



Angol, belga, magyar, és spanyol matematikatanítási hagyományok összehasonlítása

doktori (PhD) értekezés

Török Judit

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2007



Angol, belga, magyar, és spanyol matematikatanítási hagyományok összehasonlítása

doktori (PhD) értekezés

Török Judit

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2007

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	1
1. A SOKSZÖGEK TANÍTÁSÁNAK ELMÉLETI HÁTTERE, ELEMZÉSI SZEMPONTOK	3
1.1. Az elemzés didaktikai háttere	3
1.2. A METE projekt eszközei	13
2. ESETTANULMÁNY – ANGLIA	22
2.1. Az órák rövid leírása	23
2.2. Kvantitatív elemzés	26
2.3. Kvalitatív elemzés	34
3. ESETTANULMÁNY – BELGIUM	39
3.1. Az órák rövid leírása	39
3.2. Kvantitatív elemzés	45
3.3. Kvalitatív elemzés	53
4. ESETTANULMÁNY – MAGYARORSZÁG	57
4.1. Az órák rövid leírása	57
4.2. Kvantitatív elemzés	61
4.3. Kvalitatív elemzés	69
5. ESETTANULMÁNY – SPANYOLORSZÁG	74
5.1. Az órák rövid leírása	75
5.2. Kvantitatív elemzés	79
5.3. Kvalitatív elemzés	85
6. ÖSSZEHASONLÍTÁS	90
6.1. Kvantitatív elemzés	90
6.2. Kvalitatív elemzés	96
6.3. Záró gondolatok	104
7. ÖSSZEFOGLALÁS	107
8. SUMMARY	116
Felhasznált irodalom	124

BEVEZETÉS

Közel húsz éve láttam először néhány matematikaórát külföldön. Ez Angliában történt egy magánút során. Kíváncsi voltam, hogyan működik az oktatás egy olyan országban, ahol nagyon különbözik az iskolarendszer a miénktől, nincs központi tanterv, nincs osztályzás és ritkán van házi feladat. Annak ellenére, hogy felkészültem arra, hogy mást fogok látni, mint amit itthon megszoktam, számos meglepetés ért, és kénytelen voltam szembesülni avval, hogy sok minden, amit addig természetesnek vettem, máshol nem az.

Azóta alkalmam volt a következő nemzetközi projektben részt venni:

- TEMPUS JEP 1991-94. (angol és német partnerekkel)
- TEMPUS JEP 1995-98. (francia, német és olasz partnerekkel)
- Brit – Magyar Kormányközi Együttműködési Program 1997-99.
- Erasmus 2001. és 2002. (finn partnerrel)
- Socrates – METE (Mathematics Education Traditions in Europe)

2002-04. (angol, belga, finn és spanyol partnerekkel).

Órákat látogattam Angliában, Finnországban, Németországban és Olaszországban; bepillantást nyertem különböző országok tanárképzési rendszerébe. A tapasztalatok gyarapodásával a meglepetések száma és ereje csökkent, felfedeztem, hogy az olyan kifejezések, mint pl. problémamegoldás, érdekes – unalmas, könnyű – nehéz, nem mindenkinek ugyanazt jelentik. Megtanultam nyitottabban viszonyulni a látottakhoz, megpróbáltam a tapasztaltakat nem a Magyarországon megszokottakhoz viszonyítva, hanem saját társadalmi – kulturális környezetükön belül

értelmezni. Eközben a külföldi példák kontraszthatásának köszönhetően a magyarországi matematikatanítás sajátosságai is jobban kidomborodtak.

Tapasztalataimat rendkívül hasznosnak érzem a tanárképzésben folyó oktatói munkám szempontjából is, a különböző szemléleti és megközelítési módok bemutatása, a hasznosítható ötletek átvétele tágíthatja a tanárszakos hallgatók látókörét, gazdagíthatja eszköztárukat.

Dolgozatomban négy különböző országban videóra vett – geometriai témájú – órasorozatot elemzek és hasonlítok össze. A felvételek a METE (Mathematics Education Traditions of Europe) projekt keretében készültek, melynek célja öt európai ország matematikatanítási módszereinek összehasonlítása volt. Elemzésemhez felhasználok a METE által kidolgozott eszközöket (ld. 1. fejezet 1.2.).

1. A SOKSZÖGEK TANÍTÁSÁNAK ELMÉLETI HÁTTERE, ELEMZÉSI SZEMPONTOK

1.1. Az elemzés didaktikai háttere

1.1.1. A geometriatanítás általános céljai

A geometriatanítás céljáról, tartalmáról és módszereiről - az általános iskolától az egyetemig – sok vita folyik. A következőképpen foglal össze néhány lehetséges célt egy ICMI tanulmány (Villani et al. 1996):

- a környező világ leírása, megértése és értelmezése
- példa mutatása axiomatikus elméletre
- gazdag és változatos feladatkészlet biztosítása a tanulók számára
- megtanítani a diákokat sejtések megfogalmazására, bizonyítások készítésére, példák és ellenpéldák kitalálására
- eszközt teremteni más matematikai területeknek
- gazdagítani a tanulók matematikáról alkotott képét

Úgy gondolom, hogy az axiomatikus elméletre mutatandó példa kivételével a fenti szempontok mindegyikének megvalósítására számos lehetőség nyílik a sokszögek tanítása során az általam vizsgált (7. ill. 8. osztályos) korosztály esetén. A négy ország videóra vett óráinak kvalitatív elemzése során meg fogom vizsgálni, hogy ezek a célok mennyire valósultak meg.

1.1.2. A sokszögek tanításának fogalmi vonatkozásai

Van Hiele szintek

Pierre és Diana Van Hiele szerint a geometriai gondolkodás fejlődése során egymásra épülő, de elkülöníthető fogalmi szintek figyelhetők meg, melyek a gyerekek korábbi tapasztalataitól és így a tanításuk során a fogalomépítést szolgáló módszerektől jobban függenek, mint az életkoruktól (Fuy et al. 1984). Eredetileg a Van Hiele házaspár a következő öt szintet különböztette meg:

- | | |
|----------|---|
| 0. szint | Vizuális – látvány utáni megítélés |
| 1. szint | Elemzés – pl. alakzatfajták osztályba sorolása az alkotórészek tulajdonságainak figyelembevételével |
| 2. szint | Informális dedukció – pl. a korábban felfedezett tulajdonságok kapcsolatrendszerének átlátása |
| 3. szint | Dedukció – tételek bizonyítása |
| 4. szint | Matematikai szigor – pl. tételek alkotása különböző axiómarendszerekben |

Bár a Van Hiele szintekkel kapcsolatos kutatások során több javaslat született a szintek módosítására – részben kiegészítésére részben bizonyosak összevonására (Battista – Clemens 1992) – elemzésemben az egyik szempont az lesz, hogy a megfigyelt órák melyik eredeti Van Hiele-féle szinten mozognak.

Definíciók és tulajdonságok

Definíciók

A sokszögek témaköre számos alkalmat kínál a definíció fogalmának bemutatására és érzékeltetésére. Ezt lehetővé teszi, ha a gyerekek képesek az 1. vagy 2. Van Hiele szinten dolgozni, de ebben az életkorban igen körültekintően kell megválasztani, hogy mit definiálunk pontosan és mit nem, mert számos alapvető fogalmat igen nehéz definiálni.

A „sokszög” fogalmát például már ismerik a gyerekek, az egyszerű sokszögeket meg tudják különböztetni a nem sokszögektől, de a „sokszög” precíz definíciója még túl nehéz számukra. A speciális háromszög- és négyszögfajtákkal éppen ellenkező a helyzet. Ha ismertnek vesszük a sokszög fogalmát, akkor könnyen definiálhatók ezek a speciális sokszögfajták, és tulajdonságaik vizsgálata során lehetőség nyílik, hogy megértsék a különbséget egy alakzat definíciója és egy már definiált alakzatról szóló egyéb igaz állítás között.

A témakör számos lehetőséget nyújt logikai kapcsolatok tisztázására ha...akkor típusú állítások vizsgálata során és példákat mutathatunk olyan igaz állításokra, melyek megfordítása nem igaz.

Osztályozás

A sokszögek osztályozása során problémát jelent, hogy a gyerekek hajlamosak a speciális sokszögekre mint elkülönülő típusokra gondolni. Sokuk számára nehéz elfogadni például, hogy a négyzet egy speciális téglalap, vagy speciális rombusz stb. Ennek oka részben a gyerekek geometriai szemléletének kognitív fejlődési szintje lehet, részben viszont

azokon a módszereken múlik, melyeket a tanár használ a speciális négyszögfajták bevezetésére.

“... a gyerekeket “mintapéldány” (vizuális prototípus) bemutatásán keresztül tanítják a geometriai alakzatok felismerésére” (Battista-Clemens, 1992).

A mintapéldányokon keresztül történő megközelítés az alsóbb osztályokban teljesen természetesnek tűnik a legegyszerűbb négyszögfajtákkal – mint a négyzet és a téglalap – történő ismerkedés során. A korai – 0. vagy 1. Van Hiele szinten ugyanis ez felel meg a gyerekek gondolkodásának. Kay kutatásai (Kay, 1992) azonban azt mutatják, hogy a többi négyszögfajta tanítását érdemes később kezdeni, bizonyos tulajdonságok alapján definiált osztályokként. A négyzet és a téglalap olyan alapvető alakzat, amely nem hagyható ki az alsóbb osztályok tantervéből, de a többi speciális négyszögfajta – mint a rombusz, paralelogramma – neve talán nem olyan fontos. A gyerekek természetesen találkoznak és dolgoznak ezekkel az alakzatokkal, és közben a nevük is említésre kerülhet. Rendszeres tanulmányozásuk azonban későbbre való. A Van Hiele pár kognitív elmélete szerint „ az egyik szinten implicit módon megértett fogalmak explicit módon megértett fogalmakká válnak a következő szinten”. „Az alapszinten is a tulajdonságaik határozzák meg az alakzatokat, de aki ezen a szinten gondolkodik, nincs tudatában ezeknek a tulajdonságoknak.” (Fuy et al. 1984)

Wenn-diagrammok használata szemléletesebbé teheti a négyszögfajták kapcsolatait egymással.

Szimmetriák

A szimmetriák igen fontos szerepet játszanak a geometria tanításában. Mivel a valódi világban megfigyelhető, alapvető jelenségről van szó, a gyerekek

számos (mind vizuális mind nem vizuális) tapasztalattal rendelkeznek a szimmetriákkal kapcsolatban, így ezek igen hatékonyan használhatók a geometria és különösen a sokszögek tanítása során.

Ha a tanulók megértik a speciális sokszögek szimmetriatulajdonságait, akkor az osztályozásuk természetesen adódik, ráadásul az oldalakkal, szögekkel és átlókkal kapcsolatos tulajdonságaik könnyen levezethetők a szimmetriáikból, így matematikai szempontból tiszta és precíz érveléshez nyújtanak alapot.

A speciális négyszögek tanítása során a nevük mellett számos tulajdonság szóba kerül: egyenlő oldalak és szögek, párhuzamos illetve merőleges oldalak, merőleges vagy egymást felező átlók stb. – nehéz megjegyezni, hogy melyik névhez milyen tulajdonságcsoporthoz tartozik. Ha azonban valaki arra emlékszik, hogy az egyes négyszögfajták milyen szimmetriákkal rendelkeznek, akkor a többi tulajdonság már következik ebből.

Bizonyítások

Miért bizonyítsunk? Mivel annak, hogy bizonyítsunk valamit, fontos feltétele, hogy valakit (akár saját magunkat) meg akarjunk győzni róla, a gyerekek bizonyítási készségének fejlesztése csak olyan osztálytermi légkörben lehetséges, ahol bátorítjuk őket, hogy szabadon mondják el gondolataikat.

Másik kulcselem a bizonyításokkal kapcsolatban a matematikai igazság megállapítása. „...a matematikai fogalmak és ismeretek hálózatának felépítése során alapvetően fontos a folyamat, melynek során a tanulók saját maguk számára megalapozzák a matematikai igazságot”. Ahhoz, hogy képesek legyenek bizonyításokat megérteni és konstruálni, elengedhetetlen,

hogy a tanulóknak már „meglegyen az igény és a szándék, amely motiválja őket és lehetővé teszi számukra matematikai igazságok megalapozását” (Battista-Clemens, 1992).

Piaget, Van Hiele és más kutatók is egyetértenek abban, hogy a gyerekek bizonyítási készségének fejlődése során különböző szintek figyelhetők meg. Piaget szerint a szintek elsősorban az életkortól függenek. 7 és 11/12 éves kor között (konkrét műveletek szakasza) kezdik indokolni eredményeiket, deduktív gondolatmeneteket csak később képesek (formális műveletek szakasza). Van Hiele szerint a bizonyítási készségek szintjei jobban kapcsolódnak a matematikai gondolkodás szintjeihez, mint az életkorhoz.

A 7-12 éves életkor mindkettőjük szerint igen fontos a bizonyítási készségek kialakításában, ugyanakkor szigorúan formális bizonyításokhoz túl korai. Tágabb értelemben használva a bizonyítás szót - nem csak formális bizonyítást, hanem indoklást, érvelést értve rajta - a bizonyítások tanításának két fontos eleme a következő:

- A gyerekek kíváncsiságának felkeltése olyan kérdésekkel, mint Igaz ez? Következik valami másból? Következik ebből valami? Eleinte a tanár teszi fel ezeket a kérdéseket, a bizonyítások iránti igény kialakításának első lépése, hogy a gyerekeket érdekelje, hogy mi az igazság.

- A második elem néhány olyan alapvető állítás leszögezése, melyet a gyerekek elfogadnak és igaznak tartanak, és amelyekre a későbbiekben támaszkodhatnak.

Ezek után az egyszerű következtetések természetesen adódnak, és a tanulók lassan megszokhatják, hogy nem csak kísérletezés, hanem deduktív következtetés is elvezethet az igazság kiderítéséhez

Az ábrák fogalmi vonatkozásai

Ábrák és rajzok használata alapvetően fontos segédeszközei a geometria tanításának. Segítenek abban, hogy a tanulók logikailag összetettebb feladatokat értsenek és oldjanak meg, mint a matematika más területein. Más területeken gyengén teljesítő, de jó vizuális képességekkel rendelkező tanulók is sikeresek lehetnek a geometriaórákon. Mindazonáltal az ábrák használata téves fogalmak kialakulásához is vezethet.

Ha például egy háromszög egyenlőszárúnak látszik, a gyerekek hajlamosak egyenlőszárúnak tekinteni akkor is, ha ez csak véletlen. Így ahelyett, hogy a logikus gondolkodást segítené, a rajz könnyen egy hamis gondolatmenet forrásává válhat.

Van Hiele szerint az 1. – leíró/elemző - szinten levő tanulók „nem a kép, hanem a kapcsolatok rendszere alapján ítélik meg az alakzatot. Ha egy ábra rajza pontatlan is (vagy torzul a számítógépen) az ilyen tanulók gondolkodása nem megy tévútra, ha biztosítjuk őket, hogy a rajzoló szándéka az volt, hogy az oldalak egyenlők legyenek” (Battista - Clemens, 1992).

Amikor geometriai indoklásra kerül a sor, a gyerekek hosszú időn át az ábrákra támaszkodnak. Ez rendben is van, amíg az ábra segédeszközt jelent és nem szolgál az érvelés alapjául. Az érvelésnek a logikai kapcsolatokon kell alapulnia.

Alsina és társai (Alsina et al. 1987) szerint „a geometriai ismeretek megértésének és közlismódjának két típusa különböztethető meg: az egyik megfelel a geometriai intuíciónak, vizuális természetű és közvetlen (kreatív és szubjektív), a másik a logikához kapcsolódik, verbális természetű és reflektív (elemző és objektív)”.

A geometria tanításának egyik célja e kétféle megértés összekapcsolása. Így a vizuális képek az intuíció és a kreativitás fontos forrásai maradnak, míg az indoklások a logikai elemzésen alapulnak. A 4. Van Hiele szint elérése jelenti az indoklások teljes elszakadását a vizualitástól.

1.1.3. Módszertani eszközök

Fogalmak és készségek elsajátítása

A módszerek megválasztásakor az első és talán legfontosabb kérdés, hogy a tanítási folyamat során mi a fő cél, mire helyezzük a legnagyobb hangsúlyt.

Vajon

- olyan részletekre, mint definíciók, tulajdonságok, elnevezések, jelölések...

- a geometriai gondolkodás fejlesztésére
- a gondolkodás fejlesztésére
- a gyakorlati készségek fejlesztésére
- fogalomalkotásra
- problémamegoldásra
- gyakorlásra ...?

A fő hangsúly nagymértékben meghatározza a módszereket, míg ugyanaz a módszer – az órák céljától függően – különböző szerepet játszhat a különböző órákon.

Struktúra

A matematikai tartalom strukturálása különösen fontos a geometria tanítása során. A fogalomépítés folyamatában jelentős szerepet játszik az új ismeretek bevezetésének rendszere is és a problémamegoldásra vagy gyakorlásra szánt feladatok megválasztása is. Sokat segíthet a geometriai fogalmak megértésében, ha olyan tanulási környezetet teremtünk, amely gazdag nem csak a témakörön belüli, hanem a geometria különböző területei illetve a geometria és más témakörök közötti kapcsolatokban.

Következtetési módok

A matematikatanítás során a tanár az igazság kiderítésének többféle módja közül választhat.

- Az első mód a **demonstráció**, a tanár tekintélyén alapszik. Ilyenkor a tanár bemutat vagy elmond valamit, a gyerekektől elvárják, hogy figyeljenek és jegyezzék meg.

Ez egy fontos és természetes módja a tanulásnak, ismereteink nagy részét így szerezzük. Nem elegendő azonban, ha a gondolkodási készséget akarjuk fejleszteni. Pólya György írja, hogy „Eredményes lesz a tanulás, ha a tanuló maga találja ki az elsajátítandó anyag akkora hányadát, amekkorát az adott körülmények között egyáltalán lehet”. (Pólya, 1962)

- A második az **induktív mód**: kísérletezés, sejtések gyártása, példák és ellenpéldák keresése.

Amellett, hogy a tanulók aktívabb közreműködésével jár, ennél a módszernél jelentős szerepet játszanak a kérdések. Kiváló módja a gondolkodás fejlesztésének, de csak ha a gyerekeket érdeklik a felmerülő kérdések. Az első módszer esetén a tanár közli a matematikai tartalmat, a gyerekek meghallgatják. A második esetben a tanár kérdéseket tesz fel, a gyerekek kísérletezés és megbeszélések során jutnak el a válaszhoz.

- A harmadik mód, amikor a tanulók **dedukció** útján kapják meg a választ.

Eszközök használata az órákon

A geometria tanítása során elkerülhetetlen bizonyos eszközök használata. Ha mást nem, körzőt és vonalzót mindenhol használnak.

Kartonpapírból kivágott alakzatok, testmodellek, geometriai építőjátékok, szöges tábla vagy más, akár hétköznapi eszközök használata segítheti az anyag megértését, motiválhatja a gyerekeket. Szerepük sok szempontból hasonló az ábrákéhoz, kapcsolatot teremtenek a valóság és az absztrakt fogalmak között. Előnyeik mellett azonban ha nem megfelelően alkalmazzák őket, az ábrákhoz hasonlóan téves fogalmak kialakulásához vezethetnek.

Világszerte egyre elterjedtebb a számítógépek használata az oktatásban. Jól alkalmazhatók szemléltetésre és tanulói kísérletekhez. Az olyan oktatóprogramok, mint például a Cabri vagy a LOGO gazdag terepet nyújtanak a tapasztalatszerzésre, összefüggések felfedezésére, sejtések kialakítására, de csak akkor, ha a tanulók már gyakorlottak a megfelelő szoftver használatában. Ha nem így van, akkor a számítógép elvonja a figyelmet a matematikai tartalomról és a kezelésének elsajátítása külön feladattá válik. A számítógép semmiképp nem pótolhatja teljesen a

manipulatív eszközökkel, játékokkal, a hétköznapi élettel való kapcsolatok felderítésével szerezhető sokoldalú valódi tapasztalatokat, melyek igen fontosak a geometria tanításában.

1.2. A METE (Mathematics Education Traditions of Europe) projekt eszközei

Dolgozatomban a METE projekt keretében videóra vett órák egy részét (a Finnországban felvett órák kivételével a 7-8. osztályokban rögzített geometriaórákat) elemzem, felhasználva a projekt során közösen kidolgozott eszközöket.

1.2.1. A METE projekt

A METE az Európai Unió támogatásával létrejött kétéves (2003-2004) project, melynek célja öt európai ország matematikatanítási hagyományainak összehasonlítása, matematikatanítási módszereinek vizsgálata volt. A kutatásban résztvevő országok: Anglia, Belgium, Finnország, Magyarország és Spanyolország. A résztvevő kutatók: Paul Andrews, Gillian Hatch, Judy Sayers (Anglia), Eric De Corte, Fien Depaepe, Peter Op't Eynde, Lieven Verschaffel (Belgium), George Malaty, Tuomas Sorvali (Finnország), Fried Katalin, Pálfalvi Józsefné, Szeredi Éva, Török Judit (Magyarország), Nuria Climent, José Carillo (Spanyolország).

A Finn háttéranyagok (óraleírások, kvantitatív adatok) – technikai okokból – nem készültek el, így dolgozatomban csak a másik négy országban készült felvételeket elemzem.

A projekt céljáról, elméleti háttéréről, kutatási módszereiről (részletesebben ld. Andrews et al 2004, Andrews 2005, Török 2006) most csak annyit írok, amennyiben hozzájárultak elemzési szempontjaimhoz.

A projekt során a 10-14 éves korosztály négy tantervi témájában készítettünk minden résztvevő országban 4-5 tanórából álló órasorozatról videofelvételeket:

- százalékszámítás 5. vagy 6. osztályban
- sokszögek 5. vagy 6. osztályban
- sokszögek 7. vagy 8. osztályban
- lineáris egyenletek 7. vagy 8. osztályban.

A felvételek elkészítéséhez minden országban igyekeztünk olyan tanárokat kiválasztani, melyek – a szakmai közvélemény (szakfelügyelők, iskolaigazgatók, tanárképzési szakemberek) szerint – az illető ország „legjobb gyakorlatát” képviselik, ezen belül úgynevezett elérhetőségi mintavételt alkalmaztunk.

Minden órasorozatból két órát angol nyelven feliratoztunk.

Közös óralátogatások illetve videóra vett órák és órarészletek megvitatása során kidolgoztunk az órák kvantitatív és kvalitatív elemzésére alkalmas eszközöket.

1.2.2. Eszközök – kódlap (CS)

A kvantitatív elemzést szolgáló adatok gyűjtéséhez egy kódlapot (CS: coding scheeme) használtunk, amely a hosszas egyeztetés során kialakult megfigyelési szempontjainkat tartalmazta három fő kategóriába sorolva: matematikai fókusz, matematikai kontextus, módszertani eszközök. Az

órákat epizódokra bontottuk, ahol egy epizódnak tekintettük az órának azt a részét, melyen belül a tanár módszertani szándékai nem változnak. Minden felvett órához kitöltöttünk egy kódlapot, melyen epizódról epizódra bejelöltük, hogy szempontjaink közül melyek voltak megfigyelhetők az illető epizódban.

A kódlap szempontrendszer és az egyes kategóriák definíciói:

Matematikai fókusz

Fogalmi: a tanár láthatóan hangsúlyt fektet a fogalomépítésre, segíti a tanulók fogalmi fejlődését

Levezetés: a tanár szándéka új matematikai ismeretek létrehozása a meglevőkből

Strukturális: a tanár kapcsolatokat kíván teremteni különböző matematikai területek, fogalmak, tulajdonságok stb. között

Eljárás: a tanár szándéka valamilyen eljárás, technika vagy algoritmus elsajátíttatása

Hatékonyság: a tanár hangsúlyt fektet a rugalmas gondolkodást, kritikai hozzáállást, elegáns megoldások igényét fejlesztő eljárások vagy technikák elsajátítására

Problémamegoldás: a tanár összetettebb, nem rutin jellegű feladatok megoldását várja a tanulóktól

Érvelés: a tanár hangsúlyt fektet az érvek megfogalmaztatására, a megoldások igazolására, megvitatására

Matematikai kontextus

Egy feladatról vagy tevékenységről akkor mondjuk, hogy kapcsolódik a valódi világhoz, ha közvetlenül a valódi világból vagy annak hiteles reprezentációjából ered, és eredményei a valóságban alkalmazhatók. Így még ha a benne szereplő adatok kitaláltak is, ha a feladat igazán vagy hihetően valóságos, akkor a valódi világhoz kapcsolódónak tekintjük. Ha például akár egy valódi, akár egy kitalált szoba kitapétázásának költségeiről szól a feladat, akkor valamilyen értelemben vett valóságból merít és a valóságban alkalmazható.

Egy feladat vagy tevékenység nem kapcsolódik a valódi világhoz, ha nem a valóságból ered vagy nem valódi alkalmazásról szól. Ha például a feladat egy pöttyökből álló ábraszorozat folytatásáról és képzési szabályának kitalálásáról szól, akkor az nem kapcsolódik a valódi világhoz. Fontos, hogy ha a feladat a valóságból merít, de nem kapcsolódik vissza a valósághoz, akkor sem tekintjük valódi világhoz kapcsolódónak. Ha például a tanulók azt a feladatot kapják, hogy mérjék meg egy asztal hosszúságát és a feladatnak nincs más célja, mint hogy hosszúságot mérjenek, akkor ez a feladat nem kapcsolódik a valódi világhoz, mert nincs köze valódi alkalmazáshoz. Ebben az esetben a valódi világ csak egy háttér kontextust szolgáltat a feladatnak de nem valódi része annak. Ha viszont a feladat része lenne mondjuk egy asztalok gyártásáról szóló problémának, akkor már a valóságban alkalmazhatónak, így a valódi világhoz kapcsolódónak tekinthetnénk.

Egy feladatról azt mondjuk, hogy eredeti adatokon alapszik, ha az adatok vagy igaziak, vagyis a valódi világból erednek, vagy a tanulók saját tevékenységéből származnak. Ha például a tanulóknak egy tankönyvi vagy a tanár által mondott egyenletet kell megoldaniuk, akkor az adatok nem eredetiek, hiszen a tanár vagy a tankönyvszerző találta ki azokat. Ha viszont a tanulók feladata összefüggések keresése saját maguk által gyártott egyenletek alapján, akkor a feladatot eredeti adatokon alapulónak tekintjük. Ha a tanulók feladata a háromszög szögeire vonatkozó összefüggés felfedezése szabadon választott, saját maguk által rajzolt háromszögekben, akkor is eredeti adatokról beszélünk.

Egy feladat nem eredeti adatokon alapszik, ha adatai kitaláltak. A legtöbb tankönyv legtöbb feladata nem eredeti adatokra vagy a tanulók saját tevékenységére támaszkodik. Ha például egy adott sorozat összegét kell a tanulóknak kiszámolniuk, akkor nem beszélhetünk eredeti adatokról, ha viszont az összegképletet kell felfedezniük saját gyártású sorozatokon keresztül, akkor igen.

Módszertani eszközök

Korábbi ismeretek aktiválása: olyan régebben tanult anyag átismétlése, amely előkészíti az új anyagot.

Korábbi ismeretek gyakorlása: olyan régebben tanult anyag ismétlése, amely nem kapcsolódik az óra további részeihez.

Tanári magyarázat: A tanár elmagyaráz egy gondolatot vagy megoldást. Ez lehet valaminek a bemutatása, egyszerű közlés vagy a magasabb szintű

matematikai gondolkodás pedagógiai modellezése. Ezekben az esetekben a tanár szolgáltatja az információt tanulói közreműködés nélkül vagy kevés tanulói közreműködéssel.

Gondolatok közzététele: A tanulók elmondják a többieknek ötleteiket, megoldásaikat vagy válaszaikat. A megbeszélés során a tanár sokkal inkább a vitavezető szerepét játssza, mint hogy információkat szolgáltatna.

Felfedeztetés: A tanár olyan tevékenységgel foglalja el a tanulókat, amelyet nem ő irányít, és amely egy új matematikai gondolatot eredményez. Ez lehet tanulói kutatás vagy egy felépített feladatsor, de a tanulóktól minden esetben elvárják, hogy megfogalmazzák felfedezéseiket.

Tanári segítség: A tanár ötletet ad, megjegyzést tesz vagy belekérdez, hogy elősegítse a feladat megértését és végrehajtását, vagy hogy kijavítsa a hibákat, tisztázza a félreértéseket.

Értékelés: A tanár értékeli vagy osztályozza a tanulók tevékenységét, hogy megítélje az osztály teljesítményét.

Motiválás: A tanár a személyiségéből fakadókon túlmutatóan tesz azért, hogy a tanulók matematikáról alkotott képe, hozzáállása vagy érzelmi viszonya javuljon.

Kérdve kifejtés: A tanár – esetleg szókratészi – kérdések sorozatán keresztül vezeti el a tanulókat új matematikai fogalmak felépítéséhez vagy régebbiek tisztázásához, finomításához.

Differenciálás: A tanár láthatóan megkísérel különbséget tenni a tanulók között, akár különböző feladatokkal és tevékenységekkel vagy különböző segédeszközökkel, akár az elvárt eredményekkel - a tanulók szükségleteihez és egyéniségéhez igazodva.

1.2.3. Eszközök – szintézis-lap (LS)

Szintén minden órához elkészítettük az úgynevezett Reusser-sheet egy módosított változatát, a szintézis-lapot (LS: Lesson synthesis sheet), amely egy oldalra tömörítve ad képet az órán történetekről. A lap tetején egy – az órára jellemző – fotó mellett az óra néhány fontos adata szerepel (iskola neve, tanár neve, osztály, dátum, az óra címe). Ezt két dupla soros idővonal követi, melyeken az óra menetének megfelelően percről percre színkódokkal jelöltük egyiken az órán folyó pedagógiai tevékenységfajtákat, másikon az éppen megfigyelhető munkaformákat (osztálymunka, egyéni munka, páros munka, csoportmunka).

A megfigyelt pedagógiai tevékenységek és azok definíciói:

Elmélet vagy fogalomépítés: A tanár vagy új elméleti anyagot illetve fogalmakat vezet be, vagy korábbi ismereteket aktivizál - esetleg tanulói közreműködéssel.

Feladatmegoldás: A tanulók bármilyen fajta feladatokon dolgoznak egyénileg, párban, csoportmunkában vagy frontálisan.

Megoldások megbeszélése: A tanár arra kéri a tanulókat, hogy számoljanak be a feladattal kapcsolatos tapasztalataikról. Ez jelentheti megoldások, eljárások, ötletek, nehézségek stb. elmondását.

Probléma vagy feladat kitűzése: A tanár világossá teszi a feladatot vagy elvárt tevékenységet, tisztázza a fogalmakat vagy feltételeket, esetleg elmagyarázza az eszközök használatát, vagy emlékezteti a tanulókat a szükséges technikákra.

Házi feladattal kapcsolatos tevékenység: A tanár házi feladatot ad fel, utasításokat ad azzal kapcsolatban, vagy megbeszélnek a házi feladatok megoldásait.

Feladattal kapcsolatos szervezés: Feladatlapok, eszközök stb. szétosztása, vagy pl. a tanulók párokba, csoportokba stb. osztása a munkához.

Egyéb szervezés: Fegyelmezés, óra eleji jelentés, névsorolvasás, bejelentések.

1.2.4. A magyar kutatócsoport feladatai a projektben

Egymás iskolarendszerével, matematika-tantervével és tankönyveivel való ismerkedés és a projekt háttérének, menetének és eszközeinek közös kidolgozása után szétosztottuk a feladatokat. Az egyes országokban a videofelvételek elkészítése, minden témában két óra (angol nyelvű) feliratozása, az felvett órák tömör leírása, minden hazai óráról a CS és LS elkészítése minden országban a honi kutatócsoport feladata volt.

A négy téma feldolgozásában a magyar kutatócsoport a 7-8. osztályban felvett – a sokszögekről szóló - órasorozatok elemzését vállalta. Saját munkám a projektben ezeknek az órasorozatoknak a kvantitatív elemzése volt, ezt egészítem most ki az órák kvalitatív elemzésével (ami a projekt során nem készült el).

2. ESETTANULMÁNY - ANGLIA

Az órákat a stockporti középiskola nyolcadikos osztályában vettük fel (Magyarországon ez hetedikes korosztálynak számít). Stockport Manchester egyik külvárosa. Az iskola népszerű. A városközpont közelében fekszik, kb. 1000 tanulója van, akiknek mind képességei, mind szociális háttere igen széles skálán mozog. A szociális hátteret Angliában rendszerint az ingyen étkeztetésre jogosultak arányával mérik. Ebben az iskolában ez az arány 13%, amiből látható, hogy a tanulók jelentős része rendelkezik kedvezőtlen háttérrel.

A matematikaórákon képesség szerinti csoportokba osztják a tanulókat, a felvételen látható osztály az egyik legalacsonyabb képességű csoport. Az ide járó diákok a 11 éves kori nemzeti felmérésen, ahol az átlagos teljesítmény 4 pont volt, 1 és 3,9 közti eredményeket értek el, vagyis a csoporton belül is erősen szórnak a teljesítmények. Számos tanulóval megállapították, hogy (integrált) kiegészítő oktatásra van szüksége. Az alacsony képességek miatt a szokásosnál kevesebb, 25 tanuló jár ebbe a csoportba.

A tanár körülbelül öt éves tanítási gyakorlattal rendelkezik, melyet teljes egészében ebben az iskolában szerzett.

A három 50 perces órát egy héten belül vettük fel (2004. november 17-én hétfő délelőtt, 18-án kedd délután és 20-án csütörtök délelőtt), nem sokkal a tanév kezdete után.

2.1. Az órák rövid leírása

Első óra: Párhuzamosok és merőlegesek, párhuzamosok, egyenlő oldalak és derékszögek a négyszögekben

Az óra a háromszögekkel kapcsolatban frissen tanultak átismétlésével kezdődik. Megbeszélik a „tri” szótag jelentését olyan szavakban, mint triangular (háromszögletű), tricycle (tricikli) és tripod (háromlábú állvány), majd felelevenítik a különbözőfajta háromszögekkel kapcsolatos (egyenlőszárú, egyenlőoldalú) ismereteket. A hangsúly az egyenlő oldalak és szögek jelölésmódján van.

Ezután a párhuzamosság definíciójával és a párhuzamosok jelölésével kapcsolatos munka következik. A tanár megkérdezi, hogy hol láthatunk párhuzamosokat a hétköznapi életben, a tanulók megemlítik a vasúti síneket. Ennek kapcsán felmerül a kérdés, hogy csak egyenesek lehetnek-e párhuzamosak.

Ezt követően a tanulóknak ki kell választaniuk és megjelölniük a párhuzamosokat az írásvetítőn kivetített ábrákon. Az eredményeket megbeszélik, hangsúlyozva a párhuzamosság definícióját.

A következőkben a merőlegesség jelentéséről és a derékszögek jelölésmódjáról van szó. Ezúttal a derékszögeket kell megtalálniuk és megjelölniük az írásvetítőn kivetített egyenespárokon. Miután megbeszélték az eredményeket, a tanár kioszt egy rövid emlékeztetőt a párhuzamosok és merőlegesek geometriában szokásos jelöléséről.

Ezután a tanulók egy feladatlapon dolgoznak, melyen hat négyszög párhuzamos- ill. egyenlő oldalait és derékszögeit kell megjelölniük, továbbá megadniuk a négyszög nevét. Közben felmerül, hogy a második pár

párhuzamos vagy egyenlő oldalt kettős nyíllal vagy vonalkával érdemes jelölni.

Néhány perces egyéni munka után a tanulók beszámolnak munkájukról. Ekkor frontálisan is megbeszélik kettős nyíllal vagy vonalkával történő jelölést. A feladatlapon szereplő trapéz szimmetrikus volt, de a megbeszélés során kiderül, hogy nem feltétlenül van két egyenlő oldala egy trapéznek.

Az óra végén miután elcsomagolták felszereléseiket, válaszolniuk kell néhány – háromszögekkel és négyszögekkel kapcsolatos – kérdésre mielőtt elhagyhatnák a termet.

Második óra: Speciális négyszögtípusok és tulajdonságaik

Az óra elején közösen áttekintik az előző nap kitöltött feladatlapot a különböző típusú négyszögek neveiről és tulajdonságairól. A tanár emlékeztető kérdéseket tesz fel, főleg az elnevezésekkel és jelölésekkel (párhuzamosok, derékszögek stb.) kapcsolatban.

Ezután olyan feladatok következnek, melyekre a tanulóknak saját tábláscskáikra rajzolt válaszokat kell adniuk, például: „rajzolj egy téglalapot”, „rajzolj egy négyszöget és írd mellé a nevét”, jelöld be egy paralelogramma egyenlő szögeit” stb. A gyors kérdések és válaszok sorozatából így módon a tanár minden tanulóról láthatja, hogy az hogy boldogul. Néhány tanulónak még gondja van az elnevezésekkel.

Ezt követően egy új feladatlapot kapnak a diákok, melyen néhány négyszög két oldala és neve adott, meg kell rajzolniuk a másik kettőt. A feladatot pontrácsos papíron tűzték ki, hogy megkönnyítsék a pontos szerkesztést, de ez egy-két tanulót megzavart. Egy önkéntes kisegítő tanár foglalkozik azokkal, akiknek nehézségei vannak.

A munka befejeztével a tanulók bemutatják megoldásaikat a feladatlap írásvetítővel kivetített változatán. A pontos rajz nehézségei nyilvánvalóvá válnak, eltart egy darabig, míg minden szakasz a helyére kerül. A tanár hosszú időt tölt el egy-egy diákkal, míg tisztázzák a problémákat. Az egyik rombuszról kiderül, hogy négyzet, ami alkalmat teremt annak érintésére, hogy a négyzet egyben rombusz is.

Az óra befejező része a „szeretem - nem szeretem” játékkal telik, melyben a diákoknak ki kell találniuk, hogy az írásvetítőn kivetített négyszögek közül melyeket szereti a tanár, és milyen tulajdonság alapján.

Harmadik óra: Sokszögek

Az óra elején a tanár visszatér egy korábban felvetett gondolatra, miszerint egy szabályos alakzatnak mindig vannak párhuzamos oldalai. Megkéri az osztályt, hogy bizonyítsa, vagy cáfolja ezt az állítást. A kívánt iránytól egy időre eltéríti, hogy szóba kerül a kör, de végül megtalálják az egyenlőoldalú háromszöget, mint ellenpéldát.

Ezután rátérnek a szabályos sokszögekre és azok neveire. A tanulók említik a szabályos ötszöget, hatszöget és nyolcszöget (pentagon, hexagon, oktagon) és a definíciójukat is tudják. Olyan szavak is szóba kerülnek, mint a tíszög és a tizenkétszög (dekagon és dodekagon), de ezeket nem tudják definiálni. Annak kiderítése, hogy mit jelentenek ezek a szavak, házi feladat.

Bevezetik a sokszög (polygon) szót, és két ötszög példáján megbeszélik a szabályos és nem szabályos sokszög közti különbséget. A tanár felhasználja az alkalmat, hogy átismételjék a párhuzamos és a szabályos szavak jelentését. Ezután némi időt töltenek a szabályos ötszög összes szimmetriatengelyének megkeresésével, majd ugyanezt a munkát elvégzik egy szabályos és egy nem szabályos hatszög esetében.

Ezt egyéni munka követi, melynek során egy feladatlapon különféle sokszögek szimmetriatengelyeit kell berajzolni, majd az eredményeket egy táblázatban összesíteni.

A megoldások megbeszélése során a tanár rámutat, hogy a szimmetriatengelyek az alakzat középpontjában metszik egymást.

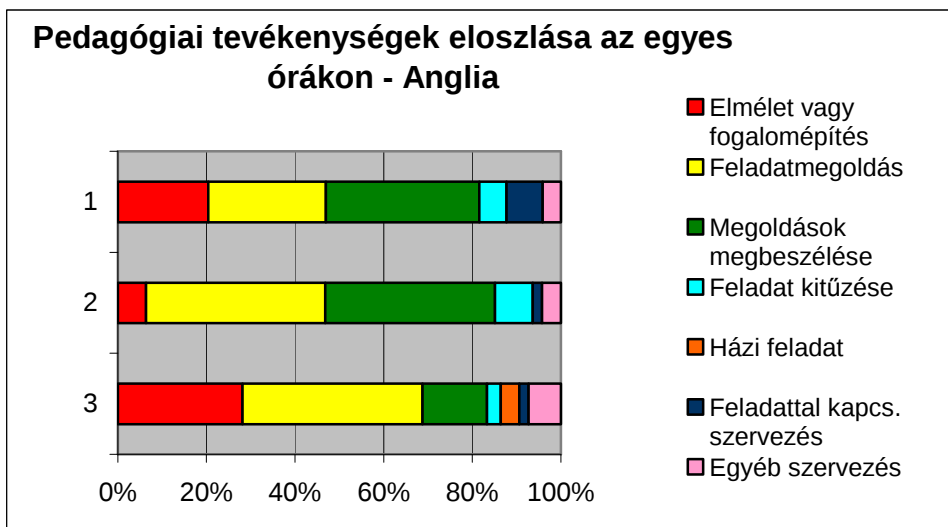
Az utolsó percekben a tanár feladja a házi feladatot, a tanulók elpakolnak.

Végül a tanár minden oszlopnak feltesz egy egyszerű geometriai kérdést, ha válaszolnak, távozhatnak.

2.2. Kvantitatív elemzés

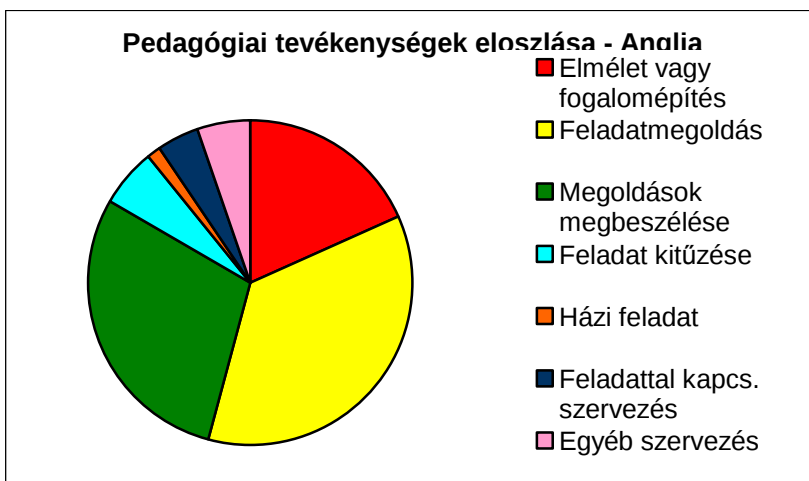
Pedagógiai tevékenységek

Az alábbi grafikon mutatja a három óra során megfigyelt pedagógiai tevékenységek időbeli eloszlását:



Látható, hogy minden óra nagy részét feladatmegoldás és a megoldások megbeszélése teszi ki. Az első órán (párhuzamosok és merőlegesek) és a harmadik órán (sokszögek) jelentős idő jutott különböző fogalmak tisztázására, elnevezésekre és jelölésekre.

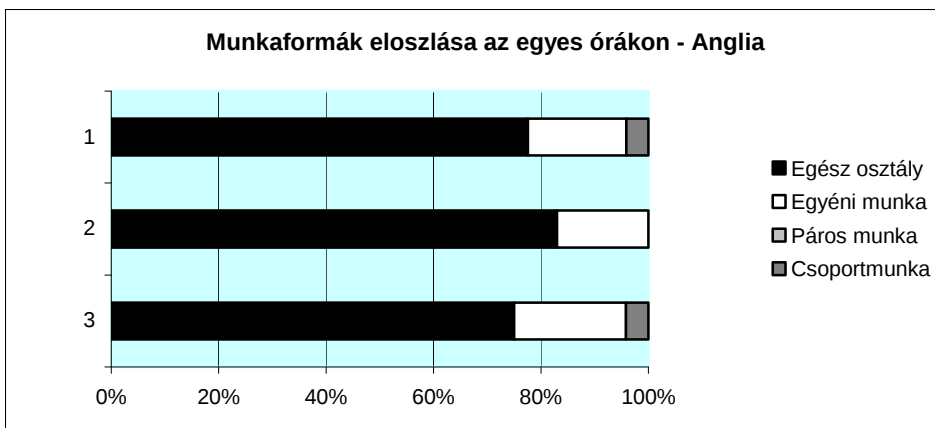
A következő diagramm összesítve mutatja a fenti tevékenységek eloszlását:



A három óra összidejének több mint harmadában (36%) a tanár által kitűzött különböző feladatokon dolgoztak a gyerekek. Az idő közel egyharmadát (30%) a megoldások megbeszélése töltötte ki. Elméleti munkával (pl. régebbi anyag felelevenítése, új fogalmak bevezetése, jelölések, elnevezések) az idő 18%-át töltötték. Feladatok kitűzésére, a teendők elmagyarázására az idő 6%-át fordította a tanár. Egyéb szervezés – pár perces rendrakás és összecsomagolás az órák végén – az idő 5%-át tette ki. Házi feladatot a tanár csak a harmadik óra végén adott fel (1%).

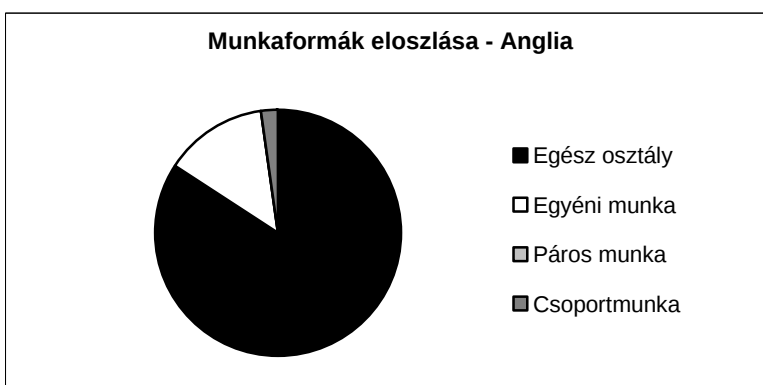
Munkaformák

A következő grafikonon látható a munkaformák megoszlása az egyes órákon:



Látható, hogy minden órán a frontális munka dominál, vagyis az idő nagy része tanári magyarázatokkal és kérdésekkel vagy a feladatok közös megbeszélésével telt. Minden órán voltak olyan epizódok, amelyek során a tanulók egyénileg dolgoztak a feladatlapjukon, az első és a harmadik óra végén csoportmunkára is sor került, amikor a tanár az egyes padsoroknak szóló kérdéseket tett fel. Páros munka nem fordult elő a megfigyelt órákon.

A következő diagramm összesítve mutatja az egyes munkaformák időbeli eloszlását:



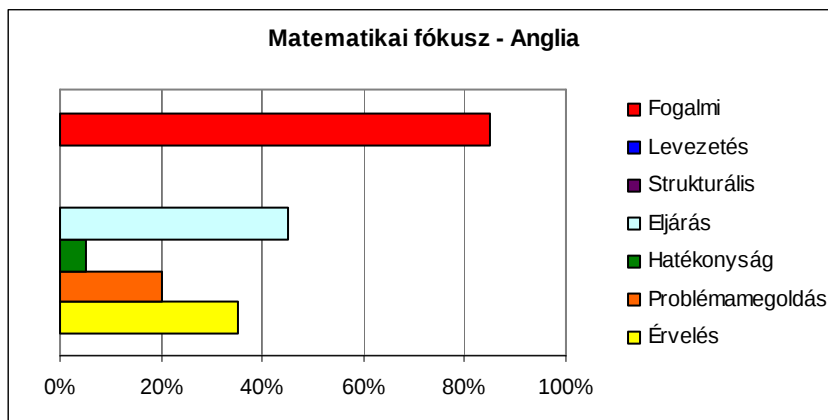
Az idő 78%-ában együtt dolgozott az egész osztály. Egyéni munkára az idő 19%-a jutott, páros munka az idő 3%-ában történt.

Matematikai fókusz

A következő táblázat mutatja, hogy az egyes órákon a matematikai fókusz különböző fajtái hány epizódban fordultak elő:

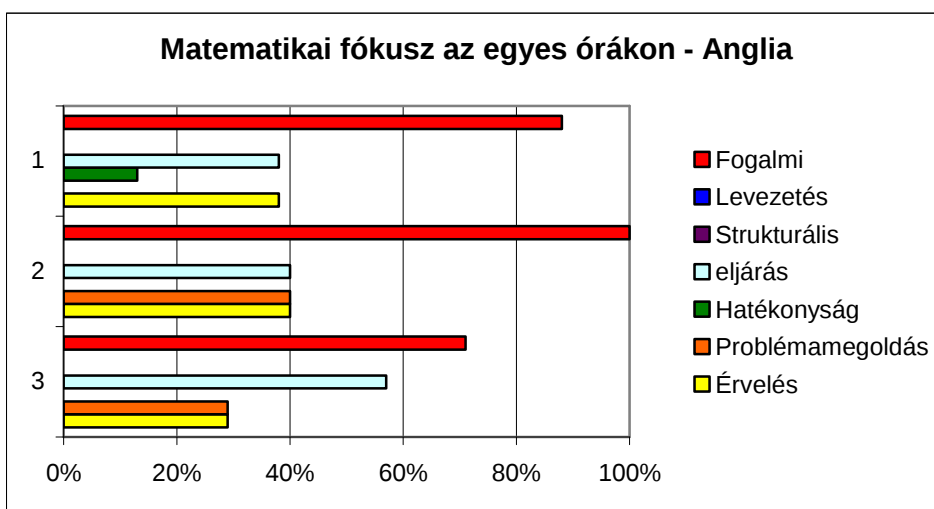
	1. óra	2. óra	3. óra	Összesen
Epizódok száma	8	5	7	20
Fogalmi	7	5	5	17
Levezetés	0	0	0	0
Strukturális	0	0	0	0
Eljárás	3	2	4	9
Hatékonyság	1	0	0	1
Problémamegoldás	0	2	2	4
Érvelés	3	2	2	7

Az alábbi grafikon mutatja, hogy az egyes fókuszfajták a három óra során az epizódok hány százalékában fordultak elő:



Mint látható, a tanár a fő hangsúlyt az alapvető fogalmak (párhuzamos, merőleges, négyszögfajták, szabályos sokszögek) tisztázására fektette, az epizódok 85%-ában fordult elő a fogalmi fókusz. Ezt követi gyakoriságban az eljárási fókusz (az epizódok 45%-ában), amikor a frissen tanult jelöléseket, elnevezéseket gyakorolják. Minden órán előfordultak epizódok (összesen az epizódok 35%-ában), melyekben a tanulóknak indokolniuk kellett válaszaikat (érvelés). Problémamegoldást a második és a harmadik óra 2-2 epizódja tartalmazott (összesen az epizódok 20%-a). Hatékonysági elem az első óra utolsó epizódjában fordult elő (5%), a „szeretem – nem szeretem” játék során. Levezetés vagy strukturális fókusz nem volt a megfigyelt órák során.

A fókuszfajták eloszlása az egyes órákon:

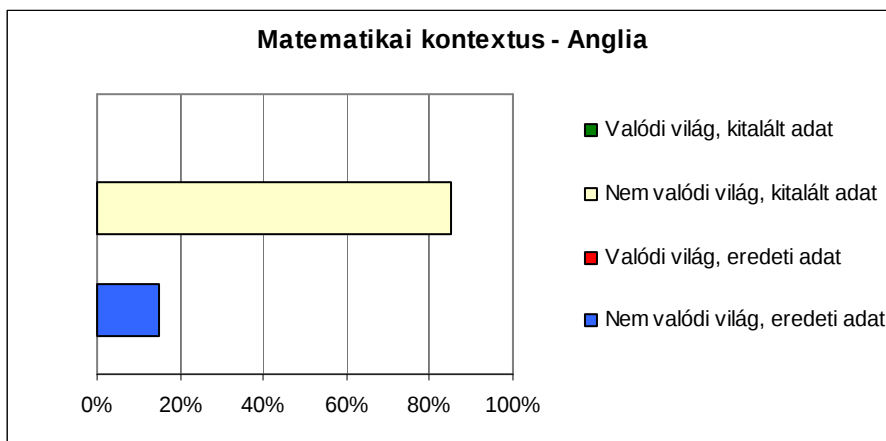


Matematikai kontextus

A következő táblázat mutatja, hogy az egyes órákon hány epizódban fordultak elő a különböző kontextusfajták:

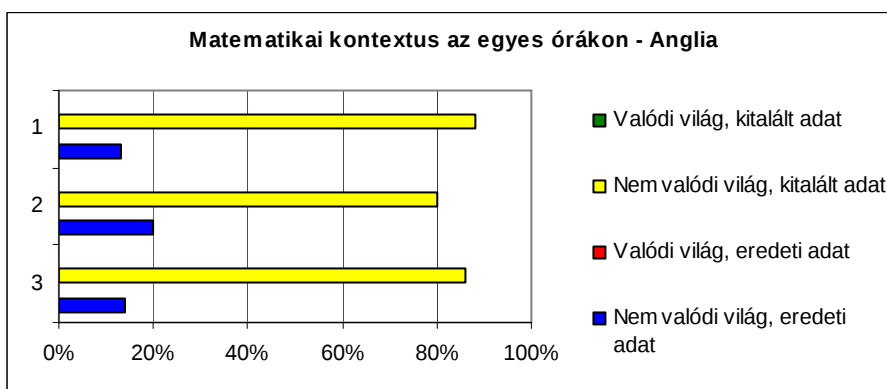
	1. óra	2. óra	3. óra	Összesen
Epizódok száma	8	5	7	20
Valódi világ, kitalált adat	0	0	0	0
Nem valódi világ, kitalált adat	7	4	6	17
Valódi világ, eredeti adat	0	0	0	0
Nem valódi világ, eredeti adat	1	1	1	3

Az alábbi grafikon összesítve mutatja, hogy az egyes kontextusfajták az epizódok hány százalékában fordultak elő:



Valódi világhoz kapcsolódó feladatok nem fordultak elő a megfigyelt órák során. Az epizódok 85%-ában kitalált (a tanár által megadott) adatokkal dolgoztak, de minden órán előfordult 1-1 epizód (15%), melyben a tanulók saját adataikat használták.

A kontextusok eloszlása az egyes órákon meglehetősen egyenletes képet mutat:

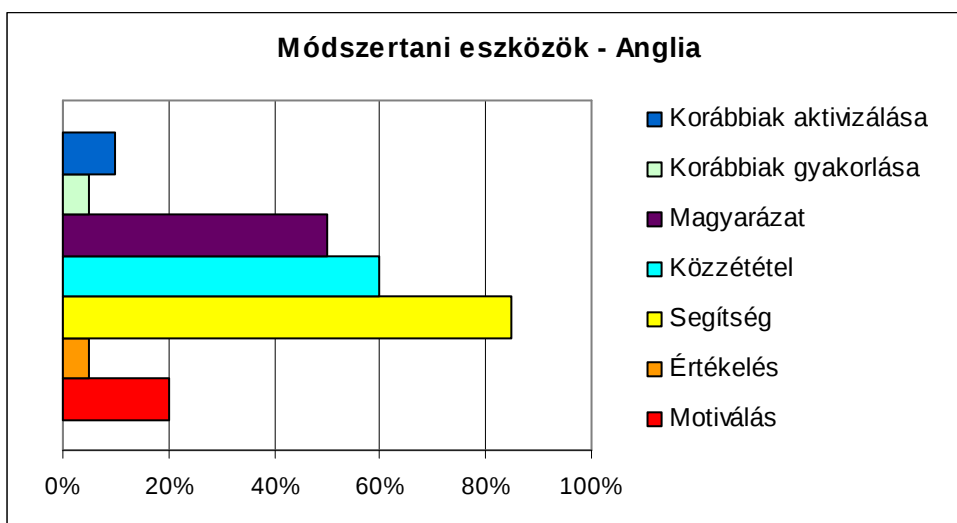


Módszertani eszközök

A következő táblázat mutatja, hogy a különböző módszertani elemek hány epizódban fordultak elő az egyes órákon:

	1. óra	2. óra	3. óra	Összesen
Epizódok száma	8	5	7	20
Régebbiek aktivizálása	1	1	0	2
Régebbiek gyakorlása	1	0	0	1
Magyarázat	7	0	3	10
Közzététel	4	3	5	12
Felfedeztetés	0	0	0	0
Segítség	6	5	6	17
Értékelés	0	1	0	1
Motiválás	1	0	3	4
Kérdve kifejtés	0	0	0	0
Differenciálás	0	0	0	0

Százalékos megoszlásban:



Tanári segítség (rávezető kérdések) az epizódok 85%-ában fordult elő, bár vitatható, hogy ezek egy része nem inkább a „Kérdve kifejtés” kategóriába tartozik-e. Minden órának fontos eleme a közvetítés (60%), amikor a gyerekek elmondják megoldásaikat, vagy kérdésekre válaszolnak. Tanári magyarázat az első óra szinte minden epizódjában előfordult (az utolsó, játékkal töltött epizód kivételével, és a harmadik órán is jelentős szerepet játszott (összesen az epizódok 50%-a). A tanár motiválni próbálta a gyerekeket az első óra első epizódjában (bátorítva őket, hogy saját szavaikkal fogalmazzák meg a háromszögekről korábban tanultakat), és a harmadik óra három epizódjában (pl. az utolsó epizódban azzal, hogy aki válaszolni tud egy kérdésre, az elmehet), összesen az epizódok 20%-ában. Régebbi ismereteket elevenítettek fel (aktivizáltak) az első és a második óra első epizódjában (10%), illetve gyakoroltak az első óra utolsó epizódjában (5%). A második óra második epizódjában a tanár olyan feladatot adott, hogy meggyőződhessen arról, hogy az egyes tanulók mennyire vannak tisztában a

négyszögfajták neveivel (értékelés – 5%). Felfedeztetés és differenciálás nem fordult elő a megfigyelt órákon.

2. 3. Kvalitatív elemzés

A tanár elmondása szerint az osztályba számos gyenge memóriával, viselkedési zavarral olvasási vagy számolási nehézséggel küszködő gyerek jár, ezért az alapvető fogalmak megtanítását és memorizáltatását tartotta fő feladatának.

A geometriatanítás általános céljai

„A környező világ leírása, megértése és értelmezése.”

Valódi világgal kapcsolatos feladatok nem fordultak elő a megfigyelt órákon, bár egyrészt a párhuzamosság fogalmának kapcsán említésre kerültek a vasúti sínek, másrészt több utalás történt az idegen eredetű szakszavak nyelvi jelentéséről (mondjatek olyan szavakat, amelyekben előfordul a „tri” szótag; mit jelent a szabályos sokszögek neveiben a „penta”, „hexa” stb.).

„Gazdag és változatos feladatkészlet biztosítása a tanulók számára.”

A kitűzött feladatok – bár szűk területet érintettek - több szempontból is változatos képet mutatnak. A tanulók időnként a füzetükben, időnként feladatlapon, máskor a saját tábláscskáikon vagy a táblánál dolgoztak; többnyire frontálisan, néha egyénileg, sőt páros munka is előfordult; játékra is sor került. Tartalmukat tekintve, az elnevezéseket, egyes speciális négyszögfajták felismerését, jelölések (párhuzamos ill. egyenlő oldalak) gyakorlását szolgáló feladatok (eljárási epizódok) szerepeltek túlsúlyban, de problémamegoldás is előfordult a második és harmadik óra néhány

epizódjában (négyyszögek kiegészítése, „szeretem - nem szeretem” játék, szabályos sokszögek szimmetriatengelyének berajzolása).

„Megtanítani a diákokat sejtések megfogalmazására, bizonyítások készítésére, példák és ellenpéldák kitalálására.”

Minden órán előfordultak epizódok, melyekben a tanulóknak indokolniuk kellett válaszukat, de ezek általában jelölésekre, elnevezésekre, megrajzolási módra vonatkoztak (pl. „miért kell a második pár párhuzamos oldalt másképp jelölni, mint az elsőt”). A logikai kapcsolatokra vonatkozó deduktív érvelést (levezetés) tartalmazó epizód nem fordult elő. Ellenpélda keresésére egy ízben buzdította a tanár a diákokat, annak a felmerült kérdésnek a kapcsán, hogy egy szabályos „alakzatnak” mindig vannak-e párhuzamos oldalai.

”Eszközt teremteni más matematikai területeknek.”

Szstrukturális elemet tartalmazó – más területekkel közvetlen kapcsolatot teremtő - epizódok nem fordultak elő. Az itt tanult elnevezések és jelölési konvenciók azonban alapot és/vagy mintát szolgáltatnak későbbi, esetenként más területekkel kapcsolatos tanulmányaikhoz.

„Gazdagítani a tanulók matematikáról alkotott képét.”

A tanár többféleképpen igyekezett motiválni a gyerekeket – kitűzési formájában változatos feladatokkal, játékkal, dicséretekkel – de azt, hogy ez mennyire befolyásolta a matematikáról alkotott képüket, nem tudom megítélni.

Fogalmi vonatkozások

A megfigyelt órákon a tanulók többnyire a 0. szinten dolgoznak, időnként érintve az első szintet. A „szeretem – nem szeretem” játék kivételével minden feladat egy-egy ábra megrajzolását, kiegészítését vagy felismerését kívánja és a játék is ábrákon alapszik. Jellemző eset volt, hogy az a kérdés, hogy „mi a neve a szabályos négyszögnek”, gondot okozott a gyerekeknek, vagyis az absztrakt definíciót (a szabályos sokszögét) nem tudták egy egyébként számukra is – kinézet alapján - jól ismert alakzathoz (négyzet) kapcsolni.

Az órákon folyó munka legnagyobb része közvetlenül kapcsolódik valamilyen matematikai fogalomhoz, az epizódok 85%-a tartalmazott fogalmi fókuszot. Az első órán a párhuzamosság és merőlegesség felismerése és jelölése játszott központi szerepet. Ennek kapcsán némi zavart okozott az a kérdés, hogy a vasúti sínek a kanyarban is párhuzamosak-e, végül abban állapodtak meg, hogy igen (ott sem közeledhetnek egymáshoz). A második óra főképp a speciális négyszögekről és azok néhány tulajdonságáról szólt. Egyes feladatokban a négyszögfajtákat kinézetük alapján ítélték meg, (pl. rajzolj trapézt; írd az ábrák mellé a nevüket), máskor az ismertnek feltételezett tulajdonság alapján kellett a tanulóknak dolgoznia (pl. egészítsd ki az ábrát úgy, hogy téglalapot kapj). Összemosódott például, hogy az, hogy „a paralelogrammának van két pár párhuzamos oldala” az a paralelogrammáról (ami egy bizonyos módon kinéző alakzat) megtanulandó ismeret, vagy a paralelogramma definíciója.

Az olyan feladatok, mint „jelöld meg az ábrán a párhuzamos illetve egyenlő oldalakat és a derékszögeket”, csak a tulajdonképpeni definiáló tulajdonságokkal foglalkoztak, így bizonyos tulajdonságcsoportok összefüggéseiről vagy a négyszögek osztályozásáról nem esett szó. Kapcsolat

az egyes négyszögfajták között egy ízben merült fel, amikor több gyereknek problémát jelentett, hogy a megrajzolandó rombusz négyzet lett.

A „sokszög” (polygon) elnevezéssel csak a harmadik órán ismerkednek meg, nagy hangsúlyt kap azonban már korábban is a szabályos „alakzat” definíciója (olyan alakzat, melynek minden oldala és szöge egyenlő). Ezt a gyerekek többször úgy adják vissza, hogy „olyan alakzat, melynek mindene egyenlő”, és amikor példát kell mondaniuk olyan szabályos „alakzatra”, melynek nincsenek párhuzamos oldalai, először a kört említik (majd a tanárnak sikerül rávezetnie őket a szabályos háromszögre).

A harmadik órán megkülönböztetik pl. a szabályos és a nem szabályos ötszöget, de a nem szabályos sokszögek ábráján minden esetben konkáv sokszög szerepel, így könnyen elképzelhető, hogy a képhez kötődő fogalom később zavart okozhat.

A négyszögfajták szimmetriatulajdonságai nem kerültek elő. Amikor az ábrák kiegészítésére került sor úgy, hogy megadott típusú négyszög legyen, az egyik gyerek megkérdezte, hogy használjon-e tükröt, amire a tanár azt válaszolta, hogy ne, most nem a szimmetriákról van szó. Akik szükségét érezték, azok viszont használhattak tükröt a harmadik órán, amikor szabályos sokszögek szimmetriatengelyét kellett berajzolni.

Levezetés, bizonyítás vagy több lépéses logikai láncon alapuló érvelés nem fordult elő.

Módszertani eszközök

A tanár néhány alapvető alakzat nevének elsajátítására helyezte a fő hangsúlyt. Az elnevezések, jelölésmódok és definíciók memorizálását gyakori visszakérdezésekkel és ismétlésekkel próbált segíteni, utalt az idegen

eredetű szavak eredeti jelentésére (például az ötszög [pentagon] kapcsán a Pentagon épületére).

Fő módszertani eszköze – saját bevallása szerint - a türelem volt.

Folyamatos – többnyire segítő jellegű – kérdésekkel igyekezett a tanulókat bevonni, változatos feladatokkal, játékkal tartotta ébren figyelmüket.

Úgy ítélte meg, hogy a kapcsolatok átlátása, vagy a komolyabb érvelést igénylő feladatok túl nehezek lennének ennek a gyenge osztálynak, így kerülte az olyan kérdéseket, melyek nem kapcsolódtak közvetlenül a definíciókhoz. Egy induktív következtetést készít elő az utolsó órán feladott házi feladat, melyben táblázatba kell foglalni különböző szabályos sokszögek oldalainak és szimmetriatengelyeinek számát, majd válaszolni néhány ezekkel kapcsolatos kérdésre.

A feladatok kitűzéséhez feladatlapokat, megbeszélésükhöz a feladatlap táblára vetített változatát használta. A gyerekek a szabályos sokszögek szimmetriatengelyeinek berajzolásához használhattak tükröt.

3. ESETTANULMÁNY - BELGIUM

Az órákat a leuveni „Paridaensinstituut” hetedik osztályában vettük fel. Leuven közepes méretű flamand egyetemi város, az iskolában már körülbelül 200 éve folyik alsó- és középszintű oktatás. A középszintű oktatásban kb. 650 tanuló vesz részt, egy részük latin tagozaton, a többiek az ún. humán tagozaton tanulnak. A videofelvételek a humán tagozaton készültek.

Az órákat tartó tanár megközelítőleg 50 éves és jelentős középiskolai matematikatanítási tapasztalattal rendelkezik. Az osztályba 24 vegyes képességű tanuló jár, társadalmi-gazdasági helyzetük a közepestől a magasig terjed.

Az órák 50 percesek, az 5 óra két nap alatt zajlott le (kettő 2003. november 18-án kedden délelőtt, egy ugyanaznap délután, kettő ugyanazon a héten pénteken délelőtt). A harmadik és negyedik óra között volt egy óra, amely nem lett felvéve.

3.1. Az órák rövid leírása

Első óra: Négyyszögek tulajdonságai

Az óra egy szervezési epizóddal kezdődik, áttekintik a kiosztott feladatlap szerkezetét.

Ezután frontális megbeszélés következik, melynek során átismétlik különböző speciális négyyszögek (téglalap, rombusz, trapéz, négyzet...) tulajdonságait.

Ezt rövid ideig tartó egyéni munka követi, melynek során - a tanár utasításai szerint – különböző gyerekeknek különbözőfajta négyyszögeket kell

rajzolniuk. Ezalatt a tanár újra feltesz kérdéseket a különféle négyszögek tulajdonságairól, majd a rajzolás befejeztével a tanár ellenőrzi az eredményeket.

Eközben a tanár észreveszi, hogy valakinek problémát okozott az egyenlőszárú (nálunk húrtrapéznek nevezett) trapéz rajzolása, ezért megkérdezi, hogy mi a feltétele annak, hogy trapézt kapjunk. Azt is megkérdezi, hogy mit értünk egyenlőszárú trapézon. Erre a tanulók nem tudnak válaszolni, mivel ez a fogalom teljesen új a számukra. A tanár rámutat az egyenlőszárú háromszög definíciójával való analógiára, amit már korábban tanultak.

Ezután a tanár kihív néhány gyereket a táblához, hogy rajzolják fel saját négyszögeiket, míg a többiek az összes fajtát a feladatlapra rajzolják. Közben az összes fajta négyszög tulajdonságairól hosszú frontális megbeszélés folyik. A tanár kérdéseket tesz fel például a rombusz átlóinak tulajdonságairól, mert néhány tanuló az átlóiból rajzolta meg a rombuszt. Néha a tanár maga mond el valamit, például hogy egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak.

Ezt követően a tanár elmagyarázza néhány jelölés használatát (pl. derékszög, egyenlő szakaszok...), majd az összes fajta négyszögön megjelölik az egyenlő oldalakat és a derékszögeket. Eközben a tanár sorozatos kérdései nyomán újra átismétlik a négyszögfajták tulajdonságait.

Végül a tanulók egyénileg befejezik az összes ábra megrajzolását (a jelölésekkel), miközben a tanár további kérdéseket tesz fel.

Második óra: A négyszögek osztályozása

Az óra elején a tanulóknak definiálniuk kell a táblán látható különböző négyszögeket, megfelelő jelekkel ellátni a derékszögeket, egyenlő oldalakat

és szögeket. A tanár kérdéseket tesz fel az egyes négyszögfajták tulajdonságairól, elmagyarázza, hogy a csúcsokat nagy betűkkel jelölve hivatkozhatunk az illető négyszögre. Amikor a tanulók nem tudják a rombusz tulajdonságait, a tanár segítségül elmondja, hogy a négyzet is rombusz. Hangsúlyt fektet a különböző négyszögfajták közti kapcsolatokra: felhívja a figyelmet a négyzet, a rombusz és a téglalap kapcsolatára; elmagyarázza, hogy egy szög lehet derék, és egyenesek lehetnek merőlegesek, de fordítva nem lehetséges; utal az egyenlőszárú háromszög száraira, amikor az egyenlőszárú trapéz egyenlő oldalait száraknak nevezi.

Ezután egy tanulói kérdés kapcsán a különböző négyszögfajták közti összefüggésekre vonatkozó kérdések következnek, például: Rombusz-e a paralelogramma? Paralelogramma-e a rombusz? Paralelogramma-e a téglalap? Ha rajzolok egy olyan paralelogrammát, melynek négy derékszöge van, mit kapok?... Időnként a tanár maga válaszol a saját kérdéseire, elmagyarázza például, hogy mit ért egy bizonyos alakzat „alaptulajdonságain”.

Végül a tanár kérdési nyomán összefoglalják az elmúlt két órán tanultakat.

Harmadik óra: Szögek, szakaszfelező merőlegesek és szögfelezők

Rövid szervezési szakasz után az óra a reggel tanultak – mint egyenes, szakasz, négyzet, trapéz, paralelogramma, átlók, párhuzamos oldalak, merőleges egyenesek – átismétlésével kezdődik. A tanár feltesz egy sor nagyon röviden megválasztható kérdést, miközben időnként megjegyzéseket tesz.

Ezután új, a szögméréssel kapcsolatos anyag kezdődik. A tanulóknak definiálniuk kell olyan fogalmakat, mint pl. hegyesszög, szögszár stb., de a fő

hangsúly a szögek mérésén van. Közben szóba kerülnek új fogalmak is, mint pl. az abszolút érték.

Rövid egyéni munka következik, melynek során a tanulók saját maguk által rajzolt szögeken gyakorolják a szögmérést.

Ezt követően a szakaszfelező merőlegessel és a szögfelezővel foglalkoznak. A tanulóknak egy 6 cm-es szakaszt és egy 40° -os szöget kell rajzolniuk. A tanár a táblánál bemutatja, hogyan rajzolhatnak szöget, közben beszél a szerkesztés és a rajzolás közti különbségről, feltesz egy sor kérdést, például hogy lehetséges-e egy egyeneshez felező merőleget rajzolni.

Ezután átismételnék egy sereg definíciót (átló, szögfelező, szakaszfelező merőleges...). Esetenként a tanár kérdésekkel próbálja finomítani a nem eléggé pontos definíciókat, és rávezetni a tanulókat az elvárt válaszokra. Például amikor az egyik tanuló úgy definiálta az átlót, mint egy olyan vonal, amely két csúcsot köt össze, a tanár megpróbálta rávezetni egy pontosabb definícióra, miszerint olyan egyenes, mely két szemközti csúcsot köt össze.

Az óra befejező része a kerületről szól. A tanár kérdéseket tesz fel arról, hogy hogyan lehet megmérni különböző négyszögek területét, majd a tanulóknak meg kell mérniük az előző órákon négyzethálós papírra rajzolt négyszögeik területét.

Negyedik óra: Négyszögek tulajdonságai és átlói

Az óra első szakaszában a tanár az előző (nem felvett) órán végzett munkáról kérdezi a tanulókat. Kérdései a szakaszfelező merőleges és a szögfelező szerkesztésével kapcsolatosak, közben bemutatja a táblánál, hogy miért kell a szakasz felénél nagyobbra nyitni a körzőt a felezőmerőleges szerkesztésekor. Elmagyarázza az ezzel kapcsolatos házi feladatot, majd kiosztja az új feladatlapokat.

A tanár és a diákok közösen oldják meg az egyik feladatot, melyben hét különböző négyszög pontos nevét kell megadni (pl. derékszögű trapéz, paralelogramma, téglalap). Miután befejezték, a tanár a téglatest különböző részeire (alaplapp, fedőlap, oldallapok, szélesség, hosszúság, magasság) vonatkozó kérdéseket tesz fel. Ennek célja az, hogy elmagyarázhassa a különbséget a téglatest magasságát jelölő „H” szimbólum és a négyszögek magasságát jelölő „h” szimbólum között. Ezután visszatérnek a feladatlapon szereplő négyszögekhez, melyeken a tanulóknak el kell helyezniük a megfelelő jelöléseket (pl. egyenlő oldalak, merőleges szakaszok). A tanár egy sereg kérdést tesz fel például a paralelogramma tulajdonságairól, a tanulóknak indokolniuk kell válaszaikat.

Egy idő után a tanár félbeszakítja a jelölések elhelyezését az ábrákon a négyszögek átlóival kapcsolatos kérdések kedvéért. Az átlónak azt a definícióját, miszerint „olyan egyenes, mely szemközti csúcsokat köt össze”, megváltoztatja arra, hogy „olyan egyenes, mely két nem szomszédos csúcsot köt össze”. Megpróbálja a diákokat kérdésekkel rávezetni az új definícióra, és egy ötszöget rajzolva a táblára elmagyarázza, hogy ez a definíció minden sokszögre jó, míg a korábbi csak négyszögekre.

Ezután a tanulók berajzolják a feladatlapon szereplő négyszögek átlót. Átismétlik a négyszögfajták átlókkal kapcsolatos tulajdonságait, majd kérdések és válaszok sorozatán keresztül egy új lehetséges tulajdonságról – hogy az átló felezheti a szöget - tanulnak. Amikor a tanulók nem tudnak válaszolni, a tanár segítséget ad, például amikor nem tudtak válaszolni a merőleges átlókkal kapcsolatos kérdésre, a tanár javasolta, hogy figyeljék meg a rombusz átlóit.

Ötödik óra: Négyzetek kerülete és területe, kockák és téglatestek

Az óra első része kocka- és téglahálókkal kapcsolatos. A diákoknak a feladatlapjukon szereplő téglahálókon be kell jelölniük a magasságot, hosszúságot és szélességet. Eközben kérdések és válaszok sorozatával átismétlik a négyzet területét.

Miközben a tanulók megméri a kocka egy élét illetve a téglatest szélességét, hosszúságát és magasságát, a tanár megkérdezi, hogy miért van az, hogy a terület mértékegységében második, és a térfogat mértékegységében harmadik hatvány szerepel. Azt felelik, hogy a terület egysége azért van négyzeten (pl. cm^2), mert oldalt szorzunk oldallal (és mindkettőt cm -ben mérjük). A tanár betűk használatával magyarázza el a kapcsolatot a második hatvány (területre) és a harmadik hatvány (térfogatra) között, ami teljesen új a diákoknak. Megmutatja, hogy a -szor a az a^2 , és a -szor a -szor a az a^3 .

Ezután a tanulók beszámolnak a méréseikről, majd a tanár a négyzet és a téglalap területét felhasználva – amit már ismernek - levezeti a kocka és a téglatest felszínképletét – ami új a számukra.

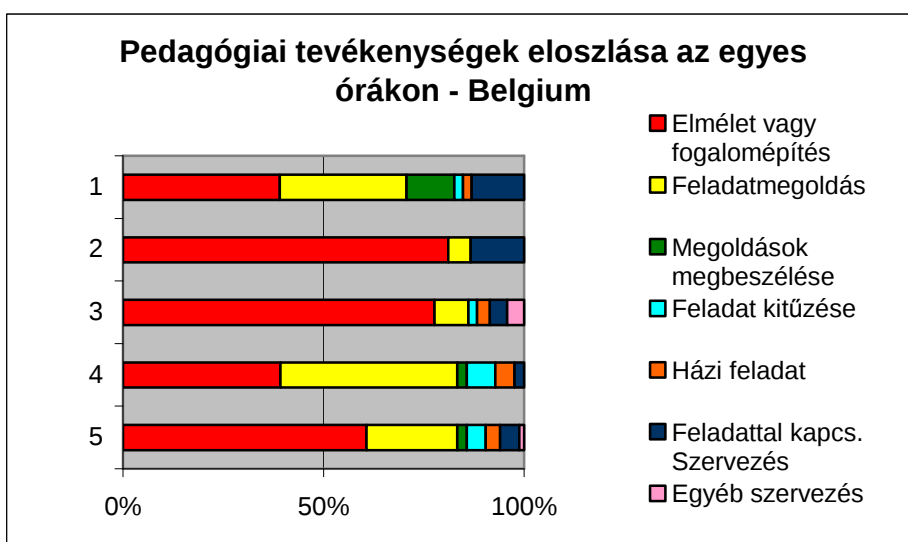
Páros munka következik melynek során a megmért adatokból kiszámítják a téglalapok területeit és ezeket összeadva a felszínt. Eközben a tanár körbejár és segít. Időnként elmagyaráz dolgokat, például a terület és a felszín közti különbséget.

Az óra végén újra átismétlik a négyzet és a téglalap területképletét. A tanár elmagyarázza, miért szükséges a zárójel a téglalap $2(a+b)$ kerületképletében. Befejezésül a tanár mond néhány instrukciót a házi feladatokkal kapcsolatban.

3.2. Kvantitatív elemzés

Pedagógiai tevékenységek

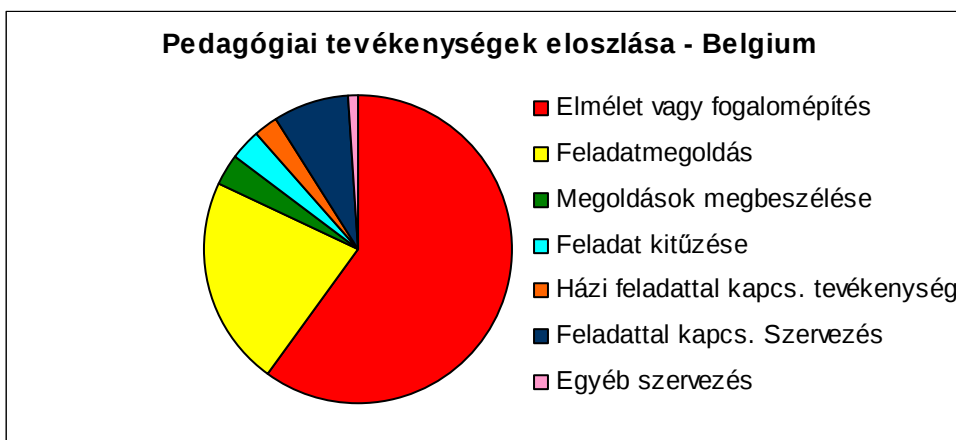
Az alábbi grafikon mutatja az öt óra során megfigyelt különböző pedagógiai tevékenységek megoszlását:



Látható, hogy az elméleti anyaggal (pl. tanári magyarázatokkal) töltött idő minden órán jelentős – különösen a másodikon (a négyszögek osztályozása) és a harmadikon (szögek, szakaszfelező merőlegesek és szögfelezők), ahol viszonylag több volt az új anyag. Az első – ismétlő jellegű (négyszögek tulajdonságai), a negyedik - gyakorló-összefoglaló jellegű (Négyszögek tulajdonságai és átlói) és az ötödik (négyszögek kerülete és területe, kockák és téglatestek) órán fordul elő számot tevő feladatmegoldás, de a feladatok megbeszélésére kevesebb időt fordítottak. Azt, hogy a házi feladatok kitűzése

és megbeszélése alig fordul elő, magyarázza, hogy az öt óra két nap alatt zajlott le.

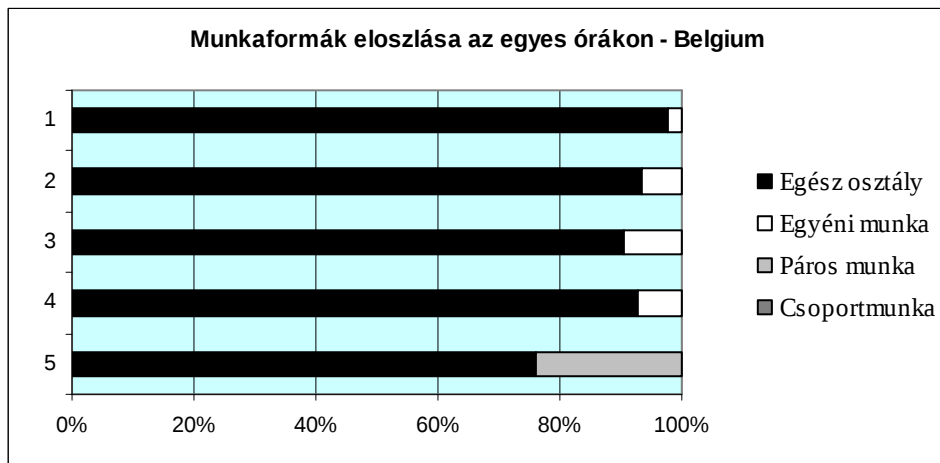
Az alábbi diagramm összesítve mutatja fenti tevékenységek megoszlását az öt óra során:



A legtöbb időt (az öt óra összidejének 60%-át) elméleti anyag, a témához kapcsolódó fogalmak áttekintése, új fogalmak és eljárások bevezetése töltötte ki. Az idő több mint ötödrészában (22%) dolgoztak a tanulók feladatokon, többnyire frontális keretek közt, időnként egyénileg, illetve (az ötödik órán) párban. A feladatokkal kapcsolatos szervezés (feladatlapok kiosztása, instrukciók stb.) az idő 8%-át tette ki. A feladatok kitűzésére, a megoldások megbeszélésére és a házi feladatokra egyaránt az idő 3-3%-a jutott. A témához nem kapcsolódó szervezés (a harmadik óra elején) az idő 1%-ában történt.

Munkaformák

A következő grafikonon látható a munkaformák megoszlása az egyes órákon:



Mint látható, minden órán a frontális munka dominál, egyéni munka (a feladatlapok kitöltése) csak az első négy órán, párokban megoldandó feladat csak az ötödik órán fordult elő.

A következő diagramm összesítve mutatja az egyes munkaformák időbeli eloszlását:



Frontális munka folyt az idő 93%-ában (tanári magyarázat, kérdések és válaszok, megoldások megbeszélése, házi feladat kitűzése stb.). A tanulók

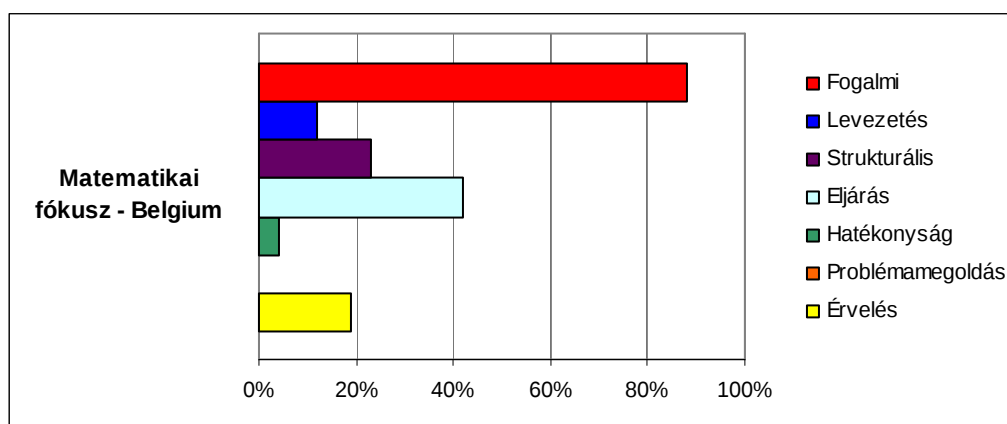
egyéniileg dolgoztak a feladatlapjukon az idő 5%-ában, páros munka folyt az idő 2%-ában. A megfigyelt órákon nem fordult elő csoportmunka.

Matematikai fókusz

A következő táblázat mutatja, hogy az egyes órákon a matematikai fókusz különböző fajtái hány epizódban fordultak elő:

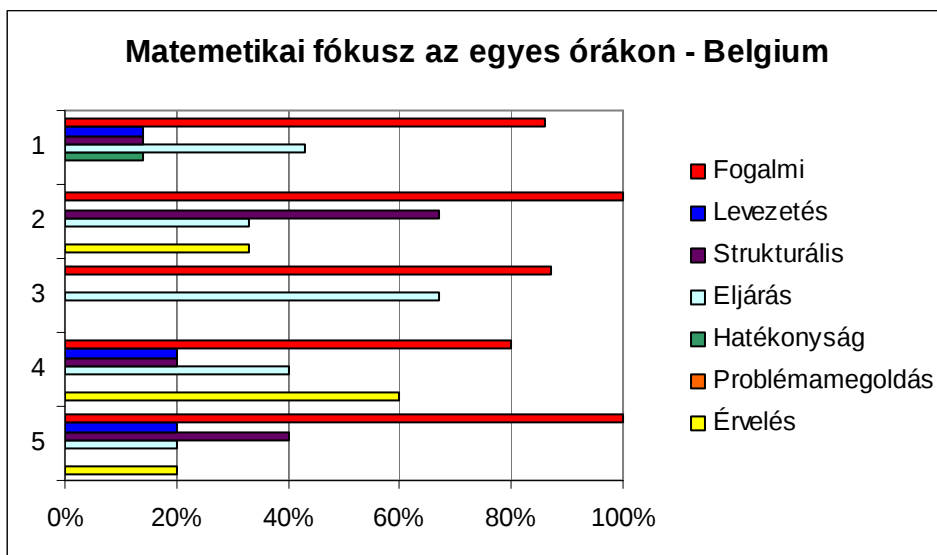
	1. óra	2. óra	3. óra	4. óra	5. óra	Összesen
Epizódok száma	7	3	6	5	5	26
Fogalmi	6	3	5	4	5	23
Levezetés	1	0	0	1	1	3
Strukturális	1	2	0	1	2	6
Eljárás	3	1	4	2	1	11
Hatékonyság	1	0	0	0	0	1
Problémamegoldás	0	0	0	0	0	0
Érvelés	0	1	0	3	1	5

Az alábbi grafikon mutatja, hogy az egyes fókuszfajták az öt óra során az epizódok hány százalékában fordultak elő:



Látható, hogy leghangsúlyosabb a fogalmi fókusz (88%). Eljárások tanítása vagy gyakorlása az epizódok 42%-ában szerepelt. A harmadik óra kivételével minden órán előfordult egy vagy két epizódban – összesen az epizódok 23%-ában – strukturális elem. Érvelés vagy indoklás a tanulók részéről az epizódok 19%-ában volt. Új ismeret levezetése a már meglevőkből az első, a negyedik és az ötödik óra egy-egy epizódjában – összesen az epizódok 12%-ában – fordult elő. Hatékonysági elemet tartalmazó epizód egy volt (4%), az első óra hatodik epizódja, amikor a tanár különböző módszereket gyűjtött a gyerekektől arra, hogy hogyan lehet négyzethálós papírra négyzetet rajzolni. Problémamegoldás nem fordult elő a megfigyelt órák során.

A fókuszfajták eloszlása az egyes órákon:

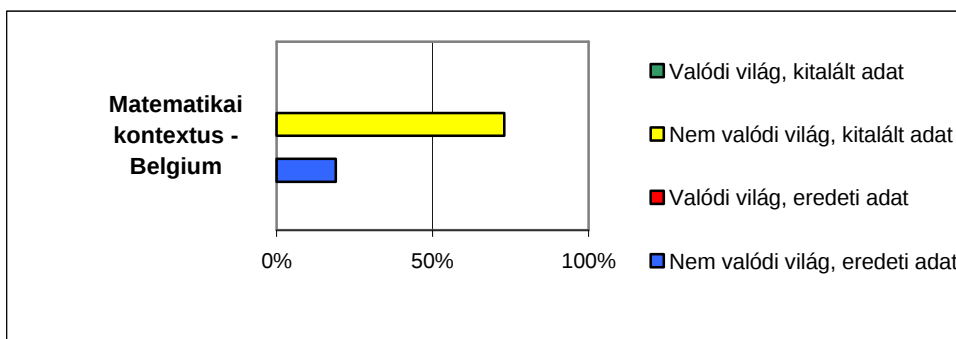


Matematikai kontextus

Az alábbi táblázat mutatja, hogy az egyes órákon hány epizódban fordultak elő a különböző kontextusok:

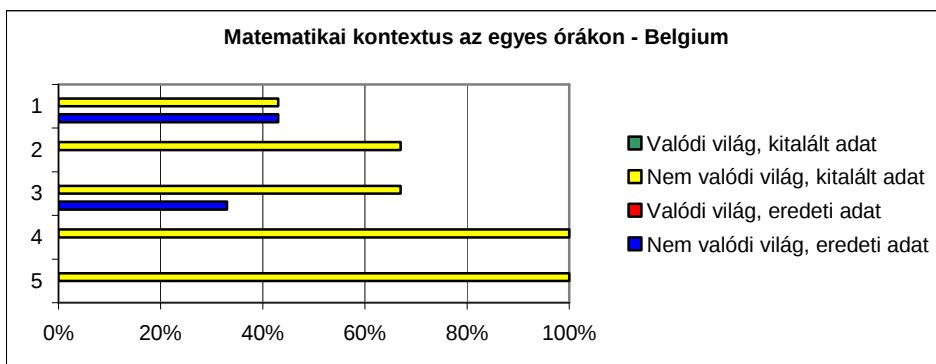
	1. óra	2. óra	4. óra	3. óra	5. óra	Összesen
Epizódok száma	7	3	5	6	5	26
Valódi világ, kitalált adat	0	0	0	0	0	0
Nem valódi világ, kitalált adat	3	2	5	4	5	19
Valódi világ, eredeti adat	0	0	0	0	0	0
Nem valódi világ, eredeti adat	3	0	0	2	0	5

Százalékos megoszlásban:



Látható, hogy a hétköznapi életből (valódi világ) vett példák vagy feladatok nem fordultak elő. Az epizódok 73%-ában dolgoztak a tanulók a tanár által megadott (kitalált) adatokkal, 19%-ában (az első órán három, a harmadik órán két epizódban) választhatták meg saját (eredeti) adataikat.

A kontextusok megoszlása az egyes órákon:

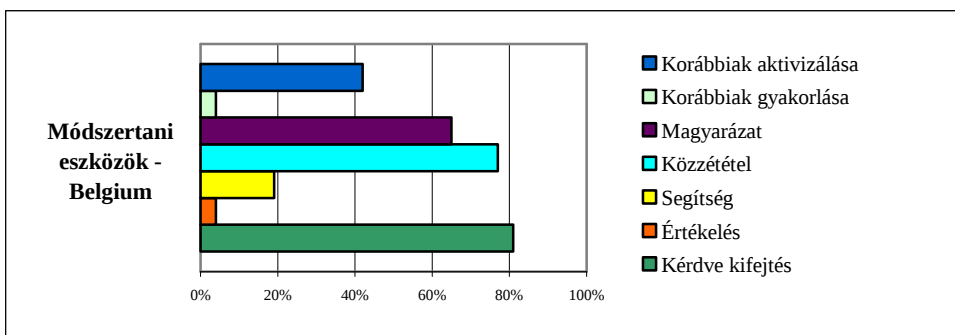


Módszertani eszközök

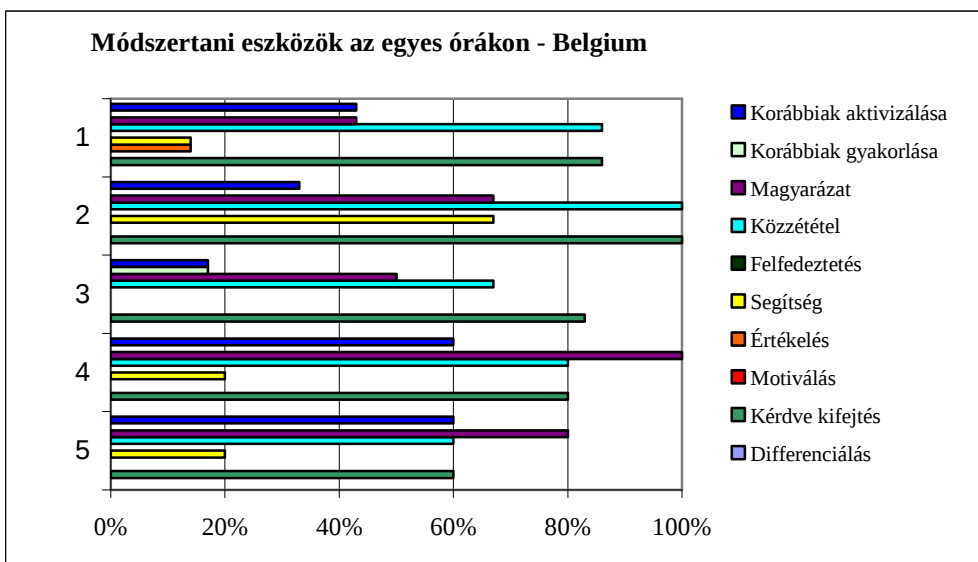
A következő táblázat mutatja, hogy a különböző módszertani elemek hány epizódban fordultak elő az egyes órákon:

	1. óra	2. óra	3. óra	4. óra	5. óra	Összesen
Epizódok száma	7	3	6	5	5	26
Korábbiak aktivizálása	3	1	1	3	3	11
Korábbiak gyakorlása	0	0	1	0	0	1
Tanári magyarázat	3	2	3	5	4	17
Gondolatok közzététele	6	3	4	4	3	20
Felfedeztetés	0	0	0	0	0	0
Tanári segítség	1	2	0	1	1	5
Értékelés	1	0	0	0	0	1
Motiválás	0	0	0	0	0	0
Kérdve kifejtés	6	3	5	4	3	21
Differenciálás	0	0	0	0	0	0

Százalékos eloszlásban:



Felfedeztetés, motiválás és differenciálás nem fordult elő a megfigyelt órákon. A tanár leggyakrabban a kérdve kifejtés módszerét használta (az epizódok 81%-ában). A tanulók válaszoltak a tanár kérdéseire vagy elmondták megoldásaikat az osztálynak (közzététel) az epizódok 77%-ában. Tanári magyarázat és a korábbi ismeretek aktivizálása is minden órán előfordult, az előbbi összesen az epizódok 65%-ában, az utóbbi az epizódok 42%-ában. Tanári segítség vagy rávezetés az epizódok 18%-ában volt megfigyelhető. Korábbi ismeretek gyakorlása is és értékelés is egy-egy epizódban fordult elő (4-4%). A módszertani eszközök eloszlása az egyes órákon:



3.3. Kvalitatív elemzés

A belga tanár egy viszonylag nagy és szerteágazó területet igyekezett lefedni a megfigyelt órák során: speciális négyszögek fajtái, tulajdonságai és osztályozása; szögmérés; szögfelező és szakaszfelező merőleges szerkesztése; jelölések használata; terület- és felszínszámítás.

A geometriatanítás általános céljai

„A környező világ leírása, megértése és értelmezése.”

A hétköznapi élethez (a környező világhoz) kapcsolódó feladatok egyáltalán nem fordultak elő a megfigyelt órákon. A tanári magyarázatok során néha történt utalás hétköznapi példára, az ötödik órán a téglatest felszínével kapcsolatban például megemlítette a tanár, hogy az osztályterem nagyjából téglatest alakú, így ha a felszínére vagyunk kíváncsiak, nem kell minden élét megmérni. Arra is kitért, hogy más a helyzet olyan termekkel, ahol a falak nem derékszöget zárnak be egymással.

„Gazdag és változatos feladatkészlet biztosítása a tanulók számára.”

Az öt óra összidejének kicsit több mint ötödrésztében (22%) folyt feladatmegoldás. A feladatok nagy része jelölésekre (pl. jelöld be az ábrán az egyenlő szögeket és szakaszokat) és elnevezésekre (írd oda az ábrán szereplő négyszögek mellé a nevüket), más része eljárások követésére (adott hálójú kocka és téglatest felszínének kiszámítása részletes utasítások alapján). Problémamegoldás nem fordult elő.

„Megtanítani a diákokat sejtések megfogalmazására, bizonyítások készítésére, példák és ellenpéldák kitalálására.”

Felfedeztetés a megfigyelt órákon nem fordult elő, tanulói indoklás vagy érvelés is csak három órán az ötből, összesen az epizódok nem egész ötödrészában (a negyedik órán pl. a tanulóknak indokolniuk kellett a paralelogramma tulajdonságaira vonatkozó kérdésekre adott válaszaikat). Levezetés összesen két epizódban fordult elő: a negyedik órán a négyszögek átlóinak definícióját pontosítva jutottak el a sokszögek átlóinak definíciójához; az ötödik órán pedig a négyzet és a téglalap ismert területképletéből alkották meg a kocka és a téglatest felszínképletét.

„Eszközt teremteni más matematikai területeknek.”

A megfigyelt órákon tanult elnevezésekre, jelölési konvenciókra, tulajdonságokra és eljárásokra nyilván szükségük lesz a tanulóknak a későbbiekben. Megfigyelhető volt néhány strukturális epizód, de ezek többnyire a témakör belső struktúráját érintették (speciális négyszögfajták viszonya egymáshoz, analógia a húrtrapéz „szárai” és az egyenlőszárú háromszög „szárai” mint elnevezések között illetve a terület és a térfogat között). Más területtel – nevezetesen az algebrával – való kapcsolat a terület-térfogat- illetve felszínszámítás kapcsán merült fel, de itt inkább az algebra szolgáltatott eszközt a geometriához, mint fordítva.

„Gazdagítani a tanulók matematikáról alkotott képét.”

A látott órák alapján nem tudom megítélni, hogy a tanulóknak milyen kép alakult ki a matematikáról. A tanár – a következő dolgozat említésén kívül – sem a hétköznapi életből vett példákkal, sem érdekes kérdésekkel vagy játékokkal nem próbálta motiválni a gyerekeket.

Fogalmi vonatkozások

A megfigyelt órákon a tanár elsősorban az 1. Van Hiele szinten mozog, gyakran visszatérve a 0. szintre. Az egyes négyszögfajták pontos megnevezése vagy tulajdonságainak megállapítása során például több ízben mérésrel döntenek el, hogy bizonyos szögek vagy szakaszok egyenlők-e. Súlyt fektet a négyszögfajták kapcsolatrendszerének megtanítására, de úgy tűnik, a 2. szinten maga is bizonytalan. A negyedik órán például „rávezeti” a gyerekeket arra, hogy ha egy trapéznek van derékszöge, akkor pontosan két derékszöge van; illetve, hogy ha egy négyszögnek négy derékszöge van, akkor szerinte nem biztos, hogy téglalap (mert lehet négyzet is). Az ötödik órán a téglatest felszínének kiszámítása során hangsúlyozza, hogy milyen fontos eldönteni, hogy melyik a „magasság”, melyik a „hosszúság” és melyik a „szélesség” (a leghosszabb él a magasság, és a hosszúság hosszabb, mint a szélesség).

Az egyes négyszögfajták definiálása során keverednek az exkluzív és intenzív kategóriák. A paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet, trapéz, egyenlőszárú trapéz, derékszögű trapéz és deltoid mellett külön definiálják az „általános” négyszöget mint olyat, melyben az összes oldal hosszúsága és iránya különböző, de nem esik szó arról, hogy nem minden négyszög tartozik az említett fajták valamelyikébe.

A négyszögfajták tulajdonságait a tanár magyarázza el - időnként a kérdve kifejtés módszerét alkalmazva - gyakran egy-egy speciális négyszög megrajzolási módjával keverve. Szó esik például arról, hogy a rombusz megrajzolását kezdhethjük az átlóival, de az, hogy merőlegesek az átlók, még nem elég ahhoz, hogy rombuszt kapjunk, sőt még az sem, hogy az egyik átló merőlegesen felezi a másikat. A tulajdonságok leíró jelleggel hangzanak el, a

definíciók és az egyéb tulajdonságok közötti logikai kapcsolatra nem történik utalás.

A négyszögek osztályozása során a tanár súlyt fektet arra, hogy a tanulók lássák az egyes négyszögfajták egymással való kapcsolatát, de sem Venn-diagrammos szemléltetés, sem a szimmetriákra való utalás nem történt.

A tanár elsősorban precíz táblai rajzokkal (mindig standard pozícióban) igyekezett szemléltetni mondanivalóját, a téglatest felszínének és térfogatának kiszámításakor egy téglatest modellt használt. Az ábrák igen fontos szerepet játszottak az órákon, a legtöbb feladat kiindulópontja egy ábra volt (pl. jelöld meg a feladatlapon látható négyszögeken az egyenlő oldalakat és szögeket), melynek bizonyos tulajdonságait többször méréssel ellenőrizték.

Módszertani eszközök

A fő hangsúly az órákon elnevezések, jelölések és eljárások megtanítására és gyakorlására esett.

Hétköznapi példára való utalás egyszer fordult elő (az osztályterem téglatest alakú), a matematika más területével (algebra) való kapcsolat a kocka és a téglatest felszínének és térfogatának kiszámításakor merült fel.

A tanár fő eszköze a magyarázat és a kérdve kifejtés (demonstráció) volt. A feladatok megoldásához részletes instrukciókat adott: például mit milyen betűkkel vagy színekkel, milyen sorrendben kell jelölni; milyen sorrendben kell egy ötszög átlóit megrajzolni; hogyan kell a szögmérőt az ábrához illeszteni; először a képletet kell felírni, azután jöhet a számítás.

4. ESETTANULMÁNY - MAGYARORSZÁG

Az órákat egy budapesti 6 osztályos gimnázium 2. osztályában vettük fel, 2003. december 15-én, 16-án, 17-én és 18-án délelőtt.

Az iskolába 430 gyerek jár, és 57 tanár tanít.

A csoport 18 tanulója egy angol-német tagozatos osztály németül tanuló fele, előiskolázottságuk és családi hátterük vegyes.

A tanár 18 éves – részben általános iskolai, részben gimnáziumi – tanítási tapasztalattal rendelkezik.

Az osztály előzőleg a Pitagorasz-tételről és annak alkalmazásáról tanult. A felvett órák célja a sokszögekről tanult mindenféle ismeretek felelevenítése és a (4 osztályos) gimnáziumi felvételi vizsgára való felkészítés.

4.1. Az órák rövid leírása

Első óra: Háromszögek

Az óra első néhány percében a tanár az előző órán írt témazáró dolgozatot értékeli.

Ezután a geometriáról szóló beszélgetés következik: mivel foglalkozik, mik a főbb területei, kérdései, módszerei ... A gyerekek egyénileg elolvasnak egy tankönyvi szövegrészt, majd a tanár vezetésével megvitatják ezeket a kérdéseket.

Két közösen megoldott kombinatorikai kérdés következik, melyek szorosan kapcsolódnak alapvető geometriai fogalmakhoz (Négy pont hány egyenest határoz/hat/ meg? Egy egyenesen felvéve 10 különböző pontot, hány félegyenest kapunk?). A tanár nagy hangsúlyt fektet arra, hogy a gyerekek tiszta fogalmakkal dolgozzanak, és minden lehetőséget vegyenek figyelembe.

Ezután egy játék keretében átismétlik a háromszögekről tanultakat. A tanulóknak olyan állításokat kell mondaniuk, melyek minden háromszögre igazak (ha... akkor típusú állítások nem megengedettek). Aki nem tud új állítást mondani, amikor rákerül a sor, kiesik. Huszonvalahány állítás elhangzása után a még bent maradó 4 diák ötöst kap.

Egy kerékpáros túráról szóló összetett feladat következik, melynek során egy háromszög területét kell kiszámolniuk bizonyos algebrai feltételek teljesülése mellett. A tanár irányításával közösen dolgoznak a feladaton az óra végéig, a befejezés a következő órára marad.

Az óra végén a tanár házi feladatot ad. (Egy háromszög első szöge kétszerese a másodiknak, a harmadik szög 20° -kal nagyobb a másodiknál. Mekkora a szögek?)

Második óra: Szimmetrikus háromszögek és négyszögek

Az óra a házi feladat ellenőrzésével kezdődik. Egy tanuló bemutatja a táblánál a megoldását, de az egyik feltételt fordítva értelmezi, így rossz eredményt kap. Egy másik tanuló – szintén a táblánál – kijavítja.

Ezután befejezik a múlt órán nyitva maradt kérdést, melynek során különböző ismereteket kell összekapcsolniuk, mint: egyenletmegoldás, Pitagorasz-tétel, háromszög kerülete és területe, háromszög-egyenlőtlenség, szimmetrikus háromszögek tulajdonságai...

Ezt követően kartonpapírból kivágott háromszögek segítségével gyorsan átismétlik a szimmetrikus háromszögek fajtáiról és tulajdonságairól tanultakat. Két háromszöget összeillesztve különböző négyszögeket (rombusz, téglalap, paralelogramma, húrtrapéz) mutat fel a tanár. A tanulóknak meg kell adniuk az éppen látható négyszögfajta definícióját, és

igaz állításokat kell róla mondaniuk. A helytelen állításokra a kartonháromszögeket használva mutat ellenpéldát a tanár.

Az óra befejező részében egy összetett feladatba kezdenek bele. A tanár bemutatja derékszögű, egyenlőszárú háromszögek kartonpapírból kivágott sorozatát, ahol minden háromszög befogója akkora, mint az előző háromszög átfogója. Megfelelően egymásra illesztve a háromszögeket, trapézok növekvő sorozata válik láthatóvá. Az első kérdés ezeknek a trapézoknak a területe, ha a legkisebb háromszög területe adott. A választ és a további kérdéseket a következő órára halasztják.

Harmadik óra: Sokszögek területe

Az óra elején a tanár újra felteszi az előző órán nyitva maradt kérdést, ötöst ajánlva annak, aki megmondja az első trapéz területét. Körülbelül 3 perces gondolkodás után megszületik az első megoldás – indoklással együtt. A tanár a papírháromszögekkel szemlélteti a bizonyítást. Ugyanezzel a gondolatmenettel kiszámítják három további trapéz területét, míg végül a gyengébb tanulók is képesek folytatni.

Ezután a tanár egy ötszöget épít a háromszögekből. Egy gyerekeknek szóló matematikai lap előző havi számában szerepelt versenyfeladatként egy ugyanilyen ötszög területének a kiszámítása. Mielőtt a feladatot megoldanák, kiszámítják az ötszög szögeinek összegét, majd megbeszélik, hogy ugyanennyi lenne-e az összeg bármilyen ötszög esetén. Ezután visszatérnek az eredeti kérdésre. Mivel a megoldás kulcsa ugyanaz, mint az előző feladatban, könnyen boldogulnak vele.

Ezt követően a tanár bemutat egy házikó alakú ötszöget, melyet egy téglalap és egy derékszögű, egyenlőszárú háromszög összeillesztésével kapott. Kérdés, hogyan kell megváltoztatni a házikó magasságát, hogy az ötszög

területe a fele legyen az eredetiének. Ezután háromszög alakú „ablakot” vágnak a házikón, és kiszámítják a maradék síkidom területét.

A következőkben a tanulóknak össze kell gyűjteniük annyi területképletet, amennyit csak tudnak. Eközben megbeszélik a képletek közti kapcsolatokat. Kiderül, hogy bizonyos esetekben kétféle képlet is van ugyanannak a sokszögnek a területére, míg máskor ugyanaz a képlet alkalmazható különböző típusú sokszögekre. Miközben megbeszélik ennek okait, átismétlik a speciális négyszögfajták közti kapcsolatokat.

Az utolsó 5 percben kiszámolják egy négyzet területét, ha az átló hossza adott. Az egyik lehetőség, az átló hosszából kiszámítani az oldal hosszát, majd abból a területet. A tanár egyszerűbb megoldást kér, és néhányan rájönnek, hogy ha rombusznak tekintjük a négyzetet, akkor közvetlenül az átlóból kiszámítható a területe. Az óra a házi feladatok kijelölésével ér véget.

.

Negyedik óra: Sokszögek

Az óra a házi feladatok ellenőrzésével kezdődik.

Ezután hat tanuló írásbeli feladatot kap, mialatt további kettőnek cédulákra írt vegyes témájú (számelméleti, algebrai, geometriai) kérdések közül kell néhányat húznia, és szóban válaszolnia. Ha a felelő elakad, a többieknek is szól a kérdés.

Egy közösen megoldott, összetettebb feladat következik, melyben egy trapéz kerületét és területét kell kiszámítani, ha adott a magassága, továbbá a két párhuzamos oldal és egy további oldal hossza. A kerület kiszámításához a tanár segítő kérdéseket tesz fel.

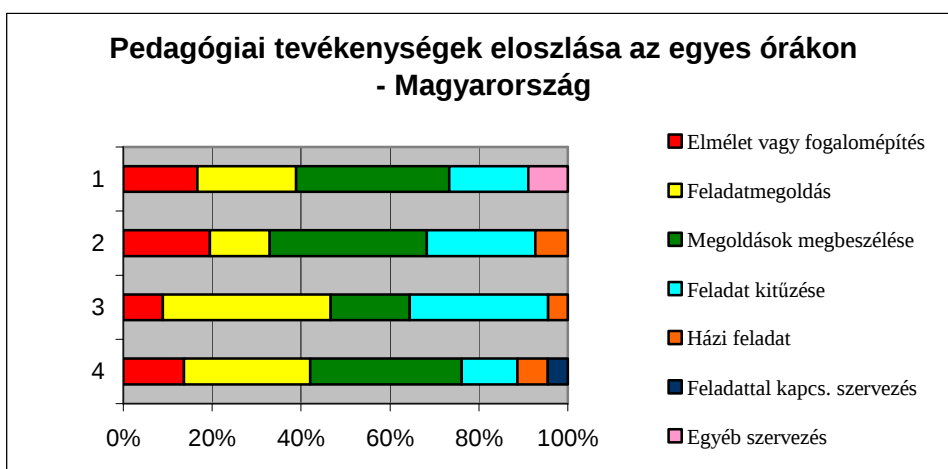
Ezután egy tankönyvi táblázat elemzése következik, melyben 3-, 4-, 5-, 6- és n -szögek átlóinak száma szerepel. A tanulók feladata az adatok értelmezése és az általános képlet indoklása.

A következőkben szabályos sokszögekről van szó. Először felelevenítik a szabályos sokszög definícióját, majd kiszámítják a szabályos öt- és hatszög belső szögét. Ezután – számelméleti megfontolásokat téve – megbeszélik, hogy a szabályos hétszög belső szöge fokokban mérve miért nem egész szám. A következő kérdéshez a tanár egy négyzet alakú lapot kilenc egyforma négyzetre oszt, majd a sarkokat a saroknégyzetek átlói mentén behajtva nyolcszöget kap. A diákoknak el kell dönteniük, hogy a nyolcszög szabályos-e. Miután elhangzik a helyes válasz (hogy miért nem), a kérdés a nyolcszög területe. A válasz házi feladat. Az óra további házi feladatok kijelölésével ér véget.

4.2. Kvantitatív elemzés

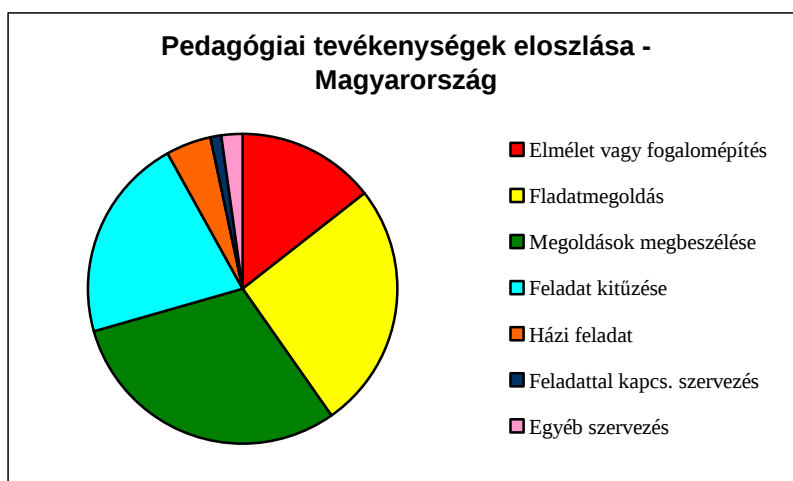
Pedagógiai tevékenységek

Az alábbi grafikon mutatja a négy óra során megfigyelt pedagógiai tevékenységek eloszlását:



Mint látható, az órák hasonló képet mutatnak, az idő nagy részét minden órán a feladatok kitűzése, azok megoldása és megbeszélése tölti ki. Szintén minden órán sor került fogalomépítésre, és az első óra kivételével mindig fordítottak időt az előző házi feladatok megbeszélésére és újak kitűzésére (a tanár az első óra végén is adott fel házi feladatot, de az erre fordított idő nem volt jelölhető). Feladattal kapcsolatos szervezéssel csak a negyedik óra második epizódjában került sor, amikor a tanár néhány gyereknek külön feladatot adott. Egyéb szervezés az első óra elején fordult elő a témazáró dolgozatok értékelése kapcsán.

A fenti tevékenységek eloszlása összesítve látható a következő kördiagrammon:

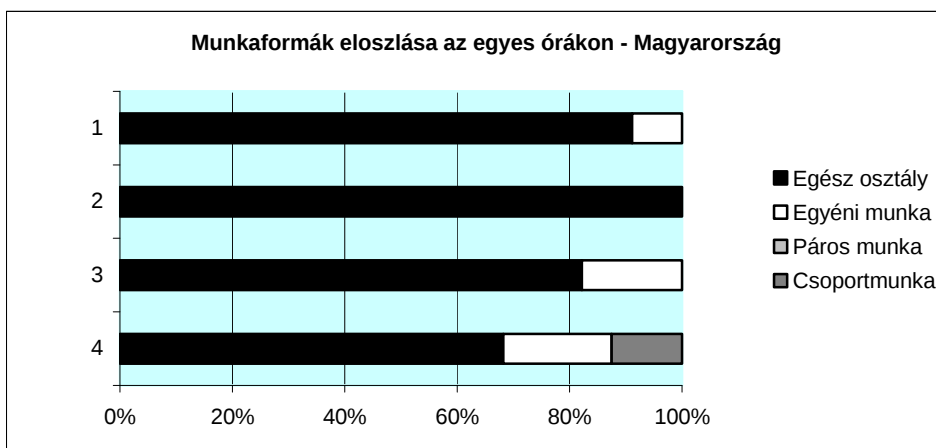


A legtöbb időt (30,3 %) megoldások megbeszélésével töltötték. Ez részben folyamatos tanári kérdések és tanulói válaszok formáját öltötte, részben pedig a kitűzött problémákkal kapcsolatos ötleteiket osztották meg egymással a tanulók. Feladatmegoldással foglalkoztak körülbelül az idő negyedrészében (25,7 %), a feladatok kitűzésére az idő 21,4 %-át fordította a tanár. Elméleti építkezés az idő 14,6 %-ában történt, többnyire a kérdeve kifejtés

módszerének alkalmazásával. Házi feladattal kapcsolatos tevékenység az idő 4,6 %-ában folyt (ez átlagosan 2 percet jelentett tanóránként). Nem a feladattal kapcsolatos szervezés az első óra elején fordult elő, ez az összidő 2,3 %-át tette ki, a negyedik óra feladattal kapcsolatos szervezési munkája az összidő mindössze 1,1%-át jelentette.

Munkaformák

A következő grafikonon látható a munkaformák megoszlása az egyes órákon:



Minden órán a frontális foglalkoztatás dominált, időnként egyénileg dolgoztak a gyerekek. Csoportmunka csak a negyedik órán fordult elő, de csak a tanulók egy részét érintette, a többiek ezalatt egyénileg dolgoztak.

A következő diagramm összesítve mutatja az egyes munkaformák időbeli eloszlását:



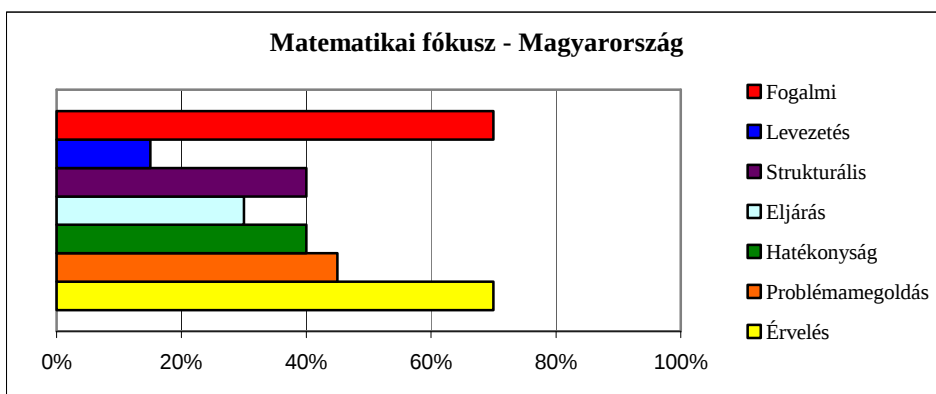
Az idő 85%-ában frontális munka folyt, 12%-ában egyénileg dolgoztak a gyerekek. A negyedik órán előforduló csoportmunka az összidő 3%-át tette ki, páros munka nem fordult elő a megfigyelt órákon.

Matematikai fókusz

A következő táblázat mutatja, hogy az egyes órákon a matematikai fókusz különböző fajtái hány epizódban fordultak elő:

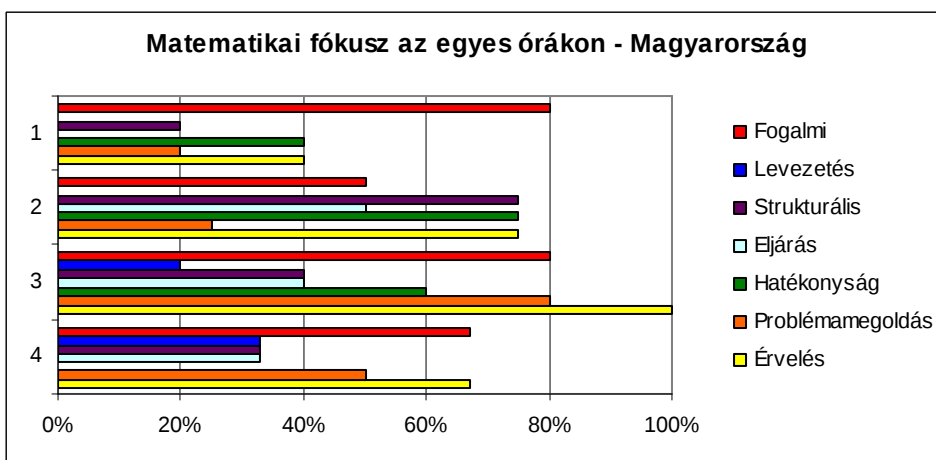
	1. óra	2. óra	3. óra	4. óra	Összesen
Epizódok száma	5	4	5	6	20
Fogalmi	4	2	4	4	14
Levezetés	0	0	1	2	3
Strukturális	1	3	2	2	8
Eljárás	0	2	2	2	6
Hatékonyság	2	3	3	0	8
Problémamegoldás	1	1	4	3	8
Érvelés	2	3	5	4	14

Az alábbi grafikon mutatja, hogy az egyes fókuszfajták a három óra során az epizódok hány százalékában fordultak elő:



Az összes fókuszfajta előfordult az epizódok valamelyikében. A legnagyobb hangsúly a fogalomépítésre és az érvelésre esett (mindkettő az epizódok 70%-ára volt jellemző). Minden órán szerepelt problémamegoldás (összesen az epizódok 45%-ában) és strukturális epizód (40%). Az első három óra gazdag volt hatékonysági elemet tartalmazó epizódokban (40%) és az első óra kivételével minden órán két-két epizódban szerepeltek eljárások (30%). Levezetés a harmadik óra második epizódjában és a negyedik óra két epizódjában fordult elő (15%).

A fókuszfajták eloszlása az egyes órákon:

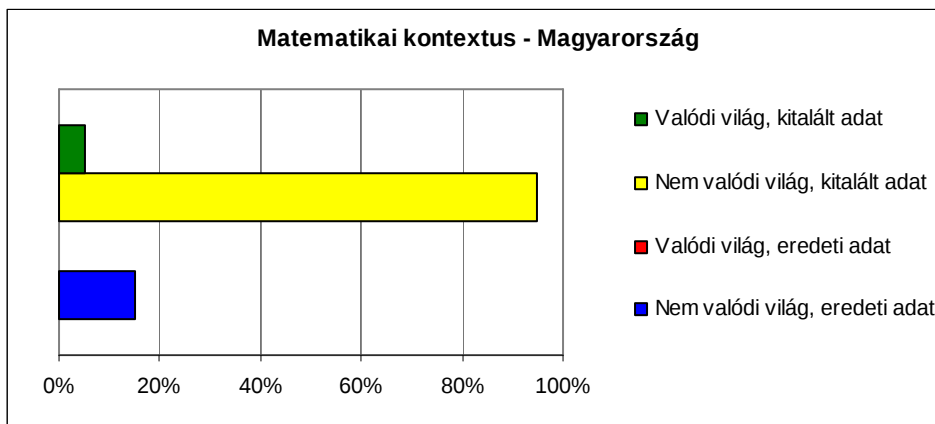


Matematikai kontextus

A következő táblázat mutatja, hogy az egyes órákon hány epizódban fordultak elő a különböző kontextusok:

	1. óra	2. óra	3. óra	4. óra	Összesen
Epizódok száma	5	4	5	6	20
Valódi világ, kitalált adat	0	1	0	0	0
Nem valódi világ, kitalált adat	4	4	5	6	19
Valódi világ, eredeti adat	0	0	0	0	0
Nem valódi világ, eredeti adat	0	2	0	1	3

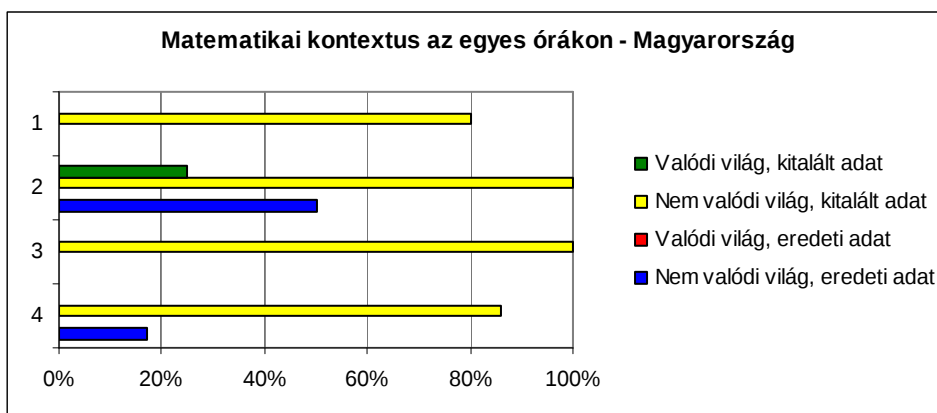
Az alábbi grafikon mutatja, hogy az egyes kontextusfajták a négy óra során az epizódok hány százalékában fordultak elő:



Valódi világgal (egy kerékpártúrával) kapcsolatos feladat megoldására csak a második óra második epizódjában került sor. A tanár által megadott (kitalált) adatokkal az epizódok 95%-ában dolgoztak, míg eredeti adatokkal (papírmodellekkel) összesen három epizódban (15%), a második illetve a

negyedik órán. Az első óra első epizódjában (a témazáró dolgozat értékelése során) a tanulók nem kaptak feladatot.

A kontextusfajták megoszlása az egyes órákon:

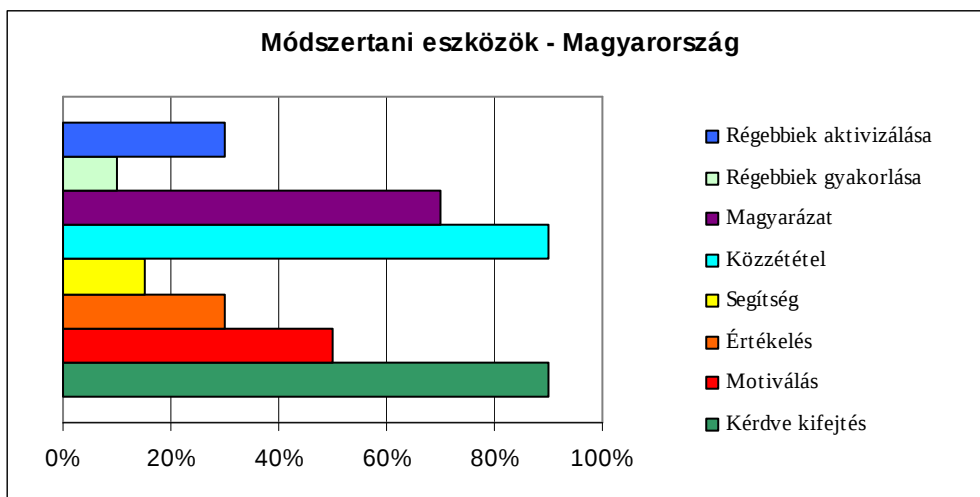


Módszertani eszközök

A következő táblázat mutatja, hogy a különböző módszertani elemek hány epizódban fordultak elő az egyes órákon:

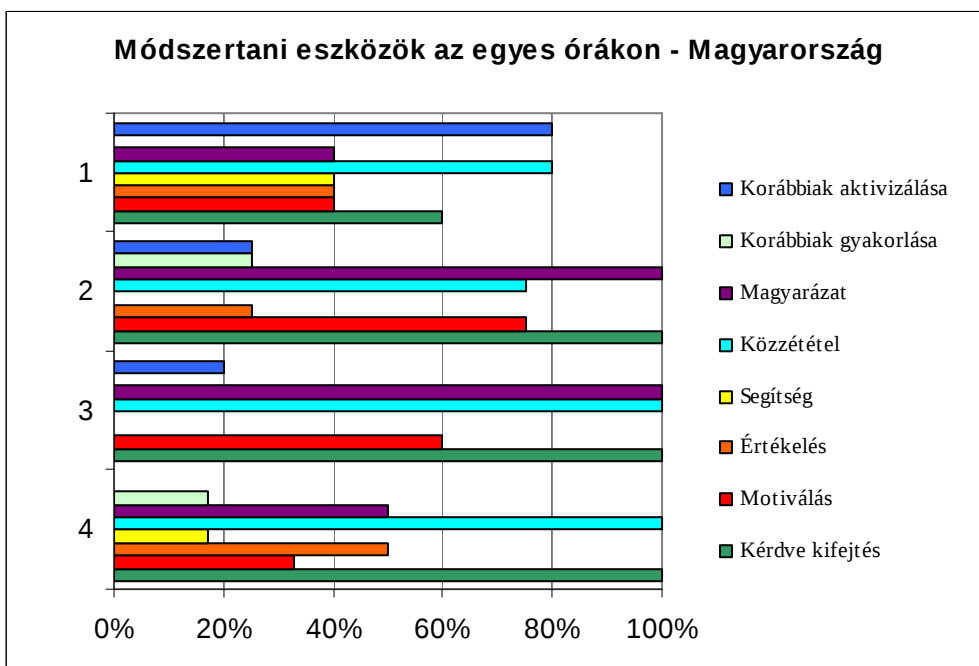
	1. óra	2. óra	3. óra	4. óra	Összesen
Epizódok száma	5	4	5	6	20
Régebbiek aktivizálása	4	1	1	0	6
Régebbiek gyakorlása	0	1	0	1	2
Magyarázat	2	4	5	3	14
Közzététel	4	3	5	6	18
Felfedeztetés	0	0	0	0	0
Segítség	2	0	0	1	3
Értékelés	2	1	0	3	6
Motiválás	2	3	3	2	10
Kérdve kifejtés	3	4	5	6	18
Differenciálás	0	0	0	0	0

Az alábbi grafikon mutatja, hogy az egyes módszertani eszközök a négy óra során az epizódok hány százalékában fordultak elő:



Differenciálás és felfedeztetés nem fordult elő a megfigyelt órákon, ezért ezeket nem tüntettem fel a grafikonon. Látható, hogy a tanár módszertani eszköztára gazdag, minden más eszköz alkalmazásra került legalább két epizódban. Leghangsúlyosabb módszertani eszköze a tananyag tanári kérdésekre adott tanulói válaszokon keresztül történő feldolgozása, kérdve kifejtés is és közzététel is előfordult az epizódok 90-90%-ában. Közbevezetett tanári magyarázat is minden órán szerepelt (összesen az epizódok 70%-ában), mint ahogy a motiválásra is sor került minden órán (50%). Régebbi ismeretek aktivizálása erősen jellemezte az első órát és a második illetve harmadik óra 1-1 epizódjában is előfordult (30%). A tanár a harmadik óra kivételével minden órán (összesen az epizódok 30%-ában) értékelte a tanulók munkáját. Tanári segítségre, ötletadásra az első és a negyedik órán került sor (15%). Nem az aktuális anyaghoz kapcsolódó régebbi ismeretek gyakorlása történt a második és a negyedik óra 1-1 epizódjában (10%).

A módszertani eszközök eloszlása az egyes órákon:



4.3. Kvalitatív elemzés

A Magyarországon megfigyelt órák témája rendkívül szerteágazó. Az előforduló feladatok érintik és gyakran összekapcsolják szinte az összes korábban tanult geometriai területet (speciális három- és négyszögek tulajdonságai, Pitagorasz-tétel alkalmazásai, területszámítás, sokszögek), megoldásuk során több ízben előfordulnak a matematika más területeihez (véges matematika, számelmélet) kapcsolódó megfontolások.

A geometriatanítás általános céljai

„A környező világ leírása, megértése és értelmezése.”

Valódi világhoz kapcsolódó feladat csak egyszer fordult elő (kerékpártúra), de a tanár nagy súlyt fektetett a feladatok értelmezésére, a megoldások szemléltetésére, matematikán belüli kapcsolatok bemutatására. Az első óra elején néhány perces beszélgetést folytatott a tanulókkal a geometriáról, melynek során a szó eredeti jelentése mellett szóba kerültek a főbb feladattípusok és néhány alkalmazási lehetőség is.

„Gazdag és változatos feladatkészlet biztosítása a tanulók számára.”

A kitűzött feladatok témájukban, nehézségi fokukban, kitűzési és feldolgozási módjukban is változatosak voltak. Mint láthattuk, minden matematikai fókusz, és csaknem minden módszertani eszköz előfordult a megfigyelt órák során. Voltak azonnali választ igénylő gyors kérdések (pl. háromszögekről szóló igaz állítások gyűjtése, területképletek felsorolása) épp úgy, mint több lépéses, vagy különböző területek összekapcsolását igénylő problémák; egyéni munkára vagy közös megoldásra szánt feladatok. Többször előfordult, hogy az összetettebb problémák megoldási stratégiáját közösen beszéltek meg és a befejezés házi feladatnak maradt (pl. kerékpártúra, egy hajtogatott nyolcszöggel kapcsolatos kérdések), vagy hogy egy összetett feladat megoldásához egyszerűbb lépésekre lebontott feladatsor vezet el (pl. trapézsorozat területe után egy – négy hasonló háromszögből felépített - ötszög területe).

„Megtanítani a diákokat sejtések megfogalmazására, bizonyítások készítésére, példák és ellenpéldák kitalálására.”

A tanár nagy hangsúlyt fektetett a pontos fogalmazásra, a válaszok indoklására, az összes megoldás megtalálására. Ha egy tanuló rossz megoldást adott, a tanár megkérdezte, hogy mindenkinek ez-e a véleménye, és közösen keresték meg, hogy az illető hol követte el a hibát. Több ízben sor került általánosításra (pl. konvex n -szög átlóinak száma) vagy az általánosítás irányába mutató feladatra (pl. egy egyenesen 10 különböző pont hány szakaszt határoz meg). Megbeszélték például, hogy minden konvex ötszögben ugyanannyi lesz a szögösszeg, mint az egyik feladatban szereplő konkrét ötszögben. Több epizódban is előfordult levezetés, az egyik feladat (trapézsorozat elemeinek területe) rekurzív gondolatmenetet igényelt.

”Eszközt teremteni más matematikai területeknek.”

A megfigyelt órákra jellemző volt a matematika különböző területeinek összekapcsolása. Az e célt szolgáló feladatokban azonban nem a geometriai ismereteket kellett más területeken alkalmazni, hanem más területek módszerei vezettek el egy-egy geometriai jellegű feladat megoldásához. Algebrai eszközöket használtak a számításos feladatok megoldásához, kombinatorikus kérdés volt például, hogy négy pont hány egyenest határozhat meg, számelméleti megfontolást igényelt például az a kérdés, hogy egy szabályos sokszög két szomszédos oldala által bezárt szög mikor nem lesz (fokokban mérve) egész szám.

„Gazdagítani a tanulók matematikáról alkotott képét.”

Úgy gondoljuk, hogy a geometria tárgyának és módszereinek megvitatása, a matematika különböző területeinek összekapcsolása és a változatos feladatanyag segíti ennek a célnak az elérését.

Fogalmi vonatkozások

A megfigyelt órákon a tanár mindvégig megköveteli a pontos fogalmazást, indoklást és az összes lehetséges eset számbavételét, azaz a 3. Van Hiele szintre igyekszik eljuttatni a tanulókat. Ezt a célt szolgálják az olyan kérdések például, „mondjatok olyan állításokat, melyek minden háromszögre igazak” vagy „nem lehet-e úgy felvenni a 4 pontot, hogy más eredményt kapjunk”. A háromszögekre vonatkozó igaz állítások gyűjtése kapcsán megbeszélik, hogy a Pitagorasz-tétel csak derékszögű háromszögekre vonatkozik, de például az az állítás, hogy „ha egy háromszögben $a^2 + b^2 = c^2$, akkor a háromszög derékszögű” már minden háromszögre igaz. Több ízben történik utalás korábban bizonyított tételekre (pl. Pitagorasz-tétel, trapéz területképlete), levezetik például a konvex sokszögek átlóinak számára vonatkozó összefüggést.

Új fogalmak bevezetésére nem került sor, a régebben tanultak elmélyítését szolgálták a vegyes feladatok, melyek megoldása során a tanulóknak kellett rájönnie, hogy milyen korábbi (többször nem csak geometriai) ismeret vezet célra.

A táblai rajzoknál a tanár nem törekedett a pontosságra, a kerékpártúrával kapcsolatos feladat esetén például hangsúlyozta, hogy ez csak egy vázlat, az adatok alapján kell eldönteni, milyen esetek lehetségesek.

Előfordult, hogy rossz válasz esetén megkérdezte, hogy milyen kérdés esetén lenne az jó válasz.

Módszertani eszközök

A fő hangsúly az eddig tanult geometriai fogalmak felelevenítésére és elmélyítésére esett. Gyakorlásra illetve problémamegoldásra szánt feladatok épp úgy előfordultak, mint a gyakorlati készségek fejlesztését szolgáló számítási feladatok vagy a matematika különböző területeit összekapcsoló, a fogalomépítést segítő, gondolkodásfejlesztő feladatok.

Láthattunk példát ötletet kívánó vagy felfedeztető jellegű (induktív következtetést igénylő) feladatra is és szigorú levezetésre (deduktív következtetés) is. A tanár gyakran saját magyarázataival egészítette ki vagy foglalta össze a megoldásokat (demonstráció).

A tanulók motiválását szolgálta a tanár értékelő megjegyzései mellett az első óra végi játék, a szemléltetőeszközök használata és az egyik feladat első megoldójának felajánlott ötös.

5. ESETTANULMÁNY - SPANYOLORSZÁG

Az órákat egy Sevilától 10 km-re fekvő falu középiskolájának 1. osztályában vettük fel. Az ide járó tanulók egyik része hagyományos falusi környezetből származik, ahol a tanulást nem becsülik sokra. Ezek a tanulók rendszerint nem tanulnak tovább, átlagos gazdasági háttérrel rendelkeznek. A tanulók másik része a falun kívüli lakókörzetben lakik. Az ő anyagi hátterük jó, szüleik többnyire értelmiségiek, akik nagy elvárásokkal rendelkeznek gyermekeik tanulmányait illetően. Céljuk az egyetemi vagy főiskolai végzettség.

Az iskolaépületet a 90-es évek eleje óta háromszor bővítették a környékbeli lakosság növekedésének köszönhetően.

A tanár - képesítés nélkülként - már 17 éves korában kezdte pályáját, 23 éves kora óta tanít matematikát, 1997 óta tanít ebben az iskolában. Aktívan részt vesz a szakmai közéletben, módszertani szakkönyveket ír, tanártovábbképzéseket tart. Az elektronikus tankönyv, amiből a geometriát tanulják, szintén az ő munkája.

Az osztályba 29 tanuló jár, 12 fiú, 17 lány. Vegyes képességű 7. (középiskolai 1.) osztály.

A felvételek 2004. május 10-én, 11-én, 13-án és 14-én készültek (hétfő 3. óra, kedd 1. óra, csütörtök 4. óra, péntek 4. óra), mindegyiket a számítógépteremben tartották.

5.1. Az órák rövid leírása

Első óra: Sokszögek: általános tulajdonságok, háromszögek szerkesztése, ismerkedés a Cabri programmal

Az óra elején a tanár PowerPoint segítségével előadást tart a sokszögekről. Definiálja a „poligon” szó jelentését, példákat mutat be a hétköznapi életből sokszög alakú tárgyakra, elmagyarázza a poligon szó eredetét, a hatszög példáján bemutatja a szabályos sokszögek főbb tulajdonságait. Feleleveníti a háromszögek oldalak, illetve szögek szerinti osztályozását, majd elmondja, hogy a következő feladatokat az elektronikus tankönyvben kell megoldani, bemutatja, hogyan.

Háromszögszerkesztési feladatok következnek: három oldalból, három szögből, egy oldalból és két szögből vagy két oldalból és a közbezárt szögből. Közben előfordulnak ilyen kérdések: Lehetséges-e háromszöget szerkeszteni a következő oldalakból...? Rajzolj három egyenlőszárú derékszögű háromszöget és három egyenlőoldalú háromszöget. Jegyezd fel a füzetedbe az oldalak hosszát.

Innentől kezdve a tanulók párokban dolgoznak a számítógéppel. A tanár körbejár és válaszol a diákok kérdéseire, melyek főképp a számítógép illetve a program használatával kapcsolatosak. Időnként a teljes osztálynak elmagyarázza, hogyan kell végrehajtani a feladatot.

Egy idő után a tanár félbeszakítja ezt a tevékenységet, és megkéri a diákokat, hogy otthon fejezzék be.

Az óra második fele a Cabri használatáról szól. A tanár egy példán keresztül bemutatja a főbb utasításokat, melyeket majd használniuk kell, majd a tanulók ismét párosával dolgoznak ilyen feladatokon, mint: pont felvétele, egyenes szerkesztése, szakasz szerkesztése, szög szerkesztése. A tanár

körbejár és az egész osztálynak szóló magyarázataival segít a program használatával kapcsolatban felmerülő problémákat tisztázni.

A feladatok befejezése házi feladat, az óra végén a tanár elmagyarázza, hogyan installálhatják otthon a programot.

Második óra: Pitagorasz-tétel, a háromszög nevezetes pontjai és vonalai

Az óra elején a tanár PowerPoint segítségével bemutatja az elektronikus tankönyvből a Pitagorasz-tétel két bizonyítását, majd két egyszerű alkalmazását (derékszögű háromszög két oldala adott, mekkora a hiányzó átfogó az első példában, a hiányzó befogó a másodikban). Ezután megoldja a következő feladatot: Egy ács egy 60x80 cm-es ablakot szeretne építeni. Úgy gondolja, hogy az átlója 102 cm lesz. Igaza van? Előadása végén megkéri a tanulókat, hogy otthon alaposan nézzék át a tankönyvben az elhangzottakat.

Ezt követően a tanár elmagyarázza a további teendőket. A tanulóknak az elektronikus tankönyv felfedezett feladatsorát követve fel kell dolgozniuk a következő témákat: a háromszög szögösszege 180° , a háromszög területképletének levezetése a téglalapéból, a háromszög nevezetes pontjai és vonalai, a Pitagorasz-tétel ellenőrzése hasonló derékszögű háromszögeken, a tétel bizonyítása. A feladatok manipulatív jellegűek, többnyire egy-egy tulajdonság ellenőrzését jelentik (pl.: Próbáld ki különböző háromszögeken, hogy az oldalfelező merőlegesek egy pontban metszik-e egymást, és ez a pont a körülírt kör középpontja-e?). Amit nem sikerül az órán befejezni, házi feladat. A tanár kitűz néhány hasonló, Cabrival megoldandó kérdést is otthonra.

Az óra hátralevő részében a tanulók párosával dolgoznak, a tanár körbejár és segít a technikai problémák megoldásában. Felhívja a figyelmet arra, hogy az

elektronikus tankönyv tartalma megegyezik a nyomtatott tankönyvvél, javasolja, hogy otthon azt is olvassák el.

Az óra végeztével a tanár még néhány tanácsot ad a Cabri használatával kapcsolatban.

Harmadik óra: A derékszögű háromszög, Pitagorasz-tétel és alkalmazásai

Az óra a tanár előadásával kezdődik, aki PowerPoint segítségével áttekinti a derékszögű háromszögek főbb tulajdonságait: a hegyesszögek összege 90° ; egyenlőszárú derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság két egybevágó háromszögre bontja azt. Röviden bemutatja a bizonyításokat, majd feleleveníti az előző órán látottakat: Pitagorasz-tétel két bizonyítással; két egyszerű alkalmazás; a nevezetes 3, 4, 5 oldalú háromszög és a hozzá hasonló háromszögek derékszögűek; ablakos feladat.

Ezután bemutat egy sor, a Pitagorasz-tétel alkalmazásával megoldható kérdést, 1-1 percet szentelve a megoldásoknak. Például: négyzet átlójának kiszámítása az oldalból; téglalap átlójának kiszámítása az oldalakból, egyenlőszárú háromszög magasságának kiszámítása; adott sugarú körbe írt négyzet oldalának kiszámítása.

Ezt követően elmagyarázza a tanulók teendőit, melyek a Pitagorasz-tétellel kapcsolatos feladatok az elektronikus tankönyvből.

A tanulók párokban dolgoznak. A tanár hamarosan észreveszi, hogy nem világos számukra, hogy mi a feladat, ezért gyakran félbeszakítja a munkát és felhívja az osztály figyelmét, hogy gondosan olvassák el az utasításokat minden feladatnál; megmutatja, hogy hol található az elektronikus tankönyvben a Pitagorasz-tétel; elmagyarázza a bizonyítást; bemutatja az egyik feladat megoldását.

Látva a tanulók folyamatos nehézségeit, úgy dönt, hogy közösen oldanak meg néhány feladatot. Az első kérdés, hogy ha egy pitagorasz-i háromszög oldalait megszorozzuk egy természetes vagy racionális számmal, akkor az így kapott háromszög is pitagorasz-i lesz-e. A tanár folyamatos kérdésekkel igyekszik elmélyíteni a hasonló háromszögek fogalmát, és világossá tenni, hogyan ellenőrizhető a Pitagorasz-tétel bármilyen adott derékszögű háromszögre. Megpróbál kapcsolatot teremteni az $a^2 = b^2 + c^2$ algebrai formula és a szóbeli megfogalmazás („a befogókra emelt négyzetek...”) között. Ezután a négyzet kétféle feldarabolásával igazolják a Pitagorasz-tételt.

A házi feladat derékszögű háromszög szerkesztése Cabrival.

Negyedik óra: A háromszög nevezetes pontjai és vonalai

Az óra elején a tanár elmagyarázza, hogy mi lesz a feladat. Cabri segítségével meg kell rajzolni a következőket: pont; egyenes kis betűvel címkézve; szakasz a hosszának megjelölésével; háromszög az oldalfelező merőlegesekkel, melyen jelölve van az oldalak hossza, a szögek nagysága és az oldalfelezők metszéspontja; hasonló feladat a magasságokkal, szögfelezőkkel és súlyvonalakkal.

A tanár projektorral kivetítve saját gépén bemutatja az összes szerkesztést, melyekhez a program használatával kapcsolatos magyarázatokat fűz.

Ezután a tanulók párokban dolgoznak a bemutatott szerkesztéseken. Miközben a tanár körbejár, kiderül, hogy néhány tanulónak nem sikerült otthon installálnia a Cabri programot, ezért a tanár, félbeszakítva a munkát, tanácsokat ad ezzel kapcsolatban. Mivel többeknek nehézséget okozott a szögek megmérése a Cabrival rajzolt háromszögekben, újra elmagyarázza a szakaszok hosszának, illetve a szögek nagyságának mérésének és jelölésének módját. Ezután ismét bemutatja az oldalfelező merőlegesek és azok

metszéspontjának – a körülírt kör középpontjának – szerkesztését. A háromszög változtatásával eljut annak felfedezéséig, hogy a háromszög típusától függ, hogy a körülírt kör középpontja hova (a háromszögön belül, kívül vagy az egyik oldalra) esik. Különböző típusú háromszögekkel kísérletezve észreveszik például, hogy egyenlőoldalú háromszög esetén belül lesz, míg tompaszögű háromszögnél kívül. A tanár arra bíztatja a diákokat, hogy a többi nevezetes ponttal is kísérletezzenek, tegyenek fel kérdéseket, vonjanak le következtetéseket.

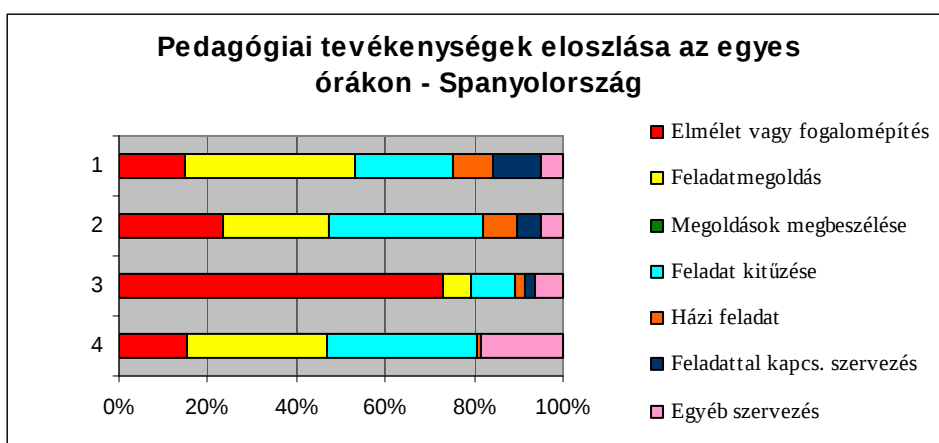
A tanulók folytatják a munkát, ezúttal a szögfelezők megszerkesztésével. A tanár körbejár, segít, a tipikus problémákat az egész osztállyal tisztázza.

Az óra végén a tanár utal a következő órai anyagra (négyszögek) és házi feladatot ad.

5.2. Kvantitatív elemzés

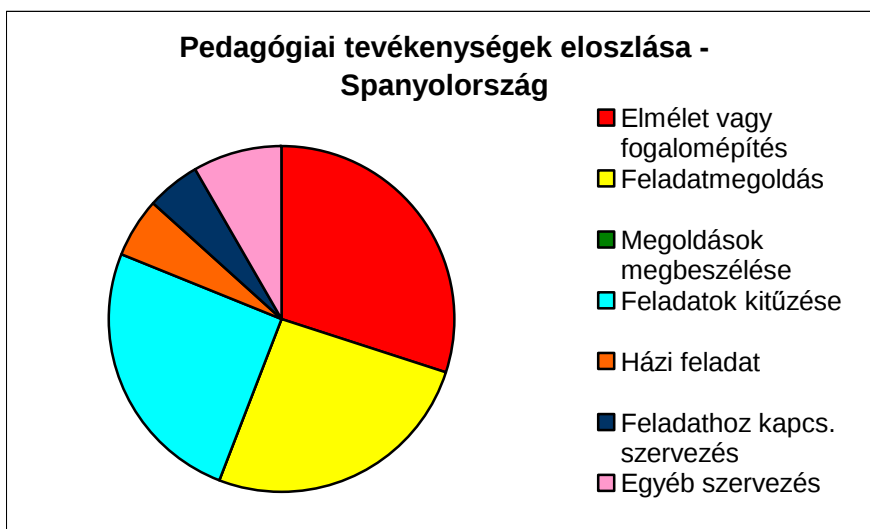
Pedagógiai tevékenységek

Az alábbi grafikon mutatja a négy óra során megfigyelt pedagógiai tevékenységek eloszlását:



Az idő kb. 80%-át minden órán az elméleti anyag ismertetése, feladatok kitűzése és megoldása töltötte ki. Minden órán sor került házi feladatok kitűzésére és a számítógépek használatával kapcsolatos, a feladatokhoz kapcsolódó és/vagy „egyéb” szervezésre is. A feladatok megoldásának megbeszélésében a tanulók nem vettek részt, alkalmanként a tanár ismertette bizonyos feladatok megoldását.

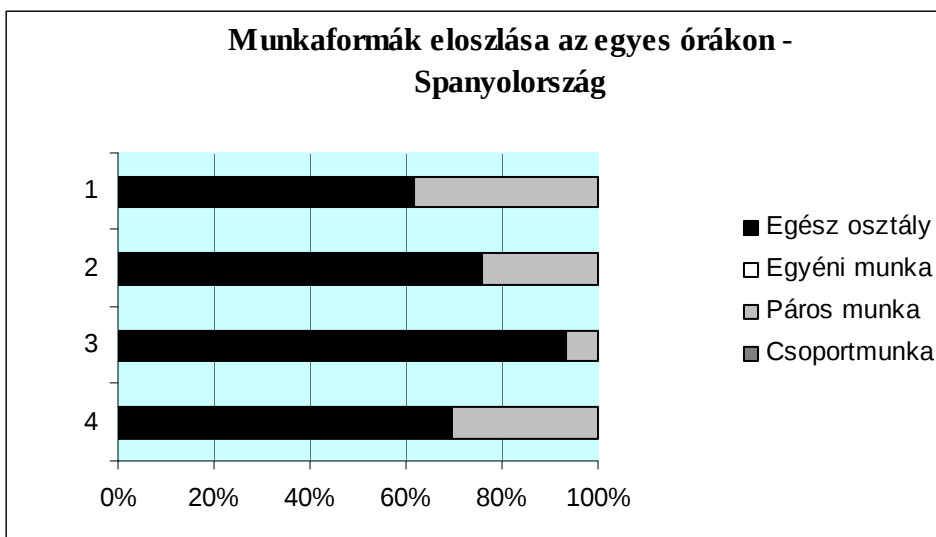
A fenti tevékenységek eloszlása összesítve látható a következő kördiagrammon:



Az idő 31%-ában a tanár ismertette az elméleti anyagot. Feladatok megoldásán dolgoztak a gyerekek az idő 26%-ában. A feladatok kitűzésével az idő 25%-a telt. Egyéb szervezésre a tanár az idő 8%-át, feladathoz kapcsolódó szervezésre az idő 5%-át fordította. Házi feladatok kitűzése az idő 5%-ában történt.

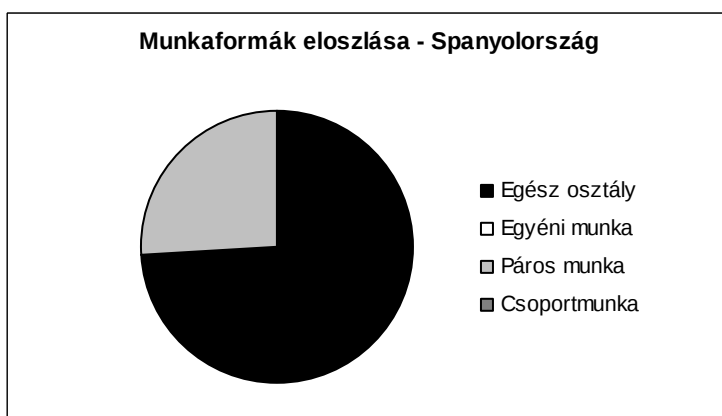
Munkaformák

A következő grafikonon látható a munkaformák megoszlása az egyes órákon:



Minden órán a frontális munka dominált, az idő kisebbik részében párosával dolgoztak a gyerekek a számítógépekkel.

Összesítve:



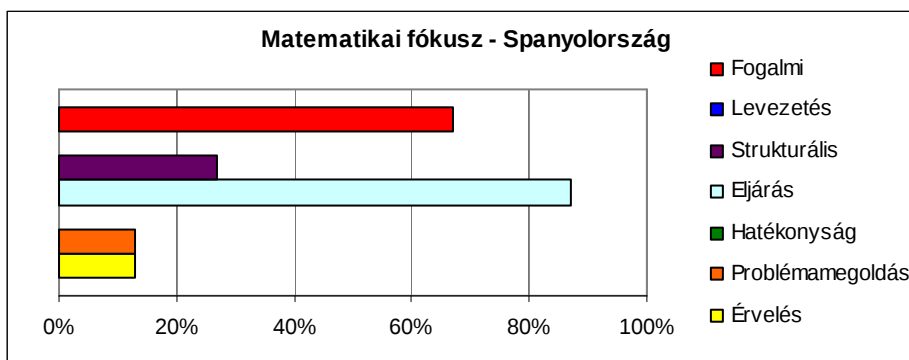
Az idő 74%-ában frontális munka (tanári előadás, magyarázat, instrukció) folyt, míg 26%-ában (feltehetőleg a rendelkezésre álló számítógépek számának köszönhetően) a tanulók párokban dolgoztak (de ezalatt a tanár önálló munkára bízta őket).

Matematikai fókusz

A következő táblázat mutatja, hogy az egyes órákon a matematikai fókusz különböző fajtái hány epizódban fordultak elő:

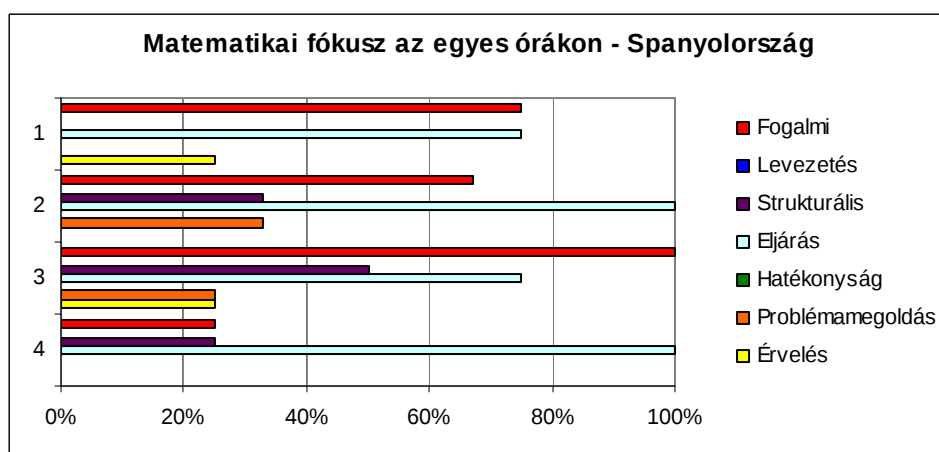
	1. óra	2. óra	3. óra	4. óra	Összesen
Epizódok száma	4	3	4	4	15
Fogalmi	3	2	4	1	10
Levezetés	0	0	0	0	0
Strukturális	0	1	2	1	4
Eljárás	3	3	3	4	13
Hatékonyság	0	0	0	0	1
Problémamegoldás	0	1	1	0	2
Érvelés	1	0	1	0	2

Az alábbi grafikon mutatja, hogy az egyes fókuszfajták a három óra során az epizódok hány százalékában fordultak elő:



Az epizódok 87%-ában szerepelt valamilyen (többnyire az elektronikus tankönyv ill. a Cabri használatával kapcsolatos) eljárás. Fogalmakkal kapcsolatos munka folyt az epizódok 67%-ában. Strukturális elemet összesen négy epizód tartalmazott: a második óra első, a harmadik óra első és negyedik illetve a negyedik óra harmadik epizódja; többnyire tanári előadás folyamán (27%). Problémamegoldásra a második és a harmadik óra 1-1 epizódjában került sor a Pitagorasz-tétel alkalmazása illetve egy hasonló derékszögű háromszögekkel kapcsolatos feladat megoldása során (13%). Érvelés az első és a harmadik óra 1-1 epizódjában fordult elő (13%).

Az fókuszfajták eloszlása az egyes órákon:



Matematikai kontextus

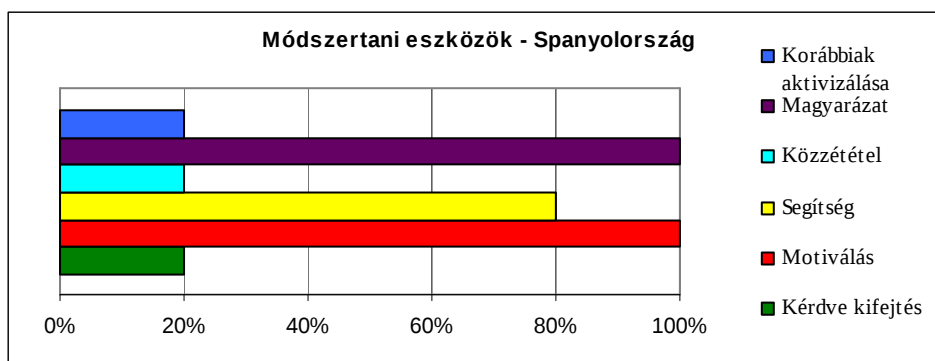
Valódi világgal kapcsolatos vagy eredeti adatot tartalmazó feladatok nem fordultak elő a megfigyelt órákon, minden epizódra a „nem valódi világ, kitalált adatok” kategória volt jellemző.

Módszertani eszközök

A következő táblázat mutatja, hogy a különböző módszertani elemek hány epizódban fordultak elő az egyes órákon:

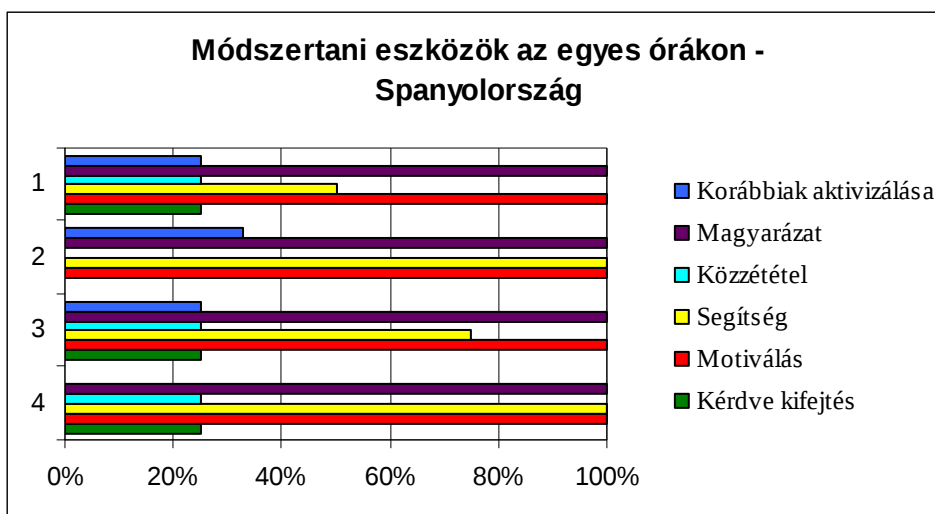
	1. óra	2. óra	3. óra	4. óra	Összesen
Epizódok száma	4	3	4	4	15
Korábbiak aktivizálása	1	1	1	0	3
Korábbiak gyakorlása	0	0	0	0	0
Magyarázat	4	3	4	4	15
Közzététel	1	0	1	1	3
Felfedeztetés	0	0	0	0	0
Segítség	2	3	4	4	13
Értékelés	0	0	0	0	0
Motiválás	4	3	4	4	15
Kérdve kifejtés	1	0	1	1	3
Differenciálás	0	0	0	0	0

Mint látható, korábban tanultak gyakorlása, felfedeztetés, értékelés és differenciálás egyik órán sem fordult elő, ezért ezeket a kategóriákat nem tüntettem fel az alábbi grafikonon.



Tanári magyarázat és motiválás minden epizódban előfordult, bár vitatható, hogy önmagában a számítógép használata valóban tartós és folyamatos motivációt jelent-e a gyerekek számára. Az epizódok 80%-ában szükség volt tanári segítségre – részben a feladatok megoldásával, részben a számítógép illetve a programok használatával kapcsolatban. Korábban tanultak aktivizálására az első három óra 1-1 epizódjában került sor (20%). Tanulói válaszok (közzététel) a kérdeve kifejtés módszerével párhuzamosan az első, harmadik és negyedik óra 1-1 epizódjában fordultak elő (20-20%).

A módszertani eszközök eloszlása minden órán hasonló képet mutat:



5.3. Kvalitatív elemzés

A megfigyelt órák anyaga a háromszögekkel kapcsolatos ismereteket öleli fel: háromszögek osztályozása, Pitagorasz-tétel és alkalmazásai, a háromszögek nevezetes vonalai és pontjai. Minden óra tanári előadással kezdődött, melynek során a tanár PowerPoint segítségével áttekintette az óra

témáját (esetenként az előző illetve következő óra témáját is) az elektronikus tankönyv alapján. Ezután kitűzte a feladatokat, bemutatta azok megoldási módját, részletes utasításokat adott a számítógép és az oktatóprogramok (elektronikus tankönyv, Cabri) használatával kapcsolatban. Ezt követően a gyerekek párosával dolgoztak a számítógépekkel a feladatokon, míg a tanár körbejárva segített azoknak, akik elakadtak, időnként az egész osztálynak szóló magyarázatokkal szakítva meg a munkát.

A geometriatanítás általános céljai

„A környező világ leírása, megértése és értelmezése.”

Valódi világgal kapcsolatos feladatok nem fordultak elő, de történetek utalások hétköznapi példákra. A sokszögek definíciójával kapcsolatban bemutatott a tanár néhány ábrát a tankönyvből, melyek sokszög alakú tárgyakat ábrázoltak (például nyolcszög alakú faliórát) és második órán szerepelt egy – a Pitagorasz-tétel alkalmazásával kapcsolatos – szöveges feladat.

„Gazdag és változatos feladatkészlet biztosítása a tanulók számára.”

Témáját tekintve a feldolgozásra szánt anyag, így a hozzá kapcsolódó feladatkészlet is változatos volt. A feldolgozás módjában a változatosságot az jelentette, hogy bizonyos feladatokat az elektronikus tankönyvben, másokat Cabri segítségével kellett megoldani, miközben e programok kezelési módját is meg kellett tanulniuk a gyerekeknek.

„Megtanítani a diákokat sejtések megfogalmazására, bizonyítások készítésére, példák és ellenpéldák kitalálására.”

A feladatok egy része felfedeztető jellegű volt, a tanár több ízben buzdította a tanulókat kísérletezésre, kérdések kitalálására, sejtések megalkotására. (például hogy figyeljék meg, hogy egy háromszög változtatása során mi történik a különböző nevezetes pontokkal). Gyakran azonban előre elmondta, hogy mit kell felfedezni, és általában nem követte bizonyítás a felfedezést.

”Eszközt teremteni más matematikai területeknek.”

A megtanult ismeretek és technikák (pl. Pitagorasz-tétel, a Cabri kezelésmódjának elsajátítása) a későbbi számításos geometriai feladatoknál illetve elemi geometriai sejtések megalkotásában is hasznos eszközt jelenthetnek. A tanári előadások során megfigyelhető volt néhány strukturális elem. Kapcsolatot teremtett például a tanár a Pitagorasz-tétel elemi geometriai szemléltetése és az $a^2 + b^2 = c^2$ algebrai formula között; bemutatta, hogy ugyanavval a számmal megszorozva egy derékszögű háromszög mindhárom oldalát, az így kapott háromszög is kielégíti a Pitagorasz-tételt.

„Gazdagítani a tanulók matematikáról alkotott képét.”

A felfedeztető feladatsorok, a biztatás a kísérletezésre és sejtések gyártására, a számítógép használata mind alkalmas lehet erre a célra. A megfigyelt órákból nem derül ki, hogy a tanulók mihez kezdtek ezekkel a lehetőségekkel.

Fogalmi vonatkozások

A feladatok nagy része közölt ismeretek konkrét példákon történő ellenőrzésével vagy alkalmazásával kapcsolatos. A vizuális megítélést

helyettesíti a számítógép, hiszen a program kiírja, hogy mekkorák a háromszög oldalai és szögei, így a kiírt adatok alapján dönthető el, hogy a háromszög egyenlőszárú-e, derékszögű-e stb. A tankönyv (és a tanár) főleg a 2. Van Hiele szintet (a Pitagorasz-tétel bizonyításakor a 3. szintet) célozza meg, de nehezen ítéltethető meg, a gyerekek szintje.

A megfigyelt órák során számos definíciót közöl a tanár, miközben áttekinti a tárgyalandó anyagot. Az első órán például definiálja a sokszög fogalmát (az, amit egyenes szakaszok határolnak) és az egyes háromszögfajtákat (egyenlőoldalú, egyenlőszárú, „általános”, hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű); később a háromszög nevezetes vonalait és pontjait. A definíciókat és összefüggéseket az elektronikus tankönyvből kivetített ábrákkal szemlélteti. Egyedül a Pitagorasz-tétel esetében követi a két konkrét példán való szemléltetést bizonyítás (szintén a tankönyv alapján). Az elmondottak átisméltése házi feladat.

A kapcsolódó feladatok megoldása során sok a software használatából adódó technikai probléma, nehézséget jelent a szögek pontos beállítása, pontok és távolságok pontos kijelölése, melyek elterelik a figyelmet a matematikai tartalomról. Gondot okoz például a tanulóknak, hogy a háromszög-szerkesztési feladatok között (a háromszög-egyenlőtlenség felfedezését célzó) megoldhatatlan feladat is szerepel, amikor is a tanár közli (a felfedeztetni kívánt összefüggést), hogy ha két oldal összege kisebb a harmadiknál, akkor nem szerkeszthető belőlük háromszög. Szintén problémát jelentett egyes tanulóknak, hogy „miért olyan nagy az egyenes, amit rajzoltam?”. „Mert az egyenesnek nincs kezdő- és végpontja” – válaszolta a tanár.

Bizonyítás, érvelés, indoklás a tanulók részéről egyáltalán nem történt, ez nem is volt elvárás, bizonyítéknak számított, amit a képernyőn láthattak (például hogy a nevezetes vonalak egy pontban metszik egymást, vagy hogy

hegyesszögű háromszög esetén a magasságpont a háromszögön belül, tompaszögűnél a háromszögön kívül van).

Módszertani eszközök

A tanár a fogalmak kialakításának deduktív módját választotta: egy-egy példával illusztrálva közölte a definíciókat, majd kitűzött a bemutatott fogalmakhoz kapcsolódó feladatokat, melyeket a tanulóknak számítógép segítségével kellett megoldaniuk. Minden epizód tartalmazott tanári magyarázatot, részben a matematikai tartalommal, részben a számítógép használatával kapcsolatban.

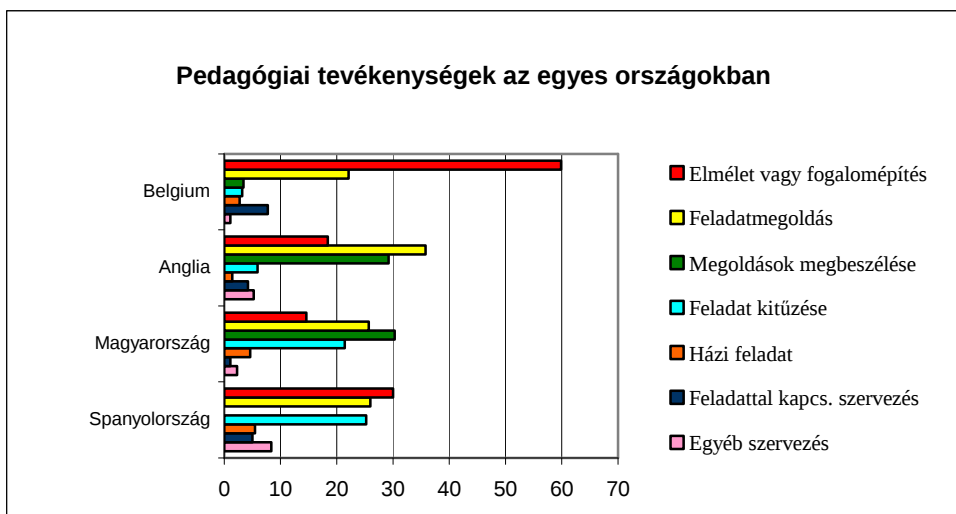
A feldolgozandó anyag a rendelkezésre álló időhöz képest igen nagy volt, talán ez indokolta a tanár demonstratív óravezetését. A kitűzött feladatok között több felfedeztetésre alkalmas probléma szerepelt, de igen kis mértékben használták ki az ezekben rejlő lehetőségeket. A feladatok megoldását nem beszéltek meg, a tanár esetenként bemutatta a megoldást. Bár az órákon a frontális munka dominált, összesen mindössze három epizódban alkalmazta a tanár a kérdve kifejtés módszerét, és csak ebben a három epizódban találkozhattunk (többnyire egyszavas) tanulói válaszokkal. Fő motivációs eszköznek a tanár a számítógépes feldolgozási módot szánta.

6. ÖSSZEHASONLÍTÁS

6.1. Kvantitatív elemzés

Pedagógiai tevékenységek

Az alábbi grafikon mutatja, hogy a különböző országokban felvett órák összidejének hány százalékában fordultak elő az egyes pedagógiai tevékenységfajták:



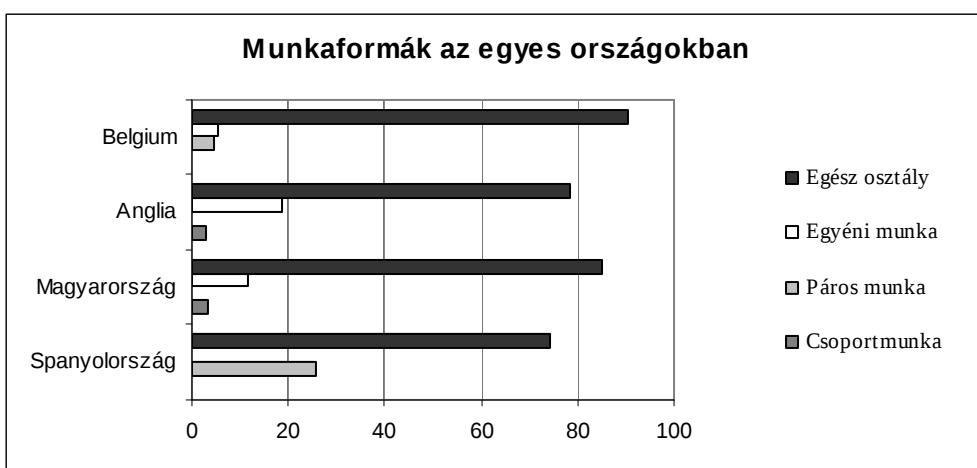
Belgiumban az órák nagy része az elméleti anyag feldolgozásával telt és Spanyolországban is ennek aránya a legmagasabb.

Angliában és Magyarországon feladatok megoldása és megbeszélése dominált. Feladatmegoldásra Angliában fordították arányában a legtöbb időt, és nagyjából egyforma arányban volt jelen a másik három országban, míg a megoldások közös megbeszélése alig fordítottak időt Belgiumban és egyáltalán nem Spanyolországban.

A feladatok kitűzése számottevő időt vett igénybe a magyar és spanyol órákon, a házi feladatokra vagy valamilyen szervezésre fordított idő aránya mindenhol 10% alatt volt.

Munkaformák

Az alábbi grafikon az különböző munkaformák megoszlását mutatja az egyes országokban (szintén az összidők százalékában):

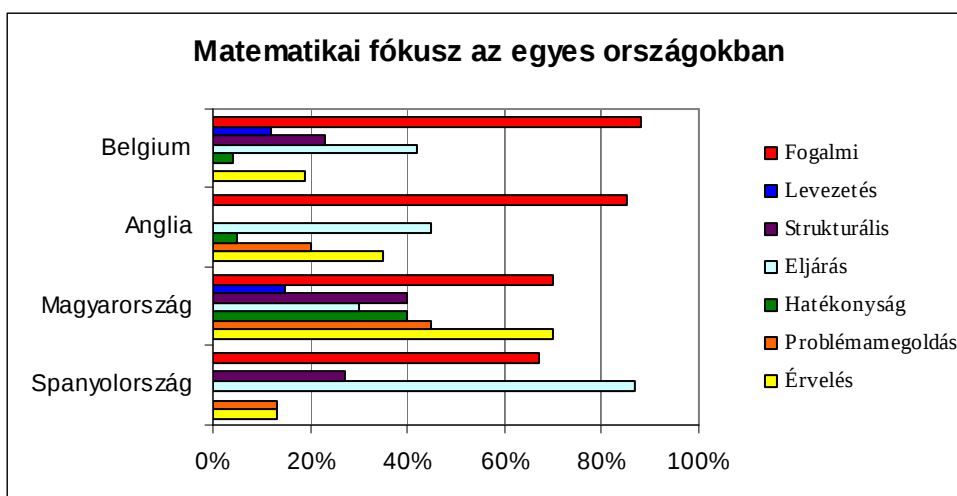


Mind a négy országban frontális munka töltötte ki az idő több mint 70%-át, különösen magas volt ennek a munkaformának az aránya Belgiumban (90%) és Magyarországon (85%).

A fennmaradó időt Spanyolországban teljes mértékben csoportmunka töltötte ki, a másik három országban legnagyobb részt egyéni munkával töltötték. Csoportmunka nem fordult elő sem Belgiumban sem Spanyolországban, míg páros munkára nem láttunk példát sem Angliában sem Magyarországon.

Matematikai fókusz

Az alábbi grafikon országonként mutatja, hogy a felvett órák epizódjainak hány százalékában fordultak elő az egyes fókuszfajták:



Mind a négy országban jelentős a fogalmakkal kapcsolatos munkát tartalmazó epizódok aránya, különösen Belgiumban és Angliában, ahol több mint az epizódok 80%-a tartalmazott ilyen elemet.

Levezetésre csak Belgiumban és Magyarországon került sor.

A strukturális elemet tartalmazó epizódok aránya Magyarországon a legmagasabb, Angliában ilyen epizód nem fordult elő.

Kiugróan magas a valamilyen eljárás megtanítását célzó epizódok aránya Spanyolországban (köszönhetően annak, hogy a tanulóknak a számítógép kezelését is el kellett sajátítaniuk), a legalacsonyabb arányt Magyarországon tapasztaltuk.

A hatékonysági elemet tartalmazó epizódok száma Magyarországon a legmagasabb, ilyen epizód Belgiumban és Angliában alig, míg Spanyolországban egyáltalán nem fordult elő.

Problémamegoldás szintén Magyarországon volt a legtöbb, Belgiumban erre nem láttunk példát. A magyar órákon kiemelkedően fontos szerepet játszott az érvelés (az epizódok 70%-ában fordult elő), a belga és különösen a spanyol órákon kevés ilyen epizód fordult elő.

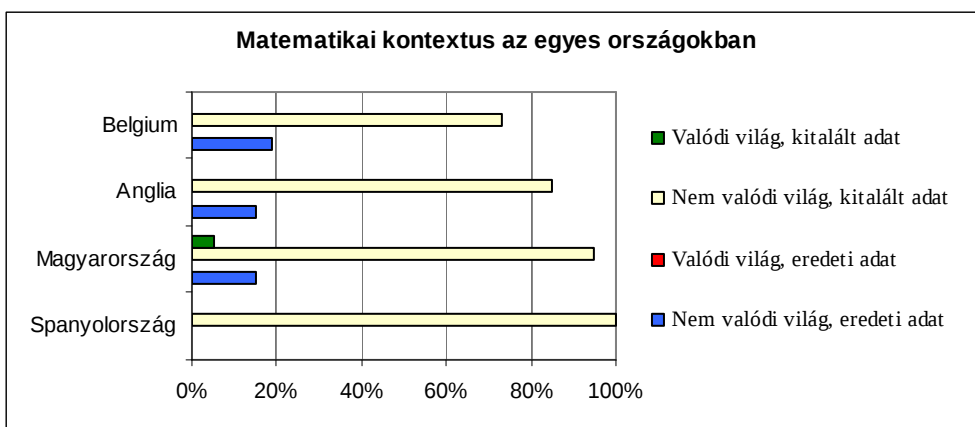
Összességében elmondhatjuk, hogy Belgiumban és Angliában a fogalmak tanítása mellett elsősorban eljárások (pl. jelölési konvenciók) tanítása játszotta a legfontosabb szerepet, de eközben Belgiumban összefüggések (struktúra) tanítására is sor került, míg Angliában nagyobb volt a problémamegoldást és érvelést tartalmazó epizódok aránya.

Matematikai fókusz tekintetében a magyar órák voltak a leggazdagabbak: Magyarországon a megfigyelt órák során mind a hét fókuszfajta előfordult (míg a többi országban 5-5), méghozzá a fogalmi és a levezetési fókusz kivételével mindegyik a legmagasabb arányban.

Spanyolországban az eljárások (többnyire számítógépes) tanítására esett a fő hangsúly.

Matematikai kontextus

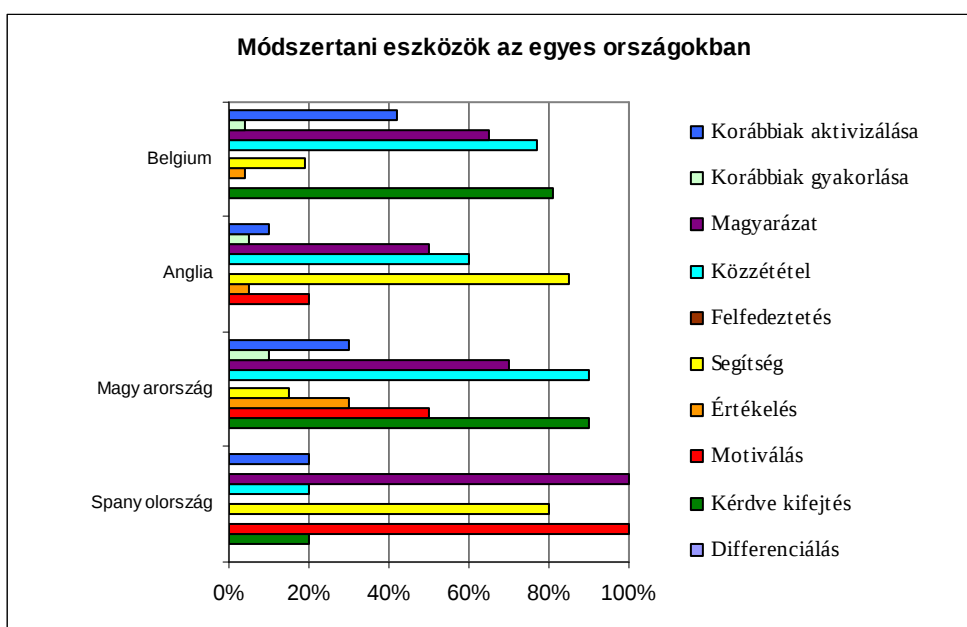
Az alábbi grafikon mutatja, hogy az egyes országokban a különböző matematikai kontextusfajták az epizódok hány százalékában fordultak elő:



A kizárólag „tisztán matematikai” (nem valódi világ, kitalált adat) ismereteket és feladatokat tartalmazó epizódok aránya mind a négy országban meghaladta a 70%-ot, Spanyolországban csak ez a kontextusfajta fordult elő. Valódi világgal kapcsolatos epizódot csak Magyarországon láthattunk, de ott is csak egyetlen epizódban.

Módszertani eszközök

Az alábbi grafikon országonként mutatja, hogy az egyes módszertani eszközök az epizódok hány százalékában voltak megfigyelhetők:



A megfigyelt órák során egyik országban sem fordult elő felfedeztetés vagy differenciálás.

Belgiumban a kérdeve kifejtés és az ehhez kapcsolódó tanulói válaszok (közzététel) fordultak elő leggyakrabban, jelentős mennyiségű tanári magyarázattal kísérve. A témához tartozó korábbi ismeretek aktivizálásának aránya is itt a legmagasabb. Figyelmet érdemel a motiválás szándékának teljes hiánya.

Angliában tanári segítség fordul elő a legtöbb epizódban (bár a későbbi megbeszélések során kiderült, hogy az angol pontozó a kérdeve kifejtést is tanári segítségnek ítélte, aminek aránya a grafikon által mutatott kép ellenére szintén elég magas volt). Ezt követi gyakoriságban – Belgiumhoz hasonlóan, bár kisebb mértékben – a közzététel és a tanári magyarázatok alkalmazása.

Magyarországon – Belgiumhoz hasonlóan, de annál is nagyobb arányban - a kérdeve kifejtés és az ehhez kapcsolódó közzététel dominál, jelentős mennyiségű tanári magyarázattal. Itt fordul elő egyedül számottevő arányban értékelés, és bár ennek aránya nem jelentős (10%), és az anyaghoz nem kapcsolódó korábban tanult ismeretek felelevenítése (korábbiak gyakorlása) is itt a legmagasabb. Korábban tanult, az anyaghoz tartozó ismeretek aktivizálása az epizódok 30%-ában fordult elő, ami Belgium mögött a második legmagasabb arány, motiválásra az epizódok 50%-ában került sor, ami Spanyolország mögött a második. Anglia mellett (ahol a kérdeve kifejtés módszere nincs feltüntetve, de valójában jelen volt) egyedül Magyarországon fordult elő a 10 általunk megfigyelt módszertani eszköz közül legalább 8.

Spanyolországban minden epizódban sor került tanári magyarázatra és motiválásra (bár vitatható, hogy önmagában a számítógép használata tartós motivációt jelent-e). A kérdeve kifejtés és közzététel aránya – a többi

országhoz képest – igen alacsony, korábbiak gyakorlására egyedül itt nem került egyáltalán sor.

6.2. Kvalitatív elemzés

A geometriatanítás általános céljai

„A környező világ leírása, megértése és értelmezése”

Közvetlenül a valódi világhoz kapcsolódó feladat összesen mindössze egy (magyar) epizódban fordult elő. Mindenhol történtek utalások a hétköznapi életre, például Angliában megemlézték a vasúti síneket mint példát párhuzamos egyenesekre, Belgiumban az osztálytermet mint téglatest alakú tárgyat, Spanyolországban a sokszögek definíciója kapcsán a tanár bemutatta néhány sokszög alakú tárgy képét. Összességében azonban a megfigyelt órákon ez a szempont mindenhol igen csekély mértékben volt jelen.

„Gazdag és változatos feladatkészlet biztosítása a tanulók számára”

Témájában és nehézségi szintjében a feldolgozott feladatanyag Magyarországon volt a legváltozatosabb, egyedül itt fordult elő számottevő problémamegoldás. Angliában és Belgiumban a fő hangsúly elnevezések és jelölések tanítására és gyakoroltatására esett, ezen belül Angliában a feladatok kitűzési formája, feldolgozásmódja változatos volt. Spanyolországban a feldolgozandó anyag és az ehhez kapcsolódó feladatok változatosak voltak, de nagy részüket a tanár oldotta meg, a tanulók többnyire a bemutatott eljárásokat próbálták követni.

„Megtanítani a diákokat sejtések megfogalmazására, bizonyítások készítésére, példák és ellenpéldák kitalálására”

Felfedeztető jellegű feladatok csak Spanyolországban fordultak elő, de vagy előre elárulta a tanár, hogy mit kellene felfedezni, vagy házi feladatként bízta a tanulókat kísérletezésre (melyek megbeszélésére a megfigyelt órákon nem került sor).

Tanulói levezetést tartalmazó epizód csak Belgiumban és Magyarországon fordult elő.

Érvelést tartalmazó epizód Belgiumban és Spanyolországban alig volt. Magyarországon az epizódok 70%-ában fordult elő érvelés, de itt is lépésről-lépésre erős tanári irányítással.

Ellenpélda keresésére egyedül Angliában bízta egy ízben a tanár a gyerekeket (a „minden szabályos sokszögnek vannak párhuzamos oldalai” állítással kapcsolatban), Magyarországon pedig a tanár mutatott néhány alkalommal ellenpéldát a tanulók rossz válaszaira.

„Eszközt teremteni más matematikai területeknek”

Túl azon, hogy a megfigyelt órákon tanult fogalmak, eljárások, jelölési konvenciók nyilván szükséges alapot és hasznos eszközt jelentenek a későbbi tanulmányokhoz, viszonylag kevés példát láttunk más matematikai területekkel való kapcsolatra.

A strukturális elemet tartalmazó epizódok aránya Magyarországon volt a legmagasabb (40%), ahol szerepeltek olyan geometriai jellegű feladatok, melyek megoldásához algebrai, számelméleti vagy kombinatorikai ismereteket kellett alkalmazni.

Belgiumban a terület- felszín- ill. térfogatszámítási feladatok kapcsán merült fel a megfelelő algebrai formulákkal való kapcsolat, Spanyolországban a Pitagorasz-tétellel kapcsolatban. Belgiumban a téglalap területéről tanultakat

alkalmazták a téglatest felszínének kiszámításához, Spanyolországban a Pitagorasz-tételt a téglalap átlója hosszúságának meghatározására.

Spanyolországban a számítógép és a felhasznált oktatóprogramok kezelésének mostani elsajátítása hasznos eszköz lehet a geometria más területein is a kísérletezéshez, sejtések kialakításához.

„Gazdagítani a tanulók matematikáról alkotott képét”

Az angol tanár a rutinfeladatok változatos kitűzési módjával és játékkal, a magyar tanár érdekes feladatokkal, játékkal és szemléltető eszközökkel, a spanyol tanár pedig az anyag előzetes ismertetésével és számítógépek használatával próbálta motiválni a tanulókat. Azt, hogy mindez milyen hatással volt a gyerekek matematikáról alkotott képére, nem tudjuk megítélni.

A sokszögek tanításának fogalmi vonatkozásai

Mind a négy országban az epizódoknak legalább kétharmadára jellemző volt a fogalmi fókusz, vagyis mindenhol nagy hangsúly esett a fogalmak tanítására. Különbség volt azonban az egyes országok között abban, hogy milyen fogalmi szinten dolgoztak, és milyen módon közelítették meg az előforduló fogalmakat.

Van Hiele szintek

Angliában szinte kizárólag a 0. szinten dolgoztak a gyerekek, időnként érintve az 1. szintet.

Belgiumban az 1. szint dominált, gyakran visszatértek a 0. szintre, de előfordultak a 2. szintet érintő kérdések is.

Magyarországon főleg a 2. szinten folyt a munka, miközben a tanár (pl. rávezető kérdésekkel, közbefűzött magyarázatokkal) a 3. szintet igyekezett elérhetővé tenni.

Spanyolországban - a feladatmegoldások megbeszélésének hiánya miatt - nehéz a felvételek alapján megítélni a gyerekek szintjét. A kitűzött feladatok hol az 1. hol a 2. szintet célozzák, dedukcióra csak a tanár részéről láttunk példát.

Tulajdonságok és definíciók

Magyarországon nem került sor új fogalmak vagy definíciók tanítására, a régebben tanultakat ismételték át, illetve alkalmazták különböző feladatok megoldása során. Spanyolországban számos definíció hangzott el, mindig tanári közlésként. Angliában és Belgiumban előfordult, hogy a gyerekeknek kellett megalkotniuk vagy módosítaniuk egy definíciót (Angliában pl. a párhuzamosság definícióját, Belgiumban a sokszög átlóját).

Egyik országban sem láttunk példát arra, hogy különbséget tettek volna egy-egy sokszögfajta definíciója és egyéb jellemző tulajdonságai között, vagy hogy megmutatták volna, hogy bizonyos tulajdonságokból hogyan következnek más tulajdonságok, bár Belgiumban a tanár – a négyszögek osztályozásáról szóló órán – említést tesz arról, hogy mit ért egy négyszög „alaptulajdonságain”.

Érdeemes megjegyezni – mint kulturális különbséget –, hogy Belgiumban és Spanyolországban exkluzív definíciók is előfordultak: Belgiumban az „általános” négyszögre, Spanyolországban az „általános” háromszögre. Szintén az exkluzív kategóriákban való gondolkodásra utal, hogy a belga tanár definiálta a téglatest magasságát (mint a leghosszabb élt).

Osztályozás

Angliában bevallottan nem volt cél a négyszögfajták osztályozása, és amikor felmerült az a kérdés, hogy rombusz-e a négyzet, a tanár kitért a kérdés tárgyalása elől, azonban a szeretem - nem szeretem játék során implicit módon jelen voltak osztályozási szempontok, a sokszögek tanításakor pedig megkülönböztetik a szabályos és a nem szabályos sokszögeket (de pl. a konvex – konkáv szempont nem jön elő).

Belgiumban a második (négyszögek osztályozásáról szóló) óra második epizódjában a tanár feltesz egy sor, a négyszögfajták kapcsolatára irányuló kérdést. Wenn-diagrammos ábrázolásra egyik országban sem került sor.

Magyarországon – 8. osztályról lévén szó – nem volt új anyag a 3- vagy 4-szögek osztályozása. A második órán azonban ismétlődő kérdések formájában felmerül, hogy két egyenlőszárú háromszög bizonyos szempontból egy osztályba kerül (egyenlőszárúak), más szempontból pedig nem (az egyik hegyesszögű, a másik tompaszögű). Ugyanebben az epizódban megbeszélik, hogy a paralelogramma is egyenlőszárú trapéz (ezért nevezzük a megfelelő alakzatot inkább húrtrapéznek).

A Spanyol órákon kizárólag háromszögekkel foglalkoznak. Az első órán közli a tanár a hegyes- derék- illetve tompaszögű, továbbá a szabályos, egyenlőszárú illetve „általános” háromszög definícióját, a gyerekek feladata példákat szerkeszteni számítógéppel az egyes esetekre. Ezen túlmenően osztályozásról nem esik szó.

Szimmetriák

A szimmetriák, mint osztályozási szempontok, egyik országban sem merültek fel. Szimmetriával kapcsolatos kérdés csak Angliában és Magyarországon fordult elő. Angliában előfordult olyan (a szabályos sokszögek átlóival

kapcsolatos) kérdés, ahol a gyerekek használhattak tükröt, Magyarországon pedig a feladatok egy részéhez ki kellett használniuk a bennük szereplő alakzatok szimmetriatulajdonságait.

Az ábrák fogalmi vonatkozásai

A különböző ábrák és/vagy szemléltetőeszközök – a témából adódóan – mindenhol fontos szerepet játszottak az órákon, alkalmazásuk azonban nem mindig segítette a megfelelő fogalmak kialakítását vagy a fogalmi szintek fejlődését.

Angliában minden feladat ábrához kapcsolódott, melyeket kizárólag kinézetük alapján ítélték meg. A különböző négyszögfajtákat szinte mindig standard pozícióban ábrázolták, és konkáv sokszögek (pl. konkáv deltoid sem) nem fordultak elő.

Belgiumban, amikor felmerült a kérdés, hogy az ábrán látható trapéz egyenlőszárú-e, a tanár arra bízta a gyerekeket, hogy méréssel ellenőrizzék, hozzáfűzve, hogy hány mm-es eltérés esetén tekinthető még egyenlőszárúnak. Többnyire nála is standard pozíciójú ábrák szerepeltek.

Magyarországon már történtek direkt utalások (a tanár részéről) az ábrák illetve szemléltetőeszközök megfelelő értelmezésével kapcsolatban, de itt is előfordult, hogy nem kérdőjelezték meg a látványt.

Spanyolországban a számítógép pótolta a szemmértéket (kiírta, hogy melyik oldal milyen hosszú). Gondot okozott viszont, ha nem sikerült pontosan beállítani a kívánt oldalhosszúságokat (egyenlőszárúnak tekinthető-e a háromszög, ha néhány tizedmilliméteres eltérés van a megfelelő oldalak között).

Összességében igen kevés utalás történt arra, hogy mire következtethetünk egy ábrából, és mire nem.

Bizonyítások

Szigorú értelemben vett formális bizonyítások (3. Van Hiele szint – dedukció) nem várhatók el a gyerekektől ebben az életkorban. Láttunk ugyan néhány példát levezetést tartalmazó epizódra, de ezekben vagy a tanár magyarázott el egy levezetést (pl. Belgiumban a téglatest felszínképletét vagy Spanyolországban a Pitagorasz-tételét), vagy a kérdve kifejtés módszerét alkalmazva a tanár vezette rá a gyerekeket egy összefüggés felfedezésére és igazolására (pl. Magyarországon a szabályos sokszögek átlóinak számára vonatkozó képletre). Tágabb értelemben vett bizonyítást, azaz érvelést (informális dedukció) tartalmazó epizód mind a négy országban előfordult, de különböző mértékben és szinten. A bizonyítási igény kialakítására; kétségek ébresztésére, viták provokálására vagy arra való biztatásra, hogy a gyerekek maguk tegyenek fel kérdéseket, nem, vagy csak kevés példát láttunk.

Módszertani eszközök

Mind az anyag strukturálásában, mind a módszertani eszközök megválasztásában számos különbséget figyelhetünk meg a négy tanár között.

Angliában a tanár a sokszögekkel – főleg négyszögekkel – kapcsolatos legalapvetőbb tudnivalókat igyekezett megtanítani egy gyenge képességű osztályban, elsősorban elnevezésekre és jelölésekre helyezve a fő hangsúlyt.

Ezt a viszonylag szűk területet viszont igen változatos formában dolgozta fel, és többféle módon motiválta a gyerekeket.

Belgiumban szintén nagy hangsúly esett az elnevezésekre és jelölésekre, de egy nagyobb, erősen strukturált anyagot dolgoztak fel. A tanár – angol kollégájával ellentétben – igyekezett feleleveníteni a korábban tanultakat, és azokra építeni, több ízben használt analógiákat egy-egy definíció vagy összefüggés elmagyarázása során. Fő módszere a kérdve kifejtés volt, bár a tanulóktól többnyire csak egyszavas válaszokat várt. Óravezetése erősen demonstratív volt, nem próbálta motiválni a gyerekeket.

Magyarországon – egy jó képességű 8. osztályban – a korábban tanult fogalmak elmélyítésére, feladat- és problémamegoldásban való alkalmazására esett a fő hangsúly. A kitűzött feladatok nagy része kapcsolt össze különböző matematikai területeket. A tanár fő eszköze itt is a kérdve kifejtés volt, és ezt itt kísérte a legnagyobb tanulói aktivitás (közzététel). Érdekes feladatokkal, szemléltetőeszközökkel és játékkal igyekezett motiválni a gyerekeket.

Spanyolországban a háromszögekkel kapcsolatos ismereteket dolgozták fel a tanár által írt elektronikus tankönyv alapján. Maga az elektronikus tankönyv jól felépített; elméleti anyagot, gyakorló- és felfedeztető feladatokat is magába foglaló, erősen strukturált anyagot tartalmaz. A megfigyelt órák felépítése meglehetősen hasonló volt egymáshoz: az óra elején a tanár előadást tartott (PowerPoint) a feldolgozásra szánt anyagból (a későbbi órák során többszöri visszatéréssel a korábbiakra), kitűzte a (számítógéppel megoldandó) feladatokat és bemutatta azok megoldási módját. Fő módszertani eszköze a tanári magyarázat és segítségnyújtás volt, a tanulók motiválására a számítógép használatát szánta. Mindeközben úgy tűnik, hogy

a számítógépek kizárólagos használata és az evvel kapcsolatos technikai problémák elterelték a tanulók figyelmét a matematikai tartalomról.

6.3. Záró gondolatok

A látott óratorozatok összehasonlítását és a tapasztalatok értelmezését megnehezíti, hogy ezek több szempontból nem tekinthetők tipikusnak.

Az angol tanár egy igen gyenge képességűnek ítélt csoportot tanított, míg a többi osztály esetén átlagos vagy annál jobb besorolást jelöltek meg az egyes országok kutatói. A magyar gyerekek 8. osztályosok voltak, így itt lényegében ismétlő - összefoglaló órákat láttunk, a másik három országban hetedikes órákat vettek fel, ahol új fogalmak, eljárások és összefüggések tanítására esett nagyobb hangsúly. A spanyol órák fő specialitása a számítógépes feldolgozásmód volt, itt a matematika anyag mellett a szoftverekkel kapcsolatos felhasználói ismereteket is el kellett sajátítaniuk a tanulóknak.

Felmerül az a kérdés is, hogy országonként egy-egy tanár mennyire tekinthető az illető ország reprezentánsának, tanítási stílusából és módszereiből mennyire vonhatunk le következtetéseket országának matematikatanítási hagyományaira, szokásaira nézve. A METE kutatócsoport tagjai igyekeztek minden országban olyan tanárokat választani, akikről úgy gondolták, hogy országuk „legjobb gyakorlatát” képviselik (az elérhetőségi kereteken belül). A négy témakör összesített adatainak elemzése során kiderült, hogy az egy országban de különböző témakörökben és különböző tanárokkal felvett óratorozatok a projektben vizsgált szempontokból meglehetősen hasonló képet mutatnak, és az országok közti főbb különbségek szinte minden témakörben ugyanazok (Andrews).

Az is valószínűsíthető, hogy ha egy tanár óráján megfigyelők ülnek bent, vagy videóra veszik azt, akkor ez befolyásolhatja módszereinek megválasztásában.

Számunkra talán a legérdekesebb kérdés, hogy milyen kép alakul ki az összehasonlítások tükrében a saját gyakorlatunkról.

A magyarországi matematikatanítással kapcsolatban gyakran hallhatjuk kritikaként (pl. Somfai 2002), hogy nem elég realisztikus, kevés a hétköznapi élettel kapcsolatos feladat, nem fektet súlyt a gyakorlati alkalmazásokra. Ez valószínűleg igaz, de mint a matematikai kontextusok összehasonlításánál láthattuk, a másik három ország esetében is ugyanez a helyzet.

Szintén gyakran elhangzik, hogy Magyarországon túlságosan dominál a frontális foglalkoztatás, kevés a differenciálás, nem fordítanak időt a felfedeztetésre, szegényes a motivációs eszköztár. Számomra is meglepő volt, hogy munkaformák tekintetében nem volt lényeges különbség a négy ország között, mindenhol frontális munka folyt az idő legalább 74%-ában, és differenciálás vagy felfedeztetés sehol nem fordult elő (bár lehetséges, hogy ebben szerepe volt annak, hogy az órákat videóra vették és ez befolyásolta a tanárokat). Ami a motivációt illeti, a megfigyelt órák során Belgiumban a tanár – némi nyomásgyakorlástól eltekintve – egyáltalán nem, Spanyolországban kizárólag a számítógépek használatával próbálta motiválni a gyerekeket. Érdekes vagy változatos feladatokat, eszközöket vagy játékokat csak az angol, és még nagyobb arányban a magyar tanár alkalmazott erre a célra.

Felmerül ezek után a kérdés, hogy akkor miben különbözik a magyar stílus más országokétól. Paul Andrews a METE projekt (mind a négy témakört) összefoglaló jelentésében a matematikai fókusz tekintetében erről ezt írja:

„A magyarországi matematikaórák abban különböztek legnagyobb mértékben az európai átlagtól, hogy nagyobb hangsúly esett az olyan magasabb rendű fókuszfajtákra, mint a matematikai hatékonyság és a matematikai struktúra, és kevesebb az eljárásokra”.

Ugyanitt, a módszertani eszközök elemzése során így ír Magyarországról:

„A magyarországi matematikaórákon (szignifikánsan) magasabb arányban fordultak elő kérde kifejtést, közzétételt, értékelést és motivációt tartalmazó epizódok. Az átlagosnál kisebb arányban fordult elő felfedeztetés, tanári segítség és differenciálás. ... Mindebből úgy tűnik, a magyar tanárok nyilvánvaló hagyományokkal rendelkeznek arról, hogy mit tegyenek az óráikon és mit ne. Abból, hogy a hangsúly a kérde kifejtésre, közzétételre és értékelésre esik, arra következtethetünk, hogy az egész osztályt egyszerre próbálják magasabb szintű gondolkodásra ösztönözni. Ezt az elképzelést támasztja alá az olyan stratégiák alacsonyabb aránya is, mint a tanári segítség és a differenciálás”.

Mindezek az összesített (országonként négy témakör, négy különböző tanár) adatokra vonatkoznak, de nem mondanak ellent az általam elemzett órákból leszűrhető tapasztalatoknak (A differenciálást vagy felfedeztetést tartalmazó epizódoknak a négy témakörre vonatkozó átlaga mindenhol 1 alatt volt.)

7. ÖSSZEFOGLALÁS

Dolgozatomban négy különböző országban videóra vett – geometriai témájú – órasorozatot elemzek és hasonlítok össze. A felvételek a METE (Mathematics Education Traditions of Europe) projekt keretében készültek és elemzésemhez is felhasználok a METE által kidolgozott eszközöket.

7.1. A sokszögek tanításának elméleti háttere, elemzési szempontok

Elemzésem során a következő szempontokat veszem figyelembe:

A geometriatanítás általános céljai

A geometriatanítás néhány lehetséges célját a következőképpen foglalja össze egy ICMI tanulmány:

- a környező világ leírása, megértése és értelmezése
- példa mutatása axiomatikus elméletre
- gazdag és változatos feladatkészlet biztosítása a tanulók számára
- megtanítani a diákokat sejtések megfogalmazására, bizonyítások készítésére, példák és ellenpéldák kitalálására
- eszközt teremteni más matematikai területeknek
- gazdagítani a tanulók matematikáról alkotott képét

Megvizsgálom, hogy ezek a célok mennyire valósultak meg.

A sokszögek tanításának fogalmi vonatkozásai

- Van Hiele szintek
- Definíciók és tulajdonságok (definíciók, osztályozás, szimmetriák)
- Bizonyítások
- Az ábrák fogalmi vonatkozásai

Módszertani eszközök

- Fogalmak és készségek elsajátítása
- A matematikai tartalom strukturálása
- Következtetési módok
- Eszközök használata az órákon

A METE (Mathematics Education Traditions of Europe) projekt eszközei

A METE az Európai Unió támogatásával létrejött kétéves (2003-2004) projekt, melynek célja öt európai ország matematikatanítási hagyományainak összehasonlítása, matematikatanítási módszereinek vizsgálata volt. A kutatásban résztvevő országok: Anglia, Belgium, Finnország, Magyarország és Spanyolország.

Dolgozatomban a METE projekt keretében videóra vett órák egy részét (a Finnországban felvett órák kivételével a 7-8. osztályokban rögzített geometriaórákat) elemzem, felhasználva a projekt során közösen kidolgozott eszközöket.

Kódlap (CS)

A kvantitatív elemzést szolgáló adatok gyűjtéséhez egy kódlapot (CS: coding scheeme) használtunk, amely három fő kategóriába sorolva tartalmazta megfigyelési szempontjainkat: matematikai fókusz, matematikai kontextus (kapcsolódik a valódi világhoz vagy nem, illetve eredeti adatokkal dolgoznak-e a tanulók vagy nem); módszertani eszközök. A matematikai fókusz alkategóriái: fogalmi, levezetés, strukturális, eljárás, hatékonyság, problémamegoldás, érvelés. A módszertani eszközök alkategóriái: korábbi ismeretek aktiválása, korábbi ismeretek gyakorlása, tanári magyarázat, gondolatok közzététele, felfedeztetés, tanári segítség, értékelés, motiválás, kérdve kifejtés, differenciálás.

Az órákat epizódokra bontottuk, ahol egy epizódnak tekintettük az órának azt a részét, melyen belül a tanár módszertani szándékai nem változnak. Minden felvett órához kitöltöttünk egy kódlapot, melyen epizódról epizódra bejelöltük, hogy szempontjaink közül melyek voltak megfigyelhetők az illető epizódban.

Szintézis-lap (LS)

Szintén minden órához elkészítettük az úgynevezett Reusser-sheet egy módosított változatát, a szintézis-lapot (LS: Lesson synthesis sheet), amely egy oldalra tömörítve ad képet az órán törtétekről. A lap tetején egy – az órára jellemző – fotó mellett az óra néhány fontos adata szerepel (iskola neve, tanár neve, osztály, dátum, az óra címe). Ezt két dupla soros idővonal követi, melyeken az óra menetének megfelelően percről percre színkódokkal jelöltük egyiken az órán folyó pedagógiai tevékenységfajtákat, másikon az

éppen megfigyelhető munkaformákat (osztálymunka, egyéni munka, páros munka, csoportmunka).

A következő pedagógiai tevékenységeket különböztettük meg: elmélet vagy fogalomépítés, feladatmegoldás, megoldások megbeszélése, probléma vagy feladat kitűzése, házi feladattal kapcsolatos tevékenység, feladattal kapcsolatos szervezés, egyéb szervezés.

7.2. Az elemzés főbb eredményei

Pedagógiai tevékenységek

Belgiumban az órák nagy része az elméleti anyag feldolgozásával telt és Spanyolországban is ennek aránya a legmagasabb. Angliában és Magyarországon feladatok megoldása és megbeszélése dominált. A megoldások közös megbeszélése alig fordítottak időt Belgiumban és egyáltalán nem Spanyolországban.

Munkaformák

Mind a négy országban frontális munka töltötte ki az idő több mint 74%-át, különösen magas volt ennek a munkaformának az aránya Belgiumban (90%) és Magyarországon (85%). A fennmaradó időt Spanyolországban teljes mértékben páros munka töltötte ki, a másik három országban legnagyobb részt egyéni munkával töltötték. Csoportmunka nem fordult elő sem Belgiumban sem Spanyolországban, míg páros munkára nem láttunk példát sem Angliában sem Magyarországon.

Matematikai fókusz

Mind a négy országban jelentős a fogalmakkal kapcsolatos munkát tartalmazó epizódok aránya. Belgiumban és Angliában a fogalmak tanítása mellett elsősorban eljárások (pl. jelölési konvenciók) tanítása játszott a legfontosabb szerepet, de eközben Belgiumban összefüggések (struktúra) tanítására is sor került, míg Angliában nagyobb volt a problémamegoldást és érvelést tartalmazó epizódok aránya. Matematikai fókusz tekintetében a magyar órák voltak a leggazdagabbak: Magyarországon a megfigyelt órák során mind a hét fókuszfajta előfordult (míg a többi országban 5-5), még hozzá a fogalmi és a levezetési fókusz kivételével mindegyik a legmagasabb arányban. Spanyolországban az eljárások (többnyire számítógépes) tanítására esett a fő hangsúly.

Matematikai kontextus

A kizárólag „tisztán matematikai” (nem valódi világ, kitalált adat) ismereteket és feladatokat tartalmazó epizódok aránya mind a négy országban meghaladta a 70%-ot, Spanyolországban csak ez a kontextusfajta fordult elő. Valódi világgal kapcsolatos epizódot csak Magyarországon láthattunk, de ott is csak egyetlen epizódban.

Módszertani eszközök

A megfigyelt órák során egyik országban sem fordult elő felfedeztetés vagy differenciálás.

Belgiumban a kérdve kifejtés és az ehhez kapcsolódó tanulói válaszok (közzététel) fordultak elő leggyakrabban, jelentős mennyiségű tanári magyarázattal kísérve, míg motiválás nem fordult elő.

Angliában tanári segítség fordul elő a legtöbb epizódban. Ezt követi gyakoriságban – Belgiumhoz hasonlóan, bár kisebb mértékben - a közzététel és a tanári magyarázatok alkalmazása.

Magyarországon is a kérdve kifejtés és az ehhez kapcsolódó közzététel dominál, jelentős mennyiségű tanári magyarázattal. Egyedül Magyarországon fordult elő a 10 általunk megfigyelt módszertani eszköz közül legalább 8.

Spanyolországban minden epizódban sor került tanári magyarázatra és motiválásra (bár vitatható, hogy önmagában a számítógép használata tartós motivációt jelent-e). A kérdve kifejtés és közzététel aránya – a többi országhoz képest – igen alacsony.

A geometriatanítás általános céljai

Közvetlenül a valódi világhoz kapcsolódó feladat összesen mindössze egy (magyar) epizódban fordult elő, de mindenhol történtek utalások a hétköznapi életre.

Témájában és nehézségi szintjében a feldolgozott feladatanyag Magyarországon volt a legváltozatosabb, Angliában és Belgiumban a fő hangsúly elnevezések és jelölések tanítására és gyakoroltatására esett. Spanyolországban a feldolgozandó anyag és az ehhez kapcsolódó feladatok változatosak voltak, de nagy részüket a tanár oldotta meg.

A matematika más területeivel kapcsolatot teremtő epizódok aránya Magyarországon volt a legmagasabb.

Az angol tanár a rutinfeladatok változatos kitűzési módjával és játékkal, a magyar tanár érdekes feladatokkal, játékkal és szemléltető eszközökkel, a

spanyol tanár pedig az anyag előzetes ismertetésével és számítógépek használatával próbálta motiválni a tanulókat.

A sokszögek tanításának fogalmi vonatkozásai

Mind a négy országban az epizódoknak legalább kétharmadára jellemző volt a fogalmi fókusz, vagyis mindenhol nagy hangsúly esett a fogalmak tanítására. Különbség volt azonban az egyes országok között abban, hogy milyen fogalmi szinten dolgoztak, és milyen módon közelítették meg az előforduló fogalmakat.

Angliában szinte kizárólag a 0. Van Hiele szinten dolgoztak a gyerekek, időnként érintve az 1. szintet.

Belgiumban az 1. szint dominált, gyakran visszatértek a 0. szintre, de előfordultak a 2. szintet érintő kérdések is.

Magyarországon főleg a 2. szinten folyt a munka, miközben a tanár a 3. szintet igyekezett elérhetővé tenni.

Spanyolországban a kitűzött feladatok hol az 1. hol a 2. szintet célozzák, dedukcióra csak a tanár részéről láttunk példát.

Magyarországon nem került sor új fogalmak vagy definíciók tanítására, a régebben tanultakat ismételték át, illetve alkalmazták különböző feladatok megoldása során.

Spanyolországban számos definíció hangzott el, mindig tanári közlésként.

Angliában és Belgiumban előfordult, hogy a gyerekeknek kellett megalkotniuk vagy módosítaniuk egy definíciót. Egyik országban sem láttunk példát arra, hogy különbséget tettek volna egy-egy sokszögfajta definíciója és egyéb jellemző tulajdonságai között, vagy hogy megmutatták volna, hogy bizonyos tulajdonságokból hogyan következnek más tulajdonságok.

Wenn-diagrammos ábrázolás vagy a szimmetriatulajdonságokra való utalás egyik országban sem fordult elő.

A különböző ábrák és/vagy szemléltetőeszközök – a témából adódóan – mindenhol fontos szerepet játszottak az órákon, alkalmazásuk azonban nem mindig segítette a megfelelő fogalmak kialakítását vagy a fogalmi szintek fejlődését, igen kevés utalás történt arra, hogy mire következtethetünk egy ábrából, és mire nem.

Módszertani eszközök

Mind az anyag strukturálásában, mind a módszertani eszközök megválasztásában számos különbséget figyelhetünk meg a négy tanár között.

Angliában a tanár a sokszögekkel kapcsolatos legalapvetőbb tudnivalókat igyekezett megtanítani egy gyenge képességű osztályban, elsősorban elnevezésekre és jelölésekre helyezve a fő hangsúlyt. Ezt a viszonylag szűk területet viszont igen változatos formában dolgozta fel, és többféle módon motiválta a gyerekeket.

Belgiumban szintén nagy hangsúly esett az elnevezésekre és jelölésekre, de egy nagyobb, erősen strukturált anyagot dolgoztak fel. A tanár óravezetése erősen demonstratív volt, nem próbálta motiválni a gyerekeket.

Magyarországon – egy jó képességű 8. osztályban – a korábban tanult fogalmak elmélyítésére, feladat- és problémamegoldásban való alkalmazására esett a fő hangsúly. A kitűzött feladatok nagy része kapcsolt össze különböző matematikai területeket. Érdekes feladatokkal, szemléltetőeszközökkel és játékkal igyekezett motiválni a gyerekeket.

Spanyolországban a háromszögekkel kapcsolatos ismereteket dolgozták fel a tanár által írt – jól felépített; elméleti anyagot, gyakorló- és felfedeztető feladatokat is magába foglaló – elektronikus tankönyv alapján. A megfigyelt órák felépítése meglehetősen hasonló volt egymáshoz: az óra elején a tanár előadást tartott (PowerPoint) a feldolgozásra szánt anyagból (a későbbi órák során többszöri visszatéréssel a korábbiakra), kitűzte a (számítógéppel megoldandó) feladatokat és bemutatta azok megoldási módját, a tanulók motiválására a számítógép használatát szánta.

8. SUMMARY

In my thesis I analyze and compare four series of geometry lessons which were recorded in four different European countries. The video records were taken as a part of the METE (Mathematics Education Traditions of Europe) project and as a part of my analysis I use tools developed by the project.

8.1. Theoretical background, tools for analysis

In my analysis I consider the following perspectives on teaching and learning polygons:

General objectives of teaching geometry

A set of possible aims of teaching geometry are provided in a discussion document for an ICMI study:

- To describe, understand and interpret the real world and its phenomena.
- To supply an example of axiomatic theory.
- To provide a rich and varied collection of problems and exercises for individual student activity.
- To train learners to make guesses, state conjectures, provide proofs and find out examples and counterexamples.
- To serve as a tool for other areas of mathematics.
- To enrich the public perception of mathematics.

Conceptual aspects of teaching polygons

- Van Hiele levels
- Definitions and properties (definitions, classification, symmetries)
- Proofs
- Conceptual aspects of drawings (visual images)

Didactic tools

- Methods of acquiring concepts and skills
- Structure
- Methods of reasoning (demonstration, induction, deduction)
- Materials used in the classroom

The tools of the METE (Mathematics Education Traditions of Europe) project

METE was a two year (2003-2004) project founded by the European Union with participants from five European countries: England, Belgium, Finland, Spain and Hungary. The aim of the project was a comparative study of the different ways in which mathematics is conceptualized and the different methods teachers use to present mathematics to learners of the age group 10-14. We collected data from live observations and from series of videotaped lessons on four standard topics and developed instruments for both qualitative and quantitative analysis.

I analyze the secondary school lessons (class 7. or 8.) on polygons (except the Finnish ones) and use the following tools:

Coding scheme (CS)

For quantitative analysis of the lessons we developed a coding scheme (CS) with three basic categories: mathematical focus, mathematical context (which considers on one hand whether the task is related explicitly to the real world and on the other hand the genuineness of the data on which the task is based), and didactics. We agreed on the following subcategories:

The subcategories of *mathematical focus* are conceptual, derivational, structural, procedural, efficiency, problem solving and reasoning. The subcategories of *mathematical context*: real world fabricated data, not real world fabricated data, real world genuine data, not real world genuine data. The subcategories of *didactics*: activating prior knowledge, exercising prior knowledge, explaining, sharing, exploring, coaching, assessing/evaluating, motivating, questioning, differentiation.

We divided the lessons into episodes and coded each subcategory episode by episode with 1 if it was present in the episode and with 0 if it was not present in the episode. We considered an episode as a period of the lesson while the teacher's didactic intentions are constant.

The lesson synthesis sheet (LS)

For qualitative analysis we used a lesson synthesis sheet (LS) based on the so called Reusser sheet. This sheet summarizes a lesson in one page. Beside a photo from the lesson and some details (country, school, class, teacher, date, topic and focus of the lesson) it contains two timelines to be colourcoded minute by minute according to the flow of the lesson. One timeline is for the pedagogic activities of the lesson (theory or conceptual development,

working on problems or tasks, reporting solutions to problems or tasks, introducing a problem or activity, homework-related activities, task-related management, non task-related management), the other timeline indicates the social activities (whole class activity, individual activity, paired activity, group activity).

The lesson synthesis sheet also contains a brief description of the lesson.

8.2. Main findings

Pedagogic activities

In Belgium and Spain most of the time was spent on theory or conceptual development. In England and Hungary working on problems and reporting solutions were the dominant activities. For discussing solutions hardly any time were spent in Belgium and none in Spain.

Social activities

Whole class activities dominate in all of the countries (more than 74% of the time in each of them) especially in Flanders (90%) and Hungary (85%). No group activity was observed in Flanders and Spain and no paired activity in England and Hungary. There was no individual activity during the Spanish lessons.

Mathematical focus

The ratio of episodes with conceptual focus is quite high in all the four countries. Beside that in England and Belgium the main focus is on

procedures (e.g. naming and signing), but while in Belgium there some episodes with structure, in England there were more episodes with problem solving and reasoning. In Hungary all the seven type of mathematical focus occurred (while in the three other countries only 5-5) and with the exception of conceptual and procedural in the highest rate. The main emphasis in Spain was on (mostly software related) procedures.

Mathematical context

The ratio of episodes containing only “pure mathematical” tasks (not real world, fabricated data) was above 74% in all the four countries, in Spain it was 100%. Problem connected to real world occurred only in Hungary but only in one episode.

Didactic tools

We could see no examples in either of the countries for exploration or differentiation.

In Belgium, questioning, sharing and explaining are the main didactical tools, while there was no motivation.

In England coaching is dominant, followed by sharing and explaining.

In Hungary questioning and sharing were the main tools with high proportion of explaining. Only in Hungary were observed the occurrence at least 8 of the 10 observed didactic tools.

In Spain explaining and motivating characterized all of the episodes (however it is questionable if the usage of computers provides motivation during all the lessons). The rate of questioning and sharing – compared with the other countries – is very low.

General objectives of teaching geometry

Problem connected to the real world was observed only in one (Hungarian) episode; however we could find some traces of referring to reality in all the four countries.

We could observe the widest variety of problems in Hungary concerning the difficulty level and topic. In Belgium and England the main emphasis was on naming and signing. In Spain some of the tasks were interesting but most of them were solved by the teacher.

The rate of episodes creating connections with other areas of mathematics was the highest in Hungary.

The English teacher motivated the children with various ways of posing (routine) tasks and a game; the Hungarian teacher with interesting problems, competitive task and with materials; the Spanish teacher with explaining the content of the following lessons and with using computers.

Conceptual aspects of teaching polygons

In all the four countries there was a great emphasis on teaching concepts. However there were differences in the conceptual levels and in the ways of delivering the concepts.

English students worked mostly on Van Hiele level 0, sometimes reaching level 1. In Belgium level 1 was dominant, sometimes returning level 0 and some questions touched level 2. In Hungary students worked mostly on level 2, while the teacher tried to push them towards level 3. In Spain the tasks

were aimed to level 1 or 2, but deduction occurred only from the part of the teacher.

In the Hungarian lessons there were no new concepts to acquire, they revisited and applied earlier knowledge while solving various problems. During the Spanish lessons many definitions could have been heard, always from the teacher. In Belgium and England sometimes the students created or modified a definition. We could observe no example of emphasizing the difference between the definition of a certain type of a polygon and the properties of it, or showing that how follows from some properties others properties.

Neither could we see examples of using Wenn diagrams, or symmetries for classification.

Drawings or visual images played quite naturally an important role in all of the lessons, but they did not always serve properly the conceptual development of the students. Hardly any references could have been seen to question: what can we conclude from a drawing and what not.

Didactic tools

Both in structuring the mathematical content and in selecting the appropriate didactic tools we could observe many differences between the four teachers.

In England the main emphasis (in a low ability class) was on the most basic facts about polygons, i.e. naming and signing. However this relatively narrow content area was covered in many different ways while trying to motivate children in various ways.

In Belgium a great emphasis was also on naming and signing, but the content was larger and strongly structured. The teacher applied a demonstrative way and did not try to motivate children.

In Hungary - in a high ability class 8 – the main emphasis was on revisiting and deepening earlier knowledge, e.g. by solving problems which connects different areas of mathematics. The teacher tried to motivate children with interesting problems, models and competitive task.

In Spain the main topic was triangles, based on the – strongly structured, containing tasks for practicing and exploring - electronic textbook, written by the teacher. The structure of the lessons was almost the same: at the beginning of the lesson the teacher held a PowerPoint lecture on the topic, introduced the tasks and presented the way of solutions. His way of motivation was the usage of computer.

Felhasznált irodalom

Alsina C. et al. (1987). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*,. Síntesis, Madrid

Ambrus András (1995). *Bevezetés s matematikadidaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest

Andrews, Paul (1994). *A snapshot of Hungarian teacher training*, Mathematics Teaching, 149, 2-5.

Andrews, P. (1995). *Return to Budapest*, Mathematics Teaching, 151, 23-25.

Andrews, P. (1997). *A Hungarian perspective on mathematics education: the results of a conversation with Sari Pálfalvi, Eva Szeredi, Vera Sztrokay and Judit Torok*, Mathematics Teaching, 161, 14-17.

Andrews, P. (1999). *Looking behind the rhetoric: some new insights from Hungary*, Mathematics Teaching, 167, 6-10.

Andrews, P., Carillo, J., Clement, N., De Corte, E., Depaepe, F., Fried, K., Hatch, G., Malaty, G., Op't Eynde, P., Pálfalvi, S., Sayers, J., Sorvali, T., Szeredi, É., Török, J., Verschaffel, L. (2004). *International comparisons of mathematics teaching: searching for consensus in describing opportunities for learning*, paper presented to discussion group 11, international comparisons of mathematics education, of the 10th International Congress on Mathematics Education (ICME-10) Copenhagen, Denmark

Andrews, P. (2004). *Mathematics Education Traditions of Europe (METE) Project: Report on the initial analysis of the quantitative data*, Unpublished

Andrews, P. (2005). *Mathematics Education Traditions of Europe (METE) project: Methodological perspectives and instrument development*. Paper presented in a Symposium on “The Mathematics Education Traditions of Europe (METE) project: Principles and outcomes” at the 11th Biennial EARLI Conference, Nicosia, Cyprus, August 23-27, 2005.

Carrillo, J. et al. (2004). *Report of the analysis of the Teaching of Polygons in Primary School*. Unpublished.

Clements, D.H. and Battista, M.T. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. In D.A. Grouws (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: NCTM & Macmillan.

Csapó Benő szerk. (2002). *Az iskolai tudás*, Osiris Kiadó, Budapest

Csapó Benő (2003). *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése*, Akadémiai Kiadó, Budapest

Falus Iván szerk. (1996). *Bevezetés a pedagógiai kutatás rendszerébe*, Keraban Kiadó, Budapest

Fuys, D. Geddes, D. and Tischer, R. (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Gedolf and Pierre M. van Hiele*, Columbus, OH: ERIC, ED 287 697.

Golhofer Erzsébet – Nahalka István szerk. (2001). *A pedagógusok pedagógiája*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Hatch, G. (1999). *Itt nem lenne ugyanaz!*, Új Pedagógiai Szemle XLIX évf. 10. szám 19-29

Kay, C. S. (1987) *Is a square a rectangle? The development of first grade students understanding of quadrilaterals with implications for the van Hiele theory of the development of geometric thought*. Dissertations Abstracts International. 47. 2934A (university Microfilms No. DA8626590)

Pálfalvi - Szeredi - Török (2005). A matematika tanulása, in: Tanuljunk, de hogyan!? 89-117, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Piaget J. (1928) *Judgement and reasoning in the child*. New York Harcourt, Brace and Co.

Pólya György (1977). *A gondolkodás iskolája* (IV. kiadás), Gondolat Kiadó, Budapest

Pólya György (1979). *A problémamegoldás iskolája I-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest

Senk S. I. (1989). *Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs.*, Journal for Research in Mathematics Education. 20. 309-521.

Skemp, R. R. (2005). *A matematikatanítás pszichológiája*, Edge Kiadó, Budapest

Somfai Zsuzsa (2002). *A matematika tantárgy helyzete a felsőtagozaton és a középiskolában*, Új Pedagógiai Szemle 2002/12, 99-115

Szendrei Julianna (2005). *Gondolod, hogy egyre megy?*, Typotex Kiadó, Budapest

Radnainé Szendrei Julianna – Török Judit (2005). *Az önreflexió szerepe és megoldási lehetőségei az egyéni fejlesztésben*, in: A tanítás jobbításáért 39-68, Haxel Kiadó, Budapest

Szeredi Éva – Török Judit (1992). *The Experiences of Two Hungarians in Didsbury*, Didsbury Ideas Vol. 2 No. 2 36-42, Manchester Polytechnic, Manchester

Szeredi Éva – Török Judit (1999). *Some Tools to Compare Students Performances and Interpret Their Difficulties in Algebraic Tasks* 12p in: Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik

Szeredi Éva – Török Judit (2004). *Report of the analysis of the Teaching of Polygons in Secondary School*. Unpublished.

Szeredi Éva – Török Judit (2005). *Teaching Polygons in Secondary School*, Paper presented in a Symposium on “The Mathematics Education Traditions

of Europe (METE) project: Principles and outcomes” at the 11th Biennial EARLI Conference, Nicosia, Cyprus, August 23-27, 2005.

Szeredi Éva – Török Judit (2007). *Teaching Polygons in the Secondary School: A Four Country Comparative Study*, Benyújtott és elfogadott cikk, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen (várható megjelenés 2007-ben)

Török Judit (1994). *Egy matematikatanár angliai tapasztalatai*, Új Pedagógiai Szemle XLIV évf. 7-8. szám, 83-92

Török Judit (2006). *The Mathematics Education Traditions of Europe (METE) Project*, Teaching Mathematics and Computer Science 4/2, 353-364, Debrecen

De Villiers, M. (1994). *The role of a hierarchical classification of quadrilaterals*. For the Learning of Mathematics

Villani V. et al. (1996). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. Discussion Document for an ICMI study. The International Commission on Mathematical Instruction.