0.$$

69. **Feladat.** Számoljuk ki az  $f(x) = x^3$  függvény Riemann-integrálját a  $[0; 4]$  intervallumon a Newton-Leibniz tétel felhasználásával!

**Megoldás:**

Mivel az  $f(x) = x^3$  függvény egy primitív függvénye  $F(x) = \frac{x^4}{4}$ , ezért

$$\int_0^4 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \frac{4^4}{4} = 64.$$

70. **Feladat.** Határozzuk meg az  $\int_{-1}^2 x^2 - 4x + 1 dx$  integrál értékét!

**Megoldás:**

Meghatározunk egy primitív függvényt, majd alkalmazzuk a Newton-Leibniz tételt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x^2 - 4x + 1 dx &= \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x \right]_{-1}^2 = \\ &= \left( \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 2 \right) - \left( \frac{(-1)^3}{3} - 2 \cdot (-1)^2 + (-1) \right) = \\ &= \left( \frac{8}{3} - 8 + 2 \right) - \left( -\frac{1}{3} - 2 - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

## 10. Tétel: Halmazok, valós számok

1. Mit értünk két halmaz unióján?
2. Mit értünk két halmaz metszetén?
3. Mit értünk két halmaz különbségén?
4. Mit értünk két halmaz komplementerén?
5. Mit értünk két halmaz Descartes-szorzatán?
6. Mikor nevezünk egy halmazt felülről korlátosnak?
7. Mikor nevezünk egy halmazt alulról korlátosnak?
8. Mikor nevezünk egy halmazt korlátosnak?
9. Mit értünk egy halmaz pontos alsó korlátján?
10. Mit értünk egy halmaz pontos felső korlátján?

10.1. **Definíció.** Legyen  $H \neq \emptyset$  (alaphalmaz) és  $A, B \subset H$ . Az  $A$  és  $B$  halmazok *unióján* azt az  $A \cup B$ -vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei legalább az egyik halmaznak elemei, azaz

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

10.2. **Definíció.** Az  $A$  és  $B$  halmazok *metszetén* azt az  $A \cap B$ -vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei mindkét halmaznak elemei, azaz

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

10.3. **Definíció.** Az  $A$  *különbség*  $B$  halmazon azt az  $A \setminus B$ -vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei  $A$ -nak elemei, de  $B$ -nek nem elemei, azaz

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

10.4. **Definíció.** Az  $A$  halmaz *komplementerén* azt az  $A^c$ -vel vagy  $\overline{A}$ -val jelölt halmazt értjük, melynek elemei az  $A$  halmaznak nem elemei, de az alaphalmaznak elemei.

10.5. **Definíció.** Az  $A$  és  $B$  halmaz *Descartes-szorzatán* azt az  $A \times B$ -vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei olyan rendezett elempárokból állnak, melyek első tagja az  $A$ , második tagja a  $B$  halmazból való, azaz

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Az  $A$  halmaz önmagával vett Descartes-szorzatát szokás  $A^2$ -el is jelölni:

$$A^2 = A \times A.$$

**10.6. Definíció.** Az  $A \subset \mathbb{R}$  halmaz *felülről korlátos*, ha létezik olyan  $K$  valós szám, amely nagyobb vagy egyenlő minden  $A$ -beli elemnél. Ekkor a  $K$ -t az  $A$  halmaz egy *felső korlátjának* mondjuk.

**10.7. Definíció.** Az  $A \subset \mathbb{R}$  halmaz *alulról korlátos*, ha létezik olyan  $k$  valós szám, amely kisebb vagy egyenlő minden  $A$ -beli elemnél. Ekkor a  $k$ -t az  $A$  halmaz egy *alsó korlátjának* mondjuk.

**10.8. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $A \subset \mathbb{R}$  halmaz *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos.

**10.9. Definíció.** Ha az  $A$  halmaz felülről korlátos, akkor az  $A$  felső korlátainak legkisebbikét az  $A$  *pontos felső korlátjának* vagy *szuprémumának* nevezzük, amit úgy jelölünk, hogy  $\sup A$ . Ha a pontos felső korlát eleme is a halmaznak, azaz  $\sup A \in A$ , akkor azt *maximumnak* mondjuk. Jele:  $\max A$ .

**10.10. Definíció.** Ha az  $A$  halmaz alulról korlátos, akkor az  $A$  alsó korlátainak legnagyobbikát az  $A$  *pontos alsó korlátjának* vagy *infimumának* nevezzük, amit úgy jelölünk, hogy  $\inf A$ . Ha a pontos alsó korlát eleme is a halmaznak, azaz  $\inf A \in A$ , akkor azt *minimumnak* mondjuk. Jele:  $\min A$ .

**Kidolgozott feladatok**

71. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{1; 2; 5; 7\}, \quad B = \{2; 4; 5; 8\}$$

halmazokat! Adjuk meg az  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  halmazokat!

**Megoldás:**

A keresett halmazok:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}; & A \cap B &= \{2; 5\}; \\ A \setminus B &= \{1; 7\}; & B \setminus A &= \{4; 8\}. \end{aligned}$$

72. **Feladat.** Adjuk meg az  $A = \{1; 2\}$  és a  $B = \{2; 3\}$  halmazok Descartes-szorzatát!

**Megoldás:**

A keresett halmaz:

$$A \times B = \{(1; 2); (1; 3); (2; 2); (2; 3)\}.$$

73. **Feladat.** Korlátos-e az  $A = [1; 5[$  halmaz? Határozzuk meg az infimumát, szuprémumát, minimumát, maximumát!

**Megoldás:**

A halmaz

- pontos alsó korlátja:  $\inf A = 1$ ;
- pontos felső korlátja:  $\sup A = 5$ ;
- minimuma:  $\min A = 1$ ;
- maximuma: nem létezik;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

74. **Feladat.** Korlátos-e az  $A = [-2; \infty[$  halmaz? Határozzuk meg az infimumát, szuprémumát, minimumát, maximumát!

**Megoldás:**

A halmaz

- pontos alsó korlátja:  $\inf A = -2$ ;
- pontos felső korlátja: nem létezik;
- minimuma:  $\min A = -2$ ;

- maximuma: nem létezik;
- nem korlátos, mert felülről nem korlátos.

75. **Feladat.** Ha az  $A$  halmaz elemeinek száma 4 és  $B$  halmaz elemeinek száma 12, akkor hány eleme van az  $A \times B$  Descartes-szorzatnak?

**Megoldás:**

A Descartes-szorzat elemeinek száma:  $4 \cdot 12 = 48$ .

## 11. Tétel: Komplex számok

1. Komplex szám algebrai alakja, valós része, képzetes része.
2. Mit nevezünk képzetes egységnek?
3. Mivel egyenlő  $i^2$ ?
4. Komplex szám szöge (argumentuma).
5. Komplex szám konjugáltja.
6. Komplex szám hossza.
7. Hogyan és milyen műveleteket lehet végezni algebrai alakban adott komplex számokkal?
8. Komplex szám trigonometrikus alakja.
9. Hogyan lehet összeszorozni két trigonometrikus alakban megadott komplex számot?
10. Hogyan lehet elosztani két trigonometrikus alakban megadott komplex számot?
11. Hogyan lehet hatványozni egy trigonometrikus alakban megadott komplex számot?
12. Hány darab  $n$ -edik gyöke van egy komplex számnak és ezek hogyan számolhatók ki?
13. Mit nevezünk egységgyöknek?
14. Mit értünk egy komplex szám exponenciális alakján?

11.1. **Definíció.** A  $z = (a; b) \in \mathbb{C}$  komplex szám  $z = a + b \cdot i$  alakját a komplex szám *algebrai alakjának* nevezzük, ahol  $a$  a komplex szám *valós része*,  $b$  a komplex szám *képzetes része*. Jelölései:  $a = \operatorname{Re}(z)$ ,  $b = \operatorname{Im}(z)$ .

11.2. **Definíció.** *Képzetes egységnek* mondjuk az  $i = (1; 0)$  komplex számot.

11.3. **Tétel.** Az  $i$  képzetes egységre teljesül, hogy  $i^2 = -1$ .

11.4. **Definíció.** A  $z = a + b \cdot i$  komplex számnak a valós tengely pozitív félegyenesével bezárt szögét a komplex szám *argumentumának* vagy *szögének* hívjuk.

11.5. **Definíció.** A  $z = a + b \cdot i$  komplex szám *konjugáltja* a  $\bar{z} = a - b \cdot i$  komplex szám.

11.6. **Definíció.** A  $z = a + b \cdot i$  komplex szám *hossza* a  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  valós szám.

11.7. **Megjegyzés.** Műveletek algebrai alakban megadott komplex számokkal:

- két algebrai alakban megadott komplex számot úgy adunk össze, hogy a valós részt a valós résszel, a képzetes részt a képzetes résszel összeadjuk;
- két algebrai alakban megadott komplex számot úgy szorzunk össze, hogy minden tagot minden taggal összeszorozunk;
- két algebrai alakban megadott komplex számot úgy osztunk el, hogy a törtet bővítjük a nevező konjugáltjával, majd a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel összeszorozzuk.

11.8. **Definíció.** A  $z = a + b \cdot i$  komplex szám *trigonometrikus alakján* a

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

komplex számot értjük, ahol  $\varphi$  a komplex szám argumentuma.

11.9. **Tétel.** A

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$$

és a

$$z_2 = |z_2| \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$$

komplex számok szorzata a

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

komplex szám.

11.10. **Tétel.** A

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$$

és a

$$z_2 = |z_2| \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$$

komplex számok hányadosa a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

komplex szám.

11.11. **Tétel.** A  $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  komplex szám  $n$ -edik hatványa a

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

komplex szám.

11.12. **Tétel.** Minden nullától különböző komplex számnak  $n$  darab  $n$ -edik gyöke van, melyek

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left( \cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right), \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

alakban állnak elő.

11.13. **Definíció.** A  $z = 1$  komplex szám  $n$ -edik gyökeit  $n$ -edik egységgyököknek nevezzük.

11.14. **Definíció.** Minden komplex szám felírható

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

alakban, melyet a komplex szám *exponenciális alakjának* vagy *Euler-féle alakjának* nevezünk.

**Kidolgozott feladatok**

**76. Feladat.** Oldjuk meg a komplex számok halmazán a  $z^2 + 4 = 0$  egyenletet!

**Megoldás:**

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy  $z^2 = -4$ , amiből

$$z = \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot (\pm i) = \pm 2i.$$

következik.

**77. Feladat.** Tekintsük a  $z^2 - 6z + 10 = 0$  komplex számok halmazán értelmezett másodfokú egyenletet!

- Határozzuk meg az egyenlet gyökeit!
- Mutassuk meg, hogy az egyenlet megoldásai egymás konjugáltjai!
- Adjuk meg a gyökök összegét!
- Adjuk meg a gyökök szorzatát!
- Határozzuk meg a gyökök összegének valós részét és képzetes részét!
- Határozzuk meg a gyökök szorzatának valós részét és képzetes részét!
- Adjuk meg az egyenlet megoldásainak trigonometrikus alakját!

**Megoldás:**

- a) A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

adódik, így  $z_1 = 3 - i$ ,  $z_2 = 3 + i$ .

- b) Mivel  $z_2 = 3 + i = \overline{3 - i} = \bar{z}_1$ , ezért valóban a két megoldás egymás konjugáltja.

- c) A gyökök összege:

$$z_1 + z_2 = (3 - i) + (3 + i) = 6.$$

- d) A gyökök szorzata:

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - i) \cdot (3 + i) = 9 - i^2 = 10.$$

- e) A gyökök összegének valós része:  $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 6$ . A gyökök összegének képzetes része:  $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 0$ .

f) A gyökök szorzatának valós része:  $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = 10$ . A gyökök szorzatának képzetes része:  $\operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2) = 0$ .

g) A trigonometrikus alakok felírásához meghatározzuk a komplex számok hosszát és argumentumát. A komplex számok hossza:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \quad \text{és} \quad |z_2| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

A  $z_1$  komplex száma argumentuma:  $\varphi_1 = 225^\circ$ . A  $z_2$  komplex szám argumentuma:  $\varphi_2 = 135^\circ$ . A trigonometrikus alakok:

$$z_1 = \sqrt{10} \cdot (\cos 225^\circ + i \cdot \sin 225^\circ),$$

illetve

$$z_2 = \sqrt{10} \cdot (\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ).$$

**78. Feladat.** Adjuk meg azokat a  $z$  komplex számokat, amelyekre teljesül a

$$z + |z| = 2 + i$$

egyenlet!

**Megoldás:**

Legyen  $z = a + b \cdot i$ . Ekkor  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , így

$$a + b \cdot i + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + i.$$

Tehát egyrészt a valós részek egyenlőségéből:

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2$$

következik, másrészt a képzetes részek egyenlőségéből  $b = 1$  adódik. Mivel  $b = 1$ , ezért

$$a + \sqrt{a^2 + 1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + 1} = 2 - a.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$a^2 + 1 = 4 - 4a + a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{4}.$$

Tehát a keresett komplex szám:  $z = \frac{3}{4} + i$ .

**79. Feladat.** Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z + i \cdot z = 2 + 3i$$

egyenletet! Határozzuk meg a megoldásként adódó komplex szám hosszát!

**Megoldás:**

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$z \cdot (1 + i) = 2 + 3i,$$

amiből  $z$ -t kifejezve

$$z = \frac{2 + 3i}{1 + i} = \frac{(2 + 3i) \cdot (1 - i)}{(1 + i) \cdot (1 - i)} = \frac{2 - 2i + 3i - 3i^2}{1 - i^2} = \frac{5 + i}{2}.$$

adódik. Tehát a keresett komplex szám  $z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$ , amelynek hossza

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

**80. Feladat.** Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$(4 - 2i) \cdot z = 3z + 2 - 5i$$

egyenletet!

**Megoldás:**

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$(4 - 2i) \cdot z - 3z = 2 - 5i \quad \Rightarrow \quad (1 - 2i) \cdot z = 2 - 5i,$$

amiből  $z$ -t kifejezve

$$z = \frac{2 - 5i}{1 - 2i} = \frac{2 - 5i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{2 - i - 10i^2}{1 - 4i^2} = \frac{12 - i}{5}$$

adódik. Tehát a keresett komplex szám:  $z = \frac{12}{5} - \frac{1}{5}i$ .

## 12. Tétel: Mátrixok

1. Mit nevezünk mátrixnak?
2. Mikor kvadratikus egy mátrix?
3. Zérusmátrix fogalma.
4. Egységmátrix fogalma.
5. Diagonálmátrix fogalma.
6. Mit értünk egy mátrix transzponáltján?
7. Mit nevezünk szimmetrikus mátrixnak?
8. Felső háromszög alakú mátrix fogalma.
9. Alsó háromszög alakú mátrix fogalma.
10. Trapéz alakú mátrix fogalma.
11. Mit értünk két mátrix összegén?
12. Mit értünk egy mátrix számszorosán?
13. Mit értünk két mátrix szorzatán?
14. Hogyan számolható ki egy  $2 \times 2$ -es mátrix determinánsa?
15. Mire és hogyan alkalmazható a Sarrus-szabály?
16. Mikor mondjuk azt, hogy egy mátrix reguláris?
17. Mikor mondjuk azt, hogy egy mátrix szinguláris?
18. Determináns tulajdonságai.
19. Mikor mondjuk azt, hogy egy mátrix invertálható.
20. Ha egy mátrix invertálható, akkor milyen kapcsolat van az inverzmátrix és az eredeti mátrix determinánsa között?
21. Adjunk feltételt egy mátrix invertálhatóságára vonatkozóan!
22. Hogyan lehet meghatározni egy mátrix inverzét aldeterminánsokkal?

**12.1. Definíció.** Tegyük fel, hogy  $m$  és  $n$  adott pozitív egész számok! Legyenek  $a_{ij}$  valós vagy komplex számok minden  $i \in \{1; 2; \dots; m\}$  és minden  $j \in \{1; 2; \dots; n\}$  esetén! Az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

táblázatot  $m \times n$ -es vagy  $m \times n$  típusú mátrixnak nevezzük. A mátrixokat latin nagybetűkkel, a mátrix elemeit két indexű latin kisbetűkkel szokás jelölni. Az első index az úgynevezett *sorindex*, a második index az *oszlopindex*.

**12.2. Definíció.** Egy mátrixot *négyzetesnek*, vagy más szóval *kvadrátikusnak* nevezünk, ha a sorainak és oszlopainak száma megegyezik. Egy négyzetes mátrix sorainak (oszlopainak) a számát a mátrix *rendjének* nevezzük.

**12.3. Definíció.** *Zérusmátrixoknak* hívjuk az olyan mátrixokat, amelyeknek minden eleme nulla .

**12.4. Definíció.** Az olyan  $n \times n$  típusú mátrixot, melynek főátlóbeli elemei egységes és az összes többi eleme nulla, *n-edrendű egységmátrixnak* nevezzük.

**12.5. Definíció.** Az olyan négyzetes mátrixot, amelynek főátlóján kívül minden eleme zérus, *diagonális mátrixnak* vagy *diagonálmátrixnak* nevezzük .

**12.6. Definíció.** Egy mátrix *transzponáltján* a sorainak és oszlopainak felcserélésével kapott mátrixot értjük.

**12.7. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy  $n \times n$ -es mátrix *szimmetrikus*, ha teljesül, hogy  $A = A^T$ .

**12.8. Definíció.** Ha egy négyzetes mátrix főátló alatti elemei nullák, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix *felső háromszög alakú* vagy *felső trianguláris*.

**12.9. Definíció.** Egy mátrix *alsó háromszög alakú* vagy *alsó trianguláris*, ha a főátló feletti elemei nullák.

**12.10. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy mátrix *trapéz alakú* vagy *lépcsős alakú*, ha  $a_{ij} = 0$  minden  $i > j$  esetén.

**12.11. Definíció.** Két azonos típusú mátrix *összegén* azt a mátrixot értjük, melynek elemei a mátrixok megfelelő helyen lévő elemeinek összege.

**12.12. Megjegyzés.** Az összeadás csak akkor végezhető el, ha a két mátrix azonos típusú.

**12.13. Definíció.** Egy mátrix *számszorosán* (*skalárszorosán*) azt a mátrixot értjük, melyet úgy kapunk meg, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal.

**12.14. Definíció.** Az  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times k}$  és a  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{k \times n}$  mátrixok *szorzatán* azt a  $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$  mátrixot értjük, amelynek  $(i; j)$  indexű eleme az  $A$  mátrix  $i$ -edik sora és a  $B$  mátrix  $j$ -edik oszlopa megfelelő elemeinek szorzatösszege.

12.15. **Megjegyzés.** A szorzás csak akkor végezhető el, ha az első mátrix oszlopainak a száma megegyezik a második mátrix sorainak a számával.

12.16. **Megjegyzés.** A  $2 \times 2$ -es mátrix determinánisa

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

12.17. **Megjegyzés.** Egy harmadrendű mátrix determinánst kiszámolhatjuk az úgynevezett Sarrus-szabály alkalmazásával is. Ilyenkor a mátrix első két oszlopát a mátrix jobb oldalához hozzáírjuk, majd a főátlóban és a vele párhuzamosan, tőle jobbra lévő két másik (teljes) átlóban lévő elemeket összeszorozzuk, ezen szorzatokat összeadjuk, majd a mellékátló és a vele párhuzamos, tőle jobbra lévő két másik (teljes) átló elemeit összeszorozzuk, végül ezen szorzatokat kivonjuk az előző összegből.

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{11}$	$a_{12}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{21}$	$a_{22}$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{31}$	$a_{32}$

Tehát

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}).$$

Fontos megjegyezni azt, hogy a Sarrus-szabály csak  $3 \times 3$ -as mátrix determinánst kiszámítására alkalmazható. Hasonló számolási szabály magasabb rendű determinánssokra nem létezik.

12.18. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy mátrix *reguláris*, ha a determinánsa nem zérus.

12.19. **Definíció.** Egy mátrix *szinguláris*, ha nem reguláris, azaz ha a determinánsa nulla.

12.20. **Tétel.** (A determináns tulajdonságai)

1. Ha egy mátrix két sorát felcseréljük, akkor a determinánsának értéke a  $-1$ -szeresére változik.
2. Ha egy mátrix egyik sorának minden elemét megszorozzuk a  $\lambda$  valós számmal, akkor a determináns értéke  $\lambda$ -szorosára változik.

3. Ha egy mátrix egy sorának minden eleme nulla, akkor a determináns értéke 0.
4. Ha egy mátrix egy sorának valahányszorosát hozzáadjuk egy másik sorához, akkor a determinánsának értéke nem változik.
5. Ha egy mátrix két sora megegyezik, akkor a determinánsa 0.
6. Felső háromszög alakú mátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.
7. Alsó háromszög alakú mátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.
8. Egy mátrixnak és a transzponáltjának a determinánsa megegyezik.
9. Két négyzetes mátrix szorzatának determinánsa megegyezik a tényező mátrixok determinánsainak szorzatával.

12.21. **Definíció.** Az  $A$  négyzetes mátrixot *invertálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan  $B$  négyzetes mátrix, melyre  $A \cdot B = B \cdot A = E_n$  teljesül, ahol  $E_n$  az  $n$ -edrendű egységmátrix. Ilyenkor a  $B$  mátrixot az  $A$  mátrix *inverzének* hívjuk. Jelölése:  $A^{-1}$ .

12.22. **Tétel.** Ha az  $A$  mátrix invertálható, akkor

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

12.23. **Tétel.** Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla.

12.24. **Tétel.** (mátrix inverzének meghatározása determinánsokkal)

Egy invertálható mátrix inverzét meghatározhatjuk úgy, hogy a mátrix determinánsának reciprokával megszorozzuk azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk meg, hogy képezzük az eredeti mátrix elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltját. Ha az  $A$  mátrix invertálható, az inverzének  $b_{ij}$  eleme úgy számolható ki, hogy

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot A_{ji}}{\det A},$$

ahol  $A_{ji}$  egy minormátrix, vagyis az a mátrix, amelyet az  $A$  mátrixból úgy kapunk meg, hogy annak  $j$ -edik sorát és  $i$ -edik oszlopát töröljük.

**Kidolgozott feladatok**

81. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixot

- Számoljuk ki  $A$  determinánsát!
- Invertálható-e a mátrix?
- Ha igen, számoljuk ki az inverzét!
- Ellenőrizzük a számolásunkat!

**Megoldás:**

- a) Az  $A$  mátrix determinánsa

$$\det A = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 3.$$

- b) Mivel  $\det A \neq 0$ , ezért invertálható.

- c) Az  $A$  mátrix inverze

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- d) Mivel

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & -1 \\ A \cdot A^{-1} & & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array},$$

ezért azt kaptuk, hogy

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát  $A \cdot A^{-1}$  a másodrendű egységmátrix, ezért a számolásunk helyes.

82. **Feladat.** Legyen  $A$  egy  $3 \times 2$ -es mátrix, amelynek  $a_{ij}$  elemeire teljesül, hogy  $a_{ij} = (-1)^{i+j}$  minden  $i \in \{1; 2; 3\}$  és  $j \in \{1; 2\}$  esetén! Legyen továbbá  $B$  egy  $2 \times 3$ -as mátrix, amelynek  $b_{ij}$  elemeire teljesül, hogy  $b_{ij} = 2^{i+j}$  minden  $i \in \{1; 2\}$  és  $j \in \{1; 2; 3\}$  esetén!

- Adjuk meg az  $A$  mátrixot!
- Adjuk meg a  $B$  mátrixot!
- Határozzuk meg az  $A$  mátrix transzponáltját!
- Határozzuk meg a  $B$  mátrix transzponáltját!
- Szimmetrikus-e az  $A$  mátrix?
- Szimmetrikus-e a  $B$  mátrix?
- Számoljuk ki az  $A^T + B$  mátrixot!
- Számoljuk ki az  $(A^T + B) \cdot B$  mátrixot!
- Adjuk meg az  $(A^T + B) \cdot B$  mátrix determinánsát!
- Reguláris vagy szinguláris az  $(A^T + B) \cdot B$  mátrix?
- Invertálható-e az  $(A^T + B) \cdot B$  mátrix?
- Határozzuk meg a  $B \cdot (A^T + B)$  mátrixot!
- Mennyi a  $B \cdot (A^T + B)$  mátrix determinánsa?

**Megoldás:**

- a) Az  $A$  mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- b) A  $B$  mátrix:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}.$$

- c) Az  $A$  mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- d) A  $B$  mátrix transzponáltja:

$$B^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}.$$

e) Az  $A$  mátrix nem szimmetrikus, mert  $A^T \neq A$ .

f) A  $B$  mátrix nem szimmetrikus, mert  $B^T \neq B$ .

g) Az  $A^T + B$  mátrix:

$$A^T + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 17 \\ 7 & 17 & 31 \end{pmatrix}.$$

h) Mivel

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & -1 \\ (A^T + B) \cdot B & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline 5 & 7 & 17 & 15 & -15 \\ 7 & 17 & 31 & 21 & -21 \end{array},$$

ezért azt kaptuk, hogy

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & -15 \\ 21 & -21 \end{pmatrix}.$$

i) Az  $(A^T + B) \cdot B$  mátrix determinánása:

$$\det((A^T + B) \cdot B) = 15 \cdot (-21) - (-15) \cdot 21 = 0.$$

j) A mátrix szinguláris, mert a determinánása 0.

k) A mátrix nem invertálható, mert a determinánása 0.

l) Mivel

$$\begin{array}{c|ccc} & 5 & 7 & 17 \\ B \cdot (A^T + B) & 7 & 17 & 31 \\ \hline 1 & -1 & -2 & -10 & -14 \\ -1 & 1 & 2 & 10 & 14 \\ 1 & -1 & -2 & -10 & -14 \end{array},$$

ezért a  $B \cdot (A^T + B)$  mátrix

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -10 & -14 \\ 2 & 10 & 14 \\ -2 & -10 & -14 \end{pmatrix}.$$

m) A  $B \cdot (A^T + B)$  mátrix determinánsa 0, mert van két azonos sora.

### 13. Tétel: Lineáris egyenletrendszerek

1. Mit nevezünk lineáris egyenletrendszernek?
2. Mikor mondjuk azt, hogy egy lineáris egyenletrendszer homogén, és mikor mondjuk azt, hogy inhomogén?
3. Mikor mondjuk azt, hogy egy lineáris egyenletrendszer megoldható, és mikor mondjuk azt, hogy ellentmondásos?
4. Mikor nevezünk egy lineáris egyenletrendszert határozottnak, és mikor nevezünk határozatlannak?
5. Mit értünk egy lineáris egyenletrendszer alapmátrixán és kibővített mátrixán?
6. Mit értünk egy lineáris egyenletrendszer mátrixos alakján?
7. Mit mond ki a Kronecker-Capelli tétel?
8. Mik azok a műveletek, amelyek nem változtatják meg egy lineáris egyenletrendszer megoldását?
9. Mit nevezünk Gauss-eliminációnak?
10. Hogyan alkalmazható a Cramer-szabály?
11. Mikor alkalmazható a Cramer-szabály?

13.1. **Definíció.** Legyenek  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) és  $b_1, \dots, b_m$  adott valós számok. Ekkor az

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert *lineáris egyenletrendszernek* nevezzük. Az  $a_{ij}$  valós számokat az egyenletrendszer *együtthatóinak*, az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  számokat az egyenletrendszer *ismeretlenekének* hívjuk.

13.2. **Definíció.** Ha az egyenletrendszer jobb oldalán szereplő minden szám 0 (azaz  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ ), akkor azt mondjuk, hogy az egyenletrendszer *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

13.3. **Definíció.** Ha létezik megoldása az egyenletrendszernek, akkor azt mondjuk, hogy *megoldható*, ellenkező esetben azt, hogy *ellentmondásos*.

13.4. **Definíció.** Ha a megoldás egyértelmű, akkor az egyenletrendszer *határozott*, ellenkező esetben *határozatlan*.

13.5. **Definíció.** Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrixot az egyenletrendszer *alaplátrixaként* említjük, míg az

$$(A|b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

mátrixot az egyenletrendszer *kibővített mátrixának* nevezzük.

13.6. **Definíció.** Ha a 13.1 definícióban szereplő lineáris egyenletrendszer esetén az ismeretleneket az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

oszlopvektor, a jobb oldalt a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

oszlopektor jelöli, akkor az egyenletrendszer az

$$A \cdot x = b$$

úgynevezett *mátrixos alakra* írható át, ahol  $A$  a lineáris egyenletrendszer *alaplátrix* mátrixa.

13.7. **Tétel.** (Kronecker-Capelli)

Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha az *alaplátrixának* és *kibővített mátrixának* a rangja megegyezik.

13.8. **Tétel.** Egy lineáris egyenletrendszer megoldása nem változik, ha

- két egyenletet felcserélünk;

- egy egyenletet zérustól különböző számmal szorzunk;
- egy egyenlethez hozzáadjuk egy másik egyenlet valahányszorosát.

13.9. **Definíció.** Az előbbi tulajdonságok felhasználásával tetszőleges lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa trapéz alakú mátrixá alakítható. A trapéz alakra hozás algoritmusát *Gauss elimináció*nak nevezzük.

13.10. **Tétel.** Ha egy lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem nulla, akkor az egyenletrendszer  $k$ -adik ismeretlene úgy kapható meg, hogy

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A},$$

ahol  $A$  az egyenletrendszer alapmátrixa,  $A_k$  pedig az a mátrix, amelyet az alapmátrixból úgy kapunk meg, hogy annak  $k$ -adik oszlopát az egyenletrendszer jobb oldalán szereplő számokból képzett oszlopvektorra cseréljük ki.

13.11. **Megjegyzés.** A Cramer-szabály csak olyan lineáris egyenletrendszer megoldására alkalmazható, amelynél az alapmátrix determinánsa nem nulla.

**Kidolgozott feladatok**

83. **Feladat.** Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x + 4y - 8z & = & -8 \\ 2x + 5y - 9z & = & -10 \\ 6x - 4y + 6z & = & 22 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

- Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!
- Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
- Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!
- Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!
- Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!
- Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

**Megoldás:**

- A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa az egyenletrendszer ismeretlenek együtthatóiból képzett mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 2 & 5 & -9 \\ 6 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -8 & -8 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 6 & -4 & 6 & 22 \end{array} \right).$$

- Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 2 & 5 & -9 \\ 6 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

- A keresett rangok meghatározásához Gauss-eliminációt alkalmazunk. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának  $-1$ -szeresét hozzáadjuk a második

sorhoz, illetve az első sor  $-3$ -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor  $16$ -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & | & -8 \\ 2 & 5 & -9 & | & -10 \\ 6 & -4 & 6 & | & 22 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & | & -8 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & -16 & 30 & | & 46 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & | & -8 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 14 & | & 14 \end{pmatrix}.$$

Gauss-elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla sorok száma. Így az alaplátrix rangja  $3$ , a kibővített mátrix rangja  $3$ .

- d) Mivel az egyenletrendszer alaplátrixának és a kibővített mátrixának a rangja megegyezik, ezért megoldható.
- e) Az alaplátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával, így az egyenletrendszer határozott, azaz egy megoldása van.
- f) A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x + 4y - 8z & = & -8 \\ y - z & = & -2 \\ 14z & = & 14 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletet elosztva  $14$ -gyel azt kapjuk, hogy  $z = 1$ . A kapott eredményt visszahelyettesítve a második egyenletbe  $y = -1$  adódik. Az első egyenletbe  $y$ -t és  $z$ -t behelyettesítve megkapjuk, hogy  $x = 2$ .

**84. Feladat.** Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 1 \\ 2x + 3y + 4z & = & 2 \\ 3x + 4y + 5z & = & 8 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

- a) Írjuk fel az alaplátrixát és kibővített mátrixát!
- b) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
- c) Határozzuk meg az alaplátrix és a kibővített mátrix rangját!
- d) Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!
- e) Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!

f) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

**Megoldás:**

a) A lineáris egyenletrendszer alaplátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

A kibővített mátrix:

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \end{array} \right).$$

b) A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

c) Első lépésben a kibővített mátrix első sorának  $-2$ -szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor  $-3$ -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor  $-2$ -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

Az alaplátrix rangja 2, a kibővített mátrix rangja 3.

d) Mivel az alaplátrix és a kibővített mátrix rangja nem egyezik meg, ezért az egyenletrendszer nem oldható meg, azaz ellentmondásos. Ez a tény úgy is megállapítható, hogy az utolsó mátrixból felírjuk az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & & 0 & = & 5 \end{array} \right\}.$$

Ekkor az utolsó egyenletről ellentmondásra jutunk, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

85. **Feladat.** Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 6y + 8z = 4 \\ 6x + 8y + 10z = 6 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

- Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!
- Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
- Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!
- Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!
- Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!
- Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

**Megoldás:**

- a) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

kibővített mátrixa

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 10 & 6 \end{array} \right).$$

- b) A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- c) Első lépésben a kibővített mátrix első sorának  $-4$ -szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor  $-6$ -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor  $-2$ -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 10 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

az alapmátrix rangja 2, a kibővített mátrix rangja 2.

- d) Mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.
- e) Az alapmátrix rangja 2, míg az ismeretlenek száma 3, így az egyenletrendszer határozatlan, azaz végtelen sok megoldása van.
- f) Az általános megoldást  $3 - 2 = 1$  szabad paraméter bevezetésével írhatjuk fel. A szabad paraméterek számát az ismeretlenek számának és az alapmátrix rangjának különbsége adja. Az utolsó mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y - 4z = 0 \end{array} \right\}$$

adódik. Legyen például  $z = t$ . Ekkor a második egyenletből  $y = -2t$  adódik. Az első egyenletbe ezeket visszahelyettesítve megkapjuk az  $x$ -et:  $x = 1 + t$ , ahol  $t \in \mathbb{R}$  tetszőleges. Egy konkrét megoldás (például  $t = 1$  esetén)  $x = 2, y = -2, z = 1$ .

**86. Feladat.** Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y + z + u = 4 \\ 2x - y + 4z - u = 4 \\ 3x + y - z + 2u = 4 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

- Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!
- Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
- Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!
- Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!
- Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!
- Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

**Megoldás:**

- a) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kibővített mátrix:

$$(A|b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

b) A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

c) Első lépésben a kibővített mátrix első sorának  $-2$ -szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor  $-3$ -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -8 \end{array} \right)$$

Második lépésben a második sor  $-1$ -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -4 \end{array} \right).$$

Tehát az alaplátrix rangja 3, a kibővített mátrix rangja 3.

d) Mivel az alaplátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

e) Az ismeretlenek száma 4, ami nem egyezik meg az alaplátrix rangjával, így az egyenletrendszer határozatlan, azaz végtelen sok megoldása van.

f) Az utolsó mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y + z + u = 4 \\ -5y + 2z - 3u = -4 \\ -6z + 2u = -4 \end{array} \right\}$$

adódik. Legyen  $z = t$ , ahol  $t \in \mathbb{R}$ . Az utolsó egyenletből  $u = 3t - 2$ . Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe

$$y = \frac{-7t + 10}{5}$$

adódik. Az első egyenletbe  $y$ -t,  $z$ -t és  $u$ -t behelyettesítve megkapjuk, hogy

$$x = -1,2t + 2.$$

87. **Feladat.** Amennyiben lehetséges, oldjuk meg Cramer-szabállyal az

$$\left. \begin{array}{rcl} x & - & 2y & + & 5z & = & 12 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & + & 6z & = & 25 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

**Megoldás:**

Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánása:

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 8 - (-37) = 45.$$

Az első ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix első oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként áll elő az  $x$ . Mivel

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 12 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 25 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 45, \text{ ezért } x = \frac{D_1}{D} = \frac{45}{45} = 1.$$

A második ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix második oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként kapjuk  $y$ -t. Mivel

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 25 & 6 \end{pmatrix} = 90, \text{ ezért } y = \frac{D_2}{D} = \frac{90}{45} = 2.$$

A harmadik ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix harmadik oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként kapjuk  $z$ -t. Mivel

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 12 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 25 \end{pmatrix} = 135, \text{ ezért } z = \frac{D_3}{D} = \frac{135}{45} = 3.$$

## 14. Tétel: Vektoralgebra

1. Mit nevezünk lineáris kombinációnak?
2. Mikor mondjuk azt, hogy egy vektorrendszer lineárisan független?
3. Mikor mondjuk azt, hogy egy vektorrendszer lineárisan függő?
4. Mit nevezünk bázisnak?
5. Adjuk meg az  $\mathbb{R}^2$  koordinátasík természetes bázisát!
6. Adjuk meg az  $\mathbb{R}^3$  koordinátatér természetes bázisát!
7. Mit értünk egy vektorrendszer rangján?
8. Mit nevezünk egy mátrix rangjának?
9. Hogyan definiáljuk két térbeli vektor összegét?
10. Hogyan számolható ki egy térbeli vektor hossza?
11. Mit értünk két vektor skaláris szorzatán?
12. Hogyan számolható ki két, koordinátaival megadott térbeli vektor skaláris szorzata?
13. Mit értünk két vektor vektoriális szorzatán?
14. Hogyan számolható ki két, koordinátaival megadott térbeli vektor vektoriális szorzata?
15. Hogyan számolható ki a csúcaival megadott térbeli háromszög területe?
16. Hogyan számolható ki három, koordinátaival megadott térbeli vektor vektorvegyes szorzata?
17. Hogyan számolható ki a csúcaival megadott tetraéder térfogata?
18. Írjuk fel az adott normálvektorú, adott ponton áthaladó sík egyenletét!
19. Írjuk fel az adott irányvektorú, adott ponton áthaladó térbeli egyenes paraméteres egyenletrendszerét!
20. Írjuk fel az adott irányvektorú, adott ponton áthaladó térbeli egyenes paramétermentes egyenletrendszerét!

**14.1. Definíció.** Az  $a_1; a_2; \dots; a_n$  vektoroknak az  $x_1; x_2; \dots; x_n$  skalárokkal (valós számokkal) képzett *lineáris kombinációján* az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n$$

vektort értjük.

14.2. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az

$$\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$$

vektorrendszer *lineárisan független*, ha a zérusvektort csak triviális lineáris kombinációval állítják elő, azaz ha az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n = 0$$

egyenlőségből következik, hogy

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

14.3. **Definíció.** Ha egy vektorrendszer a zérusvektort nem csak triviális lineáris kombinációval állítja elő, azaz léteznek olyan  $x_1; x_2; \dots; x_n$  nem mind nulla valós számok, hogy

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az

$$\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$$

vektorrendszer *lineárisan függő*.

14.4. **Definíció.** Egy vektortér *bázisán* maximális tagszámú lineárisan független vektorrendszert értünk.

14.5. **Definíció.** Az  $\mathbb{R}^2$  koordinátasík 2 dimenziós, egy bázisa

$$\{(1; 0); (0; 1)\},$$

melyet a *sík természetes bázisának* nevezünk.

14.6. **Definíció.** Az  $\mathbb{R}^3$  koordinátatér 3 dimenziós, egy bázisa

$$\{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)\}.$$

Ezen vektorokra szokás az

$$i = (1; 0; 0);$$

$$j = (0; 1; 0);$$

$$k = (0; 0; 1)$$

jelölést használni, melyet a *tér természetes bázisának* nevezünk.

14.7. **Definíció.** Egy vektorrendszer *rangja* a maximális tagszámú lineárisan független részrendszerének tagszáma.

14.8. **Definíció.** Egy mátrix *rangja* a mátrix oszlopvektoraiból képzett vektorrendszer rangja.

14.9. **Definíció.** Az  $a = (a_1; a_2; a_3)$  és a  $b = (b_1; b_2; b_3)$  vektorok összege az

$$a + b = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

vektor.

14.10. **Tétel.** Az  $a = (a_1; a_2; a_3)$  vektor hossza:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

14.11. **Definíció.** Két vektor *skaláris szorzatán* a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük, tehát az  $a$  és  $b$  vektorok skaláris szorzata

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi,$$

ahol  $\varphi$  az  $a$  és  $b$  vektorok által bezárt szög.

14.12. **Tétel.** Az  $a = (a_1; a_2; a_3)$  és a  $b = (b_1; b_2; b_3)$  vektorok skaláris szorzata:

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

14.13. **Definíció.** A háromdimenziós tér két vektorának *vektoriális szorzatán* azt az  $a \times b$ -vel jelölt vektort értjük, melynek hossza a két vektor hosszának és a közbezárt szög szinuszának szorzata, merőleges mindkét vektorra és az első tényező, a második tényező és a vektoriális szorzat ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot, vagyis az  $a$  és  $b$  vektorok vektoriális szorzata az  $a \times b$  vektor, melynek hossza  $|a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$ , merőleges  $a$ -ra és  $b$ -re, továbbá  $a, b, a \times b$  jobbsodrású rendszert alkot.

14.14. **Tétel.** Az  $a = (a_1; a_2; a_3)$  és a  $b = (b_1; b_2; b_3)$  vektorok vektoriális szorzata:

$$a \times b = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2; a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3; a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1).$$

Megjegyezzük, hogy az  $a = (a_1; a_2; a_3)$  és a  $b = (b_1; b_2; b_3)$  vektorok vektoriális szorzata megkapható úgy, ha az

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

mátrixot az első oszlopa szerint kifejtjük.

14.15. **Következmény.** Az  $A, B$  és  $C$  csúcsokkal adott háromszög területe:

$$T = \frac{|a \times b|}{2},$$

ahol  $a = \overrightarrow{AB}$ ,  $b = \overrightarrow{AC}$ .

14.16. **Tétel.** Az  $a = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $b = (b_1; b_2; b_3)$  és  $c = (c_1; c_2; c_3)$  vektorok vegyes szorzata

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

14.17. **Tétel.** Az  $A, B, C$  és  $D$  csúcsokkal adott tetraéder térfogata:

$$V = \frac{|a \cdot b \cdot c|}{6},$$

$a, b$ , és  $c$  a tetraéder egy csúcsából kiinduló három vektor, például  $a = \overrightarrow{AB}$ ,  $b = \overrightarrow{AC}$  és  $c = \overrightarrow{AD}$ .

14.18. **Tétel.** Az  $n = (n_1; n_2; n_3)$  normálvektorú,  $P = (x_0; y_0; z_0)$  ponton áthaladó sík egyenlete:

$$n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) + n_3 \cdot (z - z_0) = 0.$$

14.19. **Következmény.** A  $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$  ponton áthaladó,  $v = (v_1; v_2; v_3)$  irányvektorú egyenes egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot v_1 \\ y &= y_0 + t \cdot v_2 \\ z &= z_0 + t \cdot v_3 \end{aligned} \right\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ezt az alakot az egyenes paraméteres egyenletrendszerének nevezzük.

14.20. **Következmény.** A  $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$  ponton áthaladó,  $v = (v_1; v_2; v_3)$  irányvektorú egyenes egyenletrendszere, amennyiben az irányvektor egyetlen koordinátája sem nulla:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

Ezt az alakot az egyenes paramétermentes egyenletrendszerének mondjuk.

**Kidolgozott feladatok**

**88. Feladat.** Határozzuk meg a  $v_1 = (-2; 3; 4)$  és az  $v_2 = (1; -4; 5)$  vektorok skaláris szorzatát!

**Megoldás:**

Két vektor skaláris szorzatát kiszámolhatjuk a megfelelő koordináták szorzatösszegeként, így a keresett mennyiség

$$v_1 \cdot v_2 = -2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 = -2 - 12 + 20 = 6.$$

**89. Feladat.** Határozzuk meg a  $v_1 = (0; 3; -4)$  és a  $v_2 = (4; 2; 4)$  vektorok által bezárt szöget!

**Megoldás:**

Két vektor skaláris szorzatát kiszámolhatjuk a megfelelő koordináták szorzatösszegeként. Másrészt a skaláris szorzatot a vektorok hosszának és a vektorok által bezárt szög koszinuszának szorzataként definiáltuk. Ezek figyelembevételével

$$\cos \varphi = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| \cdot |v_2|}.$$

Mivel

$$v_1 \cdot v_2 = 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 4 = 6 - 16 = -10,$$

továbbá

$$|v_1| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5, \quad |v_2| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6,$$

ezért

$$\cos \varphi = \frac{-10}{5 \cdot 6} = -\frac{1}{3},$$

amiből  $\varphi \approx 109,47^\circ$ .

**90. Feladat.** Számoljuk ki az  $A = (1; -1; 0)$ ,  $B = (2; 1; -1)$ ,  $C = (-1; 1; 2)$  pontok által meghatározott háromszög területét a vektoriális szorzat felhasználásával!

**Megoldás:**

Tekintsük az  $a = \overrightarrow{AB} = (1; 2; -1)$  és a  $b = \overrightarrow{AC} = (-2; 2; 2)$  vektorokat!

Ekkor a keresett terület az  $a$  és  $b$  vektorok vektoriális szorzatának a hosszának a fele. Mivel

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot j + \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot k = (6; 0; 6),$$

ezért

$$|a \times b| = \sqrt{6^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6 \cdot \sqrt{2},$$

így a keresett terület

$$T = \frac{|a \times b|}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

**91. Feladat.** Számoljuk ki az  $A = (1; 0; 1)$ ,  $B = (2; 1; -1)$ ,  $C = (3; 1; 1)$ ,  $D = (0; -2; 3)$  pontok által kifeszített tetraéder térfogatát a vegyes szorzat felhasználásával!

**Megoldás:**

Tekintsük az  $a = \overrightarrow{AB} = (1; 1; -2)$ ,  $b = \overrightarrow{AC} = (2; 1; 0)$  és  $c = \overrightarrow{AD} = (-1; -2; 2)$  vektorokat! Ekkor a keresett térfogat az  $a$ ,  $b$  és  $c$  vektorok vegyes szorzatának az abszolútértékének a hatoda. Mivel a vegyes szorzat

$$abc = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4,$$

ezért a keresett térfogat  $V = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

**92. Feladat.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$  és tekintsük az  $A = (4; 2; 1)$ ,  $B = (-2; 0; 3)$  és  $C = (x; 1; 2)$  pontokat! Határozzuk meg az  $x$  valós számot úgy, hogy az  $ABC$  háromszög területe  $2 \cdot \sqrt{2}$  legyen!

**Megoldás:**

Tekintsük az  $a = \overrightarrow{AB} = (-6; -2; 2)$  és  $b = \overrightarrow{AC} = (x-4; -1; 1)$  vektorokat! Ekkor a keresett terület az  $a$  és  $b$  vektorok vektoriális szorzatának a hosszának

a fele. Mivel

$$\begin{aligned}
 a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 2 \\ x-4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ x-4 & 1 \end{vmatrix} \cdot j + \\
 &+ \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ x-4 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = \\
 &= (0; 2x-2; 2x-2),
 \end{aligned}$$

ezért

$$|a \times b| = \sqrt{(2x-2)^2 + (2x-2)^2} = \sqrt{8x^2 - 16x + 8}.$$

Mivel

$$T = \frac{|a \times b|}{2},$$

ezért

$$\frac{8x^2 - 16x + 8}{2} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$8x^2 - 16x + 8 = 32 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldva

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

adódik, így  $x_1 = -1$  és  $x_2 = 3$ .

**93. Feladat.** Tekintsük az

$$A = (-2; 0; 3), \quad B = (0; 2; 1), \quad C = (4; 3; 0)$$

pontokat! Határozzuk meg az  $ABC$  háromszög

- oldalainak hosszát;
- kerületét;
- legnagyobb szögét;
- súlypontját!

**Megoldás:**

a) Az egyes oldalak hossza:

$$a = d_{BC} = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18}$$

$$b = d_{AC} = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54}$$

$$c = d_{AB} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}$$

b) A kerület:  $K = \sqrt{18} + \sqrt{54} + \sqrt{12}$ .

c) A legnagyobb szög a  $b$  oldallal szemben lévő, így

$$\cos \beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{(-2; -2; 2) \cdot (4; 1; -1)}{|(-2; -2; 2)| \cdot |(4; 1; -1)|} = \frac{-12}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{18}}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy a keresett szög  $\beta = 144,74^\circ$ .

d) A súlypont:

$$S = \left( \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}; \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3} \right) = \left( \frac{2}{3}; \frac{5}{3}; \frac{4}{3} \right).$$

94. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

mátrix rangját!

**Megoldás:**

Első lépésben az első sor  $-2$ -szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, az első sor  $-3$ -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz és az első sor  $-4$ -szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

A második sor  $-2$ -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és a második sor  $-3$ -szorosát hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az alkalmazott eljárás után kapott mátrixban két olyan vektor van, amely lineárisan független, ezért a rangja 2.

**95. Feladat.** Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelynek egyik pontja az  $A = (2; 1; 4)$  pont, normálvektora  $n = (3; 2; -4)$ .

**Megoldás:**

Az  $n = (n_1; n_2; n_3)$  normálvektorú sík egyenlete

$$n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) + n_3 \cdot (z - z_0) = 0.$$

Így a keresett egyenlet

$$3 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1) - 4 \cdot (z - 4) = 0.$$

Felbontva a zárójeleket, majd elvégezve az összevonást

$$3x + 2y - 4z = -8$$

adódik.

**96. Feladat.** Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik az  $A = (1; -3; 2)$  pontra és egy irányvektora  $v = (1; -2; 5)$ !

**Megoldás:**

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + 5t \end{array} \right\},$$

ahol  $t \in \mathbb{R}$ . A paramétermentes egyenletrendszert megkapjuk, ha minden egyenletből kifejezzük a  $t$  paramétert:

$$x - 1 = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{5}.$$

**97. Feladat.** Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik az  $A = (1; -2; 3)$  és  $B = (2; 2; 1)$  pontokra! Adjuk meg az egyenes paraméteres és paramétermentes egyenletrendszerét is!

**Megoldás:**

Az egyenes egy irányvektora

$$v = \overrightarrow{AB} = (1; 4; -2).$$

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_1 \cdot t \\ y &= y_0 + v_2 \cdot t \\ z &= z_0 + v_3 \cdot t. \end{aligned} \right\},$$

ahol  $v = (v_1; v_2; v_3)$  az egyenes egy irányvektora és  $A = (x_0; y_0; z_0)$  az egyenes egy pontja. A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= -2 + 4t \\ z &= 3 - 2t. \end{aligned} \right\},$$

ahol  $t \in \mathbb{R}$ . A paramétermentes egyenletrendszert megkapjuk, ha minden egyenletből kifejezzük a  $t$  paramétert:

$$x - 1 = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 3}{-2}.$$

## 15. Tétel: Lineáris leképezések

1. Mikor mondjuk azt, hogy egy leképezés lineáris?
2. Mit nevezünk lineáris transzformációnak?
3. Hogyan kapjuk meg egy lineáris leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixát?
4. Hogyan határozhatjuk meg egy lineáris leképezés mátrixának felhasználásával egy vektor képét?
5. Írjuk fel a síkon az origó körüli  $\alpha$  szöggel való forgatás mátrixát!
6. Mit értünk egy lineáris leképezés sajátértékén és sajátvektorán?
7. Mit nevezünk karakterisztikus polinomnak és karakterisztikus egyenletnek?
8. Hogyan kaphatók meg a sajátértékek a karakterisztikus egyenletből?

15.1. **Definíció.** Legyenek  $X$  és  $Y$  vektorterek a valós számok fölött. Az  $f: X \rightarrow Y$  függvényt *lineáris leképezésnek* nevezzük, ha additív és homogén, azaz ha

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) & (x_1, x_2 \in X); \\ f(\lambda \cdot x) &= \lambda \cdot f(x) & (x \in X, \lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

15.2. **Definíció.** Amennyiben az előbbi definícióban  $X = Y$ , úgy *lineáris transzformációról* beszélünk.

15.3. **Definíció.** Egy lineáris leképezés *természetes bázisra vonatkozó mátrixán* azt a mátrixot értjük, melyet úgy kapunk meg, hogy kiszámoljuk a leképezés természetes bázisvektorokon felvett függvényértékeit, majd az így kapott vektorokból, mint oszlopvektorokból mátrixot képezünk.

15.4. **Tétel.** Minden lineáris leképezés a mátrixával való balról szorzásként hat, azaz ha  $A$  az  $f$  lineáris leképezés mátrixa, akkor

$$f(x) = A \cdot x,$$

ahol  $x$ -et oszlopvektorként írjuk.

15.5. **Tétel.** A síkon az origó körüli pozitív (azaz óramutató járásával ellentétes) irányú  $\alpha$  szöggel való forgatás mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

**15.6. Definíció.** A  $v \neq 0$  vektort az  $f: X \rightarrow X$  lineáris transzformáció *sajátvektorának* nevezzük, ha létezik olyan  $\lambda \in \mathbb{R}$ , hogy

$$f(x) = \lambda \cdot x.$$

Ilyenkor  $\lambda$ -t a  $v$  *sajátértéknek* hívjuk, és azt mondjuk, hogy  $v$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor.

**15.7. Definíció.** Legyen az  $A$  mátrix az  $f: X \rightarrow X$  lineáris transzformáció mátrixa. Ekkor az

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_n)$$

polinomot az  $f$  *karakterisztikus polinomjának* nevezzük. A

$$\det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$$

egyenletet *karakterisztikus egyenletnek* mondjuk.

**15.8. Tétel.** A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei. A sajátvektorok az

$$(A - \lambda \cdot E_n) \cdot x = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Mivel ezen egyenletrendszer alaplármátrixának determinánsa definíció szerint 0, ezért végtelen sok megoldása van, így egy sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik, továbbá az ugyanazon sajátértékhez tartozó sajátvektorok párhuzamosak.

**Kidolgozott feladatok**

98. **Feladat.** Jelentse  $f$  a sík  $y$ -tengelyre való tükrözésének mátrixát!

- Írjuk föl a lineáris leképezés (természetes bázisra vonatkozó) mátrixát!
- Írjuk föl a lineáris leképezés karakterisztikus polinomját!
- Írjuk föl a lineáris leképezés karakterisztikus egyenletét!
- Határozzuk meg a lineáris leképezés sajátértékeit!
- Határozzuk meg a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat!

**Megoldás:**

- a) A lineáris leképezés mátrixát úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk a bázisvektorokon felvett függvényértékeket és a kapott vektorokból, mint oszlopvektorokból mátrixot képezünk. Mivel

$$f(1; 0) = (-1; 0)$$

és

$$f(0; 1) = (0; 1),$$

ezért a lineáris leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) A karakterisztikus polinom a  $\det(A - \lambda E_2)$  polinom. Behelyettesítve az  $A$  mátrixot és az  $E_2$  egységmátrixot, azt kapjuk, hogy

$$\det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

A determinánst kiszámolva, majd elvégzve a zárójelfelbontásokat a

$$(-1 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) = \lambda^2 - 1$$

polinomot kapjuk.

- c) A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda E_2) = 0$$

összefüggés, ami jelen esetben a

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

másodfokú egyenlet.

d) A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így meg kell oldanunk a

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

egyenletet, amiből  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  adódik.

e) A  $\lambda_1 = 1$  sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az  $A - \lambda E_2$  mátrixot:

$$A - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékeket a

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alaplátrix második sora csupa nulla elemekből áll, így az elhagyható, mert nincs információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer  $-2x_1 = 0$ , amiből  $x_1 = 0$ . Az  $x_2$  ismeretlen szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A  $t = 0$  értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor  $x_2 = 0$  és  $x_1 = 0$  lenne, ami azt jelentené, hogy a sajátvektor zérusvektor, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a  $\lambda_1 = 1$  sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Meghatározzuk a  $\lambda_2 = -1$  sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A - (-1) \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alaplátrix második sora csupa nulla elemekből áll, így az elhagyható, mivel nincs információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer  $2x_2 = 0$ , amiből  $x_2 = 0$  adódik. Az  $x_1$  ismeretlen tetszőlegesnek választjuk. Legyen

$$x_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tehát a  $\lambda_2 = -1$  sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = t \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

**99. Feladat.** Az  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris leképezésről azt tudjuk, hogy egyrészt  $f(1; 2) = (4; 5)$ , másrészt  $f(2; 1) = (5; 4)$ . Adjuk meg a lineáris leképezés mátrixát!

**Megoldás:**

Legyen a keresett mátrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Mivel  $f(1; 2) = (4; 5)$ , ezért

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ha elvégezzük a mátrixszal való szorzást, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} \\ a_{21} + 2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Tehát az

$$\begin{aligned} a_{11} + 2a_{12} &= 4 \\ a_{21} + 2a_{22} &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk.

Mivel  $f(2; 1) = (5; 4)$ , ezért

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ha elvégezzük a mátrixszal való szorzást, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{12} \\ 2a_{21} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tehát az

$$\begin{aligned} 2a_{11} + a_{12} &= 5 \\ 2a_{21} + a_{22} &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$a_{11} + 2a_{12} = 4$$

$$a_{21} + 2a_{22} = 5$$

$$2a_{11} + a_{12} = 5$$

$$2a_{21} + a_{22} = 4.$$

Az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a harmadik egyenletből, akkor azt kapjuk, hogy  $a_{12} = 1$ . Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe  $a_{11} = 2$  adódik. Ha a második egyenlet kétszeresét kivonjuk a negyedik egyenletből, akkor  $a_{22} = 2$  adódik. Ezt visszahelyettesítve a negyedik egyenletbe  $a_{21} = 1$  adódik. A lineáris leképezés mátrixa tehát:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 16. Tétel: Többváltozós függvények differenciálszámítása

1. Mit nevezünk skalármezőnek?
2. Mit nevezünk egy kétváltozós függvény szintvonalának?
3. Mit értünk egy kétváltozós függvény paramétervonalán?
4. Mikor mondjuk azt, hogy egy többváltozós valós értékű függvény totálisan differenciálható?
5. Mit nevezünk gradiens vektornak?
6. Mit nevezünk iránymenti deriválnak?
7. Hogyan számolható ki az iránymenti derivált a gradiens vektor segítségével?
8. Írjuk fel az érintősíkh egyenletét!
9. Mit mond ki a Young-tétel?
10. Hogyan szól a Young-tétel kétváltozós függvény másodrendű parciális deriváltjaira?

16.1. **Definíció.** Tekintsük a  $D \subset \mathbb{R}^n$  halmazt. Az  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt  $n$ -változós valós értékű függvénynek vagy skalármezőnek nevezzük.

16.2. **Definíció.** Az  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kétváltozós függvény  $c$  valós számhoz tartozó szintvonala az  $f(x; y) = c$  egyenlet megoldásainak halmaza. Tehát a  $c$  értékhez tartozó szintvonal az

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x; y) = c\}$$

halmaz.

16.3. **Definíció.** Kétváltozós függvény *paramétervonalai* a kétváltozós függvény egyik változójának rögzítésével kapott egyváltozós függvények.

16.4. **Definíció.** Tegyük fel, hogy  $D \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz! Azt mondjuk, hogy az  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  függvény (*totálisan*) differenciálható az  $x_0 \in D$  helyen, és deriváltja az  $a \in \mathbb{R}^n$  vektor, ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a \cdot h}{|h|} = 0.$$

Az  $a$  vektort az  $f$  függvény  $x_0$  helyen vett *gradiensének* vagy *gradiens vektorának* nevezzük. Az  $f$  függvény gradiens vektorára szokás a  $\text{grad } f$  vagy a  $\nabla f$  jelölést is használni.

**16.5. Megjegyzés.** Totálisan differenciálható függvény minden változó szerint parciálisan differenciálható és a gradiens vektor a parciális deriváltakból képzett vektor.

**16.6. Definíció.** Az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $v \in \mathbb{R}^n$  *iránymenti deriváltja* az  $x_0 \in D$  helyen:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t}.$$

Jelölés:  $\partial_v f$ ;  $\frac{\partial f}{\partial v}$ ;  $D_v f$ ;  $f'_v$

**16.7. Tétel.** Ha az  $f$  függvény totálisan differenciálható, akkor az iránymenti derivált a gradiens vektor és az adott irányba mutató egységvektor skaláris szorzata:

$$\text{grad } f \cdot \frac{v}{|v|}.$$

**16.8. Definíció.** Egy  $(x; y) \mapsto f(x; y)$  kétváltozós, totálisan differenciálható függvény *érintősíkjának egyenlete* az  $(x_0; y_0)$  helyen:

$$z = f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0).$$

**16.9. Tétel.** (Young-tétel.)

Ha egy többváltozós függvény parciális deriváltfüggvényei folytonos függvények, akkor a vegyes másodrendű parciális deriváltfüggvényei egyenlőek, azaz

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}.$$

**16.10. Következmény.** Az  $(x; y) \mapsto f(x; y)$  függvény esetén, ha  $f''_{xy}$  és  $f''_{yx}$  folytonos függvények, akkor

$$f''_{xy}(x; y) = f''_{yx}(x; y).$$

**Kidolgozott feladatok**

100. **Feladat.** Tekintsük az  $f(x; y) = \ln(x^3 + y^3 + 1)$  függvényt!

- Határozzuk meg az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket!
- Számoljuk ki az  $f'_x(1; 2)$  és az  $f'_y(1; 2)$  értékeket!
- Adjuk meg az  $f''_{xx}(x; y)$  függvényt!
- Számoljuk ki az  $f''_{xx}(1; 1)$  értéket!

**Megoldás:**

- a) A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \ln x & k'(x) &= \frac{1}{x} \\ b(x; y) &= x^3 + y^3 + 1 & b'_x(x; y) &= 3x^2 \\ & & b'_y(x; y) &= 3y^2. \end{aligned}$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) &= \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 + y^3 + 1}; \\ f'_y(x; y) &= \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} \cdot 3y^2 = \frac{3y^2}{x^3 + y^3 + 1}. \end{aligned}$$

- b) A keresett értékek:

$$f'_x(1; 2) = \frac{3}{1 + 1 + 1} = 1 \quad \text{és} \quad f'_y(1; 2) = \frac{3}{1 + 1 + 1} = 1.$$

- c) A törtfüggvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f''_{xx}(x; y) = \frac{6x \cdot (x^3 + y^3 + 1) - 3x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 + y^3 + 1)^2} = \frac{6xy^3 + 6x - 3x^4}{(x^3 + y^3 + 1)^2}$$

adódik.

- d) Az  $f''_{xx}(1; 1)$  érték:

$$f''_{xx}(1; 1) = \frac{6 + 6 - 3}{3^2} = 1.$$

**101. Feladat.** Határozzuk meg az  $f(x; y) = e^{2xy}$  függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!

**Megoldás:**

Az  $f$  függvény összetett. A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= e^x & k'(x) &= e^x \\ b(x; y) &= 2xy & b'_x(x; y) &= 2y \\ & & b'_y(x; y) &= 2x. \end{aligned}$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) &= e^{2xy} \cdot 2y; \\ f'_y(x; y) &= e^{2xy} \cdot 2x. \end{aligned}$$

**102. Feladat.** Adjuk meg az  $f(x; y) = \operatorname{tg}(x^2 + 4xy + y^2)$  függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!

**Megoldás:**

Az  $f$  függvény összetett. A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \operatorname{tg} x & k'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ b(x; y) &= x^2 + 4xy + y^2 & b'_x(x; y) &= 2x + 4y \\ & & b'_y(x; y) &= 4x + 2y. \end{aligned}$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) &= \frac{1}{\cos^2(x^2 + 4xy + y^2)} \cdot (2x + 4y) = \frac{2x + 4y}{\cos^2(x^2 + 4xy + y^2)}; \\ f'_y(x; y) &= \frac{1}{\cos^2(x^2 + 4xy + y^2)} \cdot (4x + 2y) = \frac{4x + 2y}{\cos^2(x^2 + 4xy + y^2)}. \end{aligned}$$

103. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!

**Megoldás:**

A gyököt hatványalakban felírva

$$f(x; y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

adódik. Az  $f$  függvény összetett. A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= x^{\frac{1}{2}} & k'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \\ b(x; y) &= x^2 + y^2 & b'_x(x; y) &= 2x \\ & & b'_y(x; y) &= 2y. \end{aligned}$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ f'_y(x; y) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

104. **Feladat.** Határozzuk meg az  $f(x; y) = 8 - 4x^2 - 2y^2$  függvénnyel leírt domb legmeredekebb lejtőjének irányát az  $P = (1; 1)$  pontban!

**Megoldás:**

Az  $f(x; y) = 8 - 4x^2 - 2y^2$  függvény elsőrendű parciális deriváltjai

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) = -8x &\Rightarrow f'_x(P) = -8 \cdot 1 = -8 \\ f'_y(x; y) = -4y &\Rightarrow f'_y(P) = -4 \cdot 1 = -4. \end{aligned}$$

A  $P$  pontbeli gradiens vektor  $\text{grad } f(P) = (-8; -4)$ , így a legmeredekebb lejtő iránya:  $(8; 4)$ .

105. **Feladat.** Az elektromos potenciál az  $(x; y; z)$  pontban

$$f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}.$$

Milyen irányba kellene elindulni a  $P = (2; 3; 4)$  pontból ahhoz, hogy az elektromos potenciál növekedése maximális legyen?

**Megoldás:**

A gyököt hatványalakban felírva

$$f(x; y; z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{\frac{1}{2}}$$

adódik. Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények és azok  $P$  pontbeli helyettesítési értéke:

$$f'_x(x; y; z) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}$$

$$f'_y(x; y; z) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4y = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}$$

$$f'_z(x; y; z) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6z = \frac{3z}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}.$$

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények helyettesítési értékei a  $P$  pontban:

$$f'_x(P) = \frac{2}{\sqrt{70}}; \quad f'_y(P) = \frac{6}{\sqrt{70}}; \quad f'_z(P) = \frac{12}{\sqrt{70}}.$$

A  $P$  pontbeli gradiens vektor:

$$\text{grad } f(P) = \left( \frac{2}{\sqrt{70}}; \frac{6}{\sqrt{70}}; \frac{12}{\sqrt{70}} \right).$$

Tehát az  $(1; 3; 6)$  irányban lesz maximális a potenciál növekedése.

## 17. Tétel: Kétfváltozós függvények szélsőértékszámítása

1. Mit értünk egy kétfváltozós függvény lokális maximumán?
2. Mit értünk egy kétfváltozós függvény lokális minimumán?
3. Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.
4. Mit nevezünk stacionárius pontnak?
5. Írjuk fel egy kétfváltozós függvény Hesse-mátrixát!
6. Kétfváltozós függvény lokális szélsőértékének elégséges feltétele.
7. Kétfváltozós függvény lokális szélsőértékének elégséges feltétele a Hesse mátrix definittségével.

17.1. **Definíció.** Az  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $(x_0; y_0) \in D$  pont *lokális maximumhelye*, ha van olyan  $(x_0; y_0)$  középpontú nyílt körlap, amelyben minden  $(x; y)$  számpárra  $f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$  teljesül.

17.2. **Definíció.** Az  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $(x_0; y_0) \in D$  pont *lokális minimumhelye*, ha van olyan  $(x_0; y_0)$  középpontú nyílt körlap, amelyben minden  $(x; y)$  számpárra  $f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$  teljesül.

17.3. **Tétel.** (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele)

Ha az  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (totálisan) differenciálható függvénynek lokális szélsőértéke van az  $(x_0; y_0) \in D$  pontban, akkor az  $(x_0; y_0)$  pontban az elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák, azaz  $f'_x(x_0; y_0) = 0$  és  $f'_y(x_0; y_0) = 0$ .

17.4. **Definíció.** Azon  $(x_0; y_0) \in D$  pontokat, amelyekben az  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (totálisan) differenciálható függvény elsőrendű parciális deriváltjai nullák, *stacionárius pontnak* is nevezzük.

17.5. **Definíció.** Az  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer (totálisan) differenciálható függvény *Hesse-mátrixa* az  $(x_0; y_0) \in D$  pontban az

$$M(x_0; y_0) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{yx}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

mátrix.

17.6. **Tétel.** (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele)

Legyen  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy

az  $f$  függvénynek az  $(x_0; y_0) \in D$  pontban az elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák. Tekintsük az  $f$  függvény másodrendű parciális deriváltjaiból képzett

$$M(x_0; y_0) = \begin{array}{c} x \qquad y \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{yx}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-mátrixot. Legyen  $D_1 = f''_{xx}(x_0; y_0)$  és  $D_2 = \det(M(x_0; y_0))$ .

Ha  $D_1 > 0$  és  $D_2 > 0$ , akkor az  $f$  függvénynek az  $(x_0; y_0)$  pontban lokális minimuma van.

Ha  $D_1 < 0$  és  $D_2 > 0$ , akkor az  $f$  függvénynek az  $(x_0; y_0)$  pontban lokális maximuma van.

Ha  $D_2 < 0$ , akkor az  $f$  függvénynek az  $(x_0; y_0)$  pontban nincs szélsőértéke.

Ha  $D_1 = 0$  és  $D_2 = 0$  vagy  $D_1 = 0$  és  $D_2 > 0$  vagy  $D_1 > 0$  és  $D_2 = 0$  vagy  $D_1 < 0$  és  $D_2 = 0$ , akkor a Hesse-mátrix vizsgálatával nem dönthető el, hogy az  $f$  függvénynek az  $(x_0; y_0)$  pontban van-e szélsőértéke.

**17.7. Következmény.** Legyen  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az  $f$  függvénynek az  $(x_0; y_0) \in D$  pontban az elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák. Tekintsük az  $f$  függvény másodrendű parciális deriváltjaiból képzett

$$M(x_0; y_0) = \begin{array}{c} x \qquad y \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{yx}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-mátrixot.

Ha  $M(x_0; y_0)$  pozitív definit az  $(x_0; y_0)$  pontban, akkor az  $f$  függvénynek az  $(x_0; y_0)$  pontban lokális minimuma van.

Ha  $M(x_0; y_0)$  negatív definit, akkor az  $f$  függvénynek az  $(x_0; y_0)$  pontban lokális maximuma van.

Ha  $M(x_0; y_0)$  indefinit, akkor az  $f$  függvénynek az  $(x_0; y_0)$  pontban nincs szélsőértéke.

Ha  $M(x_0; y_0)$  pozitív szemidefinit vagy negatív szemidefinit, akkor a Hesse-mátrix vizsgálatával nem dönthető el, hogy az  $f$  függvénynek az  $(x_0; y_0)$  pontban van-e szélsőértéke.

**Kidolgozott feladatok**

106. **Feladat.** Határozzuk meg az  $f(x; y) = x^3 + y^3 - 9xy$  függvény lokális szélsőértékeit!

**Megoldás:**

Az  $f$  függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 3x^2 - 9y$$

$$f'_y(x; y) = 3y^2 - 9x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 9y &= 0 \\ 3y^2 - 9x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Mindkét egyenlet osztható 3-mal, így az

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 3y &= 0 \\ y^2 - 3x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből  $y = \frac{1}{3}x^2$  adódik, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{9}x^4 - 3x = 0.$$

Az egyenletet szorozva a nevezővel és  $x$ -et kiemelve

$$x^4 - 27x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x^3 - 27) = 0$$

adódik, így  $x_1 = 0$  és  $x_2 = 3$ . A megfelelő  $y$  értékek  $y_1 = 0$  és  $y_2 = 3$ . Tehát az  $f$  függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek  $P_1 = (0; 0)$  és  $P_2 = (3; 3)$ .

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az  $f$  függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 6x & f''_{xy}(x; y) &= -9 \\ f''_{yx}(x; y) &= -9 & f''_{yy}(x; y) &= 6y, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a  $P_1$  stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai  $D_1 = 0$ , illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 81 = -81.$$

Mivel  $D_2$  negatív, ezért a  $P_1$  pontban nincs szélsőértéke az  $f$  függvénynek.

Ha az  $M$  mátrixot kiértékeljük a  $P_2$  pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai  $D_1 = 18$ , illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} = 324 - 81 = 243.$$

Mivel  $D_1$  és  $D_2$  pozitív, ezért a  $P_2$  pontban lokális minimuma van az  $f$  függvénynek, amelynek értéke:

$$f(3; 3) = 3^3 + 3^3 - 9 \cdot 3 \cdot 3 = 54 - 81 = -27.$$

**107. Feladat.** Határozzuk meg az  $f(x; y) = x^3 + y^2 - 6xy + 8$  függvény lokális szélsőértékeit!

**Megoldás:**

Az  $f$  függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 3x^2 - 6y$$

$$f'_y(x; y) = 2y - 6x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 6y &= 0 \\ 2y - 6x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. A második egyenletből  $y = 3x$  adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$3x^2 - 18x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x \cdot (x - 6) = 0,$$

így  $x_1 = 0$  és  $x_2 = 6$ . A megfelelő  $y$  értékek  $y_1 = 0$  és  $y_2 = 18$ . Tehát az  $f$  függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek  $P_1 = (0; 0)$  és  $P_2 = (6; 18)$ .

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az  $f$  függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{array}{c} x \quad y \\ \left( \begin{array}{cc} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{array} \right) \\ y \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 6x & f''_{xy}(x; y) &= -6 \\ f''_{yx}(x; y) &= -6 & f''_{yy}(x; y) &= 2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{array}{c} x \quad y \\ \left( \begin{array}{cc} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{array} \right) \\ y \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a  $P_1$  stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \left( \begin{array}{cc} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{array} \right).$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai  $D_1 = 0$ , illetve

$$D_2 = \det \left( \begin{array}{cc} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{array} \right) = 0 - 36 = -36.$$

Mivel  $D_2$  negatív, ezért a  $P_1$  pontban nincs szélsőértéke az  $f$  függvénynek.

Ha az  $M$  mátrixot kiértékeljük a  $P_2$  pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai  $D_1 = 36$ , illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 72 - 36 = 36.$$

Mivel  $D_1$  és  $D_2$  pozitív, ezért a  $P_2$  pontban lokális minimuma van az  $f$  függvénynek, amelynek értéke:

$$f(6; 18) = 6^3 + 18^2 - 6 \cdot 6 \cdot 18 + 8 = 216 + 324 - 648 + 8 = -100.$$

**108. Feladat.** Határozzuk meg az  $f(x; y) = x^3 - 12x + y^2 - 2y$  függvény lokális szélsőértékeit!

**Megoldás:**

Az  $f$  függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 3x^2 - 12$$

$$f'_y(x; y) = 2y - 2.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 - 12 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy  $3x^2 = 12$ , amiből  $x^2 = 4$  következik, tehát  $x = \pm 2$ . A második egyenletből  $y = 1$  adódik.

Tehát az  $f$  függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek  $P_1 = (2; 1)$  és  $P_2 = (-2; 1)$ .

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az  $f$  függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 6x & f''_{xy}(x; y) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y) &= 0 & f''_{yy}(x; y) &= 2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a  $P_1$  stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai  $D_1 = 12$ , illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 24 - 0 = 24.$$

Mivel  $D_1$  és  $D_2$  pozitív, ezért a  $P_1$  pontban lokális minimuma van az  $f$  függvénynek. Értéke:

$$f(2; 1) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 1^2 - 2 \cdot 1 = 8 - 24 + 1 - 2 = -17.$$

Ha az  $M$  mátrixot kiértékeljük a  $P_2$  pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai  $D_1 = -12$ , illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -24 - 0 = -24.$$

Mivel  $D_2$  negatív, ezért a  $P_2$  pontban nincs szélsőértéke az  $f$  függvénynek.

**109. Feladat.** Határozzuk meg az  $f(x; y) = (x + 3)^2 + (y + 5)^2$  függvény lokális szélsőértékeit!

**Megoldás:**

Az  $f$  függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 2 \cdot (x + 3)$$

$$f'_y(x; y) = 2 \cdot (y + 5).$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot (x + 3) &= 0 \\ 2 \cdot (y + 5) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az egyenletrendszer megoldása:  $x = -3, y = -5$ .

Tehát az  $f$  függvénynek egy stacionárius pontja van:  $P = (-3; -5)$ .

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az  $f$  függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{array}{c} x \quad y \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 2 & f''_{xy}(x; y) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y) &= 0 & f''_{yy}(x; y) &= 2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{array}{c} x \quad y \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a  $P$  stacionárius pontban, akkor azt kapjuk, hogy

$$M(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai  $D_1 = 2$ , illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 0 = 4.$$

Mivel  $D_1$  és  $D_2$  pozitív, ezért a  $P$  pontban lokális minimuma van az  $f$  függvénynek, amelynek értéke:

$$f(-3; -5) = (-3 + 3)^2 + (-5 + 5)^2 = 0.$$

110. **Feladat.** Határozzuk meg az  $f(x; y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) + 5$  függvény lokális szélsőértékeit!

**Megoldás:**

Az  $f$  függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$f'_y(x; y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} &= 0 \\ \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy  $x = 0$ , míg a másodikból azt, hogy  $y = 0$ . Tehát az egyetlen stacionárius pont  $P = (0; 0)$ .

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az  $f$  függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot.

A tiszta másodrendű parciális deriváltfüggvények

$$f''_{xx}(x; y) = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

és

$$f''_{yy}(x; y) = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + 1) - 4y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

A vegyes másodrendű parciális deriváltfüggvények

$$f''_{yx}(x; y) = f''_{xy}(x; y) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Tehát a másodrendű parciális deriváltfüggvényekből képzett mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} & \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} & \frac{2x^2 - 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Ha a mátrixot kiértékeljük a  $P$  stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai  $D_1 = 1$ , illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Mivel  $D_1$  és  $D_2$  pozitív, ezért a  $P$  pontban lokális minimuma van az  $f$  függvénynek. Értéke

$$f(0; 0) = \ln(0^2 + 0^2 + 1) + 5 = 5.$$

## 18. Tétel: Kétfváltozós függvények integrálszámítása

1. Mit nevezünk téglalaptartománynak?
2. Mit nevezünk elsőfajú normáltartománynak?
3. Mit nevezünk másodfajú normáltartománynak?
4. Mit mond a Fubini tétel téglalaptartományra?
5. Hogyan számolható ki egy kétfváltozós függvény Riemann-integrálja elsőfajú normáltartományon?
6. Hogyan számolható ki egy kétfváltozós függvény Riemann-integrálja másodfajú normáltartományon?
7. Milyen helyettesítéssel tudunk körszerű tartományon integrálni?

18.1. **Definíció.** Legyenek  $a, b, c, d$  olyan valós számok, amelyekre  $a < b$  és  $c < d$ ! Ekkor a

$$T = [a; b] \times [c; d]$$

halmazt *téglalaptartománynak* nevezzük.

18.2. **Definíció.** Legyenek  $u_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $u_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények, valamint  $a$  és  $b$  olyan valós számok, amelyekre  $a < b$  teljesül! Ekkor az

$$N_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

halmazt *elsőfajú normáltartománynak* nevezzük.

18.3. **Definíció.** Legyenek  $v_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $v_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények, valamint  $c$  és  $d$  olyan valós számok, amelyekre  $c < d$  teljesül! Ekkor az

$$N_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ és } v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$$

halmazt *másodfajú normáltartománynak* nevezzük.

18.4. **Tétel.** (Fubini-tétel)

Ha  $T = [a; b] \times [c; d]$  (vagyis  $T$  egy téglalaptartomány), akkor

$$\iint_T f(x; y) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x; y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x; y) dx \right) dy.$$

18.5. **Tétel.** Legyenek  $u_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $u_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények, valamint  $a$  és  $b$  olyan valós számok, amelyekre  $a < b$  teljesül! Az

$$N_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

normáltartományon az  $f$  kétváltozós függvény integrálja:

$$\iint_{N_1} f(x; y) = \int_a^b \left( \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x; y) dy \right) dx.$$

**18.6. Tétel.** Legyenek  $v_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $v_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények, valamint  $c$  és  $d$  olyan valós számok, amelyekre  $c < d$  teljesül! Az

$$N_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ és } v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$$

normáltartományon az  $f$  kétváltozós függvény integrálja:

$$\iint_{N_2} f(x; y) = \int_c^d \left( \int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x; y) dx \right) dy.$$

**18.7. Megjegyzés.** Körszerű tartományok esetében úgynevezett polárkoordináta helyettesítéssel élünk. Ilyenkor az

$$x(r; \varphi) = r \cdot \cos \varphi \quad y(r; \varphi) = r \cdot \sin \varphi$$

helyettesítést hajtjuk végre. Ekkor a Jacobi-mátrix determinánsa:

$$\begin{aligned} \det J(r; \varphi) &= \det \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= r \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r. \end{aligned}$$

Tehát ebben az esetben, ha  $K$  egy körszerű tartomány, akkor

$$\iint_K f(x; y) dx dy = \iint_G f(x(r; \varphi); y(r; \varphi)) \cdot r dr d\varphi.$$

**Kidolgozott feladatok**

111. **Feladat.** Számoljuk ki az  $f(x; y) = x + 2y$  függvény integrálját a

$$T = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$$

halmazon!

**Megoldás:**

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \iint_T x + 2y &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^2 x + 2y \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \int_{-1}^1 2x + 4 \, dx = [x^2 + 4x]_{-1}^1 = 5 - (-3) = 8. \end{aligned}$$

112. **Feladat.** Számoljuk ki az  $f(x; y) = 3x^2 \cdot \sin y$  függvény integrálját a  $T$  halmazon, ha  $T = [-1; 1] \times [0; \pi]$  halmazon!

**Megoldás:**

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \iint_T 3x^2 \cdot \sin y &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^\pi 3x^2 \cdot \sin y \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 [-3x^2 \cdot \cos y]_{y=0}^{y=\pi} dx = \\ &= \int_{-1}^1 3x^2 + 3x^2 \, dx = \int_{-1}^1 6x^2 \, dx = [2x^3]_{-1}^1 = 4. \end{aligned}$$

113. **Feladat.** Tekintsük a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2; x^2 \leq y \leq x + 2\}$$

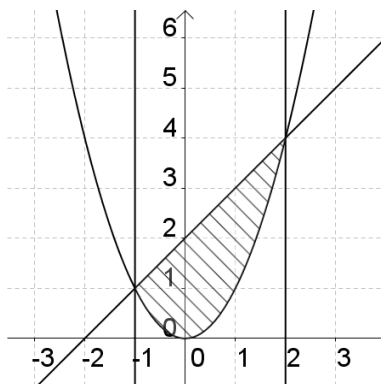
halmazt!

- Elsőfajú vagy másodfajú normáltartomány-e a  $D$  halmaz?
- Rajzoljuk fel a  $D$  halmazt!
- Számoljuk ki a  $D$  halmaz területét kettős integrál segítségével!

**Megoldás:**

a) A  $D$  halmaz elsőfajú normáltartomány, mert az  $x$  változó határai rögzítettek.

b) A  $D$  halmaz ábrázolása:



c) A  $D$  halmaz területe:

$$\begin{aligned} \iint_D 1 &= \int_{-1}^2 \left( \int_{x^2}^{x+2} 1 \, dy \right) dx = \int_{-1}^2 [y]_{y=x^2}^{y=x+2} dx = \\ &= \int_{-1}^2 x + 2 - x^2 \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \\ &= \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left( \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 4,5. \end{aligned}$$

## 19. Tétel: Vektorértékű függvények

1. Mit nevezünk síkgörbének? Mit értünk egy síkgörbe koordinátafüggvényeiben?
2. Mikor differenciálható egy síkgörbe és mit értünk egy síkgörbe deriváltján?
3. Hogyan definiáljuk egy síkgörbe érintőegyenését?
4. Mit nevezünk egy síkgörbe görbületi függvényének és adott pontbeli görbületének?
5. Hogyan adható meg egy síkgörbe görbülete a koordinátafüggvényeket tartalmazó mátrix segítségével?
6. Adjuk meg egy olyan síkgörbe hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja az  $(x_0; y_0)$  középpontú,  $R$  sugarú körvonal!
7. Adjuk meg egy olyan síkgörbe hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja az  $(x_0; y_0)$  ponton áthaladó,  $v$  irányvektorú egyenes!
8. Hogyan számolható ki egy síkgörbe ívhossza?
9. Mit nevezünk térgörbének? Mit értünk egy térgörbe koordinátafüggvényein?
10. Mikor differenciálható egy térgörbe és mit értünk egy térgörbe deriváltján?
11. Mit nevezünk egy térgörbe görbületi függvényének és adott pontbeli görbületének?
12. Hogyan számolható ki egy térgörbe torziója?
13. Hogyan számolható ki egy térgörbe ívhossza?
14. Mit nevezünk felületnek? Mit értünk egy felület koordinátafüggvényein?
15. Adjuk meg egy olyan felületnek a hozzárendelési szabályát, amelynek a grafikonja a  $P$  ponton áthaladó,  $a$  és  $b$  lineárisan független vektorok által kifeszített sík.
16. Mikor mondjuk azt, hogy egy felület differenciálható?
17. Mit értünk egy felület deriváltján?
18. Milyen matematikai objektum egy felület deriváltja?
19. Mit nevezünk vektormezőnek?
20. Mit értünk egy vektormező koordinátafüggvényein?
21. Milyen matematikai objektum egy vektormező deriváltja?
22. Adjuk meg egy vektormező deriváltmátrixát a koordinátafüggvényei segítségével!
23. Mit nevezünk egy vektormező divergenciájának?

24. Hogyan adható meg a divergencia a deriváltmátrixból?
25. Mikor mondjuk azt, hogy egy vektormező forrásmentes?
26. Mit nevezünk egy vektormező rotációjának?
27. Mikor mondjuk azt, hogy egy vektormező örvénymentes?
28. Mennyi a szimmetrikus deriváltmátrixú vektormező rotációja?
29. Hogyan adható meg egy vektormező divergenciája és rotációja a  $\nabla$  operátor segítségével?
30. Hogyan számolható ki egy vektormező görbementi integrálja?
31. Hogyan számolható ki egy vektormező felületmenti integrálja?

19.1. **Definíció.** Az  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  típusú függvényeket *síkgörbék*nek nevezzük. Amennyiben

$$r(t) = (x(t); y(t)),$$

akkor az  $x$  és  $y$  egyváltozós, valós értékű függvényeket a síkgörbe *koordinátafüggvényeinek* hívjuk.

A koordinátafüggvényeket sorvektorként és oszlopvektorként is szokás írni.

19.2. **Definíció.** Legyenek  $a$  és  $b$  olyan valós számok, melyekre  $a < b$  teljesül! Azt mondjuk, hogy az

$$r: ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad r(t) = (x(t); y(t))$$

*síkgörbe differenciálható* a  $t_0 \in ]a; b[$  helyen, ha a koordinátafüggvényei differenciálhatóak a  $t_0$  helyen.

Ha a síkgörbe differenciálható a  $t_0$  helyen, akkor a deriváltja

$$r'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0)).$$

A koordinátafüggvények deriváltjait szokás  $\frac{dx}{dt}$ , illetve  $\frac{dy}{dt}$  módon is jelölni.

19.3. **Definíció.** Az  $r$  síkgörbe *érintőegyenese* a  $t_0$  paraméterű pontban:

$$e(t) = r(t_0) + r'(t_0) \cdot (t - t_0) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

19.4. **Definíció.** Az  $r(t) = (x(t); y(t))$  síkgörbe *görbületi függvénye*:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)|}{\left( (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

A  $t \rightarrow \kappa(t)$  függvény  $t_0$  helyen vett helyettesítési értékét a síkgörbe  $t_0$  paraméterbeli pontjához tartozó *görbületének* mondjuk.

19.5. **Megjegyzés.** Az  $r(t) = (x(t); y(t))$  síkgörbe *görbületi függvénye*:

$$\kappa(t) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} \right|}{|r'(t)|^3}.$$

19.6. **Példa.** Az  $(x_0; y_0)$  középpontú,  $R$  sugarú körvonalat megadó síkgörbe hozzárendelési szabálya például

$$r(t) = (x_0 + R \cdot \cos t; y_0 + R \cdot \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

19.7. **Példa.** Az  $(x_0; y_0)$  ponton áthaladó,  $v = (v_1; v_2)$  irányvektorú egyenest megadó síkgörbe

$$r(t) = (x_0 + v_1 \cdot t; y_0 + v_2 \cdot t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

19.8. **Definíció.** Legyen  $t \in [a; b]$ ! Ha a  $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t))$  síkgörbe sima, és a  $t = a$  és  $t = b$  paraméterű pontokon kívül nem metszi önmagát, akkor az *ív*hossza:

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

19.9. **Definíció.** Az  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  típusú függvényeket *térgörbéknek* nevezzük. Amennyiben

$$r(t) = (x(t); y(t); z(t)),$$

akkor az  $x$ ,  $y$  és  $z$  egyváltozós, valós értékű függvényeket a térgörbe *koordinátafüggvényeinek* hívjuk.

A koordinátafüggvényeket sorvektorként és oszlopvektorként is szokás írni.

19.10. **Definíció.** Legyenek  $a$  és  $b$  olyan valós számok, melyekre  $a < b$  teljesül! Azt mondjuk, hogy az

$$r: ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(t) = (x(t); y(t); z(t))$$

térgörbe *differenciálható* a  $t_0 \in ]a; b[$  helyen, ha a koordinátafüggvényei differenciálhatóak a  $t_0$  helyen.

Ha a térgörbe differenciálható a  $t_0$  helyen, akkor a deriváltja

$$r'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)).$$

A koordinátafüggvények deriváltjait szokás  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ , illetve  $\frac{dz}{dt}$  módon is jelölni.

19.11. **Definíció.** Az  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  térgörbe *görbületi függvénye*:

$$\kappa(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}.$$

A  $t \rightarrow \kappa(t)$  függvény  $t_0$  helyen vett helyettesítési értékét a térgörbe  $t_0$  paraméterbeli pontjához tartozó *görbületének* mondjuk.

19.12. **Definíció.** Az  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  térgörbe *torziója* vagy *csavarodása*:

$$\tau(t) = \frac{(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2} = \frac{r'(t) \cdot r''(t) \cdot r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2}.$$

19.13. **Definíció.** Legyen  $t \in [a; b]$ ! Ha a  $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t); z(t))$  térgörbe sima, és a  $t = a$  és  $t = b$  paraméterű pontokon kívül nem metszi önmagát, akkor az *ívhossza*:

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

19.14. **Definíció.** Az  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezéseket *felületeknek* nevezzük. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy az  $r$  függvény a felület egy *paraméterezése* vagy *paraméteres előállítás*.

19.15. **Példa.** Ha  $a$  és  $b$  lineárisan független vektorok a térben, akkor az

$$r(u; v) = P + u \cdot a + v \cdot b$$

felület a  $P$  ponton áthaladó,  $a$  és  $b$  vektorok által kifeszített sík paraméteres előállítás.

Ha  $P = (x_0; y_0; z_0)$ ,  $a = (a_1; a_2; a_3)$  és  $b = (b_1; b_2; b_3)$ , akkor

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} x_0 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1 \\ y_0 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2 \\ z_0 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3 \end{pmatrix},$$

ahol  $u, v \in \mathbb{R}$ .

19.16. **Definíció.** Az  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  felület *differenciálható* az  $(u_0; v_0)$  helyen, ha a koordinátáfüggvényei differenciálhatóak az  $(u_0; v_0)$  helyen.

19.17. **Definíció.** Az  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $r(u; v) = (x(u; v); y(u; v); z(u; v))$  differenciálható függvény *differenciálhányados függvénye*:

$$r'(u; v) = \begin{pmatrix} x'_u(u; v) & x'_v(u; v) \\ y'_u(u; v) & y'_v(u; v) \\ z'_u(u; v) & z'_v(u; v) \end{pmatrix}.$$

19.18. **Megjegyzés.** Felület deriváltfüggvénye  $3 \times 2$  típusú mátrix.

19.19. **Definíció.** A  $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  típusú függvényeket *vektormezőknek* nevezük.

19.20. **Definíció.** A

$$v(x; y; z) = \begin{pmatrix} v_1(x; y; z) \\ v_2(x; y; z) \\ v_3(x; y; z) \end{pmatrix}$$

vektormező *koordinátafüggvényei* a  $v_1, v_2, v_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  háromváltozós, valós értékű függvények.

19.21. **Megjegyzés.** Differenciálható vektormező deriváltfüggvénye egy  $3 \times 3$  típusú mátrix.

19.22. **Megjegyzés.** A

$$v(x; y; z) = \begin{pmatrix} v_1(x; y; z) \\ v_2(x; y; z) \\ v_3(x; y; z) \end{pmatrix}$$

vektormező deriváltmátrixa:

$$v'(x; y; z) = \begin{pmatrix} (v_1)'_x & (v_1)'_y & (v_1)'_z \\ (v_2)'_x & (v_2)'_y & (v_2)'_z \\ (v_3)'_x & (v_3)'_y & (v_3)'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x v_1 & \partial_y v_1 & \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 & \partial_y v_2 & \partial_z v_2 \\ \partial_x v_3 & \partial_y v_3 & \partial_z v_3 \end{pmatrix}.$$

19.23. **Definíció.** A  $v(x; y; z) = (v_1(x; y; z); v_2(x; y; z); v_3(x; y; z))$  vektormező *divergenciája* a  $P$  pontban:

$$\operatorname{div} v(P) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3.$$

19.24. **Megjegyzés.** Vektormező divergenciája a deriváltmátrixának nyoma, azaz a főátlóbeli elemeinek összege.

19.25. **Definíció.** Egy vektormező *forrásmentes*, ha a divergenciája zérus.

19.26. **Definíció.** A  $v(x; y; z) = (v_1(x; y; z); v_2(x; y; z); v_3(x; y; z))$  vektormező *rotációja* a  $P$  pontban:

$$\operatorname{rot} v(P) = \begin{pmatrix} \partial_y v_3(P) - \partial_z v_2(P) \\ -\partial_x v_3(P) + \partial_z v_1(P) \\ \partial_x v_2(P) - \partial_y v_1(P) \end{pmatrix}.$$

A könnyebb megjegyezhetőség kedvéért formálisan a

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsát az első sora szerint kifejtve éppen a rotáció képletét kapjuk.

19.27. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy vektormező *örvénymentes*, ha a rotációja zérusvektor.

19.28. **Megjegyzés.** Ha egy vektormező deriváltmátrixa szimmetrikus, akkor a vektormező örvénymentes, azaz a rotációja zérusvektor.

19.29. **Megjegyzés.** A divergencia és a rotáció formálisan kifejezhető az úgynevezett

$$\nabla = (\partial_x; \partial_y; \partial_z)$$

operátor segítségével:

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} v = \nabla \times v.$$

19.30. **Definíció.** Tegyük fel, hogy a  $\gamma$  görbe paraméteres alakja  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Ekkor a  $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormező *görbementi integrálja* a  $\gamma$  görbe  $[a; b]$  intervallumhoz tartozó szakasza mentén:

$$\int_{\gamma} v = \int_a^b v(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

Ha a  $\gamma$  görbe zárt, akkor a vektormező  $\gamma$  görbe mentén számolt görbementi integráljának értékét *cirkulációnak* nevezzük.

19.31. **Definíció.** Egy vektormező *felületmenti integrálja* más szóval *fluxusa* a vektormező és a felületi normális irányába mutató vektor skaláris szorzatának

integrálja, vagyis a  $w$  vektormező esetén az  $r(u; v)$  paraméterezésű  $F$  felületnek az  $(u; v) \subset D$  paramétertartomány által meghatározott darabjára vonatkozó felületmenti integrálja (fluxusa):

$$\iint_F w = \int_F w(r) \cdot n = \iint_D w(r(u; v)) \cdot (\pm r'_u(u; v) \times r'_v(u; v))$$

**Kidolgozott feladatok**

114. **Feladat.** Készítsünk értéktáblázatot, amely tartalmazza az

$$r(t) = (t^2; t^3) \quad (t \in [-2; 2])$$

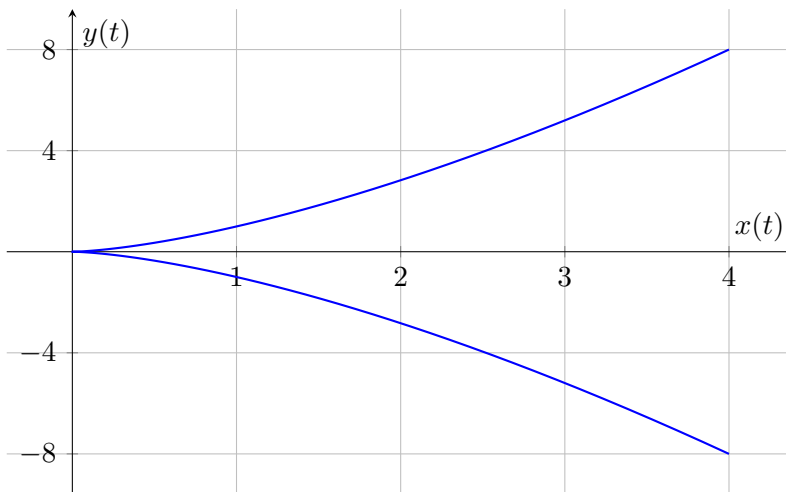
síkgörbe  $t = -2; -1; 0; 1; 2$  paraméterű értékeit, majd vázoljuk fel a síkgörbe grafikonját!

**Megoldás:**

A  $t = -2; -1; 0; 1; 2$  értékek esetén az  $r(t)$  értékei:

$t$	-2	-1	0	1	2
$r(t)$	(4; -8)	(1; -1)	(0; 0)	(1; 1)	(4; 8)

A síkgörbe grafikonja:



115. **Feladat.** Írjuk fel az

$$r(t) = (2t + 1; t^3 - t^2 + 1) \quad (t \in [0; 2])$$

síkgörbe érintőegyenésének egyenletét a  $t_0 = 1$  paraméterű helyen!

**Megoldás:**

Mivel  $r'(t) = (2; 3t^2 - 2t)$ , ezért  $r'(t_0) = (2; 1)$ .

Az érintőegyenes egyenlete:

$$e(t) = r(t_0) + r'(t_0) \cdot (t - t_0).$$

Mivel  $r(t_0) = (3; 1)$ , ezért az érintőegyenes egyenlete:

$$e(t) = (3; 1) + (2; 1) \cdot (t - 1) \Rightarrow e(t) = (3; 1) + (2t - 2; t - 1),$$

azaz

$$e(t) = (2t + 1; t).$$

Tehát  $x = 2t + 1$  és  $y = t$ . Az első egyenletből az  $t$ -t kifejezve azt kapjuk, hogy  $t = \frac{x-1}{2}$ . Ezt behelyettesítve az  $y = t$  egyenletbe

$$y = \frac{x-1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

adódik.

**116. Feladat.** Írjuk fel az

$$r(t) = (e^t; 2e^{-t} - 1)$$

síkgörbe érintőegyenesének egyenletét a  $t_0 = 0$  paraméterű helyen!

**Megoldás:**

Mivel  $r'(t) = (e^t; -2e^{-t})$ , ezért  $r'(t_0) = (1; -2)$ .

Az érintőegyenes egyenlete:  $e(t) = r(t_0) + r'(t_0) \cdot (t - t_0)$ .

Mivel  $r(t_0) = (1; 1)$ , ezért az érintőegyenes egyenlete:

$$e(t) = (1; 1) + (1; -2) \cdot (t - 0) \Rightarrow e(t) = (1; 1) + (t; -2t),$$

azaz

$$e(t) = (1 + t; 1 - 2t).$$

Tehát  $x = 1 + t$  és  $y = 1 - 2t$ . Az első egyenletből az  $t$ -t kifejezve azt kapjuk, hogy  $t = x - 1$ . Ezt behelyettesítve az  $y = 1 - 2t$  egyenletbe

$$y = 1 - 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 3 - 2x$$

adódik.

**117. Feladat.** Egy anyagi pont pályáját az  $r(t) = (t^3; 3t + 2)$  síkgörbe írja le. Adjuk meg a sebességvektort és a gyorsulásvektort!

**Megoldás:**

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = (3t^2; 3).$$

A gyorsulásvektor:

$$a(t) = r''(t) = (6t; 0).$$

118. **Feladat.** Tekintsük az

$$r(t) = (t; t^2) \quad (t \in [0; 9])$$

síkgörbét!

- Határozzuk meg a görbületet megadó függvényt!
- Számoljuk ki a görbületet a  $t = 1$  paraméterű pontban!
- Melyik pontban lesz a görbület maximális?

**Megoldás:**

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t \quad \text{és} \quad y(t) = t^2.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 1 \quad \text{és} \quad y'(t) = 2t.$$

A koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y''(t) = 2.$$

A görbületi függvény:

$$\kappa(t) = \frac{|2 - 0|}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

b) A görbület a  $t = 1$  paraméterű pontban:

$$\kappa(1) = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{125}} = \frac{2}{5 \cdot \sqrt{5}}.$$

c) A  $\kappa(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}$  görbületet megadó függvény értéke akkor a legnagyobb, amikor a nevező a legkisebb, vagyis ha  $t = 0$ . Tehát a  $P = (0; 0)$  pontban maximális a görbület.

119. **Feladat.** Számoljuk ki az  $r(t) = (t^2 + 1; 2t^2 - 3)$  görbe ívhosszát a  $[0; 2]$  intervallumon!

**Megoldás:**

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t^2 + 1 \quad \text{és} \quad y(t) = 2t^2 - 3.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 2t \quad \text{és} \quad y'(t) = 4t.$$

Mivel

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4t^2 + 16t^2 = 20t^2,$$

ezért az ívhossz:

$$L = \int_0^2 \sqrt{20t^2} dt = \int_0^2 t \cdot \sqrt{20} dt = \left[ \sqrt{20} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 2 \cdot \sqrt{20} = 4 \cdot \sqrt{5}.$$

**120. Feladat.** Egy részecske pályáját az

$$r(t) = (e^t; e^{2t})$$

síkgörbe grafikonja írja le. Adjuk meg sebességvektorát és a gyorsulásvektorát a  $t = \ln 3$  időpillanatban!

**Megoldás:**

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = (e^t; 2e^{2t}).$$

A sebességvektor a  $t = \ln 3$  időpillanatban:

$$v(\ln 3) = r'(\ln 3) = (e^{\ln 3}; 2e^{2\ln 3}) = (3; 2 \cdot 9) = (3; 18).$$

A gyorsulásvektor:

$$a(t) = v'(t) = r''(t) = (e^t; 4e^{2t}).$$

A gyorsulásvektor a  $t = \ln 3$  időpillanatban:

$$a(\ln 3) = v'(\ln 3) = r''(\ln 3) = (e^{\ln 3}; 4e^{2\ln 3}) = (3; 4 \cdot 9) = (3; 36).$$

**121. Feladat.** Egy anyagi pont pályáját az  $r(t) = (t^3; 3t + 2; \sin t)$  térgörbe írja le! Adjuk meg a sebességvektort és a gyorsulásvektort!

**Megoldás:**

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = (3t^2; 3; \cos t).$$

A gyorsulásvektor:

$$a(t) = r''(t) = (6t; 0; -\sin t).$$

**122. Feladat.** Tekintsük az

$$r(t) = (t; t^2; t^3) \quad (t \in [0; 9])$$

térgörbét!

a) Határozzuk meg a görbületet megadó függvényt!

b) Számoljuk ki a görbületet a  $t = 1$  paraméterű pontban!

**Megoldás:**

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t \quad \text{és} \quad y(t) = t^2 \quad \text{és} \quad z(t) = t^3.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 1 \quad \text{és} \quad y'(t) = 2t \quad \text{és} \quad z'(t) = 3t^2.$$

A koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y''(t) = 2 \quad \text{és} \quad z''(t) = 6t.$$

Az  $r'(t) = (1; 2t; 3t^2)$  és  $r''(t) = (0; 2; 6t)$  vektorok vektoriális szorzata:

$$\begin{aligned} r'(t) \times r''(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = \\ &= (12t^2 - 6t^2; -6t; 2) = (6t^2; -6t; 2). \end{aligned}$$

Az  $r'(t) \times r''(t)$  vektor hossza:

$$|r'(t) \times r''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}.$$

A  $r'(t)$  vektor hossza:

$$|r'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}.$$

A görbületi függvény:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}{\sqrt{(1 + 4t^2 + 9t^4)^3}}.$$

b) A görbület a  $t = 1$  paraméterű pontban:

$$\kappa(1) = \frac{|r'(1) \times r''(1)|}{|r'(1)|^3} = \frac{\sqrt{76}}{\sqrt{14^3}}.$$

123. **Feladat.** Számoljuk ki az  $r(t) = (t^2 + 1; 2t^2 - 3; 2)$  görbe ívhosszát a  $[0; 2]$  intervallumon!**Megoldás:**

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t^2 + 1 \quad \text{és} \quad y(t) = 2t^2 - 3 \quad \text{és} \quad z(t) = 2.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 2t \quad \text{és} \quad y'(t) = 4t \quad \text{és} \quad z'(t) = 0.$$

Mivel

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = 4t^2 + 16t^2 = 20t^2,$$

ezért az ívhossz:

$$L = \int_0^2 \sqrt{20t^2} dt = \int_0^2 t \cdot \sqrt{20} dt = \left[ \sqrt{20} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 2 \cdot \sqrt{20} = 4 \cdot \sqrt{5}.$$

**124. Feladat.** Egy részecske pályáját az

$$r(t) = (t + 1; t^2 - 1; \ln(2t))$$

térgörbe grafikonja írja le. Adjuk meg sebességvektorát és a gyorsulásvektorát a  $t = 1$  időpillanatban!

**Megoldás:**

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = \left( 1; 2t; \frac{1}{t} \right).$$

A sebességvektor a  $t = 1$  időpillanatban:

$$v(1) = r'(1) = (1; 2; 1).$$

A gyorsulásvektor:

$$a(t) = v'(t) = r''(t) = \left( 0; 2; -\frac{1}{t^2} \right).$$

A gyorsulásvektor a  $t = 1$  időpillanatban:

$$a(1) = v'(1) = r''(1) = (0; 2; -1).$$

**125. Feladat.** Tekintjük az

$$r(t) = (t; \sin t; t) \quad (t \in [0; 2\pi])$$

térgörbét!

- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeinek deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeinek másodrendű deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeinek harmadrendű deriváltfüggvényeit!
- Számoljuk ki a görbületet a  $t_0 = \pi$  paraméterű pontban!
- Számoljuk ki a torziót a  $t_0 = \pi$  paraméterű pontban!

**Megoldás:**

a) A térgörbe koordinátafüggvényei:

$$x(t) = t \quad \text{és} \quad y(t) = \sin t \quad \text{és} \quad z(t) = t.$$

b) A térgörbe koordinátafüggvényeinek deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 1 \quad \text{és} \quad y'(t) = \cos t \quad \text{és} \quad z'(t) = 1.$$

c) A térgörbe koordinátafüggvényeinek másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y''(t) = -\sin t \quad \text{és} \quad z''(t) = 0.$$

d) A térgörbe koordinátafüggvényeinek harmadrendű deriváltfüggvényei:

$$x'''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y'''(t) = -\cos t \quad \text{és} \quad z'''(t) = 0.$$

e) Az  $r'(t) = (1; \cos t; 1)$  és  $r''(t) = (0; -\sin t; 0)$  vektorok vektoriális szorzata:

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = (\sin t; 0; -\sin t).$$

Az  $r'(t) \times r''(t)$  vektor hossza:

$$|r'(t) \times r''(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2 \sin^2 t}.$$

A  $r'(t)$  vektor hossza:

$$|r'(t)| = \sqrt{2 + \cos^2 t}.$$

A görbületi függvény:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2 \sin^2 t}}{\sqrt{(2 + \cos^2 t)^3}}.$$

A görbület a  $t = \pi$  paraméterű pontban:

$$\kappa(\pi) = \frac{\sqrt{2 \sin^2 \pi}}{\sqrt{(2 + \cos^2 \pi)^3}} = 0.$$

f) Az  $r'(t) \cdot r''(t) \cdot r'''(t)$  vegyes szorzat:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t & 0 \\ 0 & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

A torzió:  $\tau(t) = 0$ .

126. **Feladat.** Tekintsük az  $r(u; v) = (u + 2; u \cdot v; v - u^2)$  felületet!

- Adjuk meg a felület koordinátafüggvényeit!
- Adjuk meg a felület koordinátafüggvényeinek parciális deriváltfüggvényeit!
- Határozzuk meg a felület deriváltfüggvényét!
- Határozzuk meg a felület deriváltfüggvényének az  $(u_0; v_0) = (2; -1)$  helyen vett helyettesítési értékét!

**Megoldás:**

a) A felület koordinátafüggvényei:

$$x(u; v) = u + 2 \quad \text{és} \quad y(u; v) = u \cdot v \quad \text{és} \quad z(u; v) = v - u^2.$$

b) A koordinátafüggvények  $u$  változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_u(u; v) = 1 \quad \text{és} \quad y'_u(u; v) = v \quad \text{és} \quad z'_u(u; v) = -2u.$$

A koordinátafüggvények  $v$  változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_v(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad y'_v(u; v) = u \quad \text{és} \quad z'_v(u; v) = 1.$$

c) A felület deriváltfüggvénye:

$$r'(u; v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ -2u & 1 \end{pmatrix}.$$

d) A felület deriváltfüggvényének helyettesítési értéke az  $(u_0; v_0) = (2; -1)$  helyen:

$$r'(u_0; v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

127. **Feladat.** Tekintsük a

$$v(x; y; z) = \begin{pmatrix} x^2 + e^{2y} \\ xyz + \frac{1}{x} \\ \sin(2y) \end{pmatrix}$$

vektormezőt!

- Határozzuk meg a  $v$  vektormező deriváltmátrixát!
- Határozzuk meg a  $v$  vektormező divergenciáját!
- Forrásmentes-e a vektormező?
- Határozzuk meg a  $v$  vektormező rotációját!
- Örvénymentes-e a vektormező?

**Megoldás:**

a) A  $v$  vektormező deriváltmátrixa:

$$v'(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2x & e^{2y} \cdot 2 & 0 \\ yz - \frac{1}{x^2} & xz & xy \\ 0 & 2 \cos(2y) & 0 \end{pmatrix}.$$

b) A  $v$  vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div} v(x; y; z) = 2x + xz + 0 = 2x + xz.$$

c) Nem forrásmentes, mert a divergenciája nem nulla.

d) A  $v$  vektormező rotációja:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v(x; y; z) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ -\partial_x v_3 + \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos(2y) - xy \\ -0 + 0 \\ yz - \frac{1}{x^2} - 2e^{2y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e) Nem örvénymentes, mert a rotációja nem zérusvektor.

## 20. Tétel: Közöséges elsőrendű differenciálegyenletek

1. Mit nevezünk differenciálegyenletnek?
2. Mikor mondjuk azt, hogy egy differenciálegyenlet közöséges, és mikor mondjuk azt, hogy parciális?
3. Adjunk példát közöséges differenciálegyenletre és parciálisra!
4. Mit értünk egy differenciálegyenlet rendjén?
5. Mikor mondjuk azt, hogy egy differenciálegyenlet explicit és mikor mondjuk azt, hogy implicit?
6. Adjunk példát explicit és implicit differenciálegyenletre!
7. Mit értünk partikuláris megoldáson?
8. Mit nevezünk egy elsőrendű differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladatnak?
9. Mikor mondjuk azt, hogy egy differenciálegyenlet lineáris?
10. Adjuk példát lineáris differenciálegyenletre!
11. Mit értünk azon, hogy egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet homogén, illetve azon, hogy inhomogén?
12. Adjunk példát homogén és inhomogén lineáris differenciálegyenletre!
13. Mit értünk azon, hogy egy differenciálegyenlet konstansegyütthatós és azon, hogy függvényegyütthatós!
14. Adjunk példát olyan differenciálegyenletre, amelyik konstansegyütthatós és olyanra, amelyik függvényegyütthatós!
15. Mit nevezünk közvetlenül integrálható elsőrendű differenciálegyenletnek?
16. Adjunk példát közvetlenül integrálható elsőrendű differenciálegyenletre!
17. Hogyan oldható meg egy közvetlenül integrálható elsőrendű differenciálegyenlet?
18. Mit nevezünk szeparábilis differenciálegyenletnek?
19. Adjunk példát szeparábilis differenciálegyenletre!
20. Hogyan oldható meg egy szeparábilis differenciálegyenlet?
21. Hogyan áll elő egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása?
22. Mit nevezünk konstansvariálásnak?
23. Mit értünk elsőrendű lineáris differenciálegyenlet esetében a próbafüggvény módszerén?

**20.1. Definíció.** *Differenciálegyenletnek* nevezünk egy olyan egyenletet, melyben szerepel egy vagy több (független) változó, azoknak valamilyen ismeretlen függvénye és azok derivált függvényei.

**20.2. Definíció.** Ha az ismeretlen függvény egyváltozós, akkor *közönséges differenciálegyenletről*, ha többváltozós, akkor *parciális differenciálegyenletről* beszélünk.

**20.3. Példa.** Az

$$y'(x) - 3x^2 \cdot y(x) = 0$$

egyenlet közönséges, míg a

$$2x \cdot u'_x(x; y) + u(x; y)'_y = 0$$

egyenlet parciális differenciálegyenlet.

**20.4. Definíció.** Egy differenciálegyenlet *rendje* az egyenletben előforduló legmagasabb rendű derivált rendje.

**20.5. Definíció.** Ha a legmagasabb rendű derivált ki van fejezve a változó és a többi derivált függvényeként, akkor *explicit* egyenletről beszélünk, ellenkező esetben *implicit* egyenletről szólnak.

**20.6. Példa.** Az  $y'(x) = 4x^3 \cdot y(x) + 2x$  differenciálegyenlet elsőrendű, explicit, közönséges differenciálegyenlet.

Az  $y'(x) + 4x^3 \cdot y(x) + 2 = 0$  differenciálegyenlet elsőrendű, implicit, közönséges differenciálegyenlet.

**20.7. Definíció.** Egy  $n$ -edrendű differenciálegyenlet *partikuláris megoldásán* olyan megoldást értünk, amely legfeljebb  $n - 1$  darab tetszőleges, egymástól független konstanst tartalmaz.

**20.8. Megjegyzés.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^2$  nyílt halmaz és  $(x_0; y_0) \in D$ . Az

$$y'(x) = f(x; y(x))$$

differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték problémán (kezdetiérték feladaton), vagy Cauchy-feladaton azt a feladatot értjük, amikor az egyenlet azon  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  megoldását keressük, melyre

$$(1) \quad x_0 \in I;$$

$$(2) \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

20.9. **Definíció.** Legyenek  $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. A

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x),$$

differenciálegyenletet  $n$ -edrendű közönséges *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az egyenlet *nem lineáris*.

Kevésbé precízen megfogalmazva egy differenciálegyenlet lineáris, ha a differenciálegyenletben az ismeretlen függvény és annak deriváltjainak lineáris kombinációja, valamint az ismeretlen függvényt nem tartalmazó kifejezés szerepel.

20.10. **Példa.** Az

$$y'(x) = 3x^2 \cdot y(x)$$

egyenlet lineáris, míg az

$$y'(x) = \cos y(x)$$

egyenlet nem lineáris.

20.11. **Definíció.** Legyenek  $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. A

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x),$$

lineáris differenciálegyenletet *homogénnek* nevezzük, ha  $b$  az azonosan zéró függvény. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az egyenlet *inhomogén*.

20.12. **Példa.** Az

$$y'(x) - 5y(x) = 0$$

differenciálegyenlet homogén, míg az

$$y'(x) - 5y(x) = 3x^2$$

differenciálegyenlet inhomogén.

20.13. **Definíció.** Legyenek  $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. A

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x),$$

lineáris differenciálegyenletet *konstansegyütthatós*nak vagy más szóval *állandó együtthatós*nak nevezzük, ha minden  $i \in \{1; \dots; n\}$  esetén az  $a_i$  függvények konstans függvények. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az egyenlet *függvényegyütthatós*.

20.14. **Példa.** Az

$$y'(x) + 5y(x) = 6$$

differenciálegyenlet konstansegyütthatós, míg az

$$y'(x) + x^2 \cdot y(x) = 5$$

differenciálegyenlet függvényegyütthatós.

20.15. **Definíció.** Legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Az  $y'(x) = f(x)$  alakú differenciálegyenletet *közvetlenül integrálható elsőrendű differenciálegyenletnek* nevezzük.

20.16. **Példa.** Az  $y'(x) = 3x^2 + 2$  differenciálegyenlet közvetlenül integrálható elsőrendű.

20.17. **Tétel.** Legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény.

Egy differenciálható  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény pontosan akkor megoldása az

$$y'(x) = f(x)$$

egyenletnek, ha  $y(x) = F(x) + c$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges és  $F$  az  $f$  függvény primitív függvénye.

20.18. **Definíció.** Legyenek  $I$  és  $J$  nyílt intervallumok, továbbá  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $h: J \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. Az

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

egyenletet *szétválasztható változójú* vagy *szeparábilis differenciálegyenletnek* nevezzük.

20.19. **Példa.** Az  $y'(x) = 5x^3 \cdot \cos(y(x))$  differenciálegyenlet szeparábilis.

20.20. **Tétel.** Legyenek  $I$  és  $J$  nyílt intervallumok,  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $h: J \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. Az

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

egyenletnek  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  pontosan akkor megoldása, ha

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx,$$

azaz  $H(y(x)) = G(x)$ , ahol  $H$  az  $1/h(x)$  és  $G$  a  $g(x)$  primitív függvénye.

20.21. **Tétel.** Legyenek  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  adott, folytonos függvények. Az

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$$

lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

ahol  $y_h$  a homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása, és  $y_p$  pedig az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása.

Tehát egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása a megfelelő homogén egyenlet általános megoldása, valamint az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként áll elő.

20.22. **Tétel.** A kontansvariálás módszerének lényege az

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

általános megoldásában található  $y_h(x)$  és  $y_p(x)$  függvények megkeresése.

Először meghatározzuk a homogén differenciálegyenlet általános megoldását. Legyen ez

$$y_h(x) = C \cdot y_1(x),$$

ahol  $C \in \mathbb{R}$  és  $y_1(x)$  a homogén egyenlet egy megoldása. Ezután az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = C(x) \cdot y_1(x)$$

alakban keressük (vagyis a homogén egyenlet általános megoldásában szereplő  $C$  konstans kicseréljük egy  $C(x)$  függvényre).

Ezután az  $y_p(x)$  függvényt visszahelyettesítjük az eredeti (inhomogén) differenciálegyenletbe, majd abból meghatározzuk a  $C(x)$  függvényt.

20.23. **Tétel.** Abban az esetben, ha az elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet konstansgyűrthetős, továbbá a zavaró függvény speciális alakú, nevezetesen polinom-, exponenciális-, szinusz-, vagy koszinuszfüggvény, továbbá ezek összege (vagy különbsége), akkor a differenciálegyenlet partikuláris megoldása a zavaró függvényhez hasonló szerkezetű lesz. Az alábbi táblázatban összefoglaljuk, hogy az egyes esetekben milyen úgynevezett próbafüggvényt használhatunk a partikuláris megoldás meghatározásához.

Ha a partikuláris megoldásban nincs olyan tag, ami a homogén egyenlet megoldása lenne, akkor

zavaró függvény	a partikuláris megoldás általános alakja
$a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot e^{\alpha x}$
$a \cdot \sin(\alpha x)$	$A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)$
$a \cdot \cos(\alpha x)$	$A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)$

Ha a partikuláris megoldásban van olyan tag, ami a homogén egyenlet megoldása lenne, akkor

zavaró függvény	a partikuláris megoldás általános alakja
$a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$x \cdot (A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0)$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot x \cdot e^{\alpha x}$
$a \cdot \sin(\alpha x)$	$A \cdot x \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$
$a \cdot \cos(\alpha x)$	$A \cdot x \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$

Ebben az esetben (vagyis ha a próbafüggvény valamely tagja csak konstans szorzóban tér el a homogén egyenlet általános megoldásától) úgynevezett *rezonanciáról* beszélünk.

**Kidolgozott feladatok**

128. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = \cos 2x, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

A differenciálegyenlet mindkét oldalát integrálva

$$y(x) = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

adódik, ahol  $c \in \mathbb{R}$ . Mivel  $y(0) = 1$ , ezért

$$1 = y(0) = \frac{\sin 0}{2} + c = c,$$

így  $c = 1$ , tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 1.$$

129. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad y(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

A differenciálegyenlet mindkét oldalát integrálva

$$y(x) = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + c$$

adódik. Mivel  $y(0) = 2$ , ezért

$$2 = y(0) = \frac{1}{2} \cdot \ln 1 + c = c,$$

amiből azt kapjuk, hogy  $c = 2$ . Tehát a kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + 2 = \sqrt{\ln(x^2 + 1)} + 2.$$

130. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = 4x \cdot e^x, \quad y(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \int 4x \cdot e^x dx = 4x \cdot e^x - \int 4 \cdot e^x dx = 4x \cdot e^x - 4 \cdot e^x + c.$$

A kezdetiérték feltételt felhasználva

$$3 = y(0) = -4 \cdot e^0 + c = -4 + c,$$

így  $c = 7$ , tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = (x - 4) \cdot e^x + 7.$$

131. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = -2y^2(x) \cdot x, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

Vezessük be a  $g(x) = -2x$  és  $h(y) = y^2$  függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az  $y$  ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -2x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{y} = -x^2 + c$$

adódik, amiből

$$y = \frac{1}{x^2 - c}.$$

A kezdetiérték feltétel szerint  $y(0) = -\frac{1}{2}$ , így

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{-c} \quad \Rightarrow \quad c = 2,$$

tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

**132. Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = (3x^2 + 2x + 1) \cdot y(x), \quad y(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

Vezessük be a  $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$  és  $h(y) = y$ . Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az  $y$  ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 3x^2 + 2x + 1 dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |y| = x^3 + x^2 + x + c$$

adódik, amiből

$$y = e^{x^3+x^2+x+c} = e^{x^3+x^2+x} \cdot e^c = C \cdot e^{x^3+x^2+x}.$$

Mivel  $y(0) = 3$ , ezért

$$3 = y(0) = C \cdot e^0 = C,$$

tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 3 \cdot e^{x^3+x^2+x}.$$

133. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = 2y^2(x) + x \cdot y^2(x), \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

Az differenciálegyenlet szorzattá alakítható, így ekvivalens az

$$y'(x) = y^2(x) \cdot (2 + x)$$

egyenlettel. Legyen  $g(x) = 2 + x$  és  $h(y) = y^2$ . Ekkor teljesül az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

összefüggés. Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 2 + x dx.$$

A bal oldali integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int y^{-2} dy = -\frac{1}{y} + c_1.$$

A jobb oldali integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\int 2 + x dx = 2x + \frac{x^2}{2}.$$

Tehát az

$$-\frac{1}{y} = 2x + \frac{x^2}{2} + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \frac{-1}{2x + \frac{x^2}{2} + c} = \frac{-2}{4x + x^2 + 2c}.$$

Mivel  $y(0) = 1$ , ezért  $c = -1$ , így a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{-2}{4x + x^2 - 2}.$$

134. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) - y(x) = e^{5x}$$

differenciálegyenletet! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását konstansvariálás módszerével határozzuk meg!

**Megoldás:**

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. Először a homogén egyenlet általános megoldását határozzuk meg. Az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet

$$y'(x) - y(x) = 0,$$

melynek általános megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int -1 dx} = C \cdot e^x.$$

Ezután meghatározzuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a konstansvariálás módszerével.

A homogén egyenlet megoldásánál kapott  $C$  konstanszt kicseréljük egy  $C(x)$  függvényre és az eredeti inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p = C(x) \cdot e^x$$

alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe

$$y_p'(x) - y_p(x) = e^{5x}$$

adódik, így

$$(C(x) \cdot e^x)' - C(x) \cdot e^x = e^{5x}.$$

Elvégezve a bal oldalon a deriválást azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x - C(x) \cdot e^x = e^{5x},$$

azaz

$$C'(x) \cdot e^x = e^{5x} \Rightarrow C'(x) = e^{4x}.$$

Mivel  $f(ax + b)$ -típusú integrált kaptunk, így egy primitív függvény

$$C(x) = \frac{e^{4x}}{4}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldására azt kapjuk, hogy

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^x = \frac{e^{4x}}{4} \cdot e^x = \frac{e^{5x}}{4}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapjuk, vagyis

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^x + \frac{e^{5x}}{4}.$$

135. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) - 4y(x) = 4x^2 + 6x + 2, \quad y(0) = 10$$

kezdetiérték feladatot! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerrel határozzuk meg!

**Megoldás:**

A megfelelő homogén egyenlet  $y'(x) - 4y(x) = 0$ . A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = K \cdot e^{-\int -4 dx} = K \cdot e^{4x},$$

ahol  $K \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

A próbafüggvényt  $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$  alakban keressük. Az  $y_p$  függvény deriváltja  $y_p'(x) = 2Ax + B$ . Az  $y_p$  és  $y_p'$  függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) - 4y_p(x) = 4x^2 + 6x + 2,$$

vagyis

$$2Ax + B - 4 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 + 6x + 2,$$

így

$$-4Ax^2 + (2A - 4B) \cdot x + B - 4C = 4x^2 + 6x + 2.$$

Tehát teljesülnie kell a

$$\left. \begin{array}{rcl} -4A & & = 4 \\ 2A - 4B & & = 6 \\ & B - 4C & = 2 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszernek.

Az egyenletrendszer megoldására  $A = -1$ ,  $B = -2$  és  $C = -1$  adódik. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -x^2 - 2x - 1.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot e^{4x} - x^2 - 2x - 1.$$

Mivel  $y(0) = 10$ , ezért

$$10 = K - 1 \quad \Rightarrow \quad K = 11.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 11 \cdot e^{4x} - x^2 - 2x - 1.$$

## 21. Tétel: Közönséges másodrendű differenciálegyenletek

1. Mit értünk egy másodrendű lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletén?
2. Adja meg az  $y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0$  differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
3. Adjuk meg a másodrendű lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenlet általános megoldásának szerkezetét a karakterisztikus egyenlet megoldásának száma szerint!
4. Írjunk fel általános alakban egy másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet! Mit nevezünk zavaró függvények?
5. Írjuk le a másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldásának meghatározását konstansvariálással!
6. Írjuk le, hogy hogyan határozzuk meg a másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerrel!

21.1. **Definíció.** Legyen  $p, q \in \mathbb{R}$ . Az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletén* a

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$$

másodfokú egyenletet értjük.

21.2. **Példa.** Az

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$$

differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

21.3. **Tétel.** Legyen  $p, q \in \mathbb{R}$ . Tekintsük az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet!

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa pozitív, azaz ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van és ezek  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$ , akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa nulla, azaz ha a karakterisztikus egyenletnek egy (kétszeres multiplicitású) valós megoldása van és ez  $\lambda$ , akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa negatív, azaz ha a karakterisztikus egyenletnek két komplex megoldása van (amelyek egyébként egymás konjugáltjai) és az egyik megoldás  $\lambda$ , melynek valós része  $\alpha$  és képzetes része  $\beta$ , vagyis  $\lambda = \alpha + i \cdot \beta$ , akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + c_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x),$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**21.4. Definíció.** Legyen  $p, q \in \mathbb{R}$  tetszőleges,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, nem azonosan nulla függvény. Tekintsük az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x)$$

másodrendű lineáris differenciálegyenletet. Ekkor az  $f$  függvényt *zavaró függvénynek* is szokás nevezni.

**21.5. Eljárás.** Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását meghatározhatjuk a *konstansvariálás* módszerével.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

alakban keressük, ahol  $y_1$  és  $y_2$  a megfelelő homogén egyenlet két lineárisan független megoldása. Ezt a megoldásfüggvényt az eredeti

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x)$$

inhomogén egyenletbe behelyettesítve szeretnénk meghatározni a  $c_1$  és  $c_2$  függvényeket. Azonban két ismeretlenünk van, és a behelyettesítés után csak egy egyenletet kapnánk, ezért az egyértelmű megoldás meghatározása érdekében egy tetszőleges további feltételt is elő kell írunk a  $c_1$  és  $c_2$  függvényekre vonatkozóan. Legyen ez a feltétel az, hogy

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0.$$

Az  $y_p$  függvény deriváltja

$$y_p'(x) = c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Felhasználva, hogy

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$$

azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Az  $y_p$  függvény második deriváltja

$$y_p''(x) = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x).$$

Az  $y_p$  függvényt behelyettesítve az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x)$$

egyenletbe

$$\begin{aligned} & c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x) + \\ & + p \cdot (c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)) + \\ & + q \cdot (c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)) = f(x). \end{aligned}$$

Rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & c_1(x) \cdot y_1''(x) + p \cdot c_1(x) \cdot y_1'(x) + q \cdot c_1(x) \cdot y_1(x) + \\ & + c_2(x) \cdot y_2''(x) + p \cdot c_2(x) \cdot y_2'(x) + q \cdot c_2(x) \cdot y_2(x) + \\ & + c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Mivel  $y_1$  és  $y_2$  megoldása a homogén egyenletnek, ezért

$$c_1(x) \cdot (y_1''(x) + p \cdot y_1'(x) + q \cdot y_1(x)) = 0$$

és

$$c_2(x) \cdot (y_2''(x) + p \cdot y_2'(x) + q \cdot y_2(x)) = 0.$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x).$$

Vagyis  $c_1'$ -re és  $c_2'$ -re egy lineáris egyenletrendszert kaptunk:

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= f(x) \end{aligned} \right\}.$$

Ennek az alapmátrixa

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Ezen mátrix determinánása

$$\det(W(x)) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x),$$

ami éppen a Wronski-determináns, amely nem nulla, hiszen az  $y_1$  és  $y_2$  függvények analitikusak és lineárisan függetlenek. Ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszer például Cramer-szabállyal egyértelműen megoldható. Legyen

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

valamint

$$W_2(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\det(W_1(x)) = -f(x) \cdot y_2(x)$$

és

$$\det(W_2(x)) = f(x) \cdot y_1(x),$$

így

$$c_1'(x) = \frac{\det(W_1(x))}{\det(W(x))} = \frac{-f(x) \cdot y_2(x)}{y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)}$$

és

$$c_2'(x) = \frac{\det(W_2(x))}{\det(W(x))} = \frac{f(x) \cdot y_1(x)}{y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)}.$$

Tehát

$$c_1(x) = \int \frac{-f(x) \cdot y_2(x)}{y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)} dx$$

és

$$c_2(x) = \int \frac{f(x) \cdot y_1(x)}{y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)} dx.$$

A kapott  $c_1$  és  $c_2$  függvényekkel az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

és az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y_p(x),$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

### 21.6. Eljárás. (próbafüggvény)

Abban az esetben, ha a másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet konstansgyűrűthetős, továbbá a zavaró függvény speciális alakú, nevezetesen polinom-, exponenciális-, szinusz-, vagy koszinuszfüggvény, továbbá ezek összege (vagy különbsége), akkor a differenciálegyenlet partikuláris megoldása a zavaró függvényhez hasonló szerkezetű lesz.

Az alábbi táblázatokban összefoglaljuk, hogy az egyes esetekben milyen úgynevezett próbafüggvényt használhatunk a partikuláris megoldás meghatározásához.

Ha a zavaró függvényben nincs olyan tag, ami a homogén egyenlet megoldása lenne, akkor

zavaró függvény	a partikuláris megoldás általános alakja
$a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot e^{\alpha x}$
$a \cdot \sin(\alpha x)$	$A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)$
$a \cdot \cos(\alpha x)$	$A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)$

Ha a zavaró függvényben van olyan tag, ami a homogén egyenlet megoldása és  $\alpha$  egyszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletének (a második sorban azt is feltéve, hogy  $\alpha = 0$ ), akkor

zavaró függvény	a partikuláris megoldás általános alakja
$a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$x \cdot (A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0)$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot x \cdot e^{\alpha x}$
$a \cdot \sin(\alpha x)$	$A \cdot x \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$
$a \cdot \cos(\alpha x)$	$A \cdot x \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$

Ebben az esetben úgynevezett *rezonanciáról* beszélünk.

Ha a zavaró függvényben van olyan tag, ami a homogén egyenlet megoldása és  $\alpha$  kétszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletének (a második sorban azt is feltéve, hogy  $\alpha = 0$ ), akkor

zavaró függvény	a partikuláris megoldás általános alakja
$a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$x^2 \cdot (A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0)$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot x^2 \cdot e^{\alpha x}$
$a \cdot \sin(\alpha x)$	$A \cdot x^2 \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$
$a \cdot \cos(\alpha x)$	$A \cdot x^2 \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$

Ebben az esetben úgynevezett *másodrendű rezonanciáról* beszélünk.

**Kidolgozott feladatok**

136. **Feladat.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Oldjuk meg az

$$y''(x) + 7y'(x) + 10y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 7^2 - 4 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0,$$

így a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van. Ezek

$$\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2},$$

vagyis az egyik megoldás  $\lambda_1 = -5$ , a másik  $\lambda_2 = -2$ .

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = c_1 \cdot e^{-5x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

A  $c_1$  és  $c_2$  kiszámolásához szükségünk lesz az  $y'$  függvényre is:

$$y'(x) = -5c_1 \cdot e^{-5x} - 2c_2 \cdot e^{-2x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$2 = y(0) = c_1 \cdot e^{-5 \cdot 0} + c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = c_1 + c_2,$$

másrészt

$$5 = y'(0) = -5c_1 \cdot e^{-5 \cdot 0} - 2c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = -5c_1 - 2c_2.$$

Tehát a  $c_1$  és  $c_2$  értékét az

$$\left. \begin{array}{r} c_1 + c_2 = 2 \\ -5c_1 - 2c_2 = 5 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Az első egyenletet kettővel szorozva, majd a két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy  $-3c_1 = 9$ , amiből

$c_1 = -3$  adódik. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy  $c_2 = 5$ . Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = -3e^{-5x} + 5e^{-2x}.$$

**137. Feladat.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Oldjuk meg az

$$y''(x) - 4y'(x) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 16 > 0,$$

így a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van. Mivel

$$\lambda \cdot (\lambda - 4) = 0,$$

ezért a karakterisztikus egyenlet gyökei  $\lambda_1 = 0$ , illetve  $\lambda_2 = 4$ .

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = c_1 + c_2 \cdot e^{4x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

A  $c_1$  és  $c_2$  kiszámolásához szükségünk lesz az  $y'$  függvényre is:

$$y'(x) = 4c_2 \cdot e^{4x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$3 = y(0) = c_1 + c_2 \cdot e^{4 \cdot 0} = c_1 + c_2,$$

másrészt

$$2 = y'(0) = 4c_2 \cdot e^{4 \cdot 0} = 4c_2.$$

Tehát a  $c_1$  és  $c_2$  értékét az

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 3 \\ 4c_2 = 2 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. A második egyenletből azt kapjuk, hogy  $c_2 = \frac{1}{2}$ . Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe  $c_1 = \frac{5}{2}$  adódik. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{4x}.$$

**138. Feladat.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Oldjuk meg az

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0,$$

így egyetlen valós megoldás van, mégpedig

$$0 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

miatt  $\lambda = -1$ . A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

A  $c_1$  és  $c_2$  számok kiszámolásához szükségünk lesz az  $y'$  függvényre:

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-x} - c_2 \cdot x \cdot e^{-x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$2 = y(0) = c_1 \cdot e^{-0} + c_2 \cdot 0 \cdot e^{-0} = c_1,$$

így  $c_1 = 2$ . Másrészt

$$-1 = y'(0) = -c_1 \cdot e^{-0} + c_2 \cdot e^{-0} - c_2 \cdot 0 \cdot e^{-0} = -c_1 + c_2.$$

Mivel  $c_1 = 2$ , ezért  $c_2 = 1$ .

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 2e^{-x} + x \cdot e^{-x}.$$

139. **Feladat.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Tekintsük az

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat  $y$  megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az  $y$  függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az  $y$  függvényt!
- Számoljuk ki a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$  határértéket!
- Számoljuk ki a  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$  határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az  $y$  függvényt!
- Vázoljuk fel az  $y$  függvény grafikonját!
- Adjuk meg az  $y$  függvény értékkészletét!

**Megoldás:**

- a) A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0,$$

így egyetlen valós megoldás van, mégpedig

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

miatt  $\lambda = 1$ . A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

- b) A  $c_1$  és  $c_2$  számok kiszámolásához szükségünk lesz az  $y'$  függvényre:

$$y'(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$0 = y(0) = c_1,$$

így  $c_1 = 0$ . Másrészt

$$1 = y'(0) = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = c_1 + c_2.$$

Mivel  $c_1 = 0$ , ezért  $c_2 = 1$ .

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = x \cdot e^x.$$

- c) Az  $x \cdot e^x = 0$  egyenlet megoldása, vagyis az  $y$  függvény zérushelye  $x = 0$ .
- d) Az  $y'(x) = 0$ , vagyis az  $(x + 1) \cdot e^x = 0$  egyenletet kell megoldanunk, amire  $x = -1$  adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

$x$	$] - \infty; -1[$	$-1$	$] - 1; \infty[$
$y'(x)$	$-$	$0$	$+$
$y(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		$-e^{-1}$	

- e) Az  $y''(x) = 0$ , vagyis az  $(x + 2) \cdot e^x = 0$  egyenletet kell megoldanunk, amire  $x = -2$  adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

$x$	$] - \infty; -2[$	$-2$	$] - 2; \infty[$
$y''(x)$	$-$	$0$	$+$
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		$-2e^{-2}$	

- f) Az  $y(x)$  függvény határértéke  $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

- g) Az  $y(x)$  függvény határértéke  $\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^x = \infty.$$

h) Mivel

$$y(-x) = -x \cdot e^{-x},$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az  $y$  függvény nem páros.

Mivel

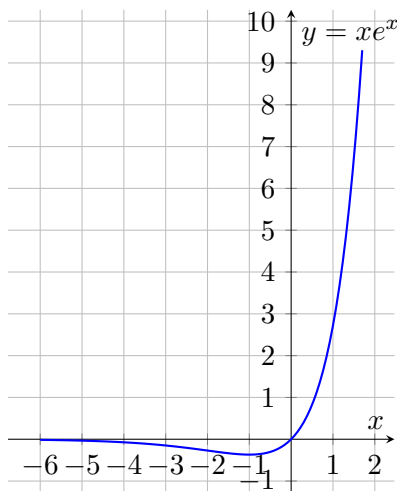
$$-y(x) = -x \cdot e^x,$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az  $y$  függvény nem páratlan.

i) Az  $y$  függvény grafikonja:



j) Az  $y$  függvény értékkészlete:  $[-e^{-1}; \infty[$ .

140. **Feladat.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Oldjuk meg az

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 4^2 - 5 \cdot 4 = 16 - 20 = -4,$$

így az egyenletnek két komplex megoldása van, melyek egymás konjugáltjai. A megoldások

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Elegendő az egyik komplex számmal tovább dolgozni, válasszuk például a  $\lambda = -2 + i$  megoldást.

Jelöljük a komplex szám valós részét  $\alpha$ -val, képzetes részét  $\beta$ -val. Ekkor azt kapjuk, hogy  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 1$ . A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x),$$

vagyis

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos x + c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin x,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

A  $c_1$  és  $c_2$  számok kiszámolásához szükségünk lesz az  $y'$  függvényre is:

$$y'(x) = -2c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos x - c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin x - 2c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin x + c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos x.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$1 = y(0) = c_1 \cdot e^0 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot e^0 \cdot \sin 0 = c_1,$$

így  $c_1 = 1$ . Másrészt

$$2 = y'(0) = -2c_1 \cdot e^0 \cdot \cos 0 - c_1 \cdot e^0 \cdot \sin 0 - 2c_2 \cdot e^0 \cdot \sin 0 + c_2 \cdot e^0 \cdot \cos 0 = -2c_1 + c_2.$$

Mivel  $c_1 = 1$ , ezért  $c_2 = 4$ . Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-2x} \cdot \cos x + 4e^{-2x} \cdot \sin x = e^{-2x} \cdot (\cos x + 4 \sin x).$$

Megjegyezzük, hogy azért volt elegendő az egyik komplex számmal dolgozni, mert ha a konjugálttal is felírnánk a megoldást, akkor a koszinusz függvény párossága miatt

$$\cos(-\beta x) = \cos(\beta x),$$

a szinusz függvény páratlansága miatt

$$\sin(-\beta x) = -\sin(\beta x),$$

így ha a karakterisztikus egyenlet másik megoldásával írjuk fel a differenciálegyenlet megoldását, akkor is ugyanahhoz a megoldáshoz jutunk.

141. **Feladat.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Oldjuk meg az

$$y''(x) + 4y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

**Megoldás:**

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = -16,$$

így egyetlen két komplex megoldása van, melyek egymás konjugáltjai. A megoldások  $\lambda_1 = 2i$ ,  $\lambda_2 = -2i$ . Elegendő az egyik komplex számmal tovább dolgozni, válasszuk például a  $\lambda = 2i$  megoldást.

Jelöljük a komplex szám valós részét  $\alpha$ -val, képzetes részét  $\beta$ -val. Ekkor azt kapjuk, hogy  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ . A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x),$$

vagyis

$$y(x) = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

A  $c_1$  és  $c_2$  számok kiszámolásához szükségünk lesz az  $y'$  függvényre is:

$$y'(x) = -2c_1 \cdot \sin 2x + 2c_2 \cdot \cos 2x.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$1 = y(0) = c_1,$$

másrészt

$$1 = 2c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x.$$

142. **Feladat.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Oldjuk meg az

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 2x^2 + 14x + 26, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot a próbafüggvény módszerrel!

**Megoldás:**

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

vagyis  $\lambda_1 = -1$ , illetve  $\lambda_2 = -2$ .

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

alakban keressük.

Az  $y_p$  függvény deriváltja

$$y_p'(x) = 2A \cdot x + B,$$

az  $y_p$  függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = 2A.$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$2A + 3 \cdot (2A \cdot x + B) + 2 \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x + C) = 2x^2 + 14x + 26.$$

A bal oldalon felbontva a zárójeleket és a tagokat fokszám szerint rendezve azt kapjuk, hogy

$$2A \cdot x^2 + (6A + 2B) \cdot x + 2A + 3B + 2C = 2x^2 + 14x + 26.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\left. \begin{array}{rcl} 2A & & = 2 \\ 6A + 2B & & = 14 \\ 2A + 3B + 2C & = & 26 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy  $A = 1$ . Ezt felhasználva a második egyenletből az következik, hogy  $B = 4$ , végül a harmadik egyenletből  $C = 6$  adódik.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = x^2 + 4x + 6.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x} + x^2 + 4x + 6.$$

Az  $y$  függvény deriváltja

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} - 2c_2 \cdot e^{-2x} + 2x + 4.$$

Mivel  $y(0) = 8$ , ezért

$$8 = c_1 + c_2 + 6.$$

Mivel  $y'(0) = 1$ , ezért

$$1 = -c_1 - 2c_2 + 4.$$

Tehát a  $c_1$  és  $c_2$  konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + 6 & = & 8 \\ -c_1 - 2c_2 + 4 & = & 1 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 2 \\ -c_1 - 2c_2 & = & -3 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet összeadva  $c_2 = 1$  adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy  $c_1 = 1$ .

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-x} + e^{-2x} + x^2 + 4x + 6.$$

143. **Feladat.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Oldjuk meg az

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 12 \cdot e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -7$$

kezdetiérték feladatot a próbafüggvény módszerrel!

**Megoldás:**

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

vagyis  $\lambda_1 = 3$ , illetve  $\lambda_2 = -2$ .

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot e^{2x}$$

alakban keressük.

Az  $y_p$  függvény deriváltja

$$y'_p(x) = 2A \cdot e^{2x},$$

az  $y_p$  függvény másodrendű deriváltja

$$y''_p(x) = 4A \cdot e^{2x}.$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$4A \cdot e^{2x} - 2A \cdot e^{2x} - 6A \cdot e^{2x} = 12 \cdot e^{2x},$$

vagyis

$$-4A \cdot e^{2x} = 12 \cdot e^{2x},$$

így  $A = -3$ .

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -3 \cdot e^{2x}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-2x} - 3 \cdot e^{2x}.$$

Az  $y$  függvény deriváltja

$$y'(x) = 3c_1 \cdot e^{3x} - 2c_2 \cdot e^{-2x} - 6 \cdot e^{2x}.$$

Mivel  $y(0) = 0$ , ezért

$$0 = c_1 + c_2 - 3.$$

Mivel  $y'(0) = -7$ , ezért

$$-7 = 3c_1 - 2c_2 - 6.$$

Tehát a  $c_1$  és  $c_2$  konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{array}{r} c_1 + c_2 - 3 = 0 \\ 3c_1 - 2c_2 - 6 = -7 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{r} c_1 + c_2 = 3 \\ 3c_1 - 2c_2 = -1 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenlet kétszereséhez hozzáadva a második egyenletet  $c_1 = 1$  adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy  $c_2 = 2$ .

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{3x} + e^{-2x} - 3e^{2x}.$$



## Irodalomjegyzék

- [1] Bárczy Barnabás, *Differenciálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994.
- [2] Bíró Fatime – Vincze Szilvia, *A gazdasági matematika alapjai*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2010.
- [3] Denkinger Géza – Gyurkó Lajos, *Analízis gyakorlatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1987.
- [4] Farkas István, *Differenciálszámítás gyakorlati jegyzet*, Debreceni Egyetem, 2005.
- [5] Gábos Adél – Halmos Mária, *Készüljünk az érettségire matematikából közép-, emelt szinten*, Műszaki Könyvkiadó, 2005.
- [6] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai feladatgyűjtemény*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2016.
- [7] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai feladatgyűjtemény*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2016.
- [8] Kézi Csaba Gábor, *Analízis Mérnököknek*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2021.
- [9] Kézi Csaba Gábor, *Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek és alkalmazásaik*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2019.
- [10] Kézi Csaba Gábor, *Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek és alkalmazásaik feladatgyűjtemény*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2019.
- [11] Kézi Csaba Gábor, *Közönséges magasabb rendű differenciálegyenletek és alkalmazásaik*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2019.
- [12] Kézi Csaba Gábor, *Közönséges magasabb rendű differenciálegyenletek és alkalmazásaik feladatgyűjtemény*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2019.
- [13] Kézi Csaba Gábor, *Lineáris algebra Mérnököknek*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2022.
- [14] Kézi Csaba Gábor, *Vektorváltozós és vektorértékű függvények analízise*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2021.
- [15] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
- [16] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.
- [17] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.