



KÜLÖNBÖZŐ ALAKZATOKON ALAPULÓ SKÁLAFÜGGETLEN VÉLETLEN HÁLÓZATOK

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Perecsényi Attila

Témavezető: Dr. Fazekas István

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács

Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2020.



KÜLÖNBÖZŐ ALAKZATOKON ALAPULÓ SKÁLAFÜGGETLEN VÉLETLEN HÁLÓZATOK

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Perecsényi Attila

Témavezető: Dr. Fazekas István

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács

Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2020.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Informatikai Tudományok Doktori Iskola Az információ technológia és sztochasztikus rendszerek elméleti alapjai és alkalmazásai programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2020. május 11.

.....

Perecsényi Attila
jelölt

Tanúsítom, hogy Perecsényi Attila doktorjelölt 2014 – 2017 között a fent megnevezett Doktori Iskola Az információ technológia és sztochasztikus rendszerek elméleti alapjai és alkalmazásai programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2020. május 11.

.....

Dr. Fazekas István
témavezető

Különböző alakzatokon alapuló skálafüggetlen véletlen hálózatok

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
az informatika tudományágban.

Írta: Perecsényi Attila okleveles alkalmazott matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Informatikai Tudományok Doktori Iskolája
(Az információ technológia és sztochasztikus rendszerek elméleti alapjai és
alkalmazásai programja) keretében

Témavezető: Dr. Fazekas István

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Sztrik János	DE-IK
tagok:	Dr. Zempléni András	ELTE-TTK
	Dr. Burai Pál	DE-IK

A doktori szigorlat időpontja: 2018. szeptember 21.

Az értekezés bírálói:

Dr.		
Dr.		
Dr.		

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.		
tagok:	Dr.		
	Dr.		
	Dr.		
	Dr.		

Az értekezés védésének időpontja: 20

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek Dr. Fazekas Istvának, akinek a témavezetése alatt megismerkedhettem a valószínűség-számítás ezen új és érdekes területével. Köszönöm a magyarázatokat és a konzultációk során kapott hasznos segítségeket, tudást amelyek nagyban hozzájárultak a doktori értekezésem sikeres elkészítéséhez.

Továbbá szeretnék köszönetet mondani a családomnak és barátaimnak akik tanulmányaim során végig mellettem álltak, biztattak, segítettek és támogatták előrehaladásomat.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. A csillagos modell	7
1.1. A modell definíciója és a fő eredmények	8
1.1.1. A modell ekvivalens alakja	12
1.2. Az 1.1. Tétel bizonyítása	13
1.3. Az 1.2. Tétel bizonyítása	46
1.4. Szimulációs eredmények	53
2. A populációs modell	55
2.1. Az S modell és a fő eredmények	55
2.2. A 2.1. Tétel bizonyítása	58
2.3. A 2.2. Tétel bizonyítása	63
2.4. A 2.1. Következmény bizonyítása	69
2.5. Az eredmények alkalmazása	69
3. Az érdekes nemskálafüggetlen eloszlás	75
3.1. A modell definíciója és ismert tulajdonságai	75
3.2. Szimulációs eredmények	78
Összefoglalás	84
Summary	90
Irodalomjegyzék	96
Függelék	101

Bevezetés

A hálózatok tudománya az utóbbi két évtizedben került a figyelem középpontjába, ami valós hálózatok általános tulajdonságait vizsgálja. Ilyen valós hálózatok például a WWW, az internet, biológiai, szociális és együttműködési hálózatok. A [7] könyv bevezetésében Barabási írja, hogy 'A key discovery of network science is that the architecture of networks emerging in various domains of science, nature, and technology are similar to each other...' és '...we will never understand complex systems unless we develop a deep understanding of the networks behind them.', azaz a hálózattudomány legfontosabb felfedezése, hogy a különböző területeken kialakuló hálózatoknak hasonló tulajdonságai vannak és csak akkor érthetjük meg ezeket az összetett rendszereket, ha mélyen tanulmányozzuk a mögöttük lévő hálózatokat.

Nem szabad azonban elfelejteni, hogy korábban is voltak eredmények ezen a tudományterületen. Ezek közül az egyik legjelentősebb Erdős és Rényi véletlen modellje (ld. [18], [19]). Ez a gráf a következőképpen épül fel: A kezdeti állapotban felvesszünk rögzített számú csúcsot, majd behúzzunk közéjük rögzített számú élt úgy, hogy minden lehetséges elrendezésnek egyenlő a valószínűsége. Viszont a modell két tulajdonsága miatt is alkalmatlan valós hálózatok leírására. Az egyik, hogy a csúcsok száma rögzített, amíg a mai hálózatok folyamatosan növekednek, a másik pedig, hogy az élek behúzása is egyenletesen történik, ami Poisson fokszámeloszlást eredményez, ami szintén nem igaz valós kapcsolatok esetén. Ezért új matematikai modellekre volt szükség.

Barabási és Albert közös, meghatározó [6] cikkükben különféle skálafüggetlen nagy hálózatokat (WWW, színészi együttműködés, stb.) sorolnak fel, majd definiálnak egy véletlen gráf modellt, ami a preferential attachment szabály szerint fejlődik, továbbá heurisztikus érveléssel és szimulációs eredményekkel is alátámasztják, hogy ez a fejlődési folyamat skálafüggetlen hálózatokhoz vezet.

Egy hálózatot skálafüggetlennek nevezünk, ha a fokszámeloszlása a-

szimptotikusan hatványrendű, azaz $p_d \sim Cd^{-\gamma}$, ha $d \rightarrow \infty$. Itt p_d annak a valószínűsége, hogy egy csúcsnak d a fokszáma, továbbá C és γ konstansok, ahol γ -t karakterisztikus kitevőnek nevezzük. Ebben az esetben és az értekezés további részeiben $a_k \sim b_k$ azt jelenti, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/b_k = 1$, ahol a_k és b_k véges sok esettől eltekintve nemnegatív számsorozatok.

A Barabási és Albert által definiált modell a következő: Minden $t = 2, 3, \dots$ lépésben egy új csúcs születik és N éllel csatlakozik régi csúcsokhoz. Annak a valószínűsége, hogy az új csúcs az i régi csúcshoz csatlakozik $\pi_i = d_i / \sum_j d_j$, ahol d_i az i csúcs fokszáma és $\sum_j d_j$ az összes csúcs fokszámanak az összege. Ezt nevezzük preferential attachment szabálynak, amit egy hétköznapi példával úgy lehetne szemléltetni, hogy akinek sok ismerőse van, nagyobb eséllyel lesz még több ismerőse.

Érdemes megjegyezni, hogy a [6] cikk megjelenése előtt Yule bevezetett egy modellt a fajok fejlődésére, amiben jelen volt a preferential attachment szabály (ld. [39]). Ezen felül a pontos matematikai definíciót és bizonyítást Bollobás és társai adtak a Barabási-Albert modellre (ld. [8]). Továbbá Barabási és Albert felfedték a kapcsolatot a preferential attachment és a hatványrendű eloszlások között, amit van der Hofstad alá is támasztott a [29] monográfiájában.

Ez az új fejlődési mechanizmus és a skálafüggetlen tulajdonság rengeteg kutatási eredményt szült az elmúlt két évtizedben.

A hálózattudomány matematikai elmélete iránt érdeklődők átfogó képet kaphatnak többek között a már korábban is említett van der Hofstad [29] monográfiából vagy Chung-Lu [16], Durrett [17] és Janson [31] könyveiből. Továbbá, Barabási a [7] könyvében sokkal általánosabban foglalkozik a témával, amelyben egy egész fejezetet szentel a skálafüggetlen tulajdonságnak, majd nemskálafüggetlen hálózatokat is bemutat.

Az irodalomban sok cikk foglalkozik skálafüggetlen modellekkel, de sok olyan is előfordul, melyek nem teljesítik ezt a tulajdonságot. Például a [12] cikkben azt állítják a szerzők, hogy a valós hálózatok egészen különféle tulajdonságokkal is bírhatnak és a skálafüggetlen hálózatok csak egy töredéke ezeknek, így a teljes képért új ötletekre van szükség.

Korábban említettük, hogy a preferential attachment mechanizmus sok kutatásnak volt az alapja, így különféle modellek jöttek létre az évek során. Az egyik ilyen Cooper és Frieze [15] modellje, ahol minden lépésben egy új vagy egy régi csúcs generál új éleket. Mindkét esetben lehet választani a csúcsokat egyenletesen vagy a foksámuk szerint, azaz a preferential attachment szabály alkalmazásával.

Ezen a vonalon elindulva Backhausz és Móri a [2] és [4] cikkekben defini-

álták a háromszöges modellt, ami hasonlóan fejlődik, mint Cooper és Frieze modellje, de itt minden lépésben három csúcsot választunk és ők lépnek kapcsolatba egymással. Ennél a modellenél is születhet új csúcs és hozzá választunk két régi csúcsot, vagy három régi csúcs lép interakcióba. A régi csúcsokat választhatjuk egyenletesen vagy preferential attachment szabály szerint. Az egyik nagy különbség, hogy ebben a modellben a preferential attachment a gráf elemeinek súlyára vonatkozik nem a csúcsok fokszámaira. A gráf elemeinek a súlya azt mutatja, hogy az adott elem hányszor vett részt kölcsönhatásban. A [2] és [4] cikkekben mind a csúcsok fokszámának és súlyának a skálafüggetlensége is be van bizonyítva.

Később Fazekas és Porváznayik a [25] és [26] cikkekben általánosították az előző modellt úgy, hogy nem három csúcs lépett egymással kapcsolatba, hanem N darab. Ezt úgy nevezzük, hogy az N -pontos modell. Hasonlóan ezen modell esetén is skálafüggetlennek bizonyultak a fokszám és a csúcsok súlyeloszlása, illetve más eredményeket is ismertettek a [27] cikkben. Az értekezés második fejezetében részletesen ismertetjük ezt a modellt.

Ezek után Fazekas, Noszály és Perecsényi [20] megmutatták, hogy a háromszöges modell esetén az élek súlya is skálafüggetlen, illetve az N -pontos modell esetén megmutatták, hogy az N -szögek súlyeloszlása is hatványrendű.

Mindemellett, Ostroumova és társai a [37] cikkben definiáltak egy általános preferential attachment modellt, amely magába foglal néhány ismertet úgy, mint az LCD-modellt [9], a Holme-Kim modellt [30], a véletlen Apollóniai hálózatot [38], vagy a Buckley-Osthus-Móri modellt [13], [33]. Továbbá, igazolták, hogy ennek az általános modellnek a fokszámeloszlása skálafüggetlen.

Az értekezésben nem vizsgálunk valós hálózatokat, hanem az általunk definiált új matematikai modelleket és tulajdonságaikat ismertetjük, amelyek hasznosak lehetnek valós hálózatok tulajdonságainak megismeréséhez. Ezeknek a modelleknek a növekedése során a preferential attachment szabály nagy szerepet játszik, viszont itt sem a fokszámok alapján fejlődnek a hálózatok, hanem bizonyos kitüntetett elemek súlya szerint.

A dolgozat első fejezetének alapjául a [22] és [24] cikkek szolgáltak. Ez a rész az általunk definiált csillagos modellről szól. A modell definiálásakor ugyanazt az ötletet használjuk, amit Cooper-Frieze [15] modellje, Backhausz-Móri [4] háromszöges modellje vagy annak általánosítása [26] esetén alkalmaztak a szerzők. Azaz minden lépésben vagy születik egy új csúcs, aki csatlakozik a hálózathoz, vagy nem. Mindkét esetben előre rögzített N számú csúcs fog kölcsönhatásba lépni. Ennek érdekében a régi

csúcsokat választhatjuk egyenletesen vagy a gráf bizonyos elemeinek a súlya szerint, azaz preferential attachment szabály szerint. A különbség a korábbi modellekhez képest, hogy ebben az esetben az N csúcs kölcsönhatása nem teljes gráffá való kiegészítést jelent, hanem irányított csillaggráffá. Ezáltal a gráfban a csúcsoknak két fajta szerepe is lehet, ami a számolásokban szembevető bonyolultságot okozott, így a korábbi modellek számításait nem lehetett felhasználni, illetve egyszerre kellett több sorozatot kezelni. Ilyen csillag struktúrát megtalálhatunk a való életben is, példáulul számítógépes hálózatok esetén (ld. [11]). Először megmutatjuk, hogy a gráf ki- és befokai skálafüggetlenek a modellnek egy ekvivalens alakjának a segítségével, majd pedig az N -csillagok súlyának skálafüggetlenségét igazoljuk. A bizonyításokban Doob-Meyer felbontást, és arra vonatkozó állításokat használunk, illetve a [4], [26], [20] cikkek módszertanát. Egy-egy állítás igazolására két bizonyítást is adunk az értekezésben, ahol lehetőség volt általánosabb eredményeket alkalmazni. A martingáleméleti módszernek az alkalmazásához főleg feltételes várható értékeket kell számolnunk, amelyeknek az alakját a felbontás is megad. A csillagos modell esetében könnyen meghatározható volt a szükséges szubmartingál a felbontáshoz, ezzel várható értéket nem is kellett számolni, ami bizonyos esetekben akár bonyolultabb számolásokra is vezethet.

A második fejezet a [21] cikk eredményeit dolgozza fel. Itt a [37] cikkben definiált modellt tovább általánosítottuk. Mivel a populációk fejlődésére vonatkozó modellek szoros kapcsolatban állnak a véletlen gráfokkal, ezért egy általános populációs modellt definiálunk, amit S modellnek hívunk. Itt minden egyedet egy úgynevezett pontértékkel jellemezünk. A fejlődés során mind az egyedek száma és mind az egyedek pontértéke is növekedhet. A bizonyítások a [37] cikk módszertanán alapszanak. Először megadjuk a várható értékét az s pontértékű csúcsok számának, majd annak koncentrációját a várható értékük körül. A koncentrációs egyenlőtlenség egyik nagy előnye az első fejezetben alkalmazott martingáleméleti módszerekkel szemben, hogy ha ismerjük a várható értékét tetszőleges valószínűségi változónak, akkor könnyen átalakíthatjuk martingállá, amelyre egyszerűen alkalmazható a koncentrációs egyenlőtlenség. A két állításból pedig következik a pontértékek skálafüggetlensége.

Ezek után alkalmazzuk az általános modellt az N -pontos modellre és a csillagos modellre. Ezen eredmények segítségével bebizonyítottuk, hogy az N -pontos modellben tetszőleges méretű M teljes gráfok $2 \leq M < N$ (azaz klikkek) súlyeloszlása is skálafüggetlen. Ezek az eredmények a [20] cikk általánosítása, ahol az $N = 3$ eset volt vizsgálva. Ezen felül a [35] doktori

értekezésben is megtalálható ez az állítás, de a populációs modell alkalmazása egy egyszerűbb bizonyítást eredményez. A csillagos modell esetén pedig az N -csillagok súlyeloszlására adunk ezzel egy második bizonyítást.

Az utolsó fejezetben pedig az N -pontos modell általánosítását vizsgáljuk szimulációs eredményeken keresztül. Itt a [23] cikkben ismertetett eredményeket mutatjuk be. Az általánosított modell abban tér el az N -pontos modelltől, hogy lépésenként tetszőleges $0 \leq k \leq N - 1$ csúcs csatlakozhat a modellhez, $(N - k)$ darab csúcson keresztül. A [35] doktori értekezésben megtalálható a pontos levezetése a fokszámok skálafüggetlenségének, bizonyos feltételek mellett. Az érdekes ebben a modellben, hogy ha nem teljesül az említett feltétel a hatványeloszlástól eltérő eloszlást kapunk, annak ellenére, hogy a preferential attachment nagy szerepet játszik a fejlődés alatt. Az eredményeket ábrákon szemléltetjük.

1. fejezet

A csillagos modell

Ebben a fejezetben egy olyan hálózatfejlődési modellt ismertetünk, amely tetszőleges egyedek közötti együttműködésen és versengésen alapszik. Ebben a hálózatban a csomópontokat tekinthetjük személyeknek, vállalatoknak vagy akár tetszőleges készülékeknek is, amelyek kölcsönhatásba lépnek egymással. A következőkben bemutatunk egy példát, amelyben emberek kapcsolatát írjuk le, majd pedig matematikai eszközökkel pontosan definiáljuk a modellt.

Képzeljünk el egy N emberből álló csoportot, akik valamilyen együttműködésben vesznek részt. Tipikusan az ilyen csoportokban mindig kijelölhető egy ember, aki központi szerepet játszik az együttműködésben és hozzá csatlakoznak a többiek. Tekinthetjük őt akár a csapat főnökének is. Tehát egy ilyen csapatnak a struktúrája csillag alakot ölt N darab csomóponttal. Egy ilyen csillagban van egy központi csúcs (a főnök), és $N - 1$ darab periféria csúcs csatlakozik hozzá (a beosztottak). Ezeket az alakzatokat a továbbiakban N -csillagnak nevezzük. Ezek irányított gráfok úgy, hogy egy-egy él indul a periféria csúcsokból és a központi csúcsban végződnek.

A gráf fejlődése során N ember együttműködése azt jelenti, hogy ők egy N csillagot alkotnak. Természetesen egy ember több csapatnak is lehet a tagja, akár ugyanazokkal a személyekkel és akár különböző szerepekben is, ezért a fejlődés során párhuzamos éleket is megengedünk. Az új együttműködéseket új élek behúzásával jelezzük.

Amikor arról döntünk, hogy kit veszünk be az együttműködési csapatba, nevezzük versengésnek. A fejlődés során több fajta versengési döntés lehetséges. Az emberek kiválasztásánál alkalmazhatjuk a preferential attachment szabályt vagy egyenletesen is választhatunk. Azaz, amikor egy új ember csatlakozik a hálózathoz választhat a gráfban egy már ismert együtt-

működési csoportot, akikhez csatlakozik alárendelt szerepben, vagy választ maga köré $N - 1$ embert egyenletesen, ezzel új csoportot alkotva, amelyben ő lesz a főnök.

A továbbiakban minden embernek a d_1 befoka és d_2 kifoka meghatározza a szerepét. Mindenki $d_1/(N-1)$ esetben együttműködés főnöke és d_2 esetben pedig alárendelt szerepben volt jelen a hálózatban.

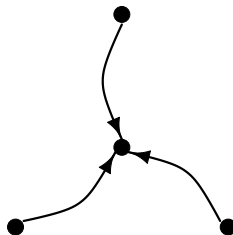
1.1. A modell definíciója és a fő eredmények

Most precíz matematikai eszközökkel definiáljuk az általunk megalkotott véletlen gráf modellt. Az 1.1.-1.5. ábrákon a kiinduló gráfot és néhány lehetséges első lépést szemléltetünk $N = 4$ esetén, azért hogy megkönnyítsük a modell fejlődésének a megértését. Az aktuális lépésben az új csúcsok és új élek feketék, a korábban született elemek pedig szürkék.

Legyen $N \geq 3$ rögzített egész szám. A hálózat a 0 időponttól indul és a kezdeti gráfunk egy N csúcsú csillag gráf. A továbbiakban egy gráfot N -csillag gráfnak nevezünk, ha N csúcsa van, amiből $N - 1$ csúcs periféria csúcs és egy központi csúcs. Továbbá a periféria csúcsok és a központi csúcs között egy-egy él van, amelyek jelenleg irányított élek és a központi csúcs felé mutatnak. Azaz a központi csúcsnak $N - 1$ a befoka és az összes periféria csúcsnak 1 a kifoka. Ezen felül a hálózat fejlődése érdekében súlyokat rendelünk a csillagokhoz. Az N -csillagok kezdeti súlya 1, aminek $N - 1$ darab $(N - 1)$ -csillag részgráfja van. A részgráfok kezdeti súlya is egyenlő eggyel.

A hálózat fejlődési mechanizmusa a következő. Minden lépésben N csúcs lép egymással kapcsolatba, azaz együttműködnek, ami azt jelenti, hogy minden periféria csúcsból élt húzunk a központi csúcs felé, így alkotnak egy N -csillag gráfot. A korábbiakban leírtakhoz hasonlóan a párhuzamos élek megengedettek. Az új élek behúzásán kívül a súlyokat is aktualizálni kell. Ha az aktuális lépésben új N -csillag születik, akkor a kezdeti súlya 1 és ennek minden új $(N - 1)$ -csillag részgráfja is 1 súlyt kap. Előfordulhat, hogy már korábban létező $(N - 1)$ csillag is részt vesz a kölcsönhatásban, ekkor az ő súlyát növeljük eggyel. Abban az esetben, amikor már egy létező N -csillag aktiválódik újra, akkor a súlyát és az összes $(N - 1)$ -csillag részgráfjának a súlyát megnöveljük eggyel. Könnyű látni, hogy a csillagok súlyai megmutatják, hogy az aktuális csillag hányszor szerepelt együttműködésben. Továbbá megjegyezzük, hogy az $(N - 1)$ -csillagok súlyai megegyeznek az őket tartalmazó N -csillagok súlyainak összegével. Erre a bizonyításokban szükségünk lesz. A csillagok súlyai fontos szerepet játszanak a hálózatunk

fejlődésében, ugyanis minél nagyobb súlya van egy csillagnak annál nagyobb az esélye, hogy megint azt választjuk. Érdekes megjegyezni, hogy fejlődés alatt létrejöhetnek csillag alakzatok kölcsönhatás nélkül is, de ezeket nem tekintjük csillag gráfnak a fejlődés szempontjából, azaz 0 súllyal szerepelnek a hálózatban, így ők nem választhatóak.



1.1. ábra. A kiindulási állapot, $N = 4$

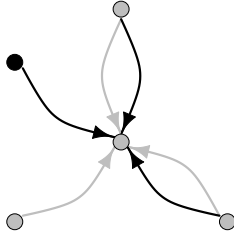
Minden lépésben két lehetőségünk van. Az I lehetőségünk, hogy p valószínűséggel új csúcs születik és lép kapcsolatba $N - 1$ régi csúccsal. A II lehetőség, hogy $1 - p$ valószínűséggel nem születik új csúcs, hanem N régi csúcs fog együttműködni. A fentiekben $0 < p \leq 1$ rögzített szám.

A fenti két lehetőség további két-két lehetőségre bomlik: I/1, I/2, II/1 és II/2.

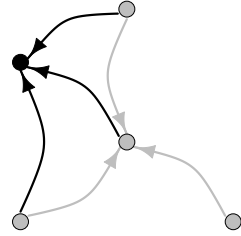
Legyen $0 \leq r \leq 1$ rögzített. Az I/1 esetben, ami r valószínűséggel következik be, választunk egy régi $(N - 1)$ -csillag gráfot a preferential attachment szabály szerint és ez a csillag fog kölcsönhatásba lépni az új csúccsal. Ebben az esetben a preferential attachment szabály azt jelenti, hogy egy v_t súlyú $(N - 1)$ -csillagot $v_t / \sum_h v_h$ valószínűséggel választunk ki, ahol $\sum_h v_h$ az összes $(N - 1)$ -csillag súlyának összege. Ez az $(N - 1)$ -csillag és az új csúcs fog kialakítani egy új N -csillagot. Ebben az új csillagban a központi csúcs az lesz, ami az $(N - 1)$ -csillagban is a központi csúcs. A maradék $N - 2$ periféria csúcs marad periféria csúcs. Végül az új csúcs perifériaként csatlakozik. Új éleket húzunk be a periféria csúcsoktól a központi csúcsig. Az új N -csillag súlya 1, továbbá $N - 2$ darab új $(N - 1)$ -csillag jött létre szintén 1 súllyal. Az egyetlen régi $(N - 1)$ -csillag (az aktuális lépésben választott) súlyát pedig megnöveljük eggyel.

Az I/2 esetben, ami $1 - r$ valószínűséggel következik be, egyenesen választunk $N - 1$ régi csúcsot és ők formálnak egy új N -csillagot az új

csúccsal úgy, hogy az új csúcs lesz a középpont. Behúzzuk az éleket a periféria csúcsoktól a központi csúcsig. Mivel ebben az esetben régi csillagok nem aktiválódnak, így az új N -csillag és az új $(N - 1)$ -csillagok súlya 1.



1.2. ábra. Az I/1 eset az első lépésben, $N = 4$



1.3. ábra. Az I/2 eset az első lépésben, $N = 4$

Most legyen $0 \leq q \leq 1$ rögzített. A II lehetőségen belül a II/1 eset q valószínűséggel következik be. Választunk egy létező N -csillag gráfot a preferential attachment szabály alapján és új éleket húzunk a periféria csúcsokból a központi csúcsba. Utána az N -csillag és minden $(N - 1)$ -csillag gráfnak megnöveljük eggyel a súlyát. Itt a preferential attachment szabály azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy kiválasztunk egy v_t súlyú N -csillagot egyenlő $v_t / \sum_h v_h$ -val, ahol $\sum_h v_h$ az N -csillag gráfok összsúlya.

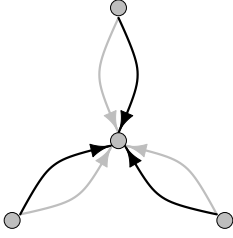
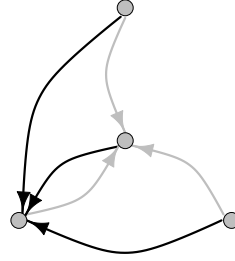
Végezetül a II/2 lehetőség $1 - q$ valószínűséggel következhet be. Ekkor N régi csúcsot egyenletesen választunk és ők formálnak egy N -csillag gráfot. A központot szintén egyenletesen választjuk a már kiválasztott N csúcs közül. Ezután behúzzuk az éleket a periféria csúcsokból a központi csúcsba, majd megnöveljük az N -csillag és az $(N - 1)$ -csillagok súlyát eggyel.

Az 1.1. Tétel szerint ez a fejlődési folyamat skálafüggetlen gráfokhoz vezet. A bizonyítás a [4] és [26] cikkek módszertanán alapszik.

A továbbiakban $0 < p \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$ rögzített számok és legyenek

$$\alpha_{11} = pr, \quad \alpha_{12} = (1 - p)q,$$

$$\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12}, \quad \alpha_2 = pr \frac{N - 2}{N - 1} + (1 - p)q,$$

1.4. ábra. Az II/1 eset az első lépésben, $N = 4$ 1.5. ábra. Az II/2 eset az első lépésben, $N = 4$

$$\beta_1 = \frac{(1-p)(1-q)}{p}, \quad \beta_2 = (N-1) \left[(1-r) + \frac{(1-p)(1-q)}{p} \right], \quad (1.1)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Jelöljük V_n -nel a csúcsok számát n lépés után. Ezen felül legyen a d_1 befokú és d_2 kifokú csúcsok száma az n -edik lépés után $Y(n, d_1, d_2)$. Végezetül pedig $\mathcal{F}_0$ jelöli a triviális σ -algebrát.

1.1. Tétel. *Legyen $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ és $0 < r < 1$. Ekkor bármely rögzített d_1 és d_2 esetén, amennyiben vagy $d_1 = 0$ és $1 \leq d_2$, vagy $N-1 \leq d_1$ és $d_2 \geq 0$ teljesül, akkor*

$$\frac{Y(n, d_1, d_2)}{V_n} \rightarrow y_{d_1, d_2} \quad (1.2)$$

majdnem biztosan, amint $n \rightarrow \infty$, ahol y_{d_1, d_2} rögzített nemnegatív számok.

Legyen d_2 rögzített, ekkor $d_1 \rightarrow \infty$ esetén

$$y_{d_1, d_2} \sim A(d_2) \left(\frac{d_1}{N-1} \right)^{-\left(1 + \frac{\beta_2 + 1}{\alpha_1}\right)}, \quad (1.3)$$

ahol

$$A(d_2) = \frac{1-r}{\alpha_1} \frac{1}{d_2!} \frac{\Gamma\left(d_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\beta + 1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}. \quad (1.4)$$

Legyen d_1 rögzített, ekkor $d_2 \rightarrow \infty$ esetén

$$y_{d_1, d_2} \sim B(d_1) d_2^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)}, \quad (1.5)$$

ahol

$$B(d_1) = \frac{r}{\alpha_2} \frac{1}{\left(\frac{d_1}{N-1}\right)!} \frac{\Gamma\left(\frac{d_1}{N-1} + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}. \quad (1.6)$$

A fentiekben Γ a Gamma függvényt jelöli.

Ezen felül az N -csillagok súlyai is skálafüggetlen tulajdonságúak. Jelölje $S(n, w)$ a w súlyú N -csillagok számát és jelölje S_n az összes pozitív súllyal rendelkező N -csillag számát n lépés után.

1.2. Tétel. Legyen $0 < p < 1$ és $0 < q$. Bármely $w = 1, 2, \dots$ esetén

$$\frac{S(n, w)}{S_n} \rightarrow s_w \quad (1.7)$$

majdnem biztosan, amennyiben $n \rightarrow \infty$, ahol s_w , $w = 1, 2, \dots$ pozitív számok, amelyek teljesítik a következő rekurziót:

$$s_1 = \frac{1}{h+1}, \quad s_w = \frac{h(w-1)}{hw+1} s_{w-1}, \quad \text{ha } w > 1, \quad (1.8)$$

ahol $h = (1-p)q$. Ezen felül,

$$s_w \sim C w^{-(1+\frac{1}{h})} \quad (1.9)$$

$w \rightarrow \infty$ esetén, ahol $C = \frac{1}{h} \Gamma\left(1 + \frac{1}{h}\right)$.

1.1.1. A modell ekvivalens alakja

Annak érdekében, hogy egyszerűbb legyen az 1.1. Tétel bizonyítása, átalakítjuk a modellünket egy kezelhetőbb formába. Az átalakítás után a gráf irányítatlan lesz, a párhuzamos élek megszűnnek és helyettük a csúcsokhoz súlyokat rendelünk. Minden csúcshoz rendelünk egy központi súlyt és egy periféria súlyt.

Legyen a központi súlya egy csúcsnak w_1 , ha w_1 -szer szerepelt központi csúcsként kölcsönhatásban és legyen a periféria súlya w_2 , amennyiben w_2

alkalommal periféria csúcsként vett részt az együttműködésben. Könnyű látni, hogy $w_1 = \frac{d_1}{N-1}$ és $w_2 = d_2$, ahol d_1 jelöli a csúcsnak az irányított gráfbeli befokát és d_2 a kifokát. Miután meghatároztuk a csúcsok súlyát a párhuzamos éleket egyesítjük, így helyettük egy-egy irányítatlan élt kapunk, tehát két csúcs között akkor van él, ha legalább egyszer együttműködtek a gráf fejlődése alatt.

A továbbiakban a véletlen gráf modell fenti ekvivalens irányítatlan alakját vizsgáljuk. Az átalakított gráfban az N és az $(N-1)$ -csillagok súlyai nem változnak, azaz egy N -csillag súlya w , ha w -szer szerepelt együttműködésben és egy $(N-1)$ -csillag súlya w , ha w alkalommal vett részt kölcsönhatásban.

1.2. Az 1.1. Tétel bizonyítása

Ebben a fejezetben a megmutatjuk a modell ekvivalens alakjának skálafüggetlen tulajdonságát, amelyből következik, a csillagos modellre vonatkozó skálafüggetlenség.

A következő eredményekre szükségünk lesz a bizonyítások során.

1.3. Tétel ([34], Proposition VII-1-2). *Legyen $\{Z_n, \mathcal{F}_n\}$ szubmartingál. Ennek a szubmartingálnak a Doob-Meyer felbontása $Z_n = M_n + A_n$, ahol $\{M_n, \mathcal{F}_n\}$ martingál és $\{A_n, \mathcal{F}_n\}$ egy növekvő előre jelezhető folyamat. Továbbá, egy additív konstanstól eltekintve*

$$A_n = \mathbb{E}Z_1 + \sum_{i=2}^n (\mathbb{E}(Z_i | \mathcal{F}_{i-1}) - Z_{i-1}).$$

Könnyen látható, hogy $\{M_n^2, \mathcal{F}_n\}$ is szubmartingál. Legyen

$$M_n^2 = Y_n + B_n$$

az M_n^2 Doob-Meyer felbontása. Itt ismét egy additív konstanstól eltekintve,

$$B_n = \sum_{i=2}^n \mathbb{D}^2(Z_i | \mathcal{F}_{i-1}) = \sum_{i=2}^n \mathbb{E} \left\{ (Z_i - \mathbb{E}(Z_i | \mathcal{F}_{i-1}))^2 | \mathcal{F}_{i-1} \right\}.$$

1.1. Lemma ([34], Proposition VII-2-3, Proposition VII-2-4). *Legyen $M_1 = 0$. A $\{B_\infty < \infty\}$ halmazon az M_n martingál majdnem biztosan konvergál egy véges határértékhez. Ezen felül, $M_n = o(B_n^{1/2} \log B_n)$ majdnem biztosan a $\{B_n \rightarrow \infty\}$ halmazon.*

1.2. Lemma ([3], 2.3. állítás). *Legyen $\{Z_n, \mathcal{F}_n\}$ egy négyzetesen integrálható nemnegatív szubmartingál. Ha $B_n^{1/2} \log B_n = O(A_n)$, akkor $Z_n \sim A_n$, ha $n \rightarrow \infty$, majdnem biztosan az $\{A_n \rightarrow \infty\}$ halmazon.*

Egy-egy állításra több bizonyítást is adunk a következő általános lemma segítségével. A második bizonyítások Backhausz Ágnes javaslatára kerültek be az értekezésbe, a megjelent publikációkban nem találhatók meg.

1.3. Lemma ([5], Lemma 1.). *Legyen $(\mathcal{F}_n)$ filtráció és (ξ_n) egy nemnegatív adaptált folyamat. Tegyük fel, hogy*

$$\mathbb{E} \left((\xi_n - \xi_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1} \right) = O \left(n^{1-\delta} \right) \quad (1.10)$$

teljesül valamilyen $\delta > 0$ esetén. Legyenek $(u_n), (v_n)$ nemnegatív előrejelezhető folyamatok úgy, hogy $u_n < n$ teljesül minden $n \geq 1$ esetén. Továbbá legyen (w_n) pozitív számoknak egy regulárisan változó sorozata $\mu \geq -1$ kitevővel.

(a) *Ekkor, ha*

$$\mathbb{E} (\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq \left(1 - \frac{u_n}{n} \right) \xi_{n-1} + v_n$$

és $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n/w_n \leq v$, ahol $u > 0$ és $v \geq 0$ valószínűségi változók, akkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n}{n} \leq \frac{v}{u + \mu + 1}$$

majdnem biztosan.

(b) *Ekkor, ha*

$$\mathbb{E} (\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq \left(1 - \frac{u_n}{n} \right) \xi_{n-1} + v_n$$

és $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} v_n/w_n \geq v$, ahol $u > 0$ és $v \geq 0$ valószínűségi változók, akkor

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n}{n} \geq \frac{v}{u + \mu + 1}$$

majdnem biztosan.

Ezt a lemmát $w_n \equiv 1$ sorozattal és $\mu = 1$ kitevővel alkalmazzuk.

Továbbá alkalmazzuk Marcinkiewicz nagy számok erős törvényét:

1.4. Tétel (Marcinkiewicz, [32]). *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$, független azonos eloszlású valószínűségi változók, és $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Tegyük fel, hogy $E|\xi_i|^r < \infty$, ahol $0 < r < 2$, és $E\xi_i = 0$, ha $1 \leq r$. Ekkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{\frac{1}{r}}} = 0$$

majdnem biztosan.

Végezetül fel fogjuk használni a Gamma függvény következő két tulajdonságát.

$$\sum_{i=0}^n \frac{\Gamma(i+a)}{\Gamma(i+b)} = \frac{1}{a-b+1} \left[\frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(n+b)} - \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b-1)} \right], \quad (1.11)$$

Ez az összefüggés megtalálható a [36] könyvben. Ezen felül a Stirling formula alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} \sim n^{-(b-a)}. \quad (1.12)$$

A csúcsok számát n lépés után továbbra is V_n -nel jelöljük. Továbbá jelölje $X(n, d, w_1, w_2)$ a d fokszámú, w_1 központi súlyú és w_2 periféria súlyú csúcsok számát n lépés után. Ezen felül legyen $\mathcal{F}_{n-1}$ az $n-1$ lépés alatt megfigyelhető események által generált σ -algebra. A bizonyítások során, ha $l > k$, akkor $\binom{k}{l} = 0$ értelmezzük.

1.4. Lemma. *A fenti irányítatlan gráfban a d fokszámú, w_1 központi súlyú és w_2 periféria súlyú csúcsok számának feltételes várható értéke a következő:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X(n, d, w_1, w_2) | \mathcal{F}_{n-1}\} = & \\ & = X(n-1, d, w_1, w_2) \left[1 - \left(\frac{w_1}{n} \alpha_1 + \frac{w_2}{n} \alpha_2 + \frac{p}{V_{n-1}} \beta \right) \right] + \\ & + X(n-1, d, w_1, w_2-1) \left[pr \frac{(N-2)(w_2-1)}{(N-1)n} + \right. \\ & \left. + (1-p) \left(q \frac{w_2-1}{n} + (1-q) \frac{d \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + X(n-1, d-1, w_1, w_2-1) \left[p(1-r) \frac{N-1}{V_{n-1}} + \right. \\
& \quad \left. + (1-p)(1-q) \frac{(V_{n-1}-d) \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \\
& + X(n-1, d, w_1-1, w_2) \left[(1-p) \left(q \frac{w_1-1}{n} + (1-q) \frac{\binom{d}{N-1}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right) \right] + \\
& + X(n-1, d-1, w_1-1, w_2) \left[pr \frac{w_1-1}{n} + (1-p)(1-q) \frac{\binom{d-1}{N-2} (V_{n-1}-d)}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \\
& + \sum_{m=2}^{N-2} X(n-1, d-m, w_1-1, w_2) \left[(1-p)(1-q) \frac{\binom{d-m}{N-m-1} \binom{V_{n-1}-d+m-1}{m}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \\
& + X(n-1, d-(N-1), w_1-1, w_2) \left[(1-p)(1-q) \frac{\binom{V_{n-1}-d+N-2}{N-1}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \\
& + pr \delta_{d,1} \delta_{w_1,0} \delta_{w_2,1} + p(1-r) \delta_{d,N-1} \delta_{w_1,1} \delta_{w_2,0} \tag{1.13}
\end{aligned}$$

akkor, ha vagy $w_1 = 0, 1 \leq w_2$ és $1 \leq d \leq w_2$, vagy $1 \leq w_1, 0 \leq w_2$ és $N-1 \leq d \leq w_1(N-1) + w_2$, továbbá $\delta_{k,l}$ a Kronecker-deltát jelöli.

Bizonyítás. A bizonyításban w_1 -gyel jelöljük egy adott csúcs központi súlyát és w_2 -vel a periféria súlyát. A következő, könnyen ellenőrizhető megállapításokra szükségünk lesz a bizonyítás során. Egy rögzített w_1 központi súlyú és w_2 periféria súlyú csúcsra illeszkedő $(N-1)$ -csillagok összsúlya $w_1(N-1) + w_2(N-2)$. Továbbá $n-1$ lépés után az N csillagok összsúlya n és az $(N-1)$ -csillagok összsúlya pedig $n(N-1)$. Annak a valószínűsége, hogy egy adott csúcsot kiválasztunk, amikor $N-1$ csúcsot egyenletesen választunk

$$\frac{\binom{V_{n-1}-1}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N-1}} = \frac{N-1}{V_{n-1}}.$$

Abban az esetben, amikor N csúcsot választunk egyenletesen, annak a valószínűsége, hogy kiválasztunk egy adott csúcsot

$$\frac{\binom{V_{n-1}-1}{N-1}}{\binom{V_{n-1}}{N}} = \frac{N}{V_{n-1}}.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy egy w_1 és w_2 súllyal rendelkező csúcs részt vesz az n -edik lépés kölcsönhatásában

$$\begin{aligned} p \left(r \frac{w_1(N-1) + w_2(N-2)}{(N-1)n} + (1-r) \frac{N-1}{V_{n-1}} \right) + \\ + (1-p) \left(q \frac{w_1 + w_2}{n} + (1-q) \frac{N}{V_{n-1}} \right) = \alpha_1 \frac{w_1}{n} + \alpha_2 \frac{w_2}{n} + \beta \frac{p}{V_{n-1}}. \end{aligned}$$

Minden lépésben, amikor egy új csúcs születik két lehetőségünk van:

1. pr valószínűséggel egy 0 központi súlyú, 1 periféria súlyú és 1 fokszerű csúcs születik;
2. $p(1-r)$ valószínűséggel egy 1 központi súlyú, 0 periféria súlyú és $N-1$ fokszerű csúcs születik.

Rögzítsünk egy d fokszerű, w_1 központi súlyú és w_2 periféria súlyú csúcsot. Annak a valószínűsége, hogy ennek a csúcsnak az n -edik lépésben

- nem változik a fokszerke és egyik súlya sem

$$1 - \left(\alpha_1 \frac{w_1}{n} + \alpha_2 \frac{w_2}{n} + \beta \frac{p}{V_{n-1}} \right);$$

- a fokszerke nem változik, de a központi súlya 1-gyel nő

$$(1-p) \left(q \frac{w_1}{n} + (1-q) \frac{\binom{d}{N-1}}{N \binom{V_{n-1}}{N}} \right);$$

- a fokszerke nem változik, de a periféria súlya 1-gyel nő

$$pr \frac{w_2(N-2)}{n(N-1)} + (1-p)q \frac{w_2}{n} + (1-p)(1-q) \frac{d \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{N \binom{V_{n-1}}{N}};$$

- a fokszerke és a központi súlya 1-gyel nő

$$pr \frac{w_1}{n} + (1-p)(1-q) \frac{\binom{d}{N-2} \binom{V_{n-1}-d-1}{1}}{N \binom{V_{n-1}}{N}};$$

- a fokszáma és a periféria súlya 1-gyel nő

$$p(1-r)\frac{N-1}{V_{n-1}} + (1-p)(1-q)\frac{\binom{V_{n-1}-d-1}{1}\binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{N\binom{V_{n-1}}{N}};$$

- a fokszáma m -mel növekszik, ahol $(1 < m < N-1)$ és a központi súlya 1-gyel nő

$$(1-p)(1-q)\frac{\binom{V_{n-1}-d-1}{m}\binom{d}{N-1-m}}{N\binom{V_{n-1}}{N}};$$

- a fokszáma $(N-1)$ -gyel és a központi súlya 1-gyel nő

$$(1-p)(1-q)\frac{\binom{V_{n-1}-d-1}{N-1}}{N\binom{V_{n-1}}{N}}.$$

A fenti valószínűségekből következik az (1.13) egyenlet. $\square$

A következő tételben kiszámoltuk a csúcsok relatív gyakoriságának a határértékét, ezen felül pedig ezekre vonatkozó rekurzív formulát is adunk. Erre az állításra két bizonyítást is ismertetünk.

1.5. Tétel. *Legyen $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $0 < r < 1$. Ha rögzített w_1 , w_2 és d olyanok, hogy vagy $0 = w_1$, $1 \leq w_2$ és $1 \leq d \leq w_2$, vagy $1 \leq w_1$, $0 \leq w_2$ és $N-1 \leq d \leq w_1(N-1) + w_2$ teljesül, akkor*

$$\frac{X(n, d, w_1, w_2)}{V_n} \rightarrow x_{d, w_1, w_2} \quad (1.14)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol x_{d, w_1, w_2} nemnegatív rögzített számok.

Továbbá a x_{d, w_1, w_2} számok kielégítik a következő rekurziót:

$$\begin{aligned} x_{N-1, 1, 0} &= \frac{1-r}{\alpha_1 + \beta + 1} > 0, & x_{d, 1, 0} &= 0, \quad \text{ha } d \neq N-1, \\ x_{1, 0, 1} &= \frac{r}{\alpha_2 + \beta + 1} > 0, & x_{d, 0, 1} &= 0, \quad \text{ha } d \neq 1, \\ x_{d, w_1, w_2} &= \frac{1}{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \beta + 1} \times \\ &\times [\alpha_{11}(w_1 - 1)x_{d-1, w_1-1, w_2} + \alpha_{12}(w_1 - 1)x_{d, w_1-1, w_2} + \\ &+ \alpha_2(w_2 - 1)x_{d, w_1, w_2-1} + \beta_1 x_{d-(N-1), w_1-1, w_2} + \beta_2 x_{d-1, w_1, w_2-1}] \end{aligned} \quad (1.15)$$

bármely w_1, w_2 és d esetén. Abban az esetben, ha $x_{d, w_1, w_2} = 0$, akkor vagy

$$\frac{X(n, d, w_1, w_2)}{V_n} = o(n^{-a}),$$

ahol a pozitív szám, ami függhet w_1 -től, w_2 -től és d -től, vagy

$$X(n, d, w_1, w_2) \equiv 0$$

azaz nem alakulhat ki olyan csúcs, ami $a(d, w_1, w_2)$ hármassal jellemezhető.

Első bizonyítás. A bizonyítást két fő részre bontjuk. Az első részben definiálunk egy folyamathoz kapcsolódó szubmartingált és megadjuk annak Doob-Meyer felbontását. A második részben a teljes indukció található, ami ebben az esetben kétdimenziós, ezért a második rész további alrészekre van bontva.

1. A szubmartingál és annak Doob-Meyer felbontása. Legyen

$$c(n, w_1, w_2) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \alpha_1 \frac{w_1}{i} - \alpha_2 \frac{w_2}{i} - \beta \frac{p}{V_{i-1}} \right)^{-1}, \quad w_1 + w_2 \geq 1. \quad (1.16)$$

Könnyen látható, hogy $c(n, w_1, w_2)$ egy $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető pozitív valószínűségi változó. Alkalmazva a Marcinkiewicz-féle nagy számok erős törvényét (1.4. Tétel) a csúcsok számára, akkor

$$V_n = pn + o(n^{1/2+\varepsilon}) \quad (1.17)$$

majdnem biztosan bármely $\varepsilon > 0$ esetén.

Felhasználva az (1.17) összefüggést és a $\log(1+x)$ függvénynek a Taylor sorát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \log c(n, w_1, w_2) &= - \sum_{i=1}^n \log \left(1 - \alpha_1 \frac{w_1}{i} - \alpha_2 \frac{w_2}{i} - \beta \frac{1}{i + o(i^{1/2+\varepsilon})} \right) = \\ &= (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \beta) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + O(1), \end{aligned}$$

ahol a hiba tag konvergens, ha $n \rightarrow \infty$. Tehát

$$c(n, w_1, w_2) \sim a_{w_1, w_2} n^{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \beta} \quad (1.18)$$

majdnem biztosan, ha $n \rightarrow \infty$. Ebben az esetben a_{w_1, w_2} egy pozitív valószínűségi változó.

Legyen

$$Z(n, d, w_1, w_2) = c(n, w_1, w_2)X(n, d, w_1, w_2),$$

ahol $1 \leq d \leq w_1(N-1) + w_2, 1 \leq w_1 + w_2$. Az (1.13) képletben minden tag nemnegatív, így annak mindkét oldalát megszorozva $c(n, w_1, w_2)$ -vel, könnyen megállapítható, hogy $\{Z(n, d, w_1, w_2), \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$ egy nemnegatív szubmartingál bármely $1 \leq d \leq w_1(N-1) + w_2$ és $1 \leq w_1 + w_2$ esetén. Alkalmazva a Doob-Meyer felbontást $Z(n, d, w_1, w_2)$ -re, azt kapjuk, hogy

$$Z(n, d, w_1, w_2) = M(n, d, w_1, w_2) + A(n, d, w_1, w_2),$$

ahol $M(n, d, w_1, w_2)$ martingál és $A(n, d, w_1, w_2)$ egy előre jelezhető növekvő folyamat és ezek általános alakja a következő:

$$M(n, d, w_1, w_2) = \sum_{i=1}^n [Z(i, d, w_1, w_2) - \mathbb{E}(Z(i, d, w_1, w_2) | \mathcal{F}_{i-1})], \quad (1.19)$$

$$A(n, d, w_1, w_2) = \mathbb{E}Z(1, d, w_1, w_2) + \sum_{i=2}^n [\mathbb{E}(Z(i, d, w_1, w_2) | \mathcal{F}_{i-1}) - Z(i-1, d, w_1, w_2)]. \quad (1.20)$$

Az 1.4. Lemmából és az (1.20) képletből következik, hogy

$$\begin{aligned} A(n, d, w_1, w_2) &= \mathbb{E}Z(1, d, w_1, w_2) + \\ &+ \sum_{i=2}^n c(i, w_1, w_2) \left\{ X(i-1, d, w_1, w_2-1) \left[pr \frac{(N-2)(w_2-1)}{(N-1)i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-p) \left(q \frac{w_2-1}{i} + (1-q) \frac{d \binom{V_{i-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{i-1}}{N}} \right) \right] + \right. \\ &+ X(i-1, d-1, w_1, w_2-1) \left(p(1-r) \frac{N-1}{V_{i-1}} + \right. \\ &\quad \left. \left. (1-p)(1-q) \frac{(V_{i-1}-d) \binom{V_{i-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{i-1}}{N}} \right) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + X(i-1, d, w_1-1, w_2) \left((1-p) q \frac{w_1-1}{i} \right) + \\
& + X(i-1, d-1, w_1-1, w_2) \left(pr \frac{w_1-1}{i} \right) + \quad (1.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{N-1} X(i-1, d-m, w_1-1, w_2) \left((1-p)(1-q) \frac{\binom{d-m}{N-m-1} \binom{V_{i-1}-d+m-1}{m}}{\binom{V_{i-1}}{N} N} \right) \\
& + pr \delta_{d,1} \delta_{w_1,0} \delta_{w_2,1} + p(1-r) \delta_{d,N-1} \delta_{w_1,1} \delta_{w_2,0} \Big\}.
\end{aligned}$$

Jelöljük $B(n, d, w_1, w_2)$ -vel a $Z(n, d, w_1, w_2)$ feltételes szórásnégyzeteinek az összegét. Most $B(n, d, w_1, w_2)$ -re adunk egy felső határt.

$$\begin{aligned}
B(n, d, w_1, w_2) &= \\
&= \sum_{i=2}^n \mathbb{E} \left\{ (Z(i, d, w_1, w_2) - \mathbb{E}(Z(i, d, w_1, w_2) | \mathcal{F}_{i-1}))^2 | \mathcal{F}_{i-1} \right\} = \\
&= \sum_{i=2}^n c(i, w_1, w_2)^2 \mathbb{E} \left\{ (X(i, d, w_1, w_2) - \mathbb{E}(X(i, d, w_1, w_2) | \mathcal{F}_{i-1}))^2 | \mathcal{F}_{i-1} \right\} \leq \\
&\leq \sum_{i=2}^n c(i, w_1, w_2)^2 \mathbb{E} \left\{ (X(i, d, w_1, w_2) - X(i-1, d, w_1, w_2))^2 | \mathcal{F}_{i-1} \right\} \leq \\
&\leq N^2 \sum_{i=2}^n c(i, w_1, w_2)^2 = O \left(n^{2(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \beta) + 1} \right). \quad (1.22)
\end{aligned}$$

A fentiekben felhasználtuk, hogy $c(i, w_1, w_2)$ $\mathcal{F}_{i-1}$ mérhető, a tényt, hogy minden lépésben N csúcs lép kölcsönhatásba és az (1.18) egyenletet.

Mivel $M(n, d, w_1, w_2)$ martingál, ezért $M^2(n, d, w_1, w_2)$ szubmartingál a Jensen-egyenlőtlenség miatt. Az $M^2(n, d, w_1, w_2)$ Doob-Meyer felbontása

$$M^2(n, d, w_1, w_2) = Y(n, d, w_1, w_2) + B(n, d, w_1, w_2), \quad (1.23)$$

ahol $Y(n, d, w_1, w_2)$ martingál és $B(n, d, w_1, w_2)$ az előre jelezhető növekvő folyamat, ami megegyezik a $Z(n, d, w_1, w_2)$ feltételes szórásnégyzeteinek az összegével, ld. (1.22).

2. Teljes indukció. Először ellenőrizzük, hogy az állításunk teljesül-e a kezdeti értékek esetén, azaz amikor $w_1 = 1$ és $w_2 = 0$, $w_1 = 0$ és $w_2 = 1$ végül pedig $w_1 = 1$ és $w_2 = 1$. Utána teljes indukciót végzünk az értelmezési tartomány peremén, azaz amikor $w_1 = 0$ vagy $w_2 = 0$. Végezetül pedig az értelmezési tartomány belsején is elvégezzük a teljes indukciót.

2/a lépés Legyen $w_1 = 1$ és $w_2 = 0$. Ilyen súlyokkal rendelkező csúcsok azok, amelyek egyszer voltak középpontok, de periféria egyszer sem. Ebben az esetben ezeknek a csúcsoknak a fokszáma $N - 1$. Használva az (1.21) és az (1.18) egyenleteket

$$\begin{aligned} A(n, N - 1, 1, 0) &\sim p(1 - r) \sum_{i=2}^n c(i, 1, 0) \sim p(1 - r) \sum_{i=2}^n a_{1,0} i^{\alpha_1 + \beta} \sim \\ &\sim p(1 - r) a_{1,0} \frac{n^{\alpha_1 + \beta + 1}}{\alpha_1 + \beta + 1} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.24)$$

majdnem biztosan, amennyiben $n \rightarrow \infty$. Behelyettesítve az (1.22) képletbe,

$$B(n, N - 1, 1, 0) = O(n^{2(\alpha_1 + \beta) + 1}),$$

így

$$B(n, N - 1, 1, 0)^{\frac{1}{2}} \log B(n, N - 1, 1, 0) = O(A(n, N - 1, 1, 0)).$$

Alkalmazva az 1.2. Lemmát azt kapjuk, hogy

$$Z(n, N - 1, 1, 0) \sim A(n, N - 1, 1, 0) \quad (1.25)$$

majdnem biztosan, az $\{A(n, N - 1, 1, 0) \rightarrow \infty\}$ eseményen $n \rightarrow \infty$ esetén. Használva az (1.24), (1.17), (1.18) és (1.25) egyenleteket

$$\begin{aligned} \frac{X(n, N - 1, 1, 0)}{V_n} &= \frac{Z(n, N - 1, 1, 0)}{c(n, 1, 0)V_n} \sim \frac{A(n, N - 1, 1, 0)}{c(n, 1, 0)V_n} \sim \\ &\sim \frac{p(1 - r) a_{1,0} \frac{n^{\alpha_1 + \beta + 1}}{\alpha_1 + \beta + 1}}{a_{1,0} n^{\alpha_1 + \beta} p n} = \frac{1 - r}{\alpha_1 + \beta + 1} = x_{N-1,1,0} > 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Abban az esetben, ha $d \neq N - 1$, akkor $X(n, d, 1, 0) \equiv 0$. Tehát (1.15) igaz $w_1 = 1$ és $w_2 = 0$ esetén.

2/b lépés Legyen $w_1 = 0$ és $w_2 = 1$. Ekkor ezeknek a csúcsoknak a fokszáma csak 1 lehet. Az (1.21) összefüggésből következik, hogy

$$\begin{aligned} A(n, 1, 0, 1) &\sim pr \sum_{i=2}^n c(i, 0, 1) \sim pr \sum_{i=2}^n a_{0,1} i^{\alpha_2+\beta} \sim \\ &\sim pra_{0,1} \frac{n^{\alpha_2+\beta+1}}{\alpha_2 + \beta + 1} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.27)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén. Használva az (1.22) képletet

$$B(n, 1, 0, 1) = O(n^{2(\alpha_1+\beta)+1}),$$

így

$$B(n, 1, 0, 1)^{\frac{1}{2}} \log B(n, 1, 0, 1) = O(A(n, 1, 0, 1)).$$

Hasonlóan, mint korábban az 1.2. Lemma segítségével adódik, hogy

$$Z(n, 1, 0, 1) \sim A(n, 1, 0, 1) \quad (1.28)$$

majdnem biztosan, az $\{A(n, 1, 0, 1) \rightarrow \infty\}$ eseményen, ha $n \rightarrow \infty$. Továbbá, alkalmazva az (1.27), (1.17), (1.18) és (1.28) képleteket, adódik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{X(n, 1, 0, 1)}{V_n} &= \frac{Z(n, 1, 0, 1)}{c(n, 0, 1)V_n} \sim \frac{A(n, 1, 0, 1)}{c(n, 0, 1)V_n} \sim \\ &\sim \frac{pra_{0,1} \frac{n^{\alpha_2+\beta+1}}{\alpha_2+\beta+1}}{a_{0,1} n^{\alpha_2+\beta} pn} = \frac{r}{\alpha_2 + \beta + 1} = x_{1,0,1} > 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Amikor $d \neq 1$, akkor $X(n, d, 0, 1) \equiv 0$. Azaz (1.15) teljesül $w_1 = 0$ és $w_2 = 1$ esetén is.

2/c lépés Legyen $w_1 = w_2 = 1$. Az ilyen súllyal rendelkező csúcsok fokszáma $N - 1$ vagy N lehet. Először vegyük azt az esetet, amikor a foksám $N - 1$. Ekkor az (1.21), (1.18), (1.26) és (1.29) egyenletek szerint,

$$\begin{aligned} A(n, N - 1, 1, 1) &\sim \\ &\sim \sum_{i=2}^n a_{1,1} i^{\alpha_1+\alpha_2+\beta} \left(x_{1,0,1}(1-p)(1-q) \frac{N-1}{p(i-1)} + \right. \\ &\quad \left. x_{N-1,1,0}(1-p)(1-q) \frac{(N-1)^2}{p(i-1)} \right) \sim \end{aligned}$$

$$\sim \sum_{i=2}^n i^{\alpha_1+\alpha_2+\beta-1} a_{1,1} \frac{(1-p)(1-q)(N-1)}{p} (x_{1,0,1} + x_{N-1,1,0}(N-1)) \sim \quad (1.30)$$

$$\sim a_{1,1} \frac{(1-p)(1-q)(N-1)}{p} (x_{1,0,1} + (N-1)x_{N-1,1,0}) \frac{n^{\alpha_1+\alpha_2+\beta}}{\alpha_1+\alpha_2+\beta}.$$

Az (1.22) szerint

$$B(n, N-1, 1, 1) = O(n^{2(\alpha_1+\alpha_2+\beta)+1}).$$

Így ebben az esetben

$$B(n, N-1, 1, 1)^{\frac{1}{2}} \log B(n, N-1, 1, 1) \neq O(A(n, N-1, 1, 1)).$$

Használva az 1.1. Lemmát, azt kapjuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$M(n, N-1, 1, 1) = o(B(n, N-1, 1, 1)^{\frac{1}{2}} \log B(n, N-1, 1, 1)) = o(n^{\alpha_1+\alpha_2+\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

majdnem biztosan, a $\{B(n, N-1, 1, 1) \rightarrow \infty\}$ eseményen, ha $n \rightarrow \infty$. Továbbá $M(n, N-1, 1, 1)$ konvergens, a $\{B(\infty, N-1, 1, 1) < \infty\}$ halmazon $n \rightarrow \infty$ esetén, így $M(n, N-1, 1, 1) = o(n^{\alpha_1+\alpha_2+\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon})$ majdnem biztosan. Tehát, az (1.18), (1.30) és (1.17) egyenletekből következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{X(n, N-1, 1, 1)}{V_n} &= \frac{Z(n, N-1, 1, 1)}{c(n, 1, 1)V_n} = \quad (1.31) \\ &= \frac{M(n, N-1, 1, 1) + A(n, N-1, 1, 1)}{c(n, 1, 1)V_n} \leq \frac{Cn^{\alpha_1+\alpha_2+\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon}}{n^{\alpha_1+\alpha_2+\beta}n} \leq C \frac{1}{n^a} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

amint $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ és C alkalmas konstans.

A második esetben, amikor a csúcsok fokszáma N , hasonlóan belátható az állítás, mint a 2/a és 2/b lépésekben. Behelyettesítve az (1.21)-be

$$\begin{aligned} A(n, N, 1, 1) &\sim \\ &\sim \sum_{i=2}^n a_{1,1} i^{\alpha_1+\alpha_2+\beta} [(N-1)(p(1-r) + (1-p)(1-q))x_{N-1,1,0} + \\ &\quad + (1-p)(1-q)x_{1,0,1}] \sim \end{aligned}$$

$$\sim a_{1,1} [(N-1)(p(1-r) + (1-p)(1-q))x_{N-1,1,0} + (1-p)(1-q)x_{1,0,1}] \frac{n^{\alpha_1+\alpha_2+\beta+1}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + 1} \rightarrow \infty \quad (1.32)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén. Alkalmazva az (1.22) összefüggést,

$$B(n, N, 1, 1) = O(n^{2(\alpha_1+\alpha_2+\beta)+1}),$$

így

$$B(n, N, 1, 1)^{\frac{1}{2}} \log B(n, N, 1, 1) = O(A(n, N, 1, 1)).$$

Hasonlóan, mint korábban az 1.2. Lemma segítségével adódik, hogy

$$Z(n, N, 1, 1) \sim A(n, N, 1, 1) \quad (1.33)$$

majdnem biztosan, az $\{A(n, N, 1, 1) \rightarrow \infty\}$ eseményen, ha $n \rightarrow \infty$. Továbbá az (1.32), (1.17), (1.18) és (1.33) egyenletek felhasználásával

$$\begin{aligned} \frac{X(n, N, 1, 1)}{V_n} &= \frac{Z(n, N, 1, 1)}{c(n, 1, 1)V_n} \sim \frac{A(n, N, 1, 1)}{c(n, 1, 1)V_n} \sim \\ &\sim \frac{(N-1)(p(1-r) + (1-p)(1-q))x_{N-1,1,0} + (1-p)(1-q)x_{1,0,1}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + 1)p} = \\ &= \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + 1} (\beta_1 x_{1,0,1} + \beta_2 x_{N-1,1,0}) = x_{N,1,1} > 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Abban az esetben, amikor $d \neq N-1$ vagy $d \neq N$, akkor $X(n, d, 1, 1) \equiv 0$. Tehát (1.15) teljesül $w_1 = 1$ és $w_2 = 1$ esetén is.

2/d lépés Most pedig a $w_1 = k$ és $w_2 = 0$, $k > 1$ esetet vizsgáljuk. Ezek a csúcsok mindig központi csúcsként szerepeltek a kölcsönhatások során és sosem voltak periféria csúcsok. Ebben az esetben $N-1 \leq d \leq k(N-1)$, ahol d a csúcsok fokszámát jelöli. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden k -nál kisebb központi súly, 0 periféria súly és bármely lehetséges fokszám együttese esetén. Továbbá feltételezzük, hogy legalább az egyik pozitív az $x_{d-1,k-1,0}, x_{d,k-1,0}, x_{d-(N-1),k-1,0}$ együtthatók közül. Ugyanúgy, mint korábban behelyettesítve az (1.21)-be

$$\begin{aligned}
A(n, d, k, 0) &\sim \sum_{i=2}^n a_{k,0} i^{k\alpha_1+\beta} \left[x_{d-1,k-1,0}(k-1)p^2r + \right. \\
&\quad \left. + x_{d,k-1,0}(k-1)p(1-p)q + x_{d-(N-1),k-1,0}(1-p)(1-q) \right] \sim \\
&\sim a_{k,0} \frac{n^{k\alpha_1+\beta+1}}{k\alpha_1+\beta+1} \left[x_{d-1,k-1,0}(k-1)p^2r + x_{d,k-1,0}(k-1)p(1-p)q + \right. \\
&\quad \left. + x_{d-(N-1),k-1,0}(1-p)(1-q) \right] \rightarrow \infty, \quad (1.35)
\end{aligned}$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén.

Használva az (1.22) képletet,

$$B(n, d, k, 0) = O(n^{2(k\alpha_1+\beta)+1}), \quad (1.36)$$

így

$$B(n, d, k, 0)^{\frac{1}{2}} \log B(n, d, k, 0) = O(A(n, d, k, 0)). \quad (1.37)$$

Hasonlóan, mint korábban

$$Z(n, d, k, 0) \sim A(n, d, k, 0) \quad (1.38)$$

majdnem biztosan, az $\{A(n, d, k, 0) \rightarrow \infty\}$ eseményen, ha $n \rightarrow \infty$. Tehát alkalmazva az (1.35), (1.17), (1.18) és (1.38) összefüggéseket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{X(n, d, k, 0)}{V_n} &= \frac{Z(n, d, k, 0)}{c(n, k, 0)V_n} \sim \frac{A(n, d, k, 0)}{c(n, k, 0)V_n} \sim \\
&\sim \frac{1}{k\alpha_1+\beta+1} [(k-1)(\alpha_{11}x_{d-1,k-1,0} + \alpha_{12}x_{d,k-1,0}) + \\
&\quad + \beta_1x_{d-(N-1),k-1,0}] = x_{d,k,0} > 0, \quad (1.39)
\end{aligned}$$

ha az $x_{d-1,k-1,0}$, $x_{d,k-1,0}$ és $x_{d-(N-1),k-1,0}$ együtthatók közül legalább az egyik pozitív. Ha ez nem teljesül, akkor a határérték nulla. Könnyen látható, hogy bármely rögzített k esetén, $\frac{X(n,d,k,0)}{V_n}$ határértéke pozitív, ha $d \geq N-1$ és d megfelelően közel van $(N-1)$ -hez.

Azonban, ha d közel van $k(N-1)$ -hez, $\frac{X(n,d,k,0)}{V_n}$ határértéke lehet nulla vagy pozitív. Ha $d < N-1$ vagy $d > k(N-1)$, akkor nulla a határérték, mert ebben az esetben $X(n, d, k, 0) \equiv 0$.

Most legyen $x_{d-1,k-1,0}$, $x_{d,k-1,0}$ és $x_{d-(N-1),k-1,0}$ nulla. Az (1.21), (1.17), (1.18) egyenletekből és alkalmazva az indukciós feltételt, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 A(n, d, k, 0) &\sim \sum_{i=2}^n a_{k,0} i^{k\alpha_1+\beta} \left(O\left(\frac{1}{i^a}\right) + \sum_{m=2}^{N-2} X(i-1, d-m, k-1, 0) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left((1-p)(1-q) \frac{\binom{d-m}{N-m-1} (N-1)!}{m!} \frac{1}{(pi)^{N-m}} \right) \right) \leq \\
 &\leq C_1 \sum_{i=2}^n a_{k,0} i^{k\alpha_1+\beta-a} + C_2 \sum_{i=2}^n \sum_{m=2}^{N-2} a_{k,0} i^{k\alpha_1+\beta} x_{d-m,k-1,0} \frac{1}{i^{N-m-1}} \leq \\
 &\leq a_{k,0} C_1 \frac{n^{k\alpha_1+\beta+1-a}}{k\alpha_1+\beta+1-a} + a_{k,0} C_2 \frac{n^{k\alpha_1+\beta}}{k\alpha_1+\beta} = O\left(n^{k\alpha_1+\beta+1-a}\right), \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

ahol C_1 és C_2 a megfelelő konstansok. Emiatt nem alkalmazhatjuk az (1.37) egyenletet, de az (1.17), (1.18) és az 1.1. Lemma segítségével,

$$\begin{aligned}
 \frac{X(n, d, k, 0)}{V_n} &= \frac{Z(n, d, k, 0)}{c(n, k, 0)V_n} = \frac{M(n, d, k, 0) + A(n, d, k, 0)}{c(n, k, 0)V_n} = \\
 &= \frac{O\left(n^{k\alpha_1+\beta+1-a}\right)}{n^{k\alpha_1+\beta}pn} = O\left(n^{-a}\right) \rightarrow 0 = x_{d,k,0} \quad (1.41)
 \end{aligned}$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén.

2/e lépés Most vegyük a $w_1 = 0$ és $w_2 = l$, $l > 1$ esetet. Ezek a csúcsok kölcsönhatásban való részvétel esetén mindig periféria csúcsként vettek részt abban, azaz sosem voltak központi csúcsok. Ebben az esetben $1 \leq d \leq l$, ahol d a csúcsok foksámát jelöli. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden l -nél kisebb periféria súlyra, nulla központi súlyra és minden lehetséges foksámra. Könnyű belátni, hogy az $x_{d-1,0,l-1}$ és $x_{d,0,l-1}$ együtthatók pozitívak. A korábbiakat követve, az (1.21) egyenletből adódik, hogy

$$\begin{aligned}
 A(n, d, 0, l) &\sim \sum_{i=2}^n a_{0,l} i^{l\alpha_2+\beta} \left[x_{d,0,l-1} p(l-1) \left(\frac{N-2}{N-1} pr + (1-p)q \right) + \right. \\
 &\quad \left. + x_{d-1,0,l-1} (N-1) (p(1-r) + (1-p)(1-q)) \right] \sim \\
 &\sim a_{0,l} \frac{n^{l\alpha_2+\beta+1}}{l\alpha_2+\beta+1} \left[x_{d,0,l-1} p(l-1) \left(\frac{N-2}{N-1} pr + (1-p)q \right) + \right. \quad (1.42)
 \end{aligned}$$

$$+x_{d-1,0,l-1}(N-1)(p(1-r) + (1-p)(1-q)) \Big] \rightarrow \infty,$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén. Behelyettesítve az (1.22) képletbe adódik, hogy

$$B(n, d, 0, l) = O(n^{2(l\alpha_2 + \beta) + 1}),$$

így

$$B(n, d, 0, l)^{\frac{1}{2}} \log B(n, d, 0, l) = O(A(n, d, 0, l)).$$

Újra alkalmazva az 1.2. Lemmát láthatjuk, hogy

$$Z(n, d, 0, l) \sim A(n, d, 0, l) \tag{1.43}$$

majdnem biztosan, az $\{A(n, d, 0, l) \rightarrow \infty\}$ eseményen, ha $n \rightarrow \infty$. A fenti egyenletekből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{X(n, d, 0, l)}{V_n} &= \frac{Z(n, d, 0, l)}{c(n, 0, l)V_n} \sim \frac{A(n, d, 0, l)}{c(n, 0, l)V_n} \sim \\ &\sim \frac{1}{l\alpha_2 + \beta + 1} [\alpha_2(l-1)x_{d,0,l-1} + \beta_2 x_{d-1,0,l-1}] = x_{d,0,l} > 0, \end{aligned} \tag{1.44}$$

mivel $x_{d-1,0,l-1}$ és $x_{d,0,l-1}$ közül legalább az egyik biztosan pozitív. Ha $d < 1$ vagy $d > l$, akkor $X(n, d, 0, l) \equiv 0$.

2/f lépés Végezetül, az utolsó része a bizonyításnak az az eset, amikor $w_1 = k > 0$ és $w_2 = l > 0$. Ezek a csúcsok k -szor központi csúcsok és l -szer periféria csúcsok voltak a kölcsönhatások során. Ebben az esetben $N-1 \leq d \leq k(N-1) + l$, ahol d a csúcsok foksámát jelöli. Tegyük fel, hogy az állítás igaz bármely csúcsra, ha vagy a központi súlya kisebb mint k és a periféria súlya nem nagyobb mint l , vagy a központi súlya nem nagyobb mint k és a periféria súlya kisebb mint l . Továbbá tegyük fel, hogy az $x_{d-1,k-1,l}$, $x_{d,k,l-1}$, $x_{d-1,k,l-1}$, $x_{d,k-1,l}$ és $x_{d-(N-1),k-1,l}$ együtthatók közül legalább az egyik pozitív. Behelyettesítve az (1.21) képletbe és alkalmazva az indukciós feltételt adódik, hogy

$$\begin{aligned}
A(n, d, k, l) &\sim \sum_{i=2}^n a_{k,l} i^{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta} \left[x_{d-1,k-1,l} (k-1)p^2r + \right. \\
&\quad + x_{d-1,k,l-1} (N-1) (p(1-r) + (1-p)(1-q)) + \\
&\quad + x_{d,k-1,l} (k-1)p(1-p)q + x_{d,k,l-1} (l-1)p \left(pr \frac{N-2}{N-1} + (1-p)q \right) + \\
&\quad \left. + x_{d-(N-1),k-1,l} (1-p)(1-q) \right] \sim \\
&\sim a_{k,l} \frac{n^{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta + 1}}{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta + 1} \left[x_{d-1,k-1,l} (k-1)p^2r + \right. \\
&\quad + x_{d-1,k,l-1} (N-1) (p(1-r) + (1-p)(1-q)) + \\
&\quad + x_{d,k-1,l} (k-1)p(1-p)q + x_{d,k,l-1} (l-1)p \left(pr \frac{N-2}{N-1} + (1-p)q \right) + \\
&\quad \left. x_{d-(N-1),k-1,l} (1-p)(1-q) \right] \rightarrow \infty \quad (1.45)
\end{aligned}$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén. Alkalmazva az (1.22) egyenletet azt kapjuk, hogy

$$B(n, d, k, l) = O(n^{2(k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta) + 1}), \quad (1.46)$$

így

$$B(n, d, k, l)^{\frac{1}{2}} \log B(n, d, k, l) = O(A(n, d, k, l)).$$

Felhasználva az 1.2. Lemmát adódik, hogy

$$Z(n, d, k, l) \sim A(n, d, k, l) \quad (1.47)$$

majdnem biztosan, az $\{A(n, d, k, l) \rightarrow \infty\}$ eseményen, ha $n \rightarrow \infty$. Tehát, az (1.45), (1.17), (1.18) és (1.47) egyenletekből és a feltételekből következik, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{X(n, d, k, l)}{V_n} &= \frac{Z(n, d, k, l)}{c(n, k, l)V_n} \sim \frac{A(n, d, k, l)}{c(n, k, l)V_n} \sim \\
&\sim \frac{1}{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta + 1} [\alpha_{11}(k-1)x_{d-1,k-1,l} + \alpha_{12}(k-1)x_{d,k-1,l} + \\
&\quad + \alpha_2(l-1)x_{d,k,l-1} + \beta_1 x_{d-(N-1),k-1,l} + \beta_2 x_{d-1,k,l-1}] = x_{d,k,l} > 0. \quad (1.48)
\end{aligned}$$

Másrészt, ha $d < N - 1$ vagy $d > k(N - 1) + l$, akkor $X(n, d, k, l) \equiv 0$. Így ebben az esetben (1.15) igaz bármely $k, l \in \mathbb{N}$ esetén.

A fennmaradó eset, amikor az $x_{d-1,k-1,l}$, $x_{d,k,l-1}$, $x_{d-1,k,l-1}$, $x_{d,k-1,l}$ és $x_{d-(N-1),k-1,l}$ együtthatók mind nullával egyenlőek. Az (1.21) egyenletből és alkalmazva az indukciós feltételt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 A(n, d, k, l) &\sim \\
 &\sim \sum_{i=2}^n a_{k,l} i^{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta} \left(O\left(\frac{1}{i^a}\right) + \sum_{m=2}^{N-2} X(i-1, d-m, k-1, l) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left((1-p)(1-q) \frac{\binom{d-m}{N-m-1} (N-1)!}{m!} \frac{1}{(pi)^{N-m}} \right) \right) \sim \\
 &\sim C_1 \sum_{i=2}^n a_{k,l} i^{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta - a} + C_2 \sum_{i=2}^n \sum_{m=2}^{N-2} a_{k,l} i^{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta} x_{d-m,k-1,l} \frac{1}{i^{N-m-1}} \leq \\
 &\leq a_{k,l} C_1 \frac{n^{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta + 1 - a}}{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta + 1 - a} + a_{k,l} C_2 \frac{n^{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta}}{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta} = \\
 &= O\left(n^{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta + 1 - a}\right), \tag{1.49}
 \end{aligned}$$

ahol C_1 és C_2 a megfelelő konstansok. Felhasználva az (1.17), (1.18) egyenleteket és az 1.1. Lemmát adódik, hogy

$$\begin{aligned}
 \frac{X(n, d, k, l)}{V_n} &= \frac{Z(n, d, k, l)}{c(n, k, l)V_n} = \frac{M(n, d, k, l) + A(n, d, k, l)}{c(n, k, l)V_n} = \\
 &= \frac{O\left(n^{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta + 1 - a}\right)}{n^{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta} p n} = O\left(n^{-a}\right) \rightarrow 0 = x_{d,k,l} \tag{1.50}
 \end{aligned}$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén. □

Második bizonyítás. Ebben bizonyításban az 1.3. Lemmát alkalmazzuk. Ehhez először definiáljuk a megfelelő véletlen folyamatokat. Majd teljes indukciót alkalmazunk, ami ebben az esetben is kétdimenziós, ezért ezt a részt itt is további alrészekre bontjuk. Megjegyezzük, hogy ez bizonyítás Backhausz Ágnes javaslatára került be az értekezésbe, ezért nem található meg a fejezet alapjául szolgáló [22] cikkben. Továbbá a második bizonyítás egyszerűsítéseket tartalmaz, de ugyanazok az összefüggések és mennyiségek szerepelnek benne, mint az első bizonyításban.

Legyen

$$U(n, d, w_1, w_2) = w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \beta = u_{d, w_1, w_2}.$$

Az állítás feltételrendszere miatt $u_{d, w_1, w_2} > 0$ teljesül. Bár ebben az esetben $U(n, d, w_1, w_2) < n$ nem igaz bármely $n \geq 1$ esetén, de van olyan n_0 , hogy bármely $n \geq n_0$ egész számra teljesül, ami nem okoz gondot hiszen a vizsgált konvergenciák szempontjából az első véges sok tag figyelmen kívül hagyható. Továbbá, legyen

$$\begin{aligned} V(n, d, w_1, w_2) = & \frac{X(n-1, d, w_1, w_2-1)}{n} \left[pr \frac{(N-2)(w_2-1)}{(N-1)} + \right. \\ & \left. + (1-p) \left(q(w_2-1) + (1-q) \frac{nd \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right) \right] + \\ & + \frac{X(n-1, d-1, w_1, w_2-1)}{n} \left[p(1-r) \frac{n(N-1)}{V_{n-1}} + \right. \\ & \left. + (1-p)(1-q) \frac{n(V_{n-1}-d) \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \\ & + \frac{X(n-1, d, w_1-1, w_2)}{n} \left[(1-p) \left(q(w_1-1) + (1-q) \frac{n \binom{d}{N-1}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right) \right] + \\ & + \frac{X(n-1, d-1, w_1-1, w_2)}{n} \left[pr(w_1-1) + \right. \\ & \left. + (1-p)(1-q) \frac{n \binom{d-1}{N-2} (V_{n-1}-d)}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \\ & + \sum_{m=2}^{N-2} \frac{X(n-1, d-m, w_1-1, w_2)}{n} \left[(1-p)(1-q) \frac{\binom{d-m}{N-m-1} \binom{V_{n-1}-d+m-1}{m}}{\frac{1}{n} \binom{V_{n-1}}{N} N} \right] \\ & + \frac{X(n-1, d-(N-1), w_1-1, w_2)}{n} \left[(1-p)(1-q) \frac{n \binom{V_{n-1}-d+N-2}{N-1}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \end{aligned}$$

$$+pr\delta_{d,1}\delta_{w_1,0}\delta_{w_2,1} + p(1-r)\delta_{d,N-1}\delta_{w_1,1}\delta_{w_2,0}. \quad (1.51)$$

Ezekkel a jelölésekkel az (1.13) egyenletből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X(n, d, w_1, w_2) | \mathcal{F}_{n-1}\} = \\ = \left(1 - \frac{U(n, d, w_1, w_2)}{n}\right) X(n-1, d, w_1, w_2) + V(n, d, w_1, w_2) \end{aligned} \quad (1.52)$$

teljesül.

Mivel az (1.52) összefüggésben egyenlőség van, így az 1.3. Lemma (a) és (b) részéből a $\xi_n = X(n, d, w_1, w_2)$, $u_n = U(n, d, w_1, w_2)$, $v_n = V(n, d, w_1, w_2)$, $u = u_{d,w_1,w_2}$, $v = v_{d,w_1,w_2}$, $w_n \equiv 1$ és $\mu = 0$ szereposztással adódik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(n, d, w_1, w_2)}{n} = \frac{v_{d,w_1,w_2}}{u_{d,w_1,w_2} + 1}, \quad (1.53)$$

majdnem biztosan, amennyiben $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n, d, w_1, w_2) = v_{d,w_1,w_2} \geq 0$.

Ezen felül megjegyezzük, hogy az 1.3. Lemma (1.10) feltétele $\delta = 1$ -gyel teljesül az $X(n, d, w_1, w_2)$ sorozatra, ugyanis egy lépésben legfeljebb mindig N csúcs lép kölcsönhatásba, tehát a (1.10) feltételben szereplő feltételes várható érték felülről korlátos N^2 -tel.

A továbbiakban teljes indukciót alkalmazunk úgy, hogy először ellenőrizzük állításunkat a kezdeti értékek esetén, azaz amikor $w_1 = 1$ és $w_2 = 0$, $w_1 = 0$ és $w_2 = 1$ végül pedig $w_1 = 1$ és $w_2 = 1$. Utána teljes indukciót végzünk az értelmezési tartomány peremén, azaz amikor $w_1 = 0$ vagy $w_2 = 0$. Végezetül pedig az értelmezési tartomány belsején is elvégezzük a teljes indukciót. Minden lépésben meghatározzuk a megfelelő v_{d,w_1,w_2} határértékeket, majd az 1.3. Lemmát alkalmazzuk.

2/a lépés Legyen $w_1 = 1$ és $w_2 = 0$. Ilyen súlyokkal rendelkező csúcsok azok, amelyek egyszer voltak középpontok, de periféria egyszer sem. Ebben az esetben ezeknek a csúcsoknak a fokszáma $N - 1$, azaz (1.51) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n, N-1, 1, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(1-r) = p(1-r) = v_{N-1,1,0} > 0.$$

Ezért az 1.3. Lemmából következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(n, N-1, 1, 0)}{n} = \frac{p(1-r)}{\alpha_1 + \beta + 1} = x'_{N-1,1,0} > 0, \quad (1.54)$$

majdnem biztosan.

Abban az esetben, ha $d \neq N - 1$, akkor $X(n, d, 1, 0) \equiv 0$. Végezetül az (1.54) határértéket p -vel osztva, figyelembe véve az (1.17) összefüggést és $x_{N-1,1,0} = x'_{N-1,1,0}/p$, jelöléssel kapjuk, hogy (1.15) teljesül $w_1 = 1$ és $w_2 = 0$ esetén.

2/b lépés Legyen $w_1 = 0$ és $w_2 = 1$. Ekkor ezeknek a csúcsoknak a fokszáma csak 1 lehet, azaz (1.51) alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n, 1, 0, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} pr = pr = v_{1,0,1} > 0.$$

Ezért az 1.3. Lemmából következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(n, 1, 0, 1)}{n} = \frac{pr}{\alpha_2 + \beta + 1} = x'_{1,0,1} > 0, \quad (1.55)$$

majdnem biztosan.

Amikor $d \neq 1$, akkor $X(n, d, 0, 1) \equiv 0$. Ezek után az (1.55) határértéket p -vel osztva, figyelembe véve az (1.17) összefüggést és $x_{1,0,1} = x'_{1,0,1}/p$, jelöléssel kapjuk, hogy (1.15) igaz $w_1 = 0$ és $w_2 = 1$ esetén.

2/c lépés Legyen $w_1 = w_2 = 1$. Az ilyen súllyal rendelkező csúcsok fokszáma $N-1$ vagy N lehet. Először vegyük azt az esetet, amikor a foksám $N-1$. Ekkor felhasználva az (1.54) és (1.55) határértékeket, továbbá az (1.17) összefüggést adódik, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} V(n, N-1, 1, 1) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X(n-1, N-1, 1, 0)}{n} (1-p)(1-q) \frac{n(N-1) \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{X(n-1, 1, 0, 1)}{n} (1-p)(1-q) \frac{n \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right) = 0 = v_{N-1,1,1}, \end{aligned}$$

majdnem biztosan. Tehát az 1.3. Lemmából következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(n, N-1, 1, 1)}{n} = 0 = x'_{N-1,1,1}, \quad (1.56)$$

majdnem biztosan.

A második esetben, amikor a csúcsok fokszáma N , ekkor ismét felhasználva az (1.54) és (1.55) határértékeket továbbá az (1.17) összefüggést adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} V(n, N, 1, 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X(n-1, N-1, 1, 0)}{n} \left[p(1-r) \frac{n(N-1)}{V_{n-1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-p)(1-q) \frac{n(V_{n-1}-d) \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{X(n-1, 1, 0, 1)}{n} \left[(1-p)(1-q) \frac{n \binom{V_{n-1}-2}{N-1}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] \right) = \\
&= \left((1-r)(N-1) + \frac{(1-p)(1-q)}{p} \right) x'_{N-1,1,0} + \\
&\quad + \frac{(1-p)(1-q)}{p} x'_{1,0,1} = v_{N,1,1} > 0,
\end{aligned}$$

majdnem biztosan. Ezért az 1.3. Lemmából következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(n, N, 1, 1)}{n} = \frac{\beta_1 x'_{1,0,1} + \beta_2 x'_{N-1,1,0}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + 1} = x'_{N,1,1} > 0, \quad (1.57)$$

majdnem biztosan.

Abban az esetben, amikor $d \neq N-1$ vagy $d \neq N$, akkor $X(n, d, 1, 1) \equiv 0$. Végezetül az (1.56) és (1.57) határértékeket p -vel osztva, figyelembe véve az (1.17) összefüggést és az $x_{N-1,1,1} = x'_{N-1,1,1}/p$, $x_{N,1,1} = x'_{N,1,1}/p$ jelölésekkel kapjuk, hogy (1.15) teljesül $w_1 = 1$ és $w_2 = 1$ esetén is.

2/d lépés Most pedig a $w_1 = k$ és $w_2 = 0$, $k > 1$ esetet vizsgáljuk. Ezek a csúcsok mindig központi csúcsként szerepeltek a kölcsönhatások során és sosem voltak periféria csúcsok. Ebben az esetben $N-1 \leq d \leq k(N-1)$, ahol d a csúcsok foksámát jelöli. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden k -nál kisebb központi súly, 0 periféria súly és bármely lehetséges foksám együttese esetén. Ugyanúgy, mint korábban felhasználva az (1.17) egyenletet adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} V(n, d, k, 0) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X(n-1, d, k-1, 0)}{n} \left[(1-p) \left(q(k-1) + (1-q) \frac{n \binom{d}{N-1}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{X(n-1, d-1, k-1, 0)}{n} \left[pr(k-1) + (1-p)(1-q) \frac{\binom{d-1}{N-2} (V_{n-1} - d)}{\frac{1}{n} \binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \\
& + \sum_{m=2}^{N-2} \frac{X(n-1, d-m, k-1, 0)}{n} \left[(1-p)(1-q) \frac{\binom{d-m}{N-m-1} \binom{V_{n-1}-d+m-1}{m}}{\frac{1}{n} \binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \\
& + \frac{X(n-1, d-(N-1), k-1, 0)}{n} \left[(1-p)(1-q) \frac{n \binom{V_{n-1}-d+N-2}{N-1}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] = \\
& = x'_{d-1, k-1, 0} (k-1) pr + x'_{d, k-1, 0} (k-1) (1-p) q + \\
& \quad + x'_{d-(N-1), k-1, 0} \frac{(1-p)(1-q)}{p} = v_{d, k, 0} \geq 0, \quad (1.58)
\end{aligned}$$

majdnem biztosan. Ezért az 1.3. Lemmát ismét alkalmazva következik, hogy

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(n, d, k, 0)}{n} = \\
& = \frac{(k-1) \left(\alpha_{11} x'_{d-1, k-1, 0} + \alpha_{12} x'_{d, k-1, 0} \right) + \beta_1 x'_{d-(N-1), k-1, 0}}{k\alpha_1 + \beta + 1} = x'_{d, k, 0} > 0, \quad (1.59)
\end{aligned}$$

majdnem biztosan, ha az $x'_{d-1, k-1, 0}$, $x'_{d, k-1, 0}$ és $x'_{d-(N-1), k-1, 0}$ együtthatók közül legalább az egyik pozitív. Ha ez nem teljesül, akkor a határérték nulla. Könnyen látható, hogy bármely rögzített k esetén, $\frac{X(n, d, k, 0)}{n}$ határértéke pozitív, ha $d \geq N-1$ és d megfelelően közel van $(N-1)$ -hez.

Azonban, ha d közel van $k(N-1)$ -hez, $\frac{X(n, d, k, 0)}{n}$ határértéke lehet nulla vagy pozitív. Ha $d < N-1$ vagy $d > k(N-1)$, akkor nulla a határérték, mert ebben az esetben $X(n, d, k, 0) \equiv 0$.

2/e lépés Most vegyük a $w_1 = 0$ és $w_2 = l$, $l > 1$ esetet. Ezek a csúcsok kölcsönhatásban való részvétel esetén mindig periféria csúcsként vettek részt abban, azaz sosem voltak központi csúcsok. Ebben az esetben $1 \leq d \leq l$, ahol d a csúcsok foksámát jelöli. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden l -nél kisebb periféria súlyra, nulla központi súlyra és minden lehetséges

fokszámra. Könnyű belátni, hogy az $x'_{d-1,0,l-1}$ és $x'_{d,0,l-1}$ együttthatók pozitívak.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} V(n, d, 0, l) &= \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X(n-1, d, 0, l-1)}{n} \left[pr \frac{(N-2)(l-1)}{(N-1)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-p) \left(q(l-1) + (1-q) \frac{nd \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{X(n-1, d-1, 0, l-1)}{n} \left[p(1-r) \frac{n(N-1)}{V_{n-1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-p)(1-q) \frac{n(V_{n-1}-d) \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] \right) = \\
&= x'_{d,0,l-1}(l-1) \left(\frac{N-2}{N-1} pr + (1-p)q \right) + \\
&\quad + x'_{d-1,0,l-1}(N-1) \left((1-r) + \frac{(1-p)(1-q)}{p} \right) = v_{d,0,l} > 0,
\end{aligned}$$

majdnem biztosan. Ezért az 1.3. Lemmát ismét alkalmazva következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(n, d, 0, l)}{n} = \frac{\alpha_2(l-1)x'_{d,0,l-1} + \beta_2 x'_{d-1,0,l-1}}{l\alpha_2 + \beta + 1} = x'_{d,0,l} > 0, \quad (1.60)$$

majdnem biztosan, mivel $x'_{d-1,0,l-1}$ és $x'_{d,0,l-1}$ közül legalább az egyik biztosan pozitív. Ha $d < 1$ vagy $d > l$, akkor $X(n, d, 0, l) \equiv 0$.

2/f lépés Végezetül, az utolsó része a bizonyításnak az az eset, amikor $w_1 = k > 0$ és $w_2 = l > 0$. Ezek a csúcsok k -szor központi csúcsok és l -szer periféria csúcsok voltak a kölcsönhatások során. Ebben az esetben $N-1 \leq d \leq k(N-1) + l$, ahol d a csúcsok fokszámát jelöli. Tegyük fel, hogy az állítás igaz bármely csúcsra, ha vagy a központi súlya kisebb mint k és a periféria súlya nem nagyobb mint l , vagy a központi súlya nem nagyobb mint k és a periféria súlya kisebb mint l . Ekkor felhasználva ismét az (1.17) összefüggést és alkalmazva az indukciós feltételt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} V(n, d, k, l) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X(n-1, d, k, l-1)}{n} \left[pr \frac{(N-2)(l-1)}{(N-1)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-p) \left(q(l-1) + (1-q) \frac{nd \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{X(n-1, d-1, k, l-1)}{n} \left[p(1-r) \frac{n(N-1)}{V_{n-1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-p)(1-q) \frac{n(V_{n-1}-d) \binom{V_{n-1}-2}{N-2}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{X(n-1, d, k-1, l)}{n} \left[(1-p) \left(q(k-1) + (1-q) \frac{n \binom{d}{N-1}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{X(n-1, d-1, k-1, l)}{n} \left[pr(k-1) + (1-p)(1-q) \frac{n \binom{d-1}{N-2} (V_{n-1}-d)}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=2}^{N-2} \frac{X(n-1, d-m, k-1, l)}{n} \left[(1-p)(1-q) \frac{n \binom{d-m}{N-m-1} \binom{V_{n-1}-d+m-1}{m}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{X(n-1, d-(N-1), k-1, l)}{n} \left[(1-p)(1-q) \frac{n \binom{V_{n-1}-d+N-2}{N-1}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right] \right) = \\
&= x'_{d-1, k-1, l} (k-1) pr + x'_{d-1, k, l-1} (N-1) \left((1-r) + \frac{(1-p)(1-q)}{p} \right) + \\
&\quad + x'_{d, k-1, l} (k-1) (1-p) q + x'_{d, k, l-1} (l-1) \left(pr \frac{N-2}{N-1} + (1-p) q \right) + \\
&\quad + x'_{d-(N-1), k-1, l} \frac{(1-p)(1-q)}{p} = v_{d, k, l} \geq 0,
\end{aligned}$$

majdnem biztosan. Így az 1.3. Lemmából következik, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(n, d, k, l)}{n} &= \\ &= \frac{1}{k\alpha_1 + l\alpha_2 + \beta + 1} \left[\alpha_{11}(k-1)x'_{d-1,k-1,l} + \alpha_{12}(k-1)x'_{d,k-1,l} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2(l-1)x'_{d,k,l-1} + \beta_1 x'_{d-(N-1),k-1,l} + \beta_2 x'_{d-1,k,l-1} \right] = x'_{d,k,l} > 0, \quad (1.61) \end{aligned}$$

majdnem biztosan, ha az $x'_{d-1,k-1,l}$, $x'_{d,k,l-1}$, $x'_{d-1,k,l-1}$, $x'_{d,k-1,l}$ és $x'_{d-(N-1),k-1,l}$ együtthatók közül legalább az egyik pozitív. Ellenkező esetben a határérték 0. Másrészt, ha $d < N-1$ vagy $d > k(N-1) + l$, akkor $X(n, d, k, l) \equiv 0$. Végül az (1.61) határértéket p -vel osztva, figyelembe véve az (1.17) összefüggést és az $x_{d-1,k-1,l} = x'_{d-1,k-1,l}/p$, $x_{d,k-1,l} = x'_{d,k-1,l}/p$, $x_{d,k,l-1} = x'_{d,k,l-1}/p$, $x_{d-(N-1),k-1,l} = x'_{d-(N-1),k-1,l}/p$ és $x_{d-1,k,l-1} = x'_{d-1,k,l-1}/p$ jelölésekkel kapjuk, hogy (1.15) igaz bármely $k, l \in \mathbb{N}$ esetén. $\square$

A következő Lemmában a határértékeket összegezzük fokszám szerint, így a továbbiakban csak a súlyokkal kell foglalkoznunk.

1.5. Lemma. *Legyen $p > 0$ továbbá*

$$x_{w_1, w_2} = x_{1, w_1, w_2} + x_{2, w_1, w_2} + \cdots + x_{(N-1)w_1 + w_2, w_1, w_2}$$

ahol $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$ és $w_1 + w_2 \geq 1$. Ekkor x_{w_1, w_2} ($1 \leq w_1 + w_2$) pozitív számokra igaz a következő rekurzív egyenlet:

$$\begin{aligned} x_{1,0} &= \frac{1-r}{\alpha_1 + \beta + 1}, \quad x_{0,1} = \frac{r}{\alpha_2 + \beta + 1}, \\ x_{w_1, w_2} &= \frac{(\alpha_1(w_1 - 1) + \beta_1)x_{w_1-1, w_2} + (\alpha_2(w_2 - 1) + \beta_2)x_{w_1, w_2-1}}{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \beta + 1} \quad (1.62) \end{aligned}$$

ha $1 < w_1 + w_2$.

Bizonyítás. Az (1.15) rekurzív egyenlet szerint

$$\begin{aligned}
x_{w_1, w_2} &= \sum_{d=1}^{(N-1)w_1+w_2} x_{d, w_1, w_2} = \sum_d x_{d, w_1, w_2} = \\
&= \frac{1}{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \beta + 1} \times \left[\alpha_{11} (w_1 - 1) \sum_d x_{d-1, w_1-1, w_2} + \right. \\
&\quad + \alpha_{12} (w_1 - 1) \sum_d x_{d, w_1-1, w_2} + \alpha_2 (w_2 - 1) \sum_d x_{d, w_1, w_2-1} + \\
&\quad \left. + \beta_1 \sum_d x_{d-(N-1), w_1-1, w_2} + \beta_2 \sum_d x_{d-1, w_1, w_2-1} \right] = \\
&= \frac{(\alpha_1 (w_1 - 1) + \beta_1) x_{w_1-1, w_2} + (\alpha_2 (w_2 - 1) + \beta_2) x_{w_1, w_2-1}}{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \beta + 1}.
\end{aligned}$$

Itt használtuk, hogy $x_{d, w_1, w_2} = 0$, ha $d \notin \{1, 2, \dots, (N-1)w_1 + w_2\}$. □

Az 1.6. Tétel a súlyok skálafüggetlenségét mutatja. A súlyok és a fokszámok közötti összefüggés felhasználásával adódik az 1.1. Tétel, így ennek a bizonyításával a fő eredményünk is bizonyított.

1.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $0 < r < 1$. Legyen w_1 rögzített. Ekkor, $w_2 \rightarrow \infty$ esetén,*

$$x_{w_1, w_2} \sim C(w_1) w_2^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)}, \quad (1.63)$$

ahol

$$C(w_1) = \frac{r}{\alpha_2} \frac{1}{w_1!} \frac{\Gamma\left(w_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}. \quad (1.64)$$

Itt Γ a Gamma függvényt jelöli. Hasonló állítás igaz rögzített w_2 és $w_1 \rightarrow \infty$ esetén.

Bizonyítás. Az állítást teljes indukcióval igazoljuk. Ahogy korábban is kétdimenziós tömbön kellett a teljes indukciót elvégezni, most az x_{w_1, w_2} tömbön kell ugyanezt tenni, ezért itt is lépésekre bontottuk a bizonyítást.

(i) **Először vegyük azt az esetet, amikor az egyik súly 0.** Legyen $w_1 = 0$, ekkor az 1.5. Lemma szerint

$$x_{0,1} = \frac{r}{\alpha_2 + \beta + 1} > 0, \quad (1.65)$$

$$x_{0,l} = \frac{1}{l\alpha_2 + \beta + 1} ((l-1)\alpha_2 + \beta_2) x_{0,l-1}, \quad l > 1. \quad (1.66)$$

Ebből a rekurzióból adódik, hogy

$$\begin{aligned} x_{0,l} &= x_{0,1} \prod_{j=2}^l \frac{\alpha_2(j-1) + \beta_2}{\alpha_2 j + \beta + 1} = \\ &= \frac{r}{\alpha_2 + \beta + 1} \cdot \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2\alpha_2 + \beta + 1} \cdot \frac{2\alpha_2 + \beta_2}{3\alpha_2 + \beta + 1} \cdots \frac{(l-1)\alpha_2 + \beta_2}{l\alpha_2 + \beta + 1} = \\ &= \frac{r}{l\alpha_2 + \beta + 1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\frac{\beta_2}{\alpha_2} + j}{\frac{\beta+1}{\alpha_2} + j} = \frac{r}{l\alpha_2 + \beta + 1} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\beta+1}{\alpha_2}\right)} = \\ &= \frac{r}{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} = C(0) \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Alkalmazva az (1.12) összefüggést, megkapjuk az igazolandó állítást $w_1 = 0$ esetén, azaz

$$x_{0,l} = C(0) \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \sim C(0) l^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)} \quad (1.68)$$

amennyiben $l \rightarrow \infty$.

A másik esetben, amikor $w_2 = 0$, hasonlóan kapjuk, hogy

$$x_{1,0} = \frac{1-r}{\alpha_1 + \beta + 1} > 0, \quad (1.69)$$

$$x_{k,0} = \frac{1}{k\alpha_1 + \beta + 1} ((k-1)\alpha_1 + \beta_1) x_{k-1,0}, \quad k > 1, \quad (1.70)$$

és

$$x_{k,0} \sim C_0 k^{-\left(1 + \frac{\beta_2 + 1}{\alpha_1}\right)} \quad (1.71)$$

amennyiben $k \rightarrow \infty$, ahol $C_0 = \frac{(1-r)\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha_1}\right)}{\alpha_1\Gamma\left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}$.

(ii) Most a $w_1 = 1$ esetet vizsgáljuk. Ennek a résznek a bemutatása azt a célt szolgálja, hogy a következő részben az általános alakot felírjuk. Korábban beláttuk, hogy (1.63) igaz, ha $w_1 = 0$ vagy $w_2 = 0$ (ld. (1.68) és (1.69)). Alkalmazva néhányszor az (1.62) rekurziót adódik, hogy

$$\begin{aligned} x_{1,l} &= \frac{\beta_1 x_{0,l} + (\alpha_2(l-1) + \beta_2) x_{1,l-1}}{\alpha_1 + \alpha_2 l + \beta + 1} = \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{\beta_1 \prod_{j=i}^{l-1} (j\alpha_2 + \beta_2)}{\prod_{j=i}^l (\alpha_1 + j\alpha_2 + \beta + 1)} x_{0,i} + \frac{\beta_2 \prod_{j=1}^{l-1} (j\alpha_2 + \beta_2)}{\prod_{j=1}^l (\alpha_1 + j\alpha_2 + \beta + 1)} x_{1,0} = \\ &= \sum_{i=1}^l b_{0,i}^{(l)} x_{0,i} + b_{1,0}^{(l)} x_{1,0}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

ahol

$$b_{0,i}^{(l)} = \frac{\beta_1}{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + 1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(i + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(i + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}, \quad 1 \leq i \leq l, \quad (1.73)$$

és

$$b_{1,0}^{(l)} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + 1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}. \quad (1.74)$$

Legyen

$$D(1) = \frac{C(0)\beta_1}{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + 1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}, \quad (1.75)$$

ahol $C(0)$ az (1.64) képletből adódik.

Most alkalmazva az (1.67), (1.11), (1.12) összefüggéseket az (1.72) egyenlet első tagjára kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^l b_{0,i}^{(l)} x_{0,i} &= D(1) \sum_{i=1}^l \frac{\Gamma\left(i + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(i + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} = \\
 &= D(1) \sum_{t=0}^{l-1} \frac{\Gamma\left(t + 1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(t + 1 + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} = \\
 &= \frac{D(1)}{\frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2} + 1} \left[\frac{\Gamma\left(l + 1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \right] = \\
 &= \frac{r}{\alpha_2} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + 1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \right] \sim \\
 &\sim \frac{r}{\alpha_2} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} = C(1) \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}
 \end{aligned}$$

amennyiben $l \rightarrow \infty$. Fentebb az alacsonyabb rendű tagokat elhanyagoljuk, majd alkalmazva az (1.12) összefüggést

$$\sum_{i=1}^l b_{0,i}^{(l)} x_{0,i} \sim C(1) l^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)} \quad (1.76)$$

adódik $l \rightarrow \infty$ esetén.

A továbbiakban a (1.72) egyenlet második tagjával foglalkozunk. Felhasználva az (1.12) összefüggést az (1.74) egyenletre

$$b_{1,0}^{(l)} \sim \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} l^{-\left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \quad (1.77)$$

adódik $l \rightarrow \infty$ esetén.

Behelyettesítve az (1.69), (1.76), (1.77) egyenleteket az (1.72) összefüggésbe, adódik az állítás $w_1 = 1$ esetén, azaz

$$\begin{aligned} x_{1,l} &\sim C(1) l^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} l^{-\left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \frac{1 - r}{\alpha_1 + \beta + 1} \sim \\ &\sim C(1) l^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)} \end{aligned}$$

amennyiben $l \rightarrow \infty$.

(iii) Végezetül az általános indukciós lépés. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden w_1 -nél kisebb központi súly esetén. Ekkor a következő igaz:

$$x_{k,l} \sim C(k) \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \sim C(k) l^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)}, \quad 0 \leq k \leq w_1 - 1, \quad (1.78)$$

$l \rightarrow \infty$ esetén. Ekkor az (1.62) rekurzióból következik, hogy

$$\begin{aligned} x_{w_1,l} &= \frac{(w_1 - 1)\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2} \sum_{i=1}^l \frac{\prod_{j=i}^{l-1} \left(j + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\prod_{j=i}^l \left(j + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} x_{w_1-1,i} + \\ &+ \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\prod_{j=1}^{l-1} \left(j + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\prod_{j=1}^l \left(j + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} x_{w_1,0} = \sum_{i=1}^l b_{w_1-1,i}^{(l)} x_{w_1-1,i} + b_{w_1,0}^{(l)} x_{w_1,0}, \quad (1.79) \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} b_{w_1-1,i}^{(l)} &= \frac{(w_1 - 1)\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + 1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(i + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(i + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}, \\ &1 \leq i \leq l, \quad (1.80) \end{aligned}$$

és

$$b_{w_1,0}^{(l)} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + 1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}. \quad (1.81)$$

Legyen

$$D(w_1) = \frac{C(w_1 - 1)((w_1 - 1)\alpha_1 + \beta_1)}{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + 1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}, \quad (1.82)$$

ahol $C(w_1 - 1)$ az (1.64) összefüggésből adódik.

Felhasználva az (1.78), (1.11), (1.12) és (1.82) egyenleteket az (1.79) összefüggés első tagjára azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l b_{w_1-1,i}^{(l)} x_{w_1-1,i} &\sim D(w_1) \sum_{i=1}^l \frac{\Gamma\left(i + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(i + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} = \\ &= D(w_1) \sum_{t=0}^{l-1} \frac{\Gamma\left(t + 1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(t + 1 + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} = \\ &= \frac{D(w_1)}{\frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2} + 1} \left[\frac{\Gamma\left(l + 1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{\alpha_2} \frac{1}{w_1!} \frac{\Gamma\left(w_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + 1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)} \right] \sim \\
&\quad \sim C(w_1) \frac{\Gamma\left(l + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{\alpha_2 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}
\end{aligned}$$

amennyiben $l \rightarrow \infty$. Hasonlóan, mint korábban itt is elhanyagolható az alacsonyabb rendű tag. Alkalmazva az (1.12) összefüggést

$$\sum_{i=1}^l b_{w_1-1,i}^{(l)} x_{w_1-1,i} \sim C(w_1) l^{-\left(1 + \frac{\beta_1+1}{\alpha_2}\right)} \quad (1.83)$$

adódik $l \rightarrow \infty$ esetén.

Alkalmazva megint az (1.12) összefüggést az (1.81) egyenletre

$$b_{w_1,0}^{(l)} \sim \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} l^{-\left(1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)} \quad (1.84)$$

adódik, amennyiben $l \rightarrow \infty$.

Végül behelyettesítve az (1.83), (1.84) és (1.71) eredményeket az (1.79) összefüggésbe, így megkapjuk a bizonyítandó állítást:

$$\begin{aligned}
&x_{w_1,l} \sim C(w_1) l^{-\left(1 + \frac{\beta_1+1}{\alpha_2}\right)} + \\
&\frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} l^{-\left(1 + \frac{w_1\alpha_1 + \beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)} C_0 w_1^{-\left(1 + \frac{\beta_2+1}{\alpha_1}\right)} \sim C(w_1) l^{-\left(1 + \frac{\beta_1+1}{\alpha_2}\right)}
\end{aligned}$$

$l \rightarrow \infty$ esetén. □

1.3. Az 1.2. Tétel bizonyítása

A bizonyításban Doob-Meyer felbontást használunk és a Fazekas, Noszály és Perecsényi [20] cikk módszertanát. Ezen felül az N -csillagok súlyaira felírt rekurzióra két bizonyítást is ismertetünk. Továbbá a 2. fejezetben adunk egy második bizonyítást is az állításunkra.

Először megmutatjuk, hogy

$$\frac{S(n, w)}{n} \rightarrow k_w \quad (1.85)$$

majdnem biztosan amennyiben $n \rightarrow \infty$ bármely rögzített w esetén. Itt k_w , $w = 1, 2, \dots$ nemnegatív számok.

Kiszámoljuk az $S(n, w)$ feltételes várható értékét $\mathcal{F}_{n-1}$ -re vonatkozóan, ahol $w \geq 1$. Legyen $S(n, 0) = 0$ bármely n esetén. Amennyiben $n, w \geq 1$ adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S(n, w) | \mathcal{F}_{n-1}) &= p(n, w-1)S(n-1, w-1) + (1-p(n, w))S(n-1, w) + \\ &+ \delta_{1,w} \left[p + (1-p)(1-q) \left(1 - \frac{S_{n-1}}{(V_{n-1}^N)N} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.86)$$

ahol

$$p(n, w) = (1-p) \left[q \frac{w}{n} + (1-q) \frac{1}{(V_{n-1}^N)N} \right]. \quad (1.87)$$

A rekurzió első bizonyítása.

Legyen

$$c(n, w) = \prod_{i=1}^n (1-p(n, w))^{-1}, \quad w \geq 1. \quad (1.88)$$

Könnyű belátni, hogy a fenti valószínűségi változó $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető. Alkalmazva a csúcsokra Marcinkiewicz nagy számok erős törvényét (1.4. Tétel) azt kapjuk, hogy

$$V_n = pn + o(n^{1/2+\varepsilon}) \quad (1.89)$$

majdnem biztosan, minden $\varepsilon > 0$ esetén.

Használva az (1.89) és a $\log(1+x)$ Taylor sorba fejtesét adódik, hogy

$$\log c(n, w) = - \sum_{i=1}^n \log \left(1 - h \frac{w}{i} - \frac{(1-p)(1-q)}{(V_{i-1}^N)N} \right) = hw \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + O(1),$$

ahol a hiba tag konvergencia, ha $n \rightarrow \infty$. Ez azt jelenti, hogy

$$c(n, w) \sim h_w n^{hw} \quad (1.90)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén és h_w egy pozitív valószínűségi változó.

Vegyük a következő folyamatot:

$$Z(n, w) = c(n, w)S(n, w), \quad w \geq 1.$$

Könnyen belátható, hogy $\{Z(n, w), \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$ egy nemnegatív szubmartingál bármely $w \geq 1$ esetén. A $Z(n, w)$ Doob-Meyer felbontása a következő:

$$Z(n, w) = M(n, w) + A(n, w)$$

ahol $M(n, w)$ martingál és $A(n, w)$ egy előre jelezhető folyamat. Az $A(n, w)$ általános alakja a következő:

$$A(n, w) = \mathbb{E}Z(1, w) + \sum_{i=2}^n [\mathbb{E}(Z(i, w)|\mathcal{F}_{i-1}) - Z(i-1, w)]. \quad (1.91)$$

Az (1.86) és (1.91) összefüggésekből következik, hogy

$$\begin{aligned} A(n, w) = \mathbb{E}Z(1, w) + \sum_{i=2}^n c(i, w) & \left[p(i, w-1)S(i-1, w-1) + \right. \\ & \left. + \delta_{1,w} \left(p + (1-p)(1-q) \left(1 - \frac{S_{i-1}}{\binom{V_{i-1}}{N}N} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Legyen $B(n, w)$ a $Z(n, w)$ feltételes szórásnégyzeteinek az összege. Most meghatározzunk egy felső korlátot a $B(n, w)$ -re:

$$\begin{aligned} B(n, w) &= \sum_{i=2}^n \mathbb{D}^2(Z(i, w)|\mathcal{F}_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=2}^n \mathbb{E}\{(Z(i, w) - \mathbb{E}(Z(i, w)|\mathcal{F}_{i-1}))^2 | \mathcal{F}_{i-1}\} = \\ &= \sum_{i=2}^n c(i, w)^2 \mathbb{E}\{(S(i, w) - \mathbb{E}(S(i, w)|\mathcal{F}_{i-1}))^2 | \mathcal{F}_{i-1}\} \leq \\ &\leq \sum_{i=2}^n c(i, w)^2 \mathbb{E}\{(S(i, w) - S(i-1, w))^2 | \mathcal{F}_{i-1}\} \leq \\ &\leq \sum_{i=2}^n c(i, w)^2 = O(n^{2hw+1}). \end{aligned} \quad (1.93)$$

Fentebb kihasználtuk, hogy $c(n, w)$ $\mathcal{F}_{i-1}$ mérhető, az (1.86) feltételes várható értéket és azt a tényt, hogy egy lépésben csak egyetlen N -csillag lép kölcsönhatásba.

A továbbiakban w szerinti teljes indukcióval folytatjuk a bizonyítást. Legyen $w = 1$. Az (1.90) és (1.92) egyenletekből adódik, hogy

$$\begin{aligned} A(n, 1) &= \mathbb{E}Z(1, 1) + \sum_{i=2}^n c(i, 1) \left[p + (1-p)(1-q) \left(1 - \frac{S_{i-1}}{\binom{V_{i-1}}{N} N} \right) \right] \sim \\ &\sim \sum_{i=2}^n h_1 n^h \left[p + (1-p)(1-q) \left(1 - \frac{S_{i-1}}{i^N} \right) \right] \sim h_1 \frac{n^{h+1}(1-h)}{h+1} \end{aligned} \quad (1.94)$$

$n \rightarrow \infty$ esetén. Felhasználva az (1.93) összefüggést azt kapjuk, hogy

$$B(n, 1) = O\left(n^{2h+1}\right),$$

így

$$B(n, 1)^{\frac{1}{2}} \log B(n, 1) = O\left(A(n, 1)\right).$$

Az 1.1. Lemma feltételei teljesülnek, ezért

$$Z(n, 1) \sim A(n, 1) \quad (1.95)$$

majdnem biztosan a $\{A(n, 1) \rightarrow \infty\}$ eseményen, amennyiben $n \rightarrow \infty$. Tehát az (1.90), (1.94) és (1.95) egyenletekből következik, hogy

$$\frac{S(n, 1)}{n} = \frac{Z(n, 1)}{c(n, 1)n} \sim \frac{A(n, 1)}{c(n, 1)n} \sim \frac{h_1 n^{h+1}(1-h)}{h_1 n^h n} = \frac{1-h}{1+h} = k_1 > 0, \quad (1.96)$$

$n \rightarrow \infty$ esetén.

Legyen $w > 1$. Tegyük fel, hogy (1.85) igaz minden w -nél kisebb súly esetén. Felhasználva az (1.89), (1.90) és (1.92) összefüggéseket, továbbá az indukciós feltételt adódik, hogy

$$\begin{aligned} A(n, w) &= \mathbb{E}Z(1, w) + \sum_{i=2}^n (c(i, w)p(i, w-1)S(i-1, w-1)) \sim \\ &\sim \sum_{i=2}^n h_w i^{hw} k_{w-1} i \left[h \frac{w-1}{i} + \frac{(1-p)(1-q)}{i^N} \right] \sim k_{w-1} h_w h(w-1) \frac{n^{wh+1}}{wh+1} \end{aligned} \quad (1.97)$$

majdnem biztos, ha $n \rightarrow \infty$. Az 1.1. Lemma feltételei ismét teljesülnek, ezért $Z(n, w) \sim A(n, w)$. Ezen felül, az (1.90) és (1.97) egyenletekből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{S(n, w)}{n} &= \frac{Z(n, w)}{c(n, w)n} \sim \frac{A(n, w)}{c(n, w)n} \sim \frac{k_{w-1}h_w h(w-1) \frac{n^{wh+1}}{wh+1}}{h_w n^{wh} n} = \\ &= k_{w-1} \frac{h(w-1)}{wh+1} = k_w. \end{aligned} \quad (1.98)$$

A rekurzió második bizonyítása.

Most az 1.3. Lemma segítségével igazoljuk a rekurziót. Ez a bizonyítás is Backhausz Ágnes javaslatára került be az értekezésbe, így ez sem található meg a fejezet alapjául szolgáló [24] cikkben. Továbbá hasonló egyszerűsítéseket tartalmaz, mint a csúcsokra vonatkozó rekurzió második igazolásakor, de ebben az esetben is ugyanazokat az összefüggéseket és mennyiségeket használjuk, mint az első bizonyításban.

Legyen

$$U(n, w) = (1-p)qw + (1-p)(1-q) \frac{n}{\binom{V_{n-1}}{N} N}.$$

Felhasználva az (1.89) összefüggést, kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(n, w) = (1-p)qw = u_w.$$

A tétel feltételrendszere miatt $u_w > 0$ teljesül. Bár $U(n, w) < n$ nem igaz bármely $n \geq 1$ esetén, de van olyan n_0 , hogy bármely $n \geq n_0$ egész számra teljesül, ami nem okoz gondot hiszen a vizsgált konvergenciák szempontjából az első véges sok tag figyelmen kívül hagyható. Továbbá, legyen

$$\begin{aligned} V(n, w) &= np(n, w-1) \frac{S(n-1, w-1)}{n} + \\ &+ \delta_{1,w} \left[p + (1-p)(1-q) \left(1 - \frac{S_{n-1}}{\binom{V_{n-1}}{N} N} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Ezekkel a jelölésekkel az (1.86) egyenletből adódik, hogy

$$\mathbb{E}(S(n, w) | \mathcal{F}_{n-1}) = \left(1 - \frac{U(n, w)}{n} \right) S(n-1, w) + V(n, w) \quad (1.100)$$

teljesül.

Mivel az (1.100) összefüggésben egyenlőség van, így az 1.3. Lemma (a) és (b) részéből a $\xi_n = S(n, w)$, $u_n = U(n, w)$, $v_n = V(n, w)$, $u = u_w$, $v = v_w$, $w_n \equiv 1$ és $\mu = 0$ szereposztással adódik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n, w)}{n} = \frac{v_w}{u_w + 1}, \quad (1.101)$$

majdnem biztosan, amennyiben $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n, w) = v_w \geq 0$.

Ezen felül megjegyezzük, hogy az 1.3. Lemma (1.10) feltétele $\delta = 1$ -gyel teljesül az $S(n, w)$ sorozatra, ugyanis egy lépésben legfeljebb mindig egy N -csillag lép kölcsönhatásba, tehát a (1.10) feltételben szereplő feltételes várható érték felülről korlátos 1-gyel.

A továbbiakban w szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Legyen $w = 1$. Ekkor az (1.99), (1.89) és $S_n \leq n$ összefüggésekből következik, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} V(n, 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[p + (1-p)(1-q) \left(1 - \frac{S_{n-1}}{(V_{N^{n-1}})N} \right) \right] = \\ &= p + (1-p)(1-q) = v_1 > 0, \end{aligned}$$

majdnem biztosan.

Így az (1.101) alapján,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n, 1)}{n} = \frac{p + (1-p)(1-q)}{(1-p)q + 1} = \frac{1-h}{1+h} = k_1 > 0,$$

majdnem biztosan.

Legyen $w > 1$. Tegyük fel, hogy (1.85) igaz minden w -nél kisebb súly esetén. Felhasználva az (1.89) és az (1.87) összefüggéseket, továbbá az indukciós feltételt adódik, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} V(n, w) &= \lim_{n \rightarrow \infty} np(n, w-1) \frac{S(n-1, w-1)}{n} = \\ &= k_{w-1}(1-p)q(w-1) = v_w > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n, w)}{n} &= \frac{k_{w-1}(1-p)q(w-1)}{(1-p)qw + 1} = \frac{h(w-1)}{wh + 1} = k_w > 0, \end{aligned} \quad (1.102)$$

majdnem biztosan, azaz az (1.85) teljesül bármely $w \geq 1$ esetén.

Most pedig megmutatjuk, hogy

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow B, \quad (1.103)$$

majdnem biztosan, ha $n \rightarrow \infty$ ahol $B = 1 - h$.

Először kiszámoljuk S_n feltételes várható értékét $\mathcal{F}_{n-1}$ -re vonatkozóan. Könnyű látni, hogy az N -csillagok száma akkor és csak akkor növekszik, ha az 1 súlyú N -csillagok száma növekszik, tehát

$$\mathbb{E}\{S_n|\mathcal{F}_{n-1}\} = S_{n-1} + p + (1-p)(1-q) \left(1 - \frac{S_{n-1}}{\binom{V_{n-1}}{N}N}\right) = \gamma_{n-1}S_{n-1} + B, \quad (1.104)$$

ahol

$$\gamma_{n-1} = 1 - (1-p)(1-q) \frac{1}{\binom{V_{n-1}}{N}N}.$$

Legyen

$$G_n = \prod_{i=1}^{n-1} (\gamma_i)^{-1}, \quad n \geq 1. \quad (1.105)$$

Itt $G_n \mathcal{F}_{n-1}$ mérhető valószínűségi változó. Továbbá legyen

$$Z_n = G_n S_n, \quad 1 \leq n. \quad (1.106)$$

Alkalmazva az (1.104) egyenletet

$$\mathbb{E}\{Z_n|\mathcal{F}_{n-1}\} = Z_{n-1} + B G_n. \quad (1.107)$$

Mivel $\{Z_n, \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$ nemnegatív szubmartingál. A Z_n Doob-Meyer felbontása a következő:

$$Z_n = M_n + A_n,$$

ahol M_n martingál és A_n egy előre jelezhető növekvő folyamat. Az (1.91) és (1.107) összefüggésekből kapjuk, hogy

$$A_n = \mathbb{E}Z_1 + B \sum_{i=2}^n G_i. \quad (1.108)$$

Az (1.89) egyenlőség és a $\log(1+x)$ Taylor-sorának segítségével alsó és felső határt definiálunk G_i -re, azaz

$$C_1 n < A_n < C_2 n, \quad (1.109)$$

ahol C_1 és C_2 a megfelelő pozitív konstansok. Legyen B_n Z_n feltételes szórásnégyzeteinek az összege. Megadjuk az egyik felső határát B_n -nek:

$$B_n = \sum_{i=2}^n \mathbb{D}^2(Z_i|\mathcal{F}_{i-1}) = \sum_{i=2}^n \mathbb{E}\{(Z_i - \mathbb{E}(Z_i|\mathcal{F}_{i-1}))^2|\mathcal{F}_{i-1}\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=2}^n G_i^2 \mathbb{E}\{(S_i - \mathbb{E}(S_i|\mathcal{F}_{i-1}))^2|\mathcal{F}_{i-1}\} \leq \sum_{i=2}^n G_i^2 \mathbb{E}\{(S_i - S_{i-1})^2|\mathcal{F}_{i-1}\} \leq \\
&\leq \sum_{i=2}^n G_i^2 \leq C_3 n,
\end{aligned} \tag{1.110}$$

ahol C_3 egy pozitív konstans. Fentebb kihasználtuk, hogy G_i $\mathcal{F}_{i-1}$ mérhető és az a tényt, hogy minden lépésben legfeljebb egy új N -csillag születhet. Alkalmazva az (1.110) felső korlátot, adódik, hogy $B_n^{1/2} \log B_n = O(A_n)$. Az (1.109) és a rendőrlv szerint $A_n \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$, így az 1.1. Lemma szerint adódik, hogy

$$Z_n \sim A_n \tag{1.111}$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén.

Alkalmazva az (1.111) és (1.108) egyenleteket adódik, hogy

$$\frac{S_n}{n} = \frac{Z_n}{G_n n} \sim \frac{A_n}{G_n n} = \frac{\mathbb{E}Z_1}{G_n n} + B \frac{1}{G_n} \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n G_i \rightarrow B \tag{1.112}$$

majdnem biztosan.

Végezetül, az (1.85) és (1.103) állításokból

$$\frac{S(n, w)}{S_n} = \frac{S(n, w)}{n} \frac{n}{S_n} \rightarrow \frac{k_w}{B} = s_w \tag{1.113}$$

következik, majdnem biztosan, ha $n \rightarrow \infty$. Alkalmazva az (1.113) összefüggést az (1.96) és (1.98) egyenletekben megkapjuk a rekurzív állítást s_w -re (ld. (1.8)). Egymás után néhányszor elvégezve az (1.8) rekurziót adódik, hogy

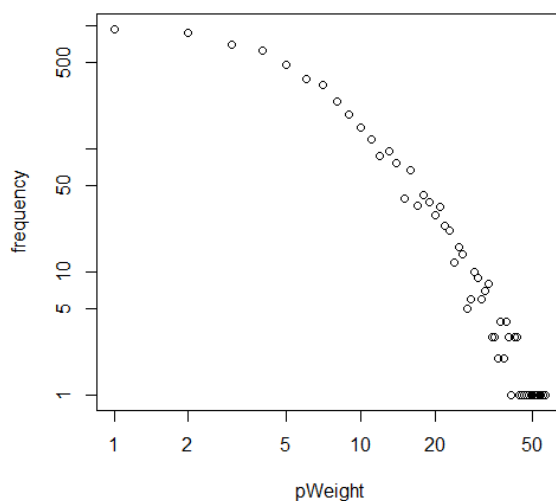
$$s_w = s_1 \prod_{i=2}^w \frac{h(i-1)}{hi+1} = \frac{1}{h} \frac{(w-1)!}{\prod_{j=1}^w \left(j + \frac{1}{h}\right)} = \frac{1}{h} \frac{\Gamma(w)\Gamma\left(1 + \frac{1}{h}\right)}{\Gamma\left(w + 1 + \frac{1}{h}\right)}. \tag{1.114}$$

Mivel $\sum_{w=1}^{\infty} s_w = 1$, a $s_1, s_2, \dots$ sorozat egy diszkrét valószínűségi eloszlás.

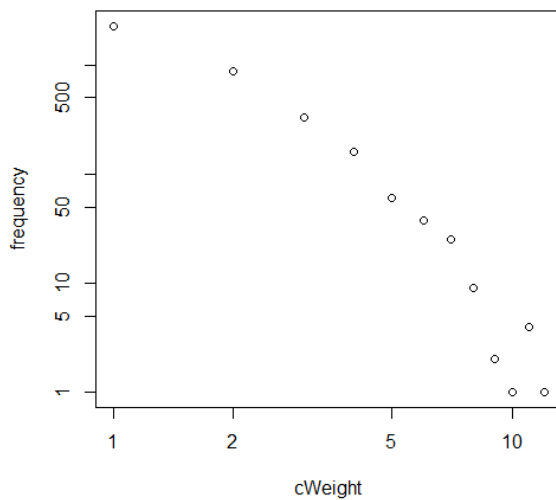
Végezetül alkalmazva az (1.12) formulát az (1.114)-re, megkapjuk az N -csillagok súlyainak a hatványeloszlását (1.9). $\square$

1.4. Szimulációs eredmények

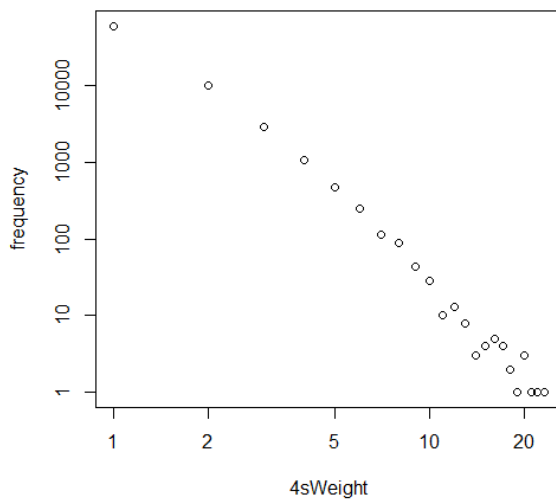
Ebben a fejezetben numerikus eredményeket mutatunk be. A modellt $N = 4$ beállítással szimuláltuk $p = 0.5$, $q = 0.5$ és $r = 0.5$ paraméterekkel az R programcsomag segítségével. Összesen $n = 10^5$ lépést hajtottunk végre. Azért, hogy a hatványeloszlás könnyen látható legyen az eredményt log-log skálán mutatjuk be. Továbbá, annak érdekében, hogy az 1.2. Tétel szemléltethető legyen, az 1.6. és 1.7. ábrákon a rögzített súly mindkét esetben kettővel egyenlő. Az 1.6.-1.8. ábrákon látható, hogy a vizsgált súlyok a 4-csillagos modellben valóban skálafüggetlenek.



1.6. ábra. A periféria súlyok eloszlása a csillagos modellben ($N = 4$), rögzített központi súly esetén ($w_1 = 2$)



1.7. ábra. A központi súlyok eloszlása a csillagos modellben ($N = 4$), rögzített periféria súly esetén ($w_2 = 2$)



1.8. ábra. A 4-csillagok súlyeloszlása a csillagos modellben ($N = 4$)

2. fejezet

A populációs modell

Korábban Ostroumova és társai [37] definiáltak egy véletlen gráf osztályt, amiben minden lépésben egy új csúcs születik, és m élen keresztül csatlakozik a gráfhoz úgy, hogy a régi csúcsok kiválasztása a fokszámukkal arányosan történik. Mi ennek egy általánosított változatát mutatjuk be ebben a fejezetben. Ennek a modellnek a struktúrája lehetővé teszi, hogy alkalmazni lehet bizonyos véletlen gráfok tulajdonságainak a leírásához. Mivel a populációk fejlődési modelljei és a véletlen gráfok fejlődése szoros kapcsolatban állnak, ezért egy általános populációs modellt ismertetünk. A populációs modellünk esetében egy lépésben legfeljebb t egyed csatlakozhat a populációhoz és fokszám helyett az egyedeket jellemző pontértékeken keresztül fog fejlődni, aminek a kezdeti értéke nagy valószínűséggel u . Így a modell magába foglalja Ostroumova és társai [37] által meghatározott gráf osztályt, mint speciális eset. A modellünket a továbbiakban S modellnek nevezzük.

Megmutatjuk, hogy a pontértékek eloszlása skálafüggetlen, majd pedig alkalmazzuk a modellt az N -pontos modell és a csillagos modell esetében definiált súlyokra.

2.1. Az S modell és a fő eredmények

Most matematikai eszközökkel pontosan definiáljuk az S modell fejlődését, ami egészen a (2.3) egyenlet végéig tart. A kiindulási állapotban, azaz az $n = 0$ időpontban, maximum t egyed van jelen a populációban. Minden további $n = 1, 2, \dots$ időpontban maximum t új egyed születhet és a populáció minden egyes tagjának megfeleltetünk egy pontértéket, ami egy pozitív egész szám. Egy új egyed születésekor nagy valószínűséggel a pontértéke u , ahol $u \geq 1$ egy rögzített egész szám. Pontosabban egy új egyed pontértéke

legalább u és az n -edik időpontban, azaz

$$\mathbb{P}\{\text{egy új egyed pontértéke} > u\} = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.1)$$

Jelöljük $S_n(i)$ -vel az i egyed pontértékét az n -edik időpontban. Továbbá legyen $\mathcal{F}_n$ a populáció fejlődése alatt megfigyelhető események által generált σ -algebra az n -edik időpontig. Bármely adott i egyed pontértékének a fejlődése a következő időpontban az alábbi szabályok szerint történhet:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) = S_n(i) + 1 | \mathcal{F}_n\} &= a \frac{S_n(i)}{n} + b \frac{1}{n} + O\left(\left(\frac{S_n(i)}{n}\right)^2\right), \\ \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) = S_n(i) | \mathcal{F}_n\} &= 1 - a \frac{S_n(i)}{n} - b \frac{1}{n} + O\left(\left(\frac{S_n(i)}{n}\right)^2\right), \\ \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) > S_n(i) + 1 | \mathcal{F}_n\} &= O\left(\left(\frac{S_n(i)}{n}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

ahol a és b rögzített nemnegatív számok. Tehát minden lépésben bármely a populációban jelen lévő egyednek a pontértéke növekedhet 1-gyel vagy 0-val, de alacsony valószínűséggel magasabb változás is megengedett. Továbbá tegyük fel, hogy egy lépés során létrejött pontérték növekedések összege legfeljebb t lehet. Jelöljük ξ_n -nel az új egyedek számát az n -edik lépésben és tegyük fel, hogy

$$\mathbb{E}[\xi_n] = m + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.3)$$

ahol $m > 0$.

A modell definiálása után most a fő eredményeket ismertetjük.

Jelölje $X_n(s)$ az s pontértékkal rendelkező egyedek számát az n időpontban. Továbbá jelöljön $\Theta(s)$ olyan mennyiséget, melyre $|\Theta(s)| < s$. (Például az $s/2$ és $\ln(1+s)$ függvényekre igaz $\Theta(s)$ bármely $s > 0$ esetén; továbbá, rögzített $0 < p < q$ esetén $s^p = \Theta(s^q)$ bármely $s > 1$ -re.)

A 2.1. Tétel szerint a pontértékek várható értékének eloszlása skálafüggetlen.

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az S modell feltételei teljesülnek és $a > 0$. Ekkor bármely rögzített $s = u, u+1, u+2, \dots$ esetén*

$$\mathbb{E}[X_n(s)] = c(s) \left(n + \Theta\left(Ks^{2+\frac{1}{a}}\right) \right) \quad (2.4)$$

bármely n -re, ahol K egy rögzített véges konstans,

$$c(s) = \frac{m\Gamma\left(s + \frac{b}{a}\right)\Gamma\left(u + \frac{b+1}{a}\right)}{a\Gamma\left(s + \frac{b+a+1}{a}\right)\Gamma\left(u + \frac{b}{a}\right)} \quad (2.5)$$

és Γ jelöli a Γ -függvényt. Továbbá

$$c(s) \sim \frac{m\Gamma\left(u + \frac{b+1}{a}\right)}{a\Gamma\left(u + \frac{b}{a}\right)} s^{-1-\frac{1}{a}} \quad \text{ha } s \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

A 2.2. Tétel a pontértékek a várható értékük körüli koncentrációját mutatja. Ehhez a (2.3) feltétel egy erősebb változatára van szükségünk.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az S modell feltételei teljesülnek és $a > 0$. Továbbá feltételezzük, hogy*

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = m + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.7)$$

majdnem biztosan, ahol $m > 0$. Ekkor létezik egy C konstans úgy, hogy bármely rögzített s esetén a következők igazak:

$$\mathbb{P}\{|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq s\sqrt{n} \log n\} \leq 2n^{-\log n/C}. \quad (2.8)$$

Továbbá legyen $\delta > 0$. Ekkor létezik egy $\varphi(n) = o(1)$ függvény úgy, hogy 1 valószínűséggel csak véges sok n létezik, amelyekre $|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq \varphi(n)\mathbb{E}[X_n(s)]$ igaz, bármely $s \leq n^{(a-\delta)/(4a+2)}$ esetén.

Végezetül a 2.1. és 2.2. Tételekből következik, hogy a pontértékek eloszlása hatványrendű.

2.1. Következmény. *Tegyük fel, hogy az S Modell feltételei teljesülnek és $a > 0$. Továbbá feltesszük, hogy a (2.7) feltétel is igaz. Ekkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n(s)}{n} = c(s)$$

1 valószínűséggel, ahol $c(s)$ kielégíti a (2.5) és (2.6) összefüggéseket.

2.2. A 2.1. Tétel bizonyítása

A bizonyítás során rendszeresen az S modell feltételeit és jól ismert valószínűségelméleti eszközöket alkalmazunk. Ezeket a lépéseket egy trükkös teljes indukcióban használjuk fel. Több felső korlátot is megkapunk a bizonyítás során, de a (2.4) képletben lévő K felső korlátot csak a legvégén határozzuk meg. A bizonyítást, a bonyolultsága miatt, A, B és C részekre bontjuk. A továbbiakban szükségünk lesz a következő jelölésekre.

$$q_n^{(1)}(s) = \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) = s + 1 | S_n(i) = s\} = a \frac{s}{n} + b \frac{1}{n} + O\left(\frac{s^2}{n^2}\right), \quad (2.9)$$

$$q_n^{(j)}(s) = \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) = s + j | S_n(i) = s\} = O\left(\frac{s^2}{n^2}\right), \quad j \geq 2, \quad (2.10)$$

$$q_n = \mathbb{P}\{\text{egy új egyed pontértéke} > u\} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.11)$$

$$q_n(s) = \sum_{j=1}^{\infty} q_n^{(j)}(s). \quad (2.12)$$

A fenti összefüggések nem mások, mint az S modell feltételei.

A bizonyítás A része. Először kis n értékek esetén vizsgálódunk. Egyértelmű, hogy $q_n(s)$ a valószínűsége annak, hogy egy s pontértékkel rendelkező egyed pontértéke növekszik az n időpontban. Az (2.9) összefüggés alapján

$$\frac{as + b + 1}{as - a + b} q_n^{(1)}(s - 1) = q_n^{(1)}(s) + \frac{1}{n} + O\left(\frac{s^2}{n^2}\right). \quad (2.13)$$

Most kiszámoljuk a következő feltételes várható értékeket:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}(u) | X_n(u)] = X_n(u)(1 - q_n(u)) + \mathbb{E}[\xi_{n+1} | X_n(u)](1 - q_n), \quad (2.14)$$

továbbá ha $s \geq u + 1$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}(s) | X_n(s), X_n(s-1), \dots, X_n(s-t)] &= X_n(s)(1 - q_n(s)) + \\ &+ X_n(s-1)q_n^{(1)}(s-1) + \sum_{j=2}^t X_n(s-j)q_n^{(j)}(s-j) + O(q_n). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Most tekintsük a (2.5) egyenletben definiált $c(s)$ függvényt. Az (1.12) formulát alkalmazva, egyből adódik, hogy (2.6) igaz. Az S modell feltételei szerint egy lépés alatt a pontértékek növekedésének összege t -nél nem lehet

nagyobb. Tehát $X_n(s)s \leq nt$. Ebből és a (2.6) összefüggésből következik, hogy

$$X_n(s) = O\left(nc(s)s^{\frac{1}{a}}\right). \quad (2.16)$$

Ebből adódóan

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[X_n(s)] - nc(s)| &\leq \tilde{K}nc(s)s^{\frac{1}{a}} + nc(s) = \\ &= nc(s)\left(\tilde{K}s^{\frac{1}{a}} + 1\right) \leq c(s)s^{2+\frac{1}{a}}2C_7\left(\tilde{K} + 1\right) \end{aligned}$$

teljesül $n < 2C_7s^2$ esetén. Tehát (2.4) igaz $K \geq \hat{K} = 2C_7\left(\tilde{K} + 1\right)$ mellett, ha

$$n < 2C_7s^2, \quad (2.17)$$

ahol C_7 konstans a bizonyítás B részének a végén határozzuk meg.

A bizonyítást s szerinti teljes indukcióval folytatjuk.

A bizonyítás B része. Most az s legkisebb lehetséges értékét, azaz az $s = u$ esetet vizsgáljuk. Ekkor (2.6) összefüggésbe u -t helyettesítve

$$c(u) = \frac{m}{au + b + 1}.$$

Szóval ahhoz, hogy a (2.4) állítást belássuk $s = u$ esetén, meg kell mutatnunk, hogy

$$\mathbb{E}[X_n(u)] = \frac{nm}{au + b + 1} + \Theta(C_1). \quad (2.18)$$

Megjegyezzük, hogy a végső célunk eljutni a (2.4) egyenletig, tehát C_1 jelöli $\frac{m}{au+b+1}Ku^{2+\frac{1}{a}}$ szorzatot és ebből következik, hogy a K -nak ki kell elégítenie a $K \geq C_1 \frac{au+b+1}{m}u^{-2-\frac{1}{a}}$ egyenlőtlenséget.

A (2.18) egyenletet kicsi n értékekre a bizonyítás A részében már beláttuk. A továbbiakban teljes indukciót alkalmazunk n szerint. Tegyük fel, hogy (2.18) teljesül valamely n értékre. Felhasználva (2.14) és (2.18) várható értékeket, majd alkalmazva (2.9) és (2.10) egyenleteket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}(u)] &= \mathbb{E}[X_n(u)](1 - q_n(u)) + \mathbb{E}[\xi_{n+1}](1 - q_n) = \\ &= \left(\frac{nm}{au + b + 1} + \Theta(C_1)\right)(1 - q_n(u)) + \mathbb{E}[\xi_{n+1}](1 - q_n) = \\ &= \frac{(n+1)m}{au + b + 1} - \frac{m}{au + b + 1} + \Theta(C_1)(1 - q_n(u)) + \\ &\quad - q_n(u)\frac{nm}{au + b + 1} + \mathbb{E}[\xi_{n+1}](1 - q_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)m}{au+b+1} + \Theta(C_1)(1-q_n(u)) - \frac{m}{au+b+1} + \\
&\quad - \frac{\left(\frac{au+b}{n} + O\left(\frac{u^2}{n^2}\right)\right)nm}{au+b+1} + \mathbb{E}[\xi_{n+1}](1-q_n) = \\
&= \frac{(n+1)m}{au+b+1} + \Theta(C_1)(1-q_n(u)) + \\
&\quad - \frac{(au+b+1)m + O\left(\frac{u^2}{n}\right)}{au+b+1} + \mathbb{E}[\xi_{n+1}](1-q_n) = \\
&= \frac{(n+1)m}{au+b+1} + \Theta(C_1)(1-q_n(u)) - \frac{O\left(\frac{u^2}{n}\right)}{au+b+1} + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\mathbb{E}[\xi_n](1-q_n) = m + O\left(\frac{1}{n}\right)$. A fenti egyenlőség alapján

$$\mathbb{E}[X_{n+1}(u)] = \frac{(n+1)m}{au+b+1} + \Theta(C_1), \quad (2.19)$$

ha

$$C_1 q_n(u) \geq \frac{C_3}{n} \frac{1}{au+b+1} + \frac{C_2}{n}.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek egy ekvivalens alakja

$$C_1 \left(\frac{au+b}{n} + O\left(\frac{u^2}{n^2}\right) \right) > \frac{C_3}{n} \frac{1}{au+b+1} + \frac{C_2}{n}$$

azaz

$$C_1(au+b) > \frac{C_1 c_0 u^2}{n} + \frac{C_3}{au+b+1} + C_2.$$

Az utolsó egyenlőtlenség igaz nagy n -ek esetén (azaz $n \geq n_1$ alkalmas n_1 esetén) és megfelelően nagy C_1 -re.

Tehát azt kaptuk, hogy (2.18) $\Rightarrow$ (2.19) indukciós lépés teljesül, ha $n \geq n_1$ és C_1 elég nagy. Végül pedig válasszuk meg a C_7 konstanst a (2.17) összefüggésben úgy, hogy

$$n_1 < 2C_7 u^2. \quad (2.20)$$

Ebből következik, hogy $K \geq \max\left\{\hat{K}, C_1 \frac{au+b+1}{m}\right\}$ választás mellett (2.4) teljesül $s = u$ esetén.

A bizonyítás C része. Legyen $s > u$ és tegyük fel, hogy (2.4) igaz minden s -nél kisebb pontérték esetén. Rögzített s esetén, n -szerinti teljes

indukciót alkalmazunk. A bizonyítás elején beláttuk, hogy a (2.4) egyenlet igaz $n < 2C_7s^2$ esetén. Tehát tegyük fel, hogy (2.4) teljesül néhány n -re. A félreértések elkerülése miatt a következő megjegyzéseket tesszük. Nagy s értékekre azt kell kapnunk, hogy az indukció működik megfelelően nagy, de rögzített K esetén. Azonban kicsi s értékek esetén az indukciós lépés szintén teljesül egy alkalmas növekvő K_s sorozattal. A fentebb említett K értékek közül a legnagyobb lesz számunkra a megfelelő.

A (2.15) várható értéket felhasználva és alkalmazva az indukciós lépést

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}(s)] &= \mathbb{E}[X_n(s)](1 - q_n(s)) + \mathbb{E}[X_n(s-1)]q_n^{(1)}(s-1) + \\ &\quad + \sum_{j=2}^t \mathbb{E}[X_n(s-j)]q_n^{(j)}(s-j) + O(q_n) = \\ &= c(s) \left(n + \Theta \left(K_s s^{2+\frac{1}{a}} \right) \right) (1 - q_n(s)) + \\ &\quad + c(s-1) \left(n + \Theta \left(K_{s-1} (s-1)^{2+\frac{1}{a}} \right) \right) q_n^{(1)}(s-1) + \Theta \left(\frac{C_4 c(s) s^{2+\frac{1}{a}}}{n} \right).\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben a (2.16), (2.10) és (2.11) egyenleteket alkalmaztuk. Most felhasználva

$$c(s) = \frac{as - a + b}{as + b + 1} c(s-1),$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}(s)] &= c(s)(n+1) + c(s-1)nq_n^{(1)}(s-1) - c(s)nq_n(s) - c(s) + \\ &\quad + c(s)\Theta \left(K_s s^{2+\frac{1}{a}} \right) (1 - q_n(s)) + \\ &\quad + c(s) \frac{as + b + 1}{as - a + b} \Theta \left(K_{s-1} (s-1)^{2+\frac{1}{a}} \right) q_n^{(1)}(s-1) + \Theta \left(\frac{C_4 c(s) s^{2+\frac{1}{a}}}{n} \right) = \\ &= c(s)(n+1) + c(s)\Theta \left(K_s s^{2+\frac{1}{a}} \right) (1 - q_n(s)) + \\ &\quad + c(s) \frac{as + b + 1}{as - a + b} \Theta \left(K_{s-1} (s-1)^{2+\frac{1}{a}} \right) q_n^{(1)}(s-1) + \Theta \left(\frac{C_5 c(s) s^{2+\frac{1}{a}}}{n} \right).\end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy

$$c(s) \frac{as + b + 1}{as - a + b} nq_n^{(1)}(s-1) - c(s)nq_n(s) = c(s) \left(1 + O \left(\frac{s^2}{n} \right) \right)$$

ami igaz a (2.13), (2.10) és a feltétel miatt, amely szerint egy lépésben a pontértékek összege legfeljebb t -vel növekedhet.

Az indukció befejezéséhez meg kell mutatnunk, hogy léteznek K_s konstansok úgy, hogy

$$K_s s^{2+\frac{1}{a}} q_n(s) \geq K_{s-1} \frac{as+b+1}{as-a+b} (s-1)^{2+\frac{1}{a}} q_n^{(1)}(s-1) + C_5 \frac{s^{2+\frac{1}{a}}}{n}. \quad (2.21)$$

Először a nagy s értékekkel foglalkozunk. Ebben az esetben meg kell mutatnunk, hogy a (2.21) egyenlet teljesül egy olyan konstanssal, ami nem függ s -től, azaz $K = K_s$. Taylor sorfejtést alkalmazva

$$(s-1)^{2+\frac{1}{a}} \leq s^{2+\frac{1}{a}} - \left(2 + \frac{1}{a}\right) s^{1+\frac{1}{a}} + C_6 s^{\frac{1}{a}}.$$

Tehát most meg kell mutatnunk, hogy

$$\begin{aligned} K s^{2+\frac{1}{a}} q_n(s) &\geq \\ &\geq K \frac{as+b+1}{as-a+b} \left(s^{2+\frac{1}{a}} - \left(2 + \frac{1}{a}\right) s^{1+\frac{1}{a}} + C_6 s^{\frac{1}{a}} \right) q_n^{(1)}(s-1) + C_5 \frac{s^{2+\frac{1}{a}}}{n}. \end{aligned}$$

Így ez a következő alakba írható a (2.13) és (2.9) összefüggések segítségével:

$$\begin{aligned} K \frac{s^{2+\frac{1}{a}}}{n} \left(2a + \frac{(b+1)(2a+1)}{as} + O\left(\frac{s}{n}\right) \right) &\geq K s^{2+\frac{1}{a}} O\left(\frac{s^2}{n^2}\right) \\ &+ K \frac{as+b+1}{as-a+b} C_6 s^{\frac{1}{a}} \left(a \frac{s-1}{n} + b \frac{1}{n} + O\left(\frac{s^2}{n^2}\right) \right) + C_5 \frac{s^{2+\frac{1}{a}}}{n}. \end{aligned}$$

Ez a következőkkel ekvivalens:

$$\begin{aligned} K \frac{s^{2+\frac{1}{a}}}{n} &\geq K C_7 \frac{s^{4+\frac{1}{a}}}{n^2} + K C_8 \frac{s^{1+\frac{1}{a}}}{n} + C_9 \frac{s^{2+\frac{1}{a}}}{n} + \\ &+ K C_{10} \frac{s^{3+\frac{1}{a}}}{n^2} + K C_{11} \frac{s^{2+\frac{1}{a}}}{n^2} + K C_{12} \frac{s^{\frac{1}{a}}}{n}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ebben az esetben $C_7, \dots, C_{12}$ jelölik a megfelelő konstansokat úgy, hogy a $C_7 \geq \frac{n_1}{2a^2}$ egyenlőtlenség teljesüljön (ld. (2.17) és (2.20)). Tehát igazolnunk kell, hogy

$$K s^2 \geq K C_7 \frac{s^4}{n} + K C_8 s + C_9 s^2 + K C_{10} \frac{s^3}{n} + K C_{11} \frac{s^2}{n} + K C_{12}.$$

Így $n > 2C_7 s^2$ esetén a

$$K s^2 \geq K \frac{s^2}{2} + K C_8 s + C_9 s^2 + K C_{10} \frac{s}{2C_7} + K C_{11} \frac{1}{2C_7} + K C_{12}$$

egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk. A fentiek teljesülnek, ha $K > C_{13}$ és $s > s_1$ valamilyen C_{13} és s_1 esetén. Tehát (2.22) igaz, ha $n \geq 2C_7s^2$, $K > C_{13}$ és $s > s_1$.

Eddig beláttuk a kívánt eredményeket $n < 2C_7s^2$ esetén, csak az $s \leq s_1$ eset maradt hátra. Azonban, mivel a $q_n(s)$ nagyságrendileg ugyanakkora mint $q_n^{(1)}(s-1)$, ezért a (2.21) egyenlőtlenség igaz egy megfelelő növekvő K_s sorozat esetén. Tehát a bizonyítás C része teljes lesz, ha választunk egy $K \geq \max \{K_{s_1}, C_{13}\}$ konstans.

Így végezetül válasszuk a $K = \max \{K_{s_1}, C_{13}, \hat{K}, C_1 \frac{au+b+1}{m}\}$ értéket, ahol $\hat{K}$ és C_1 a bizonyítás A és B részében lettek meghatározva. $\square$

2.3. A 2.2. Tétel bizonyítása

A következő két lemmára szükségünk lesz a bizonyításban. Legyenek η_1 és η_2 véges állapotterű sztochasztikus elemek. Megjegyezzük, hogy

$$\mathbb{E}(\tau|\eta = y) = g(y)$$

egy mérhető függvény úgy, hogy $\mathbb{E}(\tau|\eta) = g(\eta)$.

2.1. Lemma. *Legyen τ egy valószínűségéi változó és legyenek η_1, η_2 sztochasztikus elemek úgy, hogy η_1, η_2 -mérhető. Ekkor*

$$|\mathbb{E}[\tau|\eta_2] - \mathbb{E}[\tau|\eta_1]| \leq \max_y \mathbb{E}[\tau|\eta_2 = y] - \min_y \mathbb{E}[\tau|\eta_2 = y]$$

majdnem biztosan.

Bizonyítás. Legyen $g(y) = \mathbb{E}[\tau|\eta_2 = y]$. Ekkor

$$\mathbb{E}[\tau|\eta_2] = g(\eta_2),$$

és ebből következik, hogy

$$\mathbb{E}[\tau|\eta_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\tau|\eta_2]|\eta_1] = \mathbb{E}[g(\eta_2)|\eta_1].$$

Így azt kell belátnunk, hogy

$$|g(\eta_2) - \mathbb{E}[g(\eta_2)|\eta_1]| \leq \max_y g(y) - \min_y g(y).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\min_y g(y) \leq g(\eta_2) \leq \max_y g(y)$$

és

$$-\max_y g(y) \leq -\mathbb{E}[g(\eta_2)|\eta_1] \leq -\min_y g(y)$$

majdnem biztos. Ha összeadjuk a két fenti egyenlőtlenséget megkapjuk a bizonyítandó állítást. $\square$

2.2. Lemma. *Legyen τ egy valószínűségi változó, ξ_t , $t \geq 0$, sztochasztikus folyamat és legyenek t_1, t_2 olyanok, hogy $0 \leq t_1 \leq t_2$. Továbbá legyenek η_1 , η_2 sztochasztikus elemek úgy, hogy $\eta_1 = \{\xi_t : 0 \leq t \leq t_1\}$, $\eta_2 = \{\xi_t : 0 \leq t \leq t_2\}$. Azaz η_1 és η_2 a ξ_t folyamat megszorításai a t_1 és t_2 időpontokra. Nyilvánvaló, hogy η_1 η_2 -mérhető. Ha y jelöli az η_2 egy realizációját (azaz $y = \eta_2(\omega)$ valamilyen rögzített $\omega \in \Omega$ esetén), ekkor jelöljük $\tilde{y}$ -val az y megszorítását a t_1 időpontra. Ekkor*

$$|\mathbb{E}[\tau|\eta_2 = y_2] - \mathbb{E}[\tau|\eta_1 = y_1]| \leq \max_{\{y:\tilde{y}=y_1\}} \mathbb{E}[\tau|\eta_2 = y] - \min_{\{y:\tilde{y}=y_1\}} \mathbb{E}[\tau|\eta_2 = y]$$

majdnem biztosan, ha $\tilde{y}_2 = y_1$.

Bizonyítás. Legyen $g(y) = \mathbb{E}[\tau|\eta_2 = y]$. Ekkor $\mathbb{E}[\tau|\eta_2] = g(\eta_2)$. Mivel

$$\mathbb{E}[\tau|\eta_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\tau|\eta_2]|\eta_1] = \mathbb{E}[g(\eta_2)|\eta_1],$$

így

$$\mathbb{E}[\tau|\eta_1 = y] = \mathbb{E}[g(\eta_2)|\eta_1 = y]$$

majdnem biztosan. Ebből következik, hogy azt kell belátnunk, hogy $\tilde{y}_2 = y_1$ esetén,

$$|g(y_2) - \mathbb{E}[g(\eta_2)|\eta_1 = y_1]| \leq \max_{\{y:\tilde{y}=y_1\}} g(y) - \min_{\{y:\tilde{y}=y_1\}} g(y).$$

Nyilvánvaló, ha $\tilde{y}_2 = y_1$, ekkor

$$\min_{\{y:\tilde{y}=y_1\}} g(y) \leq g(y_2) \leq \max_{\{y:\tilde{y}=y_1\}} g(y)$$

és

$$-\max_{\{y:\tilde{y}=y_1\}} g(y) \leq -\mathbb{E}[g(\eta_2)|\eta_1 = y_1] \leq -\min_{\{y:\tilde{y}=y_1\}} g(y)$$

majdnem biztosan. Ha a fenti két egyenlőtlenséget összeadjuk, akkor megkapjuk az állítást. $\square$

Ezen felül a bizonyításhoz felhasználjuk a jól ismert Azuma-Hoeffding egyenlőtlenséget és a Borel-Cantelli-lemmát, amiket a teljesség kedvéért ismertetünk.

2.3. Tétel (Azuma-Hoeffding, [1],[28]). *Legyen ξ_t martingál és tegyük fel, hogy $|\xi_s - \xi_{s-1}| \leq c_s$ teljesül $1 \leq s \leq t$ esetén. Ekkor*

$$P(|\xi_t - \xi_0| > x) \leq 2 \exp \left(-\frac{x^2}{2 \sum_{s=1}^t c_s^2} \right).$$

2.4. Tétel (Borel-Cantelli-lemma, [10], [14]). *Legyen $A_1, A_2, \dots$ események egy sorozata.*

- (a) *Ha $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty$, akkor 1 a valószínűsége annak, hogy az A_i események közül csak véges sok következik be.*
- (b) *Legyen az $A_1, A_2, \dots$ események függetlenek. Ha $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$, akkor 1 annak a valószínűsége, hogy az A_n események közül végtelen sok bekövetkezik.*

A 2.2. Tétel bizonyítása. Legyen $Y_i = \mathbb{E}[X_n(s)|\mathcal{F}_i]$, $i = 0, 1, \dots, n$, ahol s és n rögzített. Könnyen látható, hogy $(Y_i, \mathcal{F}_i, i = 0, 1, \dots, n)$ martingál. Itt $\mathcal{F}_0$ a triviális σ -algebra, tehát $Y_0 = \mathbb{E}[X_n(s)]$. Továbbá $Y_n = X_n(s)$, mert $X_n(s)$ $\mathcal{F}_n$ -mérhető. Megmutatjuk, hogy

$$|Y_{i+1} - Y_i| \leq A s \tag{2.23}$$

teljesül valamilyen alkalmas A konstans esetén.

Legyen η_i az a sztochasztikus elem, ami leírja populáció fejlődését az i -edik lépésig. Ekkor

$$Y_i = \mathbb{E}[X_n(s)|\mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[X_n(s)|\eta_i] = g_i(\eta_i),$$

ahol $g_i(y) = \mathbb{E}[X_n(s)|\eta_i = y]$.

A következőkben, amikor η_i a feltételes várható érték feltételében szerepel, fel kell tennünk, hogy $\eta_i = y_i$ rögzített minden $i = 0, 1, \dots, n$ esetén. Felhasználva a 2.2. Lemmát adódik, hogy

$$|Y_{i+1} - Y_i| = |\mathbb{E}[X_n(s)|\eta_{i+1}] - \mathbb{E}[X_n(s)|\eta_i]| \leq g_{i+1}(\hat{y}_{i+1}) - g_{i+1}(\check{y}_{i+1}), \tag{2.24}$$

ahol $\hat{y}_{i+1} = \arg \max g_{i+1}(y)$ és $\check{y}_{i+1} = \arg \min g_{i+1}(y)$ és a maximum és a minimum olyan y értékekre vonatkozik, amelyek az y_i -re való megszorításból adódik legfeljebb az i időpontig. (Ilyen $\hat{y}_{i+1}$ és $\check{y}_{i+1}$ létezik, mivel a populáció fejlődésének csak véges sok állapota lehetséges az $(i+1)$ -edik lépésig.) Most az

$$\mathbb{E}[X_n(s)|\eta_{i+1} = \hat{y}_{i+1}] - \mathbb{E}[X_n(s)|\eta_{i+1} = \check{y}_{i+1}]$$

összefüggéshez keresünk korlátokat $0 \leq i < n$ esetén.

Bevezetjük a

$$\delta_l^{(i)}(s) := \mathbb{E}[X_l(s)|\eta_{i+1} = \hat{y}_{i+1}] - \mathbb{E}[X_l(s)|\eta_{i+1} = \check{y}_{i+1}]$$

jelölést, ahol $i + 1 \leq l \leq n$.

Annak érdekében, hogy bebizonyítsuk a (2.23) egyenlőtlenséget, meg kell mutatnunk, hogy $\delta_n^{(i)}(s) \leq As$ fenn áll.

Megmutatjuk, hogy $\delta_l^{(i)}(s) \leq As$ $i + 1 \leq l \leq n$ esetén. Először vegyük azt az esetet, amikor $l \leq C_{14}s^2$, ahol $C_{14} \geq 1$ konstans. Az evolúcióban egy lépés során összes t -vel növekedhet az összes pontérték összege, ezért $s\delta_l^{(i)}(s) \leq tl$. Így azt kaptuk, hogy

$$\delta_l^{(i)}(s) \leq \frac{tl}{s} \leq \frac{tC_{14}s^2}{s} = C_{14}ts = As.$$

Amennyiben $n = i + 1$, ekkor az egyetlen lehetséges értéke l -nek az $l = n = i + 1$. Ebben az esetben

$$\delta_{i+1}^{(i)}(s) = \mathbb{E}[X_{i+1}(s)|\eta_{i+1} = \hat{y}_{i+1}] - \mathbb{E}[X_{i+1}(s)|\eta_{i+1} = \check{y}_{i+1}].$$

Azonban, ekkor $\hat{y}_{i+1}$ és $\check{y}_{i+1}$ megegyeznek, kivéve az utolsó lépésben, amikor különbözhetnek. A feltételek miatt egy lépésben maximum t -vel nőhet az s pontértékű egyedek száma, így azt kapjuk, hogy

$$\delta_{i+1}^{(i)}(s) \leq t \leq As.$$

Most vegyük azt az esetet, amikor $i < l \leq n - 1$ és $l > C_{14}s^2$. Tekintve a (2.14) feltételes várható értéket $\eta_i = y_i$ feltételre vonatkozóan adódik, hogy

$$\mathbb{E}[X_{l+1}(u)|\eta_i = y_i] = \mathbb{E}[X_l(u)|\eta_i = y_i](1 - q_l(u)) + \mathbb{E}[\xi_{l+1}|\eta_i = y_i](1 - q_l). \quad (2.25)$$

Alkalmazva a (2.7) egyenletet kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \delta_{l+1}^{(i)}(u) &= \delta_l^{(i)}(u) \left(1 - a\frac{u}{l} - b\frac{1}{l} + O\left(\frac{u^2}{l^2}\right) \right) + \\ &\quad + (1 - q_l) (\mathbb{E}[\xi_l|\eta_i = \hat{y}_i] - \mathbb{E}[\xi_l|\eta_i = \check{y}_i]) \leq \\ &\leq Au \left(1 - a\frac{u}{l} - b\frac{1}{l} + O\left(\frac{u^2}{l^2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{l}\right) \leq Au, \quad (2.26) \end{aligned}$$

amennyiben A elég nagy. Ebből adódik, hogy $\delta_n^{(i)}(s) \leq As$ igaz $s = u$ esetén. Most vegyük a (2.15) feltételes várható értéket $\eta_i = y_i$ feltételre vonatkozóan, azaz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{l+1}(s)|\eta_i = y_i] &= \mathbb{E}[X_l(s)|\eta_i = y_i](1 - q_l(s)) + \\ &+ \mathbb{E}[X_l(s-1)|\eta_i = y_i]q_l^{(1)}(s-1) + \\ &+ \sum_{j=2}^t \mathbb{E}[X_l(s-j)|\eta_i = y_i]q_l^{(j)}(s-j) + O(q_l) \quad (2.27) \end{aligned}$$

$s \geq u+1$ esetén. A (2.10), (2.11), (2.25) és (2.27) összefüggések maguk után vonják, hogy

$$\begin{aligned} \delta_{l+1}^{(i)}(s) &\leq \delta_l^{(i)}(s)(1 - q_l(s)) + \delta_l^{(i)}(s-1)q_l^{(1)}(s-1) \\ &+ O\left(\frac{1}{l}\right) + \sum_{j=2}^t \delta_l^{(i)}(s-j)O\left(\left(\frac{s-j}{l}\right)^2\right), \quad l \geq i+1. \quad (2.28) \end{aligned}$$

A továbbiakban l szerinti teljes indukcióval haladunk tovább. Legyen $s \geq u+1$. Korábban láttuk, hogy ha l kicsi, akkor $\delta_l^{(i)}(s) < As$ teljesül. Tegyük fel, hogy $\delta_l^{(i)}(s) < As$ néhány l esetén. Alkalmazva a (2.9)-(2.12) egyenleteket, a (2.28) képletből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \delta_{l+1}^{(i)}(s) &\leq As(1 - q_l(s)) + A(s-1)q_l^{(1)}(s-1) + O\left(\frac{1}{l}\right) + \\ &+ \sum_{j=2}^t A(s-j)O\left(\left(\frac{s-j}{l}\right)^2\right) = \\ &= As - As\left(\frac{as}{l} + \frac{b}{l} + O\left(\frac{s^2}{l^2}\right)\right) + A(s-1)\left(\frac{a(s-1)}{l} + \frac{b}{l} + O\left(\frac{s^2}{l^2}\right)\right) \\ &+ O\left(\frac{1}{l}\right) + A\left(ts - \frac{t(t+1)}{2}\right)O\left(\frac{s^2}{l^2}\right) \leq \\ &\leq As - A2s\frac{a}{l} + A\frac{a}{l} + A\frac{s^3}{l^2}C_{15} + O\left(\frac{1}{l}\right) + AtsO\left(\frac{s^2}{l^2}\right) \leq As \end{aligned}$$

ha $l > C_{14}s^2$, ahol C_{14} és A elég nagyok. Így $\delta_l^{(i)}(s) < As$ teljesül és ebből adódóan (2.23)-t is megkaptuk.

Mivel $Y_n = X_n(s)$, $Y_0 = \mathbb{E}[X_n(s)]$ és (2.23) szerint, $|Y_{i+1} - Y_i| \leq As$, így az Azuma-Hoeffding egyenlőtlenségből (ld. [1], [28], 2.3. Tétel) az következik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq s\sqrt{n} \log n\} &= \mathbb{P}\{|Y_n - Y_0| \geq s\sqrt{n} \log n\} \leq \\ &\leq 2 \exp\left\{-\frac{s^2 n \log^2 n}{2nA^2 s^2}\right\} = 2(e^{\log n})^{-\log n/2A^2} = 2n^{-\log n/2A^2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Legyen $\delta > 0$, és $s \leq n^{\frac{a-\delta}{4a+2}}$. A 2.1. Tétel szerint

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq \varphi(n)\mathbb{E}[X_n(s)]\} &\leq \\ &\leq \mathbb{P}\left\{|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq \varphi(n)Ls^{-1-\frac{1}{a}}\left(n + O\left(s^{2+\frac{1}{a}}\right)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Észrevehető, hogy a

$$\varphi(n)Ls^{-1-\frac{1}{a}}\left(n + O\left(s^{2+\frac{1}{a}}\right)\right) > s\sqrt{n} \log n \quad (2.30)$$

egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\varphi(n)L\left(s^{-2-\frac{1}{a}}n + O(1)\right) > \sqrt{n} \log n$$

egyenlőtlenséggel. Most amennyiben $s = n^{\frac{a-\delta}{4a+2}}$, akkor

$$\begin{aligned} \varphi(n)L\left(s^{-2-\frac{1}{a}}n + O(1)\right) &= \varphi(n)L\left(n^{\frac{a-\delta}{4a+2}\left(-\frac{2a+1}{a}\right)}n + O(1)\right) = \\ &= \varphi(n)L\left(n^{\frac{a+\delta}{2a}} + O(1)\right) = \varphi(n)L\left(n^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2a}} + O(1)\right) > \sqrt{n} \log n, \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség igaz, ha n nagy és $\varphi(n)$ egy bizonyos függvény, amelyre $\varphi(n) = o(1)$ igaz. Tehát (2.30) érvényes $s = n^{\frac{a-\delta}{4a+2}}$ esetén, ebből adódik, hogy $s \leq n^{\frac{a-\delta}{4a+2}}$ esetén is érvényes. Így a fenti számolások azt mutatják, hogy $s \leq n^{\frac{a-\delta}{4a+2}}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq \varphi(n)\mathbb{E}[X_n(s)]\} &\leq \\ &\leq \mathbb{P}\{|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq s\sqrt{n} \log n\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Tehát a (2.29) és a Borel-Cantelli-lemma (2.4. Tétel) szerint adódik, hogy 1 valószínűséggel csak véges sok n létezik úgy, hogy $|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq \varphi(n)\mathbb{E}[X_n(s)]$ bármely $s \leq n^{\frac{a-\delta}{4a+2}}$ esetén. $\square$

2.4. A 2.1. Következmény bizonyítása

A (2.29) egyenlőtlenségből következik, hogy 1 valószínűséggel az

$$|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq s\sqrt{n} \log n$$

egyenlőtlenség csak véges sok n esetén teljesül. Ebből adódik, hogy

$$\frac{X_n(s)}{n} - \frac{\mathbb{E}[X_n(s)]}{n} \rightarrow 0$$

1 valószínűséggel. A 2.1. Tétel alapján tudjuk, hogy

$$\frac{\mathbb{E}[X_n(s)]}{n} = c(s) \left(1 + \frac{1}{n} \Theta \left(K s^{2+\frac{1}{a}} \right) \right) \rightarrow c(s) \quad , \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n(s)}{n} = c(s)$$

1 valószínűséggel, és

$$c(s) \sim \frac{m\Gamma\left(u + \frac{b+1}{a}\right)}{a\Gamma\left(u + \frac{b}{a}\right)} s^{-1-\frac{1}{a}} \quad , \text{ ha } s \rightarrow \infty.$$

□

2.5. Az eredmények alkalmazása

Végezetül a populációs modell eredményeit alkalmazzuk az M -klikkek súlyaira az N -pontos véletlen gráf modellben (ld. [25], [26], [27]), majd pedig az 1. fejezetben ismertetett csillagos modell esetén az N -csillagok súlyaira, ezzel második bizonyítást adva az 1.2. Tétel állítására. Megjegyezzük, hogy a továbbiakban M -klikknek nevezünk minden olyan részgráfot, ami M csúcsú teljes gráf.

Legyen $N \geq 3$ és legyen $0 < p \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq q \leq 1$ rögzített számok (az N -pontos modell paraméterei). A véletlen gráf fejlődése az $n = 0$ időponttal kezdődik egy N -klikkkel. A fejlődés során bármely N -klikknek és annak bármely M -részklikkjének ($0 < M < N$) a kezdeti súlya 1. (A nem létező klikkek súlyát 0-nak tekintjük.) Minden lépésben N csúcs lép kölcsönhatásba egymással. Jelen esetben a kölcsönhatás azt jelenti,

hogy behúzzunk minden nemlétező élt a csúcsok között, így alkotva egy N -klikket. Ugyanakkor az N -klikk súlyát és annak minden részklikkjének a súlyát megnöveljük 1-gyel.

A modell fejlődésének pontos lépései a következők. Minden lépésben két lehetőség közül az egyik következik be, ezeket ÚJ LÉPÉS-nek és RÉGI LÉPÉS-nek nevezzük. Az ÚJ LÉPÉS p valószínűséggel következhet be. Ebben az esetben egy új csúcs születik és lép kapcsolatba $N - 1$ régi csúccsal úgy, hogy egy N -klikket alkotnak. A RÉGI LÉPÉS $(1 - p)$ valószínűséggel következhet be. Ekkor nem adunk a gráfhoz új csúcsot, hanem N régi csúcs lép kapcsolatba egymással, itt is N -klikket alkotva.

Ezen felül az ÚJ LÉPÉS-nek és a RÉGI LÉPÉS-nek további két-két lehetséges módon érhet véget.

ÚJ LÉPÉS, A ESET: Az A ESET valószínűsége r . Ekkor választunk egy $(N - 1)$ -klikket súlyarányosan, azaz a preferential attachment szabályt alkalmazva. Ebben az esetben, a preferential attachment azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy a c $(N - 1)$ -klikket választom, aminek w_c a súlya, $w_c / \sum_k w_k$, ahol $\sum_k w_k$ az összsúlya az $(N - 1)$ -klikkeknek.

ÚJ LÉPÉS, B ESET: A B ESET valószínűsége $(1 - r)$. Ekkor $N - 1$ régi csúcsot választunk egyenletesen. Az egyenletes választás azt jelenti, hogy az összes csúcsot egyenlő eséllyel választhatom ki. Ekkor a kiválasztott $N - 1$ régi csúcs és az új csúcs lépnek kölcsönhatásba, azaz egy N -klikket alkotnak.

RÉGI LÉPÉS, A ESET: Az A ESET valószínűsége q . Ekkor választunk egy régi N -klikket súlyarányosan, azaz a preferential attachment szabály szerint, ami azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy a c N -klikket választom, aminek w_c a súlya, $w_c / \sum_k w_k$, ahol $\sum_k w_k$ az összsúlya az N -klikkeknek. A kiválasztott N -klikkben szereplő csúcsok lépnek kölcsönhatásba.

RÉGI LÉPÉS, B ESET: A B ESET valószínűsége $(1 - q)$. Ekkor N régi csúcsot választunk egyenletesen, azaz minden csúcsot egyenlő eséllyel választunk ki. A kiválasztott csúcsok fognak kölcsönhatásba lépni egymással.

Megjegyezzük, hogy a modellben csak azokat a teljes gráfokat tekintjük klikkeknek, amelyek N csúcs kölcsönhatásából jöttek létre az előbb leírt fejlődés során. Ezért egy lépésben legfeljebb egy N -klikk jöhet létre.

Továbbá a lépések során a kölcsönhatáson azt értjük, hogy behúzzunk minden eddig nem létező élt a csúcsok között és 1-gyel növeljük az N -klikk és annak minden részklikkjének a súlyát, azaz a gráf egy elemének a súlyát megmutatja, hogy hányszor szerepelt kölcsönhatásban.

A dolgozat későbbi részében egy általánosabb modellt fogunk vizsgálni, aminek az N -pontos modell speciális esete. A jelenlegi modell fejlődésének megértése érdekében a következő fejezet 3.1.-3.3. ábrái adhatnak szemléletes

segítséget.

A következő tétel szerint az M -klikkek ($2 \leq M \leq N$) aszimptotikus súlyeloszlása skálafüggetlen. Ez az eredmény összhangban van a [35] doktori értekezés idevágó tételével, amelyre mi egy rövidebb bizonyítást adunk. A [20] cikkben az $M = 2$, $N = 3$ és $M = N$, ha $N > 2$ speciális esetek megtalálhatóak.

2.5. Tétel. *Legyen $N \geq 3$ és M rögzített úgy, hogy $2 \leq M \leq N$ és jelölje $X_M(n, w)$ a w súlyú M -klikkek számát n lépés után. Ha $p > 0$ és vagy $r > 0$ vagy $(1 - p)q > 0$, akkor*

$$\frac{X_M(n, w)}{n} \rightarrow x_{M, w} \quad (2.32)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol $x_{M, w}$, $w = 1, 2, \dots$ számok olyanok, hogy

$$x_{M, w} \sim \frac{\mu}{a} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) w^{-(1 + \frac{1}{a})} \quad (2.33)$$

amennyiben $w \rightarrow \infty$, ahol

$$a = pr \frac{N - M}{N} + (1 - p)q, \quad (2.34)$$

és

$$\mu = p \binom{N - 1}{M - 1} + p(1 - r) \binom{N - 1}{M} + (1 - p)(1 - q) \binom{N}{M}. \quad (2.35)$$

Bizonyítás. Jelölje V_n a csúcsok számát n lépés után. Alkalmazva Marcinkiewicz nagy számok erős törvényét (1.4. Tétel) kapjuk, hogy

$$V_n = pn + o\left(n^{1/2+\varepsilon}\right) \quad (2.36)$$

majdnem biztosan minden $\varepsilon > 0$ esetén. Világos, hogy egy lépésben egy M -klikk súlya 1-gyel vagy 0-val növekedhet. Ezért a (2.1) feltétel teljesül, ha $u = 1$. Jelölje $W_n(i)$ az i M -klikk súlyát az n -edik lépésben ($2 \leq M \leq N$). Ekkor $w \geq 1$ esetén az adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{W_{n+1}(i) = w + 1 \mid W_n(i) = w\} &= pr \frac{(N - M)w}{Nn} + p(1 - r) \frac{\binom{V_n - M}{N - 1 - M}}{\binom{V_n}{N - 1}} + \\ &+ (1 - p)q \frac{w}{n} + (1 - p)(1 - q) \frac{\binom{V_n - M}{N - M}}{\binom{V_n}{N}} = \\ &= \left(pr \frac{N - M}{N} + (1 - p)q \right) \frac{w}{n} + O\left(\frac{1}{n^M}\right) = a \frac{w}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

a (2.36) összefüggés és a $M \geq 2$ feltétel miatt. Így a (2.2) feltétel teljesül, ahol a a (2.34) képletben van definiálva és $b = 0$.

Most legyen ξ_n az új M -klikkek száma az n -edik lépésben. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = & pr \binom{N-1}{M-1} + p(1-r) \left(\binom{N-1}{M-1} + \right. \\ & \left. + \frac{\binom{N-1}{M} \binom{V_n}{N-1} - E_n \binom{V_n-M}{N-1-M}}{\binom{V_n}{N-1}} \right) + (1-p)(1-q) \left(\binom{N}{M} - \frac{E_n \binom{V_n-M}{N-M}}{\binom{V_n}{N}} \right), \end{aligned}$$

ahol E_n jelöli az n -edik lépésben az M -klikkek számát. Ezek után, alkalmazva $E_n \leq nc$ és $M \geq 2$,

$$\mathbb{E} [\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mu + O\left(\frac{1}{n^{M-1}}\right) = \mu + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.38)$$

ahol μ a (2.35) képletben megtalálható. Tehát a (2.7) feltétel teljesül, így a 2.1. Következmény maga után vonja az eredményeket. $\square$

A [35] doktori értekezés 1.23. Tételéből speciális esetként következik, hogy

$$\frac{E_n}{n} \rightarrow \mu, \quad (2.39)$$

így a (2.32) és (2.39) hányadosából adódik a [35] doktori értekezés 2.4. Tételének állítása.

Ezek után az 1. fejezetben ismertetett csillagos modell esetén is igazolunk hasonló állítást az N -csillagok súlyaira. Ez az állítás az 1.2. Tétel bizonyításában megtalálható részeredményekkel megegyezik, ahol más módszerrel igazoltuk. A populációs modell ezen alkalmazása nem található meg a fejezet alapjául szolgáló [21] cikkben, hanem Backhausz Ágnes javaslatára került be az értekezésbe.

2.6. Tétel. *Legyen $N \geq 3$ és jelölje $S(n, w)$ a w súlyú N -csillagok számát n lépés után. Továbbá legyen $0 < p < 1$ és $0 < q$. Ekkor*

$$\frac{S(n, w)}{n} \rightarrow k_w \quad (2.40)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol k_w , $w = 1, 2, \dots$ számok olyanok, hogy

$$k_w \sim \frac{\mu}{a} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) w^{-(1+\frac{1}{a})} \quad (2.41)$$

amennyiben $w \rightarrow \infty$, ahol

$$a = (1 - p)q, \quad (2.42)$$

és

$$\mu = p + (1 - p)(1 - q). \quad (2.43)$$

Bizonyítás. Jelölje V_n a csúcsok számát n lépés után. Alkalmazva Marcinkiewicz nagy számok erős törvényét (1.4. Tétel) kapjuk, hogy

$$V_n = pn + o\left(n^{1/2+\varepsilon}\right) \quad (2.44)$$

majdnem biztosan minden $\varepsilon > 0$ esetén. Világos, hogy egy lépésben egy N -csillag súlya 1-gyel vagy 0-val növekedhet. Ezért a (2.1) feltétel teljesül, ha $u = 1$. Jelölje $W_n(i)$ az i N -csillag súlyát az n -edik lépésben. Ekkor $w \geq 1$ esetén az adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{W_{n+1}(i) = w + 1 \mid W_n(i) = w\} &= (1 - p)q \frac{w}{n} + (1 - p)(1 - q) \frac{1}{\binom{V_n}{N} N} = \\ &= (1 - p)q \frac{w}{n} + O\left(\frac{1}{n^N}\right) = a \frac{w}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

a (2.44) összefüggés és az $N \geq 2$ feltétel miatt. Így a (2.2) feltétel teljesül, ahol a a (2.42) képletben van definiálva és $b = 0$.

Most legyen ξ_n az új N -csillagok száma az n -edik lépésben. Ekkor

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = p + (1 - p)(1 - q) \left(1 - \frac{S_n}{\binom{V_n}{N}}\right),$$

ahol S_n jelöli az n -edik lépésben a pozitív súlyú N -csillagok számát. Ezek után, alkalmazva $S_n \leq n$ egyenlőtlenséget,

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mu + O\left(\frac{1}{n^{N-1}}\right) = \mu + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.46)$$

ahol μ a (2.43) képletben megtalálható. Tehát a (2.7) feltétel teljesül, így a 2.1. Következmény maga után vonja az eredményeket. $\square$

Végezetül érdemes itt is megjegyezni, hogy az 1.2. Tétel bizonyítása során beláttuk, hogy

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu, \quad (2.47)$$

így a (2.40) és (2.47) hányadosából adódik az 1.2. Tétel állítása.

3. fejezet

Az érdekes nemskálafüggetlen eloszlás

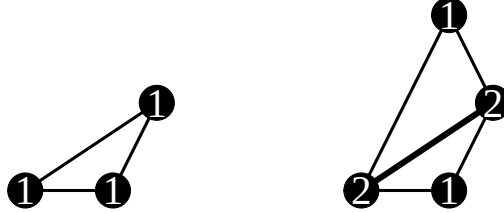
Ebben a fejezetben egy olyan modellt ismertetünk, amelynek fejlődésében szintén szerepet játszik a preferential attachment szabály, mégis előfordulhat az az eset, hogy a kapott hálózat nem lesz skálafüggetlen. A fejezet alapja a [23] cikk. A modell pontos leírása megtalálható a [35] doktori értekezésben is, ami a hálózat tulajdonságainak a matematikai bizonyításait is tartalmazza.

3.1. A modell definíciója és ismert tulajdonságai

Hasonlóan, mint korábban a modellel egy közösségben élő emberek együttműködését írjuk le. Tegyük fel, hogy minden lépésben N ember dolgozik együtt. Ez azt jelenti, hogy mindenki kapcsolatban áll mindenkivel az N -tagú csapatból. Minden egyes együttműködés növeli a csapat erejét (súlyát), ami tovább növeli annak az esélyét, hogy a csapat újra együtt dolgozzon. Ennek ellenére lehetséges, hogy új csapatok jönnek létre. Továbbá, új emberek is csatlakozhatnak a közösséghez. Ha k új tag érkezik a közösségbe ők $(N - k)$ régi emberrel fognak együttműködni.

A fenti közösségi fejlődést leíró véletlen gráf pontos fejlődésének a folyamat a következő: Legyen $N \geq 2$ rögzített egész szám. Egy M csúcsú teljes gráfot M -klikknek nevezünk úgy, mint a korábbi modellek esetén. A modellben csak azokat a teljes gráfokat tekintjük klikknek, amelyek a fejlődés során együttműködés útján jöttek létre. A fejlődés a 0 időpontban kezdődik és a kezdeti gráf egy N -klikk, aminek és annak minden részklikkjének a súlya 1. Minden lépésben N csúcs lép kapcsolatba egymással. Ez azt jelenti,

hogyan behúzzunk minden nem létező élt a csúcsok között, hogy N -klikket kapjunk és megnöveljük a klikk, illetve annak minden részklikkjének a súlyát 1-gyel. A nem létező klikkek súlyát 0-nak tekintjük.



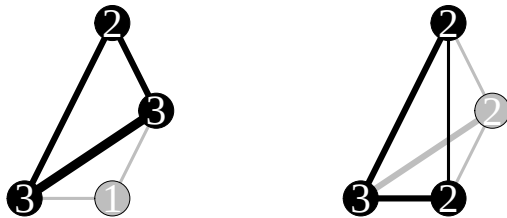
3.1. ábra. A kezdeti gráf és egy lehetséges első lépés

Minden lépésben, p_k ($1 \leq k \leq N-1$) valószínűséggel, k új csúcs születik és lépnek kapcsolatba $(N-k)$ régi csúccsal, vagy p_0 valószínűséggel, nem keletkezik új csúcs, és N régi csúcs lép kapcsolatba egymással. Azaz, minden lépésben egy N -klikk jön létre (vagy egy létezőnek a súlyát növeljük).

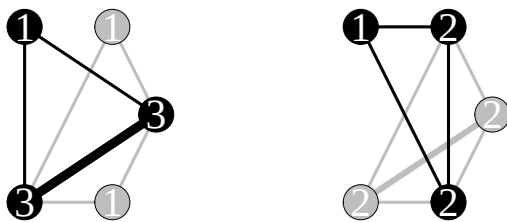
Amikor k csúcs születik két lehetőségünk van kiválasztani az $(N-k)$ régi csúcsot. Egyrészt, r_k valószínűséggel, választhatunk egy régi $(N-k)$ -klikket súlyarányosan. Ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy kiválasztunk egy w súlyú $(N-k)$ -klikket, $w / \sum_i w_i$, ahol $\sum_i w_i$ az összsúly az $(N-k)$ -klikkeknek. Ez a preferential attachment szabály. Másrészt, $(1-r_k)$ valószínűséggel, egyenletesen választunk $(N-k)$ régi csúcsot. Ez azt jelenti, hogy minden csúcs kiválasztásának a valószínűsége egyenlő. Utána a k új csúcs és az $(N-k)$ régi csúcs lépnek kölcsönhatásba egymással.

Viszont, abban az esetben amikor nem adunk a gráfhoz új csúcsot, akkor is van két lehetőségünk. Egyrészt, r_0 valószínűséggel, választhatunk egy N -klikket súlyarányosan és megnöveljük a súlyát és minden részklikkjének a súlyát. Másrészt, egyenletesen választhatunk N régi csúcsot és ők alkotnak N -klikket.

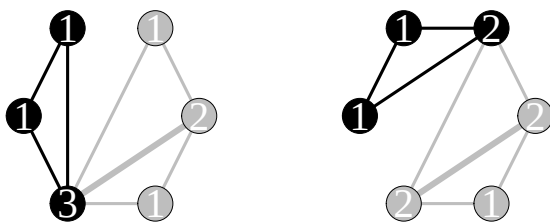
A megértés megkönnyítése érdekében ábrákon mutatjuk be az $N=3$ esetet. A 3.1. ábra a kiindulási gráfot és egy lehetséges első lépést mutat. A 3.2.-3.4. ábrákon az összes lehetséges lépést mutatjuk be. Az ábrák bal oldalán a preferential attachment szabályt alkalmaztuk, míg a jobb oldalon az egyenletes választás található. Az aktuális lépésben részt vevő csúcsok és élek feketék, a többi elem pedig szürke. A csúcsok címkéje a súlyokat a jelöli és az élek vastagsága pedig az élek súlyát jelképezi. A háromszögek



3.2. ábra. A két lehetőség 3 csúcsot választani, amikor nem adunk új csúcsot a modellhez



3.3. ábra. A két lehetőség 2 csúcsot választani, amikor 1 új csúcs születik



3.4. ábra. A két lehetőség 1 csúcsot választani, amikor 2 új csúcs születik

súlyait nem tüntetjük fel az átláthatóság miatt, de az is könnyen követhető.

Ezen felül, érdemes megjegyezni, hogy a $p_0 > 0$, $p_1 > 0$ és $p_2 = p_3 = \dots p_{N-1} = 0$ speciális esete ennek a modellnek, ami nem más, mint az N -

pontos modell, amit a előző fejezetben ismertettünk. Az N -pontos modell esetén lépésenként legfeljebb 1 új csúcs születhet, azaz a 3.1.-3.3. ábrák (a 3.4. ábra nélkül) az $N = 3$ esetet mutatják be.

A p_k ($0 \leq k \leq N - 1$) valószínűségek úgy, hogy $\sum_{k=0}^{N-1} p_k = 1$ és r_k ($0 \leq k \leq N - 1$) rögzített nemnegatív számok. Néhány egyszerű feltétel mellett a [26] és [20] cikkekben megtalálható a csúcsok fokszámának és az N -klikkek skálafüggetlenségére vonatkozó bizonyítások az N -pontos modell esetén. A [26] és [20] cikkek alapján a következő sejtést fogalmaztuk meg: A súlyeloszlása az M -klikkeknek ($1 \leq M \leq N$) szintén skálafüggetlen tulajdonságúak az általánosított N -pontos modell esetén. Ez a sejtés igaznak bizonyult, ugyanis a [35] doktori értekezés 1.5. Tétele pontosan ezt támasztja alá. Továbbá Fazekas és Porvázsnik következő tétele a fokszámeloszlás skálafüggetlenségét állítja.

Legyenek

$$\alpha_k = \frac{N-k}{N} p_k r_k, \quad \text{és} \quad \alpha = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k. \quad (3.1)$$

3.1. Tétel ([35], 1.7. Tétel). *Legyen $\alpha_0 > 0, \alpha \neq \alpha_0$ és tegyük fel, hogy*

$$\gcd\{k | \alpha_k > 0, k = 0, \dots, N-1\} = 1. \quad (3.2)$$

Ekkor minden $d \geq N - 1$ esetén a d fokszámú csúcsok relatív gyakorisága aszimptotikusan

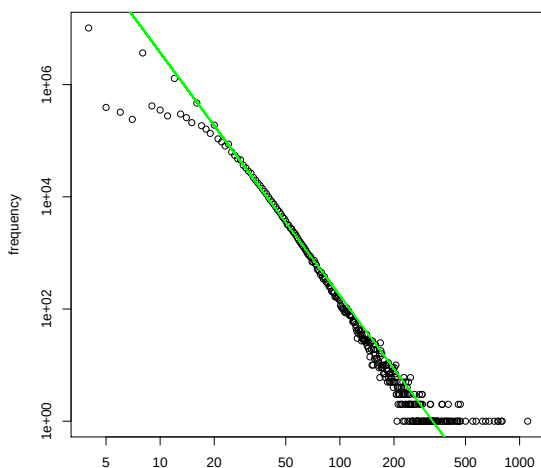
$$C d^{-(1+\frac{1}{\alpha})}. \quad (3.3)$$

Ennek a tételnek a bizonyítása, illetve a C együttható értéke szintén megtalálható a [35] doktori értekezésben.

3.2. Szimulációs eredmények

A dolgozat ezen részében a fenti 3.1. Tétel és az általunk megfogalmazott sejtés szemléltetése érdekében numerikus eredményeket mutatunk be. A fenti modellt vizsgáltuk $N = 5$ esetén, különböző paraméterekkel $n = 10^7$ lépésszámmal. Az eloszlásokat log-log skálán ábráztuk, ami azt jelenti, hogy skálafüggetlenség esetén egy egyenest kell látnunk kirajzolódni a pontokból.

I. Eset: Az első paraméterkiosztás, amit vizsgáltunk a $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/5$ és $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/2$ volt. Ezek a paraméterek teljesítik a (3.2) feltételt. A 3.5.-3.10. ábrákon megtalálható az összes eloszlás. A folytonos zöld vonal a (3.3) szerint definiált elméleti egyenes, míg a



3.5. ábra. A csúcsok fokszámeloszlása, I. Eset

pontok az empirikus (megfigyelt) eloszlás. Minden esetben az eloszlás képe közel egyenes volt, ami alátámasztja a sejtésünket. Továbbá a fokszámeloszlás esetében a megfigyelt értékek jól illeszkednek az elméleti egyenesre is.

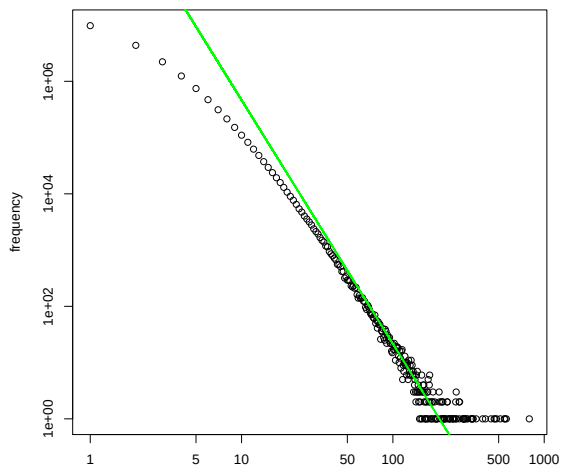
II. Eset: A második paramétereloszlás, amit vizsgáltunk a $p_0 = p_2 = p_4 = 1/3$, $p_1 = p_3 = 0$ és $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/2$ volt. Ekkor a (3.2) szükséges feltétel a fokszámok skálafüggetlenségéhez nem teljesül. Ebben az esetben a kapott fokszámeloszlás a 3.11. ábrán látható.

Egyértelműen látható, hogy az eloszlásnak van egy skálafüggetlen része, ami illeszkedik az elméleti egyenesre, de van egy másik része is, ami miatt nem skálafüggetlen az eloszlás.

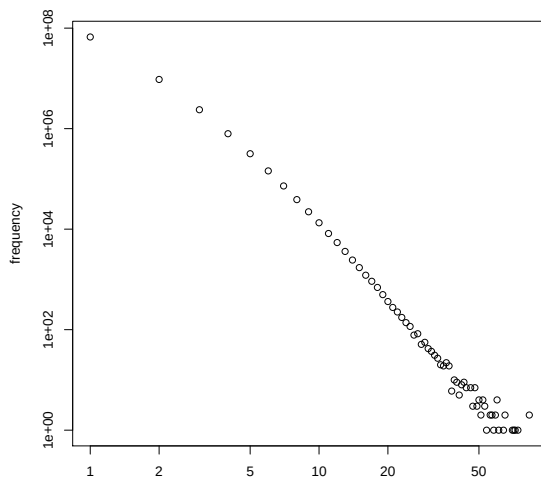
III. Eset: Az utolsó esetben a régi csúcsok közötti kölcsönhatás nagyobb valószínűségű volt, azaz $p_0 = 1/2$, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/8$ és $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/2$. A fokszámeloszlás és a csúcsok súlyeloszlása jól illeszkedik az elméleti egyeneshez.

A szimulációs eredményeink alátámasztják Fazekas és Porváznnyik tételét a fokszámeloszlásról és a sejtésünket, miszerint ennek a modellnek is a súlyeloszlásai skálafüggetlenek bizonyos feltételek mellett. Azonban, ha ezek a feltételek nem teljesülnek egy skálafüggetlentől eltérő eloszlást kapunk eredményül, annak ellenére, hogy a modell fejlődésében nagy szerepet

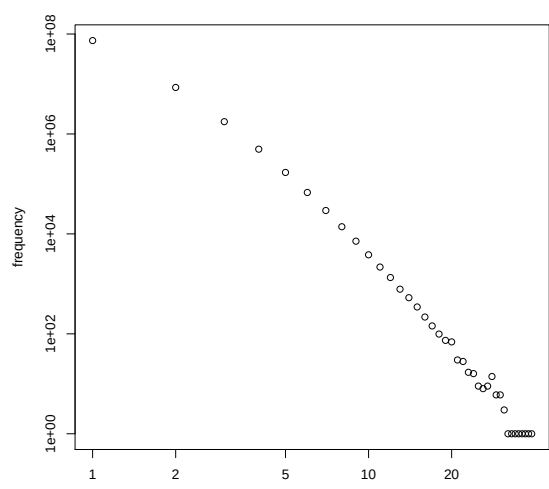
játszik a preferential attachment szabály.



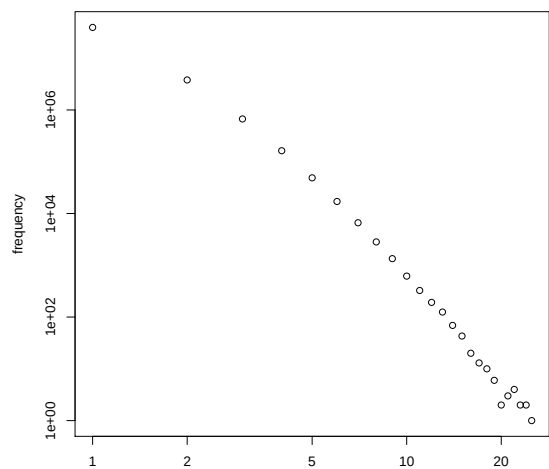
3.6. ábra. A csúcsok súlyeloszlása, I. Eset



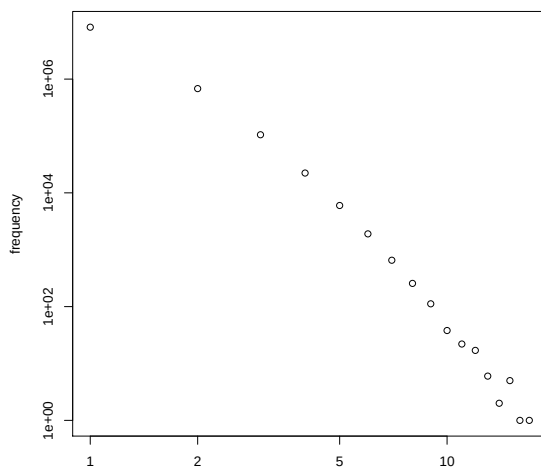
3.7. ábra. Az élek súlyeloszlása, I. Eset



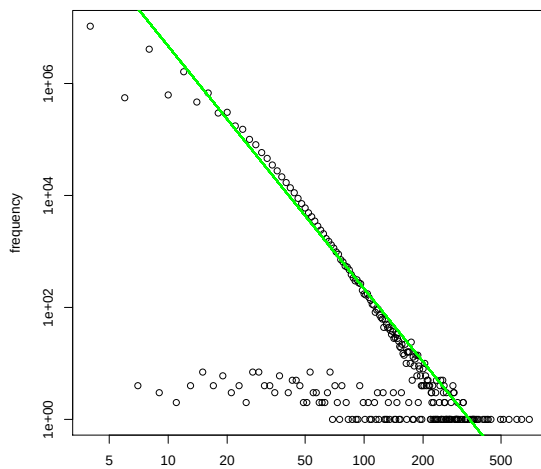
3.8. ábra. A háromszögek súlyeloszlása, I. Eset



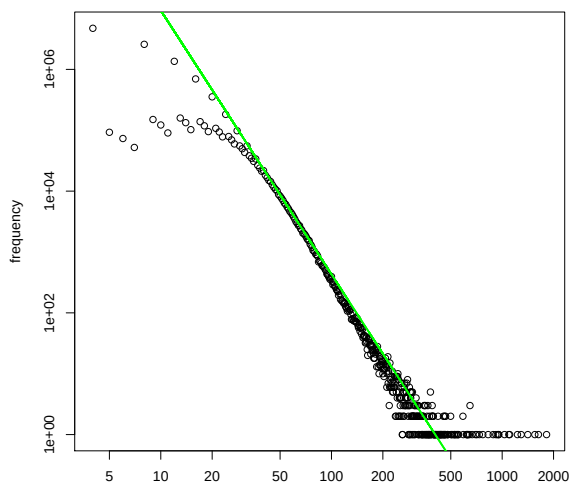
3.9. ábra. A négyszögek súlyeloszlása, I. Eset



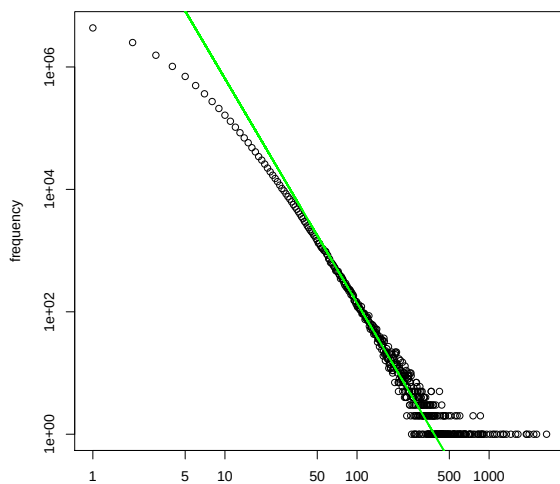
3.10. ábra. Az ötszögek súlyeloszlása, I. Eset



3.11. ábra. A csúcsok fokszámeloszlása, II. Eset (a (3.2) feltétel nem teljesül)



3.12. ábra. A csúcsok fokszámeloszlása, III. Eset (a régi csúcsok kölcsönhatása nagyobb valószínűségű)



3.13. ábra. A csúcsok súlyeloszlása, III. Eset (a régi csúcsok kölcsönhatása nagyobb valószínűségű)

Összefoglalás

Ebben a doktori értekezésben új hálózat fejlődési modelleket és azok tulajdonságait ismertettük, amelyek hasznosak lehetnek valós hálózatok sajátosságainak megismeréséhez. Ezeknek a modelleknek a növekedése során a preferential attachment szabály nagy szerepet játszik. Ez azt jelenti, hogy amikor új csúcsok csatlakoznak régiekhez, vagy akár a régi csúcsok között jön létre új kapcsolat, akkor nagyobb valószínűséggel választunk csúcsoknak olyan részhalmazát, amelyek már többször játszottak szerepet a fejlődés során. A dolgozat célja megmutatni, hogy ezek a fejlődési folyamatok, megfelelő feltételek mellett, skálafüggetlen gráfokhoz vezetnek.

A Bevezetésben összefoglaltuk azokat a jelentősebb irodalmi előzményeket, amik a dolgozat elkészítésének alapjául szolgáltak, illetve a teljesség igénye nélkül az érdeklődő olvasók további eredményeket ismerhetnek meg a hálózatok fejlődésének vizsgálatával kapcsolatban a felsorolt monográfiák tanulmányozásával.

A dolgozat 1. fejezetének alapjául a [22] és [24] cikkek szolgáltak. Defináltunk egy csillag alakzatok szerint fejlődő véletlen gráf folyamatot, amit csillagos modellnek neveztünk el. Ez a modell tetszőleges N egyed közötti együttműködésen és versengésen alapszik. Emberek közös munkája során általában mindig van egy kitüntetett egyed, aki vezető pozíciót tölt be, és hozzá társulnak a többiek, ezzel N csúcsponttal rendelkező csillag struktúrát kialakítva. Egy ilyen csillagban megkülönböztetünk egy központi csúcsot (a főnök), és a hozzájuk csatlakozó $N - 1$ darab periféria csúcsokat (a beosztottak). Ezek a struktúrák irányított gráfok úgy, hogy egy-egy él indul a periféria csúcsokból a központi csúcsba. Azaz minden egyedet a d_1 befoka és d_2 kifoka jellemzi. Mindenki $d_1/(N - 1)$ esetben együttműködés főnökeként és d_2 esetben pedig alárendelt szerepben volt jelen a hálózatban.

A gráf fejlődése során N csúcs interakciója azt jelenti, hogy ők egy N -csillagot alkotnak. Természetesen egy csúcs több csillagnak is lehet a része, akár ugyanazokkal a csúcsokkal és akár különböző szerepekben is, ezért a fejlődés során párhuzamos éleket is megengedünk. Az új együttműködések

új élek behúzásával jelezzük. A fejlődés során új egyedek is csatlakozhatnak a populációhoz a régi egyedeken keresztül. Ezen felül a hálózat fejlődése érdékében súlyokat rendelünk a csillagokhoz. A kiinduló és az összes újonnan született N -csillag kezdeti súlya 1, aminek $N - 1$ darab $(N - 1)$ -csillag részgráfja van. A részgráfok kezdeti súlya is egyenlő eggyel. Minden lépésben N egyed lép kölcsönhatásba egymással és amikor egy N -csillag aktiválódik, akkor az ő súlya és annak minden rész $(N - 1)$ -csillag gráfjának a súlya eggyel növekszik. A fejlődés során p valószínűséggel új csúcs születik és lép kapcsolatba régi csúcsokkal, amíg $(1 - p)$ valószínűséggel csak régi csúcsok alkotnak csillag gráfot. A régi csúcsok kiválasztásánál alkalmazhatjuk a preferential attachment szabályt vagy egyenletesen is választhatunk.

Miután pontos matematikai definíciót adtunk a modell fejlődésére, amelyet ábrákkal is szemléltettünk, bemutattuk a fő eredményeket, amelyek a következők:

1. Tegyük fel, hogy a kezdeti paraméterek olyanok, hogy a régi csúcsok választásának összes lehetősége bekövetkezhet a fejlődés során. Ekkor bármely rögzített d_1 és d_2 esetén, amennyiben vagy $d_1 = 0$ és $1 \leq d_2$, vagy $N - 1 \leq d_1$ és $d_2 \geq 0$ teljesül, akkor a d_1 befokú és d_2 kifokú csúcsok relatív gyakorisága majdnem biztosan tart a nemnegatív y_{d_1, d_2} határértékhez.

Továbbá legyen d_2 rögzített, ekkor $d_1 \rightarrow \infty$ esetén

$$y_{d_1, d_2} \sim A(d_2) d_1^{-\left(1 + \frac{\beta_2 + 1}{\alpha_1}\right)}.$$

Ezen felül legyen d_1 rögzített, ekkor $d_2 \rightarrow \infty$ esetén

$$y_{d_1, d_2} \sim B(d_1) d_2^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)}.$$

Itt $A(d_2)$ és $B(d_1)$ csak a rögzített paraméterektől függő konstansok.

2. Tegyük fel, hogy a kezdeti paraméterek olyanok, hogy a $0 < p < 1$ és a régi N -csillagok súlyarányos választása is lehetséges a fejlődés során. Ekkor bármely $w = 1, 2, \dots$ esetén a w súlyú N -csillagok relatív gyakorisága majdnem biztosan tart az s_w pozitív határértékhez. Ezen felül,

$$s_w \sim C w^{-(1 + \frac{1}{h})}$$

$w \rightarrow \infty$ esetén, ahol C a megfelelő konstans.

Az első állítás a gráf ki- és befokainak a skálafüggetlenségét mutatja, aminek a bizonyítása az 1.2. fejezetben követhető végig. Ehhez a modellnek egy ekvivalens alakját használtuk. Az ekvivalens alak leírása az 1.1.1. fejezetben található meg. A modellnek ezen formájában a párhuzamos élek egyesítve vannak és az irányítottságukat eltöröljük; ellenben az egyesített élek súlyt kapnak, ami azt mutatja, hogy hány elemet egyesítettünk. A második pont pedig az N -csillagok súlyának skálafüggetlenségét állítja, amelynek a bizonyítása az 1.3. fejezetben van tárgyalva. A fenti állítások igazolásához Doob-Meyer felbontást, és arra vonatkozó állításokat használtunk, illetve egy-egy részállítás esetén ezeket a módszereket általánosító állítás segítségével második bizonyítást is adunk. Itt a [4], [26], [20] cikkek módszertanát követtük.

Végezetül az 1.4. fejezetben szimulációs eredményeket is prezentáltunk, eredményeink alátámasztásának érdekében.

A 2. fejezet a [21] cikk eredményeit dolgozza fel, amelyben a [37] cikkbeli modellt tovább általánosítottuk. Egy általános populációs modellt definiáltunk, amit S modellnek neveztünk el. Ebben a modellben minden egyed egy úgynevezett pontértékkel jellemeztünk. A fejlődés során az egyedek száma és az egyedek pontértéke is növekedhet.

A populáció kezdeti állapotában maximum t egyed van jelen és minden egyes tagjának megfeleltetünk egy pontértéket, ami egy pozitív egész szám. Minden további időpontban legfeljebb t új egyed születhet, és egy új egyed születésekor nagy valószínűséggel a pontértéke u , ahol $u \geq 1$ egy rögzített egész szám. Továbbá, minden lépésben bármely a populációban jelen lévő egyednek a pontértéke növekedhet 1-gyel vagy 0-val, de alacsony valószínűséggel magasabb változás is megengedett. Valamint, egy lépés során létrejött pontérték növekedések összege nem lehet több, mint t . Ezen felül minden lépésben, a születendő egyedek számának a várható értéke aszimptotikusan m .

Jelölje $X_n(s)$ az s pontértékkel rendelkező egyedek számát az n időpontban. Továbbá jelöljön $\Theta(s)$ olyan mennyiséget, melyre $|\Theta(s)| < s$. Ebben a fejezetben a két fő állításunk a következők voltak:

3. Tegyük fel, hogy az S modell feltételei teljesülnek a megfelelő megszorításokkal. Ekkor bármely rögzített $s = u, u + 1, u + 2, \dots$ esetén

$$\mathbb{E}[X_n(s)] = c(s) \left(n + \Theta \left(K s^{2 + \frac{1}{a}} \right) \right)$$

bármely n -re, ahol K egy rögzített véges konstans. Továbbá

$$c(s) \sim D s^{-1 - \frac{1}{a}} \quad \text{ha} \quad s \rightarrow \infty,$$

ahol D a megfelelő konstans és a az a nemnegatív konstans, amit a pontértékek fejlődésének definiálásakor előre rögzítettünk.

4. Tegyük fel, hogy az S modell feltételei teljesülnek a megfelelő megszorításokkal. Ekkor létezik egy C konstans úgy, hogy bármely rögzített s esetén a következők igazak:

$$\mathbb{P} \{ |X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq s\sqrt{n} \log n \} \leq 2n^{-\log n/C}.$$

Továbbá legyen $\delta > 0$. Ekkor létezik egy $\varphi(n) = o(1)$ függvény úgy, hogy 1 valószínűséggel csak véges sok n létezik, amelyekre $|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq \varphi(n)\mathbb{E}[X_n(s)]$ igaz, bármely $s \leq n^{(a-\delta)/(4a+2)}$ esetén.

Az első állítás az s pontértékű egyedek számának várható értékét adja meg, a második pedig a pontértékeknek a várható értékeik körüli koncentrációját mutatja. A két állítás bizonyítása a 2.2. és 2.3. fejezetekben követhető végig. Ezekhez teljes indukciót, az Azuma-Hoeffding egyenlőtlenséget és a jól ismert Borel-Cantelli lemmát használtuk. Végezetül, a fenti két állításból következik, hogy a pontértékek eloszlása hatványrendű:

5. Tegyük fel, hogy az S Modell feltételei teljesülnek a megfelelő megszorításokkal. Ekkor az s pontértékű egyedek relatív gyakorisága 1 valószínűséggel $c(s)$ -hez tart.

A fő tételek bizonyítása után az eredményeket az N -pontos modellre alkalmaztuk a 2.5. fejezetben, amely hasonlóan fejlődik, mint az 1. fejezetben ismertetett csillagos modell. A különbség a két modell között az, hogy a csúcsok az interakciók során teljes N -gráfot alkotnak N -csillag helyett. Ezen eredmények segítségével bebizonyítottuk, hogy az N -pontos modellben tetszőleges méretű M teljes gráfok $2 \leq M < N$ (azaz klikkek) súlyeloszlása is skálafüggetlen:

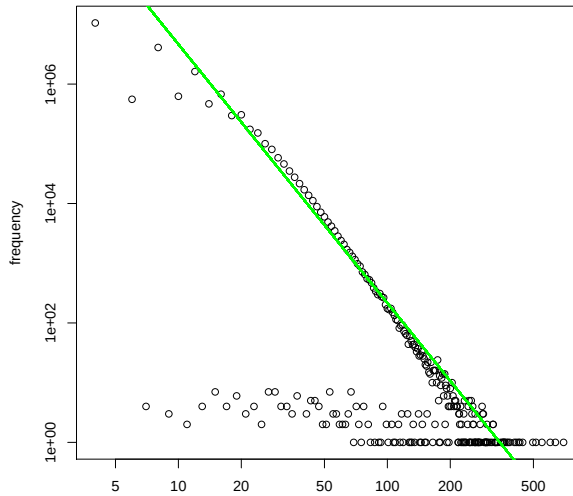
6. Legyen $N \geq 3$ és M rögzített úgy, hogy $2 \leq M \leq N$. Ha a megfelelő feltételek teljesülnek, akkor a w súlyú M -klikkek relatív gyakorisága majdnem biztosan tart $x_{M,w}$ -hez, ahol

$$x_{M,w} \sim Ew^{-(1+\frac{1}{a})}$$

amennyiben $w \rightarrow \infty$ és E a megfelelő konstans.

Továbbá a csillagos modellre is alkalmaztuk az eredményeket, ezzel második bizonyítást adva az N -csillagok súlyeloszlására.

A 3. és egyben utolsó fejezetben pedig az N -pontos modellnek az általánosítását vizsgáltuk szimulációs eszközökkel, ahol a [23] cikkben ismertetett eredményeket mutattuk be. Az általánosított modell esetén lépésenként nem 0 vagy 1 új csúcs születhet, hanem tetszőleges $0 \leq k \leq N - 1$ csúcs csatlakozhat a gráfhoz $(N - k)$ darab csúcson keresztül. A [35] doktori értekezésben megtalálható a pontos levezetése a fokszámok skálafüggetlenségének, abban az esetben, ha az egy lépésben születendő csúcsok lehetséges számának legnagyobb közös osztója 1. Amennyiben ez a szigorú feltétel nem teljesül, akkor a fokszámok eloszlásáról jelenleg nincs matematikai eredmény. Ezért ennek a jelenségnek a bemutatásához, szimulációs eredményeket prezentáltunk. Az ábrákon jól látható, hogy ha nem teljesül a feltétel, akkor a hatványrendű eloszlástól eltérőt kaptunk. Mindezt annak ellenére, hogy a preferential attachment nagy szerepet játszik a modell fejlődés során.



Summary

In this PhD thesis we have described new network evolution models and their properties that may be useful for understanding the characteristics of real networks. The preferential attachment rule is a part of the models' evolution. Namely, when new nodes connect to old ones, or even new interactions between old nodes are created, we are more likely to choose a subset of old nodes that have participated in more steps during the evolution. The aim of this dissertation is to show that these random processes, under appropriate conditions, lead to scale-free graphs.

We summarized the major historical overview of the currently available literature in the Introduction, that served as the basis for the preparation of this thesis. Furthermore, without being exhaustive, interested readers may find further information and results about random networks whilst studying the listed monographs.

Chapter 1 of the dissertation was based on [22] and [24]. We have defined a random graph process evolving by star formations, which we call N -star model. This model is based on arbitrary collaboration and competition between N individuals. When people work together, there is always a distinguished individual who is in a leading position and is associated with the others ($N - 1$ other individuals), forming an N -star. In such a star, we distinguish between a central vertex (the boss) and the associated $N - 1$ peripheral vertices (the employees). These structures are directed graphs, where each edge points from the peripheral vertices to the central vertex. So, each individual is characterized by its d_1 indegree and d_2 outdegree. He/she is the head of any team $d_1/(N - 1)$ times, and a non-head member of any team d_2 times.

During evolution of the graph, the interaction of N vertex means that they form an N -star. One vertex can be part of more stars, even with the same vertices or in different roles, so we allow parallel edges. New collaborations appear in the graph by addition of new directed edges. During development, new individuals also can join the population through old ver-

tices. In addition, we are assigning weights to the stars. The initial and every newly born N -star has an initial weight of 1 and the initial weights of the $(N - 1)$ -star subgraphs are also equal to one. At each step, N individuals interact with each other and when an existing N -star is activated again, then its weight and the weights of its $(N - 1)$ -star subgraphs are increased by 1. With probability p , a new vertex is added to the graph and interacts with old vertices, while with probability $(1 - p)$, only old vertices form a star graph. When choosing old vertices, you can apply the preferential attachment rule or you can choose uniformly.

After we provided an exact mathematical definition of the model evolution, also illustrated through figures, we have presented the main results, which are:

1. Assume that the initial parameters are such that all possibilities for choosing old vertices can occur during evolution. Then, for any fixed d_1 and d_2 with either $d_1 = 0$ and $1 \leq d_2$ or $N - 1 \leq d_1$ and $d_2 \geq 0$, the relative frequency of the vertices with d_1 indegree and d_2 outdegree converges almost surely to fixed nonnegative y_{d_1, d_2} numbers.

Let d_2 be fixed. Then, as $d_1 \rightarrow \infty$,

$$y_{d_1, d_2} \sim A(d_2) d_1^{-\left(1 + \frac{\beta_2 + 1}{\alpha_1}\right)}.$$

Let d_1 be fixed. Then, as $d_2 \rightarrow \infty$

$$y_{d_1, d_2} \sim B(d_1) d_2^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)}.$$

Here $A(d_2)$ and $B(d_1)$ are constants, which only depend on the fixed parameter.

2. Assume that the initial parameters are such that $0 < p < 1$ and choosing an old N -star by preferential attachment step can occur during the evolution. For all $w = 1, 2, \dots$ the relative frequency of the N -stars with weight converge almost surely to fixed positive s_w numbers. Moreover,

$$s_w \sim C w^{-(1 + \frac{1}{h})}$$

as $w \rightarrow \infty$, where C is an appropriate constant.

The first statement shows the scale-free property for the indegree and the outdegree of the graph. This was proven in Section 1.2 by using an

equivalent form of the model. The equivalent form is described in Section 1.1.1. In this form of the model, the parallel edges are merged and their direction is abolished, furthermore the merged edges labeled by weights, which shows how many elements we have merged. The second point states the scale-free property for the weights of the N -stars. The proof can be found in Section 1.3. To prove the above statements, we used Doob-Meyer decomposition and its further phenomenons. For some part of the proofs we provide a second proof using a generalization of this method. We used the methodology of [4], [26], [20].

Finally, we also presented simulation results in Section 1.4 to support our theorems.

Chapter 2 contains the results of [21], in which we further generalized the model in [37]. We defined a general population evolution model, called the Model S. In this model, each individual is characterized by a so-called score. During the evolution, the number of individuals and the score of the individuals may also increase.

In the initial state of the population, at most t individuals are present and we assign a score to each member, which is a positive number. At every step, up to t new individuals may born, and at birth the score of any individual is u with high probability, where $u \geq 1$ is a fixed integer. In addition, at each step the score of any member of the population is increased by 1 or 0. Higher increase is of low probability, but the sum of the score increases generated in one step may not exceed t . Moreover, at each step, the expected number of newly born individuals are asymptotically equal to m .

Let $X_n(s)$ denote the number of individuals having score s at time n and let $\Theta(s)$ denote a quantity with $|\Theta(s)| < s$. In this Chapter, our two main statements were the followings:

3. Suppose that the conditions of Model S are satisfied with appropriate restrictions. Then for any fixed $s = u, u + 1, u + 2, \dots$ we have

$$\mathbb{E}[X_n(s)] = c(s) \left(n + \Theta \left(K s^{2+\frac{1}{a}} \right) \right)$$

for all n , where K is fixed finite constant. Moreover

$$c(s) \sim D s^{-1-\frac{1}{a}} \quad \text{ha} \quad s \rightarrow \infty,$$

where D is an appropriate constant and a is a nonnegative constant, which we fixed at the point of defining the evolution of the scores.

4. Suppose that the conditions of Model S are satisfied with appropriate restrictions. Then there exists a constant C such that for any fixed s the following holds:

$$\mathbb{P} \{ |X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq s\sqrt{n} \log n \} \leq 2n^{-\log n/C}.$$

Furthermore let $\delta > 0$. Then there exists a function $\varphi(n) = o(1)$ such that with probability 1 we have: there exist only finitely many values of n such that $|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq \varphi(n)\mathbb{E}[X_n(s)]$ for any $s \leq n^{(a-\delta)/(4a+2)}$.

The first statement gives the expected value of the number of the individuals with score s , and the second shows the concentration of the scores around their expected value. The proof of the two statements are in Section 2.2 and Section 2.3. For these proofs we used mathematical induction, the Azuma-Hoeffding inequality and the well-known Borel-Cantelli-lemma.

Finally, it follows from the above two statements that the distribution of scores is power-law:

5. Suppose that the conditions of Model S are satisfied with appropriate restrictions. Then relative frequency of the individuals with score s goes to $c(s)$ with probability 1.

After proving the main theorems, the results were applied to the N -interaction model in Section 2.5, which evolve similarly as the N -star model, described in Chapter 1. The difference between the two models is that the vertices during interactions form a complete N graph instead of an N -star. Using the above results, we have proved that the weight distribution of M -complete graphs (i.e. clique) are scale-free in the N -interaction model, where $2 \leq M < N$:

6. Let $N \geq 3$ be fixed and M be fixed with $2 \leq M \leq N$. Assume that the appropriate conditions are satisfied, then the relative frequency of the M -cliques with weight w goes almost surely to $x_{M,w}$, where

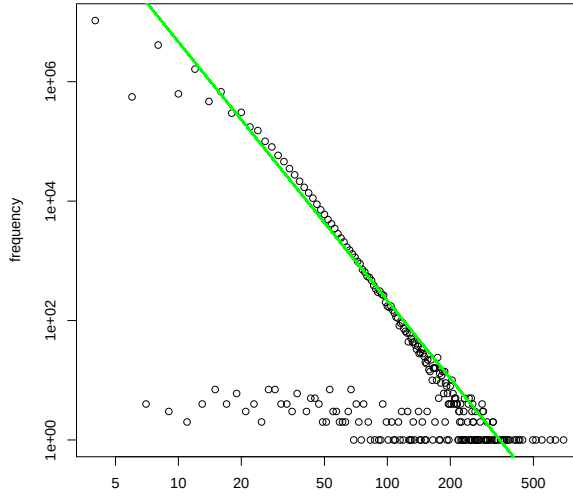
$$x_{M,w} \sim Ew^{-(1+\frac{1}{a})}$$

as $w \rightarrow \infty$ and E is the appropriate constant.

Furthermore, we also applied the results to the N -star model, providing a second proof for the weight distribution of the N -stars.

In Chapter 3, we investigated the generalization of the N -interaction model through simulation results. We presented the findings of [23]. In

case of the generalized model, not only 0 or 1 new vertex can be born at one step, but also $0 \leq k \leq N - 1$ node can be added to the graph via $(N - k)$ old vertices. In the [35] PhD thesis you can find the exact proofs of the scale-free property for degrees, only if the greatest common divisor of the number of possible nodes to be born in one step is 1. If this strict condition is not met, there is currently no mathematical proof of the degree distribution. Therefore, simulation results have been presented to illustrate this phenomenon. The figures clearly show that if the condition is not met, we obtain a different distribution instead of power-law, despite the fact that preferential attachment rule plays a major role in model evolution.



Irodalomjegyzék

- [1] K. AZUMA, Weighted sums of certain dependent random variables, *Tohoku Mathematical Journal*, **19** (1967), 357–367.
- [2] Á. BACKHAUSZ, T. F. MÓRI, A random graph model based on 3-interactions, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, **36** (2012), 41–52.
- [3] Á. BACKHAUSZ, Analysis of random graphs with methods of martingale theory, PhD thesis, *Eötvös Loránd University, Budapest*, 2012.
- [4] Á. BACKHAUSZ, T. F. MÓRI, Weights and degrees in a random graph model based on 3-interactions, *Acta Math. Hungar.*, **143**(1) (2014), 23–43.
- [5] Á. BACKHAUSZ AND T. F. MÓRI, A random model of publication activity, *Discrete Appl. Math.*, **162** (2014), 78–89.
- [6] A. L. BARABÁSI , R. ALBERT, Emergence of scaling in random networks, *Science*, **286** (1999), 509–512.
- [7] A. L. BARABÁSI, Network Science, *Cambridge University Press*, 2016.
- [8] B. BOLLOBÁS, O. RIORDAN, J. SPENCER, G. TUSNÁDY, The degree sequence of a scale-free random graph process, *Random Structures Algorithms*, **18** (2001), 279–290.
- [9] B. BOLLOBÁS, O. M. RIORDAN, Mathematical results on scale-free random graphs, *Handbook of Graphs and Networks; From the Genome to the Internet*, Wiley, (2003), 1–34.
- [10] E. BOREL, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **27**(2) (1909), 247–271.
- [11] S. BOSWORTH, M. E. KABAY, E. WHYNE, Computer Security Handbook, *John Wiley & Sons*, 2014.

- [12] A. D. BROIDO, A. CLAUSET, Scale-free networks are rare, arXiv:1801.03400, 2018.
- [13] P. G. BUCKLEY, D. OSTHUS, Popularity based random graph models leading to a scale-free degree sequence, *Discrete Mathematics*, **282** (2004), 53–63.
- [14] F. P. CANTELLI, Sulla probabilità come limite della frequenza, *Atti Accad. Naz. Lincei*, **26(1)** (1917), 39–45.
- [15] C. COOPER, A. FRIEZE, A general model of web graphs, *Random Structures Algorithms*, **22** (2003), 311–335.
- [16] F. CHUNG, L. LU, Complex Graphs and Networks, *AMS and CBMS*, 2006.
- [17] R. DURRETT, Random graph dynamics, *Cambridge University Press, Cambridge*, 2007.
- [18] P. ERDŐS, A. RÉNYI, On random graphs, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, **6** (1959), 290–297.
- [19] P. ERDŐS, A. RÉNYI, On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **5** (1960), 17–61.
- [20] I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSÁNYI, Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions, *Lithuanian Mathematical Journal*, **55** (2015), 207–221.
- [21] I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSÉNYI, A population evolution model and its applications to random networks, *Statistics and Probability Letters* **143** (2018), 17–27.
- [22] I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSÉNYI, The N-star network evolution model, *Journal of Applied Probability*, **56(2)** (2019), 416–440.
- [23] I. FAZEKAS, A. PERECSÉNYI, B. PORVÁZSNYIK, Numerical analysis of a network evolution model, *IEEE 8th International Conference on Cognitive InfoCommunications (CogInfoCom)*, (2017), 171–174.
- [24] I. FAZEKAS, A. PERECSÉNYI, Scale-free property of the weights in a random graph model, *Annales Mathematicae et Informaticae* **48** (2018), 15–22.

- [25] I. FAZEKAS, B. PORVÁZSNYIK, Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model, *J. Probab. Stat.*, **Article ID 707960** (2013), 12p.
- [26] I. FAZEKAS, B. PORVÁZSNYIK, Scale-free property for degrees and weights in an N -interactions random graph model, *J. Math. Sci.* **214** (2016), 69–89.
- [27] I. FAZEKAS, B. PORVÁZSNYIK, Limit theorems for the weights and the degrees in an N -interactions random graph model, *Open Mathematics* **14(1)** (2016), 414–424.
- [28] W. HOEFFDING, Probability inequalities for sums of bounded random variables, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **58** (1963), 13–30.
- [29] R. VAN DER HOFSTAD, Random Graphs and Complex Networks. *Cambridge University Press*, 2017.
- [30] P. HOLME, B. J. KIM, Growing scale-free networks with tunable clustering, *Phys. Rev. E* **65(2)** (2002), 026107.
- [31] S. JANSON, T. ŁUCZAK, A. RUCINSKI, Random graphs, *Wiley-Interscience, New York*, 2000.
- [32] J. MARCINKIEWICZ, A. ZYGMUND, Sur les fonctions indépendantes, *Fund. Math.* **29** (1937), 60–90.
- [33] T. F. MÓRI, The maximum degree of the Barabási-Albert random tree, *Combinatorics, Probability and Computing*, **14(3)** (2005), 339–348.
- [34] J. NEVEU, Discrete-parameter martingales, *North-Holland, Amsterdam*, 1975.
- [35] B. PORVÁZSNYIK, Asymptotic analysis of graph evolution models, PhD thesis, *University of Debrecen, Debrecen*, 2018.
- [36] A. P. PRUDNIKOV, YU. A. BRYCHKOV, O. I. MARICHEV, Integrals and series, *Gordon & Breach Science Publishers, New York*, 1986.
- [37] L. OSTROUMOVA, A. RYABCHENKO AND E. SAMOSVAT, Generalized preferential attachment: tunable power-law degree distribution and clustering coefficient, *Bonato A., Mitzenmacher M., Pralat P. (eds) Algorithms and Models for the Web Graph. WAW 2013. Lecture Notes in Computer Science, Springer*, **8305** (2013), 185–202.

- [38] T. ZHOU, G. YAN, B. H. WANG, Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution, *Phys. Rev. E* **71(4)** (2005), 046141. *Erratum Phys. Rev.* **72** (2005), 029905.
- [39] G. U. YULE, A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr. J. C. Willis, F. R. S., *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*, **213** (1925), 21–87.

A szerző publikációi

A disszertáció alapjául szolgáló publikációk

Referált folyóiratban megjelent cikkek:

1. I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSENYI, A population evolution model and its applications to random networks, *Statistics and Probability Letters* **143** (2018), 17–27. (IF: 0.615 (2018))
2. I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSENYI, The N-star network evolution model, *Journal of Applied Probability*, **56(2)** (2019), 416–440. (IF: 0.61 (2018))

Konferenciakiadványban megjelent cikkek:

1. I. FAZEKAS, A. PERECSENYI, Evolution of a generalized population model. *The Publications of the MultiScience - XXX. microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference, University of Miskolc*, (2016).
2. I. FAZEKAS, A. PERECSENYI, B. PORVÁZSNYIK, Numerical analysis of a network evolution model, *IEEE 8th International Conference on Cognitive InfoCommunications (CogInfoCom)*, (2017), 171–174.
3. I. FAZEKAS, A. PERECSENYI, Scale-free property of the weights in a random graph model, *Annales Mathematicae et Informaticae* **48** (2018), 15–22.

Egyéb publikációk:

Konferenciakiadványban megjelent cikkek:

1. I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSENYI, Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions, *Lith Math J* **55** (2015), 207–221. (IF: 0.314)

A szerző konferencia előadásai

1. Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions. *19th Young Statisticians Meeting*, Basovizza, Italy, October 17-19, 2014.
2. Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions. *5th International Conference on Mathematics and Informatics*, Targu Mures, Romania, 2 September 2015.
3. Evolution of a generalized population model. *MultiScience – XXX. microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference*, Miskolc, Hungary, 21 April 2016.
4. Scale-free properties of the weights in a random graph model. *The 10th International Conference on Applied Informatics*, Eger, Hungary, 1 February 2017.
5. Numerical analysis of a network evolution model. *IEEE 8th International Conference on Cognitive InfoCommunications: CogInfoCom*. Debrecen, Hungary, 12 September 2017.
6. Simulation results in a random network. *9th International Workshop on Applied Probability*, Budapest, Hungary, 18 June 2018.