

**Debreceni Egyetem**  
**TTK, Matematikai Intézet**

**Algoritmusok diofantikus egyenletek megoldására**

**Témavezető:**

Dr. Gaál István

Egyetemi tanár

**Készítette:**

Aczél Márton

V. matematika-informatika

**Debrecen**

**2007**

# Tartalomjegyzék

„...dolgozni csak pontosan, szépen,  
ahogy a csillag megy az égen,  
ugy érdeemes.”  
(József Attila: Ne légy szeles...)

<b>Bevezetés</b>	3. oldal
<b>1. Az algebrai számelmélet ide vonatkozó fogalmai</b>	5. oldal
<b>2. Eljárás (módszer)</b>	7. oldal
Hatvány egész bázisok negyedfokú számtestekben	8. oldal
<b>3. Saját számítások</b>	12. oldal
A megfelelő testek kiválasztása	12. oldal
Számítások a kikeresett testekben	14. oldal
$\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ testbővítései	14. oldal
$\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ testbővítései	23. oldal
Ellenőrzés	36. oldal
<b>4. Maple-parancsok</b>	38. oldal
<b>Irodalomjegyzék</b>	42. oldal

# Bevezetés

Elmondhatom, hogy kisgyermek korom óta kedvelem a matematikát, és azon belül is mindig a számok világa varázsolt el leginkább. Már óvodás koromban jellemző volt rám, hogy mindent megszámloltam, majd az idő előre haladtával egyre több számolási műveletet végeztem el fejben. Ennek fényében nem meglepő, hogy mindig is a számelmélet állt közel a szívemhez, és az sem, hogy a matematika e területéről választottam szakdolgozatom témáját.

A számelmélet a geometria mellett talán a matematika legősibb ága, ugyanis oszthatósági kérdésekkel és diofantikus egyenletekkel már az ókori görög matematikusok is foglalkoztak. Jómagam klasszikus kétváltozós (lineáris) diofantoszi egyenletekkel először a középiskolai tanulmányaim során találkoztam, majd másodjára az egyetemi éveim alatt hallottam a témáról, természetesen a Számelmélet c. kurzus keretein belül. A tanárszakosok számára kötelezően előírt tantárgy elvégzése után arra indított, hogy felvegyem a választhatóan meghirdetett „Algoritmusok diofantikus egyenletek megoldására” c. tárgyat, melynek végighallgatása ösztönzött szakdolgozatom témájára, nem mellesleg a jelenlegi témavezetőm volt a szeminárium gazdája. A kurzus ötvözte az algebrát és a számelméletet. A tantárgy tematikája a következőképpen épül fel: elsőként az algebrai számelmélet fogalmait rendszereztük (algebrai számtestek, egész bázisok, egységek), majd a lánctörtekkel foglalkoztunk részletesebben. A kurzus hátralévő részében egyenletfajtákról tanultunk, először a Pell-egyenletről, majd a Thue-egyenletek különböző megoldási módszereiről (ineffektív, effektív, konstruktív módszerek). A félév során mindannyiunknak tartani kellett kiselőadást, melynek felkészülése során döntöttem úgy, hogy az adott témából szeretnék szakdolgozatot írni. Az akkor kapott anyag a szakdolgozatomhoz kapott segédanyaghoz hasonlóan angol nyelvű volt.

Munkámat a vezetőtanárom egyik cikkéhez [1] kapcsoltam, melyet Nyul Gáborral közösen írtak, méghozzá az adott másodfokú számtestek összes hatvány egész bázissal és diéder Galois-csoporttal rendelkező, kevert szignatúrájú negyedfokú bővítésének kiszámításáról. A hatvány egész bázisok keresése különböző számtestekben – mondhatni – klasszikus problémája a modern számelméletnek, melyet szerte a világon kutatnak

napjainkban. Tudni kell, hogy – természetesen – minél magasabb fokú egy számtest, annál nehezebb megkeresni a hatvány egész bázisait, hiszen a test fokszámának növekedésével jóval magasabb fokú egyenleteket kell megoldanunk. Az én figyelmem éppen ezért a még viszonylag könnyebben kezelhető negyedfokú számtestekre irányult, melynek teljesen valós, teljesen komplex, illetve félig valós, félig komplex (a továbbiakban: kevert szignatúrájú) esetei közül az utóbbit választottam ki. A felsorolt típusú testek közül mindnek vannak speciális tulajdonságaik, a kevert szignatúrájú negyedfokú számtestek például nem bomlanak fel másodfokú testek szorzatára, viszont a bennük megoldandó harmadfokú Thue-egyenlet mindig első- és másodfokú tényezők szorzatára esik szét, valamint érdekesség, hogy az ilyen negyedfokú testek diszkriminánsa mindig negatív.

Gaál István és Nyul Gábor 2001-ben megjelent cikke [1] a téma elméleti hátterét szolgáltatva számomra, valamint módszert adott az előbb felvázolt probléma megoldására, míg a cikk mellékletében néhány példán illusztrálják az eljárást. Én további másodfokú testekre számoltam ki a hatvány egész bázisok generátorait.

Szakedolgozatom első részében összefoglalom az algebrai számelmélet ide kapcsolódó legfontosabb fogalmait, melyekkel az Olvasó talán nem találkozott egyetemi tanulmányai során, de azok megemlékezése után a dolgozat további része érthetővé válik számára. A második szakaszban elmondom, hogy hogyan is épül fel a módszer, amely a kívánt negyedfokú számtesteket, illetve azok hatvány egész bázisainak generátorait szolgáltatja. A szakdolgozat fő részében pedig ismertetem az általam elvégzett számításokat, melyeket a számítási hibák minimalizálása (sőt, teljes kiküszöbölése) érdekében igyekeztem a lehető leginkább automatizálni – ehhez a Maple nevű matematikai programcsomagot hívtam segítségül. A mű végén ismertetem a legfontosabb Maple-parancsokat, melyek nagyban megkönnyítették a munkámat.

# 1. Az algebrai számelmélet ide vonatkozó fogalmai

**Definíció:** Az  $\alpha \in \mathbb{C}$  számot algebrainak nevezzük  $\mathbb{Q}$  felett, ha  $\exists f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  nem azonosan nulla polinom, hogy  $f(\alpha) = 0$ .

**Definíció:** Az  $\alpha \in \mathbb{C}$  algebrai szám definiáló főpolinomja olyan racionális együtthatós, 1 főegyütthatós, minimális fokszámú irreducibilis polinom, melynek  $\alpha$  gyöke.

**Definíció:** Ha  $L$  a  $K$  test részteste, akkor  $K$ -t az  $L$  test bővítésének mondjuk.

**Definíció:** Legyen  $K$  az  $L$  test bővítése. Ha  $K$  minden eleme algebrai  $L$  felett, akkor  $K$ -t az  $L$  test algebrai bővítésének nevezzük.

**Definíció:** Legyen  $K$  egy test,  $L$   $K$  részteste és  $M \subset K$  adott halmaz.  $K$  összes olyan résztestének metszetét, amely tartalmazza  $M$ -et és  $L$ -et, jelöljük  $L(M)$ -mel. Ekkor  $M$ -et az  $L(M)$  test  $L$  feletti generátorrendszerének nevezzük.

**Definíció:** Ha  $K$ -nak van olyan algebrai eleme az  $L$  test felett, melyre  $K = L(a)$ , akkor  $K$ -t az  $L$  test egyszerű algebrai bővítésének nevezzük.

**Definíció:** A racionális számtest egyszerű algebrai bővítéseit  $\mathbb{C}$ -ben, algebrai számtesteknek nevezzük.

**Definíció:** Az  $\{1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  számn-es  $K$  test egész bázisa, amennyiben

- bázisa  $K$ -nak, azaz  $\forall \gamma \in K$  esetén

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \omega_2 + \dots + \gamma_n \omega_n \quad (\gamma_i \in \mathbb{Q});$$

- minden  $K$ -beli egész  $\gamma$ -ra

$$\gamma = z_1 + z_2 \omega_2 + \dots + z_n \omega_n \quad (z_i \in \mathbb{Q}).$$

Az  $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$  alakú egész bázist hatvány egész bázisnak nevezzük.

**Definíció:** Ha  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ , akkor a definiáló főpolinom  $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$  gyökeit  $\alpha$  abszolút konjugáltjainak nevezzük. Ha  $\beta \in K$  olyan algebrai szám, melyre

$$\beta = \gamma_0 + \gamma_1 \alpha + \dots + \gamma_{n-1} \alpha^{n-1} \quad (\gamma \in \mathbb{Q}),$$

akkor  $\beta$  K-ra vonatkozó relatív konjugáltjai:

$$\beta^{(j)} = \gamma_0 + \gamma_1 \alpha^{(j)} + \dots + \gamma_{n-1} (\alpha^{n-1})^{(j)} \quad (j=1, \dots, n).$$

**Definíció:** Legyen  $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$  egész bázisa K-nak. Ekkor a K sámtest diszkriminánsa:

$$D_K = \begin{vmatrix} 1 & \omega_2^{(1)} & \dots & \omega_n^{(1)} \\ 1 & \omega_2^{(2)} & \dots & \omega_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_2^{(n)} & \dots & \omega_n^{(n)} \end{vmatrix}^2.$$

Az  $\alpha$  algebrai szám diszkriminánsát hasonlóképpen számíthatjuk ki:

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^{(1)} & \dots & (\alpha^{(1)})^{n-1} \\ 1 & \alpha^{(2)} & \dots & (\alpha^{(2)})^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{(n)} & \dots & (\alpha^{(n)})^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)})^2.$$

**Megjegyzés:**  $D_K$  értéke független az egész bázis választásától.

**Definíció:** Egy  $\alpha$  algebrai szám indexe:  $I(\alpha) = (O_K^+ : \mathbb{Z}[\alpha]^+)$ , ahol  $O_K$  a K test egészeinek a gyűrűje.

**Megjegyzés:** Egy  $\alpha$  algebrai szám indexe a következőképpen számítható ki:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{D_K}} \prod_{i < j} |\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}|.$$

## 2. Eljárás (módszer)

A probléma alapja tehát egy adott  $M$  valós másodfokú számtest. Létezik egy gyors algoritmus, amely előállítja az összes olyan  $K$  negyedfokú számtestet, mely kevert szignatúrájú (félig valós, félig komplex),  $M$ -et résztestként tartalmazza és van hatvány egész bázisa. Az eljárás előállítja továbbá a hatvány egész bázisok generátorait  $K$ -ban.

Az algebrai számelmélet – mondhatni – klasszikus problémája eldönteni egy  $n$ -edfokú  $N$  számtestről, hogy abban létezik-e hatvány egész bázis, és ha igen, akkor hogyan adhatók meg a hatvány egész bázisok lehetséges generátorai. Az olyan számtestet egyébként, amelyben létezik hatvány egész bázis, monogénnek nevezzük. A sokféle számtest közül tehát én dr. Gaál István és Nyul Gábor cikkére [1] építve azokat választottam ki, melyek negyedfokúak, és a Galois-csoportjuk diédercsoport.

**1. Lemma:** Legyen  $K$  egy diéder Galois-csoporttal rendelkező negyedfokú számtest, mely résztestként tartalmazza az  $M$  másodfokú számtestet. Ha  $K$ -nak létezik hatvány egész bázisa, akkor  $D_K \pm 4D_M^3$  négyzetszám, ahol  $D_K$  a  $K$  test, míg  $D_M$  az  $M$  test diszkriminánsa.

**Megjegyzés:** A diéder Galois-csoporttal rendelkező kevert szignatúrájú negyedfokú számtestek diszkriminánsa negatív, míg a tartalmazott másodfokú számtest valós.

**2. Lemma:** Legyen  $K$  egy kevert szignatúrájú, diéder Galois-csoporttal rendelkező negyedfokú számtest, mely résztestként tartalmazza az  $M$  másodfokú számtestet. Ha  $K$ -nak van hatvány egész bázisa, akkor  $|D_K| \leq 4D_M^3$ .

**Megjegyzés:** A lemma miatt csupán véges sok olyan kevert szignatúrájú, diéder Galois-csoporttal rendelkező negyedfokú számtest van, mely tartalmaz egy adott valós másodfokú számtestet és van hatvány egész bázisa.

Éppen ezért, egy adott  $M$  valós másodfokú számtesthez meg tudjuk keresni az összes az előbbi feltételeknek megfelelő  $K$  negyedfokú számtestet, melyre teljesül, hogy  $|D_K| \leq 4D_M^3$ , majd azok közül kell kiválasztani azokat, melyek rendelkeznek hatvány egész bázissal (ebben az első lemma lesz segítségünkre).

### Hatvány egész bázisok negyedfokú számtestekben

Több hatékony módszer is létezik egy adott negyedfokú  $K$  számtest összes hatvány egész bázisának előállítására. Ilyen többek között a [2], [3] cikkekben található eljárás is.

Tegyük fel, hogy  $K$  generáló eleme  $\mathbb{Q}$  felett  $\xi$ , vagyis  $K = \mathbb{Q}(\xi)$ . Ekkor legyen  $f(t) = t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4$  a  $\xi$  egész együtthatós definiáló polinomja. Legyen továbbá  $n = I(\xi) = (\mathbb{Z}_K^+ : \mathbb{Z}[\xi]^+)$  a  $\xi$  algebrai elem indexe. Ekkor minden  $K$ -beli  $\alpha$  egész elemet a következőképpen írhatunk fel:

$$(1) \quad \alpha = \frac{a + x\xi + y\xi^2 + z\xi^3}{d},$$

ahol  $a, x, y, z$  egész együtthatók, míg  $d \in \mathbb{Z}$  a közös osztó, amely általában nagyon kicsi szám. Tudni kell még, hogy  $n \mid d^3$ .

**3. Lemma:** Az előbbi feltételeknek megfelelő, illetve az előbbi alakban felírt  $\alpha$  hatvány egész bázist generál  $K$ -ban akkor és csak akkor, ha az alábbi harmadfokú egyenletnek létezik egy  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  megoldása:

$$(2) \quad F(u, v) = u^3 - a_2 u^2 v + (a_1 a_3 - 4a_4) uv^2 + (4a_2 a_4 - a_3^2 - a_1^2 a_4) v^3 = \pm \frac{d^6}{n}.$$

A (2) egyenlet  $(u, v)$  párját az (1) egyenletbeli  $(x, y, z)$ -vel helyettesítve a következő kvadratikus formák adódnak:

$$(3) \quad Q_1(x, y, z) = x^2 - a_1 xy + a_2 y^2 + (a_1^2 - 2a_2) xz + (a_3 - a_1 a_2) yz + (-a_1 a_3 + a_2^2 + a_4) z^2 = u;$$

$$Q_2(x, y, z) = y^2 - xz - a_1 yz + a_2 z^2 = v.$$

Egy korábbi megjegyzés szerint, azaz hogy  $n \mid d^3$ , a (2) egyenlet jobboldala egész szám. Emiatt, ha az  $F(u, v)$  formula reducibilis, akkor (2) felbontása triviális, egyébként pedig a (2) egyenlet egy harmadfokú Thue-egyenlet lesz.

A (2) egyenlet minden  $(u, v)$  megoldásához meg kell konstruálnunk a (3) egyenlet  $(x, y, z)$  megoldását.

Tekintsük a következő egyenletet:

$$Q_0(X, Y, Z) = uQ_1(X, Y, Z) - vQ_2(X, Y, Z) = 0,$$

ahol egy nem triviális megoldást jelöljünk  $(x_Q, y_Q, z_Q)$ -val. Tegyük fel, hogy a megoldásvektor komponensei közül  $z_Q \neq 0$  (a többi esetben is hasonlóképpen kell eljárunk), ekkor léteznek a  $p, q, r \in \mathbb{Q}$  paraméterek, melyek segítségével  $x$ -et,  $y$ -t és  $z$ -t kifejezhetjük:

$$(4) \quad x = rx_Q + p, \quad y = ry_Q + q, \quad z = rz_Q.$$

Miután a (3) egyenlet bármely  $(x, y, z)$  megoldása kielégíti a  $Q_0(X, Y, Z) = 0$  egyenlőséget,  $r(c_1p + c_2q) = c_3p^2 + c_4pq + c_5q^2$  alakú kifejezést kapunk, melynek  $c_1, \dots, c_5$  konstansai egyszerűen kiszámíthatóak. Ezután a (4) egyenletrendszer szorozzuk meg  $(c_1p + c_2q)$ -val, és használjuk a fenti relációt, hogy elimináljuk  $r$ -et. Továbbá, ezeket az egyenleteket – hogy egész együtthatókat kapjunk – szorozzuk meg  $p$  és  $q$  közös nevezőjének négyzetével, majd osszuk el az egyenleteket a  $p$  és  $q$  legnagyobb közös osztójával. Ekkor az egyenletek következő alakját kapjuk:

$$(5) \quad \begin{cases} k \cdot x = f_x(p, q) = c_{11}p^2 + c_{12}pq + c_{13}q^2, \\ k \cdot y = f_y(p, q) = c_{21}p^2 + c_{22}pq + c_{23}q^2, \\ k \cdot z = f_z(p, q) = c_{31}p^2 + c_{32}pq + c_{33}q^2. \end{cases}$$

melynek magja a  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$  mátrix, és ahol  $k > 0$ ,  $c_{ij} \in \mathbb{Z}$  és  $p, q \in \mathbb{Z}$  relatív

prímek. [3] szerint  $k$ -nak osztania kell a  $\frac{\det(c_{ij})}{\text{LNKO}(c_{ij})^3}$  hányadost, amely legtöbbször egy

nagyon kicsi egész, így természetesen  $k$ -ra is nagyon kevés lehetséges érték adódik. Minden szóba jöhető  $k$ -ra az (5) egyenletrendszerbeli eredményeket be kell helyettesítenünk a (3) egyenletrendszerbe, és így a következő egyenleteket kapjuk:

$$(6) \quad F_1(p, q) = Q_1[f_x(p, q), f_y(p, q), f_z(p, q)] = k^2 u,$$

$$(7) \quad F_2(p, q) = Q_2[f_x(p, q), f_y(p, q), f_z(p, q)] = k^2 v.$$

[3] szerint e két egyenlet egyike biztosan Thue-egyenlet az eredeti  $K$  test felett. Az egyenletet megoldva, megkapjuk a  $p$  és  $q$  paramétereket, majd az (5) egyenletrendszer segítségével a hozzájuk tartozó  $(x, y, z)$  megoldást.

Így általában, hogy megadjuk egy  $K$  test hatvány egész bázisainak összes generátorát, meg kell oldanunk egy harmadfokú, és néhány hozzá kapcsolódó negyedfokú Thue-egyenletet.

**Megjegyzés:** A mi esetünkben, tehát a diéder Galois-csoporttal rendelkező negyedfokú  $K$  számtest esetén, a (2) egyenlet  $F(u, v)$  formulája mindig egy elsőfokú, illetve egy másodfokú polinom szorzatára bomlik, továbbá a felbontás triviális.

Foglaljuk össze még egyszer, hogy mi is történik az algoritmus végrehajtása során! Elsőként kiválasztunk egy valós másodfokú számtestet, melyhez meg akarjuk keresni az összes olyan kevert szignatúrájú, diéder Galois-csoporttal rendelkező negyedfokú számtestet, mely rendelkezik hatvány egész bázissal, és tartalmazza az eredeti számtestet. Ezen felül megadjuk a hatvány egész bázisok generátorait is. Az algoritmusnak három fő lépése van:

- 1.) Megkeressük az összes kevert szignatúrájú negyedfokú számtestet, mely kielégíti az 1. és 2. lemmában szereplő egyenlőtlenségeket, vagyis, amelyekre

$$D_M^2 \leq |D_K| \leq 4D_M^3, \text{ illetve } D_M^2 | D_K .$$

Ekkor viszonylag kevés szóba jöhető  $K$  negyedfokú test marad.

- 2.) A rostán fennmaradó  $K$  testek közül kiválasztjuk azokat, amelyeknek a Galois-csoportja diédercsoport, és csak azokat tartjuk meg.
- 3.) Amely testeknek van hatvány egész bázisuk, azon bázisok generátorait előállítjuk, míg a többi test esetén feltüntetjük, hogy nincs hatvány egész bázis.

### 3. Saját számítások

Gaál István és Nyul Gábor az [1] cikkük mellékletében a  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  másodfokú testekre végezték el a szükséges számításokat, én pedig – nagyságrendi megfontolásokból – a  $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ , illetve a  $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$  testekkel foglalkoztam, melyek diszkriminánsa viszonylag kezelhető.

#### A megfelelő testek kiválasztása

Első lépésként kiszámoltam, hogy milyen határok között kell keresgélnem az egyes testeket:

$$\underline{M = \mathbb{Q}(\sqrt{13})}$$

$$\text{Ekkor } D_M = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ 1 & \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{vmatrix}^2 = \left( \frac{1-\sqrt{13}}{2} - \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)^2 = \underline{\underline{13}}.$$

A korábbi lemmák szerint

$$D_M^2 \leq |D_K| \leq 4D_M^3,$$

vagyis jelen esetben

$$13^2 \leq |D_K| \leq 4 \cdot 13^3,$$

ami kiszámolva adja, hogy

$$169 \leq |D_K| \leq 8788.$$

Azokat a  $K$  negyedfokú testeket kellett kiválogatni tehát, melyek Galois-csoportja a  $D_4$  diédercsoport, diszkriminánsa a megadott határok között van, emellett igaz rájuk, hogy  $D_M^2 | D_K$ , vagyis  $169 | D_K$ .

A [4] internetes oldal segítségével a következő, a feltételeknek megfelelő testeket találtam:

<u>Sorszám</u>	<u>Diszkrimináns</u>	<u><math>D_M^2</math> szorzója</u>	<u>Generátor</u>
1.	-507	3	$x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$
2.	-2704	16	$x^4 - 3x^2 - 1$
3.	-6591	39	$x^4 - x^3 + 2x^2 - 9x + 3$
4.	-7267	43	$x^4 - 2x^3 + x - 3$
5.	-8112	48	$x^4 - x^2 - 3$
6.	-8619	53	$x^4 - x^3 - 4x^2 - 6x - 3$
7.	-8619	53	$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 3$

$$\underline{M = \mathbb{Q}(\sqrt{17})}$$

$$\text{Ekkor } D_M = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ 1 & \frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{vmatrix}^2 = \left( \frac{1-\sqrt{17}}{2} - \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right)^2 = \underline{\underline{17}}.$$

A korábbi lemmák szerint ismét igaz, hogy

$$D_M^2 \leq |D_K| \leq 4D_M^3,$$

vagyis ebben az esetben

$$17^2 \leq |D_K| \leq 4 \cdot 17^3,$$

ami kiszámolva adja, hogy

$$289 \leq |D_K| \leq 19652.$$

Azokat a  $K$  negyedfokú testeket kellett kiválogatni tehát, melyek Galois-csoportja a  $D_4$  diédercsoport, diszkriminánsa a megadott határok között van, emellett igaz rájuk, hogy  $D_M^2 | D_K$ , vagyis  $289 | D_K$ .

A [4] internetes oldal segítségével következő tesztek feleltek meg a keresési feltételeknek:

<u>Sorszám</u>	<u>Diszkrimináns</u>	<u><math>D_M^2</math> szorzója</u>	<u>Generátor</u>
1.	-1156	4	$x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$
2.	-2312	8	$x^4 - 3x^2 - 2$
3.	-5491	19	$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$
4.	-9248	32	$x^4 + 3x^2 - 2$
5.	-10404	36	$x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 2$
6.	-12427	43	$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x - 2$
7.	-13583	47	$x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x - 1$
8.	-15028	52	$x^4 - 4x^2 - 13$
9.	-15028	52	$x^4 - x^3 - 8x^2 + 19x - 13$
10.	-17051	59	$x^4 - 2x^3 + x - 4$
11.	-18496	64	$x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 92x - 94$
12.	-19363	67	$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 4$
13.	-19652	68	$x^4 - 17$

### Számítások a kikeresett testekben

#### $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ testbővítései

Elsőként lefuttattam a Maple-lel a  $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$  nekünk megfelelő bővítéséhez talált hét testnél az egész bázis parancsot. Ezzel akartam megnézni, hogy melyek azok a tesztek, melyeknél egyből hatvány egész bázist ad ki a Maple, és melyek azok, amelyeknél nem – bár ezeknél sincs kizárva, hogy mégis találunk hatvány egész bázist.

Az integral\_basis (egész bázis) parancsot kiadva a következő egész bázisokat szolgáltatotta a Maple:

Sorszám	Generátor	Egész bázis
1.	$x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$	$[1, x, x^2, x^3]$
2.	$x^4 - 3x^2 - 1$	$[1, x, x^2, x^3]$
3.	$x^4 - x^3 + 2x^2 - 9x + 3$	$[1, x, x^2, \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3]$
4.	$x^4 - 2x^3 + x - 3$	$[1, x, x^2, x^3]$
5.	$x^4 - x^2 - 3$	$[1, x, x^2, x^3]$
6.	$x^4 - x^3 - 4x^2 - 6x - 3$	$[1, x, x^2, x^3]$
7.	$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 3$	$[1, x, x^2, x^3]$

Amint az látható, a hét test közül hat esetében biztosan van hatvány egész bázis, azoknál meg kell keresnünk a generáló  $(x, y, z)$  hármasokat, míg annál az egy testnél, ahol a Maple nem hatvány egész bázist dobott ki, meg kell vizsgálnunk, hogy valóban nincs-e hatvány egész bázis.

$$\boxed{1.) x^4 - x^3 - x^2 - x + 1}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -507$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 + u^2v - 3uv^2 - 6v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u - 2v)(u^2 + 3uv + 3v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + xy - y^2 + 3xz - 2yz + z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + yz - z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Legyen  $x_Q = 1$ ;  $y_Q = 0$ ;  $z_Q = 0$ . Ez minden test esetén megfelelő választás lesz, így később külön nem fogom feltüntetni.

Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} x = r \\ y = p \\ z = q \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} Q_0 = p^2 - rq + pq - q^2 = 0 \\ rq = p^2 + pq - q^2 \end{array},$$

valamint

$$\left. \begin{array}{l} xq = rq = p^2 + pq - q^2 \\ yq = pq \\ zq = q^2 \end{array} \right\} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

Megj: Az  $x, y, z$  paraméterezése szintén mindig ehhez hasonló lesz.

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = (p^2 + pq - q^2)^2 + (p^2 + pq - q^2)pq - p^2q^2 + 3(p^2 + pq - q^2)q^2 - 2pq^3 + q^4 = \pm 1$$

$$Q_1 = p^4 + 3p^3q + 2p^2q^2 - 2pq^3 - q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(1, -1); (-1, 0); (-1, 1); (1, 0)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \{(0, -1); (0, 1)\}$$

A  $(p, q)$  megoldaspárokhoz tartozó  $(x, y, z)$  hármasok a következők:

<u>(p, q)</u>	<u>(x, y, z)</u>
(1, -1)	(-1, -1, 1)
(-1, 0)	(1, 0, 0)
(-1, 1)	(-1, -1, 1)
(1, 0)	(1, 0, 0)
(0, -1)	(-1, 0, 1)
(0, 1)	(-1, 0, 1)

A test hatvány egész bázisainak generátorai tehát:

$$(1, 0, 0); (-1, -1, 1); (-1, 0, 1).$$

$$\boxed{2.) x^4 - 3x^2 - 1}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -2704$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 + 3u^2v + 4uv^2 + 12v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u + 3v)(u^2 + 4v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 - 3y^2 + 6xz + 8z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz - 3z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq - 3q^2 = 0$$

$$rq = p^2 - 3q^2$$

valamint

$$\left. \begin{array}{l} xq = rq = p^2 - 3q^2 \\ yq = pq \\ zq = q^2 \end{array} \right\} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 - 3p^2q^2 - q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (1, 0)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \{(0, -1); (0, 1)\}$$

A test hatvány egész bázisainak generátorai a paraméterek behelyettesítése után:

$(1,0,0); (-3,0,1)$ .

$$3.) x^4 - x^3 + 2x^2 - 9x + 3$$

• Diszkrimináns:  $D_K = -6591$

• Közös osztó:

Mivel a Maple nem dobott ki hatvány egész bázist, a következő egész bázisból kell megállapítanunk a közös osztót:

$$\left[ 1, x, x^2, \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \right].$$

Ebből látszik, hogy a közös osztó jelen esetben 4, vagyis  $d=4$ .

• Index:

Most nem jelenthetjük ki, hogy a test indexe 1, ugyanis annyit tudunk, hogy

$n|d^3$ , vagyis jelen esetben  $n|64$ . Emiatt az indexet képlettel kell

kiszámolnunk:

$$\underline{n} = I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{|D_K|}} \prod_{i < j} |\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}| = \frac{1}{\sqrt{6591}} \prod_{i < j} |x_i - x_j| = \underline{4},$$

ahol  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) a generáló polinom gyökei, vagyis  $\alpha$  konjugáltjai.

$$F(u, v) = u^3 - 2u^2v - 3uv^2 - 60v^3 = \pm 1024$$

$$F(u, v) = (u - 5v)(u^2 + 3uv + 12v^2) = \pm 1024$$

Ekkor összesen 22 egyenletrendszert kellett megoldani a Maple segítségével az egész számok halmazán, hogy azok közül valamelyik szolgáltatssa nekünk a megfelelő  $(u, v)$  megoldaspárt:

$$\begin{cases} u - 5v = 1 \\ u^2 + 3uv + 12v^2 = 1024 \end{cases};$$

$$\begin{cases} u - 5v = 2 \\ u^2 + 3uv + 12v^2 = 512 \end{cases};$$

⋮

$$\begin{cases} u - 5v = 1024 \\ u^2 + 3uv + 12v^2 = 1 \end{cases}$$

majd ugyanez negatív előjellel is:

$$\begin{cases} u - 5v = -1 \\ u^2 + 3uv + 12v^2 = 1024 \end{cases};$$

$$\begin{cases} u - 5v = -2 \\ u^2 + 3uv + 12v^2 = 512 \end{cases};$$

⋮

$$\begin{cases} u - 5v = -1024 \\ u^2 + 3uv + 12v^2 = 1 \end{cases}$$

A Maple egyik esetben sem talált  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  megoldást, így e testnek nincs hatvány egész bázisa.

$$\boxed{4.) x^4 - 2x^3 + x - 3}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -7267$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 + 10u^2v + 11v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u + v)(u^2 - uv + 11v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + 2xy + 4xz + yz - z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + 2yz = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq + 2pq = 0$$

$$rq = p^2 + 2pq$$

valamint

$$\left. \begin{array}{l} xq = rq = p^2 + 2pq \\ yq = pq \\ zq = q^2 \end{array} \right\} C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 6p^3q + 12p^2q^2 + 9pq^3 - q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (1, 0)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \{(0, -1); (0, 1); (-3, 1); (3, 1)\}$$

A test hatvány egész bázisainak generátorai a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0); (-1, 0, 1); (3, -3, 1); (15, 3, 1).$$

$$\boxed{5.) x^4 - x^2 - 3}$$

- Diszkrimináns:  $D_k = -8112$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 + u^2v + 12uv^2 + 12v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u + v)(u^2 + 12v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 - y^2 + 2xz - 2z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz - z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor:

$$Q_0 = p^2 - rq - q^2 = 0$$

$$rq = p^2 - q^2$$

valamint

$$\left. \begin{array}{l} xq = rq = p^2 - q^2 \\ yq = pq \\ zq = q^2 \end{array} \right\} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 2p^2q^2 - 3q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (1, 0)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

A test hatvány egész bázisainak generátora a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0).$$

$$\boxed{6.) x^4 - x^3 - 4x^2 - 6x - 3}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -8619$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 + 4u^2v + 18uv^2 + 15v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u + v)(u^2 + 3uv + 15v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + xy - 4y^2 + 9xz - 10yz + 7z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + yz - 4z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$\begin{array}{l} Q_0 = p^2 - rq + pq - 4q^2 = 0 \\ rq = p^2 + pq - 4q^2 \end{array},$$

valamint

$$\left. \begin{array}{l} xq = rq = p^2 + pq - 4q^2 \\ yq = pq \\ zq = q^2 \end{array} \right\} C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 3p^3q - p^2q^2 - 13pq^3 - 13q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-2, 1); (-1, 0); (2, -1); (1, 0)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

A test hatvány egész bázisainak generátorai a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0); (-2, -2, 1).$$

$$\boxed{7.) x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 3}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -8619$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 - 2u^2v + 14uv^2 - 13v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u - v)(u^2 - uv + 13v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + 2xy + 2y^2 + 3yz - z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + 2yz + 2z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq + 2pq + 2q^2 = 0$$

$$rq = p^2 + 2pq + 2q^2,$$

valamint

$$\left. \begin{array}{l} xq = rq = p^2 + 2pq + 2q^2 \\ yq = pq \\ zq = q^2 \end{array} \right\} C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 6p^3q + 14p^2q^2 + 15pq^3 + 3q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (1, 0)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

A test hatvány egész bázisainak generátora a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0).$$

### $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ testbővítései

Az `integral_basis` (egész bázis) parancsot kiadva a következő egész bázisokat szolgáltatotta a Maple:

Sorszám	Generátor	Egész bázis
1.	$x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$	$[1, x, x^2, x^3]$
2.	$x^4 - 3x^2 - 2$	$[1, x, x^2, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3]$
3.	$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$	$[1, x, x^2, x^3]$
4.	$x^4 + 3x^2 - 2$	$[1, x, x^2, x^3]$
5.	$x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 2$	$[1, x, x^2, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3]$
6.	$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x - 2$	$[1, x, x^2, x^3]$
7.	$x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x - 1$	$[1, x, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^3]$
8.	$x^4 - 4x^2 - 13$	$[1, x, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3]$

9.	$x^4 - x^3 - 8x^2 + 19x - 13$	$[1, x, x^2, x^3]$
10.	$x^4 - 2x^3 + x - 4$	$[1, x, x^2, x^3]$
11.	$x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 92x - 94$	$[1, x, x^2, x^3]$
12.	$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 4$	$[1, x, x^2, x^3]$
13.	$x^4 - 17$	$\left[1, x, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3\right]$

$$1.) x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -1156$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 + 2u^2v - 3uv^2 - 10v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u - 2v)(u^2 + 4uv + 5v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + xy - 2y^2 + 5xz - 3yz + 4z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + yz - 2z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq + pq - 2q^2 = 0$$

$$rq = p^2 + pq - 2q^2$$

valamint

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 3p^3q + p^2q^2 - 4pq^3 - 2q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (1, -1); (1, 0); (-1, 1)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, -1); (-1, 2); (1, -2); (1, 1)\}$$

A test hatvány egész bázisainak generátorai a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0); (-2, -1, 1); (0, 1, 1); (-9, -2, 4).$$

$$\boxed{2.) x^4 - 3x^2 - 2}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -2312$
- Közös osztó:  $d=2$
- Index:  $n=2$

$$F(u, v) = u^3 + 3u^2v + 8uv^2 + 24v^3 = \pm 32$$

$$F(u, v) = (u + 3v)(u^2 + 8v^2) = \pm 32$$

Ekkor összesen 12 egyenletrendszert kellett megoldani a Maple segítségével az egész számok halmazán, hogy azok közül valamelyik szolgáltatssa nekünk a megfelelő  $(u, v)$  megoldáspárt.

A Maple egyik esetben sem talált  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  megoldást, így e testnek nincs hatvány egész bázisa.

$$\boxed{3.) x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -5491$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 + 2u^2v + 2uv^2 + 15v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u + 3v)(u^2 - uv + 5v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + 2xy - 2y^2 + 8xz - yz + 8z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + 2yz - 2z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq + 2pq - 2q^2 = 0$$

$$rq = p^2 + 2pq - 2q^2$$

valamint

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 6p^3q + 10p^2q^2 + 3pq^3 - 4q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (1, 0)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

A test hatvány egész bázisainak generátora a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0).$$

$$\boxed{4.) x^4 + 3x^2 - 2}$$

- Diszkrimináns:  $D_k = -9248$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 - 3u^2v + 8uv^2 - 24v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u - 3v)(u^2 + 8v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + 3y^2 - 6xz + 7z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + 3z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq + 3q^2 = 0$$

$$rq = p^2 + 3q^2$$

valamint

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 3p^2q^2 - 2q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (1, 0); (3, 4); (-3, -4); (-3, 4); (3, -4)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

A test hatvány egész bázisainak generátorai a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0); (57, 12, 16); (57, -12, 16).$$

$$\boxed{5.) x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 2}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -10404$
- Közös osztó:  $d=2$
- Index:  $n=2$

$$F(u, v) = u^3 + u^2v + uv^2 - 39v^3 = \pm 32$$

$$F(u, v) = (u - 3v)(u^2 + 4uv + 13v^2) = \pm 32$$

Ekkor összesen 12 egyenletrendszert kellett megoldani a Maple segítségével az egész számok halmazán, hogy azok közül valamelyik szolgáltatssa nekünk a megfelelő  $(u, v)$  megoldaspárt.

A Maple egyik esetben sem talált  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  megoldást, így e testnek nincs hatvány egész bázisa.

$$\boxed{6.) x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x - 2}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -12427$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 - 4u^2v + 14uv^2 - 33v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u - 3v)(u^2 - uv + 11v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + 2xy + 4y^2 - 4xz + 5yz + 8z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + 2yz + 4z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq + 2pq + 4q^2 = 0$$

$$rq = p^2 + 2pq + 4q^2$$

valamint

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 6p^3q + 16p^2q^2 + 21pq^3 + 8q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (1, 0)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

A test hatvány egész bázisainak generátora a paraméterek behelyettesítése után:

(1,0,0).

$$\boxed{7.) x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x - 1}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -13583$
- Közös osztó:  $d=2$
- Index:  $n=4$

$$F(u, v) = u^3 - 9u^2v + 20uv^2 - 96v^3 = \pm 16$$

$$F(u, v) = (u - 8v)(u^2 - uv + 12v^2) = \pm 16$$

Ekkor összesen 10 egyenletrendszert kellett megoldani a Maple segítségével az egész számok halmazán, hogy azok közül valamelyik szolgáltatssa nekünk a megfelelő  $(u, v)$  megoldáspárt.

A Maple egyik esetben sem talált  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  megoldást, így e testnek nincs hatvány egész bázisa.

$$\boxed{8.) x^4 - 4x^2 - 13}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -15028$
- Közös osztó:  $d=4$
- Index:  $n=8$

$$F(u, v) = u^3 + 4u^2v + 52uv^2 + 208v^3 = \pm 512$$

$$F(u, v) = (u + 4v)(u^2 + 52v^2) = \pm 512$$

Ekkor összesen 20 egyenletrendszert kellett megoldani a Maple segítségével az egész számok halmazán, hogy azok közül valamelyik szolgáltatssa nekünk a megfelelő  $(u, v)$  megoldáspárt.

A Maple két esetben talált megfelelő  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  megoldást:

$$\underline{\left\{ \begin{array}{l} u + 4v = 8 \\ u^2 + 52v^2 = 64 \end{array} \right.};$$

$$\begin{cases} u + 4v = -8 \\ u^2 + 52v^2 = 64 \end{cases}$$

A megoldások:  $u = \pm 8$ ;  $v = 0$ .

$$Q_1 = x^2 - 4y^2 + 8xz + 3z^2 = \pm 8$$

$$Q_2 = y^2 - xz - 4z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq - 4q^2 = 0$$

$$rq = p^2 - 4q^2$$

valamint

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 - 4p^2q^2 - 13q^4 = \pm 8$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

Nincs megoldás, így nem létezik a testnek hatvány egész bázisa.

$$\boxed{9.) x^4 - x^3 - 8x^2 + 19x - 13}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -15028$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 + 8u^2v + 33uv^2 + 68v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u + 4v)(u^2 + 4uv + 17v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + xy - 8y^2 + 17xz + 11yz + 70z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + yz - 8z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq + pq - 8q^2 = 0$$

$$rq = p^2 + pq - 8q^2$$

valamint

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 3p^3q - 5p^2q^2 + 4pq^3 - 2q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, -1); (-1, 0); (1, 0); (1, 1)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

A test hatvány egész bázisainak generátorai a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0); (-6, 1, 1).$$

$$\boxed{10.) x^4 - 2x^3 + x - 4}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -17051$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 + 14uv^2 + 15v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u + v)(u^2 - uv + 15v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + 2xy + 4xz + yz - 2z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + 2yz = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq + 2pq = 0$$

$$rq = p^2 + 2pq$$

valamint

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 6p^3q + 12p^2q^2 + 9pq^3 - 2q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (1, 0)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

A test hatvány egész bázisainak generátora a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0).$$

$$\boxed{11.) x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 92x - 94}$$

- Diszkrimináns:  $D_k = -18496$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 + 23u^2v + 192uv^2 + 560v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u + 7v)(u^2 + 16uv + 80v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 - 2xy - 23y^2 + 50xz - 46yz + 619z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz - 2yz - 23z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq - 2pq - 23q^2 = 0$$

$$rq = p^2 - 2pq - 23q^2$$

valamint

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -23 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 - 6p^3q - 11p^2q^2 - 8pq^3 - 2q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (-1, 2); (1, 0); (1, -2)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

A test hatvány egész bázisainak generátorai a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0); (-87, -2, 4).$$

$$\boxed{12.) x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 4}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -19363$
- Index:  $n=1$
- Közös osztó:  $d=1$

$$F(u, v) = u^3 - 2u^2v + 18uv^2 - 17v^3 = \pm 1$$

$$F(u, v) = (u - v)(u^2 - uv + 17v^2) = \pm 1$$

$$u = \pm 1; v = 0$$

$$Q_1 = x^2 + 2xy + 2y^2 + 3yz - 2z^2 = \pm 1$$

$$Q_2 = y^2 - xz + 2yz + 2z^2 = 0$$

$$Q_0 = \pm Q_2 = 0$$

Ekkor

$$Q_0 = p^2 - rq + 2pq + 2q^2 = 0$$

$$rq = p^2 + 2pq + 2q^2$$

valamint

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 + 6p^3q + 14p^2q^2 + 15pq^3 + 2q^4 = \pm 1$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \{(-1, 0); (1, 0)\}$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

A test hatvány egész bázisainak generátora a paraméterek behelyettesítése után:

$$(1, 0, 0).$$

$$\boxed{13.) x^4 - 4x^2 - 13}$$

- Diszkrimináns:  $D_K = -19652$
- Közös osztó:  $d=4$
- Index:  $n=8$

$$F(u, v) = u^3 + 68uv^2 = \pm 512$$

$$F(u, v) = u(u^2 + 68v^2) = \pm 512$$

Ekkor összesen 20 egyenletrendszert kellett megoldani a Maple segítségével az egész számok halmazán, hogy azok közül valamelyik szolgáltatssa nekünk a megfelelő  $(u, v)$  megoldáspárt.

A Maple két esetben talált megfelelő  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  megoldást:

$$\begin{cases} u = 8 \\ u^2 + 68v^2 = 64 \end{cases};$$

$$\begin{cases} u = -8 \\ u^2 + 68v^2 = 64 \end{cases}.$$

A megoldások:  $u = \pm 8$ ;  $v = 0$ .

$$Q_1 = x^2 - 17z^2 = \pm 8$$

$$Q_2 = y^2 - xz = 0$$

$$Q_0 = \pm 8Q_2 = 0$$

Ekkor

$$\begin{aligned} Q_0 &= p^2 - rq = 0 \\ rq &= p^2 \end{aligned},$$

valamint

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1, \text{ emiatt } k = \pm 1.$$

A kvadratikus formák egyenletei a következőképpen alakulnak tehát:

$$Q_1 = p^4 - 17q^4 = \pm 8$$

Ekkor a negyedfokú Thue-egyenlet megoldásai:

$$Q_1 = 1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

$$Q_1 = -1 \Rightarrow (p, q) = \emptyset$$

Nincs megoldás, így nem létezik a testnek hatvány egész bázisa.

## Ellenőrzés

A kapott eredményeket valamilyen módon ellenőriznünk kell, hiszen a módszer során megengedő lépéseket tettünk, melyekkel olyan megoldások is bejöhetnek a képbe, amelyek nem szolgáltatnak hatvány egész bázist. Az ellenőrzésnél azt vizsgáljuk, hogy vajon az  $(x, y, z)$  megoldások által előálló  $\alpha$  szám indexe 1-e, ugyanis olyan testben, melynek van hatvány egész bázisa, minden szám indexe 1.

Az ellenőrzés során kiszűrtem néhány  $(x, y, z)$  számhármast, most nézzük a végleges táblázatot, melyben összefoglalom, hogy melyek azok, amelyek valóban hatvány egész bázist generálnak a testekben:

$$\underline{\mathbb{Q}(\sqrt{13})}$$

<u>Sorszám</u>	<u>Test generátora</u>	<u>Index</u>	<u>Közös osztó</u>	<u>Hatvány egész bázisok</u>
1.	$x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$	1	1	$(1, 0, 0); (-1, -1, 1); (-1, 0, 1)$
2.	$x^4 - 3x^2 - 1$	1	1	$(1, 0, 0); (-3, 0, 1)$
3.	$x^4 - x^3 + 2x^2 - 9x + 3$	4	4	nincs
4.	$x^4 - 2x^3 + x - 3$	1	1	$(1, 0, 0); (3, -3, 1)$
5.	$x^4 - x^2 - 3$	1	1	$(1, 0, 0)$
6.	$x^4 - x^3 - 4x^2 - 6x - 3$	1	1	$(1, 0, 0); (-2, -2, 1)$
7.	$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 3$	1	1	$(1, 0, 0)$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{17})$$

Sorszám	Test generátora	Index	Közös osztó	Hatvány egész bázisok
1.	$x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$	1	1	$(1,0,0); (-2,-1,1);$ $(0,1,1); (-9,-2,4)$
2.	$x^4 - 3x^2 - 2$	2	2	nincs
3.	$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$	1	1	$(1,0,0)$
4.	$x^4 + 3x^2 - 2$	1	1	$(1,0,0); (57,12,16);$ $(57,-12,16)$
5.	$x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 2$	2	2	nincs
6.	$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x - 2$	1	1	$(1,0,0)$
7.	$x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x - 1$	2	4	nincs
8.	$x^4 - 4x^2 - 13$	4	8	nincs
9.	$x^4 - x^3 - 8x^2 + 19x - 13$	1	1	$(1,0,0); (-6,1,1)$
10.	$x^4 - 2x^3 + x - 4$	1	1	$(1,0,0)$
11.	$x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 92x - 94$	1	1	$(1,0,0)$
12.	$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 4$	1	1	$(1,0,0)$
13.	$x^4 - 17$	4	8	nincs

## 4. Maple-parancsok

Ebben a rövid szakaszban leírom a legfontosabb parancsokat, amelyeket be kellett írnom a Maple nevű matematikai programcsomagba ahhoz, hogy végül megkapjam a hatvány egész bázisok generátorát. Két testet mutatok meg példaként, egy olyat, melynél hatvány egész bázist adott ki, és egy olyat, amelynél nem.

1.)  $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$

Elsőként, amint megnyitottuk a Maple-t, a `with(numtheory)` paranccsal érhetjük el speciálisnak számító számelméleti algoritmusokat a programban:

```
>with(numtheory);
```

```
[B, F, GIGcd, J, L, M, bernoulli, bigomega, cfrac, cfracpol, cyclotomic, divisors, euler, factorEQ, factorset, fermat, ifactor, ifactors, imagunit, index, integral_basis, invcfrac, invphi, isolve, isprime, issqrfree, ithprime, jacobi, kronecker, lambda, legendre, mcombine, mersenne, minkowski, mipolys, mlog, mobius, mroot, msqrt, nearestp, nextprime, nthconver, nthdenom, nthnumer, nthpow, order, pdexpand, phi, pprimroot, prevprime, primroot, quadres, rootsunity, safeprime, sigma, sq2factor, sum2sqr, tau, thue]
```

A következő lépésben azt szeretnénk megtudni, hogy vajon a testnek milyen egész bázisát adja ki a Maple:

```
>f := x^4-x^3-x^2-x+1;
```

$$f := x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$$

```
>integral_basis(f);
```

$$[1, x, x^2, x^3]$$

Látjuk, hogy a Maple rögtön egy hatvány egész bázist dobott ki nekünk, ezután tudjuk, hogy az index és a közös osztó egyaránt 1.

Most az  $F(u, v)$ -t kell meghatároznunk. Mivel a képletet sokszor használjuk fel, ezért előbb általános alakban visszük be, aztán az együtthatók helyettesítésével számolunk az egyes testeknél:

```
>fuv := u^3-a2*u^2*v+(a1*a3-4*a4)*u*v^2+(4*a2*a4-a3^2-a1^2*a4)*v^3;
```

$$fuv := u^3 - a_2 u^2 v + (a_1 a_3 - 4a_4) uv^2 + (4a_2 a_4 - a_3^2 - a_1^2 a_4) v^3$$

Most helyettesítjük be az aktuális test polinomjának együtthatóit:

>f1 := subs(a1 = -1, a2 = -1, a3 = -1, a4 = 1, fuv);

$$f1 := u^3 + u^2 v - 3uv^2 - 6v^3$$

Most pedig szorzattá alakítjuk a harmadfokú kifejezést:

>factor(f1);

$$(-2v + u)(3v^2 + 3uv + u^2)$$

Megoldjuk az egyenletrendszert u-ra és v-re (tudjuk, hogy  $F(u, v) = \pm 1$ ):

>solve({u-2\*v = 1, u^2+3\*u\*v+v^2 = 1});

$$\{v = 0, u = 1\}, \left\{v = \frac{-7}{11}, u = \frac{-3}{11}\right\}$$

Ugyanezt természetesen el kell végezni  $(1, -1)$ -re,  $(-1, 1)$ -re és  $(-1, -1)$ -re, és akkor azt kapjuk, hogy a harmadfokú, kétismeretlenes egyenlet megoldása:  $u = \pm 1$ ;  $v = 0$ .

Ezek után a kvadratikus formákat kell meghatároznunk, szintén előbb általános képlettel:

>q1 := x^2-a1\*x\*y+a2\*y^2+(a1^2-2\*a2)\*x\*z+(a3-a1\*a2)\*y\*z+(-a1\*a3+a2^2+a4)\*z^2;

$$q1 := x^2 - a_1 xy + a_2 y^2 + (a_1^2 - 2a_2) xz + (a_3 - a_1 a_2) yz + (-a_1 a_3 + a_2^2 + a_4) z^2 = u$$

>f2 := subs(a1 = -1, a2 = -1, a3 = -1, a4 = 1, q1);

$$f2 := x^2 + xy - y^2 + 3xz - 2yz + z^2$$

A q2-t „szabad kézzel”, vagyis fejben is kiszámíthatjuk, hiszen ott eléggé egyszerű a behelyettesítés.

Ezek után kiszámítjuk, hogy a p-vel és a q-val miként paraméterezzük az x-et, y-t és z-t, majd a paramétereket helyettesítjük q1, aktuálisan pedig f2 képletébe:

>f2 := subs(a1 = -1, a2 = -1, a3 = -1, a4 = 1, x = p^2+p\*q-q^2, y = p\*q, z = q^2, q1);

$$f2 := (p^2 + pq - q^2)^2 + (p^2 + pq - q^2) pq - p^2 q^2 + 3(p^2 + pq - q^2) q^2 - 2pq^3 + q^4$$

Egyszerűsítünk, vagyis elvégezzük a szükséges műveleteket és összesítjük az együtthatókat (ezt is egy paranccsal):

>g := simplify(f1);

$$g := p^4 + 3p^3 q + 2p^2 q^2 - 2pq^3 - q^4$$

Már csak egy lépés maradt, meg kell oldanunk a negyedfokú Thue-egyenletet, ez az egyetlen lépés, amely miatt be kellett ütnünk a with(numtheory) parancsot, a többi ugyanis alapvető Maple-parancs.

```
>thue(g = 1,[p, q]);
      [p = 1, q = -1], [p = -1, q = 0], [p = -1, q = 1], [p = 1, q = 0]
> thue(g = -1,[p, q]);
      [p = 0, q = -1], [p = 0, q = 1]
```

Láthatjuk, hogy a Maple szolgáltatta nekünk az egyenletek megoldáspárjait. Ebből visszszámolhatjuk az x, y és z értékeket.

2.)  $x^4 - x^3 + 2x^2 - 9x + 3$

```
>f := x^4-x^3+2*x^2-9*x+3;
      f := x4 - x3 + 2x2 - 9x + 3
> integral_basis(f);
```

$$\left[ 1, x, x^2, \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \right]$$

Látjuk, hogy a közös osztó 4, viszont az indexet ki kell számolnunk:

```
>g := fsolve(f,x,complex);
      g := -.6513878189-1.969383037*I, -.6513878189+1.969383037*I, .3586271064,
      1.944148531
```

Megkaptuk a polinom gyökeket, melyeket egy négyelemű vektorban tárol a Maple, és melynek elemeire a g[i]-vel tudunk hivatkozni.

Kiszámítjuk az indexre vonatkozó képlet produktumos részét:

```
>i := abs(g[1]-g[2])*abs(g[1]-g[3])*abs(g[1]-g[4])*abs(g[2]-g[3])*abs(g[2]-g[4])*abs(g[3]-
g[4]);
      i := 324.7398958
```

Most pedig az indexet úgy, hogy tudjuk a diszkrimináns abszolút értékét (6591):

```
>index := i/evalf(sqrt(6591));
      index := 3.999999999
```

Láthatjuk tehát, hogy a testindex értéke 4.

Most az előzőhöz hasonlóan kiszámítjuk F(u, v)-t.

A következő egyenlet adódik:

$$F(u, v) = u^3 - 2u^2v - 3uv^2 - 60v^3 = \pm 1024$$

$$F(u, v) = (u - 5v)(u^2 + 3uv + 12v^2) = \pm 1024$$

Megnézzük, hogy a baloldalon a második zárójel értéke lehet-e negatív:

>solve({u^2+3\*u\*v+12\*v^2 = 0});

$$\left\{ u = \left( -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{39} \right) v, v = v \right\}, \left\{ u = \left( -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{39} \right) v, v = v \right\}$$

Láthatjuk, hogy csupán komplex megoldása adódik az egyenletrendszernek, tehát így 44 helyett csupán 22 egyenletrendszert kell lefuttatnunk.

>solve({u-5\*v = 1, u^2+3\*u\*v+12\*v^2 = 1024});

$$\{u = 5*\text{RootOf}(52*_Z^2+13*_Z-1023)+1, v = \text{RootOf}(52*_Z^2+13*_Z-1023)\}$$

⋮

>solve({u-5\*v = 1024, u^2+3\*u\*v+12\*v^2 = 1});

$$\{v = 1/2*\text{RootOf}(13*_Z^2+6656*_Z+1048575), u = 5/2*\text{RootOf}(13*_Z^2+6656*_Z+1048575)+1024\}$$

>solve({u-5\*v = -1, u^2+3\*u\*v+12\*v^2 = 1024});

$$\{v = \text{RootOf}(52*_Z^2-13*_Z-1023), u = 5*\text{RootOf}(52*_Z^2-13*_Z-1023)-1\}$$

⋮

>solve({u-5\*v = -1024, u^2+3\*u\*v+12\*v^2 = 1});

$$\{u = 5/2*\text{RootOf}(13*_Z^2-6656*_Z+1048575)-1024, v = 1/2*\text{RootOf}(13*_Z^2-6656*_Z+1048575)\}$$

Sehol sem adódtak egész megoldások, vagyis az egyenletrendszernek nincs megoldása  $\mathbb{Z}^2$ -ben, ezután pedig nem kell folytatnunk a test vizsgálatát.

# Irodalomjegyzék

- [1] István Gaál-Gábor Nyul: Computing all monogeneous mixed dihedral quartic extensions of a quadratic field. *J. de Théorie des Nombres de Bordeaux* **13** (2001), 137-142.
- [2] I. Gaál, A. Pethő, M. Pohst: On a resolution of index form equations in dihedral number fields. *J. Experimental Math.* **3** (1994), 245-254.
- [3] I. Gaál, A. Pethő, M. Pohst: Simultaneous representation of integers by a pair of ternary quadratic forms – with an application to index form equations in quartic number fields. *J. Number Theory* **57** (1996), 90-104.
- [4] <http://qaos.math.tu-berlin.de/qaos/qaos.scm> (a berlini egyetem honlapja)
- [5] I. Gaál: *Diophantine Equations and Power Integral Bases*, Birkhauser Boston, 2002.
- [6] Freud Róbert-Gyarmati Edit: *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik szellemileg és erkölcsileg támogattak abban, hogy idáig eljuthattam, nem utolsó sorban, hogy szakdolgozatom elkészíthettem. Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Gaál Istvánnak, akihez mindig bizalommal fordulhattam kérdéseimmel, valamint az összes matematikatanáromnak, akik igyekeztek megkedveltetni velem ezt a tárgyat. Végül, de nem utolsó sorban köszönet illeti a szeretteimet is, akik nyugodt légkört teremtettek számomra a munkához.